Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha 2

1. A familia Ferreira tem 13 filhos, para além de dois progenitores. Recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos responda às seguintes questões:

   a) Quantas pessoas desta família pode garantir que:

      i. Nasceram no mesmo mês?

      ii. Nasceram no mesmo dia da semana?

   b) No próximo sábado, os Ferreira vão dar uma festa para a qual os filhos podem convidar os seus amigos mais próximos. Quantos amigos vão ser convidados por forma a garantir que pelo menos 3 dos convidados são amigos do mesmo filho dos Ferreira?

2. Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), existem pelo menos dois com o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

3. Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

4. Mostre que dados 11 números no intervalo $]0, 1[$, haverá pelo menos dois deles cuja diferença é menor que 0.1.

5. Mostre que num grupo de 20 pessoas escolhidas ao acaso existem pelo menos duas pessoas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo. Note que duas pessoas são consideradas amigas se houver uma relação de amizade recíproca estabelecida entre elas.

6. Considere que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números inteiros positivos.

   a) Mostre que se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos são colocados em n caixas, então existe um inteiro i entre 1 e n tal que a i-ésima caixa contém pelo menos p_i objectos.

   b) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$ o que se pode afirmar?

7. Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que num certo número de dias consecutivos o João bebeu exatamente 17 cafés.

8. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

   a) Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|$=3 e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

a) Quantas funções injectivas podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B?

9. Determine o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 e o número de números pares compreendidos entre 0 e 100 com dígitos distintos.

10. Qual o número de números naturais não superiores a 1000 que não são divisíveis por 4, nem por 6, nem por 9?

11. Num grupo de 50 portugueses, 22 falam inglês, 23 falam espanhol, 17 falam francês, 10 falam inglês e espanhol, 5 falam francês e inglês, 7 falam francês e espanhol e 3 falam as três línguas estrangeiras. Quantas pessoas deste grupo não fala nenhuma língua estrangeira?

12. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

13. Qual é o número de palavras com k carateres que se podem formar considerando um alfabeto de n letras,

    a) sem qualquer restrição.

    b) não podendo existir duas letras consecutivas repetidas.

    c) e que sejam palíndromos (i.e., palavras cujos elementos equidistantes dos extremos são iguais; por exemplo: ana, rever, ertutre).

14. Quantos números entre 1000 e 9999 se podem formar:

    a) contendo o dígito 1.

    b) com todos os dígitos distintos e contendo os dígitos 1 e 2 em posições adjacentes com o 1 a preceder o 2.

    c) com dígitos ímpares a ocupar as posições ímpares (onde a primeira posição corresponde às unidades) e dígitos pares a ocupar posições pares.

Algumas soluções

1 (a) $(i)\,2$; $(ii)\,3$. (b) $2 \times 13 + 1 = 27$.

2 **Obs**: Tenha em conta que existem quatro possibilidades para o resto da divisão por 4.

3 $1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 9$. Escolhendo cinco números entre 1 e 8 vamos obter pelo menos uma destas quatro somas.

4 **Obs**: Considerar a partição do intervalo $]0, 1[$ nos 10 subintervalos $]0, 0.1]$, $]0.1, 0.2]$, $\ldots$, $]0.9, 1[$.

6 (b) Pela alínea anterior podemos afirmar que pelo menos uma das caixas contém r ou mais objetos.

7 Seja a_i o número de cafés que bebeu até ao dia i, para $i = 1, \cdots, 31$. Então $1 \leq a_1 < \cdots < a_{31} = 42$, ou seja, trata-se de uma sequência crescente. Considere-se a sequência (igualmente crescente) $18 \leq a_1 + 17 < \cdots < a_{31} + 17 = 59$. Juntando as duas sequências temos 62 números inteiros positivos entre 1 e 59. Logo, de entre estes números existem pelo menos dois que são iguais e cada um pertence a uma sequência distinta (uma vez que as duas sequências são crescentes). Logo, existem dois índices $1 \leq i < j \leq 31$ tais que $a_j = a_i + 17$. Assim, vem que $a_j - a_i = 17$, ou seja, entre os dias $i + 1$ e j o João bebeu 17 cafés.

8 (a) 9; 8; princípio da multiplicação. (b) 6.

9 Existem 51 pares entre 0 e 100, destes 46 têm algarismos diferentes.

10 611.

11 7.

12 23.

13 (a) n^k (b) $n(n-1)^{k-1}$ (c) $n^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$, onde $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a $\frac{k}{2}$.

