Álgebra de Boole

Álgebra de Boole Binária

- A Álgebra de Boole binária – através do recurso à utilização de funções booleanas (ou funções lógicas) – é a principal teoria de suporte às metodologias de síntese e análise de circuitos digitais.

- Utiliza variáveis binárias, i.e., que só podem assumir um de dois valores:
  {0,1}; {Low,High}; {True,False}; etc.

- Às variáveis Binárias também se dá o nome de variáveis Lógicas ou Booleanas

Álgebra de Boole

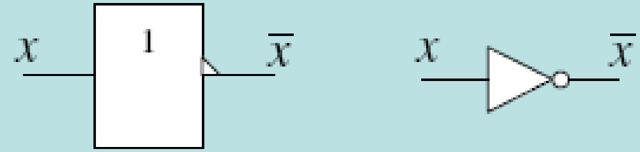
Álgebra de Boole Binária

Negação (NOT)

- Das funções apresentadas, a Negação, Complemento, ou NOT, é a mais importante, e caracteriza-se por transformar uma afirmação Verdadeira numa Falsa (e vice-versa)
- Para além da expressão algébrica e da tabela de verdade, a negação pode ser graficamente representada por um dos seguintes símbolos lógicos:

$$f(x) = \overline{x}$$

NOT



- Dupla Negação: $\overline{\overline{x}} = x$
- Demonstração do teorema da dupla negação por indução completa:

X	$\overline{X}$	$\overline{\overline{X}}$
0	1	0
1	0	1

Álgebra de Boole

Álgebra de Boole Binária

Funções de duas variáveis

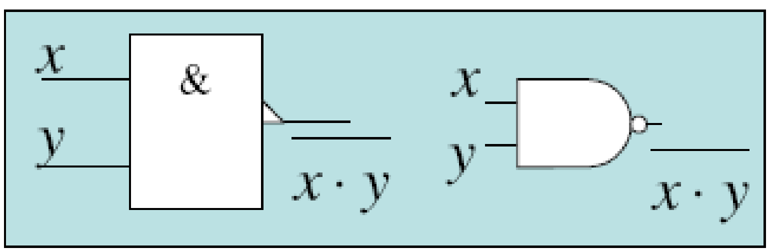
- NAND (AND negado), NOR (OR negado) e XOR (OU-Exclusivo):

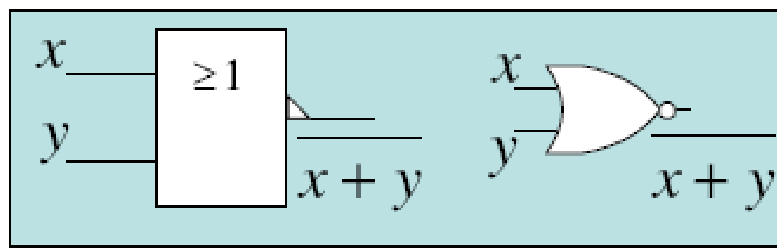
NAND

x	y	$\overline{x.y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

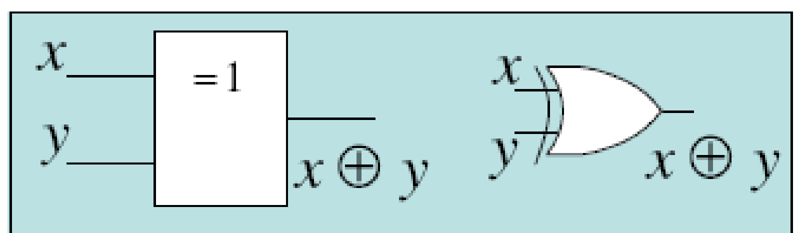
x	y	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0





XOR

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Álgebra de Boole Binária

Propriedades Básicas da Álgebra de Boole Binária

$x+0=x$	$x \cdot 1 = x$
$x+1=1$	$x \cdot 0 = 0$
$x+x=x$	$x \cdot x = x$
$x+\overline{x}=1$	$x \cdot \overline{x} = 0$

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

$$x \oplus y = (x+y) \cdot (\overline{x}+\overline{y})$$

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

(XOR)

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \oplus y = x \oplus \overline{y}$$

$x+y=y+x$	$x \cdot y = y \cdot x$	**Comutatividade**
$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	**Associatividade**
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	Só vale para a base binaria $x + y \cdot z = (x+y) \cdot (x+z)$	**Distributividade**
$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	**DeMorgan**
$x \cdot y + x \cdot \overline{y} = x$	$(x+y) \cdot (x+\overline{y}) = x$	**Adjacência**

Álgebra de Boole Binária

Mais teoremas...

- **Absorção**

y = (A+B) + C*(A+B) => y = A+B

$$x \cdot (x + y) = x \qquad\qquad x + x \cdot y = x$$

- **Redundância**

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y \qquad\qquad x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

- **Consenso:**

$$x \cdot y + y \cdot z + \overline{x} \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\overline{x} + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$$

Álgebra de Boole Binária

Para modelar o sistema se aplica valores todos os valores possíveis às entradas e monitora-se a saída.

Representação de Funções

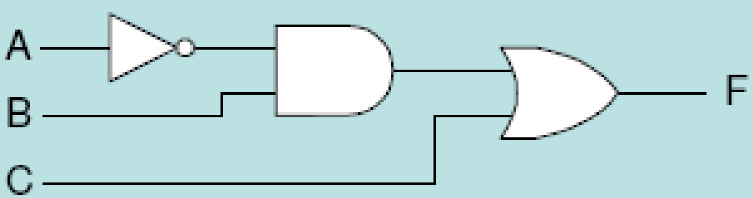
- **Por função Booleana:**

$$f = \overline{a}\,b + c$$

$\bar{a}b$ e c são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

- **Por Circuito Lógico (ou Logigrama):**



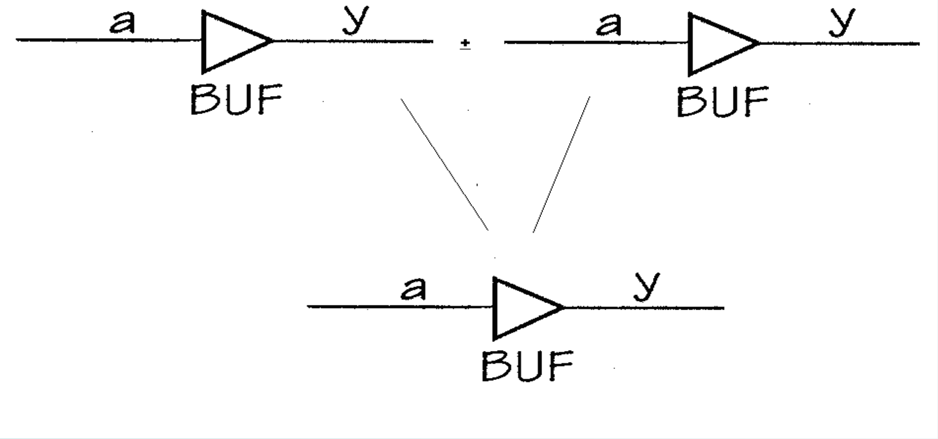
- **Por Tabela de Verdade:**

a	b	c	$\bar{a}$ b	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

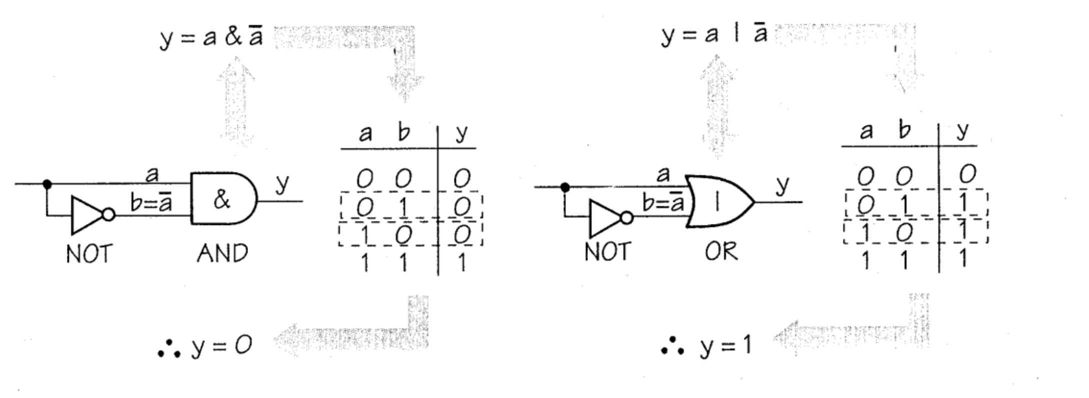
Circuitos Digitais

Regras Booleanas em portas lógicas

As regras de idempotência:



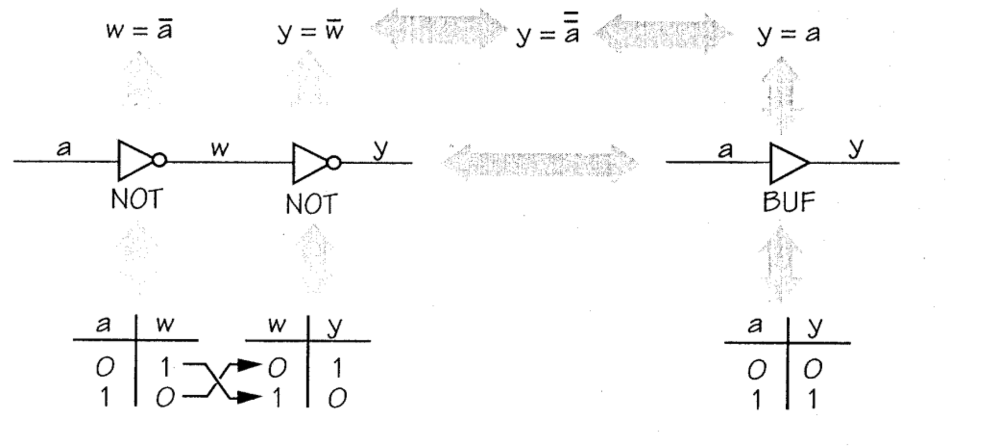
As regras complementares:



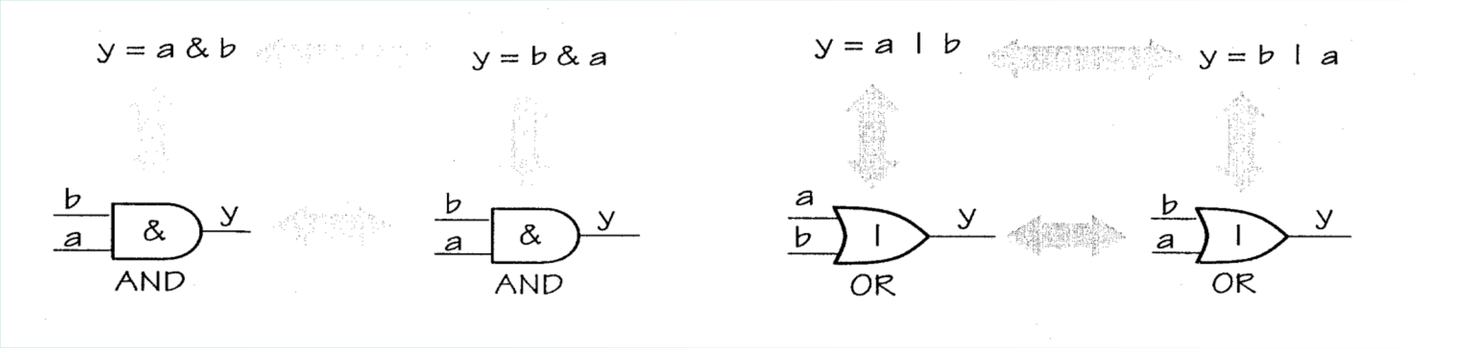
Circuitos Digitais

Regras Booleanas em portas lógicas

A regra da involução



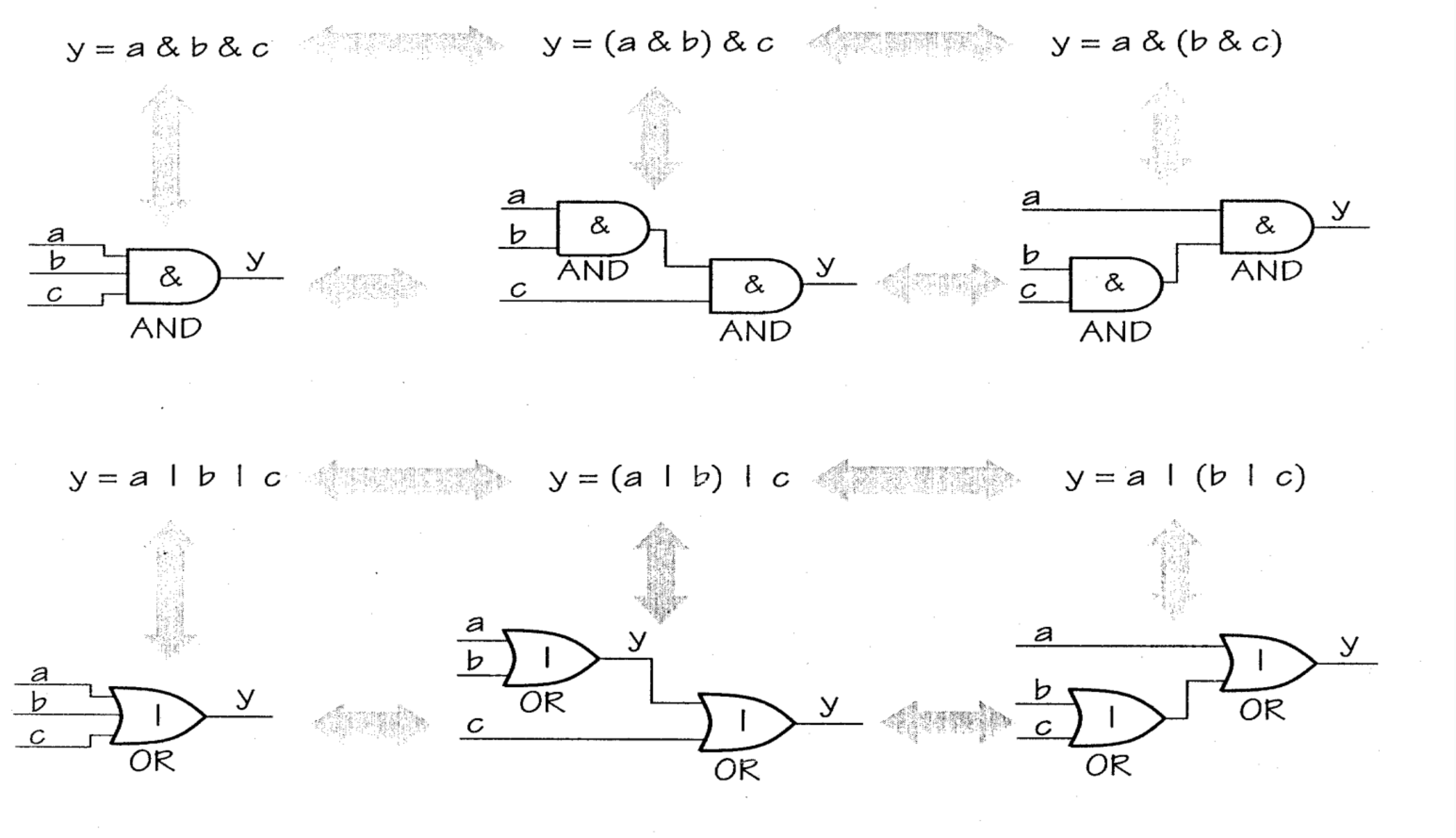
As regras comutativas



Circuitos Digitais

Regras Booleanas em portas lógicas

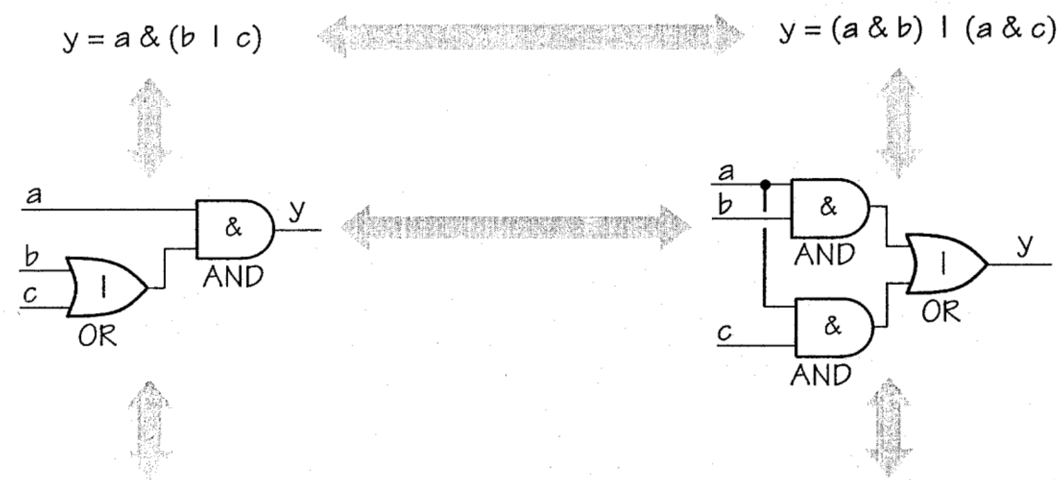
As regras associativas



Circuitos Digitais

Regras Booleanas em portas lógicas

A primeira regra distributiva



a	b	c	(b | c)	y
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

a	b	c	(a & b)	(a & c)	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

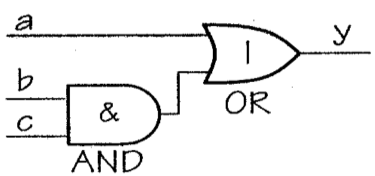
As colunas de saída são idênticas

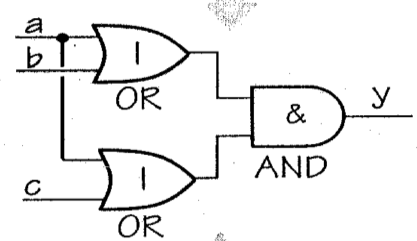
Circuitos Digitais

Regras Booleanas em portas lógicas

A segunda regra distributiva

$y = a \mid (b \,\&\, c) \quad \Longleftrightarrow \quad y = (a \mid b) \,\&\, (a \mid c)$





a	b	c	(b & c)	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

a	b	c	(a | b)	(a | c)	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

As colunas de saída são idênticas

Circuitos Digitais

Outras Funções Booleanas

FUNÇÕES NOR e NAND

x	y	f_1	f_7
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$f_1(x,y) = \bar{x}\,.\,\bar{y} = \overline{x+y} \qquad \textbf{NOR}$$

$$f_7(x,y) = \bar{x}+\bar{y} = \overline{x\,.\,y} \qquad \textbf{NAND}$$

funcionam como uma porta OR (ou uma porta AND) seguida de uma porta NOT

FUNÇÕES OU-EXCLUSIVO

x	y	f_6	f_9
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$f_6(x,y) = \bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y} = x \oplus y \qquad \textbf{XOR}$$

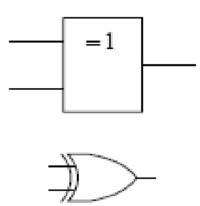
OU EXCLUSIVO. Ex.: Semáfaro

$$f_9(x,y) = \bar{x}\cdot\bar{y} + x\cdot y = \overline{x \oplus y} \qquad \textbf{XNOR}$$

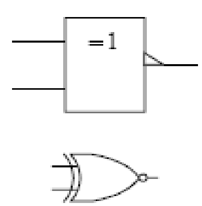
OU EXCLUSIVO NEGADO

XOR é verdadeira se uma e apenas uma das 2 entradas for verdadeira.

