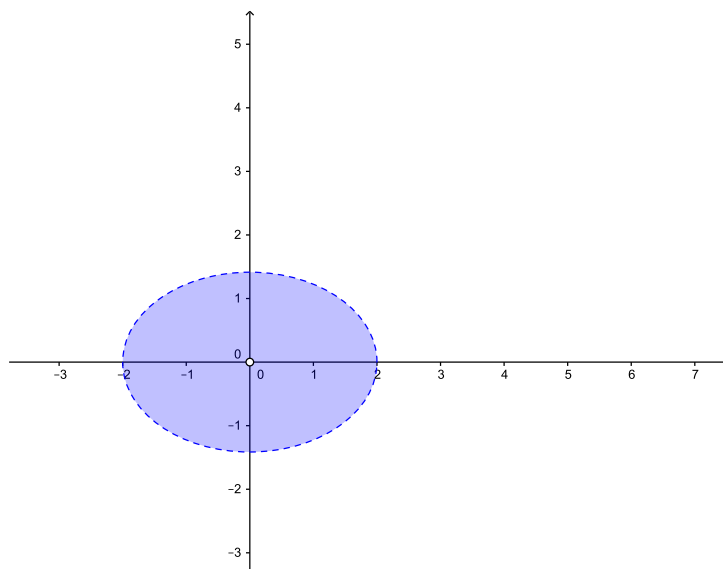
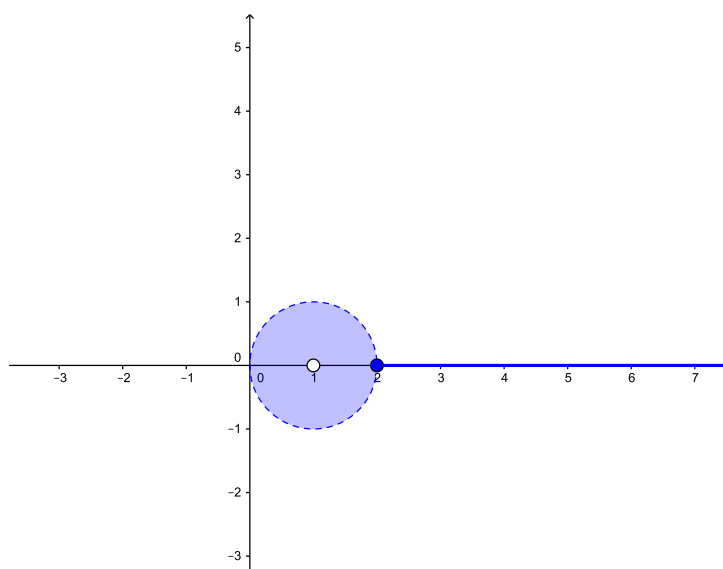


1. (a) É aberto e não é fechado.

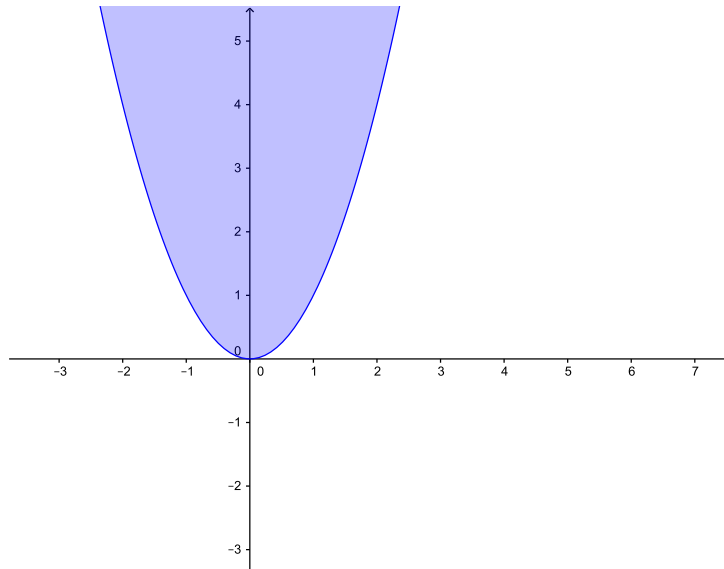


- (b) Não é aberto nem fechado.



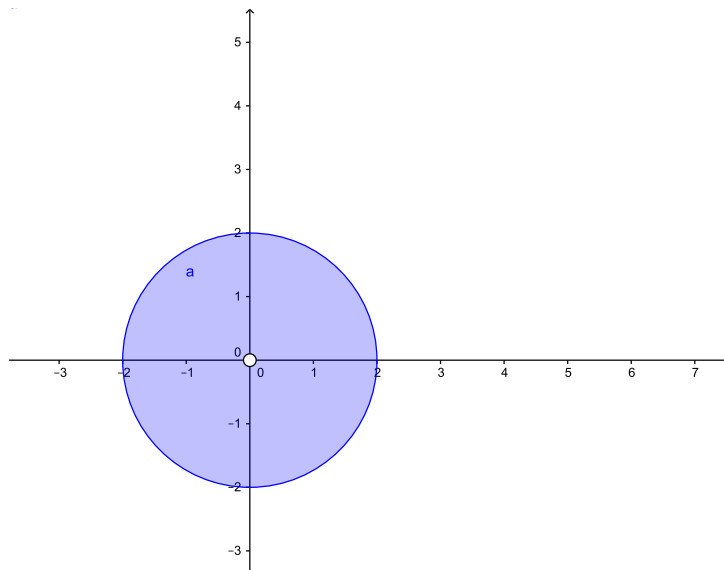
- (c) Não é aberto nem fechado.  
(d) É fechado e não é aberto.  
(e) É fechado e não é aberto.

2. (a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ .

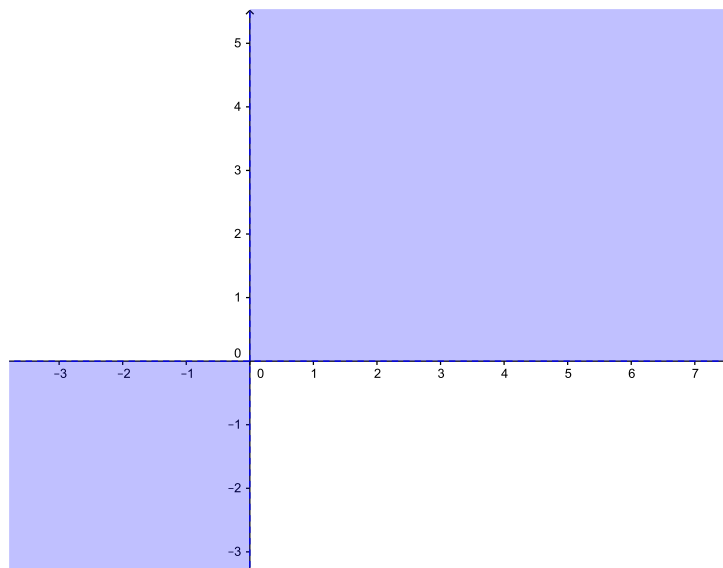


(b)  $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$ .

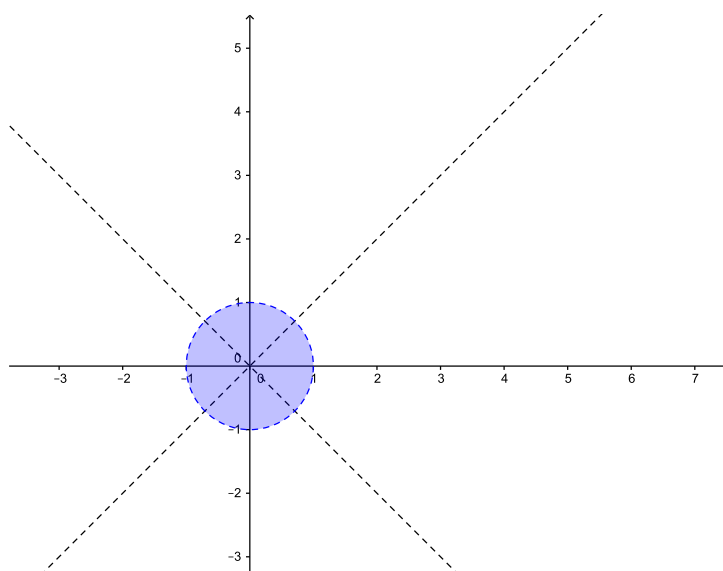
(c)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ .



(d)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$ .