14 (a) $9 \times 10^3 - 8 \times 9^3$ (b) $8 \times 7 + 2 \times 7^2$ (c) 500.

1 – a) i. $f : \{\text{família}\} \rightarrow \{\text{meses do ano}\}$

Como $1 \times 12 < 15$, podemos concluir que pelo menos 2 pessoas desta família nasceram no mesmo mês.

ii. $f : \{\text{família}\} \rightarrow \{\text{dias da semana}\}$

Como $2 \times 7 < 15$, podemos concluir que pelo menos 3 pessoas desta família nasceram no mesmo dia da semana.

b) Se cada filho convidar 2 amigos, garantimos que cada filho tem 2 amigos seus na festa. Se se convidar mais 1 amigo, este será amigo de um dos filhos, para além dos 2 já convidados. Logo, se se convidarem $13 \times 2 + 1 = 27$ amigos conseguimos garantir que um dos filhos tem pelo menos 3 amigos na festa.

2 – $f : \{\text{números inteiros positivos}\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$

Como $1 \times 4 < 5$, concluímos que existem pelo menos dois desses números têm o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

3 – $1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5 = 9$

Concluímos que escolhendo cinco números inteiros distintos entre 1 e 8, vamos obter pelo menos uma das somas acima, logo dois dos cinco números têm soma igual a 9.

4 – $]0,1[\, = \,]0, 0.1] \cup]0.1, 0.2] \cup]0.2, 0.3] \cup]0.3, 0.4] \cup]0.4, 0.5] \cup]0.5, 0.6] \cup]0.6, 0.7] \cup]0.7, 0.8] \cup]0.8, 0.9] \cup]0.9, 1[$

$f : \{\text{números}\} \rightarrow \{\text{intervalos}\}$

Como $1 \times 10 < 11$, concluímos que haverá pelo menos dois deles que pertencem ao mesmo intervalo e como consequência a sua diferença é menor que 0,1.

5 – a) $f : \{20 \text{ pessoas}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, 19\}$

Se houver uma pessoa sem amigos, ninguém poderá ter 19 amigos, logo temos 19 valores possíveis de número de amizades, sendo $\{0, 1, 2, \ldots, 18\}$.
Se todas as pessoas tiverem pelo menos um amigo, também existem 19 valores possíveis de número de amizades, sendo $\{1, 2, \ldots, 19\}$.

Como em qualquer um dos casos o número possível de amizades é 19, temos que $19 < 20$, logo podemos concluir que pelo menos duas pessoas têm o mesmo número de amizades num grupo de 20 pessoas.

6 – a) A: "caixas cujos números correspondentes diferem de p_m"
$|A| = \alpha$
$s \geq m(p_m - 1) + \alpha + 1$

Logo, se forem igualmente distribuídas, pelo menos $\alpha + 1$ caixas terão p_m bolas, ou seja, pelo menos uma caixa de A tem p_m bolas.
Se não forem distribuídas igualmente, se formos colocando as bolas aleatoriamente sem atingir o objetivo desejado, chegaremos à situação limite em que:

$$s = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(p_i - m)} + 1 > \sum_{i=1}^{m} (p_i - m)$$

a cada caixa falta apenas 1 bola para o objetivo

Logo, haverá pelo menos uma caixa (i) que tem p_i bolas

b) Sendo p_k, $k \in [1, m]$ o número real de moedas volta e S a soma dos números.

Se $p_1 = p_2 = \dots = p_m = x$, então $aS = mx - m + 1 = m(x-1)+1 > m(x-1)$

Logo, pelo menos uma caixa tem x bolas.

7 – janeiro – 31 dias
42 cafés $\geq$ 1 café / dia = 31 cafés

a_i : "número de cafés bebidos até ao dia i $(1 \leq i \leq 31)$"

$a_{31} = 42$
$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{31} \Leftrightarrow 18 \leq a_1 + 17 < a_2 + 17 < \dots < 59$

Temos $31 + 31 = 62$ números inteiros entre 1 e 59. Logo, como $59 < 62$, dois destes números são iguais.
Como os números são distintos aos restantes números do seu conjunto, logo existirá $1 \leq j \leq i \leq 39$, tal que $a_j + 17 = a_i \Leftrightarrow a_i - a_j = 17$
Logo, entre o dia $i+1$ e o dia j inclusivé, o João bebeu exatamente 17 cafés.

