Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

# Matemática Discreta

Prof. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky - PPGEP/UCS
e-mail: ldchiwiacowsky@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

# Sumário


1. Sequências
2. Leis de Formação
    - Fórmula
    - Lei de Recorrência
    - Propriedade dos Termos
3. Indução Matemática
    - Princípio da Indução Matemática

### Definição

Chama-se sequência toda função $S : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Em toda sequência, a cada número natural $n$ está associado um $S(n)$. O termo $S(n)$ é o termo de ordem $n$ ou termo geral da sequência.

Exemplo: Seja a função $S : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $S(n) = 2n$. Escreva os pares ordenados definidos pela função.

Exemplo: Seja a função $S : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $S(n) = 2n$. Escreva os pares ordenados definidos pela função.

$$S = \{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots,(n,2n),\ldots\}$$

Como os primeiros elementos dos pares ordenados são sempre os números naturais $\mathbb{N}^* = 1,2,3,\ldots,$ podemos indicar uma sequência $S$ anotando apenas a imagem de $S$, ordenadamente.

No exemplo anterior, temos:

$$S = 2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots$$

<u>Exemplos</u>:

1. $1, 2, 3, 4, 6, 12$ é a sequência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12, dispostos em ordem crescente.

Exemplos:

1. $1, 2, 3, 4, 6, 12$ é a sequência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12, dispostos em ordem crescente.
2. $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ é a sequência (infinita) dos múltiplos inteiros positivos de 3, em ordem crescente.

Estaremos interessados nas sequências em que os termos se sucedem obedecendo a uma certa regra, isto é, aquelas sequências que apresentam uma lei de formação.

A lei de formação pode ser apresentada de três maneiras:

1. uma fórmula;
2. uma lei recorrência;
3. propriedade dos termos.

Uma sequência $S(n)$ fica determinada se cada termo é expresso em função de sua posição $n$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $A$ cujos termos obedecem à lei $A(n) = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Uma sequência $S(n)$ fica determinada se cada termo é expresso em função de sua posição $n$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $A$ cujos termos obedecem à lei $A(n) = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$A = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \Rightarrow A = 2, 4, 8, 16$$

Exemplo: Escreva os cinco termos iniciais da sequência infinita $B$ em que os termos verificam a relação $B(n) = 3n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Uma sequência $S(n)$ fica determinada se cada termo é expresso em função de sua posição $n$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $A$ cujos termos obedecem à lei $A(n) = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$A = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \Rightarrow A = 2, 4, 8, 16$$

Exemplo: Escreva os cinco termos iniciais da sequência infinita $B$ em que os termos verificam a relação $B(n) = 3n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$B = (3 \times 1 + 1), (3 \times 2 + 1), (3 \times 3 + 1), (3 \times 4 + 1), (3 \times 5 + 1), \ldots = 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$$

Exemplo: Escreva a fórmula geral de cada uma das sequências:

a) $A = 2, 5, 8, 11, \ldots$

Exemplo: Escreva a fórmula geral de cada uma das sequências:

a) $A = 2, 5, 8, 11, \ldots$

$$A(n) = (3-1), (6-1), (9-1), (12-1), \ldots = (3\times1-1), (3\times2-1), (3\times3-1), (3\times4-1), \ldots$$

$$A(n) = 3n - 1, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $B = 1, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}, 3, \ldots =$

Exemplo: Escreva a fórmula geral de cada uma das sequências:

a) $A = 2, 5, 8, 11, \ldots$

$$A(n) = (3-1), (6-1), (9-1), (12-1), \ldots = (3\times 1-1), (3\times 2-1), (3\times 3-1), (3\times 4-1), \ldots$$

$$A(n) = 3n - 1, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $B = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \ldots$

Exemplo: Escreva a fórmula geral de cada uma das sequências:

a) $A = 2, 5, 8, 11, \ldots$

$$A(n) = (3-1), (6-1), (9-1), (12-1), \ldots = (3\times1-1), (3\times2-1), (3\times3-1), (3\times4-1), \ldots$$

$$A(n) = 3n - 1, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $B = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \ldots \Rightarrow B(n) = \frac{2n+1}{3}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $C = 1, -1, 1, -1, \ldots \Rightarrow$

<u>Exemplo</u>: Escreva a fórmula geral de cada uma das sequências:

a) $A = 2, 5, 8, 11, \ldots$

$$A(n) = (3-1), (6-1), (9-1), (12-1), \ldots = (3\times1-1), (3\times2-1), (3\times3-1), (3\times4-1), \ldots$$

$$A(n) = 3n - 1, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $B = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \ldots \Rightarrow B(n) = \frac{2n+1}{3}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $C = 1, -1, 1, -1, \ldots \Rightarrow A(n) = (-1)^{n-1}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

# Leis de Formação

## Definição por uma Lei de Recorrência

Uma sequência $S(n)$ fica determinada se conhecermos um de seus termos e uma sentença que permita calcular cada termo a partir do termo conhecido.

