Matemática Discreta

Prof. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky - PPGEP/UCS
e-mail: ldchiwiacowsky@ucs.br

Universidade de Caxias do Sul
Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias

Sumário

Análise Combinatória

A análise combinatória é o estudo dos arranjos dos objetos, estando relacionada a problemas de contagem de conjuntos finitos.
Surge com frequência em problemas teóricos e práticos ligados aos computadores, por exemplo:

- Determinação do número total de senhas possíveis para um sistema computacional, sabendo que ela é formada por sete caracteres (número ou letra do alfabeto);
- Determinação do número de operações executadas em um algoritmo (complexidade de algoritmos);
- Determinar se há números de telefone ou endereços de protocolo da Internet suficientes para atender a demanda.

Iniciaremos nosso estudo pelos princípios fundamentais de contagem que servirão como base para as demais formas de contagem.

Definição

Se uma tarefa puder ser realizada em uma das n_1 formas ou em uma das n_2 formas, em que nenhum dos elementos do conjunto das n_1 formas é o mesmo que algum elemento do conjunto das n_2 formas, então há $n_1 + n_2$ formas de realizar a tarefa.

Exemplo: Um estudante deseja participar da Semana Universitária. Foram oferecidos 2 seminários e 3 palestras que interessavam a ele, todos no mesmo horário. Qual o número total de possibilidades de escolha de participação que o estudante tem?

Princípios Básicos da Contagem

Princípio Aditivo

Exemplo: Um estudante deseja participar da Semana Universitária. Foram oferecidos 2 seminários e 3 palestras que interessavam a ele, todos no mesmo horário. Qual o número total de possibilidades de escolha de participação que o estudante tem?

Note que o estudante tem duas maneiras distintas para a escolha do seminário, $n(S) = 2$, e três maneiras distintas para a escolha da palestra, $n(P) = 3$. Como os eventos são mutuamente excludentes, visto que o estudante não poderá assistir a uma palestra e participar de um seminário que são eventos distintos no mesmo horário, o número de possibilidades de escolhas será:

$$n(S) + n(P) = 2 + 3 = 5.$$

Exemplo: Um estudante pode escolher um projeto de computação a partir de três listas. As três listas contêm 23, 15 e 19 projetos possíveis, respectivamente. Nenhum projeto está em mais de uma lista. Quantos projetos possíveis existem para serem escolhidos?

Exemplo: Um estudante pode escolher um projeto de computação a partir de três listas. As três listas contêm 23, 15 e 19 projetos possíveis, respectivamente. Nenhum projeto está em mais de uma lista. Quantos projetos possíveis existem para serem escolhidos?

O estudante pode escolher um projeto da primeira lista, um projeto da segunda lista ou um projeto da terceira lista. Como todos os projetos estão em apenas uma lista, pela regra da soma há $23 + 15 + 19 = 57$ maneiras de escolher um projeto.

Exemplo: Qual o valor de k depois de o seguinte código ser executado?

$k := 0$
for $i_1 := 1$ **to** n_1
    $k := k + 1$
for $i_2 := 1$ **to** n_2
    $k := k + 1$
    .
    .
    .
for $i_m := 1$ **to** n_m
    $k := k + 1$

Exemplo: Qual o valor de k depois de o seguinte código ser executado?

$$
\begin{array}{l}
k := 0 \\
\textbf{for } i_1 := 1 \textbf{ to } n_1 \\
\quad k := k + 1 \\
\textbf{for } i_2 := 1 \textbf{ to } n_2 \\
\quad k := k + 1 \\
\quad \vdots \\
\textbf{for } i_m := 1 \textbf{ to } n_m \\
\quad k := k + 1
\end{array}
$$

O valor inicial de k é zero. O código é composto de m laços diferentes, cada um executado um determinado número de vezes. Note que o i-ésimo laço será executado n_i vezes. Como é dado apenas um laço por vez, a regra da soma mostra que o valor final de k será $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Definição

Suponha que um procedimento possa ser dividido em uma sequêcia de duas tarefas. Se houver n_1 formas de fazer a primeira tarefa e para cada uma dessas formas de fazer a primeira tarefa há outras n_2 formas de fazer a segunda tarefa, então há $n_1 \times n_2$ formas de concluir o procedimento.

