Análise e descrição do artigo
Karger, Motwani, Sudan, 1998,
Approximate Graph Coloring by Semidefinite Pro-gramming

Aluno: Luis Henrique Matos Sales e Pedro Aleph

Análise e descrição do artigo Karger, Motwani, Sudan, 1998,
Approximate Graph Coloring by Semidefinite Pro-gramming

No artigo é considerado o problema de colorir k – grafos colorizáveis com o menor número de cores possível, para isso é apresentado um algoritmo de tempo polinomial aleatório que colore um grafo de 3 cores em n vértices com um mínimo de cores {O(Δ^(1/3) log^(1/2) Δlog n),O(n^(1/4) log^(1/2) n)} onde Δ é o grau máximo de qualquer vértice.

No artigo é trabalhado o vetor de relaxamento de coloração cuja solução é, por sua vez, usada para aproximar a solução para o problema da coloração. Em vez de atribuir cores aos vértices de um gráfico, é atribuido vetores unitários (n-dimensionais) aos vértices. Dado um grafo G=(V, E) em n vértices, e um número real k >= 1, um vetor k-colorizável de G é uma atribuição de valores unitários vi do espaço R^n para cada vértice i $\in$ V, de tal modo que para quaisquer dois vértices adjacentes e j, o produto escalar de seus vetores satisfaz a desigualdade.

(vi,vj) <= -1/(k-1)

Resolvendo o problema de coloração vetorial: Para resolver o problema é preciso seguir a seguinte definição. Dado um grafo G = (V, E) com n vértices, uma matriz k-colorizável do grafo é uma matriz n x n simétrica semidefinida positiva M, com mii = 1 e mij <= -1/(k-1) se{i,j} $\in E$. Considerando um grafo que tenho um vetor ou matriz k-colorizável. Seguinifica que há solução para o programa semidefinido com α = -1/(k-1).

Semicoloração: Um k-semicolorizável de um grafo G é uma atribuição de k cores para pelo menos metade de seus vértices de forma que não haja dois vértices adjacentes com a mesma cor. Se um algoritmo A pode ki-semicolorir qualquer subgrafo i-vértice do grafo G em tempo randomizado polinomial, onde ki aumenta com i, então A pode ser usado para O(kn log n)-cor G. Além disso, se existir e > 0 tal que para todo i, ki = Ω(i^e), então A pode ser usado para colorir G com O(kn) cores.

Arredondamento por partições de hiperplano: Considera-se um hiperplano H. É dito no artigo que para separar dois vetores se eles não estão no mesmo lado do hiperplano. Para qualquer beira {i,j} $\in$ E, nós dizemos que o hiperplano H corta a beira se ele separa o vetor vi e vj. Usando o algoritmo de Wigderson o algoritmo pode ser melhorado passando de O(n^0,613) cores para O(n^0,387) cores.

Teoria da dualidade por definição dado um grafo G = (V, E) em n vértices, um vetor estrito de coloração k de G é uma atribuição de vetores unitários ui do spaço R^n para cada vértice i $\in$ V, de modo que para quaisquer dois vértices adjacentes i e j o produto escalar de seus vetores satisfaz a igualdade (ui, uj) = -1/(k1). Como dito no capitulo 8 do artigo um grafo é estritamente vetorial para colorir k se ele tiver uma estrita coloração vetorial para k.

A lacuna entre cores vetoriais e números cromáticos: No capitulo 9 é debatido sobre o fato de o algoritmo em análise não está em sua forma ótima onde é apresentado o teorema de Milner cuja a definição é: Seja S1,… Sα uma anticadeia de conjuntos de um universo de tamanho m tal que, para todos os i e j, |Si ∩ Sj | ≥ t. Então, deve ser o caso de
a <= (m
(m+t+1)/2).
O segundo teorema do capitulo 9 estabelece que os grafos têm uma grande lacuna entre seu vetor de número cromático e os números cromáticos.

Seja n=(n
r) denotam o número de vértices do grafoK(m,r,t). Para r = m/2 e t=m/8, o grafo K(m,r,t) é vetor de 3 cores, mas tem um número cromático de pelo menos n^0,0113.

$$X >= (1,007864)^{\lg n} = n^{\lg 1,007864} \approx n^{0,0113}$$

O terceiro teorema fala que existe um grafo kneser K(m,r,t) que é um vetor de 3 cores mas tem um número cromático excedendo n^0,016101, onde n = (m
n) denota o número de vértices no grafo. Além disso para grandes k, existe um grafo de Kneser K(m, r, t) que ser colorido com o vetor k, mas tem número cromático excedendo n^0,0717845. Usando o teorema de Milner é possível provar que o expoente do número cromático é pelo menos.

$$\frac{1- - (m - t)\log 2m/(m - t) + (m + t)\log 2m/(m + t)}{2((m - r)\log m/(m - r) + r \log m/r)}$$

Isso mostra que exite um conjunto de valores com vetor número cromático 3 e número cromático pelo de menos n^0,016101. Para grandes números cromáticos de vetor constante, o valor limite do expoente do número cromático é aproximadamente 0,0717845.