

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 14 de Março de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO 3
AGRUPAMENTOS E IDENTIDADES
COMBINATÓRIAS

INTRODUÇÃO

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta:

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- **arranjos** quando a ordem das escolhas interessa,

«Marcaram Otávio e Jota» é diferente de «Marcaram Jota e Otávio».

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- **arranjos** quando a ordem das escolhas interessa,
- e de **combinações** quando a ordem das escolhas não interessa.

«Marcaram Otávio e Jota» é igual à «Marcaram Jota e Otávio».

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- **arranjos** quando a ordem das escolhas interessa,
- e de **combinações** quando a ordem das escolhas não interessa.
- Utilizamos o adjetivo **simples** para indicar que não permitimos repetições.

1. Arranjos

2. Combinações

3. Permutações com repetição

4. Identidades Combinatórias

1. ARRANJOS

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por **$A^r(n, k)$** .

Aqui

- $f(1)$ = a primeira escolha,
- $f(2)$ = a segunda escolha,
- ...
- $f(k)$ = a k -ésima escolha.

Intuição: Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\llcorner 124 \lrcorner \neq \llcorner 112 \lrcorner \quad \text{e} \quad \llcorner 112 \lrcorner \neq \llcorner 121 \lrcorner.$$

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por **$A^r(n, k)$** .

Como calcular?

$$A^r(n, k) = n^k \quad (\text{pelo princípio da multiplicação}).$$

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por **$A^r(n, k)$** .

Como calcular?

$$A^r(n, k) = n^k \quad (\text{pelo princípio da multiplicação}).$$

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A^r(n, 0) = n^0 = 1$. Em particular, $A^r(0, 0) = 0^0 = 1$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7, 6) = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7, 6) = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas *vermelhas, azuis e verdes* e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7, 6) = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas *vermelhas, azuis e verdes* e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\text{●}, \text{●}, \text{●}\}$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7, 6) = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas *vermelhas, azuis e verdes* e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\text{●}, \text{●}, \text{●}\}$.

Resposta: $A^r(3, 5) = 3^5 = 243$.

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

Intuição: «124» \neq «142» («112» não é permitido).

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Como calcular?

$$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Como calcular?

$$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A^s(n, 0) = 1$.

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Como calcular?

$$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n = k$)

$A^s(n, n) =$ o número de permutações de n elementos $= n!$.

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Como calcular?

$$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n < k$)

$$A^s(n, k) = 0.$$

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas^a de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- *num banco corrido.*

^aduas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os mesmos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas^a de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- *num banco corrido.*

Resposta: $A^s(n, k)$.

^aduas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os mesmos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas^a de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- *num banco corrido.*

Resposta: $A^s(n, k)$.

- *numa mesa redonda.*

^aduas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os mesmos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas^a de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

Resposta: $A^s(n, k)$.

- numa mesa redonda.

Aqui identificamos as maneiras que se obtém (uma a partir da outra) por *rotação*. Portanto, a resposta é

$$\frac{A^s(n, k)}{k}.$$

^aduas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os mesmos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B ; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B ; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

$$2 \cdot 11! = 79833600.$$

2. COMBINAÇÕES

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n **elementos** k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$:

Intuição: «124» = «142» \neq «143» («112» não é permitido).

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n **elementos** k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n, k)}{k!}$$

Ideia

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n **elementos** k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n, k)}{k!}$$

Ideia

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n **elementos** k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n, k)}{k!}$$

Ideia

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de **n elementos k a k** é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n, k)}{k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Ideia

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Resposta:

$$\begin{aligned} \binom{15}{3} \cdot \binom{16}{2} + \binom{15}{4} \cdot \binom{16}{1} + \binom{15}{5} \cdot \binom{16}{0} &= 54600 + 21840 + 3003 \\ &= 79443. \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

$$1. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ideia

Seja $X = \{1, 2, \dots, n\}$

Sobre 1: A função

$$\begin{aligned} f: \{A \subseteq X \mid |A| = k\} &\longrightarrow \{B \subseteq X \mid |B| = n - k\} \\ A &\longmapsto A^c \end{aligned}$$

é invertível e por isso bijetiva.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).

Ideia

Sejam $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sobre 2: Temos:

$$\begin{aligned}\{A \subseteq X \mid |A| = k\} &= \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \notin A\} \cup \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \in A\} \\ &= \{A \subseteq Y \mid |A| = k\} \cup \{B \cup \{n\} \mid B \subseteq Y, |B| = k-1\}\end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).
3. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Ideia

Seja $X = \{1, 2, \dots, n\}$

Sobre 3: Temos:

$$\begin{aligned} P(X) &= \bigcup_{i=0}^n \{A \subseteq X \mid |A| = i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \cup \dots \cup \{X\} \end{aligned}$$

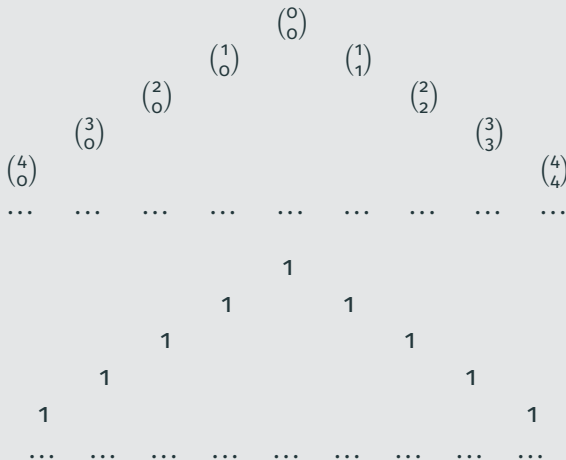
(dois a dois disjunta).

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

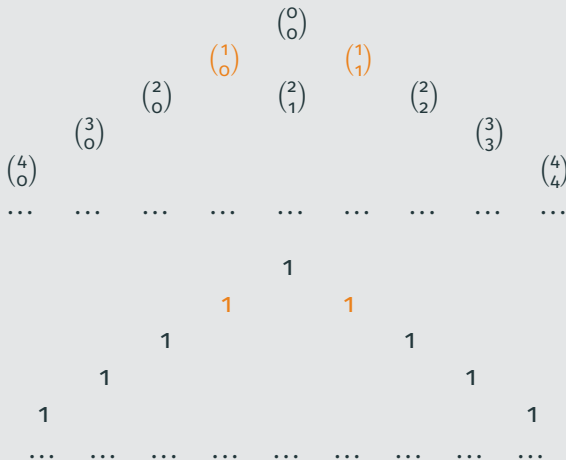
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$



Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

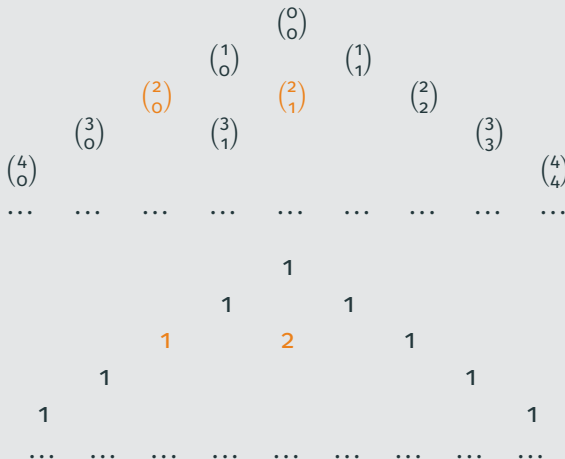


$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
[illegible]

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

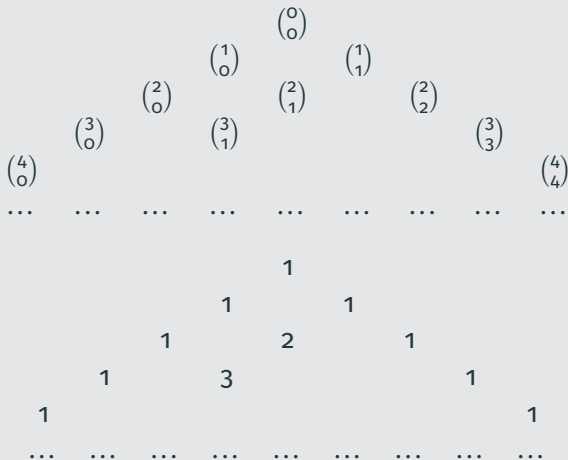
A recorrência



Recordamos:

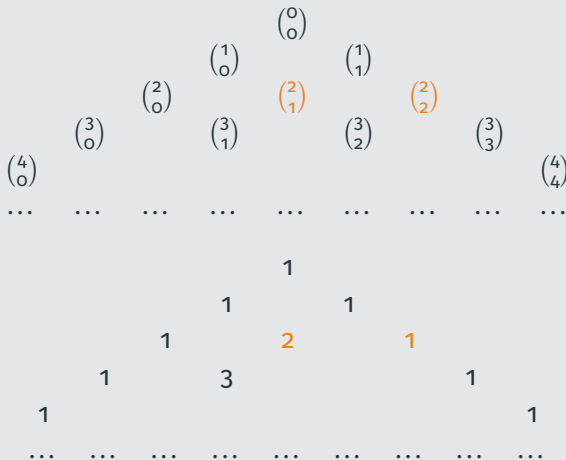
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência



A recorrência

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$



Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

...

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 1 & & & & & & & 1
 \end{array}$$

...

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
[illegible]

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

The diagram illustrates Pascal's triangle, showing the relationship between binomial coefficients and their numerical values. The top part of the triangle displays the coefficients in the form $\binom{n}{k}$, and the bottom part displays the corresponding numerical values.

Binomial Coefficients (Top):

- Row 0: $\binom{0}{0}$
- Row 1: $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$
- Row 2: $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$
- Row 3: $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$
- Row 4: $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{4}{4}$

Numerical Values (Bottom):

- Row 0: 1
- Row 1: 1, 1
- Row 2: 1, 2, 1
- Row 3: 1, 3, 3, 1
- Row 4: 1, 4, 6, 4, 1

The numerical values are arranged in a triangular pattern, with each value being the sum of the two values directly above it. The diagram uses ellipses (...) to indicate that the triangle continues infinitely in both directions.

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\ &= 1 \cdot 1 \dots 1 \\ &\quad + \\ &\quad + \\ &\quad + \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
 &= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
 &\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
 &\quad + \\
 &\quad + \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
 &= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
 &\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
 &\quad + x \cdot x \cdot 1 \dots 1 + x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \dots 1 + \dots + 1 \dots 1 \cdot x \cdot x \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Ideia

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= \overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n \text{ factores}} \\
 &= 1 \cdot 1 \dots 1 \\
 &\quad + \underbrace{x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do primeiro factor}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1 \dots 1}_{x \text{ do segundo factor}} + \dots + 1 \dots 1x \\
 &\quad + x \cdot x \cdot 1 \dots 1 + x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \dots 1 + \dots + 1 \dots 1 \cdot x \cdot x \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + x \dots x.
 \end{aligned}$$

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. Em particular, com $x = 1$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. Em particular, com $x = 1$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

3. Em geral, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a fórmula binomial de Newton).

O número $\binom{n}{k}$ diz-se também **coeficiente binomial**.

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k + m$ elementos.

Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Ideia. De facto, com $X = \{1, \dots, k + m\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número das soluções da equação $x_1 + \dots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$, $n > 0$) coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros. Portanto, o número de soluções é $\binom{n+k-1}{k}$.

Ideia

A uma tal solução (s_1, \dots, s_n) corresponde à sequência

$$\underbrace{1 \dots 1}_{s_1 \text{ vezes}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_2 \text{ vezes}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_n \text{ vezes}} .$$

Exemplo: Consideremos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

$$(2, 3, 0) \mapsto 1101110, \quad (2, 2, 1) \mapsto 1101101.$$

Definição

Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu: X \rightarrow \mathbb{N}$. Aqui $\nu(x)$ representa «o número de repetições» de x ou «a multiplicidade» de x .

O número $\sum_{x \in X} \nu(x)$ designa-se por **tamanho de M** ou **número de elementos de M** ou **cardinalidade de M** .

Definição

Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu: X \rightarrow \mathbb{N}$. Aqui $\nu(x)$ representa «o número de repetições» de x ou «a multiplicidade» de x .

O número $\sum_{x \in X} \nu(x)$ designa-se por **tamanho de M** ou **número de elementos de M** ou **cardinalidade de M** .

Nota

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Com $a_i = \nu(x_i)$, representamos o multiconjunto M da forma mais intuitiva por

$$M = \{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}\} \quad \text{ou} \quad M = \{\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{a_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{a_n \text{ vezes}}\}.$$

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$.

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\binom{n}{k}$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$: *Intuição:* «114» = «141» \neq «143».

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\binom{n}{k}$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$: *Intuição:* «114» = «141» \neq «143».

Teorema

O número de combinações com repetição de n elementos k a k é igual ao número de soluções de $x_1 + \cdots + x_n = k$ com $x_i \in \mathbb{N}$. Portanto, se $n > 0$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa.

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixas; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

(por exemplo: 13353 . . . 2)

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixas; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

(por exemplo: 13353 . . . 2)

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixas; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

(por exemplo: 13353...2)

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Portanto, temos uma combinação com repetição de 5 elementos 10 a 10:

$$\left(\binom{5}{10} \right) = \binom{10+5-1}{4} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001.$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\binom{n}{0} = 1.$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\binom{n}{0} = 1$.
2. Para $k > 1$, $\binom{0}{k} = 0$.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\binom{n}{0} = 1$.
2. Para $k > 1$, $\binom{0}{k} = 0$.
3. Para $n > 0$ e $k > 0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Ideia.

Consideremos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Então,

$$\begin{aligned}\{k\text{-multiconjuntos em } X\} &= \{k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) > 0\} \\ &\quad \cup \{k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) = 0\}.\end{aligned}$$



Escolher k elementos entre n elementos:

	com repetição	sem repetição (simples)
dependente da ordem (arranjos)	$A^r(n, k) = n^k$	$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fatores}}$
independente da ordem (combinações)	$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ se $(n > 0)$	$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$ (coeficiente binomial)

Algumas igualdades:

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (n, k > 0).$$

3. PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1}.$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- **resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.**

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} =$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8}{1!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1! \cdot 4!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1! \cdot 4! \cdot 2!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}$$

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — ; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n . Uma **permutação de M** (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s .

Definição

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n . Uma **permutação de M** (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s .

Teorema

O número de permutações do multiconjunto $\{x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k}\}$ de tamanho n é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Exemplo

Pelo exemplo anterior, o número de permutações do multiconjunto $\{2, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 9\}$ de 8 elementos é

$$\frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \ \dots \ n_k!}.$$

Ideia

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{\text{(escolher } A_1)}} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{\text{(escolher } A_2)}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}=n_k}{n_k}}_{\text{(escolher } A_k)}} = \frac{n(n-1) \dots (n-n_1+1) \dots 1}{n_1! \dots n_k!}.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m \ n-m} = \binom{n}{m}$.

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.
- Se $n_1 = \dots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} =$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.
- Se $n_1 = \dots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = n!$.

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Recordamos (a fórmula binomial)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1 + n_2 = n} \binom{n}{n_1 \ n_2} a^{n_1} b^{n_2}.$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Recordamos (a fórmula binomial)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n_1 + n_2 = n} \binom{n}{n_1 \ n_2} a^{n_1} b^{n_2}.$$

Exemplo

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c) &= \binom{3}{3 \ 0 \ 0} a^3 + \binom{3}{0 \ 3 \ 0} b^3 + \\ &\quad \binom{3}{0 \ 0 \ 3} c^3 + \binom{3}{2 \ 1 \ 0} a^2 b + \binom{3}{2 \ 0 \ 1} a^2 c + \binom{3}{1 \ 1 \ 1} abc + \dots \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

- obtêm-se os termos da forma

$$a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k},$$

com $n_1 + \dots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores,

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

- obtêm-se os termos da forma

$$a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k},$$

com $n_1 + \dots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores,

- Logo, existem $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$ termos da forma $a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$.

4. IDENTIDADES COMBINATÓRIAS

Já aprendemos:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

No caso das últimas duas identidades, na prova conta-se os elementos do mesmo conjunto de **duas maneiras diferentes**.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \emptyset$.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \emptyset$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \emptyset$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.
- Por outro lado, podemos obter estes subconjuntos escolhendo k elementos em X e $l - k$ elementos em Y , para cada número k entre 0 e l .

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \emptyset$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.
- Por outro lado, podemos obter estes subconjuntos escolhendo k elementos em X e $l - k$ elementos em Y , para cada número k entre 0 e l .

Exemplo

Em particular, para $m = n = k$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1 \dots (n_i-1) \dots n_k}.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1 \dots (n_i-1) \dots n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência (A_1, \dots, A_k) de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$), é designada por **partição de X do tipo (n_1, \dots, n_k)** .

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1 \dots (n_i-1) \dots n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência (A_1, \dots, A_k) de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$), é designada por **partição de X do tipo (n_1, \dots, n_k)** .

Por definição, $\binom{n}{n_1 \dots n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$\{ \text{as partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k) \}.$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1 \dots (n_i-1) \dots n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência (A_1, \dots, A_k) de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$), é designada por **partição de X do tipo (n_1, \dots, n_k)** .

Por definição, $\binom{n}{n_1 \dots n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$\{\text{as partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k)\}.$

Podemos representar este conjunto como a união dos seguintes conjuntos (dois a dois disjuntos).

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1-1, n_2, \dots, n_k) ;

Logo:

$$= \binom{n}{n_1 \dots n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1-1, n_2, \dots, n_k) ;

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1) \ n_2 \ \dots \ n_k} = \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1-1, n_2, \dots, n_k) ;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\}, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1, n_2-1, \dots, n_k) ;

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1) \ n_2 \ \dots \ n_k} + \binom{n-1}{n_1 \ (n_2-1) \ \dots \ n_k} = \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}.$$

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1-1, n_2, \dots, n_k) ;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\}, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1, n_2-1, \dots, n_k) ;
- ...
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2, \dots, B_k \cup \{n\})$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1, n_2, \dots, n_k-1) .

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1) \ n_2 \ \dots \ n_k} + \binom{n-1}{n_1 \ (n_2-1) \ \dots \ n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1 \ n_2 \ \dots \ (n_k-1)} = \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid |A| = n+1\}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideremos

$$Y_k = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots \cup Y_m$ (dois a dois disjuntos).

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideremos

$$Y_k = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots \cup Y_m$ (dois a dois disjuntos). Portanto,

$$|Y| = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n}.$$