Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 14 de Fevereiro de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo I
A lógica de primeira ordem e demonstração automática

Introdução

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma prova?

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma prova?

Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma afirmação/asserção.

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma prova?

Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma afirmação/asserção.
- o que é, em rigor, uma linguagem formal.

Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

Aprender português (ou alemão ou . . .) significa . . .

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
    - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
    - «$\wedge, \rightarrow, \neg, \forall, \cos, x, y, \ldots$»

Aprender português (ou alemão ou . . .) significa . . .

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
   - «A, B, C, D, E,. . . , !,?,. . . »
   - «$\wedge, \rightarrow, \neg, \forall, \cos, x, y, \ldots$»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

Aprender português (ou alemão ou . . .) significa . . .

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
    - «A, B, C, D, E,. . . , !,?,. . . »
    - «$\wedge, \rightarrow, \neg, \forall, \cos, x, y, \ldots$»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
    - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
    - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
    - «$\forall x\, \exists y\; x < y$» está bem mas «$xy \rightarrow \forall$» não.

Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
   - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
   - «$\wedge, \to, \neg, \forall$, cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
   - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
   - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
   - «$\forall x\, \exists y\; x < y$» está bem mas «$xy \to \forall$» não.
3. Aprender o significado das palavras (isto é, a sua interpretação).

Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
   - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
   - «$\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
   - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
   - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
   - «$\forall x\, \exists y\ x < y$» está bem mas «$xy \rightarrow \forall$» não.
3. Aprender o significado das palavras (isto é, a sua interpretação).

   Por exemplo, a palavra «esquilo» significa

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e $3 + 3 = 0$, então $3 + 3 = 0$. ✓

Exemplo

A fórmula

$$(p \land q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e $3 + 3 = 0$, então $3 + 3 = 0$. ✓
- …

Mas não temos todo o dia!!

Exemplo

A fórmula

$$(p \land q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e $3 + 3 = 0$, então $3 + 3 = 0$. ✓
- …

Mas não temos todo o dia!! Felizmente, basta considerar os casos «p representa algo verdadeiro», «p representa algo falso», «q representa algo verdadeiro» e «q representa algo falso».

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Demonstração.

Verificamos de facto todas as interpretações:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$\square$

Exemplo

A fórmula

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$$

é uma tautologia?

Exemplo

A fórmula

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$$

é uma tautologia?

Para justificar esta afirmação, em lugar de criar uma tabela de verdade, é melhor(?) argumentar:

Suponha, por causa de argumento, $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r))$, portanto $p \vee q$ e $q \rightarrow r$. Sabendo $p \vee q$, podemos distinguir em dois casos.

Se p, então $p \vee r$.

Se q, então r porque $q \rightarrow r$, logo $p \vee r$.

Portanto, obtemos $p \vee r$ em ambos os casos.

Assim, concluímos $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$.

Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas proposições.

Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas proposições.

Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- «$3 < (2 + 7)$» é uma proposição.
- «$x = 6$» não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas proposições.

Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- «$3 < (2 + 7)$» é uma proposição.
- «$x = 6$» não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

Nota

No que se segue, denotamos proposições por $p, q, r, \dots$ ou por $\varphi, \psi, \theta \dots$ e não discutimos mais a questão o que é uma proposição.

Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «… e …»,
- «… ou …»,
- «não …»,
- «Se … então …».

Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «... e ...»,
- «... ou ...»,
- «não ...»,
- «Se ... então ...».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atómica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou

Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «… e …»,
- «… ou …»,
- «não …»,
- «Se … então …».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atómica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou
2. **composta** por proposições e pelos conectivos acima, cujo valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «… ou …» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «... ou ...» não é tão *determinado*: pode ter o significado inclusivo acima, também pode ter o significado exclusivo onde «... ou ...» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «… ou …» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «… ou …» não é tão *determinado*: pode ter o significado inclusivo acima, também pode ter o significado exclusivo onde «… ou …» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes

  «… mas não ambos», «… ou ambos», «… e/ou …», …

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «… ou …» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «… ou …» não é tão *determinado*: pode ter o significado inclusivo acima, também pode ter o significado exclusivo onde «… ou …» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes

  «… mas não ambos», «… ou ambos», «… e/ou …», …
- Neste curso, como é habitual na matemática, estabelecemos que «ou» tem o significado inclusivo.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».

Exemplos

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».

Exemplos

O João está na aula mas a Ana está na praia.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».

Exemplos

O João está na aula e a Ana está na praia.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».

Exemplos

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».

Exemplos

Compro um Ferrari só se for rico.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».

Exemplos

Se compro um Ferrari, então sou rico.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

Exemplos

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

Exemplos

Vendo a casa exceto se ligares

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

Exemplos

Ligas ou vendo a casa.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

  Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado inclusivo.

Exemplos

Ligas ou vendo a casa.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

  Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado inclusivo.

Exemplos

Evitar a ambiguidade: Vendo a casa, exceto se ligares a dizer o contrário.

1. Revisão de lógica proposicional

Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições),
- os símbolos $\perp$ (contradição) e $\top$ (tautologia) e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não ...),
Conjunção:	$\wedge$	(... e ...),
Disjunção:	$\vee$	(... ou ...),
Implicação:	$\rightarrow$	(se ..., então ...),
Equivalência:	$\leftrightarrow$	(... se e somente se ...).

Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições),
- os símbolos $\perp$ (contradição) e $\top$ (tautologia) e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não ...),
Conjunção:	$\wedge$	(... e ...),
Disjunção:	$\vee$	(... ou ...),
Implicação:	$\rightarrow$	(se ..., então ...),
Equivalência:	$\leftrightarrow$	(... se e somente se ...).

- Cada variável é uma fórmula, e $\perp$ and $\top$ são fórmulas.

Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições),
- os símbolos $\perp$ (contradição) e $\top$ (tautologia) e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não ...),
Conjunção:	$\wedge$	(... e ...),
Disjunção:	$\vee$	(... ou ...),
Implicação:	$\rightarrow$	(se ..., então ...),
Equivalência:	$\leftrightarrow$	(... se e somente se ...).

- Cada variável é uma fórmula, e $\perp$ and $\top$ são fórmulas.
- Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

  são fórmulas.

Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \to \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \to \gamma)).$$

Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \to \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \to \gamma)).$$

Nota

Entende-se que o conetivo «$\neg$» tem uma «ligação mais forte» (ou seja, aplica-se primeiro) do que os outros conetivos. Por exemplo, escreve-se

$$\neg\varphi \vee \psi \quad \text{em lugar de} \quad (\neg\varphi) \vee \psi.$$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\ldots$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$),

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \to \bot$, $\quad \neg\top$, $\quad \dots$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \lor q)$ (escrevemos apenas $p \lor q$), $\quad p \to \bot, \quad \neg\top, \quad \ldots$
- $(p \land q) \to q, \quad (p \to q) \land (p \lor q), \quad \ldots$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \to \bot, \quad \neg\top, \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \to q, \quad (p \to q) \wedge (p \vee q), \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \to ((p \vee q) \to q), \quad \ldots$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top, \bot, p, q, r, \ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \to \bot, \quad \neg\top, \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \to q, \quad (p \to q) \wedge (p \vee q), \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \to ((p \vee q) \to q), \quad \ldots$

Exemplos (não são fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

$$(\top\,\bot), \quad (p\,q\,r), \quad (\top\to), \quad (p \to \wedge), \quad \ldots$$

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0,1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\bot$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \rightarrow q$

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \lor q) \to q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \lor q$	$(p \lor q) \to q$
0	0	0	1

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \to q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \to q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \to q$
1	0	1	0

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. ✓

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é branca.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. ✓

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. ✓

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. ✓
- Se $2+2=4$, então a neve é preta.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. ✓
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. ✗

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para ***alguma*** interpretação.

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para ***alguma*** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \to q$ é uma tautologia.

Demonstração.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$\square$

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para ***alguma*** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Demonstração.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$\square$

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Exemplos (TPC)

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
- $\neg p \equiv p \rightarrow \bot$

Verificam-se as equivalências

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \qquad (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)) \qquad ((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$
$$(p \wedge p) \equiv p \qquad (p \vee p) \equiv p$$
$$(p \wedge \top) \equiv p \qquad (p \vee \bot) \equiv p$$
$$(p \wedge \bot) \equiv \bot \qquad (p \vee \top) \equiv \top$$

bem como as leis de distributividade

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad (p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

as leis de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \qquad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

e a lei da contraposição e da dupla negação

$$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p) \qquad \neg\neg p \equiv p.$$

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $p, q, \neg r$ são literais.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $p, q, \neg r$ são literais.
- $\neg\neg q$, $p \to q$ não são literais.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando
$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$
onde cada φ_i é da forma
$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$
com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma CNF (conjuntiva).

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma CNF (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$ é uma DNF (disjuntiva).

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma CNF (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$ é uma DNF (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$ é uma CNF e uma DNF.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando
$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$
onde cada φ_i é da forma
$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$
com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma CNF (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$ é uma DNF (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$ é uma CNF e uma DNF.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ nem é uma CNF nem uma DNF.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Nota

A disjunção «vazia» (ou seja, $n = 0$) é a fórmula $\perp$, e a conjunção «vazia» é a fórmula $\top$.

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Como obter?

Utilizar

$$\varphi \to \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Como obter?

Utilizar

$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Como obter?

Utilizar

$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi, \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \lor \psi) \equiv \neg\varphi \land \neg\psi, \qquad \neg(\varphi \land \psi) \equiv \neg\varphi \lor \neg\psi$$

e as leis de distributividade

$$(\varphi \land (\psi \lor \theta)) \equiv (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \theta),$$
$$(\varphi \lor (\psi \land \theta)) \equiv (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \theta).$$

Definição

Um conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ em 1.

Definição

Um conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ em 1.

Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p,\ p \to q,\ q\}$$

é consistente:

Definição

Um conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ em 1.

Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p,\ p \to q,\ q\}$$

é consistente: podemos escolher a interpretação

$$p \longmapsto 0, \quad q \longmapsto 1.$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Portanto, de acordo com o quadro acima, as fórmulas

$$P_{1,2,2}, \quad P_{1,3,6}, \quad P_{2,7,1}, \quad \ldots, \quad P_{9,8,4}$$

devem ser válidas.

