Matemática Discreta

Prof. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky - PPGEP/UCS
e-mail: ldchiwiacowsky@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

Sumário

Relações

Intuitivamente, uma Relação é uma comparação entre dois objetos tomados em uma ordem definida. Os objetos podem estar ou não relacionados de acordo com alguma regra.

Exemplos:

a) “menor que” é uma relação definida em $\mathbb{Z}$;
   - $(2, 8)$ satisfaz esta relação, pois $2 < 8$,
   - $(10, 3)$ não satisfaz esta relação, pois $10 \not< 3$

b) Outras relações podem ser definidas: “divisibilidade”, “maior que”, “igualdade”, entre outras

c) Outros objetos permitem outros tipos de relação: “paralelo a”,“subconjunto de”, “congruente com”, etc.

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma **relação binária** ou, simplesmente, R de A em B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja $R \subseteq A \times B$, também denotada por $R : A \rightarrow B$, onde A é o conjunto de partida (ou origem, ou domínio) e B é o conjunto de chegada (ou destino, ou contra-domínio, ou imagem).

Por definição, toda relação é um **conjunto** de pares ordenados onde o primeiro elemento pertence ao conjunto de partida e o segundo elemento pertence ao conjunto de chegada.

- Se $(a, b) \in R$, escrevemos $aRb \Rightarrow$ "a está relacionado com b";
- Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a\not{R}\,b \Rightarrow$ "a não está relacionado com b".

Exemplo 1: Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ então
$A \times B = \{(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$.

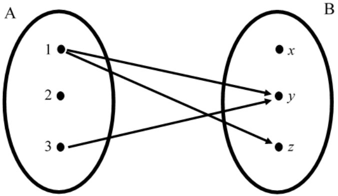
Qualquer subconjunto de $A \times B$ é uma relação de A em B:

a) R_1 : "igualdade" de A em $B = \{(0, 0), (1, 1)\}$;
b) R_2 : "menor que" de A em $B = \{(0, 1)\}$;
c) R_3 : "vazio" é uma relação de A em $B = \varnothing$;
d) R_4 : de A em $B = \{(1, -2), (0, 1)\}$ é uma relação sem regra definida.

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ e $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$:

- R é uma relação de A em B pois: é subconjunto de $A \times B$, a origem está em A (domínio de R é A) e o destino está em B (imagem de R é B).
- Complete com os símbolos R e $\not R$:

  a) 3______y b) 2______z c) 3______x d) 1______y
- Represente R usando um diagrama de setas:



Exemplo 3: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Escreva a relação $R = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$ como um conjunto de pares ordenados.

Exemplo 3: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Escreva a relação $R = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$ como um conjunto de pares ordenados.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Exemplo 3: Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3,4\}$. Escreva a relação $R = \{(x,y) \in A \times B / x < y\}$ como um conjunto de pares ordenados.

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Exemplo 4: Sejam $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$. Escreva a relação $R \subseteq B \times A$ tal que $xRy \iff y = x + 2$ como um conjunto de pares ordenados.

Exemplo 3: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Escreva a relação $R = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$ como um conjunto de pares ordenados.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Exemplo 4: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Escreva a relação $R \subseteq B \times A$ tal que $xRy \iff y = x + 2$ como um conjunto de pares ordenados.

$$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

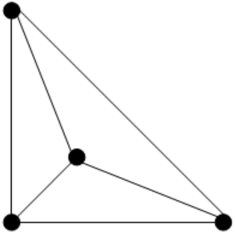
Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, do tipo $R : A \to A$, então dizemos que R é uma "endorrelação" ou "auto-relação".
Notação: $\langle A, R \rangle$

Exemplos:

1. Se $A = \{0, 1, 2\}$, escreva a relação "menor que" de A em A e represente R usando um diagrama de setas.
2. Seja $S = \{1, 2\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in S \times S / x + y =$ ímpar$\}$.
3. Seja $S = \{a, b\}$. Escreva a relação $\langle S, = \rangle$.
4. Se $A = \{1, 2, 3\}$. Escreva a relação $\geq$: $A \to A$.

Teoria dos Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto.

Para tal, são empregadas estruturas chamadas de grafos, $G(V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de objetos denominados "vértices" e E é um subconjunto de pares não ordenados de V, chamados arestas.



Toda endorrelação $R : A \to A$ pode ser representada como um grafo direcionado com arestas ligando cada par ordenado (a, b), com origem em a e destino em b, isto é:

a) cada elemento do conjunto A é representado como um vértice do grafo;
b) cada par (a, b) da relação é representado como uma aresta direcionada do grafo, de a para b.

Exemplo:

1. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, desenhe os grafos orientados das endorrelações abaixo:
   a) $<: A \to A$ b) $R : A \to A$, tal que $R = \{(1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
   c) $\langle B, =\rangle$

A relação $R : A \to B$ pode ser representada na forma de matriz, o que facilita sua implementação em sistemas computacionais.
Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ dois conjuntos finitos. A representação da relação $R : A \to B$ como matriz é como segue:

a) o número de linhas é n (número de elementos do conjunto de partida);
b) o número de colunas é m (número de elementos do conjunto de chegada);
c) a matriz resultante possui $n \times m$ células;
d) cada uma das $n \times m$ células possui um valor lógico (0 ou 1) associado;
e) Se $(a, b) \in \mathbb{R}$, então a posição correspondente na matriz contém o valor 1 (verdadeiro), caso contrário será 0 (falso).

