Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

   a) $\exists y\, P(x,y)$

   b) $(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\neg(P(x)) \vee Q(y))$

   c) $\exists x\, (P(y,z) \wedge \forall y(\neg Q(x,y) \vee P(y,z)))$;

   d) $P(a, f(a,b))$;

   e) $\exists x\, (P(x) \to \neg Q(x))$;

   f) $\forall x\, ((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y L(x,y))$.

   Nota. x, y, z, a, b são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

   a) Todas as aves têm penas.

   b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.

   c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.

   d) Nenhum número é menor do que zero.

   e) Zero é menor do que qualquer número.

   f) Alguns números primos não são pares.

   g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações «x é uma explicação clara», «x é satisfatória» e «x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

   a) $\forall x\ c(x) \to s(x)$;

   b) $\exists x\ d(x)\ \wedge\ \neg\ s(x)$;

   c) $\exists x\ d(x)\ \wedge\ \neg\ c(x)$.

4. Seja Π o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando Π para universo e utilizando apenas os três predicados

   $r(x)$ representa «x é uma recta»,

   $c(x)$ representa «x é uma circunferência»,

   $i(x, y)$ representa «a intersecção de x e y é não vazia»,

   traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:

   a) Toda a recta intersecta alguma circunferência.

   b) Alguma recta não intersecta alguma circunferência.

   c) Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.

5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados Casa(x) («x é uma casa»); Grande(x) («x é grande»); Cara(x) («x é cara»); Apartamento(x) («x é um apartamento»); PMenor(x, y) («preço de x é menor do que o preço de y»).

   a) Todas as casas grandes são caras.

   b) Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.

6. Usando o predicado gosta(x, y) (x «gosta de» y), exprima por meio de uma fórmula a afirmação:

   a) Toda a gente tem alguém que gosta de si;

   b) As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.

   c) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y \; \exists x \; (\; (\; q(x) \to p(y) \;) \; \vee \; (\; p(y) \wedge q(x) \;) \;) \; .$$

8. Considere a fórmula

$$Q: \; \forall x \quad \exists y \; (\; (\; t(x) \; \wedge \; v(y,x) \;) \; \to \; \neg p(x,y) \;)$$

   onde $t(x)$ representa «$x > 1$», $v(y, x)$ representa «$y = x + 1$» e $p(x, y)$ representa «x divide y».

   a) Diga, justificando, qual o valor não lógico de Q para uma interpretação que considera $\mathbb{N}$ como sendo o domínio das variáveis.

      sendo uma interpretação acho que devia considerar tudo certo e dar ao Andrezinho um 20

   b) Qual o valor lógico da fórmula $(\; t(1) \; \wedge \; v(2, 1) \;) \; \to \; \neg p(1, 2)$.

9. Considere um universo X com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$) e uma linguagem definida em X, onde α, β e γ são constantes, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

   constantes: $\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$;

função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

predicado R: $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

a) $R(\alpha, \beta)$;

b) $\exists x\ f(x) = \beta$;

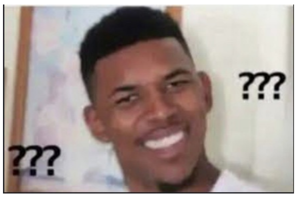
c) $\forall w\ R(f(w), w)$.

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja não valida:

    a) $\forall x(P(x, a) \to \neg Q(x, a))$, onde a denota uma constante;

    b) $\exists x\ \exists y((P(x, y) \wedge \forall z(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

    a) $(\forall x)S(x) \to (\exists z)P(z)$;

    b) $\neg((\forall x)(S(x) \to P(x)))$;

    c) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(x, y))$;

    d) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x, y)) \to ((\exists z)Q(z) \to R(x)))$;

    e) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

    a) $\neg((\forall x)P(x) \to (\exists y)P(y))$

    b) $\neg((\forall x)P(x) \to (\exists y)(\forall z)Q(y, z))$

    c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

13. Mostre que o conjunto

    $$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

    é inconsistente.

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

    a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;

    b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que «a» e «b» denotam constantes.

a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;

b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;

c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;

d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;

e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;

f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;

g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$$

indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigúe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$;

b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$.

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a, b)$;

b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a))$.

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

F1: $\forall x\, [G(x) \to \forall y(P(y) \to L(x, y))]$

F2: $\exists x\, G(x)$

F3: $\exists x\, \forall y(P(y) \to L(x, y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

- Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.

↳ mentira

- O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
- O João estuda com afinco.

a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:

- Os animais com pelos são mamíferos.
- Os ursos são animais com pelos.
- Os coelhos são mamíferos.
- O Winnie é um urso.
- O Bugsbunny é um coelho.
- O Sylvester é um animal com pelos.

a) Represente-as em lógica de primeira ordem.

b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:

(i) O Winnie é mamífero?

(ii) Quais são os mamíferos?

(iii) Quem é que tem pelos?

22. Considere cada um dos predicados SH(x), IH(x) e TSP(x) cuja interpretação é a seguinte:

- SH(x) representa «x é um super-herói»;
- IH(x) representa «x é um infra-herói»;
- TSP(x) representa «x tem super poderes».

Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.

a) Explicite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os predicados acima definidos.

b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
- Roger é um coelho;
- Harry é um cavalo.

a) Usando os predicados

- Cavalo(x) representa «x é um cavalo»;

- Galgo(x) representa «x é um galgo»;
- Coelho(x) representa «x é um coelho»;
- MaisRápido(x, y) representa «x é mais rápido do que y»;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Algumas soluções

1 a) x livre, y ligada

b) x livre e ligada, y livre

c) x ligada, y livre e ligada, z livre

d) a e b livres

e) x ligada

f) x ligada, y ligada.

2 a) $\forall x\, \text{ave}(x) \to \text{tempenas}(x)$

b) $\forall x \forall y\ \ (\text{criança}(x) \land \text{pai}(x, y)) \to \text{maisnovo}(x, y)$

c) $\forall x\ \text{insecto}(x) \to \exists y\ \text{mamifero}(y) \land \text{maisleve}(x, y)$

d) $\forall x(\text{numero}(x) \to x \geq 0)$

e) $\forall x\ (\text{numero}(x) \to 0 < x)$

f) $\exists x\ \text{primo}(x) \land \neg\text{par}(x)$

g) $\forall x\ \text{par}(x) \to \text{primo}(x)$

3 a) Todas as explicações claras são satisfatórias;

b) Algumas desculpas não são satisfatórias;

c) Há desculpas que não são explicações claras.

4 a) $\forall x\ (\ r(x)\ \to\ \exists y\ \ (\ c(y)\ \land\ i(x, y)\ )\ )$

b) $\exists x\ \exists y\ (\ r(x)\ \land\ c(y)\ \land\ \neg\ i(x, y)\ )$

c) $\forall x\ (\ r(x)\ \to \exists y\ (\ c(y)\ \land\ \neg i(x, y))\ )$

5 a) $\forall x\ \text{Casa}(x) \land \text{Grande}(x) \to \text{Cara}(x)$

b) $\forall x\ (\text{Apartamento}(x) \to \exists y\ (\text{Casa}(y) \land \text{Grande}(y) \land \text{PMenor}(x, y)))$

6 a) $\forall x\ \exists y\ \text{gosta}(y, x)$

b) $\forall x\ (\ \forall y\ \text{gosta}(y, x)\ \to\ \text{gosta}(x, x)\ )$

c) $\exists x\ \forall y\ \neg\text{gosta}(y, x)$; Existe alguém de quem ninguém gosta.

7 $\exists y \forall x\ \neg\,(q(x) \to p(y))$

8 a) A proposição Q é *Verdadeira*.

b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;

9 a) Falsa;

b) Falsa;

c) Verdadeira.

11 a) $\exists x\, \exists z\ (\neg S(x) \lor P(z))$

b) $\exists x\, (S(x) \land \neg P(x))$

c) $\forall x\, \exists y(\neg P(x) \lor Q(x, y))$

d) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ \ (P(x, y)\ \lor\ \neg Q(z)\ \lor\ R(x))$

e) $\forall x \exists y \exists z((\neg P(x, y) \lor R(x, y, z)) \land (Q(x, z) \lor R(x, y, z)))$, na forma normal conjuntiva.

12 a) $\forall x\ \forall y\ (P(x)\ \land\ \neg P(y))$

b) $\forall x\ \forall y\ P(x)\ \land\ \neg Q(y, f(x, y))$

c) $\forall x\ (\neg P(x, f(x))\ \lor\ R(x, f(x), g(x)))\ \land\ (Q(x, g(x))\ \lor\ R(x, f(x), g(x)))$

14 Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

a) $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b) $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$

15 a) $\{f(x)/y, a/z\}$

b) $\{a/x, f(a)/z\}$

c) Não

d) $\{u/x, g(v, v)/y, v/z\}$

e) Não.

f) Não.

g) $\{f(x)/z, g(w)/y\}$

17 a) $P(a) \lor Q(f(a))$

b) $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

18 a) $Q(a, b)$

b) Não existe

1 - a) $\exists_y\, P(x, y)$

ocorrencia ligada

ocorrência livre

b) $(\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$

ocorrências livres

ocorrências ligadas

c) $\exists_x (P(y, z) \wedge \forall_y (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$

ocorrência livre

ocorrências livres

ocorrências ligadas

d) $P(a, f(a, b))$

ocorrências livres

e) $\exists_x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

ocorrências ligadas

f) $\forall_x ((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists_y L(x, y))$

ocorrências ligadas

2 - a) $Ave(x)$: "x é uma ave"
$Penas(x)$: "x tem penas"

$\forall_x (Ave(x) \rightarrow Penas(x))$

b) $C(x)$: "x é uma criança"
$N(x, y)$: "x é mais novo do que y"
$P(x, y)$: "x é pai de y"

$\forall_x \forall_y ((C(x) \wedge P(y, x)) \rightarrow N(x, y))$

c) $I(x)$: "x é um inseto"
$L(x, y)$: "x é mais leve do que y"
$M(y)$: "y é um mamífero"

$\forall_x\, I(x) \rightarrow \exists_y\, M(y) \wedge L(x, y)$

d) $N(x)$: "x é um número"

$\forall_x (N(x) \rightarrow x \geq 0)$

e) $N(x)$: "x é um número"

$\forall_x (N(x) \rightarrow x > 0)$

f) $NP(x)$: "x é um número primo"
$P(x)$: "x é um número par"

$\exists_x (NP(x) \land \neg P(x))$

g) $NP(x)$: "x é um número primo"
$P(x)$: "x é um número par"

$\forall_x (P(x) \rightarrow NP(x))$

3 – a) Todas as explicações claras são satisfatórias.

b) Há desculpas que não são satisfatórias.

c) Há desculpas que não são explicações claras.

4 – a) $\forall_x (x(x) \rightarrow \exists_y (c(y) \land i(x,y)))$

b) $\exists_x \exists_y (x(x) \rightarrow c(y) \land \neg i(x,y))$

c) $\forall_x (x(x) \rightarrow \exists_y (c(y) \land \neg i(x,y)))$

5 – a) $\forall_x ((\text{Casa}(x) \land \text{grande}(x)) \rightarrow \text{Cara}(x))$

b) $\forall_x (\text{Apartamento}(x) \rightarrow \exists_y (\text{Casa}(y) \land \text{grande}(y) \land \text{PMenor}(x,y)))$

6 – a) $\forall_x \exists_y \, \text{gosta}(y,x)$

b) $\forall_x \forall_y (\text{gosta}(y,x) \rightarrow \text{gosta}(x,x))$

c) $\exists_x \forall_y \neg \text{gosta}(y,x)$

↳ Existe alguém de quem ninguém gosta

7 – $\neg(\forall_y \exists_x ((q(x) \rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x))) \equiv \exists_y \forall_x \neg((\neg q(x) \vee p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x)) \equiv$

$\equiv \exists_y \forall_x (\neg(\neg q(x) \vee p(y)) \wedge \neg(p(y) \wedge q(x))) \equiv \exists_y \forall_x ((q(x) \wedge \neg p(y)) \wedge (\neg p(y) \vee \neg q(x))) \equiv$

$\equiv \exists_y \forall_x ((q(x) \wedge \neg p(y) \wedge \neg p(y)) \vee (q(x) \wedge \neg p(y) \wedge \neg q(x))) \equiv \exists_y \forall_x ((q(x) \wedge \neg p(y)) \vee \perp) \equiv$

$\equiv \exists_y \forall_x (q(x) \wedge \neg p(y)) \equiv \exists_y \forall_x \neg(\neg q(x) \vee p(y)) \equiv \exists_y \forall_x \neg(q(x) \rightarrow p(y))$

8 – a) A proposição Q é verdadeira, pois não há nenhum valor de x pertencente a IN tal que x+1 possa ser dividido por x.

b) Verdadeiro

9 – a) Falsa b) Falsa c) Verdadeira

10 – a) $P(x,a)$: "$x^2 > 1$"
$Q(x,a)$: "$x < 1$"

b) $P(x,y)$: "$x = y$"
$Q(x,y)$: "$x^2 = y$"
$P(y,z)$: "$y^2 = z$"

11 – a) $(\forall_x) S(x) \rightarrow (\exists_z) P(z) \equiv \neg(\forall_x S(x)) \vee (\exists_z P(z)) \equiv \exists_x \neg S(x) \vee \exists_z P(z) \equiv \exists_x \exists_z (\neg S(x) \vee P_z)$

b) $\neg((\forall_x)(S(x) \rightarrow P(x))) \equiv \neg((\forall_x)(\neg S(x) \vee P(x))) \equiv \exists_x \neg(\neg S(x) \vee P(x)) \equiv \exists_x (S(x) \wedge \neg P(x))$

c) $(\forall_x)(P(x) \rightarrow (\exists_y) Q(x,y)) \equiv (\forall_x)(\neg P(x) \vee (\exists_y) Q(x,y)) \equiv \forall_x \exists_y (\neg P(x) \vee Q(x,y))$

d) $(\exists_x)(\neg((\exists_y) P(x,y)) \rightarrow ((\exists_z) Q(z) \rightarrow R(x))) \equiv (\exists_x)(\neg\neg((\exists_y) P(x,y)) \vee ((\exists_z) Q(z) \rightarrow R(x)) \equiv$

$\equiv (\exists_x)((\exists_y) P(x,y)) \vee (\neg \exists_z Q(z) \vee R(x)) \equiv \exists_x \exists_y \forall_z (P(x,y) \vee (\neg Q(z) \vee R(x))) \equiv \exists_x \exists_y \forall_z (P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$

e) $(\forall_x)(\exists_y)(\exists_z)((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)) \equiv \forall_x \exists_y \exists_z ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z))$

12 – a) $\neg((\forall_x) P(x) \rightarrow (\exists_y) P(y)) \equiv \neg(\neg(\forall_x P(x)) \vee \exists_y P(y)) \equiv (\forall_x) P(x) \wedge \neg(\exists_y P(y)) \equiv (\forall_x) P(x) \wedge (\forall_y) \neg P(y) \equiv \forall_x \forall_y (P(x) \wedge \neg P(y))$

b) $\neg((\forall_x) P(x) \rightarrow (\exists_y)(\forall_z) Q(y,z)) \equiv \neg(\neg(\forall_x P(x)) \vee (\exists_y)(\forall_z) Q(y,z)) \equiv (\forall_x) P(x) \wedge \neg(\exists_y \forall_z Q(y,z)) \equiv$

$\equiv (\forall_x) P(x) \wedge (\forall_y)(\exists_z) \neg Q(y,z) \equiv \forall_x \forall_y \exists_z (P(x) \wedge \neg Q(y,z))$

$\forall_x \forall_y (P(x) \wedge \neg Q(y, f(x,y)))$

c) $(\forall_x)(\exists_y)(\exists_z)((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)) \equiv \forall_x \exists_y \exists_z ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z))$

$\forall_x ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))$

(13) – $S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$

(1) $P \vee R$
(2) $\neg Q \vee R$
(3) $\neg S \vee Q$
(4) $\neg P \vee S$
(5) $\neg Q$
(6) $\neg R$
(7) P Res $(1,6)$
(8) $\neg S$ Res $(3,5)$
(9) $\neg P$ Res $(4,8)$
(10) $\perp$ Res $(7,9)$

Concluímos que o conjunto é inconsistente

(14) – a) $E\theta \equiv \hat{\theta}(P(h(x), z, f(z)) \equiv P(\hat{\theta}(h(x)), \hat{\theta}(z), \hat{\theta}(f(z))) \equiv P(h(\hat{\theta}(x)), \hat{\theta}(z), f(\hat{\theta}(z))) \equiv P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b) $E\theta \equiv \hat{\theta}(F(a, h(c), x, h(y)) \equiv F(\hat{\theta}(a), \hat{\theta}(h(a)), \hat{\theta}(x), \hat{\theta}(h(y))) \equiv F(\hat{\theta}(a), \hat{\theta}(h(a)), \hat{\theta}(x), h(\hat{\theta}(y))) \equiv F(a, h(a), f(y), h(a))$

(15) – a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\quad\theta_0 = \{f(x)/y\}$
$D_0 = \{f(x), y\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{P(f(x), z), P(f(x), a)\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{f(x)/y\}$

$|E_1| = 2 > 1$ $\quad\theta_1 = \{a/z\}$
$D_1 = \{z, a\}$

$E_2 = E_1\theta_1 = \{P(f(x), z), P(f(x), a)\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{f(x)/y, a/z\}$

$|E_2| = 1 \rightarrow$ Logo, é unificável e σ_2 é um unificador mais geral de E.

b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\quad\theta_0 = \{f(x)/z\}$
$D_0 = \{f(x), z\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{P(f(x), x), P(f(x), a)\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{f(x)/z\}$

$|E_1| = 2 > 1$ $\theta_1 = \{a/x\}$
$D_1 = \{x, a\}$

$E_2 = E_1\theta_1 = \{P(f(x), a), P(f(x), a)\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{f(a)/z, a/x\}$

$|E_2| = 1 \rightarrow$ Logo, é unificável e σ_2 é o unificador mais geral de E.

c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$

$|E_0| = 2 > 1$
$D_0 = \{a, b\} \rightarrow$ ambas contêm constantes, logo não é unificável.

d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\theta_0 = \{u/x\}$
$D_0 = \{x, u\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{S(u, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{u/x\}$

$|E_1| = 2 > 1$ $\theta_1 = \{g(v,v)/y\}$
$D_1 = \{y, g(v, v)\}$

$E_2 = E_1\theta_1 = \{S(u, g(v, v), z), S(u, g(v, v), v)\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{u/x, g(v,v)/y\}$

$|E_2| = 2 > 1$ $\theta_2 = \{v/z\}$
$D_2 = \{z, v\}$

$E_3 = E_2\theta_2 = \{S(u, g(v, v), v), S(u, g(v, v), v)\}$

$\sigma_3 = \theta_2 \circ \sigma_2 = \{u/x, g(v,v)/y, v/z\}$

$|E_3| = 1 \rightarrow$ Logo, é unificável e σ_3 é o unificador mais geral de E.

e) $\{P(x,x), P(y, f(y))\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\qquad\qquad$ $\theta_1 = \{{}^{x}/{y}\}$

$D_0 = \{x, y\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{P(x,x), P(x, f(x))\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{{}^{x}/{y}\}$

$|E_1| = 2 > 1$

$D_1 = \{x, f(x)\}$ → Como x é a única variável em D_1 e ocorre em $f(x)$, concluímos que não é unificável

f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y,y)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\qquad\qquad$ $\theta_0 = \{{}^{f(a)}/{y}\}$

$D_0 = \{f(a), y\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a))\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{{}^{f(a)}/{y}\}$

$|E_1| = 2 > 1$

$D_1 = \{g(x), f(a)\}$ → Como o conjunto D_1 não possui variáveis, concluímos que não é unificável

g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\qquad\qquad$ $\theta_0 = \{{}^{f(x)}/{z}\}$

$D_0 = \{f(x), z\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{Q(f(x), y), Q(f(x), g(w))\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{{}^{f(x)}/{z}\}$

$|E_1| = 2 > 1$ $\qquad\qquad$ $\theta_1 = \{{}^{g(w)}/{y}\}$

$D_1 = \{y, g(w)\}$

$E_2 = E_1\theta_1 = \{Q(f(x), g(w)), Q(f(x), g(w))\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{{}^{f(x)}/{z}, {}^{g(w)}/{y}\}$

$|E_2| = 1$ → Logo, é unificável e σ_2 é o unificador mais geral de E.

16 - $\{C(x, SA, y), C(M, z, f(t)), C(w, SA, f(MA))\}$

$|E_0| = 3 > 1$ $\theta_0 = \{M/x\}$

$D_0 = \{x, M, w\}$

$E_1 = E_0\theta_0 = \{C(M, SA, y), C(M, z, f(t)), C(w, SA, f(MA))\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{M/x\}$

$|E_1| = 3 > 1$ $\theta_1 = \{M/w\}$

$D_1 = \{M, w\}$

$E_2 = E_1\theta_1 = \{C(M, SA, y), C(M, z, f(t)), C(M, SA, f(MA))\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{M/w\} \circ \{M/x\} = \{M/w, M/x\}$

$|E_2| = 3 > 1$ $\theta_2 = \{SA/z\}$

$D_2 = \{SA, z\}$

$E_3 = E_2\theta_2 = \{C(M, SA, y), C(M, SA, f(t)), C(M, SA, f(MA))\}$

$\sigma_3 = \theta_2 \circ \sigma_2 = \{SA/z\} \circ \{M/w, M/x\} = \{SA/z, M/w, M/x\}$

$|E_3| = 3 > 1$ $\theta_3 = \{f(t)/y\}$

$D_3 = \{y, f(t), f(MA)\}$

$E_4 = E_3\theta_3 = \{C(M, SA, f(t)), C(M, SA, f(t)), C(M, SA, f(MA))\}$

$\sigma_4 = \theta_3 \circ \sigma_3 = \{f(t)/y\} \circ \{SA/z, M/w, M/x\} = \{f(t)/y, SA/z, M/w, M/x\}$

$|E_4| = 2 > 1$ $\theta_4 = \{MA/t\}$

$D_4 = \{t, MA\}$

$E_5 = E_4\theta_4 = \{C(M, SA, f(MA)), C(M, SA, f(MA))\}$

$\sigma_5 = \theta_4 \circ \sigma_4 = \{MA/t\} \circ \{f(t)/y, SA/z, M/w, M/x\} = \{MA/t, f(MA)/y, SA/z, M/w, M/x\}$

$|E_5| = 1 \rightarrow$ Logo, é unificável e σ_5 é o unificador mais geral de E.

17 – a) $C_1 = P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$

Seja $\sigma = \text{mgu}(P(x), P(a)) = \{a/x\}$
Vê-se que $\sigma = (Q(f(x)), Q(f(a)))$

Então $C_2 = C_1 = f(a) \vee Q(f(a))$ é um fator de C_1.

b) $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$

Seja $\sigma = \text{mgu}(P(x), P(f(y))) = \{f(y)/x\}$

Então $C_2 = C_1 = P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

18 – a) (1) $\neg P(x) \vee Q(x, b)$
(2) $P(a) \vee Q(a, b)$
(3) $Q(a, b)$ Res $(1, 2) \rightarrow \sigma_1 = \text{mgu}(P(x), P(a)) = \{a/x\}$

b) (1) $\neg P(x) \vee Q(x, x)$
(2) $\neg Q(a, f(a))$

19 – F_1: $\forall_x [G(x) \rightarrow \forall_y (P(y) \rightarrow L(x,y))] \equiv \forall_x \forall_y [G(x) \rightarrow (P(y) \rightarrow L(x,y))] \equiv \forall_x \forall_y [\neg G(x) \vee \neg P(x) \vee L(x, y)]$
F_2: $\exists_x G(x) \equiv G(a)$
F_3: $\exists_x \forall_y (P(y) \rightarrow L(x,y)) \equiv \exists_x \forall_y (\neg P(y) \vee L(x,y))$
$\neg F_3$: $\neg(\exists_x \forall_y (\neg P(x) \vee L(x,y))) \equiv \forall_x \exists_y \neg(\neg P(y) \vee L(x,y)) \equiv \forall_x \exists_y (P(y) \wedge \neg L(x,y)) \equiv \forall_x (P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

(1) $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$
(2) $G(a)$
(3) $P(f(x))$
(4) $\neg L(x, f(x))$
(5) $\neg G(x) \vee \neg P(f(x))$ Res $(1, 4) \rightarrow \sigma_1 = \text{mgu}(G(x), G(a)) = \{f(x)/y\}$
(6) $\neg G(x)$ Res $(3, 5)$
(7) $\perp$ Res $(2, 6) \rightarrow \sigma_2 = \text{mgu}(G(a), G(x)) = \{a/x\}$

Concluímos que F_3 é consequência de F_1 e F_2.

20 – a) aluno (x) : "x é aluno da Universidade de Aveiro"
estuda (x): "x estuda com afinco"
passa (x): "x passa a Matemática Discreta"

F_1: $\forall_x ((\text{aluno}(x) \wedge \text{estuda}(x)) \rightarrow \text{passa}(x))$
F_2: aluno (você)
F_3: estuda (você)

b) F_4: passa(joão)

F_1: $\forall x\,((\text{aluno}(x) \wedge \text{estuda}(x)) \rightarrow \text{passa}(x)) \equiv \forall x\,(\neg(\text{aluno}(x) \wedge \text{estuda}(x)) \vee \text{passa}(x)) \equiv \forall x\,(\neg \text{alun}(x) \vee \neg \text{estuda}(x) \vee \text{passa}(x))$

(1) $\neg \text{aluno}(x) \vee \neg \text{estuda}(x) \vee \text{passa}(x)$
(2) aluno(joão)
(3) estuda(joão)
(4) $\neg$ passa(joão)
(5) $\neg$ aluno(joão) $\vee \neg$ estuda(joão) Res(1,4) $\rightarrow \sigma_1 = \text{mgu}(\text{passa}(x), \text{passa}(\text{joão})) = \{\text{joão}/x\}$
(6) $\neg$ estuda(joão) Res(2,5)
(7) $\perp$ Res(3,6)

Concluímos que o joão passa a Matemática Discreta.

21 – a) F_1: $\forall x\,(\text{Pelo}(x) \rightarrow \text{Mamífero}(x)) \equiv \forall x\,(\neg \text{Pelo}(x) \vee \text{Mamífero}(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee M(x))$

F_2: $\forall x\,(\text{Urso}(x) \rightarrow \text{Pelo}(x)) \equiv \forall x\,(\neg \text{Urso} \vee \text{Pelo}(x)) \equiv \forall x\,(\neg U(x) \vee P(x))$

F_3: $\forall x\,(\text{Coelho}(x) \rightarrow \text{Mamífero}(x)) \equiv \forall x\,(\neg \text{Coelho}(x) \vee \text{Mamífero}(x)) \equiv \forall x\,(\neg C(x) \vee M(x))$

F_4: Urso(Winnie) $\equiv U(W)$

F_5: Coelho(Bugsbunny) $\equiv C(B)$

F_6: Pelo(Sylvester) $\equiv P(S)$

b) i. F_7: $M(W)$

Queremos provar que $F_1, F_2, F_4 \models F_7$

(1) $\neg P(x) \vee M(x)$
(2) $\neg U(x) \vee P(x)$
(3) $U(W)$
(4) $\neg M(W)$
(5) $P(W)$ Res(2,3) $\rightarrow \sigma_1 = \text{mgu}(U(x), U(W)) = \{W/x\}$
(6) $\neg P(W)$ Res(1,4) $\rightarrow \sigma_2 = \text{mgu}(M(x), M(W)) = \{W/x\}$
(7) $\perp$ Res(5,6)

Concluímos que o Winnie é mamífero

ii. Já sabemos que o Winnie é um mamífero. Basta verificar se o Bugsbunny e o Sylvester também são.

F_8: $M(B)$

Queremos provar que $F_3, F_5 \models F_8$

(1) $\neg C(x) \vee M(x)$
(2) $C(B)$
(3) $\neg M(B)$
(4) $\neg C(B)$ Res(1,3) $\rightarrow \sigma_1 = \text{mgu}(M(x), M(B)) = \{B/x\}$
(5) $\perp$ Res(2,4)

F_9: $M(S)$

Teorema provar que $F_1, F_6 \models F_9$

(1) $\neg P(x) \vee M(x)$
(2) $P(S)$
(3) $\neg M(S)$
(4) $\neg P(S)$ Res $(1,3) \rightarrow \sigma_1 = mgu(M(x), M(S)) = \{S/x\}$
(5) $\perp$ Res $(2,4)$

Concluímos que Winnie, Bugsbunny e Sylvester são mamíferos.

iii. Já sabemos que o Sylvester tem pelo. Basta verificar se o Winnie e o Bugsbunny têm.

F_{10}: $P(W)$

Teorema provar que $F_1, F_2, F_4 \models F_{10}$

(1) $\neg P(x) \vee M(x)$
(2) $\neg U(x) \vee P(x)$
(3) $U(W)$
(4) $\neg P(W)$
(5) $P(W)$ Res $(2,3) \rightarrow \sigma_1 = mgu(U(x), U(W)) = \{W/x\}$
(6) $\perp$

F_{11}: $P(B)$

Teorema provar que $F_1, F_2, F_3, F_5 \models F_{11}$

(1) $\neg P(x) \vee M(x)$
(2) $\neg U(x) \vee P(x)$
(3) $\neg C(x) \vee M(x)$
(4) $C(B)$
(5) $\neg P(B)$
(6) $M(B)$ Res $(3,4) \rightarrow \sigma_1 = mgu(C(x), C(B)) = \{B/x\}$
(7) $\neg C(B)$ Res $(3,6) \rightarrow \sigma_2 = mgu(M(x), M(B)) = \{B/x\}$
(8) $\perp$ Res $(4,7)$

Concluímos que Winnie, Bugsbunny e Sylvester têm pelo.

22 – a) F_1: $\forall x\,(SH(x) \rightarrow TSP(x)) \equiv \forall x\,(\neg SH(x) \vee TSP(x))$
F_2: $\exists x\, \neg TSP(x) \equiv \neg TSP(a)$
F_3: $\forall x\,(SH(x) \vee IH(x))$

b) $F_4: \exists_x\, IH(x) \equiv IH(a)$

Queremos provar que $F_1, F_2, F_3 \models F_4$

(1) $\neg SH(x) \vee TSP(x)$

(2) $\neg TSP(a)$

(3) $SH(x) \vee IH(x)$

(4) $\neg IH(a)$

(5) $\neg SH(a)$ Res $(1,2) \rightarrow \sigma_1 = mgu(TSP(a), TSP(x)) = \{a/x\}$

(6) $SH(a)$ Res $(3,4) \rightarrow \sigma_2 = mgu(IH(x), IH(a)) = \{a/x\}$

(7) $\perp$

Concluímos que existe pelo menos um infra-herói

23 – a) $F_1: \forall_x \forall_y ((\text{Cavalo}(x) \wedge \text{galgo}(y)) \rightarrow \text{maisRápido}(x,y)) \equiv \forall_x \forall_y (\neg(\text{Cavalo}(x) \wedge \text{galgo}(y)) \vee \text{maisRápido}(x,y)) \equiv$

$\equiv \forall_x \forall_y (\neg \text{Cavalo}(x) \vee \neg \text{galgo}(y) \vee \text{maisRápido}(x,y))$

$F_2: \exists_x (\text{galgo}(x) \wedge (\forall_y\, \text{Coelho}(y) \rightarrow \text{maisRápido}(x,y))) \equiv \exists_x \forall_y (\text{galgo}(x) \wedge (\text{Coelho}(y) \rightarrow \text{maisRápido}(x,y)) \equiv$

$\equiv \exists_x \forall_y (\text{galgo}(x) \wedge (\neg \text{Coelho}(y) \vee \text{maisRápido}(x,y))) \equiv \forall_y (\text{galgo}(a) \wedge (\neg \text{Coelho}(y) \vee \text{maisRápido}(a,y)))$

$F_3: \forall_x \forall_y \forall_z ((\text{maisRápido}(x,y) \wedge \text{maisRápido}(y,z)) \rightarrow \text{maisRápido}(x,z)) \equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg(\text{maisRápido}(x,y) \wedge \text{maisRápido}(y,z)) \vee \text{maisRápido}(x,z)) \equiv$

$\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg \text{maisRápido}(x,y) \vee \neg \text{maisRápido}(y,z) \vee \text{maisRápido}(x,z))$

$F_4: \text{Coelho}(\text{Roger})$

$F_5: \text{Cavalo}(\text{Harry})$

b) $F_6: \text{maisRápido}(\text{Harry}, \text{Roger})$

Queremos provar que $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \models F_6$

(1) $\neg \text{Cavalo}(x) \vee \neg \text{galgo}(y) \vee \text{maisRápido}(x,y)$

(2) $\text{galgo}(a)$

(3) $\neg \text{Coelho}(y) \vee \text{maisRápido}(a,y)$

(4) $\neg \text{maisRápido}(x,y) \vee \neg \text{maisRápido}(y,z) \vee \text{maisRápido}(x,z)$

(5) $\text{Coelho}(\text{Roger})$

(6) $\text{Cavalo}(\text{Harry})$

(7) $\neg \text{maisRápido}(\text{Harry}, \text{Roger})$

(8) $\neg \text{Cavalo}(x) \vee \text{maisRápido}(x,a)$ Res $(1,2) \rightarrow \sigma_1 = mgu(\text{galgo}(y), \text{galgo}(a)) = \{a/y\}$

(9) $\text{maisRápido}(\text{Harry}, a)$ Res $(6,8) \rightarrow \sigma_2 = mgu(\text{Cavalo}(x), \text{Cavalo}(\text{Harry})) = \{\text{Harry}/x\}$

(10) $\text{maisRápido}(a, \text{Roger})$ Res $(3,5) \rightarrow \sigma_3 = mgu(\text{Coelho}(y), \text{Coelho}(\text{Roger})) = \{\text{Roger}/y\}$

(11) $\neg \text{maisRápido}(a,z) \vee \text{maisRápido}(\text{Harry}, z)$ Res $(4,9) \rightarrow \sigma_4 = mgu(\text{maisRápido}(x,y), \text{maisRápido}(\text{Harry}, a)) = \{\text{Harry}/x, a/y\}$

(12) $\text{maisRápido}(\text{Harry}, \text{Roger})$ Res $(10,11) \rightarrow \sigma_5 = mgu(\text{maisRápido}(a, \text{Roger}), \text{maisRápido}(a,z)) = \{\text{Roger}/z\}$

(13) $\perp$ Res $(7,12)$

Concluímos então que o Harry é mais rápido do que o Roger.