## Matrizes

1. Considere a matriz identidade $I_2$ e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule

(a) $A+B$; (b) $D^\top - 2A$; (c) $AD$; (d) $DA$; (e) $ACD$; (f) $\frac{1}{5}\left(I_2 - (DA)^2\right)$;

(g) o produto das matrizes $A$, $C$, $D$ e $E$, considerando estas matrizes ordenadas de forma adequada.

2. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

   (a) Se $A$ e $B$ são matrizes de ordem $n$, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   (b) Se $A$ e $B$ são matrizes de ordem $n$, então $(AB)^2 = A^2B^2$.

   (c) Se $A, B, C$ são matrizes tais que $A + C = B + C$, então $A = B$.

   (d) Se $A, B, C$ são matrizes tais que $AB = AC$, então $A = O$ (matriz nula) ou $B = C$.

   (e) Se $A$ é uma matriz de ordem $n$ tal que $AA^T = O$, então $A = O$ (sendo $O$ a matriz nula de ordem $n$).

   (f) Para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \mu_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^k \end{bmatrix}.$$

3. Seja $A$ uma matriz quadrada.

   (a) Mostre que $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

   (b) Em que condições é que a matriz $A - A^T$ é simétrica?

4. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique as matrizes que estão na forma escalonada e as que estão na forma escalonada reduzida.

   (b) Determine matrizes equivalentes por linhas às matrizes dadas que estejam:

      i. na forma escalonada;

      ii. na forma escalonada reduzida.

## Sistemas de equações lineares

5. Resolva os seguintes sistemas usando o método de eliminação de Gauss (ou o método de eliminação de Gauss-Jordan).

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

6. Para cada sistema, determine os valores de $\alpha$ para os quais o sistema

(a) $\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + (\alpha - 1)y + \alpha z = \alpha - 2 \\ (\alpha - 1)y = 1 \\ \alpha\, z = \alpha - 3 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x + \alpha y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + y + z = 0 \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$.

i. não tem solução; ii. tem exatamente uma solução; iii. tem uma infinidade de soluções.

7. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases},$$

onde $a$ e $b$ são parâmetros reais.

(a) Determine os valores de $a$ e $b$ para os quais o sistema é:
i. possível e determinado; ii. possível e indeterminado; iii. impossível.

(b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

8. Considere a matriz $A$ de dimensão $3 \times 5$, o vetor $B$ de dimensão $5 \times 1$ e o sistema $AX = B$, onde $X$ é o vetor das incógnitas. Sabendo que a caraterística de $A$ é 3, determine a caraterística da matriz ampliada do sistema (matriz $[A|B]$) e a nulidade de $A$. Classifique o sistema.

9. Seja $A$ uma matriz qualquer e $B$ uma coluna de $A$. Mostre que o sistema $AX = B$ é possível e indique uma solução.

## Posição relativa de retas e planos

10. Considere os sistemas dos exercícios 5-(c,d,e). Suponha que as duas primeiras equações de cada sistema são equações cartesianas de uma reta $r$ e a terceira equação é uma equação geral de um plano $\mathcal{P}$. Em cada alínea, determine a posição relativa da reta $r$ e do plano $P$ e descreva a interseção de $r$ e $\mathcal{P}$.

11. Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ de equações $x + y + 2z = 3$ e $ax + 2y + 4z = b$, respectivamente, com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros reais $a$ e $b$.

12. Considere que cada uma das seguintes matrizes é uma matriz obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz de um sistema formado por equações cartesianas que definem duas retas $r$ e $s$:

$$\text{(a)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 15 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];\quad \text{(b)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];\quad \text{(c)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right];\quad \text{(d)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Para cada matriz, indique qual é a posição relativa das retas $r$ e $s$. Justifique.

13. Considere a reta $r$ definida por $x = 2y + z = 1$ e a familia de retas $s_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + \alpha(0, 2, b),\quad \alpha \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine as equações cartesianas de $s_{a,b}$.

(b) Discuta a posição relativa das retas $r$ e $s_{a,b}$, em função dos parâmetros $a$ e $b$.

## Matriz Inversa

14. Averigue se as seguintes matrizes são invertíveis (não singulares) e, em caso afirmativo, determine a respectiva inversa:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix};\qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\qquad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix};\qquad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

15. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},\qquad C = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix},\qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $C = ADB$.

(b) Verifique que $B$ é a matriz inversa de $A$.

(c) Calcule $C^5$, usando as alíneas anteriores.

(d) Resolva a equação matricial $AXD = B$, relativamente à matriz $X$.

16. Considere a matriz invertível $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $M$ satisfaz a equação $M^3 - 4M^2 - I_3 = 0$.

(b) Prove, sem calcular o seu valor, que $M^{-2} = M - 4I_3$.

(c) Calcule $M^{-1}$ pela equação da alínea anterior e verifique o resultado obtido.

17. (a) Seja $A$ uma matriz arbitrária $n \times n$. Suponhamos que existe um número natural $k$ tal que $A^k = O$ (matriz nula $n \times n$). Mostre que $I_n - A$ é invertível e que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

(b) Usando a alínea anterior, calcule a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

resolva as seguintes equações matriciais relativamente à matriz $X$:

(a) $\left((B^{-1})^T X\right)^{-1} A^{-1} = I$;

(b) $\left(C^T D^T X\right)^T = E$.

19. Considere o sistema de equações lineares

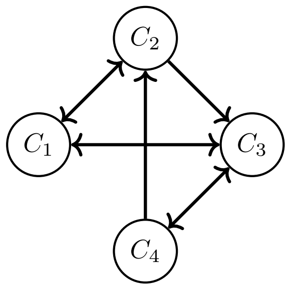
$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}.$$

(a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado. Calcule a sua solução recorrendo à inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

## Algumas aplicações

20. Uma companhia aérea serve quatro cidades, $C_1$, $C_2$, $C_3$ e $C_4$, cujas ligações podem ser representadas por um *grafo orientado*:




- existem voos de $C_1$ para $C_2$ e $C_3$;
- existem voos de $C_2$ para $C_1$ e $C_3$;
- existem voos de $C_3$ para $C_1$ e $C_4$;
- existem voos de $C_4$ para $C_2$ e $C_3$.

(a) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$, chamada a matriz de adjacência associada ao grafo, tal que

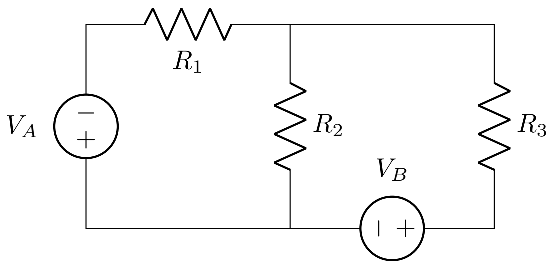
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um voo de } C_i \text{ para } C_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) A matriz $A^r = [a_{ij}^{(r)}]$ (onde $A^r$ é a matriz que resulta da multiplicação de $r$ matrizes iguais a $A$) é tal que a entrada $a_{ij}^{(r)}$ representa o número de itinerários diferentes de ligação da cidade $C_i$ à cidade $C_j$ utilizando $r$ voos. Determine quantos itinerários diferentes existem para irmos da cidade $C_4$ para a cidade $C_1$ utilizando:

i. apenas um voo; ii. dois voos; iii. três voos.

Para cada uma das alíneas anteriores, determine explicitamente todos os itinerários.

21. Considere o circuito eléctrico representado na figura seguinte:

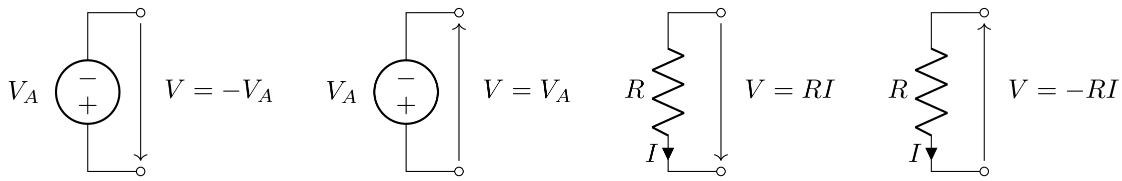



constituído por dois geradores de tensão $V_A = 7\,V$ e $V_B = 5\,V$ e três resistências $R_1 = 10\,k\Omega$, $R_2 = 5\,k\Omega$ e $R_3 = 15\,k\Omega$. Determine a intensidade das correntes que passam pelas três resistências.

**Observação:** Para resolver o exercício é preciso aplicar as **Leis de Kirchhoff**:

- **(lei dos nós)** a soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que dele saem (ou seja, um nó não acumula carga);
- **(lei das malhas)** a soma da diferença de potencial eléctrico ao longo de qualquer caminho fechado (malha) é nula.

A direção escolhida para percorrer a malha determina o cálculo das diferenças de potencial consoante as seguintes convenções:




- Num gerador de tensão, a diferença de potencial eléctrico medida do polo positivo para o polo negativo é positiva; caso contrário é negativa.
- Numa resistência $R$ percorrida por uma corrente $I$, a diferença de potencial eléctrico, medida com o mesmo sentido que a corrente, é dada pela Lei de Ohm, isto é, $V = RI$; caso contrário, $V = -RI$.

*Sugestão: comece por determinar um sistema de equações lineares que resulta da aplicação das leis de Kirchhoff e aplique o método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) ao sistema.*

1. (a) $\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 4\\7 & 9\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}-2 & 5\\-3 & 0\\-4 & -4\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}-2 & -1 & -4\\0 & -1 & 0\\3 & -2 & 6\end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 4\end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix}-3 & 1 & -6\\1 & 1 & 2\\8 & 2 & 16\end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix}0 & 0\\-3 & -3\end{bmatrix}$;
   (g) $DACE = \begin{bmatrix}5\\-41\end{bmatrix}$ ou $CDAE = \begin{bmatrix}10\\14\end{bmatrix}$.

2. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira; (d) Falsa; (e) Verdadeira; (f) Verdadeira.

3. (b) Quando $A$ é uma matriz simétrica e neste caso $A - A^\top = 0$ (matriz nula).

4. (a) Forma escalonada: B e D; forma escalonada reduzida: D.
   (b) i. Forma escalonada: $A_e = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $C_e = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.
   ii. Forma escalonada reduzida: $A_r = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $B_r = \begin{bmatrix}1 & \frac{4}{3} & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$; $C_r = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$;

5. (a) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$; (b) impossível; (c) $x_1 = -4$, $x_2 = -8$, $x_3 = 2$; (d) impossível; (e) $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{3} - 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (f) $x_1 = \frac{3}{17}t_1 - \frac{13}{17}t_2$, $x_2 = \frac{19}{17}t_1 - \frac{20}{17}t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

6. (a) i. $\alpha = -1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = 1$; (b) i. $\alpha \in \{0, 1\}$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; (c) i. $\alpha = 1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = -1$.

7. (a) i. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ii. $a = 1$ e $b = -1$; iii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $b = -1$. (b) $\{(1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

8. Seja $n = 5$ o número de colunas de $A$. $car([A|B]) = 3$ e $nul(A) = n - car(A) = 2$. O sistema é possível e indeterminado porque $car(A) = car([A|B]) = 3 < n = 5$. O grau de indeterminação do sistema é igual a $nul(A) = 2$.

9. Se $B$ é a coluna $i$ de $A$, então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$, com 1 na linha $i$ e as restantes entradas nulas, é uma solução.

10. (c) A reta $r$ e o plano $\mathcal{P}$ são concorrentes. Intersetam-se no ponto $(-4, -8, 2)$;
    (d) A reta $r$ e o plano $\mathcal{P}$ são paralelos. A interseção é o conjunto vazio.
    (e) A reta $r$ está contida no plano $\mathcal{P}$. A interseção é a $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = t,\ x_2 = \frac{1}{3} - 2t,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}\}$, isto é, $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{1}{3}, 0) + t(1, -2, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$.

11. $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = 2$ e $b = 6$; estritamente paralelos se $a = 2$ e $b \neq 6$; concorrentes se $a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$.

12. (a) Retas concorrentes; (b) retas coincidentes; (c) retas enviesadas; (d) retas estritamente paralelas.

13. (a) Equações cartesianas de $s_{a,b}$: $x = a$, $by - 2z = -2$.
    (b) As retas $r$ e $s_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviesadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.

14. (a) Matriz singular; (b) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 1\\3 & 4 & 2\end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\1 & -2 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$.

15. (c) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix}3197 & -1266\\7385 & -2922\end{bmatrix}$; (d) $X = \begin{bmatrix}32 & -9\\-\frac{45}{2} & \frac{19}{3}\end{bmatrix}$.

16. (c) $M^{-1} = MM^{-2} = M(M - 4I) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\-4 & 1 & -2\\-7 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

17. (a) $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$.

(b) $M = I - A$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo $A^3 = O$. Logo, $M^{-1} = (I-A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $X = \left(E(DC)^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

19. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $x = -1, y = -5, z = 2$.

20. (i) 0 itinerários; (ii) 2: $C_4 \to C_2 \to C_1$, $C_4 \to C_3 \to C_1$; (iii) 1: $C_4 \to C_2 \to C_3 \to C_1$.

21. $I_1 = 600\,\mu$A (esquerda–direita), $I_2 = 200\,\mu$A e $I_3 = 400\,\mu$A (cima–baixo).