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, represente as relações abaixo na forma matricial:

a) $R : C \to C$ tal que $R = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$

R	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

b) $\langle B, =\rangle$

$=$	a	b
a	1	0
b	0	1

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, represente as relações abaixo na forma matricial:

c) $\langle C, < \rangle$

$<$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

d) $S : C \rightarrow B$ tal que $R = \{(0, a), (1, b)\}$

S	a	b
0	1	0
1	0	1
2	0	0

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, represente as relações abaixo na forma matricial:

e) $\emptyset : A \to A$

$\emptyset$	a
a	0

f) $A \times B : A \to B$

$A \times B$	a	b
a	1	1

g) $\subseteq: P(A) \to P(B)$

$\subseteq$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	1	1	1	1
$\{a\}$	0	1	0	1

Relação Inversa

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B ($R : A \to B$). A relação inversa de R é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a R:

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B / x > y\}$, identifique os conjuntos R e R^{-1}:

Relação Inversa

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B ($R : A \to B$). A relação inversa de R é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a R:

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B/x > y\}$, identifique os conjuntos R e R^{-1}:

$R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

Relação Inversa

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B ($R : A \to B$). A relação inversa de R é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a R:

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B / x > y\}$, identifique os conjuntos R e R^{-1}:

$$R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R^{-1} = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Relação Inversa

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B ($R : A \to B$). A relação inversa de R é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a R:

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B/x > y\}$, identifique os conjuntos R e R^{-1}:

$R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

$R^{-1} = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

E na forma matricial?

Relação Inversa

Seja R uma relação qualquer de um conjunto A para um conjunto B ($R : A \to B$). A relação inversa de R é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado pertencente a R:

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B/x > y\}$, identifique os conjuntos R e R^{-1}:

$R = \{(3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

$R^{-1} = \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

E na forma matricial? E o diagrama de setas?

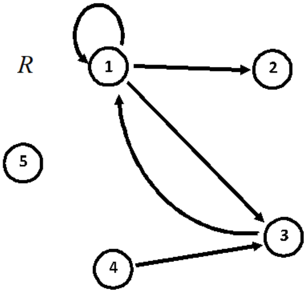
Relação Inversa

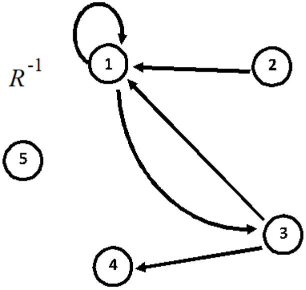
Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R : A \to A$ tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$.

a) Desenhe os grafos orientados de R e de R^{-1}:

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R : A \to A$ tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$.

a) Desenhe os grafos orientados de R e de R^{-1}:





Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R : A \to A$ tal que
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$.

b) Determine a representação matricial de R e de R^{-1}:

Relação Inversa

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R : A \to A$ tal que
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$.

b) Determine a representação matricial de R e de R^{-1}:

R	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0

R^{-1}	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Exercícios da apostila “5. Relações”, página 40.

Composição de Relações

Sejam A, B e C conjuntos. Sejam as relações $R : A \to B$ e $S : B \to C$.

A composição de R e S, denotada $S \circ R : A \to C$ é tal que:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in C)\Big(aRb \wedge bSc \to a(S \circ R)c\Big)$$

ou seja

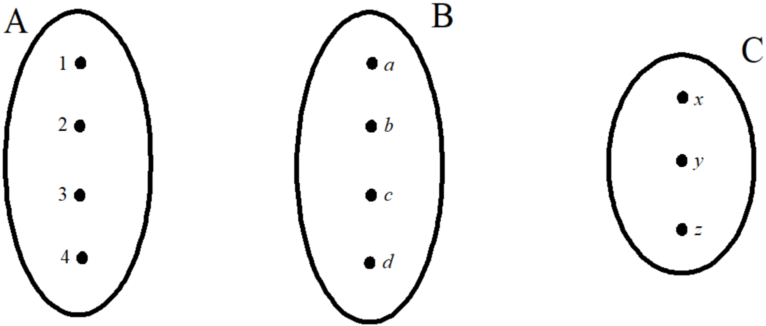
$$S \circ R = \{(a, c)/\exists b \in B \wedge (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.

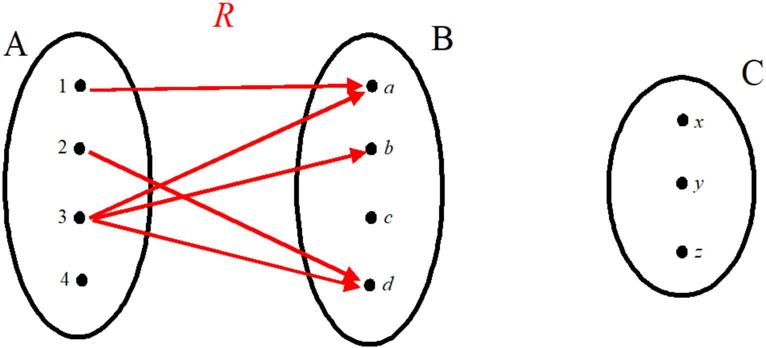
Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.



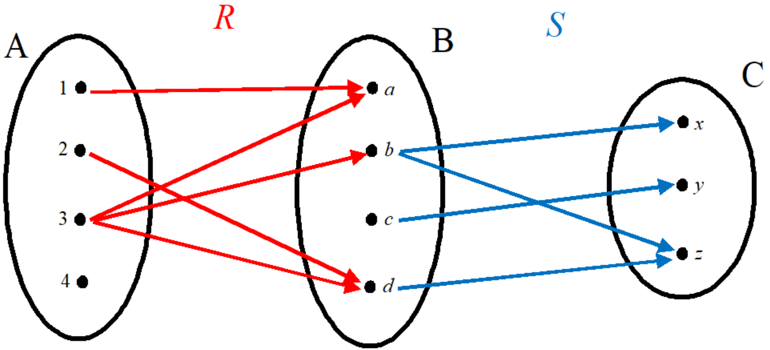
Composição de Relações

<u>Exemplo 1</u>: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.



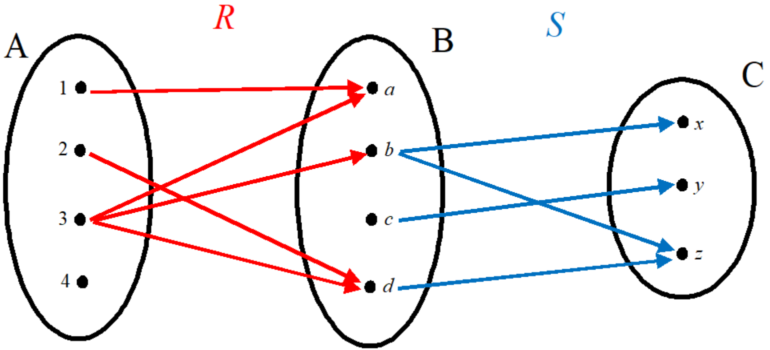
Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.



Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Faça a composição de R e S com o auxílio do diagrama de setas.



$$S \circ R = \{(3, x), (3, z), (2, z)\}$$

Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Qual a conexão existente entre as representações matriciais das relações R, S e $S \circ R$?

Composição de Relações

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considerando as relações $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A em B; $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B em C. Qual a conexão existente entre as representações matriciais das relações R, S e $S \circ R$?

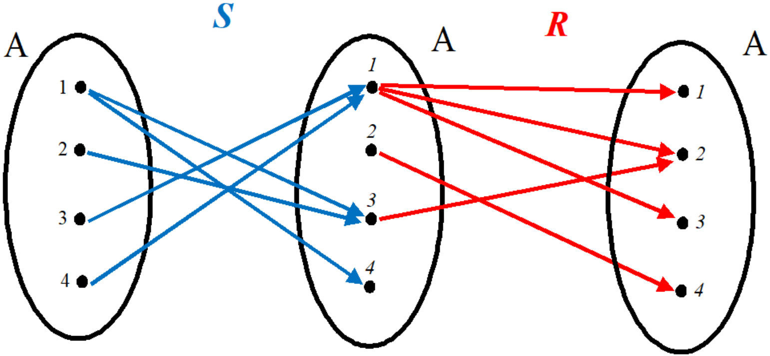
$$\begin{array}{c|cccc} R & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|ccc} S & x & y & z \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad M_{S \circ R} = M_R \times M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composição de Relações

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações sobre A:
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ e $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Determine $R \circ S$ usando o diagrama de setas e a representação matricial.

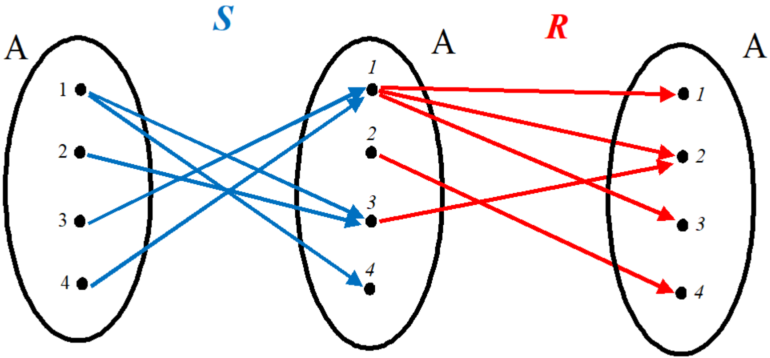
Composição de Relações

Exemplo 2: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações sobre A:
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,4), (3,2)\}$ e $S = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,1), (4,1)\}$. Determine $R \circ S$ usando o diagrama de setas e a representação matricial.



Composição de Relações

<u>Exemplo 2</u>: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações sobre A:
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ e $S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Determine $R \circ S$ usando o diagrama de setas e a representação matricial.



$$R \circ S = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

Exercícios da apostila “5. Relações”, página 42.

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

Relação Reflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$,

Propriedades das Relações

Relação Reflexiva

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

Relação Reflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$, NÃO!

b) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,

Propriedades das Relações

Relação Reflexiva

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

Relação Reflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$, NÃO!

b) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$, SIM!

c) $R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$,

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

Relação Reflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$, NÃO!

b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, SIM!

c) $R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$, NÃO!

d) $R_4 = \emptyset$,

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

Relação Reflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 1: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$, NÃO!

b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$, SIM!

c) $R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$, NÃO!

d) $R_4 = \varnothing$, NÃO!

e) $R_5 = A \times A = A^2$,

Uma endorrelação binária em um conjunto A pode ter determinadas propriedades.

<u>Relação Reflexiva</u>: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação reflexiva se:

$$(\forall a \in A)(aRa)$$

ou seja, se todo elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

<u>Exemplo 1</u>: Determine se as seguintes relações em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ são reflexivas:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$, NÃO!
b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, SIM!
c) $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$, NÃO!
d) $R_4 = \emptyset$, NÃO!
e) $R_5 = A \times A = A^2$, SIM!

Matriz de uma relação reflexiva: a diagonal principal contém somente o valor verdadeiro (1).
Grafo de uma relação reflexiva: em cada vértice do grafo deve haver um laço.

<u>Exemplo 2</u>: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $A^2 : A \to A$

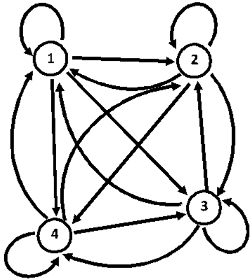
Propriedades das Relações

Matriz de uma relação reflexiva: a diagonal principal contém somente o valor verdadeiro (1).
Grafo de uma relação reflexiva: em cada vértice do grafo deve haver um laço.

Exemplo 2: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) $A^2 : A \to A$

A^2	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1



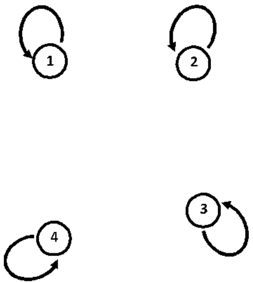
Exemplo 2: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\langle A, = \rangle$

Exemplo 2: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\langle A, = \rangle$

$=$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not{R}\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!

c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!

c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!

c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1, NÃO!

b) R_2,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!
b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!
c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1, NÃO!
b) R_2, NÃO!
c) R_3,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0,1),(1,2),(2,1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0,2),(2,0),(2,2)\}$, NÃO!

c) $R_8 = \{(0,1),(1,0),(1,2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1, NÃO!

b) R_2, NÃO!

c) R_3, SIM!

d) R_4,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not{R}\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!

b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!

c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1, NÃO!

b) R_2, NÃO!

c) R_3, SIM!

d) R_4, SIM!

e) R_5,

Relação Irreflexiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação irreflexiva se:

$$(\forall a \in A)(a \not R\, a)$$

ou seja, se nenhum elemento $a \in A$ estiver relacionado consigo mesmo.

