Matemática Discreta

Prof. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky - PPGEP/UCS
e-mail: ldchiwiacowsky@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

Sumário

Definição

É uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada. É uma coleção "não-ordenada".

Normalmente, usamos letras maiúsculas para denotar conjuntos: A, B, C, X, Y, ..., e letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos: a, b, c, x, y, ...

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$,

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, quando o número de elementos é infinito.

1. Por extensão: listamos todos os elementos do conjunto de forma explícita.
   Exemplos:
   a) $A = \{a, e, i, o, u\}$;
   b) $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 148\}$, suficiente para se perceber a lei de formação;
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, quando o número de elementos é infinito.
2. Por compreensão: designamos as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto: $X = \{x/P(x)\}$, onde $P(x)$ representa a propriedade.
   Exemplo:
   a) $X = \{x/x$ é um inteiro par e $x > 0\}$

Se a é um elemento de um conjunto A, então escrevemos $a \in A$ e dizemos "a pertence ao conjunto A".
Se a não é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \notin A$ e dizemos "a não pertence ao conjunto A".
<u>Exemplos</u>:

a) Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, então $i \in A$ e $b \notin A$;

Se a é um elemento de um conjunto A, então escrevemos $a \in A$ e dizemos "a pertence ao conjunto A".
Se a não é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \notin A$ e dizemos "a não pertence ao conjunto A".
Exemplos:

a) Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, então $i \in A$ e $b \notin A$;
b) Seja $B = \{x/x$ é brasileiro$\}$, então $Neymar \in B$ e $Messi \notin B$.

Os conjuntos de maior importância para nós serão os conjuntos numéricos. Destes, alguns são especiais:

1. Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Ainda, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, onde $(*)$ indica a exclusão do número zero de qualquer conjunto.

Os conjuntos de maior importância para nós serão os conjuntos numéricos. Destes, alguns são especiais:

1. Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Ainda, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, onde $(*)$ indica a exclusão do número zero de qualquer conjunto.
2. Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
   Convenciona-se usar $(+)$ para exclusão dos negativos e $(-)$ para exclusão dos positivos.
   Assim:
   $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$,
   $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
   $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$.

3. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$): número racional é todo aquele que pode ser expresso na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero. Assim, $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*\}$.
Números racionais admitem representação decimal, exata ou periódica. Amite-se também para os racionais as notações $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, ...
Exemplos:
   a) $-\frac{9}{3} = -3 \in \mathbb{Q}$;
   b) $\frac{1}{3} = 0,3333 \in \mathbb{Q}$;
   c) $\frac{14}{2} = 7 \in \mathbb{Q}$;
   d) $\frac{1}{4} = 0,25 \in \mathbb{Q}$;
   e) $-\frac{15}{8} = -1,875 \in \mathbb{Q}$.

4. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$): é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Estes números admitem representação decimal não exata e não periódica.

<u>Exemplos</u>:

a) $\pi = 3,14159265... \in \mathbb{I}$;
b) $e = 2,7182818... \in \mathbb{I}$;
c) $\sqrt{2} = 1,4142135624... \in \mathbb{I}$.

4. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$): é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Estes números admitem representação decimal não exata e não periódica.
Exemplos:
   a) $\pi = 3,14159265... \in \mathbb{I}$;
   b) $e = 2,7182818... \in \mathbb{I}$;
   c) $\sqrt{2} = 1,4142135624... \in \mathbb{I}$.

5. Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$): número real é qualquer número racional ou irracional. Admite-se também as notações $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, ...
Exemplos:
   a) $3 \in \mathbb{R}$;
   b) $\pi \in \mathbb{R}$;
   c) $-1,8 \in \mathbb{R}$;
   d) $0,3333... \in \mathbb{R}$;
   e) $\frac{4}{5} \in \mathbb{R}$.

6. Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$): são números cuja forma algébrica é $a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

Exemplos:

a) $3 + \sqrt{-16} = 3 + 4i \in \mathbb{C}$;
b) $-7 + \sqrt{-25} = -7 + 5i \in \mathbb{C}$;
c) $\sqrt{-9} = 0 + 3i \in \mathbb{C}$;
d) $2 = 2 + 0i \in \mathbb{C}$.

1. Considere os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Verifique qual (ou quais) dos conjuntos citados pertence cada um dos números:
   - a) $\sqrt{4}$
   - b) $\sqrt[3]{-5}$
   - c) $\frac{1}{6}$
   - d) -2
   - e) $\sqrt{-2}$
   - f) $0,3$
   - g) $3,21545454...$
2. Complete corretamente, com o símbolo $\in$ ou $\notin$, conforme o caso, cada enunciado abaixo:
   - a) -15______$\mathbb{Q}$
   - b) $\sqrt[5]{-1}$______$\mathbb{R}$
   - c) $\sqrt{5}$______$\mathbb{Q}$
   - d) π______$\mathbb{R}$

3. Assinale V ou F:
   - a) $-4 \in \mathbb{N}$
   - b) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
   - c) $0 \in \mathbb{Q}_-$
   - d) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_+$
   - e) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$
   - f) $-2,1313... \in \mathbb{Q}$
   - g) $\frac{4}{7} \in \mathbb{Q}_+^*$
   - h) $-8 \in \mathbb{R}_+^*$
4. Dados dois números a e b tais que $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $b \notin \mathbb{Q}$, associe V ou F a cada afirmação:
   - a) $(a + b) \in \mathbb{Q}$
   - b) $(a \cdot b) \notin \mathbb{Q}$
   - c) $b^2 \in \mathbb{Q}$
   - d) $a^2 \in \mathbb{Q}$
   - e) $(a - b) \notin \mathbb{Q}$
   - f) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

5. Descreva cada conjunto a seguir, listando seus elementos:
   a) $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 6\}$
   b) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 4\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{N} / x$ é par e $x < 15\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + x - 6 = 0\}$
   e) $E = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 3\}$
   f) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* / -2 < x < 2\}$
6. Descreva cada conjunto a seguir através de uma propriedade característica:
   a) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$
   b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
   c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   d) $D = \{-3, 3\}$

O **conjunto vazio** é um conjunto que não possui elementos e é denotado por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.
Exemplo: $X = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 3\}$.

O **conjunto unitário** é um conjunto constituído por um único elemento.
Exemplo: $X = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 5\}$.

O **conjunto universo** é o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando em um determinado contexto. É denotado pelo símbolo U.
Exemplos:

a) Se $U = \mathbb{N}$, então $x + 5 = 2$ não tem solução,

b) Se $U = \mathbb{Z}$, então a equação $x + 5 = 2$ tem como solução $x = -3$.

Se todo o elemento de um conjunto A é também um elemento de um conjunto B, dizemos que "A é um subconjunto de B" ou que "A está contido em B", e escrevemos: $A \subseteq B$.
Quando $A \subseteq B$ podemos escrever também $B \supseteq A$ e lemos "B contém A".
Se A não for subconjunto de B, então escrevemos $A \nsubseteq B$, ou ainda $B \nsupseteq A$. Isto significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.
Exemplos:

a) Sejam $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 5\}$, temos $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ mas $B \nsubseteq A$;
b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$;
c) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{6, 2, 4\}$.

Propriedades:

1. Para todo conjunto A, temos $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;
2. Para todo conjunto A, $A \subseteq A$;
3. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Observação

1. $\in$ e $\notin$ são relações entre elemento e conjunto;
2. $\subseteq$ e $\nsubseteq$ são relações entre conjunto e conjunto.

Pertinência $\times$ Inclusão: Os elementos de um conjunto podem ser conjuntos. Portanto, atenção aos conceitos de pertinência e inclusão

Exemplo: Seja $S = \{a, b, c, d, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}\}$. Então:

a) $\{a\} \notin S$, mas $\{a\} \subseteq S$;
b) $\emptyset \in S$ e $\emptyset \subseteq S$;
c) $\{0\} \in S$ e $\{1, 2\} \in S$;
d) $\{a, b, c, d\} \notin S$, mas $\{a, b, c, d\} \subseteq S$.

Dois conjuntos A e B são iguais se cada elemento pertencente a A também pertencer a B e vice-versa, isto é, $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplos:

a) $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$;

b) $\{1, 2, 4\} = \{1, 2, 2, 2, 4, 4\}$;

c) $\{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x < 3\}$.

Exercícios da apostila “1. Teoria dos Conjuntos”, página 7.

Álgebra de Conjuntos

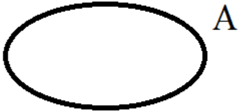
Definição

Uma álgebra é constituída de operações definidas sobre um conjunto. A Álgebra de Conjuntos é constituída por operações definidas para todos os conjuntos.

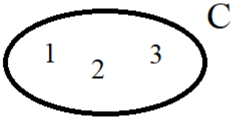
Podemos representar conjuntos e suas operações por meio de figuras geométricas (elipses, retângulos, círculos, ...) chamadas “Diagramas de Venn”. Em geral, o conjunto universo U é representado por um retângulo e os demais conjuntos por círculos, elipes, etc.

Exemplos:

a) Um dado conjunto A

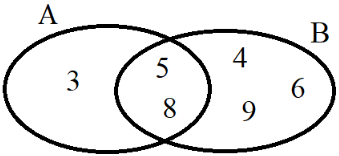


b) $C = \{1, 2, 3\}$



Exemplos:

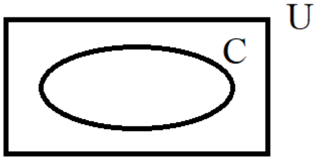
c) $A = \{3, 5, 8\}$ e $B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$



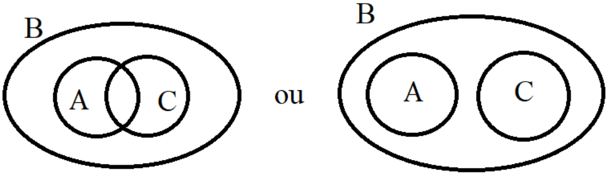
d) $A \subseteq B$

Exemplos:

e) $C \subseteq U$



f) $A \subseteq B$ e $C \subseteq B$



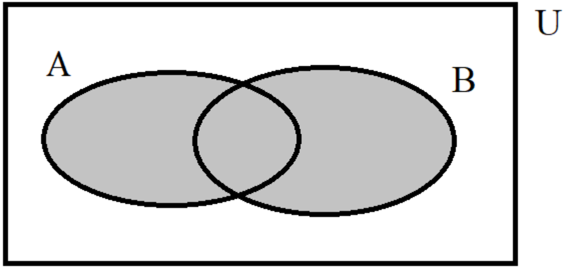
Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 24.

Álgebra de Conjuntos

Operação União

Sejam A e B conjuntos. A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$



Exemplos:

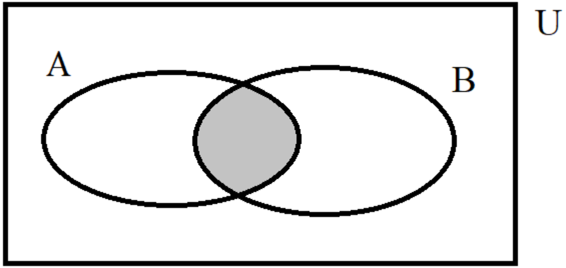
1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$ d) $B \cup B$ e) $(A \cup B) \cup C$ f) $A \cup (B \cup C)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 2 = x\}$, determine $A \cup B$.
3. Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine: a) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} \cup \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing \cup \varnothing$ b) $U \cup \varnothing$ c) $U \cup A$ d) $U \cup U$

Propriedades da Operação de União:

1. Elemento Neutro: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
2. Idempotência: $A \cup A = A$
3. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$
4. Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Sejam A e B conjuntos. A intersecção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de elementos que pertencem a A e a B, simultaneamente:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $B \cap C$ d) $B \cap B$
   e) $A \cap (B \cap C)$ f) $(A \cap B) \cup C$ g) $(A \cup C) \cap B$ h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = x\}$, determine $A \cap B$.
3. Considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine: a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing \cap \varnothing$ b) $U \cap \varnothing$ c) $U \cap A$ d) $U \cap U$

Propriedades da Operação de Intersecção:

1. Elemento Neutro: $A \cap U = U \cap A = A$
2. Idempotência: $A \cap A = A$
3. Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$
4. Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

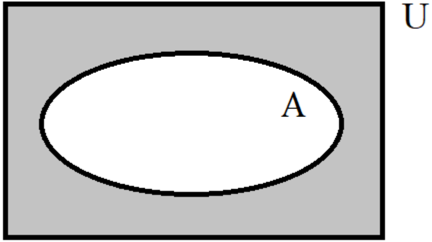
Propriedades Envolvendo União e Intersecção:

1. Distributividade da $\cap$ sobre a $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributividade da $\cup$ sobre a $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 26.

Suponha o conjunto universo U. O complemento de um conjunto $A \subseteq U$, denotado por $\sim A$ (ou $\overline{A}$, A^C, A') é o conjunto dos elementos que estão em U mas não pertencem a A:

$$\sim A = \overline{A} = A^C = A' = \{x \in U / x \notin A\} = U \backslash A$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $\sim A = \overline{A}$ b) $\sim B = \overline{B}$ c) $\sim(A \cap C)$ d) $\sim(A \cup B)$ e) $\sim\,\sim C$
2. Suponha o conjunto universo $U = \mathbb{N}$. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Determine $\sim A$.
3. Para qualquer conjunto universo U, determine: a) $\sim\varnothing$ b) $\sim U$
4. Suponha o conjunto $\mathbb{R}$ como conjunto universo. Determine:
   a) $\sim\mathbb{Q}$ b) $\sim\mathbb{I}$
5. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $A \cup \sim A$ b) $A \cap \sim A$

Propriedades de De Morgan:

1. $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \Leftrightarrow A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$
2. $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$

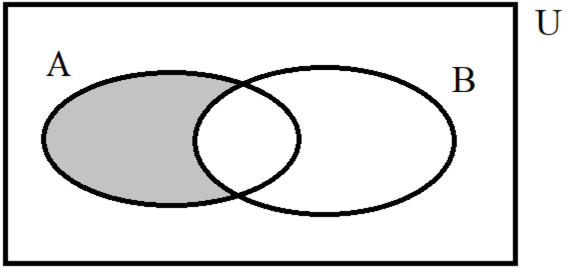
Exemplos:

6. Com base no exemplo (1) anterior, verifique:

   a) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ b) $\sim(A \cap C) = \sim A \cup \sim C$

A diferença entre os conjuntos A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = A \backslash B$$

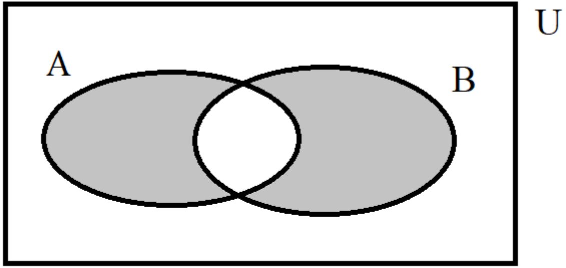


Exemplos:

1. Dados os conjuntos $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$, determine:
   a) $A - C$ b) $B - C$ c) $A - B$ d) $C - A$
   e) $\sim(B - C)$ f) $(A \cup B) - C$ g) $(\sim B - A) \cup C$ h) $\sim(B \cap C) - (A \cup B)$
2. Suponha os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$.
   Determine: a) $A - B$ b) $B - A$
3. Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Determine:
   a) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{R} - \mathbb{I}$ c) $\mathbb{Q} - \mathbb{I}$
4. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $\varnothing - \varnothing$ b) $U - \varnothing$ c) $U - A$ d) $U - U$