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada linha:

$$F_1 =$$

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada linha:

$$F_1 = (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \cdots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \ldots) \wedge \ldots$$

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada linha:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \cdots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \ldots) \wedge \ldots \\
&= \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} P_{i,j,k}.
\end{aligned}
$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada coluna:

$$F_2 = \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} P_{i,j,k}.$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada bloco 3×3:

$$F_3 = \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{u=0}^{2} \bigwedge_{v=0}^{2} \bigvee_{i=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{3} P_{3u+i,3v+j,k}.$$

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Nenhuma posição tem dois números:

$$F_4 = \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,2}) \wedge \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,3}) \wedge \ldots$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{1 \le k < k' \le 9} \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,k'}).$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente.

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é $9^3 = 729$, portanto, a tabela de verdade correspondente tem $2^{729} > 10^{200}$ linhas ...

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \ldots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é $9^3 = 729$, portanto, a tabela de verdade correspondente tem $2^{729} > 10^{200}$ linhas ...

No entanto, podem utilizar um SAT-solver como `www.minisat.se`.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\ p \to q \models q \vee \neg p$.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\, p \to q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\ p \to q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\ p \to q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\ p \to q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Nota

$$\ldots, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi \quad \text{se e só se} \quad \ldots, \varphi_1, \varphi_2 \models \psi.$$

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi,\, \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi,\ \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Podemos validar esta consequência verificando todas as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Podemos validar esta consequência verificando todas as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Podemos validar esta consequência verificando todas as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade …

Em alternativa, podemos fazer uma prova (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \quad \ldots \quad \text{algo esperto}^{a} \quad \ldots \quad \varphi \to \theta.$$

[a] Justificado pelo anterior utilizando certas regras (as regras de inferência).

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Podemos validar esta consequência verificando todas as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

Em alternativa, podemos fazer uma prova (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$\varphi \to \psi, \psi \to \theta,$ ... algo esperto[a] ... $\varphi \to \theta.$

[a] Justificado pelo anterior utilizando certas regras (as regras de inferência).

Nota

Se existe uma prova de ψ a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, escreve-se

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi.$$

Saltar

As regras de inferência (lógica proposicional)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge\mathcal{E}_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge\mathcal{E}_2$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee\mathcal{I}_1 \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee\mathcal{I}_2 \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \theta\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \theta\end{array}}}{\theta}\vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}{\to}\mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}{\to}\mathcal{E} \qquad \frac{\bot}{\varphi}\bot\mathcal{E} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\mathrm{EM}$$

$\mathcal{E}$ – Eliminação, $\mathcal{I}$ – Introdução

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	$\quad \varphi$	H
4	$\quad \psi$	$\to$E, 1, 3
5	$\quad \theta$	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	φ	H
4	ψ	$\to$E, 1, 3
5	θ	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	$\quad \varphi$	H
4	$\quad \psi$	$\to$E, 1, 3
5	$\quad \theta$	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \to \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	φ	H
4	ψ	$\to$E, 1, 3
5	θ	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \to \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!). Como $\varphi \to \psi$, conclua-se ψ;

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	$\quad\varphi$	H
4	$\quad\psi$	$\to$E, 1, 3
5	$\quad\theta$	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \to \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!). Como $\varphi \to \psi$, conclua-se ψ; como $\psi \to \theta$, conclua-se θ.

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	φ	H
4	ψ	$\to$E, 1, 3
5	θ	$\to$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\to$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \to \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!). Como $\varphi \to \psi$, conclua-se ψ; como $\psi \to \theta$, conclua-se θ.

Portanto, $\varphi \to \theta$ (e retire-se φ).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Teorema (As regras são corretas)

«Tudo o que se prova é válido.»

Teorema (As regras são corretas)

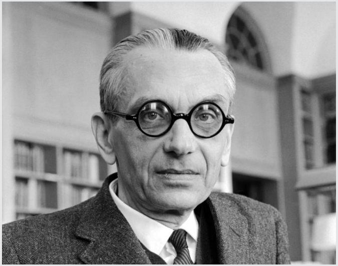
«Tudo o que se prova é válido.»

Teorema (As regras são suficientes)

«Tudo o que é válido se pode provar.»

Um pouco de história …

O Kurt Gödel apresentou o resultado correspondente para a lógica de primeira ordem numa conferência em Königsberg (Kaliningrad) em 1930 … um dia antes de anunciar o seu famoso resultado de incompletude.



Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978), matemático austríaco e norte-americano.

Nota

No que se segue, apresentamos um algoritmo para verificar se a fórmula ψ é consequência das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Começamos por observar:

Teorema

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \quad \textit{se e só se} \quad \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\} \textit{ é inconsistente.}$$

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição».

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores.

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \bot$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores. Para definir «consequência», consideremos agora apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,\text{Res} \qquad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \bot$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores. Para definir «consequência», consideremos agora apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\psi \to \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,\text{Res} \qquad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

Ideia

Questão: Como verificar se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \bot$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores. Para definir «consequência», consideremos agora apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,\mathrm{Res} \qquad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

Em particular: $\dfrac{\neg\psi \quad \psi \vee \varphi}{\varphi}$ e $\dfrac{\neg\psi \quad \psi}{\bot}$.

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \ldots, \theta_n$,

$$\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \bot.$$

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \ldots, \theta_n$,

$$\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \perp.$$

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$:

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \ldots, \theta_n$*,*

$$\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \bot.$$

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \dots, \theta_n$*,*

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \dots, \theta_n \vdash \bot.$$

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva.