Exemplo 3: Determine se as seguintes relações em $B = \{0, 1, 2\}$ são irreflexivas:

a) $R_6 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, SIM!
b) $R_7 = \{(0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, NÃO!
c) $R_8 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$, SIM!

Exemplo 4: Determine se as relações do exemplo 1 são irreflexivas:

a) R_1, NÃO!
b) R_2, NÃO!
c) R_3, SIM!
d) R_4, SIM!
e) R_5, NÃO!

Matriz de uma relação irreflexiva: a diagonal principal contém apenas o valor falso (0).
Grafo de uma relação irreflexiva: em nenhum vértice do grafo pode haver um laço.

Exemplo 5: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

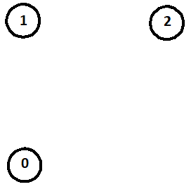
a) $\emptyset : B \to B$

Matriz de uma relação irreflexiva: a diagonal principal contém apenas o valor falso (0).
Grafo de uma relação irreflexiva: em nenhum vértice do grafo pode haver um laço.

Exemplo 5: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

a) $\varnothing : B \to B$

$\varnothing$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0



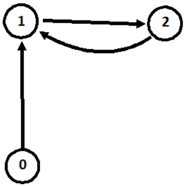
Exemplo 5: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

b) $\langle B, R \rangle$ onde $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Exemplo 5: Seja $B = \{0, 1, 2\}$

b) $\langle B, R\rangle$ onde $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

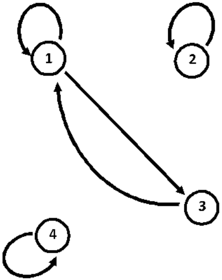
R	0	1	2
0	0	1	0
1	0	0	1
2	0	1	0



<u>Exemplo 6</u>: Escreva a matriz e desenhe o grafo da relação $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(4,4)\}$ em $A = \{1,2,3,4\}$. A relação R é reflexiva? A relação R é irreflexiva?

Exemplo 6: Escreva a matriz e desenhe o grafo da relação $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(4,4)\}$ em $A = \{1,2,3,4\}$. A relação R é reflexiva? A relação R é irreflexiva?

R	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	1



Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \to bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO!   b) R_2,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \to bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!

e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7, SIM! h) R_8,

Relação Simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \rightarrow bRa)$$

ou seja, se a está relacionado com b, então b estará relacionado com a.

Exemplo 7: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são simétricas:

a) R_1, NÃO! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7, SIM! h) R_8, NÃO!

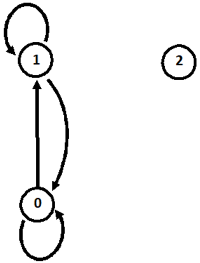
Matriz de uma relação simétrica: a matriz é simétrica ($M_R = M_R^T$).
Grafo de uma relação simétrica: entre dois vértices quaisquer, ou não existe aresta, ou existem duas arestas, uma em cada sentido.

Exemplo 8: Seja $B = \{0, 1, 2\}$ e $\langle B, R\rangle$ supondo $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Matriz de uma relação simétrica: a matriz é simétrica ($M_R = M_R^T$).
Grafo de uma relação simétrica: entre dois vértices quaisquer, ou não existe aresta, ou existem duas arestas, uma em cada sentido.

Exemplo 8: Seja $B = \{0, 1, 2\}$ e $\langle B, R\rangle$ supondo $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

R	0	1	2
0	1	1	0
1	1	1	0
2	0	0	0



Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b \text{ ou } b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R\, b$ ou $b \not R\, a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM!

b) R_2,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R\, b \text{ ou } b \not R\, a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not{R}\, b$ ou $b \not{R}\, a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3, SIM! d) R_4,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b$ ou $b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3, SIM! d) R_4, SIM!

e) R_5,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b \text{ ou } b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM!
b) R_2, NÃO!
c) R_3, SIM!
d) R_4, SIM!
e) R_5, NÃO!
f) R_6,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b \text{ ou } b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3, SIM! d) R_4, SIM!
e) R_5, NÃO! f) R_6, NÃO! g) R_7,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b \text{ ou } b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3, SIM! d) R_4, SIM!
e) R_5, NÃO! f) R_6, NÃO! g) R_7, NÃO! h) R_8,

Relação Anti-simétrica: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação anti-simétrica se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(aRb \text{ e } bRa \rightarrow a = b)$$

De forma equivalente: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \rightarrow a \not R b \text{ ou } b \not R a)$.

Exemplo 9: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são anti-simétricas:

a) R_1, SIM! b) R_2, NÃO! c) R_3, SIM! d) R_4, SIM!
e) R_5, NÃO! f) R_6, NÃO! g) R_7, NÃO! h) R_8, NÃO!

Matriz de uma relação anti-simétrica: para qualquer célula verdadeira (1) em uma das metades da matriz, em relação à diagonal, a correspondente célula na outra metade é falsa (0).
Grafo de uma relação anti-simétrica: entre dois vértices quaisquer, não há arestas nos dois sentidos.

Exemplo 10: A relação $S = \{(0,0),(1,1),(1,2)\}$ em $B = \{0,1,2\}$ é anti-simétrica?

Propriedades das Relações

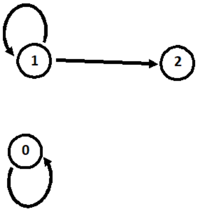
Relação Anti-simétrica

Matriz de uma relação anti-simétrica: para qualquer célula verdadeira (1) em uma das metades da matriz, em relação à diagonal, a correspondente célula na outra metade é falsa (0).

Grafo de uma relação anti-simétrica: entre dois vértices quaisquer, não há arestas nos dois sentidos.

Exemplo 10: A relação $S = \{(0,0),(1,1),(1,2)\}$ em $B = \{0,1,2\}$ é anti-simétrica?

S	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0



Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \to aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:
a) R_1, SIM! b) R_2,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!

e) R_5,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!

e) R_5, SIM! f) R_6,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7, NÃO! h) R_8,

Relação Transitiva: Sejam A um conjunto e R uma endorrelação em A. Então, R é uma relação transitiva se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(aRb \text{ e } bRc \rightarrow aRc)$$

Exemplo 11: Determine se as seguintes relações dos exemplos 1 e 3 são transitivas:

a) R_1, SIM! b) R_2, SIM! c) R_3, NÃO! d) R_4, SIM!
e) R_5, SIM! f) R_6, NÃO! g) R_7, NÃO! h) R_8, NÃO!

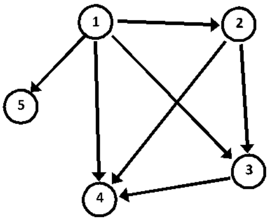
Matriz de uma relação transitiva: matricialmente não se verifica nenhuma estrutura específica.
Grafo de uma relação transitiva: sempre que uma aresta ligar um vértice a a um vértice b e o vértice b a um vértice c, então deve haver uma aresta de a para c.

Exemplo 12: A relação $S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ em $A = \{1,2,3,4,5\}$ é transitiva?

Matriz de uma relação transitiva: matricialmente não se verifica nenhuma estrutura específica.
Grafo de uma relação transitiva: sempre que uma aresta ligar um vértice a a um vértice b e o vértice b a um vértice c, então deve haver uma aresta de a para c.

Exemplo 12: A relação $S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ em $A = \{1,2,3,4,5\}$ é transitiva?

R	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0



Exercícios da apostila “6. Propriedades das Relações”, página 47.

Determine se a relação R, no conjunto de todas as pessoas, é reflexiva (R), irreflexiva (I), simétrica (S), anti-simétrica (AS) e/ou transitiva (T), em que $(a, b) \in R$ se e somente se:

a) a é mais alto que b;

b) a e b nasceram no mesmo dia;

c) a tem o mesmo prenome que b;

d) a e b têm um avô ou avó em comum.

Determine se a relação R, no conjunto de todas as pessoas, é reflexiva (R), irreflexiva (I), simétrica (S), anti-simétrica (AS) e/ou transitiva (T), em que $(a, b) \in R$ se e somente se:

a) a é mais alto que b;
b) a e b nasceram no mesmo dia;
c) a tem o mesmo prenome que b;
d) a e b têm um avô ou avó em comum.

Soluções:

a) I, AS, T   b) R, S, T   c) R, S, T   d) R, S

Relações de Equivalência

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

<u>Exemplo</u>: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a = b\}$. R é de equivalência?

Relações de Equivalência

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a = b\}$. R é de equivalência?
$R = \{\ldots, (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$ é reflexiva, é simétrica e é transitiva.
Portanto, é uma relação de equivalência.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a \leq b\}$. R é de equivalência?

Relações de Equivalência

Uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a = b\}$. R é de equivalência?
$R = \{\ldots, (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$ é reflexiva, é simétrica e é transitiva.
Portanto, é uma relação de equivalência.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a \leq b\}$. R é de equivalência?
aRa pois $a \leq a \Rightarrow R$ é reflexiva;
aRb pois $a \leq b$, mas $b \not R a$ pois $b \not\leq a \Rightarrow R$ não é simétrica;
aRb e bRc então aRc pois $a \leq b \leq c$. Assim $a \leq c \Rightarrow R$ é transitiva.

Portanto, R não é de equivalência.

Sejam R uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Então, a "classe de equivalência de a", denotada por $[a]$, é definida por:

$$[a] = \{x \in A/xRa\} \text{ ou } [a] = \{x \in A/(x, a) \in R\}$$

Exemplo: Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação de equivalência $R \subseteq A \times A$, definida por $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)(3, 3), (4, 4), (0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1), (0, 4), (4, 0), (2, 4), (4, 2)\}$.
Então, as classes de equivalência dos elementos de A, são:

Sejam R uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Então, a "classe de equivalência de a", denotada por $[a]$, é definida por:

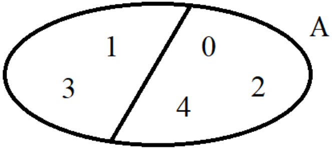
$$[a] = \{x \in A / xRa\} \text{ ou } [a] = \{x \in A / (x, a) \in R\}$$

Exemplo: Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação de equivalência $R \subseteq A \times A$, definida por $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)(3, 3), (4, 4), (0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 1), (0, 4), (4, 0), (2, 4), (4, 2)\}$.
Então, as classes de equivalência dos elementos de A, são:

$[0] = \{0, 2, 4\}$; $[1] = \{1, 3\}$;
$[2] = \{2, 0, 4\}$; $[3] = \{3, 1\}$;
$[4] = \{4, 0, 2\}$.

Observação: a união das classes de equivalência de R é igual ao conjunto A e essas classes de equivalência são iguais ou disjuntos. Isso nos leva a concluir que uma relação de equivalência em um conjunto A particiona o conjunto A em conjuntos disjuntos.
O conjunto das classes de equivalência será indicado por A/R.

Assim, com relação ao exemplo anterior, temos as classes de equivalência $\{0, 2, 4\}$ e $\{1, 3\}$:



Relações de Ordem Parcial

Uma relação R em um conjunto A é de "ordem parcial" se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ em $A = \{1,2,3\}$. R é de ordem parcial?

Relações de Ordem Parcial

Uma relação R em um conjunto A é de "ordem parcial" se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ em $A = \{1,2,3\}$. R é de ordem parcial?
R é reflexiva, é anti-simétrica e é transitiva. Portanto, é uma relação de ordem parcial.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{N}^*$ e $R = \{(a,b) \in A \times A / a|b\}$. R é uma relação de ordem?

Relações de Ordem Parcial

Uma relação R em um conjunto A é de "ordem parcial" se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ em $A = \{1,2,3\}$. R é de ordem parcial?
R é reflexiva, é anti-simétrica e é transitiva. Portanto, é uma relação de ordem parcial.

Exemplo: Seja $A = \mathbb{N}^*$ e $R = \{(a,b) \in A \times A / a|b\}$. R é uma relação de ordem?
aRa pois $a|a \Rightarrow R$ é reflexiva;
aRb, mas $b\not{R}\,a$. Por exemplo, temos o par ordenado $(1,2)$ mas não temos $(2,1)$. Logo, R é anti-simétrica;
aRb e bRc, então teremos aRc. Por exemplo, temos o par ordenado $(2,4)$ e $(4,8)$, então teremos o par (2,8). Logo, R é transitiva.

Portanto, R é uma relação de ordem.

Relações de Ordem Parcial

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a \leq b\}$. R é uma relação de ordem?

Relações de Ordem Parcial

Exemplo: Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A / a \leq b\}$. R é uma relação de ordem?
aRa pois $a \leq a \Rightarrow R$ é reflexiva;
aRb pois $a \leq b$, assim $b \not R a$ pois $b \not\leq a$. Logo, R é anti-simétrica;
aRb e bRc, então teremos aRc, pois $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$. Logo, R é transitiva.

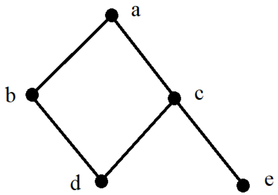
Portanto, R é uma relação de ordem.

Se A é um conjunto finito, então podemos representar uma relação de ordem parcial em A pelo "diagrama de Hasse".

Exemplo: Represente a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ em $A = \{1,2,3\}$, do exemplo anterior, como grafo e como diagrama de Hasse.

Dica para o diagrama de Hasse: o diagrama de Hasse é construído com base num grafo, onde cada elemento de A é representado por um ponto (vértice) do diagrama, posicionado de baixo para cima, de acordo com os pares ordenados da relação de ordem. As arestas do diagrama representam as relações anti-simétricas, enquanto as relações reflexivas e transitivas ficam implícitas no diagrama. Em função da disposição dos vértices de baixo para cima, a orientação das arestas torna-se desnecessária.

Exemplo: Dado o diagrama de Hasse abaixo, liste os pares ordenados que pertencem à relação de ordem parcial correspondente.



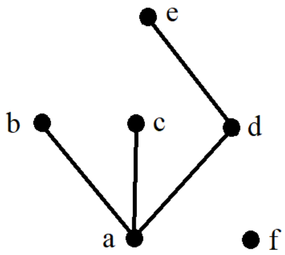
Exercício: Dada a relação de ordem $\langle P\{1,2\}, \subseteq \rangle$, represente o diagrama de Hasse da relação.

Relações de Ordem Parcial

Diagrama de Hasse

Exercício: Dados o conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e a relação de ordem "x divide y", represente a relação pelo seu diagrama de Hasse.

Exercício: Dado o diagrama de Hasse abaixo, escreva o conjunto correspondente à relação de ordem.



Exercícios da apostila “8. Relações de equivalência”, página 51.

Relação Funcional: Uma relação $R : A \to B$ é dita funcional se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(aRb_1 \land aRb_2 \to b_1 = b_2),$$

ou seja, cada elemento do conjunto de partida está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$. R é uma relação funcional?

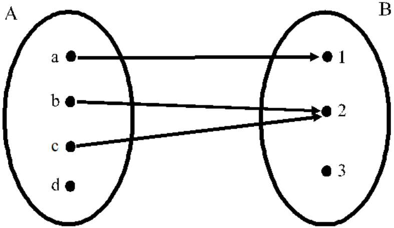
Relação Funcional: Uma relação $R : A \to B$ é dita funcional se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1 = b_2),$$

ou seja, cada elemento do conjunto de partida está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$. R é uma relação funcional? Sim, R é uma relação funcional.

R	1	2	3
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	1	0
d	0	0	0



Relação Injetora: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é dita injetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1Rb \wedge a_2Rb \rightarrow a_1 = a_2),$$

ou seja, cada elemento do conjunto de chegada está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de partida.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação injetora?

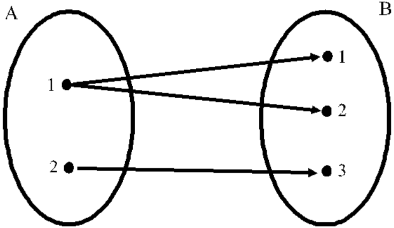
Relação Injetora: Uma relação $R : A \to B$ é dita injetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 R b \wedge a_2 R b \to a_1 = a_2),$$

ou seja, cada elemento do conjunto de chegada está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de partida.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação injetora? Sim, R é uma relação injetora.

R	1	2	3
1	1	1	0
2	0	0	1



Relação Total: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é dita total se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb),$$

ou seja, todos os elementos do conjunto de partida (domínio) devem estar relacionados a pelo menos um elemento do conjunto de chegada (imagem).

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação total?

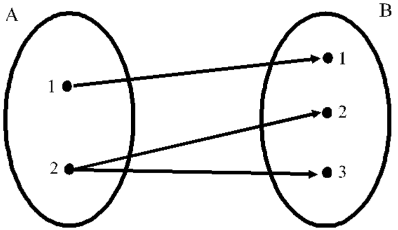
Relação Total: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é dita total se, e somente se

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb),$$

ou seja, todos os elementos do conjunto de partida (domínio) devem estar relacionados a pelo menos um elemento do conjunto de chegada (imagem).

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. R é uma relação total? Sim, R é uma relação total.

R	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	1



Relação Sobrejetora: Uma relação $R : A \to B$ é dita sobrejetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb),$$

ou seja, todos os elementos do conjunto de chegada (imagem) devem estar relacionados a pelo menos um elemento do conjunto de partida (domínio).

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, b), (c, a)\}$. R é uma relação sobrejetora?

