Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha Semana 3 (21 de Março de 2022 – 25 de Março de 2022)

1. Quais dos seguintes conjuntos de fórmulas é unificável, sendo P um símbolo de predicado de dois argumentos, h um símbolo de função de dois argumentos e a um símbolo de constante. Em caso afirmativo, indique um unificador mais geral.

   a) $\{P(x, h(y, y)), P(a, z)\}$.

   b) $\{P(x, h(y, z)), P(a, z)\}$.

   c) $\{P(h(x, x), h(y, y)), P(a, z)\}$.

2. Considere a linguagem de primeira ordem com três símbolos de predicado R, S, T de um argumento. Usando o princípio da resolução, mostre que

$$\exists x \ (R(x) \to T(x))$$

é consequência das fórmulas

$$(\forall x \ R(x)) \to (\exists y \ S(y)), \quad \neg\exists x \ (S(x) \land \neg T(x)).$$

1 – a) $\{P(x, h(y,y)), P(a,z)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $\theta_0 = \{a/x\}$

$D_0 = \{x, a\}$

$E_1 = E_0\,\theta_0 = \{P(a, h(y,y)), P(a,z)\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{a/x\}$

$|E_1| = 2 > 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $\theta_1 = \{h(y,y)/z\}$

$D_1 = \{h(y,y), z\}$

$E_2 = E_1\,\theta_1 = \{P(a, h(y,y)), P(a, h(y,y))\}$

$\sigma_2 = \theta_1 \circ \sigma_1 = \{h(y,y)/z\} \circ \{a/x\} = \{h(y,y)/z, a/x\}$

$|E_2| = 1$ → logo, é unificável e σ_2 é um unificador mais geral de E.

b) $\{P(x, h(y,z)), P(a,z)\}$

$|E_0| = 2 > 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $\theta_0 = \{a/x\}$

$D_0 = \{x, a\}$

$E_1 = E_0\,\theta_0 = \{P(a, h(y,z)), P(a,z)\}$

$\sigma_1 = \theta_0 \circ \sigma_0 = \{a/x\}$

$|E_1| = 2 > 1$

$D_1 = \{h(y,z), z\}$ → Como a variável z está presente nos dois, concluímos que não é unificável

c) $\{P(h(x,x), h(y,y)), P(a,z)\}$

$|E_0| = 2 > 1$

$D_0 = \{h(x,x), a\}$ → Como não existem variáveis, concluímos que não é unificável

2 – F_1: $\exists x\,(R(x) \rightarrow T(x)) \equiv \exists x\,(\neg R(x) \vee T(x))$

F_2: $(\forall x\,R(x)) \rightarrow (\exists y\,S(y)) \equiv \forall x\,\exists y\,(R(x) \rightarrow S(y)) \equiv \forall x\,\exists y\,(\neg R(x) \vee S(y)) \equiv \forall x\,(\neg R(x) \vee S(a))$

F_3: $\neg \exists x\,(S(x) \wedge \neg T(x)) \equiv \forall x\,(\neg S(x) \vee T(x))$

$\neg F_1$: $\neg \exists x\,(\neg R(x) \vee T(x)) \equiv \forall x\,(R(x) \wedge \neg T(x))$

Queremos provar que $F_2, F_3 \models F_1$

(1) $\neg R(x) \vee S(a)$

(2) $\neg S(x) \vee T(x)$

(3) $R(x)$

(4) $\neg T(x)$

(5) $S(a)$ Res $(1,3)$

(6) $\neg S(x)$ Res $(2,4)$

(7) $\perp$ Res $(5,6) \rightarrow \sigma_1 = \mathrm{mgu}(S(a), S(x)) = \{a/x\}$

Concluímos o pretendido.