Exemplo: Os organizadores de uma Semana Universitária, observando o interesse dos alunos em participarem de palestras e seminários, resolveram oferecer 2 seminários em um horário e 3 palestras em outro horário. A quantos eventos diferentes o estudante poderá participar? Qual o total de formas diferentes que o estudante possui para participar destes eventos?

Exemplo: Os organizadores de uma Semana Universitária, observando o interesse dos alunos em participarem de palestras e seminários, resolveram oferecer 2 seminários em um horário e 3 palestras em outro horário. A quantos eventos diferentes o estudante poderá participar? Qual o total de formas diferentes que o estudante possui para participar destes eventos?

Um estudante poderá assim participar de dois eventos ao escolher uma palestra e um seminário. Aplicando o princípio multiplicativo, temos que o estudante poderá fazer essa escolha de seis maneiras distintas:

$$n(S) \times n(P) = 2 \times 3 = 6.$$

Exemplo: Uma nova companhia com apenas dois empregados, Souza e Lima, aluga um andar de um prédio com 12 salas. Quantas formas diferentes há para designar as diferentes salas para esses dois empregados?

Exemplo: Uma nova companhia com apenas dois empregados, Souza e Lima, aluga um andar de um prédio com 12 salas. Quantas formas diferentes há para designar as diferentes salas para esses dois empregados?

O procedimento de distribuir as salas para os dois empregados consiste em atribuir uma sala para Souza, o que pode ser feito de 12 formas diferentes, e então atribuir uma sala a Lima, diferente da de Souza, o que pode ser feito de 11 formas. Pelo princípio multiplicativo, há $12 \times 11 = 132$ formas de distribuir salas a esses dois empregados.

Exemplo: As cadeiras de um auditório devem ser etiquetadas com uma letra e um número inteiro positivo que não exceda a 150. Qual é o maior número de cadeiras que podem ser etiquetadas de maneira diferente?

Exemplo: As cadeiras de um auditório devem ser etiquetadas com uma letra e um número inteiro positivo que não exceda a 150. Qual é o maior número de cadeiras que podem ser etiquetadas de maneira diferente?

O procedimento de etiquetar uma cadeira consiste em duas tarefas, atribuir uma das 26 letras e depois atribuir um dos 150 possíveis números inteiros. O princípio multiplicativo mostra que há $26 \times 150 = 3900$ formas diferentes de etiquetar as cadeiras. Assim, o maior número de cadeiras que podem ser etiquetadas e 3900.

Exemplo: Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?

Exemplo: Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?

Cada um dos sete bits pode ser escolhido de duas formas, porque cada bit equivale a 0 ou 1. Assim, o princípio multiplicativo mostra que há no total $2^7 = 128$ diferentes sequências de bits de comprimento sete.

Princípios Básicos da Contagem

Princípio Multiplicativo

Exemplo: Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?

Cada um dos sete bits pode ser escolhido de duas formas, porque cada bit equivale a 0 ou 1. Assim, o princípio multiplicativo mostra que há no total $2^7 = 128$ diferentes sequências de bits de comprimento sete.

Exercício: Quantas placas de automóvel estão disponíveis para cada modelo de placa abaixo?

Exercício: Qual o valor de k depois de o seguinte código ser executado?

$k := 0$
for $i_1 := 1$ **to** n_1
  for $i_2 := 1$ **to** n_2
    .
    .
    .
    for $i_m := 1$ **to** n_m
      $k := k + 1$

Exercícios:

1. Quantos números de dois algarismos, que podem ser iguais ou não, podemos escrever utilizando elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
2. Quantas funções existem partindo-se de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos?
3. Quantas funções injetoras existem partindo-se de um conjunto com m elementos para um conjunto com n elementos?
4. Os alunos que apresentarem trabalhos em uma Semana Universitária serão classificados e premiados com 2 livros de disciplinas diferentes. Sabemos que existem 7 livros diferentes de informática (I), 4 livros diferentes de matemática (M) e 5 livros diferentes de didática (D). Qual o número total de escolhas que o aluno vencedor poderá fazer?