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \dots, \theta_n$,

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \dots, \theta_n \vdash \perp.$$

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva.
3. Aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até ou
    - obtém-se $\perp$ e neste caso verifica-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, ou
    - não se aplica mais a regra de resolução (sem obter $\perp$) e neste caso não se verifica $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\ q \to r \models p \to r.$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r,$$

Exemplo

Verificamos: $p \to q, q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja,

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad \neg(\neg p \vee r).$$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja,

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p \wedge \neg r.$$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\ q \to r \models p \to r.$

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r.$

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \lor q, \quad \neg q \lor r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora: $\neg p \lor q, \quad p,$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r.$

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \lor q, \quad \neg q \lor r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora: $\neg p \lor q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \lor r,$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r.$

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora: $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r,$

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\, q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora: $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r, \quad \perp.$

Exemplo

Em suma, provámos que

$$p \to q,\, q \to r \models p \to r$$

uma vez que o conjunto de cláusulas

$$\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

é inconsistente, tal como se verifica na seguinte dedução:

1.	$\neg p \vee q$	Hip.
2.	$\neg q \vee r$	Hip.
3.	p	Hip.
4.	$\neg r$	Hip.
5.	q	Res (1,3)
6.	r	Res (2,5)
7.	$\perp$	Res (4,6)

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \land \neg q) \models r$?

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg r \vee q$

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg r \vee q$

(4) $\neg r$

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \land \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \lor q$

(3) $\neg r \lor q$

(4) $\neg r$

(5) q (Resolvente de (1) e (2))

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \land \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \lor q$

(3) $\neg r \lor q$

(4) $\neg r$

(5) q (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes.

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg r \vee q$

(4) $\neg r$

(5) q (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes. Logo, a afirmação

$$p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$$

é falsa.

2. A sintaxe (lógica de 1ª ordem)

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \to r).$$

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$((\mathrm{par}(x) \wedge \mathrm{par}(y)) \rightarrow \mathrm{par}(x + y))$$

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{par}(x) \wedge \mathrm{par}(y)) \rightarrow \mathrm{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \land q) \to r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{par}(x) \land \mathrm{par}(y)) \to \mathrm{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

Por exemplo, para expressar que «todos os gatos têm garras»:

$$\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x)).$$

Podemos utilizar a lógica de primeiro ordem para

representar factos (criar bases de dados) e fazer inquéritos.

Podemos utilizar a lógica de primeiro ordem para

representar factos (criar bases de dados) e fazer inquéritos.

Exemplo (Os factos)

1. A Ana é docente.
2. Todos os docentes são pessoas.
3. O Paulo é diretor.
4. Os diretores são docentes.
5. Todos os docentes consideram o diretor um amigo ou não o conhecem.
6. Todos têm um amigo.
7. As pessoas apenas criticam aquelas pessoas que não são suas amigas.
8. A Ana critica o Paulo.

---

https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4700/2011fa/lectures/16_FirstOrderLogic.pdf

Exemplo (Os factos … mais formais)

1. $\text{docente}(\text{Ana})$
2. $\forall x\,(\text{docente}(x) \rightarrow \text{pessoa}(x))$
3. $\text{diretor}(\text{Paulo})$
4. $\forall x\,(\text{diretor}(x) \rightarrow \text{docente}(x))$
5. $\forall x \forall y\,((\text{docente}(x) \land \text{diretor}(y)) \rightarrow (\text{amigo}(y, x) \lor \neg\text{conhece}(x, y)))$
6. $\forall x \exists y\, \text{amigo}(y, x)$
7. $\forall x \forall y\,((\text{pessoa}(x) \land \text{pessoa}(y) \land \text{critica}(x, y)) \rightarrow \neg\text{amigo}(y, x))$
8. $\text{critica}(\text{Ana}, \text{Paulo})$

Exemplo (Os factos … mais formais)

1. docente(Ana)
2. $\forall x\,(\text{docente}(x) \to \text{pessoa}(x))$
3. diretor(Paulo)
4. $\forall x\,(\text{diretor}(x) \to \text{docente}(x))$
5. $\forall x \forall y\,((\text{docente}(x) \land \text{diretor}(y)) \to (\text{amigo}(y,x) \lor \neg\text{conhece}(x,y)))$
6. $\forall x \exists y\,\text{amigo}(y,x)$
7. $\forall x \forall y\,((\text{pessoa}(x) \land \text{pessoa}(y) \land \text{critica}(x,y)) \to \neg\text{amigo}(y,x))$
8. critica(Ana, Paulo)

Questão. O Paulo não é amigo da Ana?

$$\neg\text{amigo}(\text{Paulo}, \text{Ana})$$

Exemplo (Os factos … do ponto de vista de um computador)

1. $\mathrm{P1}(\mathrm{A})$
2. $\forall x\,(\mathrm{P1}(x) \rightarrow \mathrm{P3}(x))$
3. $\mathrm{P4}(\mathrm{B})$
4. $\forall x\,(\mathrm{P4}(x) \rightarrow \mathrm{P1}(x))$
5. $\forall x \forall y\,((\mathrm{P1}(x) \wedge \mathrm{P4}(y)) \rightarrow (\mathrm{P2}(x,y) \vee \neg \mathrm{P5}(x,y)))$
6. $\forall x \exists y\, \mathrm{P2}(y,x)$
7. $\forall x \forall y\,((\mathrm{P3}(x) \wedge \mathrm{P3}(y) \wedge \mathrm{P6}(x,y)) \rightarrow \neg \mathrm{P2}(y,x))$
8. $\mathrm{P6}(\mathrm{A},\mathrm{B})$

Questão. $\neg \mathrm{P2}(\mathrm{B},\mathrm{A})$

As tarefas

- Colecionar o conhecimento.
- Escolher uma linguagem apropriada: símbolos de constantes, de predicados …
- Representar o conhecimento nesta linguagem.
- Consultar a base de dados (e o procedimento de dedução).