Simbologia



XOR



XNOR

Circuitos Digitais

Função Booleana

- FUNÇÕES BASEADAS NO OPERADOR BOOLEANO *IMPLICAÇÃO*

x	y	f_2	f_4	f_{11}	f_{13}
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

$$f_{11}(x,y) = \bar{x} + x\,.\,y = \bar{x} + y = x \to y$$ **: x implica y**

$$f_{13}(x,y) = \bar{y} + x\,.\,y = y \to x$$

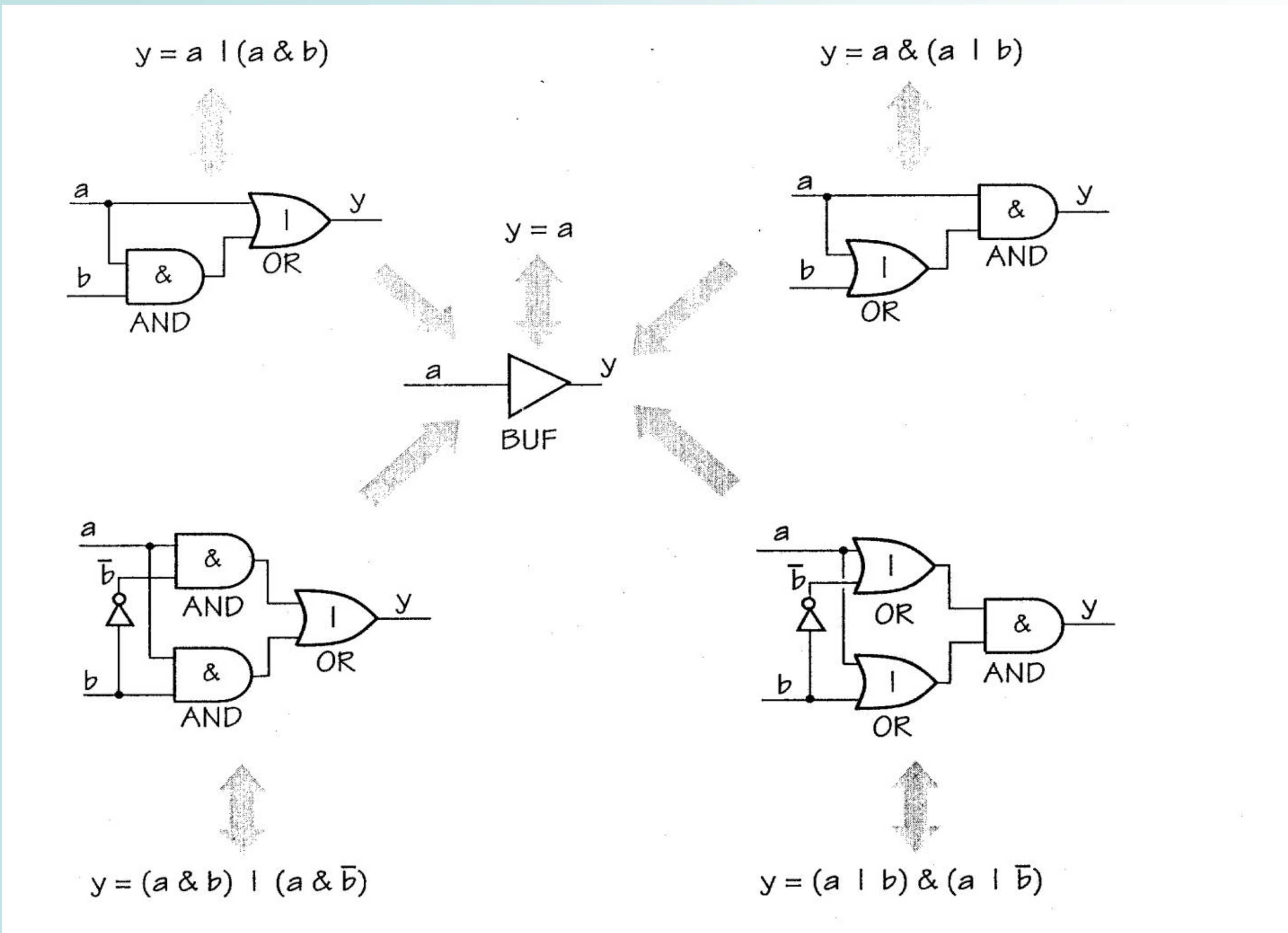
$$f_2(x,y) = \overline{y \to x}$$

$$f_4(x,y) = \overline{x \to y}$$

Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas

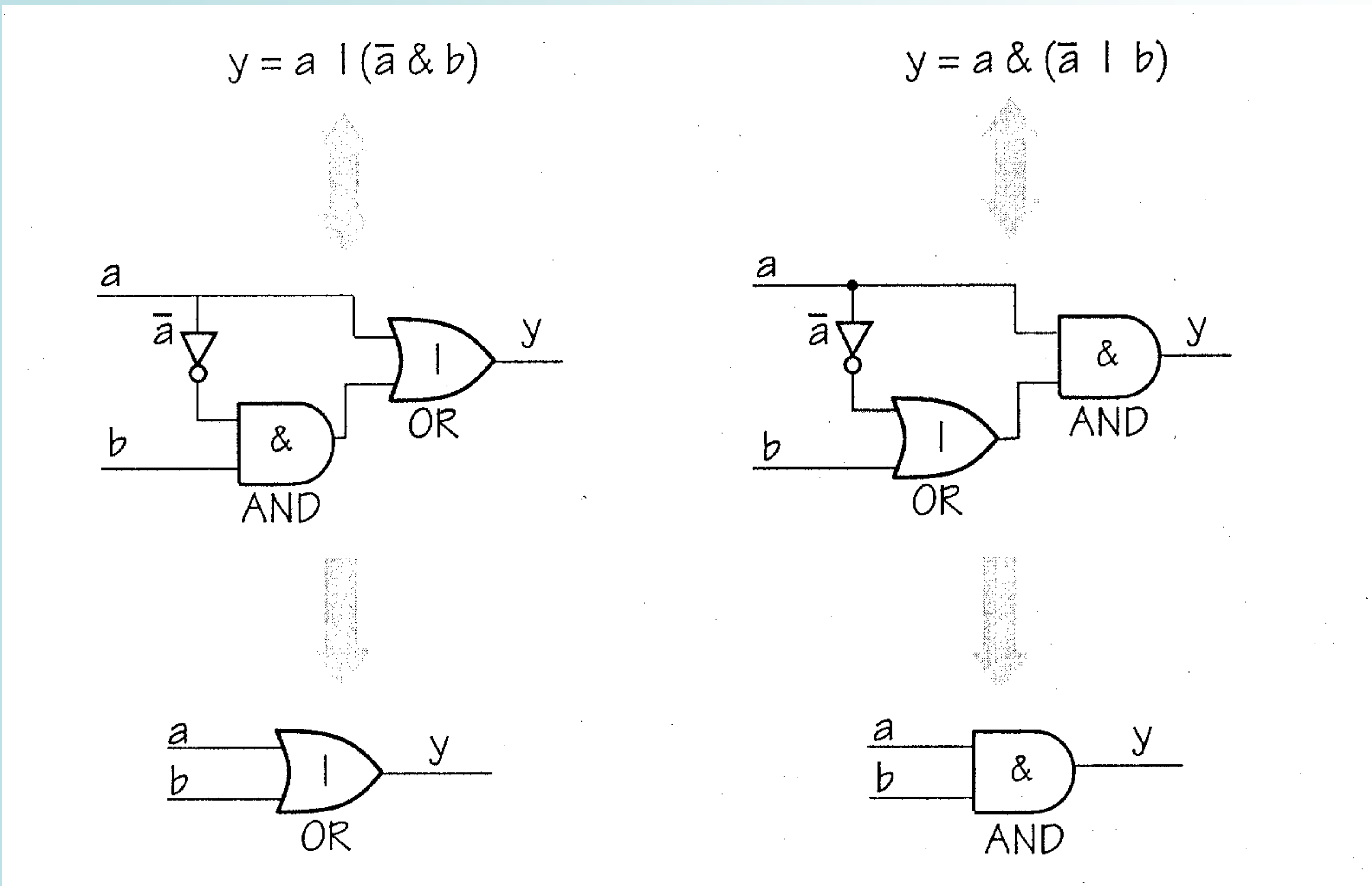
1 - Aplicando Teoremas



Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas

1 - Aplicando Teoremas

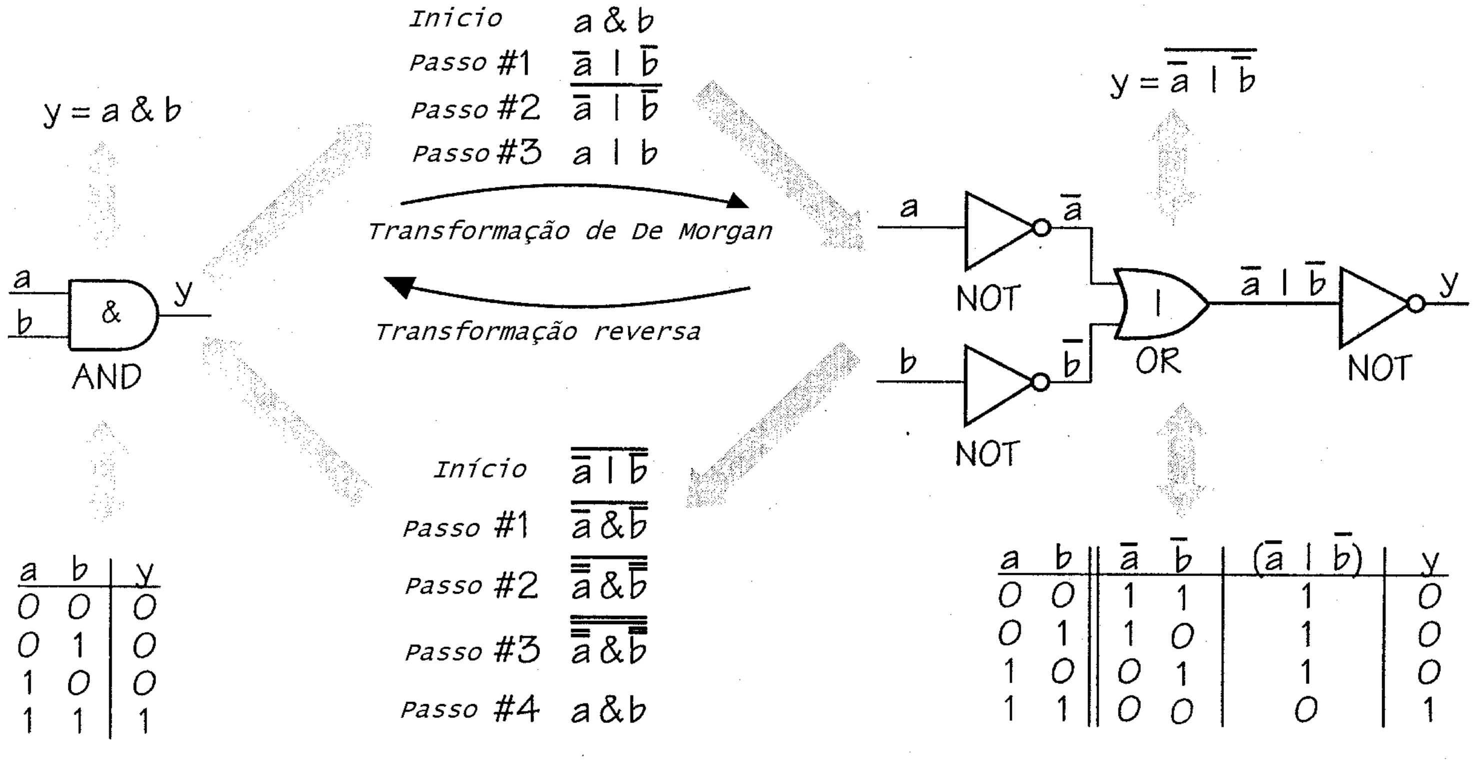


Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas

1 - Aplicando Teoremas - Augustus De Morgan (1806-1871)

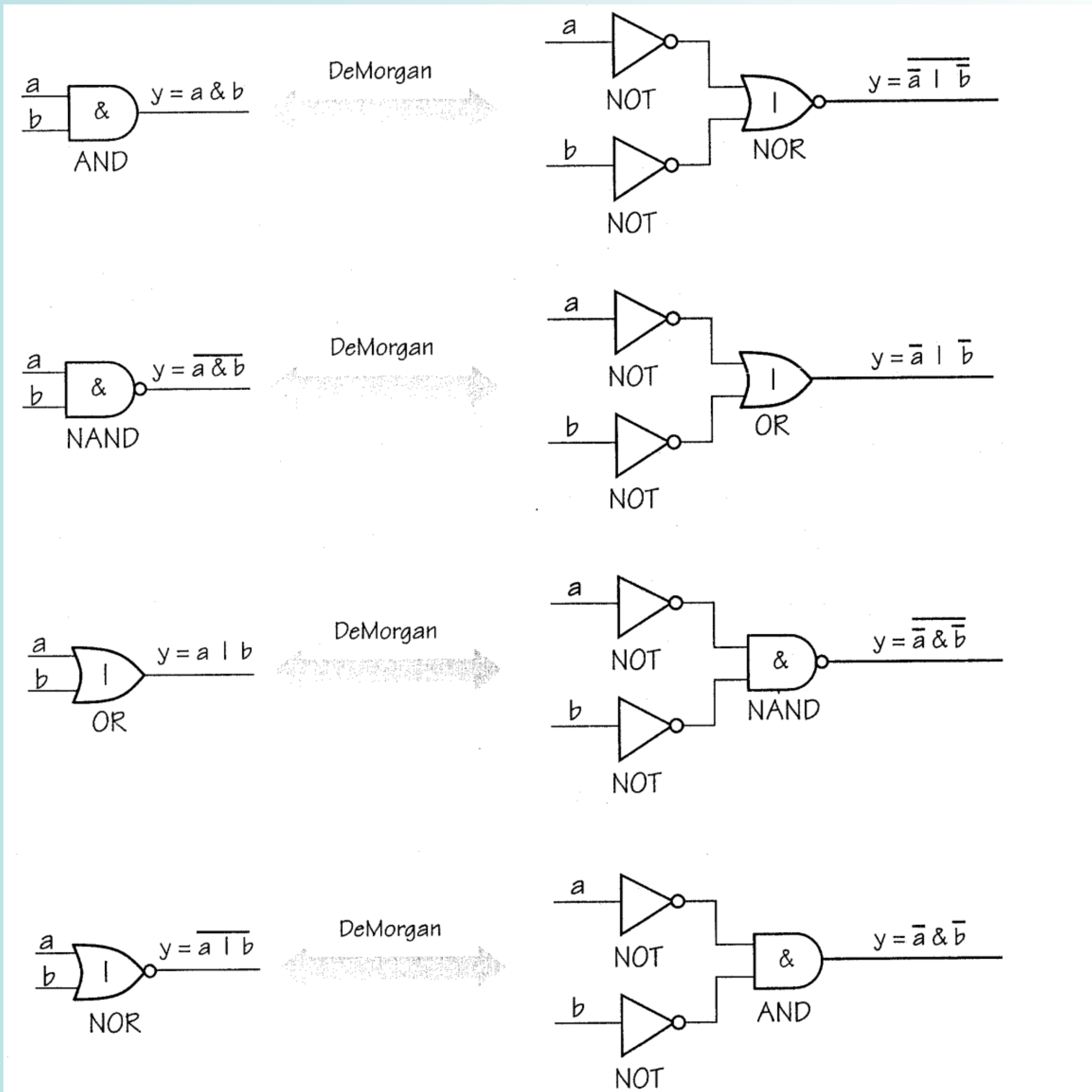
- Esta simplificação pode ser usada apenas nos termos complexos da equação. Não precisa usar em todos os termos.



Regras:
1. Substituir os operadores | por & e vice-versa.
2. Inverter todas as variáveis; também substituir 0's por 1'ns e vice-versa.
3. Inverter toda a função.
4. Reduzir todas as inversões múltiplas.

Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas – Exemplo Morgan



Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas

- **LEIS DE MORGAN**

Verificação por Tabelas da Verdade

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$$

$$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

x	y	$x+y$	$\overline{x+y}$	x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}.\overline{y}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0

- **Generalização para n variáveis**

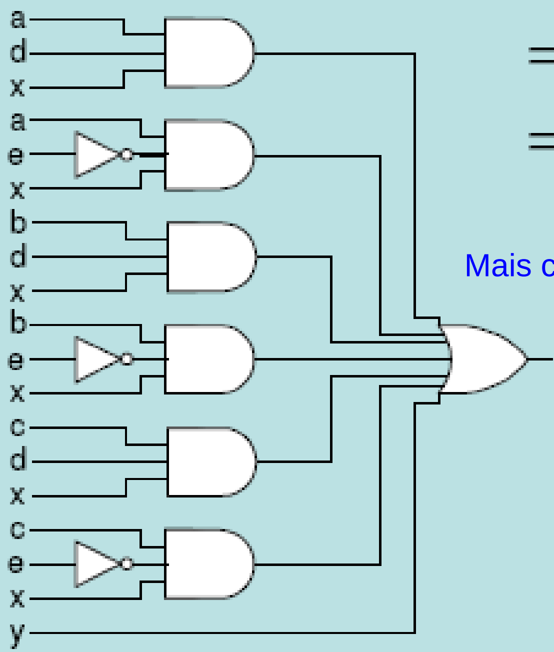
$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \overline{x}_1 . \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$$

$$\overline{x_1 . x_1 \ldots x_n} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n$$

Circuitos Digitais

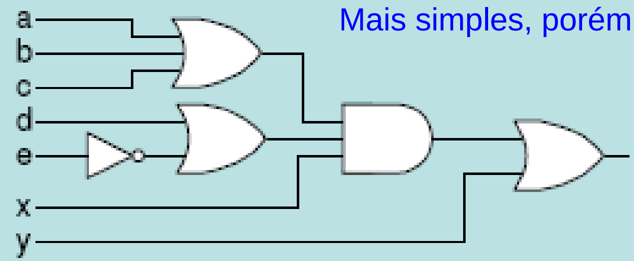
Simplificações de Funções Booleanas

$$
\begin{aligned}
f &= adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y \\
&= \left(ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)d + \left(a+b+c\right)\bar{e}\right)x + y \\
&= \left(\left(a+b+c\right)\left(d+\bar{e}\right)\right)x + y
\end{aligned}
$$



Mais complexo, porém mais rápido.