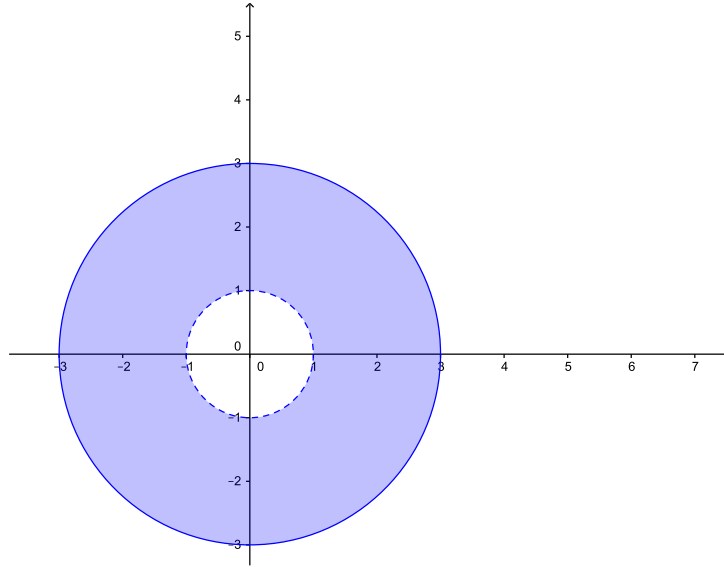


(e)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y \neq x \wedge y \neq -x\}.$



(f)  $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$

(g)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$



- (h)  $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$ .
3. (a)  $\mathcal{N}_1 = \{(0, 0)\}$  é um ponto. Para cada  $k \in ]1, +\infty[$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{k^2-1}{k^2}\}$  é uma circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$ .
- (b)  $\mathcal{N}_1 = Ox \cup Oy$  é a união de duas retas concorrentes (cônica degenerada). Para  $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(k)\}$  é uma hipérbole.
- (c) Para  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = k\}$  é o plano ortogonal ao vetor  $(1, 1, 3)$  que contém o ponto  $(k, 0, 0)$ .
- (d)  $\mathcal{N}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$  é uma superfície cônica;  
para  $k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$  é um hiperbolóide de duas folhas;  
para  $k \in \mathbb{R}^-$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$  é um hiperbolóide de uma folha.
- (e)  $\mathcal{N}_0 = \{(0, 0, 0)\}$  é um ponto (quádrica degenerada). Para cada  $k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$  é uma superfície esférica de centro  $(0, 0, 0)$  e raio  $\sqrt{k}$ .
4.  $\{(x, y) : T(x, y) = T(3, 2)\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 13\}$   
(circunferência de centro em  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{13}$ ).
5. Para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , temos
- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^x(\sin x + \cos x),$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3 \sin(z - 3y),$$
- $$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\sin(z - 3y).$$
6. (a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = \frac{1}{2}; \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = \frac{1}{2}$ .
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$  não existe.
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  não existe;  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

7. Para  $y > -x$  e  $x > y$ , temos
- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{y^2 - x^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2},$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$
8.  $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2)$ .
9. –
10. –
11. –
12. (a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .  
 (b) Plano tangente:  $5x + 4y - z - 9 = 0$ .  
 Reta normal:  
 $(x, y, z) = (1, 2, 4) + \alpha(5, 4, -1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  (equação vetorial) ou  
 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4 - z$  (equações cartesianas).
13. (a)  $\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$ .  
 (b)  $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)}f(1, 3, 0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ .
14. (a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   
 (é aberto e não é fechado).  
 (b) As curvas de nível  $k \in \mathbb{R}$  de  $f$  são  $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^k\}$   
 (circunferências de centro  $(0, 0)$ ).  
 (c)  $D_{(u, v)}f(1, 0) = 2u$ .
15. Reta normal:  $(x, y, z) = (3, 4, -2) + \alpha(3, 4, 5)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 Plano tangente:  $3x + 4y + 5z - 15 = 0$ .
16. (a)  $\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$ .  
 (b)  $3x + 3y + 2z - 8 = 0$ .
17. (a)  $D$  é um losango centrado na origem com os vértices situados nos eixos coordenados.  
 (b) A função é do tipo polinomial, logo contínua no seu domínio de definição  $\mathbb{R}^2$  e, consequentemente, também é contínua em  $D$ . Por outro lado, este conjunto é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  que são, respetivamente, o menor e o maior valor que  $f$  atinge.  
 Observar que  $f(x, y)$  expressa o quadrado da distância de um ponto  $P = (x, y)$  à origem. Assim, o máximo absoluto é 1, atingido nos pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, -1)$ , e o mínimo absoluto é 0, atingido no ponto  $(0, 0)$ .
18. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque  $\mathcal{S}$  não é fechado.
19. Como  $f(x, y) = -x^2 \leq 0 = f(0, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então todos os pontos da forma  $(0, y)$ , com  $y \in \mathbb{R}$ , são maximizantes da função.
20. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque  $\mathbb{R}^3$  não é limitado.  
 (b) Como  $f(0, 0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$  para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , então  $(0, 0, 0)$  é (o único) minimizante global de  $f$ .

21. (a)  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ , porque não existe  $f'_x(0, 0)$ .  
 (b) Tem-se  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 = f(0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Portanto,  $(0, 0)$  é (o único) maximizante absoluto de  $f$ .
22. (a) Como  $g$  é contínua e o conjunto  $B$  é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de  $g$  em  $B$ .  
 (b)  $g$  é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de  $B$ , logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente  $(0, -1)$  é minimizante global e  $(0, 1)$  é maximizante global.  
 (c) Não, pois  $g$  é diferenciável no aberto  $A$  e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que  $\nabla g(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$ ). Portanto,  $g$  não tem extremantes globais em  $A$  (nem em  $\mathbb{R}^2$ ).
23. Na origem a função  $h$  vale  $\frac{1}{2}$ , enquanto que, por exemplo, em  $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$  vale  $\frac{3}{2}$  que é um valor maior.
24. (a)  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ;  
 (b)  $(2, 3)$  e todos os pontos situados nos eixos coordenados;  
 (c)  $(0, 0, 0)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(1, 1, 1)$ .
25. Como  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$  então  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 \geq -1$ . Ora  $f(1, 2) = -1$  e para todo  $(x, y) \neq (1, 2)$  tem-se  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 > -1$ .
26. (a) O gradiente de  $f$ , se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em  $(-4, 6)$ . No entanto,  $(-4, 6) \notin \text{int}(D)$ . Consequentemente,  $f$  não possui pontos críticos em  $\text{int}(D) = ]0, 1[ \times ]0, 2[$ .  
 (b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que  $D$  é fechado e limitado e  $f$  é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).  
 O máximo absoluto de  $f$  em  $D$  é 17 e é atingido no ponto  $(1, 2)$ ; o mínimo absoluto de  $f$  em  $D$  é -3 e é atingido no ponto  $(1, 0)$ .
27. (a) Os pontos críticos são  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . A função  $f$  é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .  
 Como  $\det(H_f(0, 0)) = -1 < 0$ , então  $(0, 0)$  não é extremante (é ponto de sela).  
 Como  $\det(H_f(1, 1)) = e^{-4} > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -e^{-2} < 0$ , então  $f(1, 1) = e^{-2}$  é máximo local.  
 (b) Os pontos críticos de  $g$  são  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(1, 1/4)$ . Aplicando o teste das segundas derivadas, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro ponto é minimizante local.
28. -
29. -
30. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que  $f$  tem extremos globais em  $D$ .  $(0, 0)$  é o único ponto crítico no interior de  $D$ , mas não é extremante (o hessiano é negativo neste ponto). Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ . Calculando o valor de  $f$  nestes pontos, conclui-se que o máximo global de  $f$  é 2 (atingido nos pontos  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ ) e o mínimo global de  $f$  é -2 (atingido nos pontos  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ ).

31. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que  $f$  tem extremos globais em  $D$ . Não existem pontos críticos no interior de  $D$  (ambas as derivadas parciais anulam-se  $(0, 0)$ , mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira  $fr(D)$  é constituída pela semicircunferência  $D_1$  e pelo segmento de reta  $D_2$ :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}; \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}.$$

Como  $f$  é constante em  $D_2$  (pois  $f(x, 0) = 0$ ) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em  $D_1$  são  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x, 0) = 0,$$

o máximo global de  $f$  é  $1/2$  e o mínimo global é  $-1/2$ .

32.  $(4, 8)$  é o que se encontra mais próximo (à distância  $3\sqrt{5}$ ) e  $(-4, -8)$  é o que se encontra mais afastado (à distância  $5\sqrt{5}$ ).

33. (a)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

- (b) A distância entre um qualquer ponto  $(x, y, z)$  e o ponto  $(1, 0, -2)$  é dada por  $d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$ . Para pontos  $(x, y, z)$  do plano dado temos  $z = 4 - x - 2y$ . Assim, podemos minimizar  $d(x, y, z)$ , ou mais simplesmente  $d(x, y, z)^2$ , tendo em conta esta última relação. Considerando

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

vemos que o único ponto crítico de  $f$  é  $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$  e que este é um minimizante local (atendendo ao teste das segundas derivadas). A distância mais curta pretendida é  $f\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ .

34. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

35. (a) –

- (b)  $(0, 1)$ .

- (c)  $f(0, 1) = 0$  é mínimo global e  $f(0, 4) = 9$  é máximo global.

36. (a) –

- (b)  $\text{int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 1 - x < y < 1\}$ ;  $f$  não possui pontos críticos em  $\text{int}(D)$ .

- (c)  $f(1/2, 1/2) = 1$  é mínimo global e  $f(1, 1) = 4$  é máximo global.

37. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo realizado (ou atingido) com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.

38. O custo mínimo para uma produção de 12 unidades é  $C(4, 16) = 56$ .