8 – **a)** Para cada elemento de A existem 3 imagens possíveis (os elementos de B) logo, aplicando o princípio da multiplicação:

$$|F| = |B| \times |B| = 3^2 = 9 \quad (|F| = |B|^{|A|})$$

Se $|A| = 3$ e $|B| = 2$, cada elemento de A tem 2 imagens possíveis:

$$|F| = 2^3 = 8$$

b) $F = \{ f \mid f : A \to B, f \text{ é injetiva} \}$

Número de imagens possíveis para x:

$$|B| = |\{a, b, c\}| = 3$$

Número de imagens possíveis para y:

$$|B \setminus \{f(x)\}| = 2$$

Pelo princípio da multiplicação generalizado, $|F| = 3 \times 2 = 6$.

9 – Sem algarismos distintos: $1 + 50 = 51$

$\frac{1}{1}$ $\frac{0}{1}$ $\frac{0}{1}$ $\longrightarrow 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\frac{\quad}{10}$ $\frac{\quad}{5}$ $\longrightarrow 10 \times 5 = 50$

Com algarismos distintos: $45 + 1 = 46$

$\frac{\quad}{9}$ $\frac{\quad}{5}$ $\longrightarrow 9 \times 5 = 45$

$\frac{0}{1}$ $\longrightarrow 1$

(10) — A: "número divisível por 4"
B: "número divisível por 6"
C: "número divisível por 9"

Pretendemos calcular $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = 1000 - |A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor =$$

$$= 250 + 166 + 111 - 83 - 27 - 55 + 27 = 389$$

$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 1000 - |A \cup B \cup C| = 1000 - 389 = 611$

(11) — I: "pessoa fala inglês"
E: "pessoa fala espanhol"
F: "pessoa fala francês"

$|I| = 22$ $\quad |I \cap E| = 10$ $\quad |I \cap E \cap F| = 3$
$|E| = 23$ $\quad |F \cap I| = 5$
$|F| = 17$ $\quad |F \cap E| = 7$

Pretendemos calcular $|\bar{I} \cap \bar{E} \cap \bar{F}| = |\overline{I \cup E \cup F}| = 50 - |I \cup E \cup F|$

$$|I \cup E \cup F| = |I| + |E| + |F| - |I \cap E| - |I \cap F| - |E \cap F| + |I \cap E \cap F| = 22 + 23 + 17 - 10 - 5 - 7 + 3 = 43$$

$|\bar{I} \cap \bar{E} \cap \bar{F}| = 50 - |I \cup E \cup F| = 50 - 43 = 7$

(12) — M: "estudante estuda matemática"
E: "estudante estuda economia"
H: "estudante ser mulher"

$|M| = 50$ $\quad |M \cap E| = 24$ $\quad |\bar{H} \cap M \cap E| = 16$
$|E| = 140$ $\quad |\bar{H} \cap M| = 20$
$|\bar{H}| = 60$ $\quad |\bar{H} \cap E| = 45$

Pretendemos calcular $|H \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = |\overline{\bar{H} \cup M \cup E}| = 200 - |\bar{H} \cup M \cup E|$

$$|\bar{H} \cup M \cup E| = |\bar{H}| + |M| + |E| - |\bar{H} \cap M| - |\bar{H} \cap E| - |M \cap E| + |\bar{H} \cap M \cap E| = 60 + 50 + 140 - 20 - 45 - 24 + 16 = 177$$

$|H \cap \bar{M} \cap \bar{E}| = 200 - |\bar{H} \cup M \cup E| = 200 - 177 = 23$

13 - a)

1	2	3	...	k
m	m	m		m

$\longrightarrow m^k$

b)

1	2	3	...	k
m	m-1	m-1		m-1

$\longrightarrow m(m-1)^{k-1}$

c)

1	2	3	...	k-2	k-1	k
m	m	m		1	1	1

$\longrightarrow m^{\lceil \frac{k}{3} \rceil}$

14 - a) Total de números :

9	10	10	10

$\longrightarrow 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

Números sem dígito 1:

8	9	9	9

$\longrightarrow 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$

$9000 - 5832 = 3168$

b)

1	2		
1	1	8	7

$\longrightarrow 1 \times 1 \times 8 \times 7 = 56$

	1	2	
7	1	1	7

$\longrightarrow 7 \times 1 \times 1 \times 7 = 49$

		1	2
7	7	1	1

$\longrightarrow 7 \times 7 \times 1 \times 1 = 49$

$56 + 49 + 49 = 154$

c)

4	5	5	5

$\longrightarrow 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$