Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 13 de junho de 2018

Exame Final (época normal) Duração: 2h30

Nota: Justifique devidamente as suas respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. [**40**] Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

   (b) Calcule a soma $f(x)$. (**Sug.:** comece por identificar a função derivada de f.)

2. [**15**] Represente em série de Taylor no ponto $c = 1$ a função $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, indicando o maior intervalo onde tal representação é válida.

3. [**15**] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π e integrável em $[-\pi, \pi]$. Justifique que se f é uma função par, então a sua série de Fourier é uma série de cossenos, da forma
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

4. [**45**] Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy^2 - y^2$.

   (a) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, -1)$.

   (b) Calcule as derivadas direcionais $D_{\vec{u}} f(0,1)$ segundo um qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

   (c) Determine os pontos críticos de f e classifique-os (minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

5. [**15**] Considere a função $f(x,y) = 1 - x$. Justifique que f possui extremos absolutos no círculo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e calcule tais extremos.

6. [**45**] Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = (2-y)^2 \operatorname{sen} x$;

   (b) $(2x \cos y + 3x^2 y)\, dx + (x^3 - 2y - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy = 0$;

   (c) $y'' + y' - 6y = 50xe^{2x}$. (**Sug.:** use o método dos coeficientes indeterminados.)

7. [**25**] Resolva o seguinte problema de Cauchy usando transformadas de Laplace:
$$y' - y = 2e^t, \quad y(0) = -1.$$

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^{\alpha})' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen}\, f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos\, f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg}\, f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg}\, f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$