Exemplo: Escreva a sequência finita $S$ cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $S(1) = 2$ e $S(n) = S(n-1) + 3$ onde $n = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Uma sequência $S(n)$ fica determinada se conhecermos um de seus termos e uma sentença que permita calcular cada termo a partir do termo conhecido.

Exemplo: Escreva a sequência finita $S$ cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $S(1) = 2$ e $S(n) = S(n-1) + 3$ onde $n = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$
\begin{aligned}
n = 2: \quad & S(2) &= S(2-1) + 3 \Rightarrow S(2) = S(1) + 3 = 2 + 3 = 5 \\
n = 3: \quad & S(3) &= S(3-1) + 3 \Rightarrow S(3) = S(2) + 3 = 5 + 3 = 8 \\
n = 4: \quad & S(4) &= S(4-1) + 3 \Rightarrow S(4) = S(3) + 3 = 8 + 3 = 11 \\
n = 5: \quad & S(5) &= S(5-1) + 3 \Rightarrow S(5) = S(4) + 3 = 11 + 3 = 14 \\
n = 6: \quad & S(6) &= S(6-1) + 3 \Rightarrow S(6) = S(5) + 3 = 14 + 3 = 17
\end{aligned}
$$

Exemplo: Escreva os seis termos iniciais da sequência infinita $M$ dada pela seguinte fórmula de recorrência: $M(1) = 1$ e $M(n) = 3M(n-1)$ para $n \geq 2$.

Exemplo: Escreva os seis termos iniciais da sequência infinita $M$ dada pela seguinte fórmula de recorrência: $M(1) = 1$ e $M(n) = 3M(n-1)$ para $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
n = 2: \quad M(2) &= 3 \times M(2-1) = 3 \times M(1) = 3 \times 1 = 3 \\
n = 3: \quad M(3) &= 3 \times M(3-1) = 3 \times M(2) = 3 \times 3 = 9 \\
n = 4: \quad M(4) &= 3 \times M(4-1) = 3 \times M(3) = 3 \times 9 = 27 \\
n = 5: \quad M(5) &= 3 \times M(5-1) = 3 \times M(4) = 3 \times 27 = 81 \\
n = 6: \quad M(6) &= 3 \times M(6-1) = 3 \times M(5) = 3 \times 81 = 243
\end{aligned}
$$

# Leis de Formação

### Definição por uma Lei de Recorrência

Exemplo: A famosa sequência de Fibonacci é uma sequência de números definida recursivamente por $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$, para $n > 2$ . Nesse caso, são dados os dois primeiros valores e a definição de recorrência define o $n$-ésimo valor em termo dos dois valores precedentes. Escreva os oito primeiros valores da sequência de Fibonacci.

Exemplo: A famosa sequência de Fibonacci é uma sequência de números definida recursivamente por $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$, para $n > 2$ . Nesse caso, são dados os dois primeiros valores e a definição de recorrência define o $n$-ésimo valor em termo dos dois valores precedentes. Escreva os oito primeiros valores da sequência de Fibonacci.

$$
\begin{aligned}
n = 1: \quad & F(1) &&= 0 \\
n = 2: \quad & F(2) &&= 1 \\
n = 3: \quad & F(3) &&= F(3-2) + F(3-1) = F(1) + F(2) = 0 + 1 = 1 \\
n = 4: \quad & F(4) &&= F(4-2) + F(4-1) = F(2) + F(3) = 1 + 1 = 2 \\
n = 5: \quad & F(5) &&= F(5-2) + F(5-1) = F(3) + F(4) = 1 + 2 = 3 \\
n = 6: \quad & F(6) &&= F(4) + F(5) = 2 + 3 = 5 \\
n = 7: \quad & F(7) &&= F(5) + F(6) = 3 + 5 = 8 \\
n = 8: \quad & F(8) &&= F(6) + F(7) = 5 + 8 = 13
\end{aligned}
$$

Exemplo: A Escreva os cinco termos iniciais e a fórmula geral da sequência infinita definida por $S(1) = 1$ e $S(n) = 2S(n-1) + 1$, $n \geq 2$.