A diferença simétrica dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A mas não em B, ou que estão em B mas não em A:

$$A \oplus B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} = A \ominus B$$



Exemplos:

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine $A \oplus B$.
2. Para qualquer conjunto universo U e qualquer $A \subseteq U$, determine:
   a) $A \oplus A$ b) $A \oplus U$ c) $\varnothing \oplus A$
3. Com o uso de Diagramas de Venn, mostre que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Propriedades:

1. Distributividade da intersecção em relação à diferença simétrica:
   $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
2. $A \oplus B = \sim A \oplus \sim B$

Exercícios da apostila "4. Álgebra de Conjuntos", página 30.

Definição

Um Conjunto é Finito quando o processo de contagem de seus elementos chega ao fim. Neste caso, dizemos que um conjunto finito é aquele que possui exatamente n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}$.

A notação $n(A)$ ou $|A|$ indicará o número de elementos de um conjunto finito A.

Se A e B são dois conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ também são finitos:

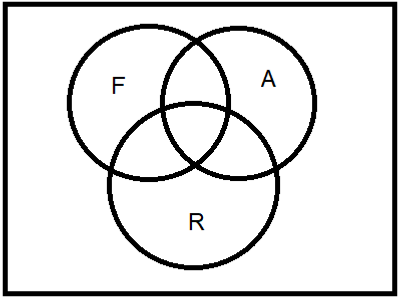
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Para três conjuntos A, B e C, finitos, essa relação será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exemplo: Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo: 65 estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam os três idiomas.

a) Determine o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas;
b) Preencha o Diagrama de Venn com o número correto de estudantes.



Para um conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.
Se A é finito, então $\mathcal{P}(A)$ também é, e o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é dador por

$$n\mathcal{P}(A) = 2^{n(A)}$$

Exemplo: Suponha $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$:

Exercícios da apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 34.

Exercícios

1. Determinar o conjunto X tal que:
   i. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$
   ii. $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$
   iii. $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$
2. Seja $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$, indique V ou F nos itens abaixo:
   a) $1 \in A$ b) $2 \in A$ c) $\varnothing \subseteq A$ d) $\{1, 2\} \subseteq A$
3. José Carlos e Marlene são os pais de Valéria. A família quer viajar nas férias de julho. José Carlos consegue tirar férias na empresa do dia 2 ao dia 28. Marlene obteve licença no escritório de 5 a 30. As férias de Valéria na escola vão de 1 a 25. Durante quantos dias a família poderá viajar sem faltar às suas obrigações?

Exercícios

4. Em uma classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 gostam de História. O número de alunos desta classe que gostam de Matemática e História é:
   a) exatamente 16 b) exatamente 10 c) no máximo 6
   d) no mínimo 6 e) exatamente 18
5. Em uma pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 destas pessoas não usam o produto B e que 2 destas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B?

Exercícios

6. Considere os conjuntos a seguir, considerando o conjunto universo para este problema como sendo o conjunto de todos os quadriláteros:
   - A = conjunto de todos os paralelogramos;
   - B = conjunto de todos os losangos;
   - C = conjunto de todos os retângulos;
   - D = conjunto de todos os trapézios.

   Usando **apenas** os símbolos x, A, B, C, D, $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $=$, $\neq$, $\cup$, $\cap$, $\sim$, $\varnothing$, $($, $)$, escreva as sentenças a seguir em notação de conjuntos:

   a) O polígono x é um paralelogramo, mas não é um losango;
   b) Existem outros quadriláteros além dos paralelogramos e dos trapézios;
   c) Tanto retângulos quanto losangos são paralelogramos.