Exercícios:

5. Cada usuário em um sistema computacional tem uma senha, com seis a oito caracteres, em que cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito numérico. Cada senha contém pelo menos um dígito numérico. Quantas senhas são possíveis?
6. Seis atletas participam de uma maratona. Quantas possibilidades diferentes de classificação final dos participantes podemos ter, supondo que não ocorram empates?
7. Um estacionamento possui 10 vagas. De quantas modos diferentes três carros podem ser estacionados nesse estacionamento?

Exercícios:

8. Rafael deseja ir ao cinema de um shopping que possui 6 salas e estão sendo exibidos 2 filmes diferentes de comédia e 4 filmes diferentes de ação. De quantas maneiras diferentes ele poderá fazer a escolha dos filmes considerando que:
   a) deseja assistir apenas a um filme?
   b) deseja assistir a dois filmes quaisquer?
   c) deseja assistir a um filme de ação e uma comédia?

Respostas Exercícios:

1. $6 \times 6 = 36$
2. n^m
3. $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)$, para $m \leq n$
4. $7 \times 4 + 7 \times 5 + 4 \times 5 = 83$
5. $(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8)$
6. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
7. $10 \times 9 \times 8 = 720$
8. a) 6; b) $6 \times 5 = 30$; c) $2 \times 4 = 8$

Permutações e Combinações

- Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos encontrando-se o número de maneiras de organizar um número específico de elementos distintos de um conjunto de determinado tamanho, em que a ordem desses elementos é relevante (Permutações e Arranjos);
- Muitos outros problemas de contagem podem ser resolvidos encontrando-se o número de maneiras para escolher um número determinado de elementos a partir de um conjunto de determinado tamanho, em que a ordem dos elementos escolhidos não é relevante (Combinações).

Permutações

Definição

Uma permutação de um conjunto de objetos distintos é um arranjo ordenado de todos esses objetos (Permutação Simples). Estamos interessados também por arranjos ordenados de alguns dos elementos de um conjunto (Arranjo Simples). Um arranjo ordenado de r elementos de um conjunto é chamado de r-permutação.

Exemplo: De quantas maneiras 6 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante?

Exemplo: De quantas maneiras 6 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante?

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação, ou permutação do conjunto dos 6 livros. O número total de permutações de um conjunto de 6 livros é: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Exemplo: De quantas maneiras 6 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante?

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação, ou permutação do conjunto dos 6 livros. O número total de permutações de um conjunto de 6 livros é: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$

Exemplo: Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 10 deles competem e todos chegam ao final?

Exemplo: De quantas maneiras 6 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante?

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação, ou permutação do conjunto dos 6 livros. O número total de permutações de um conjunto de 6 livros é:
$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$

Exemplo: Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 10 deles competem e todos chegam ao final?

Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 10 carros. O número total de permutações de um conjunto de 10 elementos é:
$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800.$

Observa-se um padrão na forma de cálculo do número de arranjos de todos os n itens de um conjunto.

São n possibilidades para a primeira opção, $n-1$ possibilidades para a segunda, $n-2$ para a terceira, e assim por diante, até que para a última opção resta apenas uma possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo, temos que o número total de permutações de um conjunto de n elementos é: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

Assim, o número de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$P(n) = n!$$

Chamamos de **arranjo simples** cada uma das lista ordenadas, sem repetição, formadas a partir da escolha de r elementos de um conjunto com n elementos distintos. Notação:

$$P(n,r) = A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos organizar todos os cinco estudantes em fila para uma foto? De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

Chamamos de **arranjo simples** cada uma das lista ordenadas, sem repetição, formadas a partir da escolha de r elementos de um conjunto com n elementos distintos. Notação:

$$P(n,r) = A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos organizar todos os cinco estudantes em fila para uma foto? De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

Para organizar os cinco estudantes em uma fila para uma foto, temos $P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras.