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos «$\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\bot$, $\top$» da lógica proposicional,

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos «$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\perp$, $\top$» da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos),

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos «$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\perp$, $\top$» da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos),
4. o símbolo de igualdade «$=$»,

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos «$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\perp$, $\top$» da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos),
4. o símbolo de igualdade «$=$»,
5. Além destes símbolos, e dependente do contexto, temos
   - uma coleção de símbolos de constante,
   - uma coleção de símbolos de função

     (cada símbolo de função f tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos),
   - uma coleção de símbolos de predicado (= relação)

     (cada símbolo de predicado R tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos).

Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da teoria de espaços vetoriais consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante 0,
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o símbolo de função $\alpha \cdot -$ de uma variável, e
- o símbolo de função $+$ de duas variáveis.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, …

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, $\dots$
- $m(i(x), x)$, $i(m(x, a))$, $m(m(z, a), i(x))$, $\dots$
- $\dots$

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.
- $t_1 = t_2$ é uma fórmula onde t_1, t_2 são termos.
- $\perp$ e $\top$ são fórmulas.

Ás fórmulas acima chamamos **átomos**.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.
- $t_1 = t_2$ é uma fórmula onde t_1, t_2 são termos.
- $\perp$ e $\top$ são fórmulas.

Ás fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se φ e ψ são fórmulas, então

  $$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \perp, \quad \top$$

  são fórmulas.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.
- $t_1 = t_2$ é uma fórmula onde t_1, t_2 são termos.
- $\perp$ e $\top$ são fórmulas.

Ás fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se φ e ψ são fórmulas, então
$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \perp, \quad \top$$
são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então
$$\forall x\, \varphi \qquad \text{e} \qquad \exists x\, \varphi$$
são fórmulas.

Exemplo

$$\underbrace{\forall x, y, z\ \underbrace{\overbrace{(x < y)}^{\text{fórmula}} \to \overbrace{(\underbrace{x + z}_{\text{termo}} < \underbrace{y + z}_{\text{termo}})}^{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}$$

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\,\varphi$ e $\exists x\,\varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\, (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».

- $(\forall x\, \exists y\, x < y) \land (a < x)$:

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ x < y$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \rightarrow \mathrm{garras}(x))$».

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ x < y$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ x < y$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y$».

- $\forall x\ \exists y\ (x < y \land a < x)$:

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ x < y$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y$».
- $\forall x\ \exists y\ (x < y \land a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\ (x < y \land a < x)$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\, (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$».
- $(\forall x\, \exists y\, x < y) \land (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\, x < y$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y$».
- $\forall x\, \exists y\, (x < y \land a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\, (x < y \land a < x)$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y \land a < x$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\,\varphi$ e $\exists x\,\varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma variável numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma variável numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

Nota

Uma fórmula diz-se **fechada** quando não tem variáveis livres.

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada.
  A fórmula não é fechada.

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada. A fórmula não é fechada.
- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$:

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada.
  A fórmula não é fechada.

- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$:

  As variáveis x e y ocorrem ligadas. A fórmula é fechada.

3. A semântica (lógica de 1ª ordem)

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x,y),I(A)), \quad R(y,A), \quad \exists y\, R(y,A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x,y),I(A)),\quad R(y,A),\quad \exists y\, R(y,A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

No que se segue, explicaremos como interpretar cada uma das componentes da fórmula.

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x,y),I(A)),\quad R(y,A),\quad \exists y\, R(y,A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

No que se segue, explicaremos como interpretar cada uma das componentes da fórmula.

Nota

- Sendo c um símbolo de constante que interpretamos por 3, então a interpretação da fórmula $x = c$ depende da interpretação de x.

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x,y),I(A)), \quad R(y,A), \quad \exists y\, R(y,A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

No que se segue, explicaremos como interpretar cada uma das componentes da fórmula.

Nota

- Sendo c um símbolo de constante que interpretamos por 3, então a interpretação da fórmula $x = c$ depende da interpretação de x.
- No entanto, para a interpretação da fórmula $\forall x\, x = c$, a interpretação de x é irrelevante. Ou seja, os quantificadores alterem o «estatuto da variável».

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $f^{\mathcal{M}} : D^n \longrightarrow D$,

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $f^{\mathcal{M}} : D^n \longrightarrow D$,
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $f^{\mathcal{M}} : D^n \longrightarrow D$,
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Nota

Dada uma estrutura $\mathcal{M}$, uma **valoração** V em $\mathcal{M}$ associa a cada variável x um elemento $V(x) \in D$.

O par $(\mathcal{M}, V)$ diz-se **interpretação**.

Interpretação de termos

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in D.$$

Interpretação de termos

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária M (ou seja, de dois argumentos), um símbolo de função I de um argumento e um símbolo de constante A.