Exercícios - Soluções

1. Vamos analisar as conclusões possíveis de cada item:
   i. $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow$ com certeza o elemento e pertence a X, enquanto os elementos a, b, c e d podem ou não pertencer ao conjunto X;
   ii. $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\} \Rightarrow$ com certeza os elementos a e e pertencem a X, enquanto os elementos c e d podem ou não pertencer ao conjunto X;
   iii. $\{b, c, d\} \cap X = \{c\} \Rightarrow$ com certeza o elemento c pertence a X, enquanto os elementos b e d não pertencem ao conjunto X.

   Assim, podemos afirmar que o conjunto é definido como $X = \{a, c, e\}$

Exercícios - Soluções

2. a) V b) F c) V d) F
3. Podemos assumir, para cada membro da família, um conjunto formado pelas datas em que o respectivo membro estará de férias. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{JC} &= \{02/07, 03/07, \ldots, 27/07, 28/07\}; \\ \text{M} &= \{05/07, 06/07, \ldots, 29/07, 30/07\}; \\ \text{V} &= \{01/07, 02/07, \ldots, 24/07, 25/07\}. \end{aligned}$$

   Precisamos calcular o número de elementos da intersecção dos três conjuntos, isto é $n(JC \cap M \cap V)$. Para tanto, podemos construir o respectivo conjunto e contabilizar o número de elementos. Assim, temos:
   $JC \cap M \cap V = \{05/07, 06/07, \ldots, 24/07, 25/07\} \Rightarrow n(JC \cap M \cap V) = 21.$

Exercícios - Soluções

4. Caso seja assumido que todos os 30 alunos presentes na turma gostam de pelo menos uma disciplina, teríamos:

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 30 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 30 = 6;$$

ou seja, exatamente 6 alunos gostam tanto de Matemática quanto de História. Porém, se existir na turma um aluno que não gosta nem de Matemática nem de História? Neste caso, teremos $n(M \cup H) = 29$. Destes 29, quantos alunos gostam tanto de Matemática quanto de História?

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 29 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 29 = 7.$$

Exercícios - Soluções

Agora, se existirem na turma dois alunos que não gostam nem de Matemática nem de História? Neste caso, teremos $n(M \cup H) = 28$. Destes 28, quantos alunos gostam tanto de Matemática quanto de História?

$$n(M \cup H) = n(M) + n(H) - n(M \cap H) \Rightarrow 28 = 16 + 20 - n(M \cap H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(M \cap H) = 16 + 20 - 28 = 8.$$

De forma geral, temos que avaliar a condição $n(M \cup H) \leq 30$. Para determinar o número de alunos que gostam tanto de Matemática quanto de História para esta condição, devemos substituir a definição de $n(M \cup H)$ na expressão da condição, obtendo:

$$n(M \cup H) \leq 30 \Rightarrow n(M) + n(H) - n(M \cap H) \leq 30 \Rightarrow 16 + 20 - n(M \cap H) \leq 30 \Rightarrow$$

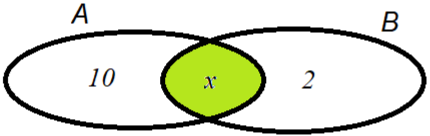
$$\Rightarrow n(M \cap H) \geq 16 + 20 - 30;$$

teremos então $n(M \cap H) \geq 6$, ou seja, no mínimo 6 (item d).

Exercícios - Soluções

5. Com base nas informações do enunciado, podemos escrever:
   - $n(A \cup B) = 15$
   - $n(A - B) = 10$
   - $n(B - A) = 2$
   - $n(A \cap B) = x$

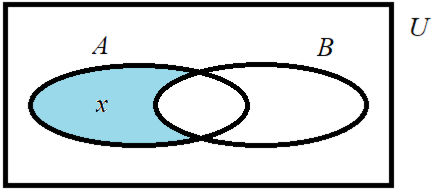
   Representando por um Diagrama de Venn, temos:



   Portanto, $n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) - n(B) = 15 - 10 - 2 \Rightarrow n(A \cap B) = 3.$

