Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha 3

1. A Assembleia da República é composta por 230 deputados dos quais 164 são homens e 66 são mulheres. Quantas comissões de 10 deputados se podem formar se incluirmos em cada uma delas 5 homens e 5 mulheres?

2. Considere uma grelha $n \times n$ onde A é o ponto $(0, 0)$ e B é o ponto (n, n).

   a) Determine o número de caminhos mais curto, sobre a grelha, entre A e B;

   [**Sugestão:** determine uma bijeção entre o conjunto dos caminhos mais curtos entre A e B e as sequências binárias com n zeros e n uns.]

   b) Suponha que $n = 5$ e determine o número de caminhos mais curtos, sobre a grelha, entre A e B, que passam pelo ponto $(3, 2)$.

3. Qual o número de possibilidades de se distribuírem 8 presentes por 5 crianças, em cada uma das seguintes condições:

   a) os presentes são todos iguais,

   b) os presentes são todos distintos.

4. Suponha que tem 20 cartas idênticas e 12 envelopes. De quantas maneiras pode colocar as cartas nos envelopes admitindo que deve haver pelo menos uma carta em cada envelope?

5. Uma empresa vai distribuir 6 bolas de basquetebol iguais e 7 bolas de futebol diferentes por 5 clubes. De quantas maneiras é possível fazer esta distribuição?

6. Considere um sistema computacional onde se usam endereços de 16 dígitos binários (zeros e uns). Determine o número de endereços que se podem formar com 11 zeros e 5 uns, e que comecem por 101 e terminem em 0001.

7. a) Estabeleça uma bijecção entre as sequências binárias de r uns e $n-1$ zeros e o conjunto das soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r \in \mathbb{N}$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   b) Obtenha, em termos de combinações com repetição, o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$. Qual o número de soluções se x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos tais que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$?

8. Qual o número de possibilidades de colocar 4 laranjas iguais e 6 maçãs diferentes em cinco caixas numeradas?

9. Um leitor de CD pode ser programado para tocar 20 canções de um total de 57 canções disponíveis. De quantas maneiras diferentes pode esta programação ser feita? Considere que uma canção pode ser tocada no máximo uma vez.

10. O Departamento de Codificação dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto 007. A mensagem que vai ser transmitida através de um dos seus canais de comunicação, é constituída por 12 símbolos diferentes e 45 espaços em branco iguais.

    a) Quantas mensagens diferentes podem ser formadas a partir dos 12 símbolos e dos 45 espaços em branco?

    b) Pretende-se que na mensagem a enviar existam pelo menos 3 espaços em branco entre cada dois símbolos consecutivos. Quantas mensagens com estas características podem ser enviadas?

11. a) De quantas maneiras podemos dispôr as letras da palavra PARALELEPÍPEDO em sequências com ou sem significado?

    b) Nas sequências anteriores, em quantas não aparecem os três P's seguidos?

12. Recorrendo às fórmulas binomial e multinomial mostre que:

    a) $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$;

    b) $k^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ onde a soma se estende a todas as sequências de inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

13. a) Determine o coeficiente de xy^3z no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{y}{x} + 2z)^6$.

    b) Calcule o desenvolvimento de $(a+b)^4$ e determine $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{N}$ tais que $5^4 = c_0 4^0 + c_1 4^1 + c_2 4^2 + c_3 4^3 + c_4 4^4$.

    c) Sabendo que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 32$, determine o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^3 + \sqrt{x})^n$.

14. No desenvolvimento de $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$ determine o coeficiente do termo em $x_1^2\, x_2^3\, x_3\, x_4^2$.

15. Sabendo que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é 256 calcule $(n/2)!$.

16. Sabendo que o coeficiente de a^2b^{n-2} no desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é igual a 28, determine o coeficiente de $a^{n-3}b^3$.

17. Determine uma fórmula para o coeficiente de x^k na expansão de $(x - \frac{1}{x})^{100}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

18. Prove as seguintes igualdades:

    a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}$.

Sugestão: Conte, por dois modos distintos, o número de sequências binárias com $n+2$ dígitos e com 3 uns, considerando numa dessas contagens, que o segundo 1 está na posição $k+1$ (onde $k = 1, \ldots, n$) e contando o número de possibilidades para as posições do primeiro e do terceiro 1.

c) $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}2^k$.

Sugestão: Conte, por dois modos distintos, o número de possibilidades de colorir k bolas escolhidas de um conjunto de n bolas, utilizando apenas duas cores e colorindo cada bola com uma única cor.

Algumas soluções

1 $\binom{164}{5}\binom{66}{5} = 8308054536477696$.

2 (a) $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ (b) 100.

3 (a) $\binom{12}{4} = 495$; (b) $5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^8 = 390625$.

4 $\binom{8+11}{8} = 75582$.

5 $\binom{6+4}{4}5^7 = 210 \times 5^7$.

6 36.

7 (b) $\binom{13}{11}$; 45.

8 1093750.

9 $\binom{57}{20}20!$

10 (a) $\binom{12+45}{1,\ldots,1,45}$;(b) $\binom{12+12}{1,\ldots,1,12}$.

11 (a) 605404800; (b) 585446400.

13 (a) 120; (b) $c_0 = c_4 = 1$, $c_1 = c_3 = 4$, $c_2 = 6$;
(c) Dado que $n = 5$, o coeficiente é $\binom{5}{2} = 10$.

14 -13440.

15 24.

16 56.

17 $\binom{100}{50+k/2}(-1)^{50-k/2}$, para $k \in \{-100, -98, \cdots, 98, 100\}$ e 0 para os restantes valores de k.

1 — $\binom{164}{5} \times \binom{66}{5} = 830805453647769 6$

2 — a) $\binom{m+m}{m} = \binom{2m}{m}$

b) $\binom{3+2}{3} \times \binom{2+3}{2} = \binom{5}{3} \times \binom{5}{2} = 100$

3 — a) $\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$

b) $5^8 = 390625$

4 — Colocando uma carta em cada envelope, sobram apenas 8.

$\binom{12+8-1}{8} = \binom{19}{8} = 75582$

5 — $\binom{5+6-1}{6} \times 5^7 = 16406250$

6 — 1 0 1 __ __ __ __ __ __ __ __ __ 0 0 0 1

Falta distribuir 7 zeros e 2 uns

$\binom{9}{7} = 36$

8 — $\binom{4+5-1}{4} \times 5^6 = 1093750$

9 — $\binom{57}{20} \times 20! = 29444671984642732349977116672000000$

10 — a) $\binom{12+45}{45} \times 12! = \binom{57}{45} \times 12! = 338790896972656128000$

11 — a) 3P's ; 2A's ; 1R ; 2L's ; 3E's ; 1I ; 1D ; 1O

$\binom{14}{3} \times \binom{11}{2} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times 4! = 605404800$

b) P's seguidos : $12 \times \binom{11}{2} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times 4!$

Total − P's seguidos $= 585446400$

(12) – a) Se $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$, quando $x=2$ temos que $3^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k$

(13) – a) $\left(x^2 + \frac{y}{x} + 2z\right)^6 = \sum_{m=6} \binom{6}{m_1\, m_2\, m_3} (x^2)^{m_1} \left(\frac{y}{x}\right)^{m_2} (2z)^{m_3}$

Para se obter xy^3z temos que $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 1$, logo:

$$\binom{6}{2\;3\;1} (x^2)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^3 (2z)^1 = \frac{6!}{2! \times 3! \times 1!} x^4 \frac{y^3}{x^3} 2z = 120\, xy^3z$$

Concluímos que o coeficiente é 120.

b) $(a+b)^4 = \sum_{m=4} \binom{4}{m_1\, m_2} a^{m_1} b^{m_2} = \binom{4}{4\,0} a^4 b^0 + \binom{4}{3\,1} a^3 b + \binom{4}{2\,2} a^2 b^2 + \binom{4}{1\,3} a b^3 + \binom{4}{0\,4} a^0 b^4 =$

$$= \frac{4!}{4!0!} a^4 b^0 + \frac{4!}{3!1!} a^3 b + \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{1!3!} a b^3 + \frac{4!}{0!4!} a^0 b^4 =$$

$$= a^4 b^0 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + a^0 b^4$$

Se $a = 1$ e $b = 4$, temos que $5^4 = (1+4)^4 = (1)^4(4)^0 + 4(1)^3(4)^1 + 6(1)^2(4)^2 + 4(1)^1(4)^3 + (1)^0(4)^4 = 4^0 + 4 \times 4^1 + 6 \times 4^2 + 4 \times 4^3 + 4^4$

Concluímos que $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 6$, $c_3 = 4$ e $c_4 = 1$

c) Como $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 32$, então $2^m = 32$, logo $m = 5$

$$(x^3 + \sqrt{x})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (x^3)^k (\sqrt{x})^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{3k} x^{\frac{5-k}{2}} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{\frac{5k+5}{2}}$$

Como queremos o coeficiente de x^{10}, temos que $\frac{5k+5}{2} = 10$, logo $k = 3$

Concluímos que o coeficiente é $\binom{5}{3} = 10$.

(14) – $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8 = \sum_{m=8} \binom{8}{m_1\, m_2\, m_3\, m_4} x_1^{m_1} (-x_2)^{m_2} (2x_3)^{m_3} (-2x_4)^{m_4}$

Com $x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2$ temos que $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 1$ e $m_4 = 2$, logo:

$$\binom{8}{2\;3\;1\;2} x_1^2 (-x_2)^3 2x_3 (-2x_4)^2 = \frac{8!}{2!3!1!2!} x_1^2 (-x_2)^3 2x_3 4x_4^2 = -13440\, x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2$$

Concluímos que o coeficiente é -13440.

15 – Pelo enunciado temos que $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 256$, logo $2^m = 256 \Leftrightarrow m = 8$

$(8/2)! = 4! = 24$

16 – $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}$

Para o coeficiente de $a^{m-2}b^2$, temos que $k=2$, logo:

$$\binom{m}{2} = 28 \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-2)!\,2!} = 28 \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} = 28 \Leftrightarrow m^2 - m = 56 \Leftrightarrow m^2 - m - 56 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{2} \Leftrightarrow m = 8 \vee \underbrace{m = -7}_{m \in \mathbb{N}}$$

Para o coeficiente de $a^{m-3}b^3$, temos que $k=3$, logo:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

Concluimos que o coeficiente de $a^{m-3}b^3$ é 56

17 – $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{100} = (x-x^{-1})^{100} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}x^i(-x^{-1})^{100-i} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}x^i(-1)^{100-i}(x^{-1})^{100-i} = \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}x^i(-1)^{100-i}x^{i-100} =$$

$$= \sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}x^{2i-100}(-1)^{100-i}$$

Para x^k, temos que $2i-100 = k \Leftrightarrow i = \frac{k}{2}+50$, logo:

$$\binom{100}{\frac{k}{2}+50}x^k(-1)^{50-\frac{k}{2}}$$

Concluimos que a fórmula é $\binom{100}{\frac{k}{2}+50}(-1)^{50-\frac{k}{2}}$ para $k \in \{-100, -98, \dots, 98, 100\}$ e 0 para os restantes valores de k.

18 – a)