Para a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \ldots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} : D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$, temos:

- $V(M(A, x)) = |1 - 2| = 1.$
- $V(M(M(x, y), I(A))) = ||2 - 1| - 1| = 0.$

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ implica $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \to \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ implica $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg\varphi$ quando ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \to \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ implica $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg\varphi$ quando ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

Falta considerar os quantificadores ...

Modificação da valoração

Para uma variável x e um elemento $a \in D$, $V^{\frac{x}{a}}$ denota a valoração definida por

$$V^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

Modificação da valoração

Para uma variável x e um elemento $a \in D$, $V^{\frac{x}{a}}$ denota a valoração definida por

$$V^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x\, \psi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x\, \psi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$.

Modificação da valoração

Para uma variável x e um elemento $a \in D$, $V\frac{x}{a}$ denota a valoração definida por

$$V\tfrac{x}{a}(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x\, \psi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, V\frac{x}{a}) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x\, \psi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, V\frac{x}{a}) \models \psi$.

Nota

Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é irrelevante na interpretação de φ.

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \ldots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, \exists x\, R(x, A)$

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \ldots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}}\colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, \exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	não válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	válida

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	válida
$\exists x\, \forall y\, x \leq y$	

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	**Interpretação**
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	válida
$\exists x\, \forall y\, x \leq y$	não válida

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso escrevemos $\varphi \equiv \psi$.

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, V)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, V)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Em símbolos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, V)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Em símbolos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \iff \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, V)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Em símbolos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \iff \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

No entanto, neste capítulo consideremos o método de resolução.

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \ \models\ \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Aqui:

- «gato, garra» são símbolos de predicado de um argumento,
- «Tom» é um símbolo de constante.

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\forall x\,(\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)), \quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)$,[a] $\quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom})$, $\quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$.

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x),^{a} \quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom})$, $\quad\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)$

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x),^{a} \quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \vee \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}),^{a}$

[a] Escrever «Tom» em lugar de «x» … já que a fórmula é válida «para todos».

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x),^{a} \quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \vee \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}),^{a} \quad \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}),$

[a] Escrever «Tom» em lugar de «x» … já que a fórmula é válida «para todos».

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\mathrm{gato}(x) \lor \mathrm{garra}(x),^{a} \quad \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

---

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \lor \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}),^{a} \quad \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}), \quad \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}),$$

---

[a] Escrever «Tom» em lugar de «x» … já que a fórmula é válida «para todos».

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \to \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^{a} \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$$\text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg\text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^{a} \quad \text{garra}(\text{Tom}), \quad \neg\text{garra}(\text{Tom}), \ \bot.$$

[a] Escrever «Tom» em lugar de «x» … já que a fórmula é válida «para todos».

4. Formas normais de fórmulas

Definição

Adaptamos a definição da lógica proposicional:

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

  onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

  com literais L_i.

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \ldots Qx_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **na forma normal prenex**.

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \ldots Qx_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **na forma normal prenex**.

Como obter?

- Mover «$\neg$» mais para o interior:

$$\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi \qquad \text{e} \qquad \neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi.$$

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **na forma normal prenex**.

Como obter?

- Mover «$\neg$» mais para o interior:

$$\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi \qquad \text{e} \qquad \neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi.$$

- Mover os quantificadores mais para o exterior:
  - $(\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi)$,
  - $(\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi) \equiv \exists x\, (\psi \vee \varphi)$.

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \ldots Qx_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **na forma normal prenex**.

Como obter?

- Mover «$\neg$» mais para o interior:
  $$\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi \qquad \text{e} \qquad \neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi.$$
- Mover os quantificadores mais para o exterior:
  - $(\forall x\,\varphi) \wedge (\forall x\,\psi) \equiv \forall x\,(\psi \wedge \varphi)$,
  - $(\exists x\,\varphi) \vee (\exists x\,\psi) \equiv \exists x\,(\psi \vee \varphi)$.
  - Suponha que ψ não contém a variável x:
    $$(\forall x\,\varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\,(\varphi \wedge \psi), \qquad (\exists x\,\varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\,(\varphi \wedge \psi),$$
    $$(\forall x\,\varphi) \vee \psi \equiv \forall x\,(\varphi \vee \psi), \qquad (\exists x\,\varphi) \vee \psi \equiv \exists x\,(\varphi \vee \psi).$$

Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**[a] é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

[a] Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**[a] é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

[a] Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

Nota

Como

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi) \wedge (\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \psi),$$

uma fórmula na forma normal de Skolem pode-se escrever como uma conjunção de fórmulas normais de Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi_i$ onde φ_i é uma cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n$.

A partir da forma normal prenex

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \; \varphi$:

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$:
    1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ \varphi$:
    1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
    2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ \varphi$ por c, e

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\; \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n\; \varphi$ ($k > 1$):

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \; \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \; \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \, \exists x_k \, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n \; \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k - 1$ argumentos,

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \dots Q_n x_n\ \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n\ \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n\ \varphi$ ($k > 1$):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k - 1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n\ \varphi$ por $f(x_1, \dots, x_{k-1})$, e

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \dots Q_n x_n\ \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n\ \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n\ \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n\ \varphi$ por $f(x_1, \dots, x_{k-1})$, e
  3. eliminar $\exists x_k$.