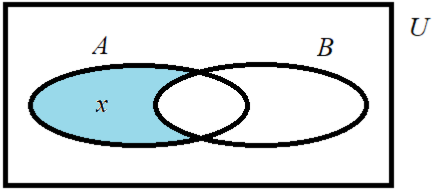
Exercícios - Soluções

6. Para cada item, recomenda-se a construção do Diagrama de Venn correspondente para facilitar a interpretação:
   a) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

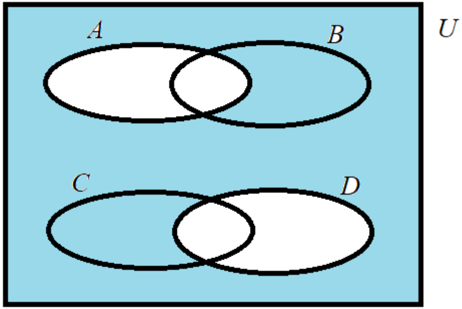
6. Para cada item, recomenda-se a construção do Diagrama de Venn correspondente para facilitar a interpretação:
   a) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $x \in (A\cap \sim B)$ ou $x \in (A \cap \bar{B})$

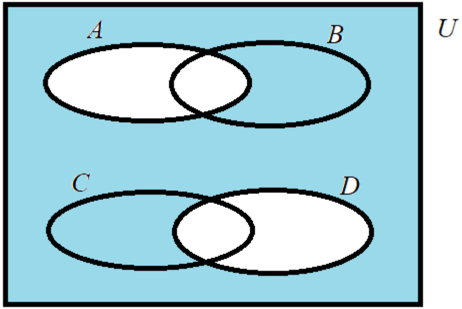
Exercícios - Soluções

b) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

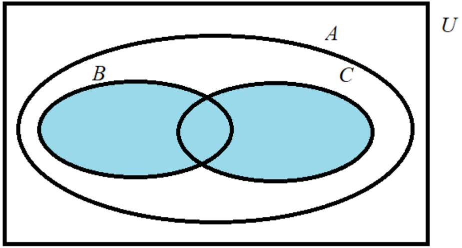
b) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $\sim(A \cup D) \neq \varnothing$

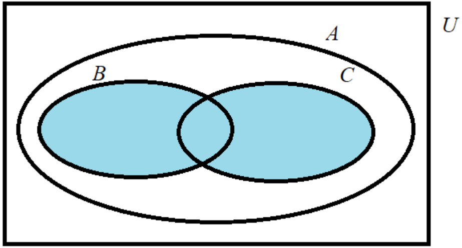
Exercícios - Soluções

c) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Exercícios - Soluções

c) Conforme a situação descrita, podemos representá-la pelo seguinte diagrama:



Portanto, temos a sentença: $(B \cup C) \subseteq A$

Produto Cartesiano

Definição

Sejam dois conjuntos arbitrários A e B. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, é chamado de **produto cartesiano dos conjuntos A e B**. Indicamos por $A \times B$ e lemos “A cartesiano B”. Assim: $A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$.

Denotamos o produto cartesiano de um conjunto A por ele mesmo como $A \times A = A^2$.

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B =$

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A =$

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B =$

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$
b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$
c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$
d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$
e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$
f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

h) $A \times (B \times C) =$

Produto Cartesiano

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, temos:

a) $A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$

b) $B \times A = \{(a, a), (b, a)\}$

c) $B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

d) $C \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

e) $A^2 = A \times A = \{(a, a)\}$

f) $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

g) $(A \times B) \times C = \{(a, a), (a, b)\} \times \{0, 1, 2\} =$
$\{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$

h) $A \times (B \times C) = ???$

Produto Cartesiano

Observações:

- $A \times B \neq B \times A$ (não é comutativo)
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ e $n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$
- $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (não é associativo)

Exercícios: Apostila “4. Álgebra de Conjuntos”, página 36.

UCS

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL