Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha 5

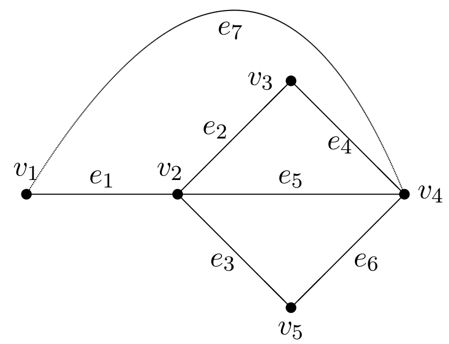
1. Represente graficamente exemplos de grafos G_1, G_2, G_3 e G_4, cada um dos quais com 5 vértices e 8 arestas tais que G_1 é um grafo simples, G_2 não é simples e não contém lacetes, G_3 não é simples e não contém arestas paralelas, G_4 não é simples, contém lacetes e arestas paralelas.

2. Sabendo que a matriz de incidência, M_G, de um grafo G, é tal que

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

represente graficamente G.

3. Determine as matrizes de incidência e de adjacência do grafo representado na figura a seguir:



4. Considere o digrafo $\overrightarrow{D}$ que traduz a seguinte relação: as cobras comem sapos e pássaros, os pássaros e aranhas comem insetos, os sapos comem aranhas e insetos.

   a) Represente graficamente $\overrightarrow{D}$.

   b) Obtenha as matrizes de adjacência e de incidência de $\overrightarrow{D}$.

5. a) Prove que um grafo regular de grau r com p vértices tem $\frac{p \times r}{2}$ arestas.

   b) Mostre que o grafo completo K_p tem $\binom{p}{2}$ arestas.

   c) Seja q um inteiro tal que $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$.

      i. Determine o número de grafos simples com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$ e exactamente q arestas.

d) Qual o número de grafos simples com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$?

6. Mostre que se G é um grafo de ordem n e dimensão m então

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G).$$

7. Seja G um grafo simples de ordem $\nu(G) \geq 2$. Mostre que existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

8. Encontre o menor número de vértices necessários para construir um grafo completo com pelo menos 1000 arestas.

9. Qual o número de arestas de um grafo simples G, sabendo que $\nu(G) = 56$ e $\varepsilon(G^c) = 80$?

10. Quantos vértices poderá ter um grafo simples regular com 24 arestas?

11. Seja G um grafo simples. Demonstre ou refute as seguintes afirmações:

    a) se G é regular então $G^{\complement}$ é um grafo regular.

    b) se G e $G^{\complement}$ são ambos r-regulares então a ordem de G é par.

    c) se G é conexo então G^c é conexo.

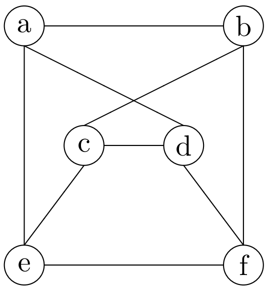
    d) se G não é conexo então G^c é conexo.

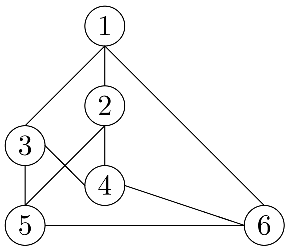
12. Mostre que, existem:

    a) quatro grafos simples não isomorfos de ordem 3;

    b) onze grafos simples não isomorfos de ordem 4.

13. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.

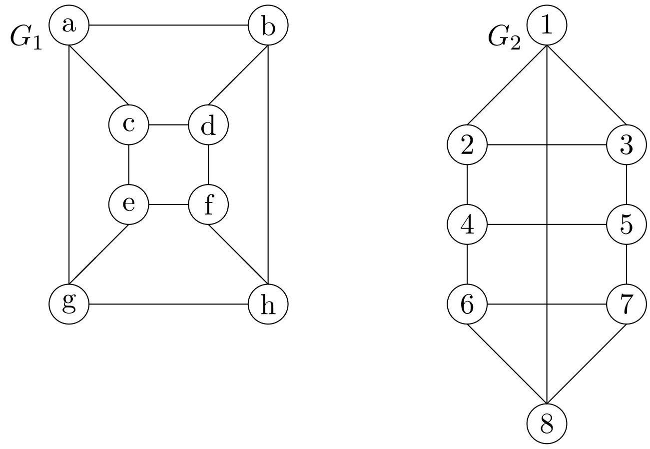




14. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos simples e $G_1^c = (V_1, \overline{E_1})$, $G_2^c = (V_2, \overline{E_2})$ os respectivos grafos complementares. Mostre que $G_1 \cong G_2$ se e só se $G_1^c \cong G_2^c$.

15. Mostre que nenhum grafo com 14 vértices é isomorfo ao seu complementar.

16. Considere os seguintes grafos G_1 e G_2.



Diga se G_1 ou G_2 são grafos bipartidos. E isomorfos? Justifique.

17. Um grafo G tem vértices a, b, c, d, e, f, g, h, i e j e arestas ih, ia, hf, hb, ab, fe, fd, be, bd, bc, bj, dg e cg.

    a) Mostre que G é um grafo bipartido e indique uma partição do conjunto dos seus vértices.

    b) De quantas maneiras distintas poderia ter efectuado a partição da alínea anterior?

    c) O grafo G é também tripartido? Justifique.

18. Sabendo que numa festa estão 20 convidados:

    a) É possível que cada um destes convidados conheça número diferente de convidados?

    b) É possível que 10 convidados conheçam todos os convidados e os restantes 10 não se conheçam entre si?

19. Num mapa de estradas de uma região, aparecem 25 estradas que unem diferentes pares de cidades. Tendo em conta que de cada cidade saem, pelo menos, quatro estradas, quantas cidades aparecem no mapa, sabendo que o seu número é o máximo possível.

20. Sete participantes num congresso vão comer juntos numa mesa circular durante os três dias de duração do congresso. Para se conhecerem melhor, decidem sentar-se de modo que cada um deles tenha de ambos os lados uma pessoa diferente todos os dias. É possível levar esta operação a cabo? No caso afirmativo, utilize um grafo para representar a distribuição diária dos lugares na mesa.

21. Considere o digrafo $\overrightarrow{D} = (V, E)$ onde

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad E = \{12, 23, 34, 45, 56, 16, 26, 52\}.$$

    a) Determine um passeio de 1 a 6 de comprimento 6.

    b) Determine um trajecto de 1 a 6 com 5 arcos.

    c) Determine um ciclo orientado com 4 arcos.

    d) Use a matriz de adjacência de $\overrightarrow{D}$ para determinar o número de passeios orientados de comprimento 2 entre os vértices 2 e 4.

22. Seja G uma floresta com n vértices, m arestas e k componentes. Determine m em função de n e k.

23. Suponha que uma árvore tem 2 vértices de grau 5, 3 vértices de grau 4, 6 vértices de grau 3, 8 vértices de grau 2 e r vértices de grau 1. Determine r.

24. Seja G um grafo simples de ordem $\nu \geq 2$, tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu - 1$, para qualquer par de vértices distintos $u \neq v$. Mostre que:

    a) G é conexo.

    b) $\text{diam}(G) \leq 2$.

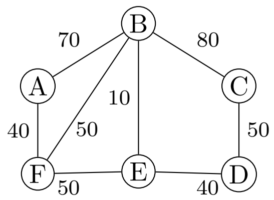
25. Determine o número máximo de vértices que um grafo com 4 componentes conexas e 20 arestas pode ter.

26. Seja $T = (V, E)$ uma árvore com pelo menos dois vértices. Mostre que T tem pelo menos duas folhas (vértices de grau 1).

27. Mostre que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido.

28. Diga o que pode concluir relativamente a uma aresta e que pertence a todas as árvores abrangentes de um grafo conexo G.

29. Uma empresa planeia ampliar a sua rede bidireccional de fibra ótica para servir 5 novas localidades a partir da localidade A. Os custos de instalação (em milhares de euros) entre as localidades são dados pelo grafo seguinte:



    a) Caso a empresa decida optar por uma topologia em árvore, qual a rede que permite servir todas as localidades e minimizar o custo de instalação?

    b) Atendendo ao custo elevado de ligar em rede todas as localidades, a empresa decidiu que quer apenas garantir a ligação à localidade C a partir da localidade A, passando por uma ou mais localidades intermédias. Usando o mesmo grafo de custos, qual é o custo mínimo desta decisão? Quais as localidades passam a ser servidas?

30. Uma rede rodoviária entre 6 povoações A, B, C, D, E e F é constituída por 8 estradas tal como se descreve a seguir:

    - entre A e B com 30 Km;
    - entre B e E com 20 Km;
    - entre E e F com 40 Km;

- entre A e C com 22 Km;
- entre C e E com 12 Km;
- entre D e F com 18 Km;
- entre A e D com 30 Km;
- entre C e D com 36 Km;

a) Represente esta rede rodoviária por um grafo com pesos nas arestas.

b) Aplique o algoritmo de Dijkstra ao grafo para determinar o caminho mais curto entre a povoação D e a povoação B e a respectiva distância.

31. Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matriz de custos

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Verifique se G é um grafo bipartido.
- Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 4.
- Determine uma árvore abrangente de G de custo mínimo aplicando o algoritmo de Kruskal.

32. Determine o número de árvores abrangentes do grafo G, para o qual $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $E(G) = \{13, 25, 34, 35, 46, 47, 58, 78\}$.

33. Determine o número de árvores abrangentes do grafo que se obtém unindo um vértice do grafo completo de ordem 6, K_6, a um vértice de C_6 (ciclo de comprimento 6) por uma aresta.

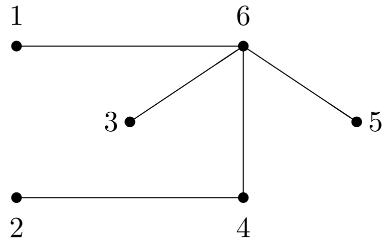
34. Considere um grafo G definido pela matriz de custos nas arestas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 35 & 0 & 25 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 40 & 25 & 0 & 20 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 20 & 0 & 30 & 8 & 21 \\ \infty & \infty & 15 & 30 & 0 & 15 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 15 & 0 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

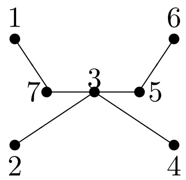
Construa uma árvore abrangente de custo mínimo de G com recurso aos algoritmos de Kruskal e de Prim.

35. Determine os códigos de Prüfer que correspondem às árvores:

(a)



(b)



36. Represente graficamente as árvores definidas pelos códigos de Prüfer:

a) $(1, 2, 3, 4, 5)$;

b) $(3, 3, 3, 3, 3)$;

c) $(2, 8, 6, 3, 1, 2)$.

Algumas soluções

5 (c) $\binom{\binom{p}{2}}{q}$;

(d) $2^{\binom{p}{2}}$.

8 Sendo n o número de vértices do grafo, obtém-se $n \geq 46$.

9 $\varepsilon(G) = 1460$.

10 Sendo n o número de vértices do grafo, tem-se $n \in \{8, 12, 16, 24, 48\}$.

13 Os grafos são isomorfos.

16 G_1 é bipartido, G_2 não é bipartido. Os grafos não são isomorfos.

17 (a) Partição: $V = \{b, f, g, i\} \cup \{a, c, d, e, h, j\}$;

(b) De uma maneira;

(c) O grafo é tripartido, sendo a partição: $V = \{a, g, h\} \cup \{b, f, i\} \cup \{c, d, e, j\}$.

18 (a) Não é possível.

(b) Sim.

19 Aparecem 12 cidades no mapa.

20 Sim, é possível.

21 (d) O número de passeios referidos é igual a um, sendo este número coincidente com o valor de $a_{24}^{(2)}$, sendo $\left[a_{ij}^{(2)}\right] = A^2$, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$, onde A é a matriz de adjacência de $\overrightarrow{D}$.

22 $m = n - k$.

23 $r = 20$.

25 O grafo pode ter, no máximo, 24 vértices.

29 (a) O custo mínimo de instalação é de 190 mil euros, correspondente à árvore abrangente $T = G[\{BE, AF, ED, FE, CD\}]$.

(b) O custo mínimo de ligação entre A e C é 150 mil euros. Para além de A e C apenas fica servida a localidade B.

30 (b) O caminho mais curto é DAB com a distância total de 60 km.

31 (a) G não é bipartido.

(b) Um caminho de custo mínimo é 16734, com custo 12.

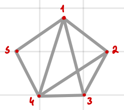
(c) Árvore abrangente de custo mínimo $T = G[\{12, 25, 54, 43, 37, 76\}]$.

32 O número de árvores abrangentes de G é $\tau(G) = 5$.

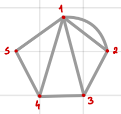
33 O número de árvores abrangentes do grafo resultante é 7776.

34 a árvore abrangente de custo mínimo é $T = G[E]$, com $E = \{12, 24, 46, 56, 35, 57\}$ e custo total igual a 94.

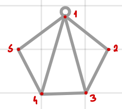
① – G_1



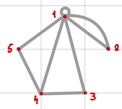
G_2



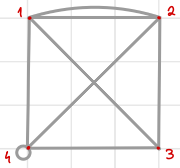
G_3



G_4



② –



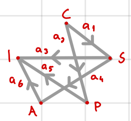
③ – Matriz de incidência

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Matriz de adjacência

$$\begin{array}{c|ccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

④ – a)



b) Matriz de adjacência

$$\begin{array}{c|ccccc|} & C & S & P & A & I \\ \hline C & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Matriz de incidência

$$\begin{array}{c|cccccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline C & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ P & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ I & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

⑤ – a) Como o grafo é regular de grau r, concluímos que todos os vértices têm grau r, logo:

$$\sum_{p \in P} d(p) = 2|E| \Leftrightarrow p \times r = 2|E| \Leftrightarrow |E| = \frac{p \times r}{2}$$

b) Se o grafo K_p é completo, então cada dois vértices têm uma aresta que os une, logo o número total de arestas é $\binom{p}{2}$.

c) O número de grafos simples com q arestas corresponde a escolher q entre as $\binom{p}{2}$ arestas possíveis num grafo, logo o número de grafos simples é $\binom{\binom{p}{2}}{q}$.

d) $\displaystyle\sum_{q=0}^{\binom{p}{2}} \binom{\binom{p}{2}}{q} = 2^{\binom{p}{2}}$

⑥ – $\delta(G) \leq d_G(v) \leq \Delta(G) \Leftrightarrow \sum_{v \in G} \delta(G) \leq \sum_{v \in G} d_G(v) \leq \sum_{v \in G} \Delta(G) \Leftrightarrow m\,\delta(G) \leq 2m \leq m\,\Delta(G) \Leftrightarrow \delta(G) \leq \frac{2m}{m} \leq \Delta(G)$

(7) — Num grafo simples de grau n, os graus dos vértices podem ser $\{0,1,2,\dots,n-1\}$.
Num mesmo grafo não podem haver um vértice de grau 0 e um de grau $n-1$.
Conclui-se que num grafo simples os vértices podem tomar $n-1$ graus diferentes e como existem n vértices no grafo, pelo princípio do gaiola dos pombos, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

(8) — $\binom{v}{2} = 1000 \iff \frac{v!}{(v-2)!\,2!} = 1000 \iff v(v-1) = 2000 \iff v^2 - v - 2000 = 0 \iff v = \frac{1 \pm \sqrt{1+8000}}{2} \iff v \simeq 45{,}2$

Conclui-se que são necessários pelo menos 46 vértices.

(9) — $\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G^c) = \binom{56}{2} \iff \mathcal{E}(G) = 1540 - 80 \iff \mathcal{E}(G) = 1460$

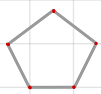
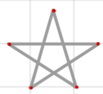
(10) — Se o grafo é regular, então todos os vértices têm o mesmo grau

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \iff |V| \times d(v) = 2 \times 24 \iff |V| = \frac{48}{d(v)}$$

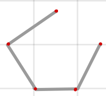
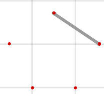
$d(v) = 1 \to |V| = 48$
$d(v) = 2 \to |V| = 24$
$d(v) = 3 \to |V| = 16$
$d(v) = 4 \to |V| = 12$
$d(v) = 6 \to |V| = 8$
$d(v) = 8 \to |V| = 6 \to$ não acontece em grafo simples

Conclui-se que o grafo poderá ter 48, 24, 16, 12 ou 8 vértices.

(11) — a) Cada vértice em G^c vai estar ligado aos vértices em que em G não estavam, logo se G é regular, então G^c também é.

b) G  G_c 

G e G^c são complementares e a ordem de G é 5 (ímpar), logo a afirmação é falsa

c) G  G_c 

G é conexo e G^c não é conexo, logo a afirmação é falsa.

d) A afirmação é verdadeira, pois se G não é conexo, o seu complementar vai ter pelo menos uma ponte que ligue todas as componentes.

(12) — a) 

b) Existem $2^{\binom{p}{2}}$ grafos de ordem p, logo existem $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ grafos diferentes de ordem 4, logo existem 11.

(13) – Os grafos são isomorfos, pois têm a mesma ordem e dimensão e os seus vértices correspondentes têm o mesmo grau ($d(a) = d(5)$, $d(b) = d(3)$, $d(c) = d(4)$, $d(d) = d(2)$, $d(e) = d(6)$ e $d(f) = d(1)$).

(14) – G_1^c e G_2^c são isomorfos, então existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$.
Se existe uma bijeção entre $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$, existe entre $E_1 \to E_2$.
Se existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $E_1 \to E_2$, então $G_1 \cong G_2$.

G_1 e G_2 são isomorfos, então existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $E_1 \to E_2$.
Se existe uma bijeção entre $E_1 \to E_2$, existe entre $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$.
Se existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$, então $G_1^c \cong G_2^c$.

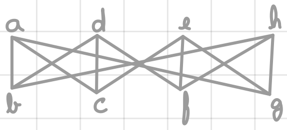
Concluímos que $G_1 \cong G_2 \iff G_1^c \cong G_2^c$.

(15) – Se dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos, os graus dos vértices correspondentes são iguais.
Assim se G_1 tiver ordem 14 e considerarmos um vértice v, temos que:

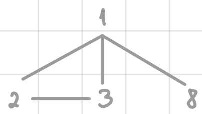
$$d_G(v) = m$$
$$d_G(v) = 14 - 1 - m = 13 - m$$

Como não há nenhum inteiro tal que $m = 13 - m \iff 2m = 13$, então o grau não é preservado, logo G_1 não pode ser isomorfo com o seu complementar.

(16) – G_1

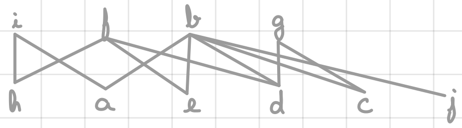


G_2



Concluímos que G_1 é um grafo bipartido e G_2 não e também concluímos que não são isomorfos, pois têm número de arestas diferentes.

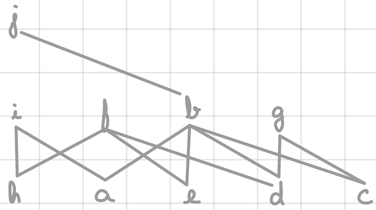
(17) – a) G



Concluímos que G é bipartido e $\{\{i, f, b, g\}, \{h, a, e, d, c, j\}\}$.

b) De uma maneira.

c) G



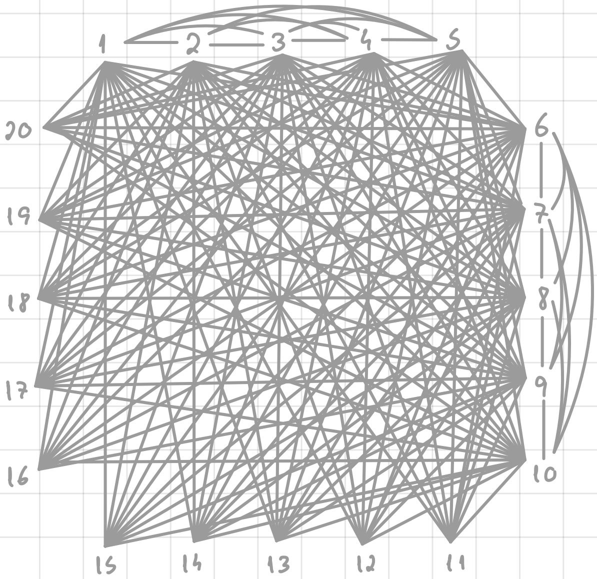
Concluímos que G é tripartido.

(18) — **a)** Num grafo com 20 vértices (cada um representa uma pessoa) e uma aresta entre dois vértices representa que duas pessoas se conhecem, temos que o grau dos vértices pode variar entre 0 e 19.

Neste grafo não podemos ter simultaneamente um vértice com grau 0 e outro com grau 19, logo apenas podemos ter 19 graus diferentes para os vértices.

Pelo princípio da gaiola dos pombos, como 20 > 19, temos que existem pelo menos dois convidados que conhecem o mesmo número de convidados.

b)



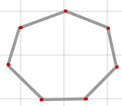
Concluímos que é possível.

(19) — Sabemos que $E(G) = 25$ e $d_G(v) \geq 4$.

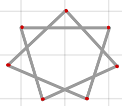
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| \Leftrightarrow V \times d_G(v) = 2 \times 25 \Leftrightarrow V = \frac{50}{d_G(v)}$$

Considerando V o número de cidades, concluímos que o número de cidades é máximo quando saem 4 estradas de todas elas, logo o número de cidades é $\frac{50}{4} = 12,5 \rightarrow 12$ cidades.

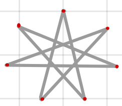
(20) — Primeiro dia



Segundo dia

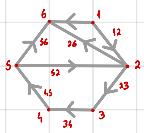


Terceiro dia



Concluímos que é possível levar a operação a cabo.

(21) —



a) $P = (1, 2, 3, 4, 5, 2, 6)$

b) $P = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

c) $P = (2, 3, 4, 5, 2)$

d) Matriz de adjacência de $\vec{D}$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

O número de passeios de comprimento 2, do vértice 2 ao 4 é dado por $(A^2)_{24} = L_2(A)\, C_4(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Existe apenas 1 passeio.

22 — Se G é uma floresta, temos que $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G)$, logo $m = n - k$.

23 — $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G) \iff |E| = 19 + x - 1 \iff |E| = 18 + x$

$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| \iff 2\times5 + 3\times4 + 6\times3 + 8\times2 + x\times1 = 2(18+x) \iff 56 + x = 36 + 2x \iff x = 20$

25 — $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G) \iff 20 = v(G) - 4 \iff v(G) = 24$

O número máximo de vértices é 24.

28 — É uma ponte.

29 — a)

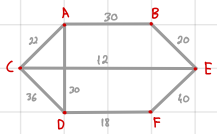
iteração	0	1	2	3	4	5
E	—	BE	ED	DC	FE	AF
c_E	—	10	40	50	50	40
V'	B	B, E	B, E, D	B, E, D, C	B, E, D, C, F	B, E, D, C, F, A
Σc_E	0	10	50	100	150	190
V' = V(G)	N	N	N	N	N	S
T(V', E')						

b)

iteração	A	B	C	D	E	F	menor	temp
0	(0, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	A	{B, C, D, E, F}
1	———	(70, A)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(40, A)	F	{B, C, D, E}
2	———	(70, A)	(∞, –)	(∞, –)	(90, F)	———	B	{C, D, E}
3	———	———	(150, B)	(∞, –)	(80, B)	———	E	{C, D}
4	———	———	(150, B)	(120, E)	———	———	D	{C}
5	———	———	(150, B)	———	———	———	C	{ }

Concluimos que o custo mínimo da decisão é 150 mil euros e para além da localidade A e C passa a ser servido também a B.

30 – a)

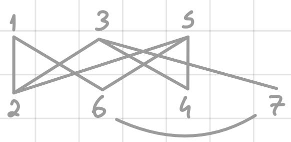


b)

iteração	A	B	C	D	E	F	menor	temp
0	(∞, –)	(0, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	B	{A, C, D, E, F}
1	(30, B)	———	(∞, –)	(∞, –)	(20, B)	(∞, –)	E	{A, C, D, F}
2	(30, B)	———	(32, E)	(∞, –)	———	(60, E)	A	{C, D, F}
3	———	———	(32, E)	(60, A)	———	(60, E)	C	{D, F}
4	———	———	———	(60, A)	———	(60, E)	F	{D}
5	———	———	———	(60, A)	———	———	D	{ }

Concluimos que o caminho mais curto é P = (B, A, D) de tamanho 60 Km.

31 –



Concluimos que G não é bipartido

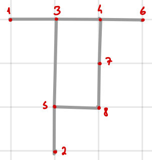
iteração	1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
0	(0, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	1	{2, 3, 4, 5, 6, 7}
1	———	(5, 1)	(∞, –)	(∞, –)	(∞, –)	(7, 1)	(∞, –)	2	{3, 4, 5, 6, 7}
2	———	———	(13, 2)	(∞, –)	(11, 2)	(7, 1)	(∞, –)	6	{3, 4, 5, 7}
3	———	———	(13, 2)	(∞, –)	(10, 6)	———	(9, 6)	7	{3, 4, 5}
4	———	———	(11, 7)	(∞, –)	(10, 6)	———	———	5	{3, 4}
5	———	———	(11, 7)	(13, 5)	———	———	———	3	{4}
6	———	———	———	(12, 3)	———	———	———	4	{ }

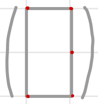
Concluimos que um caminho de custo mínimo entre 1 e 4 é P = (1, 6, 7, 3, 4)

iteração	0	1	2	3	4	5	6
ij	—	34	37	67	45	12	25
c_{ij}	—	1	2	2	3	5	6
E'	3	3,4	3,4,7	3,4,7,6	3,4,7,6,5	1,2,4,7,6,5	1,2,4,7,6,5,3
Σc_{ij}	0	1	3	5	8	13	19
Termina	N	N	N	N	N	N	S
T=(V,E')							

Concluímos que uma árvore abrangente de custo mínimo de G é $T=\{34,37,67,45,12,25\}$

32 —



$T(G) = T(G-1-2-6) = T\Big($  $\Big) = 5$

O grafo G tem 5 árvores abrangentes.

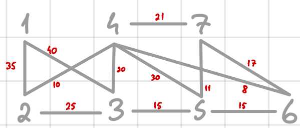
33 — $T(G) = T(K_6) \times T(C_6) = 6^{6-2} \times 6 = 6^5 = 7776$

34 — Algoritmo de Kruskal

iteração	0	1	2	3	4	5	6
E	—	46	24	57	56	35	12
c_E	—	8	10	11	15	15	35
V'	4	4,6	4,6,2	4,6,2,5,7	4,6,2,5,7	4,6,2,5,7,3	4,6,2,5,7,3,1
Σc_E	0	8	18	29	44	59	94
Termina	N	N	N	N	N	N	S
T(V,E')							

Algoritmo de Prim

iteração	0	1	2	3	4	5	6
E	—	12	24	46	56	57	35
c_E	—	35	10	8	15	11	15
V'	1	1,2	1,2,4	1,2,4,6	1,2,4,6,5	1,2,4,6,5,7	1,2,4,6,5,7,3
Σc_E	0	35	45	53	68	79	94
V' = V(G)	N	N	N	N	N	N	S
T(V,E')							



35 – a)

iteração	1	2	3	4
v	1	2	3	4
p	6	4	6	6

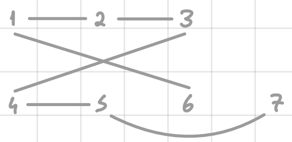
$P = (6,4,6,6)$

b)

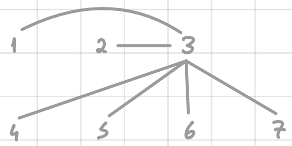
iteração	1	2	3	4	5
v	1	2	4	6	5
p	7	3	3	5	3

$P = (7,3,3,5,3)$

36 – a) $P = (1,2,3,4,5)$ e $L = (1,2,3,4,5,6,7)$



b) $P = (3,3,3,3,3)$ e $L = (1,2,3,4,5,6,7)$



c) $P = (2,8,6,3,1,2)$ e $L = (1,2,3,4,5,6,7,8)$