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \; \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \, \exists x_k \, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n \; \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n \; \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$, e
  3. eliminar $\exists x_k$.

Teorema

Sejam $\psi_1, \ldots, \psi_n$ as «skolemizações» das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, então

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \text{ é consistente } \iff \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ é consistente.}$$

5. Unificação

Definição

Uma **substituição** é uma função $\sigma : \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$.

Definição

Uma **substituição** é uma função $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$.

Nota

- Se

  $$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

  é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições «relevantes»:

  $$\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$$

  sendo $t_i = \sigma(v_i)$.

Definição

Uma **substituição** é uma função $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$.

Nota

- Se
$$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$
é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições «relevantes»:
$$\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$$
sendo $t_i = \sigma(v_i)$.
- A substituição
$$\{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}, \quad v \longmapsto v$$
denotamos por ε. Portanto, escrevemos $\varepsilon = \varnothing$.

Exemplo

$\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ corresponde à substituição

$$\sigma : \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$
$$v \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se a variável } v \text{ é } x, \\ A & \text{se a variável } v \text{ é } y, \\ v & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.
- $\widehat{\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n) = f(\widehat{\sigma}(t_1), \ldots, \widehat{\sigma}(t_n))$, para cada símbolo de função f de n argumentos e termos $t_1, \ldots, t_n$.

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.
- $\widehat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n) = f(\widehat{\sigma}(t_1), \dots, \widehat{\sigma}(t_n))$, para cada símbolo de função f de n argumentos e termos $t_1, \dots, t_n$.

Portanto, obtemos

$$\begin{tikzcd} \{\text{termos}\} \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] & \{\text{termos}\}. \\ \{\text{variáveis}\} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\widehat{\sigma}$ ao todos os termos em E.

Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\widehat{\sigma}$ ao todos os termos em E.

Para um conjunto $\mathcal{E}$ de fórmulas (sem quantificadores), definimos:

$$\mathcal{E}\sigma = \{E\sigma \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) =$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$:
$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z),A).$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$:
$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z),A).$$

- $\sigma = \{f(z,y)/x,\ A/y\}$:
$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) =$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$:
$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z),A).$$
- $\sigma = \{f(z,y)/x,\ A/y\}$:
$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z,y),A).$$

Definição

Sejam

$$\sigma, \theta \colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de θ após σ** é a função

$$\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[r, "\widehat{\theta}"] & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "\theta \vartriangle \sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição

Sejam

$$\sigma, \theta \colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de θ após σ** é a função

$$\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[rr, "\widehat{\theta}"] & & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[urr, "\theta \vartriangle \sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nota

Para cada expressão (= termo, fórmula) E: $\quad E(\theta \vartriangle \sigma) = (E\sigma)\theta$.

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma =$$

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\ g(x)/y,\ y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\ z/y,\ x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma = \{\widehat{\theta}(A)/x,\ \widehat{\theta}(g(x))/y,\ \widehat{\theta}(y)/z,$$

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma = \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\}$$

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\ g(x)/y,\ y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\ z/y,\ x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta \vartriangle \sigma &= \{\widehat{\theta}(A)/x,\ \widehat{\theta}(g(x))/y,\ \widehat{\theta}(y)/z,\ x/u\}\\ &= \{A/x,\ g(f(y))/y,\ z/z,\ x/u\}\end{aligned}$$

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \theta \vartriangle \sigma &= \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\} \\ &= \{A/x,\, g(f(y))/y,\, z/z,\, x/u\} \\ &= \{A/x,\, g(f(y))/y,\; x/u\}. \end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$		

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$		

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$		

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Nota:

$$\begin{aligned}\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\} &= \{f(f(A))/y\} \vartriangle \{y/x\} \\ &= \{f(f(A))/x\} \vartriangle \{x/y\}.\end{aligned}$$

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

  $$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

  diz-se **unificador** de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

  diz-se **unificador** de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.

- Um conjunto $\mathcal{E}$ de expressões diz-se **unificável** quando existe um unificador de $\mathcal{E}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x,y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x,y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$ não é unificável.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x,y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$ não é unificável.

Definição

Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões. Um unificador σ de $\mathcal{E}$ diz-se **unificador mais geral (abreviação: mgu)** de $\mathcal{E}$ quando, para cada unificador θ de $\mathcal{E}$, existe uma substituição λ tal que

$$\theta = \lambda \vartriangle \sigma.$$

Ou seja, cada unificador de $\mathcal{E}$ se pode descrever como «acrescentar substituições acima do unificador mais geral».

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.
3. Determinar o conjunto das diferenças de $\mathcal{E}_k$; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de $\mathcal{E}_k$ são diferentes.

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.
3. Determinar o conjunto das diferenças de $\mathcal{E}_k$; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de $\mathcal{E}_k$ são diferentes.
4. **Se** existem uma variável v e um termo t em $\mathcal{D}$ e v não ocorre em t, **então**
   - $\sigma_{k+1} = \{t/v\} \vartriangle \sigma_k$,
   - $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k\{t/v\}$,
   - $k := k + 1$ e voltar ao ponto (2);

   se não PARAR com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y, z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

Aqui:

- x, y, z são variáveis.
- A é um símbolo de constante.
- h é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de predicado de dois argumentos.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\sigma_3 = \{h(A)/z\} \vartriangle \sigma_2 = \{h(A)/z,\ A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A,h(A)),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\sigma_3 = \{h(A)/z\} \vartriangle \sigma_2 = \{h(A)/z,\ A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A,h(A)),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

3. $\mathcal{E}_3 = \{P(A,h(A))\}$. Logo: $\mathrm{mgu} = \{A/x,\ A/y,\ h(A)/z\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{A/x\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ x\} = \{h(x),\ x\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ x\} = \{h(x),\ x\}$.

   Como x (a única variável em $\mathcal{D}_0$) ocorre em $h(x)$ (o único termo em $\mathcal{D}_0$ diferente do x), terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

6. O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Convenção

A partir de agora consideremos apenas linguagens sem o símbolo «$=$».
Além disso, vamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \lor \theta \quad \varphi \lor \gamma}{(\theta \lor \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$

  ($\neg\psi \lor \theta$, $\varphi \lor \gamma$ sem variáveis comuns)

- **Fator:** $$\frac{\varphi \lor \psi \lor \theta}{(\varphi \lor \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$ ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um fator de C_1.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um fator de C_1.
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um fator de C_1 e C_2.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$ ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um fator de C_1.
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um fator de C_1 e C_2.
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de C_1 e C_2.

Resolvente de cláusulas C_1 e C_2 = Resolvente binária de (um fator de) C_1 e de (um fator de) C_2.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Recordamos

Para justificar que

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

(ψ é consequência de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$), mostramos que

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

é inconsistente.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$

  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)

- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$ ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \lor \theta \quad \varphi \lor \gamma}{(\theta \lor \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \lor \theta$, $\varphi \lor \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \lor \psi \lor \theta}{(\varphi \lor \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  ($\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;
4. aplicar sucessivamente as duas regras anteriores, até se obter uma contradição (se for possível).

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$.

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \lor S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \lor S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \lor I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \lor \neg S(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$, c um símbolo de constante.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$, c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x),$$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$, c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y),$$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$, c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z),$$

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \lor S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \lor I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \lor \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \land B(x)) \rightsquigarrow P(c) \land B(c)$, c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \lor S(x), \quad \neg P(y) \lor I(y), \quad \neg I(z) \lor \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \lor S(x), \quad \neg P(y) \lor I(y), \quad \neg I(z) \lor \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \lor I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \lor \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.
7. $\neg B(c)$,

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.
7. $\neg B(c)$,
8. $B(c)$,

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.
7. $\neg B(c)$,
8. $B(c)$,
9. $\perp$.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \models \bot$.

Aqui:

- x é uma variável.
- f é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de relação de um argumento.

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \models \bot$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \models \bot$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x))$
2. $P(x)$

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \models \bot$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x))$
2. $P(x)$, $P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \models \bot$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x))$
2. $P(x)$, $P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Esquecemos renomear as variáveis: $P(x) \rightsquigarrow P(y)$ ...

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ (Hip)
2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$ (Hip)
3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$ (Hip)
4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$ (Hip)

Exemplo

1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ (Hip)
2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$ (Hip)
3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$ (Hip)
4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$ (Hip)
5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ Resolvente (1,2)

Exemplo

1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ (Hip)
2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$ (Hip)
3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$ (Hip)
4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$ (Hip)
5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ Resolvente (1,2)
6. $\neg P(x_1)$ Fator (5)

Exemplo

1.	$\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$	(Hip)
2.	$\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$	(Hip)
3.	$P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$	(Hip)
4.	$P(x_4) \vee Q(y_3)$	(Hip)
5.	$\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$	Resolvente (1,2)
6.	$\neg P(x_1)$	Fator (5)
7.	$P(x_3) \vee P(x_4)$	Resolvente (3,4)

Exemplo

1.	$\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$	(Hip)
2.	$\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$	(Hip)
3.	$P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$	(Hip)
4.	$P(x_4) \vee Q(y_3)$	(Hip)
5.	$\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$	Resolvente (1,2)
6.	$\neg P(x_1)$	Fator (5)
7.	$P(x_3) \vee P(x_4)$	Resolvente (3,4)
8.	$P(x_3)$	Fator (7)

Exemplo

1.	$\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$	(Hip)
2.	$\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$	(Hip)
3.	$P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$	(Hip)
4.	$P(x_4) \vee Q(y_3)$	(Hip)
5.	$\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$	Resolvente (1,2)
6.	$\neg P(x_1)$	Fator (5)
7.	$P(x_3) \vee P(x_4)$	Resolvente (3,4)
8.	$P(x_3)$	Fator (7)
9.	$\perp$	Resolvente (6,8)

O método de resolução baseia-se no trabalho

Robinson, John Alan (1965). «A machine-oriented logic based on the resolution principle». Em: *Journal of the ACM* **12**.(1), pp. 23–41.

Este método é (correto e) completo na lógica de 1ª ordem no seguinte sentido:

Se

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi,$$

então existe uma dedução de $\perp$ a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$.

Sobre a programação (em lógica):

Abelson, Harold e Sussman, Gerald Jay (1996). *Structure and interpretation of computer programs*. 2ª ed. MIT Press. URL: mitpress.mit.edu/sicp/full-text/book/book.html.

Em particular: 4.4. «Logical Programming».

Vídeos em: https://groups.csail.mit.edu/mac/classes/6.001/abelson-sussman-lectures/