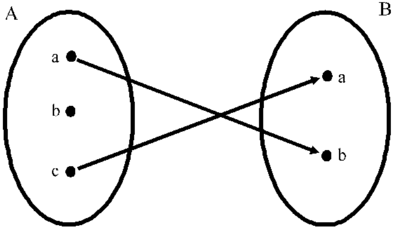
Relação Sobrejetora: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é dita sobrejetora se, e somente se

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb),$$

ou seja, todos os elementos do conjunto de chegada (imagem) devem estar relacionados a pelo menos um elemento do conjunto de partida (domínio).

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(a, b), (c, a)\}$. R é uma relação sobrejetora? Sim, R é uma relação sobrejetora.

R	a	b
a	0	1
b	0	0
c	1	0



Monomorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um monomorfismo se, e somente se for, simultaneamente "total" e "injetora".

Exemplo: Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(a, a)\}$. R é um monomorfismo?

Monomorfismo: Uma relação $R : A \to B$ é um monomorfismo se, e somente se for, simultaneamente "total" e "injetora".

Exemplo: Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, a)\}$. R é um monomorfismo?
Sim, R é um monomorfismo.

Monomorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um monomorfismo se, e somente se for, simultaneamente "total" e "injetora".

Exemplo: Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(a, a)\}$. R é um monomorfismo?
Sim, R é um monomorfismo.

Epimorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um epimorfismo se, e somente se for, simultaneamente "funcional" e "sobrejetora".

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(0, a), (1, b)\}$. R é um epimorfismo?

Monomorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um monomorfismo se, e somente se for, simultaneamente “total” e “injetora”.

Exemplo: Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(a, a)\}$. R é um monomorfismo?
Sim, R é um monomorfismo.

Epimorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um epimorfismo se, e somente se for, simultaneamente “funcional” e “sobrejetora”.

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(0, a), (1, b)\}$. R é um epimorfismo?
Sim, R é um epimorfismo.

Isomorfismo: Uma relação $R : A \rightarrow B$ é um isomorfismo se, e somente se, existe uma relação $S : B \rightarrow A$, tal que $S \circ R = id_A$ e $R \circ S = id_B$, onde id_X é uma endorrelação de igualdade definida em X, isto é, $\langle X, = \rangle$, chamada de "relação identidade".

Assim, se $S \circ R = id_A$ e $R \circ S = id_B$, podemos afirmar que a relação R "possui inversa" (a relação S).

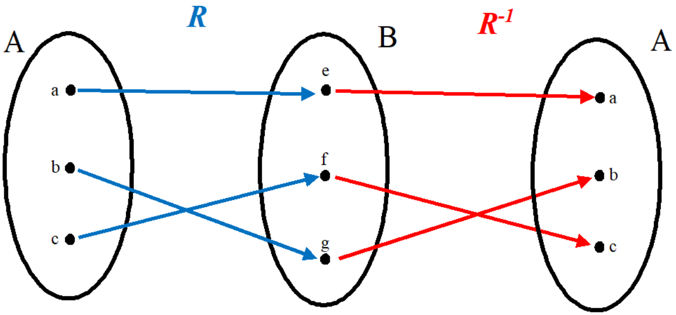
Ainda, se existe um isomorfismo entre dois conjuntos, podemos chamá-los de "conjuntos isomorfos".

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{e, f, g\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, e), (b, g), (c, f)\}$.
R é um isomorfismo?

Tipos de Relações

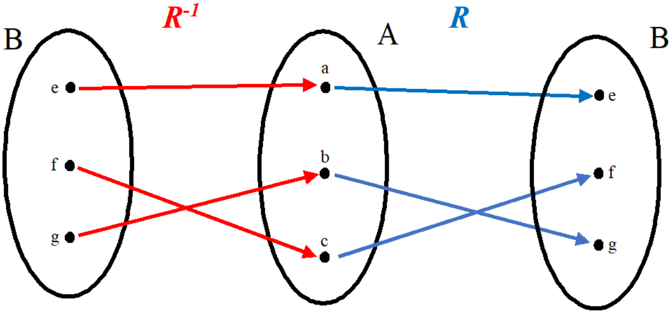
Isomorfismo

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{e, f, g\}$ e $R : A \to B$, tal que $R = \{(a, e), (b, g), (c, f)\}$.
R é um isomorfismo?
Se considerarmos a relação inversa $R^{-1} : B \to A = \{(e, a), (g, b), (f, c)\}$, podemos construir o seguinte diagrama de setas:



Então, $R^{-1} \circ R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} = id_A$.

Ao mesmo tempo, podemos construir o seguinte diagrama de setas:



Então, $R \circ R^{-1} = \{(e,e),(f,f),(g,g)\} = id_B$.

Logo, a relação R possui inversa e os conjuntos A e B são conjuntos isomorfos. Portanto, R é um isomorfismo!

Teorema: Seja $R : A \rightarrow B$ uma relação. Então R é um isomorfismo se, e somente se, R for simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo.

Dessa forma, uma relação é um "isomorfismo" se, e somente se, for simultaneamente uma relação total, injetora, funcional e sobrejetora.

Observa-se que para uma relação ser um isomorfismo, os conjuntos origem (domínio) e destino (imagem) devem possuir o mesmo número de elementos.

Exercício: Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $R : A \rightarrow B$, tal que $R = \{(a, 0), (b, 1)\}$. R é um isomorfismo?

Exercícios da apostila “10. Tipos de Relações”, página 58.

Exercícios: Classifique as endorrelações abaixo considerando que sejam definidas sobre o conjunto $S = \{2, 5, 7, 9\}$. Uma mesma relação deverá ser classificada em todas as categorias possíveis empregando a seguinte codificação: (a) relação funcional; (b) relação injetora; (c) relação total; (d) relação sobrejetora; (e) isomorfismo; (f) monomorfismo; (g) epimorfismo.

a) $R_a = \{(5, 2), (7, 5), (9, 2), (2, 9)\}$;
b) $R_b = \{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$;
c) $R_c = \{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$;
d) $R_d = \{(7, 2), (2, 9), (5, 5), (9, 7)\}$.