Chamamos de **arranjo simples** cada uma das lista ordenadas, sem repetição, formadas a partir da escolha de r elementos de um conjunto com n elementos distintos. Notação:

$$P(n,r) = A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos organizar todos os cinco estudantes em fila para uma foto? De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

Para organizar os cinco estudantes em uma fila para uma foto, temos $P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras.

Para compor o grupo de três estudantes, temos: $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Exemplo: Suponha que haja oito atletas em uma corrida. O vencedor recebe medalha de ouro, o segundo lugar, medalha de prata e o terceiro, medalha de bronze. Quantas maneiras diferentes há para ganhar essas medalhas, se todos os resultados possíveis da corrida podem ocorrer e não há nenhum empate?

Exemplo: Suponha que haja oito atletas em uma corrida. O vencedor recebe medalha de ouro, o segundo lugar, medalha de prata e o terceiro, medalha de bronze. Quantas maneiras diferentes há para ganhar essas medalhas, se todos os resultados possíveis da corrida podem ocorrer e não há nenhum empate?

O número de maneiras diferentes de distribuir as medalhas é o número de 3-permutações de um conjunto com oito elementos.

Assim, há $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ maneiras possíveis de ganhar as medalhas.

Exemplo: Uma pessoa sai de casa com o objetivo de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Exemplo: Uma pessoa sai de casa com o objetivo de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Devemos considerar na análise um total de $n = 5$ locais, 4 locais comerciais e a casa. Entretanto, como a pessoa inicia e finaliza o seu caminho em casa, o número de caminhos possíveis entre os locais é o número de permutações de 4 locais: $P(n-1) = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exemplo: Uma pessoa sai de casa com o objetivo de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Devemos considerar na análise um total de $n = 5$ locais, 4 locais comerciais e a casa. Entretanto, como a pessoa inicia e finaliza o seu caminho em casa, o número de caminhos possíveis entre os locais é o número de permutações de 4 locais: $P(n-1) = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Uma pergunta que a pessoa poderia fazer é a seguinte: destes 24 caminhos possíveis, qual é o mais curto? Este é um exemplo do conhecido "problema do caixeiro viajante".

Dada uma coleção de elementos em que alguns deles aparecem com repetição, denominamos as permutações a partir desta coleção de **permutação com repetição**.

Dada uma coleção de elementos em que alguns deles aparecem com repetição, denominamos as permutações a partir desta coleção de **permutação com repetição**.

Dados n objetos em uma lista ordenada, de modo que tenhamos n_1 cópias do objeto 1, n_2 cópias do objeto 2, e assim sucessivamente, até o objeto k que possui n_k cópias, quando permutamos elementos iguais, não alteramos a lista e pelo princípio multiplicativo temos $n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!$ permutações envolvendo apenas elementos iguais.

Dada uma coleção de elementos em que alguns deles aparecem com repetição, denominamos as permutações a partir desta coleção de **permutação com repetição**.

Dados n objetos em uma lista ordenada, de modo que tenhamos n_1 cópias do objeto 1, n_2 cópias do objeto 2, e assim sucessivamente, até o objeto k que possui n_k cópias, quando permutamos elementos iguais, não alteramos a lista e pelo princípio multiplicativo temos $n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!$ permutações envolvendo apenas elementos iguais.

Assim, para serem desconsideradas as repetições, a quantidade de permutações com repetições será:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!}$$

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar permutando as letras da palavra ARARA?

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar permutando as letras da palavra ARARA?

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Exercícios:

1. Determine todos os anagramas que podemos formar permutando as letras da palavra NUVEM.
2. Em um ponto de ônibus, 8 pessoas chegam ao mesmo tempo. De quantas maneiras elas podem formar uma fila?
3. Quantas maneiras há para selecionar o vencedor do primeiro, do segundo e do terceiro lugar a partir de 100 pessoas diferentes que participaram de um concurso?
4. Num teatro existem fileiras com 6 cadeiras. De quantos modos diferentes três pessoas podem se sentar em uma fileira?

Exercícios:

5. Dado o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto A? Quantos desses números são pares?
6. Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 8 empregados. De quantas maneiras pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?
7. O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 30 metas, dividas em 3 grupos: (i) 12 metas de curto prazo; (ii) 10 metas de médio prazo; (iii) 8 metas de longo prazo. O prefeito então ordena que seus assessores escolham 5 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Exercícios:

8. Um vendedor ambulante deve passar por seis cidades (A, B, C, D, E e F), passando por cada cidade apenas uma vez.
   a) Se ele pode começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos caminhos são possíveis?
   b) Se o vendedor deve começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?
   c) Quantos caminhos possíveis existem se o vendedor deve passar pelas seis cidades uma vez e depois voltar a passar uma vez por cada cidade?
9. Ao preencher um cartão da loteria esportiva, André optou pelas seguintes marcações: 4 coluna um, 6 coluna do meio e 3 coluna dois. De quantas maneiras distintas André poderá marcar os cartões?

Respostas Exercícios:

1. $5! = 120$
2. $8! = 40320$
3. $100 \times 99 \times 98 = 970200$
4. $6 \times 5 \times 4 = 120$
5. a) $5 \times 4 \times 3 = 60$; b) $4 \times 3 \times 1 = 12$
6. $8 \times 7 \times 6 = 336$
7. $(10 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8) \times (10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6) \times (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4) = 95040 \times 30240 \times 6720$
8. a) $6! = 720$; b) $5! = 120$; c) $720x120 = 86400$
9. $\frac{13!}{3!4!6!} = 60060$

Definição

Uma r-combinação de elementos de um conjunto é uma seleção não ordenada de r elementos a partir do conjunto. Então, uma r-combinação é simplesmente um subconjunto do conjunto completo, porém com r elementos.

O número de r-combinações de um conjunto com n elementos, em que n é um número inteiro não negativo e r é um inteiro tal que $0 \leq r \leq n$, é igual a

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinações

Exemplo: Quantos comitês diferentes de três estudantes podem ser formados a partir de um grupo de quatro estudantes?

Combinações

Exemplo: Quantos comitês diferentes de três estudantes podem ser formados a partir de um grupo de quatro estudantes?

Para responder a esta questão, precisamos apenas encontrar o número de subconjuntos com três elementos a partir de um conjunto com os quatro estudantes. Vemos que há quatro subconjuntos, um para cada um dos quatro estudantes, já que escolher quatro deles é o mesmo que escolher um para ser excluído do grupo.

Isto significa que há quatro maneiras diferentes de escolher três alunos para o comitê, em que a ordem de escolha desses estudantes **não** é relevante.

Combinações

Exemplo: Dos 5 professores de Matemática de uma escola, serão escolhidos 2 para participar de uma palestra. Quantas comissões com dois destes professores podemos formar?

Exemplo: Dos 5 professores de Matemática de uma escola, serão escolhidos 2 para participar de uma palestra. Quantas comissões com dois destes professores podemos formar?

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!\ 3!} = 10$$

Combinações

Exemplo: Dos 5 professores de Matemática de uma escola, serão escolhidos 2 para participar de uma palestra. Quantas comissões com dois destes professores podemos formar?

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!\ 3!} = 10$$

Exemplo: Quantas mãos de pôquer de cinco cartas podem ser retiradas a partir de um baralho de 52 cartas?

Combinações

Exemplo: Dos 5 professores de Matemática de uma escola, serão escolhidos 2 para participar de uma palestra. Quantas comissões com dois destes professores podemos formar?

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!\ 3!} = 10$$

Exemplo: Quantas mãos de pôquer de cinco cartas podem ser retiradas a partir de um baralho de 52 cartas?

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47!}{5!\ 47!} = 2.598.960$$

Exemplo: Quantas maneiras há para selecionar cinco jogadores titulares de um time de basquete com 10 jogadores para disputar uma partida em outra escola?

Combinações

Exemplo: Quantas maneiras há para selecionar cinco jogadores titulares de um time de basquete com 10 jogadores para disputar uma partida em outra escola?

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

Combinações

Exemplo: Quantas maneiras há para selecionar cinco jogadores titulares de um time de basquete com 10 jogadores para disputar uma partida em outra escola?

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

Exemplo: Um grupo de 30 pessoas foi treinado a fim de serem formados astronautas para ir a uma primeira missão a Marte. Quantas maneiras de selecionar uma tripulação de seis pessoas para embarcarem nessa missão são possíveis? (Suponha que todos os membros da tripulação têm a mesma função.)

Combinações

Exemplo: Quantas maneiras há para selecionar cinco jogadores titulares de um time de basquete com 10 jogadores para disputar uma partida em outra escola?

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

Exemplo: Um grupo de 30 pessoas foi treinado a fim de serem formados astronautas para ir a uma primeira missão a Marte. Quantas maneiras de selecionar uma tripulação de seis pessoas para embarcarem nessa missão são possíveis? (Suponha que todos os membros da tripulação têm a mesma função.)

$$C(30,6) = \frac{30!}{6!24!} = 593.775$$

Exemplo: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números de 1 a 60. Um grupo de apostadores escolhe 20 números para jogar.

a) Quantos são os jogos de 6 números que o grupo pode fazer com esses 20 números?

Combinações

Exemplo: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números de 1 a 60. Um grupo de apostadores escolhe 20 números para jogar.

a) Quantos são os jogos de 6 números que o grupo pode fazer com esses 20 números?$C(20,6)$

b) Caso o grupo acerte na sena, quantas quinas (5 números certos) serão premiadas, além da sena?

Combinações

Exemplo: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números de 1 a 60. Um grupo de apostadores escolhe 20 números para jogar.

a) Quantos são os jogos de 6 números que o grupo pode fazer com esses 20 números? $C(20,6)$

b) Caso o grupo acerte na sena, quantas quinas (5 números certos) serão premiadas, além da sena? $C(6,5)$

Exemplo: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números de 1 a 60. Um grupo de apostadores escolhe 20 números para jogar.

a) Quantos são os jogos de 6 números que o grupo pode fazer com esses 20 números? $C(20, 6)$

b) Caso o grupo acerte na sena, quantas quinas (5 números certos) serão premiadas, além da sena? $C(6, 5)$

Exemplo: Suponha que haja 9 membros da faculdade no departamento de Matemática e 11 no departamento de Ciência da Computação. Quantas maneiras de selecionar um comitê para desenvolver um curso de Matemática Discreta na escola são possíveis, se o comitê é formado por três membros do departamento de matemática e quatro do departamento de ciência da computação?

Combinações

Exemplo: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números de 1 a 60. Um grupo de apostadores escolhe 20 números para jogar.

a) Quantos são os jogos de 6 números que o grupo pode fazer com esses 20 números? $C(20,6)$

b) Caso o grupo acerte na sena, quantas quinas (5 números certos) serão premiadas, além da sena? $C(6,5)$

Exemplo: Suponha que haja 9 membros da faculdade no departamento de Matemática e 11 no departamento de Ciência da Computação. Quantas maneiras de selecionar um comitê para desenvolver um curso de Matemática Discreta na escola são possíveis, se o comitê é formado por três membros do departamento de matemática e quatro do departamento de ciência da computação?

$$C(9,3) \times C(11,4) = \frac{9!}{3!6!} \times \frac{11!}{4!7!} = 84 \times 330 = 27720$$

Exercícios:

1. De quantos maneiras distintas podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5?
2. De quantos modos possíveis 8 pessoas podem se organizar em grupos de 2?
3. Quantos jogos serão realizados em um campeonato com 5 times participantes, sabendo que dois times jogam uma única partida entre si e que cada time enfrenta todos outros?
4. O Concurso Vestibular dividiu as disciplinas em 4 áreas de conhecimentos: Linguagens e Códigos (com Redação), Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Matemática. Sabendo que as provas serão realizadas em dois dias, de quantas formas poderá ser feita a escolha das provas, sabendo que devem ser aplicadas duas provas por dia?
5. Maria possui 5 tipos diferentes de frutas, quantos tipos de sucos ela poderá fazer utilizando 2 ou mais frutas?

Respostas Exercícios:

1. $C(10,5)/2 = 126$
2. $C(8,2) = 28$
3. $C(5,2) = 10$
4. $C(4,2) = 6$
5. $C(5,2) + C(5,3) + C(5,4) + C(5,5) = 26$

UCS

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL