Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2021/22**

Folha 3: *Extremos de funções reais de várias variáveis reais*

Parte 1: ***Domínios; conjuntos de nível; derivadas parciais; gradientes.***

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$;
   (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x - 1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$;
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 < z \leq x + y\}$;
   (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$;
   (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

   Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$).

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$;
   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}$;
   (c) $f(x, y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x, y) = \ln(xy)$;
   (e) $f(x, y) = \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{|x| - |y|}$;
   (f) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;
   (g) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
   (h) $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;
   (b) $f(x, y) = e^{xy}$;
   (c) $f(x, y, z) = x + y + 3z$;
   (d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$;
   (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.
   Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} x + \cos(z - 3y).$$

6. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ $\quad [P = (2, 2)]$;

   (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}, & \text{se} \quad x^2 + 2y^2 \neq 4 \\ 0, & \text{se} \quad x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad [P = (2, 0)]$;

   (c) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ $\quad [P = (0, 0)]$.

7. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função

$$f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y).$$

8. Determine uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^3 - 6x + \frac{y}{1 + y^2}, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + xy^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$.

10. Sendo $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

11. Mostre que a função $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (\textit{equação de Laplace}).$$

12. Considere a função $f(x, y) = \ln x + xy^2$.

    (a) Indique o domínio de f.

    (b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 4)$.

13. Seja $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(yz)$.

    (a) Determine o gradiente de f.

    (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ segundo o vetor unitário $\vec{u}$ com a direção e sentido de $v = (1, 2, -1)$.

14. Considere a função f definida por $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

    (a) Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.

    (b) Descreva as curvas de nível da função f.

    (c) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(1, 0)$.

15. Determine reta normal e o plano tangente à superfície cónica

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 - z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

no ponto $(3, 4, -2)$.

16. Considere a função f dada por $f(x,y,z) = 3xy + z^2$.

    (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.

    (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f, no ponto $(1,1,1)$.

Parte 2: *Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados.*

17. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

    (a) Esboce graficamente o domínio D.

    (b) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f e determine-os.
    [Sug.: relacione o valor de f em cada ponto (x,y) com a norma desse ponto].

18. Sejam $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x,y,z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em $\mathcal{S}$? Porquê?

19. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = -x^2$. Justifique que f possui uma infinidade de maximizantes.

20. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

    (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f? Justifique.

    (b) Justifique, usando diretamente a definição, que $(0,0,0)$ é minimizante de f.

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

    (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) Justifique que $(0,0)$ é maximizante absoluto de f.

22. Considere a função $g(x,y) = y$ e os conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    (a) Justifique que g possui extremos globais em B.

    (b) Identifique os extremantes globais de g em B.

    (c) A função g possui extremantes globais em A? Justifique.

23. Mostre que a função $h(x,y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ não atinge o seu máximo global na origem.

24. Determine os pontos críticos das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;

    (b) $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$;

    (c) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

25. Mostre que a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1,2)$.

26. Considere a função $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4(x - 2y)$ definida em $D = [0,1] \times [0,2]$.

    (a) Diga, justificando, se f possui pontos críticos no interior de D.

(b) Prove a existência de extremos absolutos e determine-os.

27. Determine os extremos locais das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = xy\,e^{-x-y}$;
    (b) $g(x,y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$.

    (Sugestão: faça também uma análise gráfica, usando, por exemplo, o GeoGebra)

28. Verifique que $(-2,0)$ e $(0,0)$ são os pontos críticos da função $f(x,y) = 3x^2-y^2+x^3$, mas que só o primeiro é extremante de f.

29. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-y^3)^2 - x^3$.

    (a) Verifique que $(0,0)$ é ponto crítico de f.
    (b) Mostre que $(0,0)$ não é extremante local de f.

30. Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

31. Calcule os extremos globais da função f definida por $f(x,y) = xy$ no semicírculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

32. Determine os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão à menor distância do ponto $(1,2)$ e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.

33. Considere o plano β de equação $x + 2y + z = 4$.

    (a) Determine o ponto do plano β que se encontra mais próximo do ponto $(0,0,0)$.
    (b) Calcule a distância mais curta entre o ponto $(1,0,-2)$ e o plano β.

34. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3,1,-1)$.

35. Seja f a função definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ por $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

    (a) Represente geometricamente o domínio D e o gráfico de f.
    (b) Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.
    (c) Determine os extremos globais da função f em D.

36. Seja f a função definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 1-x \leq y \leq 1\}$ por $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x - y$.

    (a) Represente geometricamente o domínio D.
    (b) Determine o interior de D e diga, justificando, se f possui aí pontos críticos.
    (c) Determine os extremos globais da função f em D.

37. O lucro anual de uma empresa é calculado através da expressão

$$L(x,y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

    onde x representa o montante gasto em investigação e y o montante gasto em publicidade (L, x e y expressos em unidades de milhões de euros).
    Determine o lucro máximo da empresa e os valores de x e y que o realizam.

38. Numa dada empresa, as funções *produção* (P) e *custo* (C) são dadas por

$$P = 3K^{1/3}L^{1/3} \quad \text{e} \quad C = K^2 + 2L + 8 \qquad (K\text{- capital; } L\text{-trabalho}).$$

    Calcule o custo mínimo para uma produção de 12 unidades.