$$\begin{cases}(5,0,5)=\lambda(2x,2y,2z)\\ x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5=2\lambda x\\ 0=2\lambda y\\ 5=2\lambda z\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda x=2\lambda z\\ y=0\\ x^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Maximo: $T(\sqrt{\frac{1}{2}},0,\sqrt{\frac{1}{2}})=30+5\sqrt{2}$

Minimo $T(-\sqrt{\frac{1}{2}},0,-\sqrt{\frac{1}{2}})=30-5\sqrt{2}$

36

a) O domínio D é um círculo raio 2, f é um cone

b) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2(y-1)$

$\nabla f=(0,0)$

$(2x,2(y-1))=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=0\\ 2(y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

PC: $(0,1)$

$(0,1)\in D$?

$0^2+(0-2)^2=0^2+2^2=4\leq 4$

logo $(0,1)\in D$

c)

$g(x)=x^2+(y-2)^2-4$

$\frac{\partial g}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial g}{\partial y}=2(y-2)$

$\nabla g=(2x,2(y-2))$

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x,2(y-1))=\lambda(2x,2(y-2))\\ x^2+(y-2)^2-4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2(y-1) = 2\lambda(y-2) \\ x^2+(y-2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{x} \\ \lambda = \frac{y-1}{y-2} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-1}{y-2} = \frac{x}{x} \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)x = (y-2)x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx - x = yx - 2x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (y-2)^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y-2 = \pm\sqrt{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$f(0,4) = 0+(4-1)^2 = 9$ Maximo global

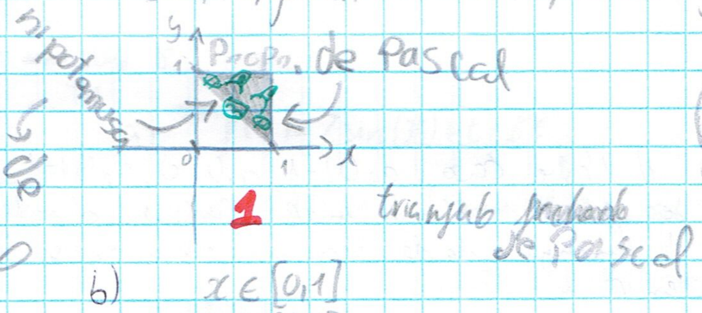
$f(0,0) = 0+(0-1)^2 = 1$ ~~Minimo global~~

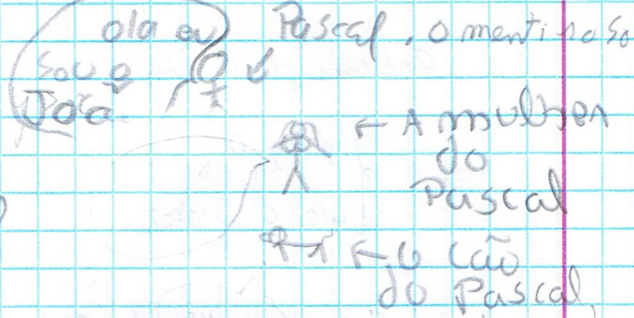
$f(0,1) = 0+(1-1)^2 = 0$ Minimo global

37

a)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 1-x \le y \le 1\}$





b) $x \in [0,1]$
$y \in [0,1]$

$y \ge 1-x \Leftrightarrow y+x \ge 1 \Leftrightarrow y+x-1 \ge 0$

triangulozinho de Pascal

$g(x,y) = y+x-1$

$\nabla f(x,y) = (2x+1, 6y-1) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 6y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \notin D$

f não possui pontos críticos em D

c) $\nabla g = (1,1)$

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \cdot \lambda \\ g=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1, 6y-1) = \lambda(1,1) \\ y+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=\lambda \\ 6y-1=\lambda \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 6y-1 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-1 \\ 3y-1+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$ Mínimo

Testando outros pontos na fronteira.

$f(1,0) = 1+0+1-0 = 2$

$f(1,1) = 1+3+1-1 = 4$ Máximo

$f(0,1) = 0+3+0-1 = 2$

5P

$\nabla L = (-2x+22, -2y+18) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+22=0 \\ -2y+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=9 \end{cases}$

$L(11,9) = -121 - 81 + 242 + 162 - 102$

$= 121 + 81 - 102$

$= 202 - 102$

$= 100$

Problemas de Cauchy

$\begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=0, \; y'(0)=2 \end{cases}$

i) Neste caso, $a_0(x)=1$, $a_1(x)=0$, $a_2(x)=1$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Portanto, o problema de Cauchy dado tem uma e uma só solução em $\mathbb{R}$

ii) Solução geral da EDO

$y''+y=0$

iii) Sujeitar a EDO às condições iniciais

ii)

Como a EDO linear homogénea de coeficientes constantes

Consideremos as equação

$r^2+1=0 \Leftrightarrow r=\pm i$

Logo a SFS: $\{\cos x, \sin x\}$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 2 \end{cases}$

CA:

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \end{cases}$

$y = 2 \sin x$