

Espaço vetorial e subespaço

1. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ munido das operações \oplus e \odot assim definidas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha + 1 \\ \alpha x_2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que \mathcal{V} é um espaço vetorial e calcule o elemento neutro $0_{\mathcal{V}}$ e o simétrico de $X \in \mathcal{V}$.
- (b) Verifique se o conjunto $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço de \mathcal{V} .
2. Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais indicados.
- (a) No espaço vetorial \mathbb{R}^2 , o conjunto dos vetores (x, y) tais que: i. $x + y = 0$; ii. $(x, y) \neq (1, 1)$.
- (b) No espaço vetorial \mathbb{R}^3 , o conjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- (c) No espaço vetorial \mathcal{P}_2 dos polinómios em x de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios $ax^2 + bx + c$ com: i. $c = 0$; ii. $b = 1$; iii. $bc = 0$.
- (d) No espaço vetorial $\mathbb{R}^{n \times n}$ das matrizes quadradas de ordem n , o conjunto das matrizes
- i. simétricas; ii. triangulares; iii. invertíveis;
- iv. X tais que $AX = O$; v. X tais que $AX = I_n$, sendo $\det A \neq 0$
- (e) No espaço vetorial \mathbb{R}^n , o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vector $X \in \mathbb{R}^n$.
- (f) No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real, o conjunto das funções f tais que $f(0) = 0$.
3. Sejam \mathcal{V} um espaço vetorial e $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{V}$. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{S} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle = \{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de \mathcal{V} (\mathcal{S} é o subespaço de \mathcal{V} gerado por X_1, X_2, X_3).

4. Mostre que se E é subespaço de $\mathbb{R}^{n \times n}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível, então $F = \{P^{-1}AP : A \in E\}$ é também subespaço de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Combinação linear, subespaço gerado e independência linear

5. Escreva, sempre que possível,
- (a) o vetor $(2, -3, -4, 3)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1, 0)$ e $(4, 1, -2, 3)$;
- (b) o vetor $(1, 1, 0)$ como combinação linear dos vetores $(2, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;
- (c) o polinómio $-t^2 + t + 4$ como combinação linear dos polinómios $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$;
- (d) a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
6. Determine o subespaço gerado pelos conjuntos indicados.
- (a) $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ em \mathbb{R}^2 ; (b) $\{(0, 1), (0, 2)\}$ em \mathbb{R}^2 ;
- (c) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$ em \mathbb{R}^3 ; (d) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ em \mathcal{P}_2 .

7. Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 e u um vetor não nulo de \mathbb{R}^2 .

(a) Verifique que $\langle u \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem a direcção de u .

(b) Represente geometricamente $\langle (1, -1) \rangle$.

9. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e os vetores u_1 e u_2 de \mathbb{R}^3 linearmente independentes.

(a) Mostre que o subespaço gerado por u_1 é a reta que passa pela origem e tem a direcção de u_1 .

(b) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2 é o plano que passa pela origem e que contém os vetores u_1 e u_2 .

(c) Represente geometricamente i. $\langle (1, -1, 2) \rangle$; ii. $\langle (1, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle$; iii. $\langle (1, -1, 1), (-2, 2, -2) \rangle$.

10. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

(a) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, -1, 1)\}$; (b) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;

(c) $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 0, -1)\}$; (d) $\{2t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$.

11. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um conjunto de vetores de \mathbb{R}^n linearmente independente. Mostre que, se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\{AX_1, \dots, AX_n\}$ é linearmente independente.

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Mostre que as linhas de A são linearmente independentes se e só se as suas colunas o são.

Bases e dimensão

13. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:

(a) $\{(1, 2), (2, 4)\}$ em \mathbb{R}^2 ; (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$;

(c) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ em \mathbb{R}^3 ; (d) $\{t^2 - 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$ em \mathcal{P}_2 .

14. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

(a) $(1, 3, 0), (-1, 1, 0)$ em \mathbb{R}^3 ; (b) $(1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2)$ em \mathbb{R}^3 ;

(c) $t^2 + 1, t^2 - t + 1$ em \mathcal{P}_2 .

15. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 .

16. Determine uma base de \mathbb{R}^4 que contenha os vetores $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, -1, 0)$.

17. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$.

(a) Verifique que S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

(b) Determine um conjunto gerador de S e verifique se ele é linearmente independente.

(c) Indique, justificando, a dimensão de S .

18. Mostre que, se $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ for uma base de um espaço vetoriais real \mathcal{V} , então

(a) $\{cX_1, X_2, \dots, X_n\}$ com $c \neq 0$ é também uma base de \mathcal{V} ;

(b) $\{X_1 + X_2 + \dots + X_n, X_2 + \dots + X_n, \dots, X_n\}$ é ainda uma base de \mathcal{V} .

Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo e nulidade

19. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine uma base do espaço nulo de A e indique, justificando, a nulidade de A .
- (b) Determine o subespaço $\mathcal{S} = \{AX : X \in \mathbb{R}^4\}$.
- (c) Mostre que $\{(1, -1, -1), (4, -3, -2)\}$ é uma base de \mathcal{S} .

20. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que

- (a) se $m > n$, então pelo menos as linhas de A são linearmente dependentes;
- (b) se $m < n$ então pelo menos as colunas são linearmente dependentes.

21. Para cada uma das matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- i. determine uma base para o espaço nulo $\mathcal{N}(A)$ de A ;
- ii. determine bases para o espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$ e o espaço das colunas $\mathcal{C}(A)$ de A ;
- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$;
- iv. diga, usando a informação dada pela característica, se as linhas de A são linearmente independentes.

22. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Mostre que o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A .

Coordenadas e mudança de bases

23. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 3, -1))$ de \mathbb{R}^3 .

- (a) Calcule $[X]_{\mathcal{B}_1}$ e $[X]_{\mathcal{B}_2}$ para i. $X = (2, 3, 5)$, ii. $X = (-1, 2, 0)$ e iii. $X = (1, 1, 1)$.
- (b) Determine a matriz M de mudança da base \mathcal{B}_1 para a base \mathcal{B}_2 . Confirme os resultados obtidos em (a) usando M .

24. Sejam $\mathcal{S} = ((1, 2), (0, 1))$ e $\mathcal{T} = ((1, 1), (2, 3))$ duas bases de \mathbb{R}^2 e o vetor $X = (1, 5)$. Determine

- (a) as coordenadas de X na base \mathcal{S} e as coordenadas de X na base \mathcal{T} ;
- (b) o vetor Z tal que $[Z]_{\mathcal{T}} = (1, -3)$;
- (c) a matriz M de mudança da base \mathcal{T} para a base \mathcal{S} ;
- (d) as coordenadas de X na base \mathcal{S} usando M ;
- (e) a matriz N de mudança da base \mathcal{S} para a base \mathcal{T} ;
- (f) as coordenadas de X na base \mathcal{T} usando N .

25. Sejam $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases de \mathbb{R}^3 com $X_1 = (-1, 1, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1)$ e $X_3 = (0, 0, 1)$. Determine \mathcal{T} , sabendo que a matriz de mudança da base \mathcal{T} para a base \mathcal{S} é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bases ortonormadas e projeções ortogonais

26. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:

- (a) $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$; (b) $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$.

27. Indique para que valores de a e b o conjunto $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b \right) \right\}$ é ortonormado.

28. Sejam $X_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right)$, $X_2 = (0, 1, 0)$ e $X_3 = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$ vetores de \mathbb{R}^3 .

- (a) Verifique que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 .
(b) Calcule o vetor $[X]_{\mathcal{B}}$ para $X = (1, 1, 1)$, usando o facto de \mathcal{B} ser uma base ortonormada.
(c) Calcule a matriz M de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base \mathcal{B} .
(d) Calcule $[Y]_{\mathcal{B}}$, sabendo que $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)$.

29. Sejam X, Y_1, \dots, Y_n vetores em \mathbb{R}^n . Mostre que se X é ortogonal a Y_1, \dots, Y_n , então X é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por Y_1, \dots, Y_n .

30. Considere o plano \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $X_1 = (1, 1, 0)$ e $X_2 = (0, 0, 1)$.

- (a) Determine uma base ortonormada de \mathcal{P} .
(b) Determine a projeção ortogonal do vetor $X = (2, -2, 1)$ sobre o plano \mathcal{P} .
(c) Determine a distância do ponto $(2, 1, 1)$ ao plano \mathcal{P} , usando a alínea (a).

31. Calcule as projeções ortogonais de $X = (4, 0, -9)$ e $Y = (2, 7, -1)$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $(0, 1, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

32. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

- (a) Todos os vetores da forma $(a, 0, -a)$ com $a \in \mathbb{R}$ formam um subespaço de \mathbb{R}^3 .
(b) Todo o conjunto de vetores de \mathbb{R}^3 com dois vetores é linearmente independente.
(c) O espaço das soluções do sistema homogéneo $AX = 0$ é gerado pelas colunas de A .
(d) Se as colunas de uma matriz $n \times n$ formarem uma base de \mathbb{R}^n , então o mesmo acontece com as linhas.
(e) Se A é uma matriz 8×8 tal que o sistema homogéneo $AX = 0$ só tem a solução trivial, então $\text{car}(A) < 8$.
(f) Todo o conjunto de 5 vetores em \mathbb{R}^5 é uma base em \mathbb{R}^5 .
(g) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em \mathbb{R}^5 é uma base em \mathbb{R}^5 .
(h) Todo o conjunto de vetores de \mathbb{R}^3 linearmente independente contém 3 vetores.
(i) Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então $\text{car}(A) = n$.
(j) Todo o conjunto de vetores que geram \mathbb{R}^3 contém pelo menos 3 vetores.

1. (a) $0_V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\ominus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \end{bmatrix}$. (b) Sim.
2. (a) i. Sim; ii. não. (b) Não. (c) i. Sim; ii. não; iii. não. (d) i. Sim; ii. não; iii. não; iv. sim; v. não. (e) Sim. (f) Sim.
5. (a) $(2, -3, -4, 3) = -2(1, 2, 1, 0) + (4, 1, -2, 3)$; (b) $(1, 1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) - \frac{1}{3}(1, 0, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, 1)$; (c) e (d) não é possível.
6. (a) \mathbb{R}^2 ; (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$; (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$; (d) \mathcal{P}_2 .
7. $\{(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.
10. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim.
13. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) Não.
14. (a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, dimensão 2; (b) $\{(1, -1, 1), (0, 2, 1)\}$, dimensão 2; (c) $\{t^2 + 1, t\}$, dimensão 2.
Nota: Em (a) e (c), o conjunto dado também constitui uma base.
15. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
16. $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
17. (b) $\{(1, 1, 0), (0, 3, 1)\}$ que é l.i.; (c) 2.
19. (a) $\{(-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 1)\}$ e $\text{nul } A = 2$. (b) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + 2b\}$.
21. (a) i. \emptyset ; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 2, -3, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 1, \frac{2}{3})\}$; iii. $\text{car } A = 3$, $\text{nul } A = 0$; iv. não.
 (b) i. $\{(-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4)\}$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4})\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$; iii. $\text{car } A = 2$, $\text{nul } A = 2$; iv. sim.
 (c) i. $\{(5, -2, -9, 13, 0), (-6, -8, 3, 0, 13)\}$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 2, 3, 2, 1), (0, 1, \frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$ ou $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0, -\frac{5}{13}, \frac{6}{13}), (0, 1, 0, \frac{2}{13}, \frac{8}{13}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$; iii. $\text{car } A = 3$, $\text{nul } A = 2$; iv. sim.
 (d) i. \emptyset ; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$; iii. $\text{car } A = 3$, $\text{nul } A = 0$; iv. sim.
- Nota:* Em (a), as colunas da matriz dada também constituem uma base de $\mathcal{C}(A)$.
 Em (b) e (c), as linhas da matriz dada também constituem uma base de $\mathcal{L}(A)$.
 Em (d), as linhas/colunas da matriz dada também constituem bases de $\mathcal{L}(A)/\mathcal{C}(A)$.
23. (a) i. $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_1} = (2, -\frac{1}{2}, -3)$ e $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_2} = (-\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{1}{5})$; ii. $[(-1, 2, 0)]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 2, -1)$ e $[(-1, 2, 0)]_{\mathcal{B}_2} = (-2, -1, 1)$; iii. $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_1} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$ e $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_2} = (0, 1, 0)$. (b) $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.
24. (a) $[X]_{\mathcal{T}} = (-7, 4)$ e $[X]_{\mathcal{S}} = (1, 3)$; (b) $Z = (-5, -8)$; (c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (d) $[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = (1, 3)$;
 (e) $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (f) $[X]_{\mathcal{T}} = N[X]_{\mathcal{S}} = (-7, 4)$.
25. $\mathcal{T} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, 2, 2)\}$.
26. (a) Não; (b) sim.
27. $a = b = \frac{1}{2}$ ou $a = b = -\frac{1}{2}$.
28. (b) $[X]_{\mathcal{B}} = (\frac{7}{5}, 1, \frac{1}{5})$. (c) $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $[Y]_{\mathcal{B}} = (6, 5, 3)$.

30. (a) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$; (b) $(0, 0, 1)$; (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

31. $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = \left(1 - \frac{9\sqrt{3}}{4}, 0, \sqrt{3} - \frac{27}{4}\right)$ e $\text{proj}_{\mathcal{W}} Y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, 7, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$.

32. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Verdadeira. (e) Falsa. (f) Falsa. (g) Verdadeira. (h) Falsa. (i) Falsa. (j) Verdadeira.