Função Parcial: é uma “relação funcional”, isto é, cada elemento do conjunto de partida (domínio) está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada (imagem). Além disso, existe pelo menos um elemento do conjunto de partida que não possui relação com elementos do conjunto de chegada, ou seja, não é uma “relação total”.

Uma função parcial é denotada por $f : A \to B$ e o par $(a, b) \in f$ é denotado por $f(a) = b$.

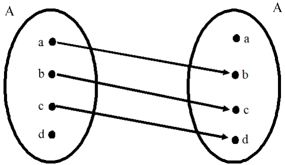
Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $f : A \to A$ tal que $f = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. A relação f é uma função parcial?

Função Parcial: é uma "relação funcional", isto é, cada elemento do conjunto de partida (domínio) está relacionado com, no máximo, um elemento do conjunto de chegada (imagem). Além disso, existe pelo menos um elemento do conjunto de partida que não possui relação com elementos do conjunto de chegada, ou seja, não é uma "relação total".

Uma função parcial é denotada por $f : A \to B$ e o par $(a, b) \in f$ é denotado por $f(a) = b$.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $f : A \to A$ tal que $f = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. A relação f é uma função parcial? Sim, f é uma função parcial.

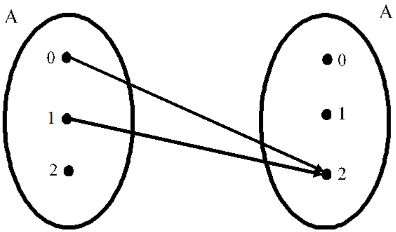
f	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0



Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \to A$ tal que $f = \{(0, 2), (1, 2)\}$.
a) A relação f é uma função parcial?

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \rightarrow A$ tal que $f = \{(0, 2), (1, 2)\}$.
a) A relação f é uma função parcial? Sim, f é uma função parcial.

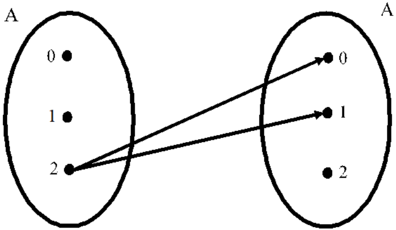
f	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	1
2	0	0	0



Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \to A$ tal que $f = \{(0, 2), (1, 2)\}$.
b) A relação inversa f^{-1} é uma função parcial?

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \to A$ tal que $f = \{(0, 2), (1, 2)\}$.
b) A relação inversa f^{-1} é uma função parcial? Não, f^{-1} não é uma relação funcional, onde $f^{-1} = \{(2, 0), (2, 1)\}$.

f^{-1}	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	1	1	0



Observação: Para que a relação inversa de uma função parcial seja também uma função parcial (relação funcional), ela deve ser uma função parcial injetora.

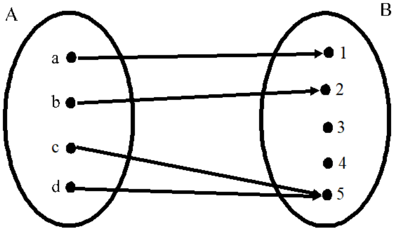
Função Total: denominada simplesmente função, é uma “relação funcional” que também é uma “relação total”. Na sua representação matricial, existe exatamente um valor verdadeiro em cada linha da matriz.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f : A \rightarrow B$, onde $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5), (d, 5)\}$. A relação f é uma função total?

Função Total: denominada simplesmente função, é uma "relação funcional" que também é uma "relação total". Na sua representação matricial, existe exatamente um valor verdadeiro em cada linha da matriz.

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f : A \to B$, onde $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5), (d, 5)\}$. A relação f é uma função total? Sim, f é uma função total.

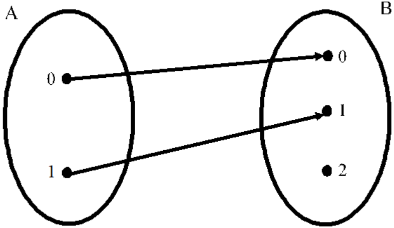
f	1	2	3	4	5
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	1



Exemplo: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \to B$ tal que $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$.
a) A relação f é uma função total?

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \rightarrow B$ tal que $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$.
a) A relação f é uma função total? Sim, f é uma função total.

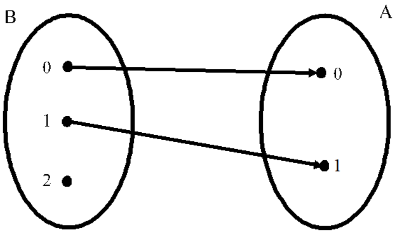
f	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0



Exemplo: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \to B$ tal que $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$.
b) A relação inversa f^{-1} é uma função total?

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f : A \rightarrow B$ tal que $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$.
b) A relação inversa f^{-1} é uma função total? A relação $f^{-1} = \{(0, 0), (1, 1)\}$ é uma relação funcional porém não é uma relação total. Portanto, f^{-1} é uma função parcial mas não é uma função total.

f^{-1}	0	1
0	1	0
1	0	1
2	0	0



Observação: Para que a relação inversa de uma função seja também uma função (relação funcional e total), ela deve ser uma função bijetora (injetora + sobrejetora).

Para uma função total, podemos verificar as seguintes propriedades:

- Função Injetora = monomorfismo (total e injetora);
- Função Sobrejetora = epimorfismo (funcional e sobrejetora);
- Função Bijetora = isomorfismo (total, injetora, funcional e sobrejetora).

Exercícios: Determine se as funções abaixo são: injetoras, sobrejetoras e/ou bijetoras:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n^2 + 2$;

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que $f(z) = z^2 + 1$;

c) $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ tal que $f(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ ímpar} \\ 1, & j \text{ par} \end{cases}$;

d) $f : S \to T$ onde S={conjunto de todos os automóveis} e T={todas as pessoas da cidade} , tal que f associa cada automóvel ao seu proprietário.

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL