Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2021/22

Folha Semana 2 (14 de Março de 2022 – 18 de Março de 2022)

Considere a linguagem com um símbolo de constante a, um símbolo de predicado R de dois argumentos, um símbolo de função f de dois argumentos e um símbolo de função s de um argumento.

1. A expressão $\forall x \forall y\, (s(x) \to R(x, y))$ é uma formula nesta linguagem?

Considere a fórmula ψ dada por

$$\exists z\, (f(s(s(a)), z) = x \wedge R(s(a), z)).$$

2. Indique as variáveis livres de ψ. A fórmula ψ é fechada?

Considere a seguinte estrutura $\mathcal{M}$:

- $D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- O símbolo de constante a interpreta-se por $0 \in \mathbb{N}$.
- O símbolo de predicado R interpreta-se pela relação «$<$» («menor») em $\mathbb{N}$.
- O símbolo de função f interpreta-se pela multiplicação de números naturais.
- O símbolo de função s interpreta-se pela função

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto n + 1.$$

Considere ainda a valoração V com $V(x) = 6$ e $V(z) = 1$.

3. $(\mathcal{M}, V) \models \psi$? Isto é, a fórmula ψ é válida nesta interpretação?
4. A fórmula $\exists x\, \psi$ é válida nesta interpretação?
5. A fórmula $\forall x\, \psi$ é válida nesta interpretação?

1 – Não é uma fórmula, pois a função não tem valor de verdade e a sua existência não implica nada.

2 – A variável x é livre, logo a fórmula φ não é fechada.

3 – De acordo com $\mathcal{I}$, para escrever φ como: $\exists z \left(\overbrace{f(2,z) = x \wedge R(1,z)}^{\varphi}\right)$

para considerar a valoração que quiser

Considerando $V(z) = 3$:

$$V(\varphi) \equiv V\tfrac{z}{3}\, f(2,z) = V\tfrac{x}{6}\, x \wedge V\tfrac{z}{3}\, R(1,z) \equiv f(2,3) = 6 \wedge R(1,3) \equiv 2 \times 3 = 6 \wedge (1 < 3) \equiv T$$

$\rightarrow$ A fórmula é válida nesta interpretação

4 – $\exists x \exists z \, (f(2,z) = x \wedge R(1,z))$

Como concluímos acima que para $V(x) = 6$ a fórmula é válida, logo $\exists x\, \varphi$ também é nesta interpretação

5 – $\forall x \exists z \, (f(2,z) = x \wedge R(1,z))$

Considerando $V(x) = 0$:

para que a igualdade seja verdadeira $V(z) = 0$

$$V(\varphi) = f(2,z) = V\tfrac{x}{0}\, x \wedge R(1,z) \equiv V\tfrac{z}{0}\, f(2,z) = 0 \wedge V\tfrac{z}{0}\, R(1,z) \equiv 2 \times 0 = 0 \wedge (1 < 0) \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$$

Concluímos que $\forall x\, \varphi$ não é válida nesta interpretação.