Realização a 2 níveis
(soma de produtos)

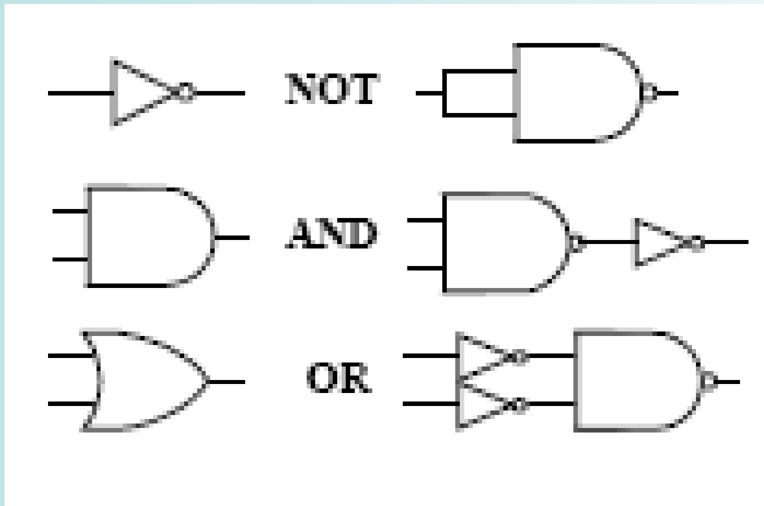


Mais simples, porém mais lento.

Realização Multinível

Circuitos Digitais

Simplificações de Funções Booleanas –
Simplificações com Portas NAND

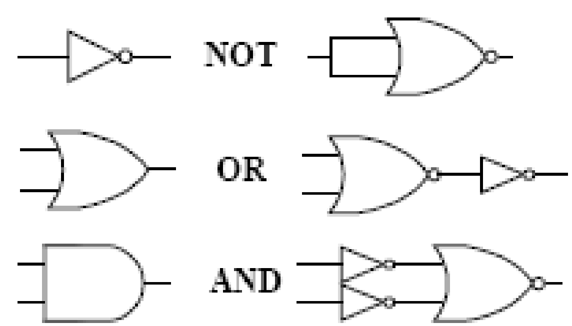


Simplificações com Portas NOR

Dual:

Qualquer circuito pode ser realizado apenas com portas NOR.

No caso de a função estar representada como um produto de somas, a transformação mantém a estrutura.



Circuitos Digitais

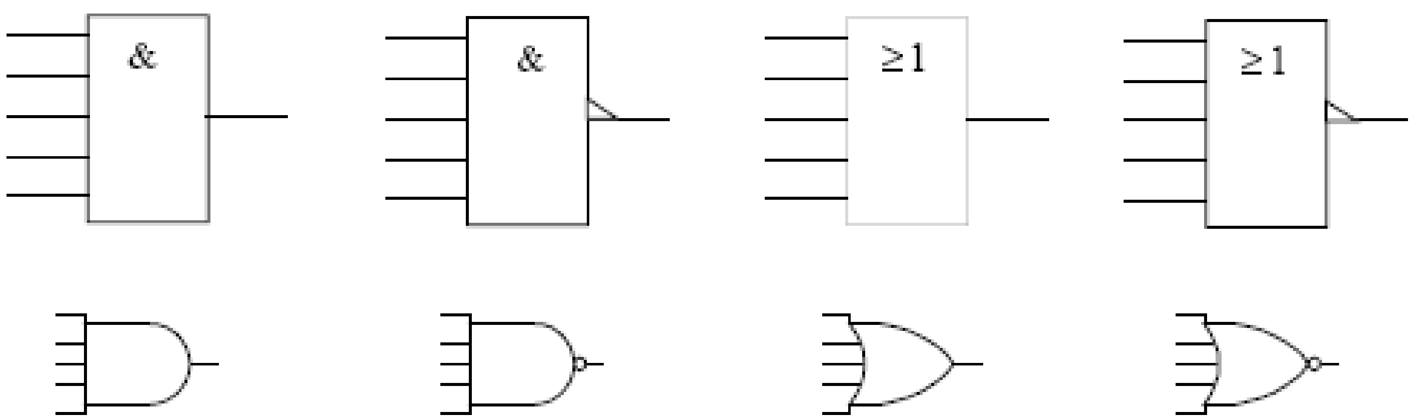
PORTAS COM MAIS DE 2 ENTRADAS

As operações AND e OR (e consequentemente as portas NAND e NOR) são facilmente generalizáveis para N-entradas.

Uma porta AND de N entradas tem a saída a 1 sse todas as entradas estiverem a 1.

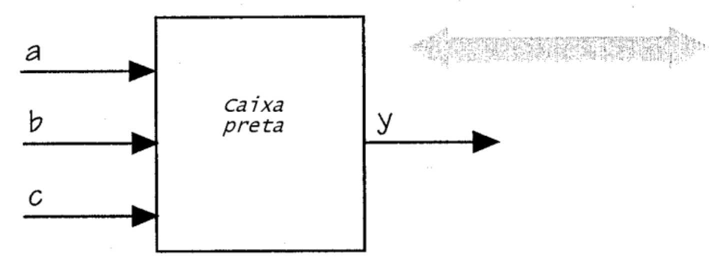
Uma porta OR de N entradas tem a saída a 1 se pelo menos uma entrada estiverem a 1.

Simbologia

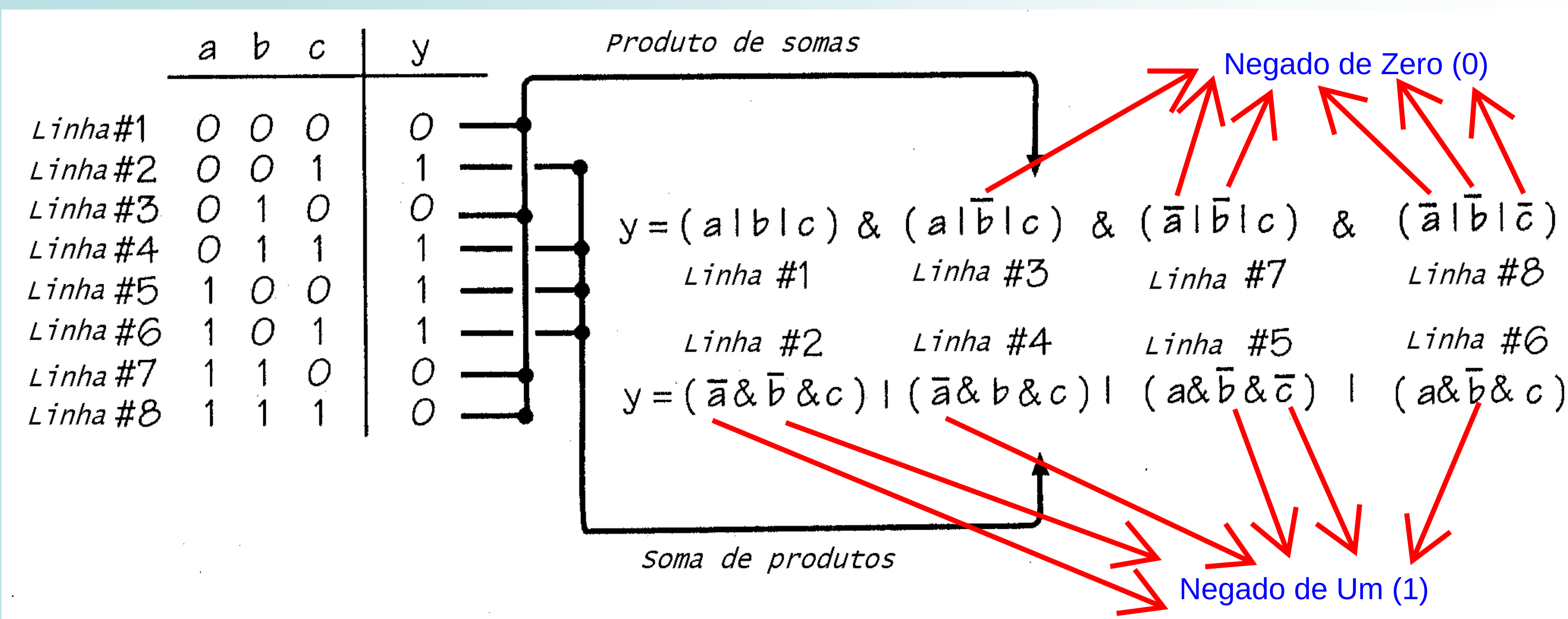


Circuitos Digitais

Encontrando as Funções Booleanas –
Métodos de Mínimos e Máximos - Soma de produtos e produto de somas



a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



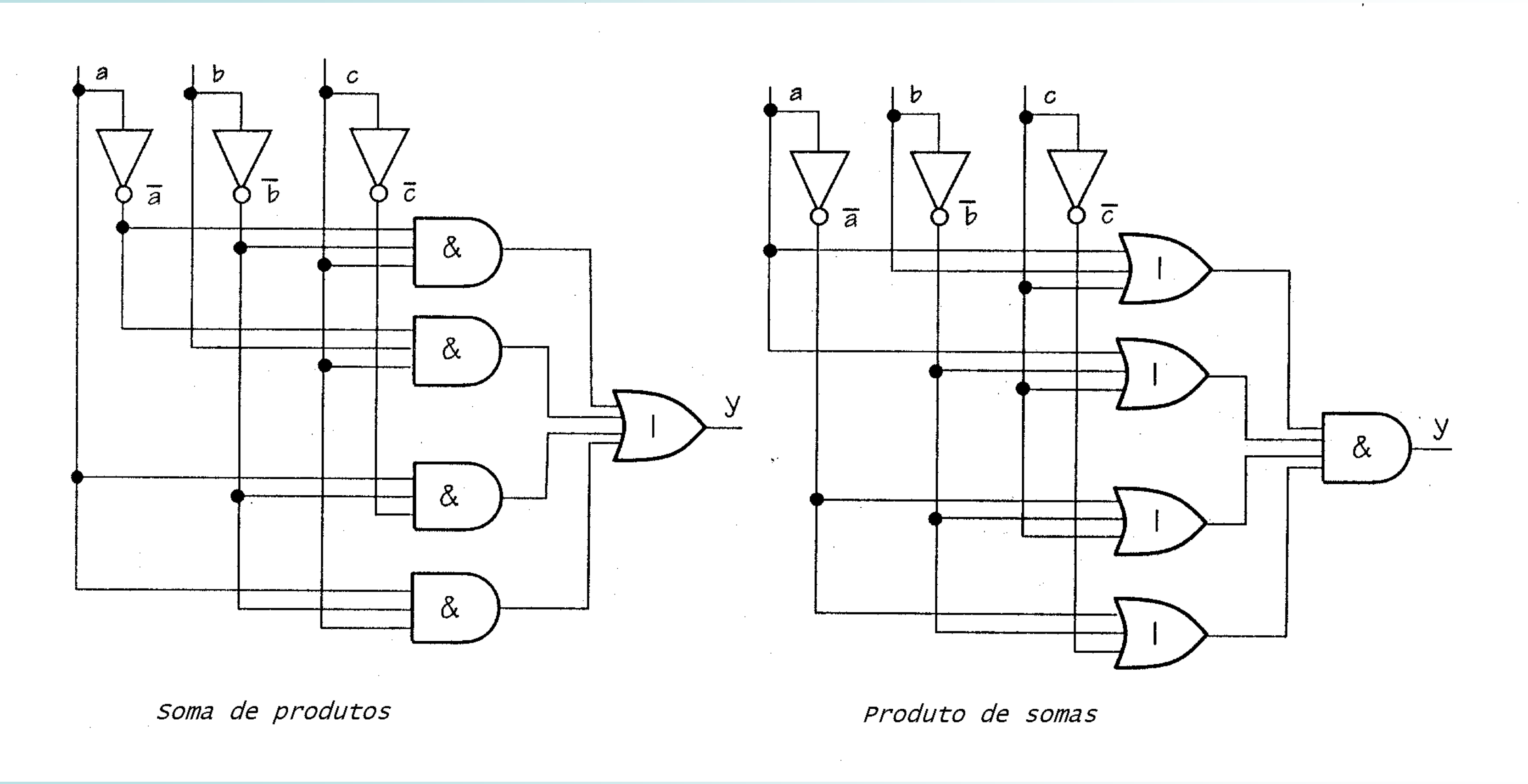
Circuitos Digitais

Encontrando as Funções Booleanas – Métodos de Mínimos e Máximos

a	b	c	Mintermos	Maxtermos
0	0	0	$(\bar{a}\ \&\ \bar{b}\ \&\ \bar{c})$	$(a \mid b \mid c)$
0	0	1	$(\bar{a}\ \&\ \bar{b}\ \&\ c)$	$(a \mid b \mid \bar{c})$
0	1	0	$(\bar{a}\ \&\ b\ \&\ \bar{c})$	$(a \mid \bar{b} \mid c)$
0	1	1	$(\bar{a}\ \&\ b\ \&\ c)$	$(a \mid \bar{b} \mid \bar{c})$
1	0	0	$(a\ \&\ \bar{b}\ \&\ \bar{c})$	$(\bar{a} \mid b \mid c)$
1	0	1	$(a\ \&\ \bar{b}\ \&\ c)$	$(\bar{a} \mid b \mid \bar{c})$
1	1	0	$(a\ \&\ b\ \&\ \bar{c})$	$(\bar{a} \mid \bar{b} \mid c)$
1	1	1	$(a\ \&\ b\ \&\ c)$	$(\bar{a} \mid \bar{b} \mid \bar{c})$

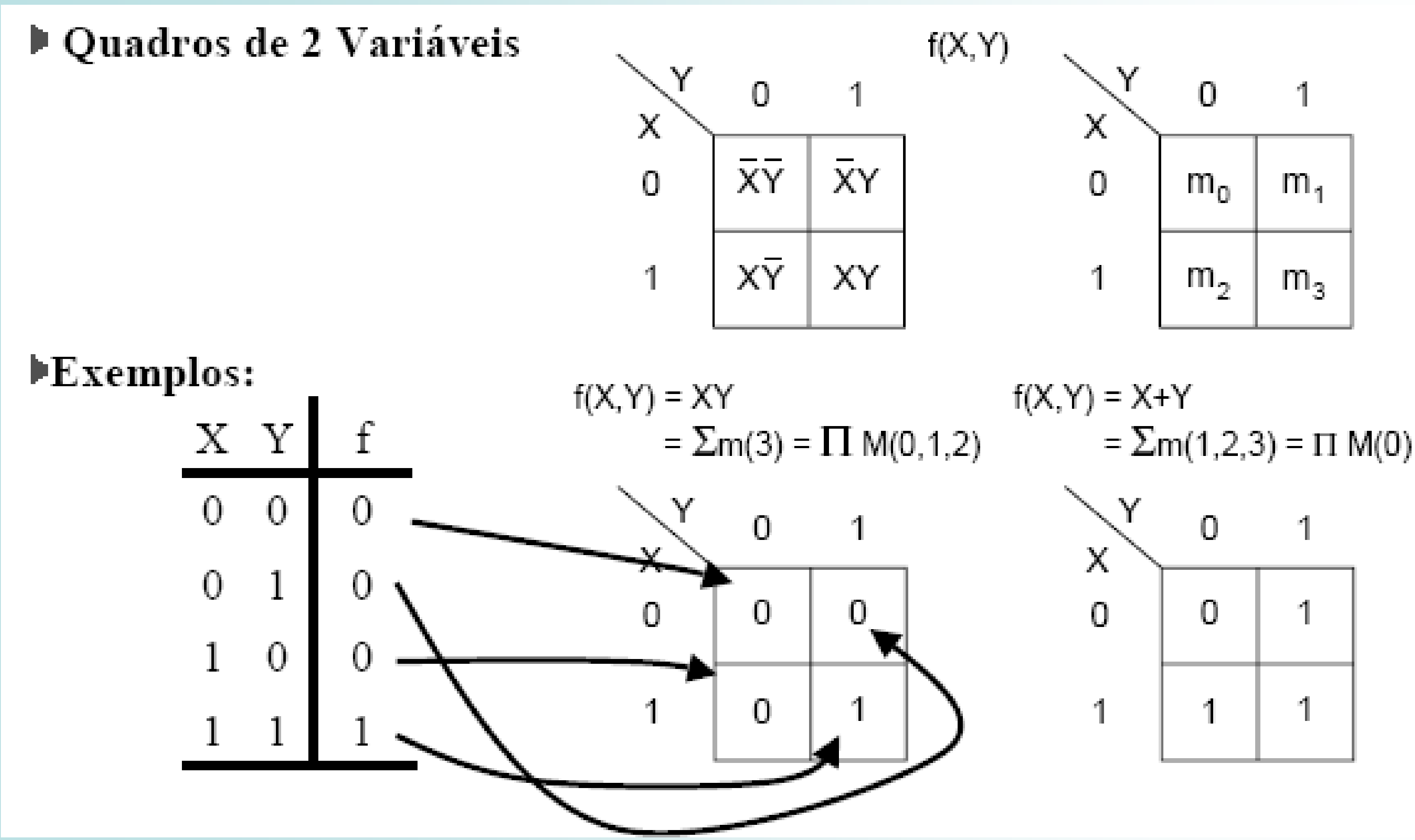
Circuitos Digitais

Funções Booleanas –
Termos mínimos e máximos - Soma de produtos e produto de somas



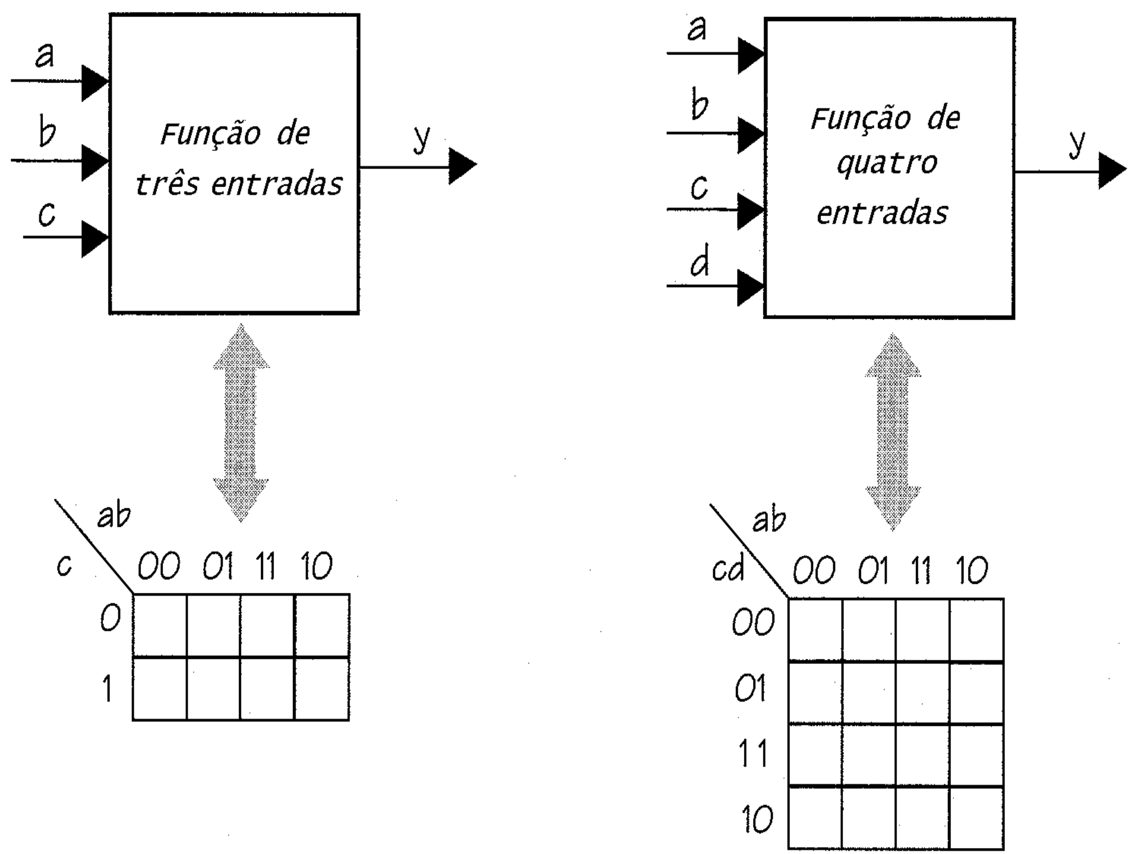
Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh



Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh



Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh

- **Quadros de 3 Variáveis**

$f(X,Y,Z)$

X \ YZ	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

Y: columns 11, 10; Z: columns 01, 11; X: row 1

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- **Exemplos:**

$f(X,Y,Z) = \Sigma m(0,3,5,6)$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh

Quadros de 4 Variáveis

A mesma função pode ter **representações diferentes, mas equivalentes**, num **Quadro de Karnaugh** pela simples alteração da localização das variáveis

f(W,X,Y,Z)

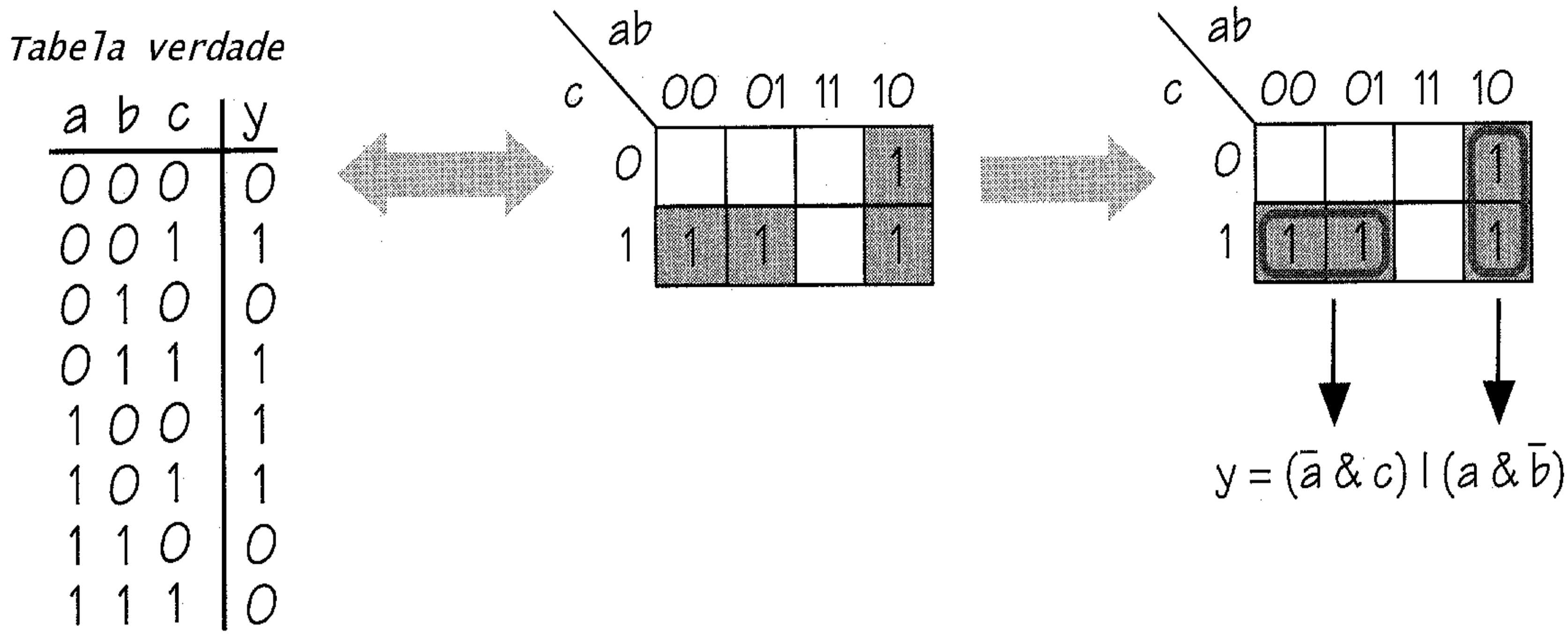
WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

f(W,X,Y,Z)

YZ \ WX	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

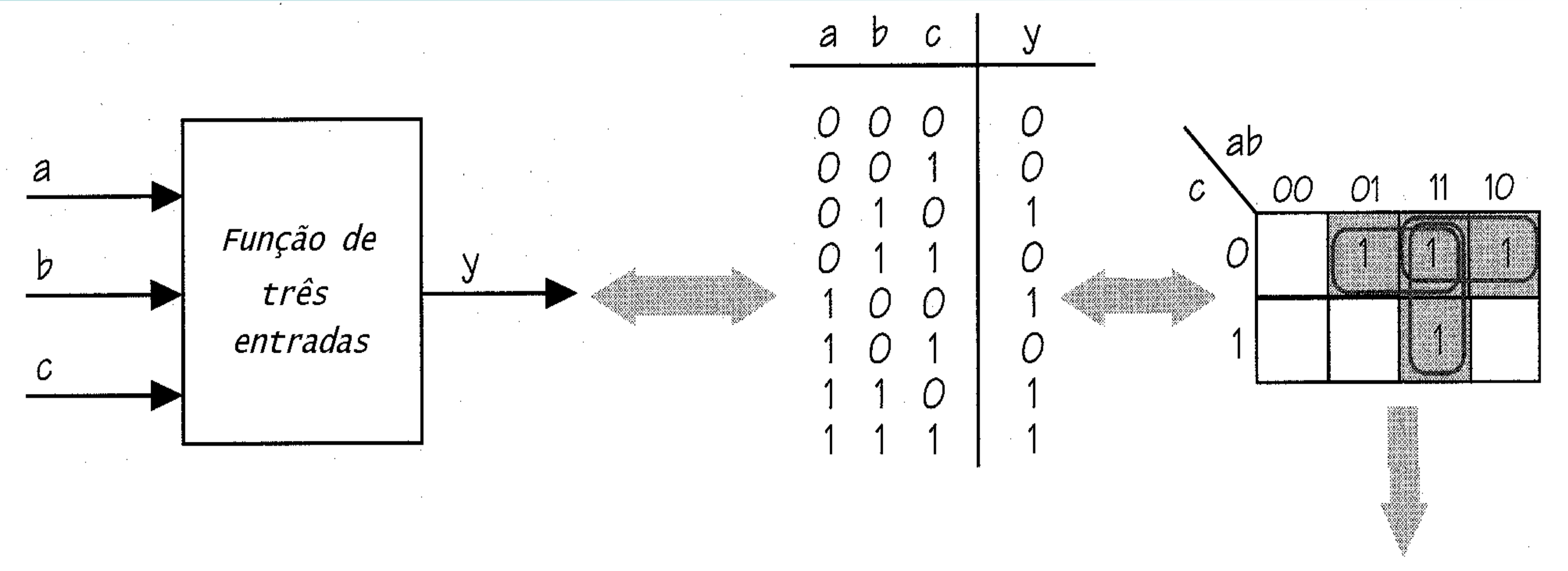
Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh



Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh

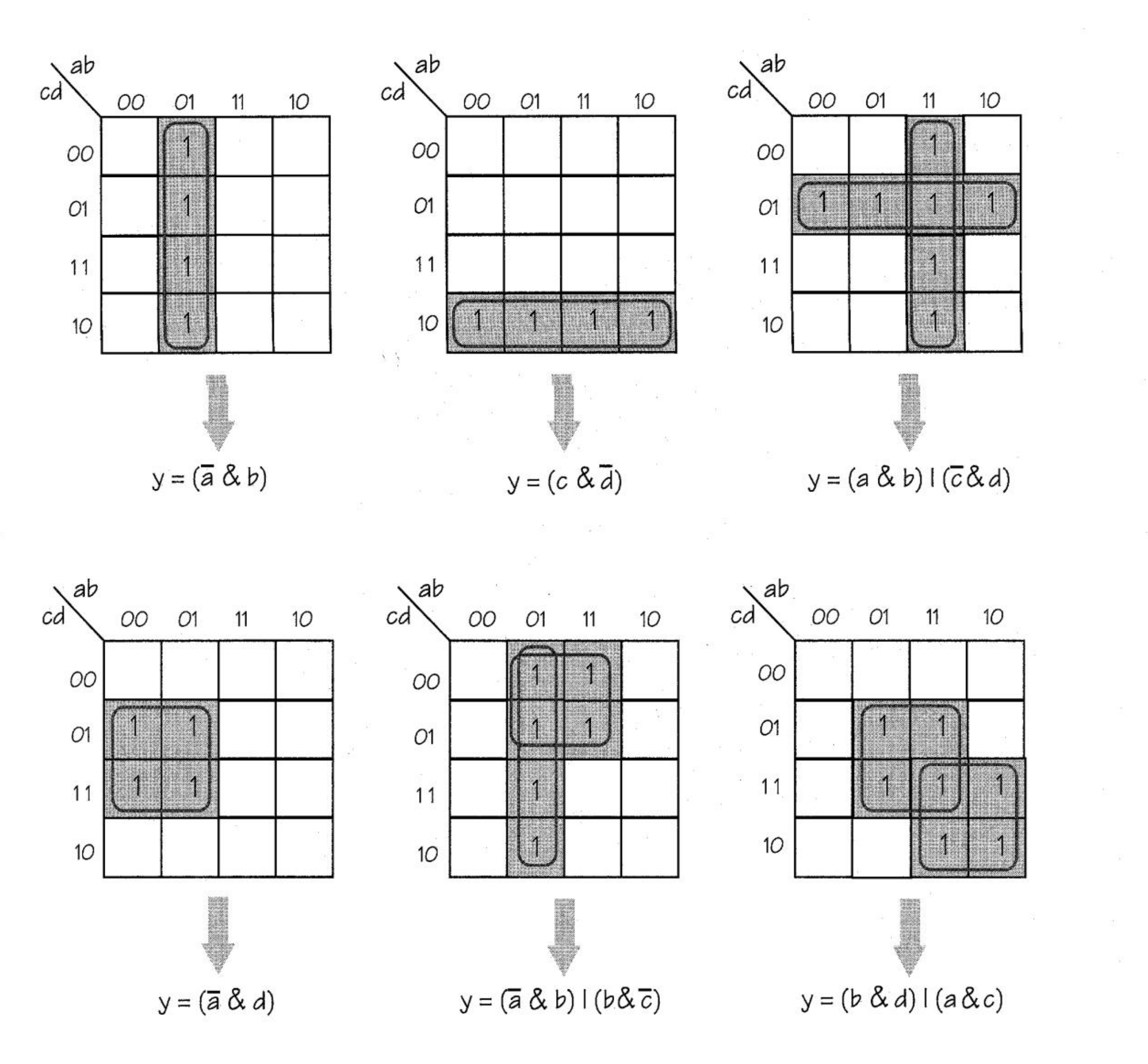


a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$y = (b \,\&\, \overline{c}) \mid (a \,\&\, \overline{c}) \mid (a \,\&\, b)$

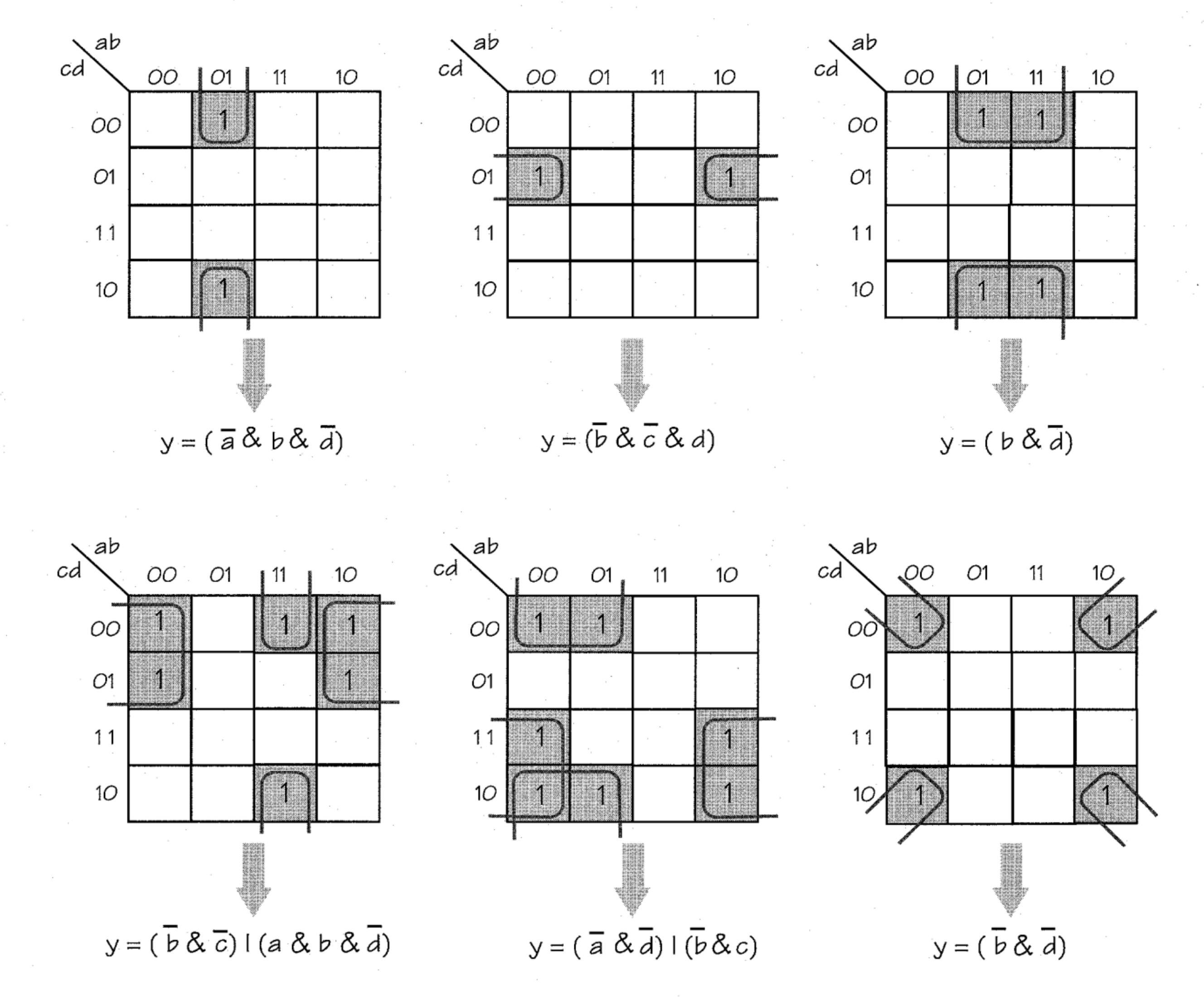
Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh



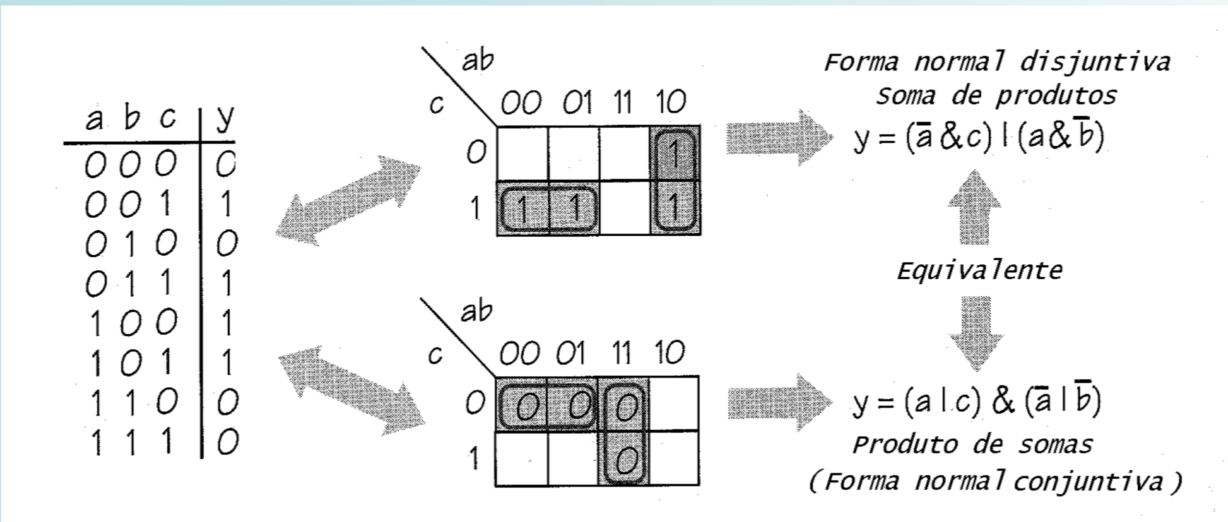
Circuitos Digitais

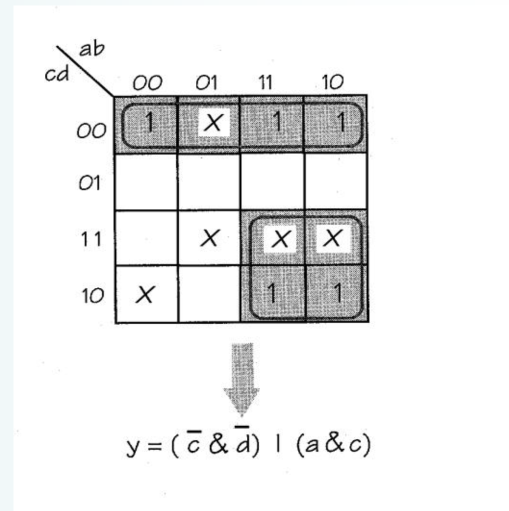
Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh



Circuitos Digitais

Funções Booleanas por Mapa de Karnaugh





Mapas de karnaugh com 5 variáveis

Nesta situação o mapa possuirá 32 células.

BC \ DE	00	01	11	10
00	?	?	?	?
01	?	?	?	?
11	?	?	?	?
10	?	?	?	?

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	?	?	?	?
01	?	?	?	?
11	?	?	?	?
10	?	?	?	?

A=1