

GUIÃO 06 – PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

1 – Números de Delannoy

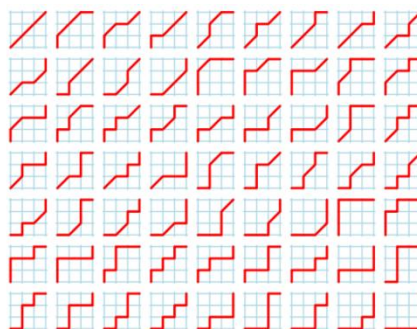
Os números de Delannoy representam o número de caminhos definidos numa grelha, desde o canto inferior esquerdo – posição (0, 0) – até qualquer outra posição (m, n), sendo permitidos apenas movimentos para cima (N), para a direita (E) ou na diagonal (NE).

As figuras seguintes apresentam os caminhos que é possível definir até às posições (1, 1), (2, 2) e (3, 3).

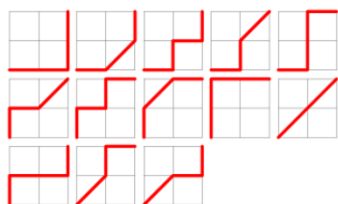
D(1,1)



D(3,3)



D(2,2)



[Mathworld]

[Wikipedia]

Os números de Delannoy são definidos pela seguinte relação de recorrência:

$$D(m, n) = 1, \text{ se } m = 0 \text{ ou } n = 0$$

$$D(m, n) = D(m - 1, n) + D(m - 1, n - 1) + D(m, n - 1)$$

Tarefas

- Implemente uma **função recursiva**, para calcular o número de Delannoy $D(m, n)$.
- Qual é o **maior número $D(k, k)$** que consegue determinar em tempo útil, usando o seu computador?
- Implemente uma **função iterativa**, usando **Programação Dinâmica** e um **array 2D local**, para calcular o número de Delannoy $D(m, n)$.
- Implemente uma **função recursiva**, usando **memoization** e um **array 2D global**, para calcular o número de Delannoy $D(m, n)$.
- Para analisar o esforço computacional requerido por cada uma das funções, construa uma tabela como a da figura seguinte e conte o **número de adições realizadas** para calcular cada um dos seus elementos. Classifique as funções de acordo com a sua **ordem de complexidade**.

Delannoy's Matrix - Recursive Function

| | | | | | | | | | | |
|---|----|-----|------|------|-------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| 1 | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 | 145 | 181 | 221 |
| 1 | 7 | 25 | 63 | 129 | 231 | 377 | 575 | 833 | 1159 | 1561 |
| 1 | 9 | 41 | 129 | 321 | 681 | 1289 | 2241 | 3649 | 5641 | 8361 |
| 1 | 11 | 61 | 231 | 681 | 1683 | 3653 | 7183 | 13073 | 22363 | 36365 |
| 1 | 13 | 85 | 377 | 1289 | 3653 | 8989 | 19825 | 40081 | 75517 | 134245 |
| 1 | 15 | 113 | 575 | 2241 | 7183 | 19825 | 48639 | 108545 | 224143 | 433905 |
| 1 | 17 | 145 | 833 | 3649 | 13073 | 40081 | 108545 | 265729 | 598417 | 1256465 |
| 1 | 19 | 181 | 1159 | 5641 | 22363 | 75517 | 224143 | 598417 | 1462563 | 3317445 |
| 1 | 21 | 221 | 1561 | 8361 | 36365 | 134245 | 433905 | 1256465 | 3317445 | 8097453 |

2 – O Problema da Fileira de Moedas (“The Coin Row Problem”)

Seja dada uma sequência de **n moedas** de **valores inteiros** – c_1, c_2, \dots, c_n –, com possíveis repetições.

Pretende-se resolver o seguinte problema de otimização combinatória:

- determinar o **valor de um subconjunto de moedas com o maior valor total**, com a **restrição** de que esse subconjunto **não contém moedas que sejam adjacentes na sequência** dada.

Note que podem ocorrer mais do que um subconjunto de moedas com o valor ótimo (i.e., máximo), que são designados soluções ótimas equivalentes.

Para uma sequência de n moedas, o **valor de uma solução ótima** pode ser determinado pela seguinte relação de recorrência, em que $V(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, representa o valor de uma solução ótima considerando apenas as **primeiras i moedas**.

$$V(0) = 0$$

$$V(1) = c_1$$

$$V(n) = \max \{ c_n + V(n-2), V(n-1) \}, \text{ para } n > 1$$

Tarefas

- Considere a sequência de moedas de valor **5, 1, 2, 10, 6, 2**. Calcule manualmente o valor da correspondente **solução ótima**.
- Implemente uma **função recursiva** que, dada uma sequência de n moedas, cujos valores estão armazenados num array, calcula o valor $V(n)$ de uma sua solução ótima.
- Qual é o **tamanho da maior sequência** que consegue processar em tempo útil, usando o seu computador?
- Implemente uma **função iterativa**, usando **Programação Dinâmica** e um **array local**, para calcular o valor $V(n)$ de uma solução ótima para uma sequência de n moedas.
- Implemente uma **função recursiva**, usando **memoization** e um **array global**, para calcular o valor $V(n)$ de uma solução ótima para uma sequência de n moedas.
- Para analisar o esforço computacional requerido por cada uma das funções, conte o **número de comparações realizadas** para determinar o valor da solução ótima, para sequências de moedas sucessivamente mais longas. Classifique as funções de acordo com a sua **ordem de complexidade**.

Tarefa adicional

- Para a função iterativa que usa **Programação Dinâmica**, desenvolva uma estratégia que, além de determinar o valor de uma solução ótima, **identifique as moedas** que constituem essa solução.