Exemplo: A Escreva os cinco termos iniciais e a fórmula geral da sequência infinita definida por $S(1) = 1$ e $S(n) = 2S(n-1) + 1$, $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
n = 2: \quad S(2) &= 2S(2-1) + 1 = 2S(1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\
n = 3: \quad S(3) &= 2S(3-1) + 1 = 2S(2) + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \\
n = 4: \quad S(4) &= 2S(4-1) + 1 = 2S(3) + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \\
n = 5: \quad S(5) &= 2S(4) + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31 \\
n = 6: \quad S(6) &= 2S(5) + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63
\end{aligned}
$$

<u>Exemplo</u>: A Escreva os cinco termos iniciais e a fórmula geral da sequência infinita definida por $S(1) = 1$ e $S(n) = 2S(n-1) + 1$, $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
n = 2: \quad S(2) &= 2S(2-1) + 1 = 2S(1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\
n = 3: \quad S(3) &= 2S(3-1) + 1 = 2S(2) + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \\
n = 4: \quad S(4) &= 2S(4-1) + 1 = 2S(3) + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \\
n = 5: \quad S(5) &= 2S(4) + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31 \\
n = 6: \quad S(6) &= 2S(5) + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63
\end{aligned}$$

Fórmula geral: $S(n) = 2^n - 1$, para $n \geq 1$.

Uma propriedade $p$ determina uma sequência se, e somente se, existe uma única sequência cujos termos satisfazem $p$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $F$ de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros positivos da respectiva posição na sequência.

Uma propriedade $p$ determina uma sequência se, e somente se, existe uma única sequência cujos termos satisfazem $p$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $F$ de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros positivos da respectiva posição na sequência.

$$F = 1, 2, 2, 3, 2, 4$$

Exemplo: Escreva os cinco termos iniciais da sequência infinita $G$ formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Uma propriedade $p$ determina uma sequência se, e somente se, existe uma única sequência cujos termos satisfazem $p$.

Exemplo: Escreva a sequência finita $F$ de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros positivos da respectiva posição na sequência.

$$F = 1, 2, 2, 3, 2, 4$$

Exemplo: Escreva os cinco termos iniciais da sequência infinita $G$ formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

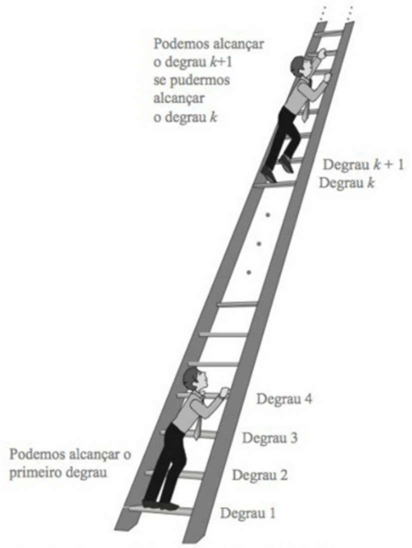
$$G = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

Exercícios da apostila “12. Sequências”, página 62.

## Definição

Indução Matemática é um método de demonstração matemática elaborado com base no “Princípio da Indução Finita”, frequentemente utilizado para provar que certas propriedades são verdadeiras para todos os números naturais.

É um processo de prova que, baseado numa quantidade finita de observações, estende e generaliza a propriedade para <u>todo</u> o conjunto de números inteiros positivos.




# Indução Matemática

## Introdução

Imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta. Como saber se você será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?

Você pode fazer as seguintes hipóteses sobre a sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez que tenhas chegado a um degrau qualquer, você sempre será capaz de chegar ao próximo.

O método de Indução Matemática funciona provando que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial (base indutiva), e então prova-se que o processo usado para ir de um valor para o próximo valor é valido (passo indutivo).

Se ambas as coisas são provadas, então qualquer valor pode ser obtido através da repetição desse processo.

Seja $P$ uma proposição definida nos inteiros positivos, tal que:

1. $P(n_0)$ é verdadeira.
2. Para qualquer inteiro positivo $k$, se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, a afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número inteiro $n_0$ tem a propriedade $P$ (base de indução).

A proposição 2 é uma hipótese que tem que ser válida para todo $k$. Supondo $P(k)$ verdadeiro (hipótese de indução), poderemos mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Resumindo:

| | | |
|---|---|---|
| Passo 1 | Base de indução | Prove $P(n_0)$ |
| Passo 2 | Hipótese de indução | Suponha $P(k)$ |
| Passo 3 | Passo de indução | Prove $P(k+1)$ |

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \text{OK!}$$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \quad ???$$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) \quad : \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{P(k)} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \quad \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

Exemplo 1: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) \quad : \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{P(k)} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \quad \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}, \qquad \text{OK!}$$

Exemplo 2: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa.

