Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 — 13 de abril de 2018

1.º Teste de Avaliação Discreta — Duração: 2h

<u>Nota</u>: O formulário encontra-se no verso. Nas alíneas 2(a) e 3(a) poderá ser útil usar uma das representações em série de MacLaurin indicadas no formulário.

---

1. [**35**] Determine o raio e o domínio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n(3n+1)}$, indicando os pontos onde a convergência é absoluta e os pontos onde a convergência é simples.

2. [**20**] Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

   (a) A soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{2^{4n}(2n)!}$ é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (b) Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ (com $a_n \in \mathbb{R}$) tem raio de convergência igual a 3, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ é absolutamente convergente.

3. [**50**]

   (a) Desenvolva em série de MacLaurin a função $\dfrac{2}{1+4x^2}$, indicando o maior intervalo onde esse desenvolvimento é válido.

   (b) Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}}{2n+1}\, x^{2n+1}$.

      i. Mostre que $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$ para qualquer $x \in \,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

      ii. Calcule o valor da derivada $f^{(31)}(0)$.

4. [**35**]

   (a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem no ponto 1 da função $\ln x$.

   (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(1,2)$ usando o polinómio obtido na alínea anterior e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $0,003$.

5. [**20**] Determine a série de Fourier de cossenos da função f, definida em $[0,\pi]$ por $f(x) = x$.

6. [**40**] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

   (a) Determine e represente geometricamente o domínio D da função f.

   (b) Identifique as curvas de nível $k \neq 0$ da função f.

   (c) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y.

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\, \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\, \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$