

**Universidade de Aveiro**  
**Departamento de Matemática**

**Cálculo II - Agrupamento 4**

**2021/22**

**Folha 5:** *Transformadas de Laplace e aplicações às EDO*

---

1. Para cada uma das funções seguintes, determine  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ :

- (a)  $f(t) = 2 \operatorname{sen}(3t) + t - 5e^{-t}$ ;
- (b)  $f(t) = e^{2t} \cos(5t)$ ;
- (c)  $f(t) = te^{3t}$ ;
- (d)  $f(t) = \pi - 5e^{-t}t^{10}$ ;
- (e)  $f(t) = (3t - 1) \operatorname{sen} t$ ;
- (f)  $f(t) = (1 - H_\pi(t)) \operatorname{sen} t$ ;
- (g)  $f(t) = (t - 2)^2 e^{2(t-2)} H_2(t)$ .

2. Para cada uma das funções seguintes, determine  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ :

- (a)  $F(s) = \frac{2s}{s^2 - 9}$ ;
- (b)  $F(s) = \frac{4}{s^7}$ ;
- (c)  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$ ;
- (d)  $F(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}$ ;
- (e)  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$ ;
- (f)  $F(s) = \frac{3s - 1}{s^2 - 4s + 13}$ ;
- (g)  $F(s) = \frac{4s + e^{-s}}{s^2 + s - 2}$ ;
- (h)  $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2}$ .

3. Calcule o valor dos seguintes integrais impróprios, usando transformadas de Laplace:

- (a)  $\int_0^{+\infty} t^{10} e^{-2t} dt$ ;
- (b)  $\int_0^{+\infty} e^{-3t} t \operatorname{sen} t dt$ .

4. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Sabendo que  $f'(t) + 2f(t) = e^t$  e que  $f(0) = 2$ , determine a expressão de  $f(t)$ .

5. Calcule:

- (a)  $\mathcal{L}\{(t - 2 + e^{-2t}) \cos(4t)\}$ ;
- (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s - 1}{s^2 - 4s + 6}\right\}$ ;
- (c)  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s - 1)(s^2 + 2s + 5)}\right\}$ .

6. Usando transformadas de Laplace mostre que

$$t^m * t^n = \frac{m! n!}{(m + n + 1)!} t^{m+n+1} \quad (m, n \in \mathbb{N}_0).$$

7. Determine a solução da equação

$$y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau) d\tau$$

que satisfaz a condição  $y(0) = 0$ .

8. Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando transformadas de Laplace.

(a)  $3x' - x = \cos t$  ,  $x(0) = -1$ ;

(b)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0$  ,  $y(0) = -1$  ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 2$ ;

(c)  $y'' + 2y' + 3y = 3t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$ ;

(d)  $y''' + 2y'' + y' = x$  ,  $y(0) = y'(0) = y''(0) - 1 = 0$ ;

(e)  $y'' + y' = \frac{e^{-t}}{2}$  ,  $y(0) = 0 = y'(0)$ .

9. Resolva o seguinte problema de valores iniciais recorrendo às transformadas de Laplace:

$$y'' + y = t^2 + 1 , \quad y(\pi) = \pi^2 , \quad y'(\pi) = 2\pi .$$

(Sugestão: Efetuar a substituição definida por  $x = t - \pi$ ).

10. Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte sistema de EDOs sujeito às condições indicadas (onde  $x$  e  $y$  são funções da variável independente  $t$ ):

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases} , \quad x(0) = 5, \quad y(0) = 0.$$