Exemplo 2: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa.

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0): \quad 0 = \frac{0 \times (0+2)}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$

<u>Exemplo 2</u>: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa.

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 0 = \frac{0 \times (0+2)}{2} = \frac{0}{2} = 0, \quad \text{OK!}$$

Exemplo 2: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa.

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 0 = \frac{0 \times (0+2)}{2} = \frac{0}{2} = 0, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2}$$

Exemplo 2: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa.

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 0 = \frac{0 \times (0+2)}{2} = \frac{0}{2} = 0, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2}$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+2]}{2} \quad ???$$

Exemplo 2: Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 0$,

$P(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$ é falsa

Passo 3: Passo de indução

$$
\begin{aligned}
P(k+1) \quad : \quad & \underbrace{0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{P(k)} + (k+1) = \frac{k(k+2)}{2} + (k+1) = \\
= \quad & \frac{k(k+2) + 2(k+1)}{2} = \frac{k(k+2) + 2k + 2}{2} = \frac{k(k+2) + (k+2) + k}{2} = \\
= \quad & \frac{(k+1)(k+2) + k}{2} = \frac{(k+1)[(k+1) + 2 - 1] + k}{2} = \\
= \quad & \frac{(k+1)[(k+1) + 2] - k - 1 + k}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+2]}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1,$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1, \quad \text{OK!}$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 \quad ???$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Passo 3: Passo de indução

$$
\begin{aligned}
P(k+1) \quad &: \quad \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k}_{P(k)} + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1 = \\
&= \quad 2^{(k+1)+1} - 1,
\end{aligned}
$$

Exemplo 3: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$, $P(n) : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Passo 3: Passo de indução

$$\begin{aligned} P(k+1) \quad : \quad & \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k}_{P(k)} + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1 = \\ = \quad & 2^{(k+1)+1} - 1, \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 2 = 1 \times (1+1) = 2,$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 2 = 1 \times (1+1) = 2, \quad \text{OK!}$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$
Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 2 = 1 \times (1+1) = 2, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k+1)$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(1) : \quad 2 = 1 \times (1+1) = 2, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k+1)$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1) = (k+1)[(k+1)+1] \quad ???$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

Passo 3: Passo de indução

$$
\begin{aligned}
P(k+1) \quad &: \quad \underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + 2k}_{P(k)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2) = \\
&= \quad (k+1)[(k+1)+1],
\end{aligned}
$$

Exemplo 4: Prove, para todos os inteiros $n \geq 1$, $P(n) : 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

Passo 3: Passo de indução

$$\begin{aligned} P(k+1) \quad : \quad & \underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + 2k}_{P(k)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2) = \\ = \quad & (k+1)[(k+1)+1], \qquad \text{OK!} \end{aligned}$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$$P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$$P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 0 \times 1 = \frac{0 \times (0+1) \times (0+2)}{3} = 0,$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$$P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0) : \quad 0 \times 1 = \frac{0 \times (0+1) \times (0+2)}{3} = 0, \quad \text{OK!}$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$P(n): 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Passo 1: Base de indução é verdadeira, pois

$$P(n_0) = P(0): \quad 0 \times 1 = \frac{0 \times (0+1) \times (0+2)}{3} = 0, \quad \text{OK!}$$

Passo 2: Hipótese de indução

$$P(k): 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$$P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k(k+1)+(k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3} \quad ???$$

$$P(k+1) \quad : \quad \underbrace{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + k(k+1)}_{P(k)} + (k+1)[(k+1)+1] =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)[(k+1)+1]}{3} =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3},$$

Exemplo 5: Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 0$,

$$P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Passo 3: Passo de indução

$$P(k+1) : 1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k(k+1)+(k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3} \quad ???$$

$$P(k+1) \quad : \quad \underbrace{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + k(k+1)}_{P(k)} + (k+1)[(k+1)+1] =$$

$$= \quad \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)[(k+1)+1]}{3} =$$

$$= \quad \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}, \quad \text{OK!}$$

Exercícios:

1) Prove $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) Prove $\frac{1}{2(2-1)}+\frac{1}{3(3-1)}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{n}, \quad \forall n\geq 2$

3) Prove $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Prove $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

5) Prove $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}, \quad \forall n\geq 2$

UCS
UNIVERSIDADE
DE CAXIAS DO SUL