



universidade
de aveiro

degeit

COMPETÊNCIAS TRANSFERÍVEIS

Finanças Empresariais | 2023/24

Capítulo 1

1.4 Noções fundamentais de Cálculo Financeiro



“1€ hoje vale mais que 1€ amanhã”

O valor temporal do dinheiro é um dos princípios fundamentais das finanças empresariais, pelas seguintes razões

- Preferências por consumo imediato;
- Incerteza;
- Possibilidade de aplicação do montante respetivo

- Qual é o montante que recebido daqui a um ano é equivalente a ter hoje 100 euros?

- Se, no mercado, for possível **investir os 100 euros** num ativo sem risco com uma **taxa de juro de 5%**:

⇒ Se eu investir os 100 euros hoje, daqui a um ano terei **105 euros**: $100 \times (1+0,05)$

⇒ Ou seja, **capital inicial (100€) + juro (5€)**



Valor acumulado ou **valor capitalizado**

Operação financeira

Toda a ação que tem como objetivo alterar quantitativamente um capital, tendo como características base:

- Duração
- Taxa usada
- Contingência quanto à sua realização (certas ou aleatórias)

O **juro** traduz a remuneração de um fator produtivo cedido ou aplicado temporariamente pelo titular do fator

O cálculo do juro é função de três variáveis:

- Do capital investido (C ou C_0 - capital inicial ou capital referido ao momento 0)
- Da taxa de juro (i)
- Do prazo (n)

$$J = C \times n \times i \quad (J - \text{juro produzido no final do período } n)$$

Juro

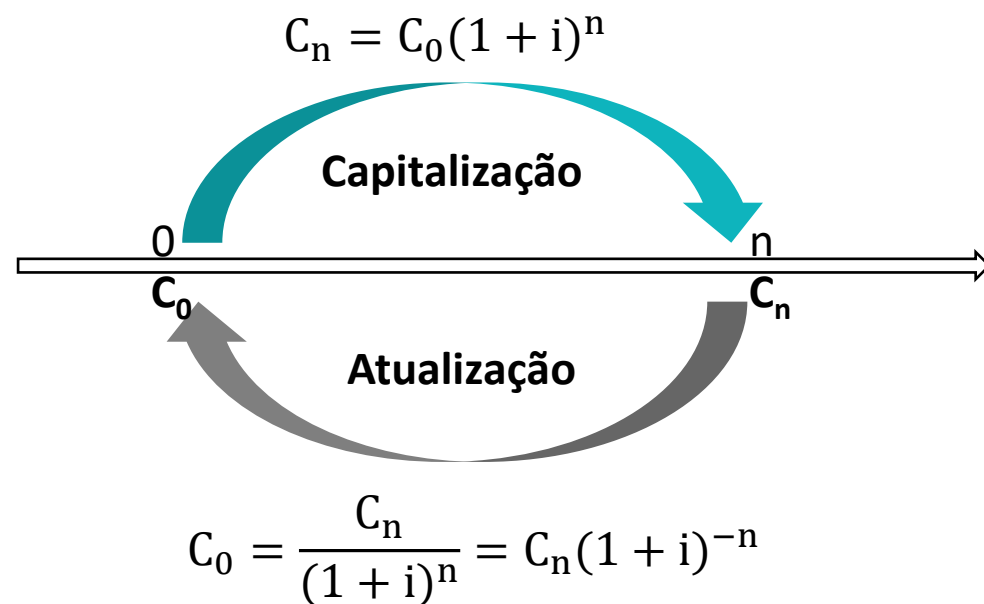
Remuneração de determinado capital durante determinado prazo, em valor absoluto.



Taxa de juro

Montante, expresso em percentagem, que é pago para compensar o montante do empréstimo.

Comparar capitais em diferentes momentos no tempo, implica colocá-los num momento do tempo equivalente:



*“Andar para a frente no tempo”, colocando todos os capitais num mesmo **momento futuro***

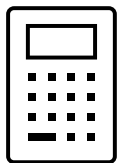
*“Andar para trás no tempo”, colocando todos os capitais no **momento presente***

$$C_n = V_n$$

Capital acumulado corresponde ao **valor acumulado ou capitalizado**

$$C_0 = V_0$$

Capital inicial designa-se por **valor atual ou atualizado**



1. Suponha que alguém está disposto a oferecer-lhe 100€, e lhe dá a escolher entre receber agora ou receber a mesma importância daqui a 10 anos. Que hipótese escolher?

R: Será preferível receber agora, e fazer uma aplicação financeira desses 100€ que poderá aumentar esse valor.

2. E se lhe for proposto receber agora os 100€ ou 200€ no fim de 10 anos. Que hipótese escolher?

Para responder à questão basta ter UMA das seguintes informações:

OU o Valor Futuro dos 100€, OU o Valor Presente dos 200€.

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Suponha que a taxa de juro de mercado a 10 anos é de 5%; então:

- Valor Futuro dos 100€: $C_n = 100 (1+0,05)^{10} \approx 163€$

- Valor Presente dos 200€: $200 = C_0 (1+0,05)^{10} \Leftrightarrow C_0 \approx 123€$

R: Será preferível esperar 10 anos e receber os 200€ no futuro.

Regime de juro simples

Os juros saem do circuito de capitalização no momento do seu vencimento. O capital aplicado permanece constante durante todo o prazo da aplicação; mais utilizado em operações de curto prazo.

❑ **Fórmula geral do cálculo de juros, em regime de juro simples:**

- Anual: $J = C_0 \cdot n \cdot i$
- Se o período de capitalização é fornecido em dias (ano civil): $J = (C_0 \cdot n \cdot i) / 365$
- No caso da contagem de dias ser feita em ano comercial: $J = (C_0 \cdot n \cdot i) / 360$
- Se n for fornecido em meses: $J = (C_0 \cdot n \cdot i) / 12$

❑ Para calcular o juro dum período específico x temos: $j_x = C_0 \cdot i$

❑ Fórmula de capitalização para n períodos (anuais): $C_n = C_0 + J = C_0 + C_0 \cdot n \cdot i = C_0 (1 + n \cdot i)$

Neste caso, não há *juros de juros*!

⇒ o capital sobre o qual se calculam os juros mantém-se constante, bem como o juro pago no final de cada período

Regime de juro composto

Os juros, no momento do seu vencimento, são integrados no circuito de capitalização. O capital aplicado vai aumentando no início de cada período, pela adição dos juros vencidos; mais utilizado em operações de médio e longo prazo.

Fórmula geral: $J = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1]$; $j_x = C_0 (1+i)^{x-1} \cdot i$

$$C_n = C_{n-1} + J_n = C_{n-1} (1 + i); i \text{ constante}$$

Com taxa de juro constante ao longo de n períodos temos um crescimento exponencial:

$$C_1 = C_0 + J_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 (1+i)$$

$$C_2 = C_1 (1+i) = C_0 (1+i)(1+i) = C_0 (1+i)^2 \quad (:::::)$$

$$C_n = C_{n-1} (1+i) = C_0 (1+i)(1+i) \dots (1+i) = C_0 (1+i)^n \Rightarrow \text{(Fórmula Geral)}$$

“Juros vencem juros”

- ⇒ Incorporação dos juros produzidos ao longo dos períodos de aplicação no capital aplicado inicialmente
- ⇒ O valor do capital aplicado aumenta e o juro de cada período será superior ao juro do período anterior

Conforme
esquema slide 6

Generalizando, em regime de juro composto, e considerando que a taxa de juro i não varia:

Capitalização: $C_n = C_0(1 + i)^n$

Atualização: $C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = C_n(1 + i)^{-n}$

Fatores de atualização:

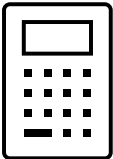
Um período: $(1+i)^{-1}$

n períodos: $(1+i)^{-n}$

Fatores de capitalização:

Um período: $(1+i)^1$

n períodos: $(1+i)^n$



Capital (C)	1,000.00 €
Anos (n)	3
Taxa de juro (i)	2%

	Juros simples $C_n = C_0(1+n \times i)$	Juros compostos $C_n = C_0(1+i)^n$	$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$
	1,060.00	1,061.21	
Capital	1,000.00		
Juro Ano 1	20.00	1,020.00	
Juro Ano 2	20.00	1,040.40	
Juro Ano 3	20.00	1,061.21	1,000.00
	1,060.00		
	Capitalização	Atualização	

Se eu ganho 100 em t , 200 em $t+1$ e 150 em $t+2$, quanto vale isso hoje?

$$V_0 = C_0 = 100 + 200 + 150?$$

Não! Se quisermos fazer operações envolvendo quantias recebidas e/ou pagas em diferentes momentos do tempo temos de exprimir todos esses montantes em unidades de dinheiro que sejam realmente equivalentes.

⇒ Ou seja, temos de calcular o valor de todas as quantias no mesmo momento do tempo:

$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow V_0 = C_0 = 100 + 200/(1+i) + 150/(1+i)^2$$

$$\text{No momento } t+2 \text{ (com } t = 0) \text{ teremos (capitalização)} \Rightarrow V_{n=2} = 100 (1+i)^2 + 200 (1+i) + 150$$

- A **taxa de juro** para um certo período de tempo é o preço de utilizar uma unidade monetária durante esse período de tempo.

❑ Importância da variável taxa de juro

- representa o valor de mercado do dinheiro
- valor ao qual os credores estão dispostos a emprestar dinheiro ou os devedores estão dispostos a pedir emprestado dinheiro

❑ Por vezes o período de determinação dos juros não coincide com o período da taxa. Normalmente, o sistema financeiro indica taxa anual, mas o período de contabilização dos juros é diferente de um ano: semestral, quadrimestral, trimestral, mensal, diário.

❑ Conceitos a abordar:

1. Taxas proporcionais
2. Taxas equivalentes
3. Taxas efetivas e taxas nominais
4. Taxas correntes e reais (*quando a taxa de inflação está a ser considerada ou não, respetivamente*)
5. Taxas ilíquidas e líquidas (*quando estão incluídos ou excluídos os impostos sobre o juro*)
6. Outros conceitos de taxas

1. Taxas proporcionais

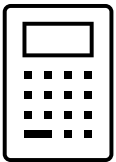
- Em **regime de juro simples**, quando se relacionam taxas apenas se pode falar em taxas proporcionais.
- Duas taxas dizem-se **proporcionais** (efetivas) quando, sendo de períodos diferentes, existe entre elas a mesma relação de valor que existe entre os seus períodos:

$$i_k = \frac{i_m^k}{m} \Leftrightarrow i_m^k = i_k \times m$$

m = nº de períodos no ano (periodicidade da taxa)

k = A, S, T, Q, M,... (A = anual; S = Semestral; T = trimestral; Q = quadrimestral; M = mensal)

indica o período k da taxa



- **Exemplo:** Considere uma taxa anual e uma taxa trimestral

- Relação entre períodos: 4 para 1

- Taxa anual = $i_m^k = 8\% \Rightarrow$ taxa trimestral = $i_k = \frac{i_m^k}{m} = \frac{8\%}{4} = 2\%$

**Regra da
proporcionalidade**

2. Taxas equivalentes

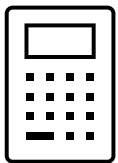
- Usadas em **regime de juro composto**
- Não é possível aplicar diretamente as taxas proporcionais em regime de juro composto, dado que estas não consideram o processo de capitalização de juros de juros
- Duas taxas dizem-se **equivalentes** quando, sendo relativas a períodos diferentes, aplicadas durante o mesmo prazo e ao mesmo capital, produzem um valor acumulado (ou atualizado) igual, em regime de juro composto:

$$i_L = (1 + i_k)^m - 1 \Leftrightarrow i_k = (1 + i_L)^{1/m} - 1$$

i_k a taxa efetiva de período menor

i_L a taxa efetiva de período maior

m a variável que traduz a relação entre as taxas ($m = n^\circ$ meses período maior / n° meses período menor; se em meses); $L = A, S, T, Q, M, \dots$



○ Exemplo:

- $i_S = 10\%$ semestral (S); i anual = ?
- $i_A = (1 + 0,1)^{12/6} - 1 = 0.21 \Rightarrow 21\%$

Regra da equivalência

3. Taxas efetivas e taxas nominais

Na prática comercial é frequente usar taxas anuais proporcionais para períodos de juros <1 ano, distinguindo-se pelo facto da taxa refletir ou não a existência de juros de juros

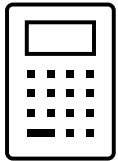
❑ **Efetiva:** considera o efeito de capitalizações sucessivas. Apenas se faz referência a 1 período (taxa anual, taxa semestral,...). O período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida: “25% ao semestre com capitalização semestral”. **Usualmente esta é a taxa aplicável.**

❑ **Nominal:** o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida: “34% ao ano com capitalização mensal”. Há sempre 2 períodos indicados: o da taxa e o de cálculo dos juros; taxa anual convertível semestralmente: ano = período da taxa; semestre = período de cálculo dos juros.

❑ **Formulação:** Para qualquer taxa efetiva, pode apresentar-se a seguinte expressão:

$$i_L = \left(1 + \frac{i_m^k}{m}\right)^m - 1 \quad \text{e, invertendo a equação:} \quad i_m^k = \left[(1 + i_L)^{1/m} - 1\right] \times m \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} i_L - \text{taxa efetiva} \\ i_m^k - \text{taxa nominal} \end{array}$$

$\frac{i_m^k}{m}$ - taxa nominal do período k [anual (A), semestral (S), ...] com capitalização m (semestral=2, se k=ano; trimestral=4 se k=ano)



Exemplo 1:

Um investidor efetuou um **depósito a prazo** de um ano com juros trimestrais.

A taxa indicada pelo banco é de 4% ao ano com cálculo de juros trimestrais.

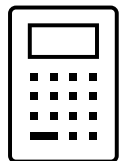
Ou seja, **taxa de juro nominal** \Rightarrow taxa nominal anual convertível trimestralmente.

Apesar da taxa de juro indicada ser a anual, os juros são calculados por trimestre, com base na taxa trimestral proporcional à taxa nominal anual de 4%. O rendimento será efetivamente de 1% ao trimestre

- A taxa efetiva trimestral será: $i_T = 4\% / 4 = 1\%$
- De acordo com a fórmula de equivalência de taxas:
- Taxa anual efetiva será: $i_A = (1+0,01)^4 - 1 = 0,040604 \Rightarrow 4,0604\%$

(A – Anual; T – Trimestral)

3. Taxas efetivas e taxas nominais – exemplo



Exemplo 2:

Se uma conta poupança paga uma taxa de juro anual de 10%, um depósito de 100€ transformar-se-á num valor de 110€ ao fim de 1 ano.

Contudo, se a capitalização do juro for semestral em vez de anual, a conta de poupança proporcionará uma taxa de juro de 5% em cada semestre.

Utilizando a **relação de proporcionalidade** do tempo (1 ano=2 semestres), conseguimos transformar taxas nominais em taxas efetivas, ou seja,

Taxa de juro nominal anual = 10% → Taxa de juro efetiva semestral = $10\%/2 = 5\%$

Portanto, o montante que irá existir na conta poupanças com capitalização semestral ao fim de um ano será:

$$100 (1 + 0.05)^2 = 110,25\text{€}$$

Concluindo, o depósito inicial crescerá, efetivamente a uma taxa de juro anual de 10.25% em vez de 10%, efeito da capitalização semestral, que pode ser obtida assim: $i_A = (1+0,05)^2 - 1 = 0,1025$ pela **relação de equivalência**.

4. Taxas correntes e taxas reais

Taxas correntes /reais: distinção tem a ver com o facto de a taxa refletir ou não o efeito da inflação

A fórmula de cálculo é:

Taxa de juro real = taxa de juro nominal - inflação

Exemplo:

Se depositarmos 1000€ numa conta bancária, para receber uma taxa de juro nominal de 2,5%, no prazo de um ano obtém-se 1025€.

Mas, se os preços aumentarem 3%, precisamos de 1030€ para comprar os mesmos bens ou serviços que, um ano antes, teríamos adquirido por 1000€.

⇒ A rentabilidade real será de -0,5%. Esta é a taxa de juro real, que é calculada subtraindo a taxa de inflação (3%) à taxa de juro nominal (2,5%).

Taxas ilíquidas/líquidas – a distinção tem a ver com o facto de a taxa refletir ou não a existência de impostos sobre juros (efeito da fiscalidade)

- **Taxa ilíquida** ou bruta é a taxa que não leva em consideração o efeito fiscal
- **Taxa líquida:** contempla o efeito fiscal, ou seja, o valor que efetivamente recebemos numa aplicação financeira: $i_{liq} = (1 - t_{imp}) \cdot i_{iliq}$

4. Outros conceitos de taxas

Spread:

Diferença entre a taxa ativa (ex. empréstimos concedidos) e a taxa passiva (ex. depósitos).

Por regra superior a zero, uma vez que normalmente as instituições financeiras (IF) remuneram os depósitos a taxas inferiores às aquelas que obtêm quando concedem empréstimos, obtendo uma margem de lucro pelo diferencial das taxas

O termo *spread* também pode ser usado como o acréscimo que as IF aplicam a uma determinada taxa de referência para obter a taxa de juro que será utilizada numa determinada operação bancária (ex. crédito à habitação de taxa indexada, empréstimos bancários de empresas, etc.).

Euribor:

A designação *Euribor* é o acrónimo de *Euro Interbank Offered Rate*, que traduz uma média das taxas de juros às quais os principais bancos que operam na Zona Euro trocam euros entre si. Período de referência a 1, 3, 6 ou 12 meses.

Ou seja, simplificadamente: **Taxa de juro a contratualizar = Spread + Euribor**

- ❑ De forma a financiar investimentos, as empresas podem recorrer a uma fonte de capital alheio, como é o caso dos **empréstimos bancários** (*outras formas de financiamento alheio, como obrigações, não serão abordadas por simplificação nesta UC*).
- ❑ A liquidação desses empréstimos pressupõe o pagamento de **prestações**. Estas dividem-se em:
 - amortização do capital (m), correspondente ao reembolso do capital pedido
 - pagamento de juros (j), no decorrer da duração do empréstimo
- ❑ Em empréstimos apenas falamos de regime de juros compostos (RJC)

A combinação de diferentes alternativas de:

- **Pagamento de juros:** único no final, único no início, ao longo do empréstimo,
- **Reembolso do capital:** único no final, em prestações (diversos pagamentos escalonados ao longo do prazo = reembolso a prestações)

Ficamos com 6 modalidades possíveis de liquidação de empréstimos:

- **Modalidade 1** – Reembolso do capital e juros pagos de uma só vez no final do empréstimo
- **Modalidade 2** – Reembolso do capital de uma só vez e juros pagos no início do empréstimo
- **Modalidade 3** – Reembolso do capital de uma só vez e juros pagos ao longo do prazo do empréstimo
- **Modalidade 4** – Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos no início do empréstimo
- **Modalidade 5** – Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos no final do empréstimo
- **Modalidade 6** – Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos ao longo do prazo do empréstimo. É a mais utilizada em empréstimos e podemos ter:

Foco nesta UC:
Modalidade 6 /
opção 2

- (1) O valor do reembolso do capital é constante em cada período;
- (2) O valor da prestação total (reembolso do capital + juros) é constante em cada período => Sistema francês de quotas constantes, mais usual em Portugal e que será o nosso foco nesta UC

Nota: O empréstimo também pode considerar períodos de carência, com impacto no cálculo na amortização do empréstimo (não aprofundado nesta UC).

Modalidade 6 – Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos ao longo do prazo do empréstimo

2) Prestações (Capital e juros) constantes *(mais frequente nos empréstimos à habitação)*

Neste caso consideramos que:

- Os juros são pagos ao longo do prazo do empréstimo
- O reembolso do capital é efetuado ao longo do prazo do empréstimo
- O valor da prestação total é constante em cada período

Quadro de Amortização de Empréstimos (Prestações Constantes (Capital + Juros))						
Período (t)	Capital em Dívida no início (C_{t-1})	Juro a pagar no fim do período (j_t)	Prestação (pt)	Amortizaçã o no final do período (m_t)	Amortizações Acumuladas (M_t)	Capital em dívida no final (C_t)
1	C_0	j_1	p	m_1	M_1	C_1
2	C_1	j_2	p	m_2	M_2	C_2
3	C_2	j_3	p	m_3	M_3	C_3
...
n	$C_{n-1} = m_n$	j_n	p	m_n	M_n	C_n

- Notas:**
- j é muito elevado no início e diminui depois, porque C_0 é mais elevado que C_t
 - m é baixo no início e vai aumentando para compensar

Modalidade 6 – Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos ao longo do prazo do empréstimo

2) Prestações (Capital e juros) constantes (cont)

a) Cada uma das **prestações** p abrange uma parte (\underline{m}_t) destinada ao reembolso do capital e outra ao pagamento dos juros do período (j_t) : $p = m_t + j_t$

b) Os valores de **reembolso de capital** de períodos sucessivos variam segundo uma progressão geométrica de razão $(1+i)$; então: $m_t = m_{t-1} (1+i)$, o que permite calcular o valor de um qualquer reembolso no período t a partir de outro reembolso. Como: $m_2 = m_1 (1+i)$; $m_3 = m_2 (1+i) = m_1 (1+i)^2$; etc; ou seja: $m_t = m_1 (1+i)^{t-1}$

c) Isto também permite calcular o valor inicial do empréstimo a partir do valor do 1º reembolso, fazendo:

$$C = m_1 [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}], \text{ ou seja, } C = m_1 \cdot s_{n|i}$$

d) Se pretendermos determinar o valor do primeiro reembolso podemos utilizar a expressão:

$$m_1 = C (1 / s_{n|i}) = C / [((1+i)^n - 1) / i]$$

e) O valor em dívida em cada período é função das prestações vencidas, ou seja, prestações que ainda não venceram.

Se considerarmos que está previsto o pagamento de um empréstimo através de n prestações constantes, pode-se determinar o valor em dívida num determinado momento t através da expressão: $C_t = p \cdot a_{n-t|i} = p \cdot [(1 - (1+i)^{-(n-t)}) / i]$



Exemplo:

A Empresa 2COOL SA comprou um equipamento por 80.000€, tendo para tal, recorrido a um financiamento bancário na totalidade do valor. Ao sair do banco com o quadro de amortização do empréstimo que lhe foi proposto, o Eng. Silva responsável pela área de produção deparou-se com o facto de que a impressora tinha falhado e não deixou que todos os valores saíssem no papel. Ajude-o a preencher o mesmo (preencha todos os espaços em branco), com base nos dados disponíveis:

Período carência 1 ano
Taxa de juro anual efetiva ... %

Ano	Capital em dívida no início do período C_0	Juro do período j_t	Amortização do capital do período $m_t = p_t - j_t$	Prestação do período p_t	Capital dívida no final do período $C_t = C_{t-1} - m_t$
1	80 000	4 664	0	4 664	80 000
2	80 000	4 664	14 240	18 904	65 760
3	65 760	3 834	15 070	18 904	50 690
4	50 690	2 955	15 949	18 904	34 741
5	34 741	2 025	16 879	18 904	17 863
6	17 863	1 041	17 863	18 904	0

Cálculos auxiliares:

Empréstimo 80 000,00

Taxa de juro: 5,83%

Prestação: 18 903,97

(...)



Interligando o exercício anterior com o capítulo 1.3:

De que forma ficaria refletido na Demonstração de Resultados, Balanço e Mapa de Tesouraria o 1.º ano de movimentos, assumindo uma taxa de depreciação do equipamento de 10% e uma taxa de imposto (IRC) de 25%. Neste primeiro ano, a empresa conseguiu atingir um volume de vendas de 100 mil euros que já foi recebido.

Demonstração de resultados	Balanço	Mapa de Tesouraria
Vendas	Ativo	Atividades operacionais
100 000	167 336	
Custo da Mercadoria Vendida	Ativo fixo tangível	Recebimento de Clientes
(...)	72 000	100 000
Depreciações do exercício	(...)	
-8 000	Clientes	Atividades de financiamento
Encargos financeiros	Depósitos bancários	Recebimento de financiamento
-4 664	95 336	80 000
Resultado antes de imposto	65 502	Pagamento de juros
87 336	Capital próprio	-4 664
Imposto	Capital social	
21 834	(...)	Atividades de investimento
Resultado líquido	Resultado líquido	Pagamento do ativo fixo (equipamento)
65 502	65 502	-80 000
	Passivo	
	101 834	Cash no início do ano
	Empréstimos bancários	0
	80 000	Cash no final do ano
	Imposto a pagar	95 336
	21 834	
	(...)	
	Ativo = Passivo + Capital próprio	
	0	