1. Uma urna contém N bolas, N conhecido, das quais θ são brancas e $N - \theta$ são verdes, θ desconhecido. Considere o experimento que consiste em retirar $n < N$ bolas, uma a uma, da urna, SEM reposição. Seja $X_i = 1$ se a i-ésima bola extraída da urna é branca e $X_i = 0$, caso contrário, $i = 1, ..., n$. Suponha, a priori, que θ é distribuído segundo o modelo uniforme sobre o conjunto $\{0, 1, ..., N\}$.

a) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = 1, X_2 = 1, ..., X_{n-1} = 1, X_n = 0$.

b) Obtenha a posteriori de θ dado $X_1 + X_2 + ... + X_n = n - 1$.

c) Obtenha a posteriori de θ dado $X_1 = 1, X_2 = 1, ..., X_j = 1, X_{j+1} = 0, ..., X_n = 0$.

d) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 + X_2 + ... + X_n = j$.

2. Refaça o exercício anterior, considerando, a priori, que θ é distribuído segundo o modelo binomial (N, p), $0 < p < 1$. No item (d), mostre que a distribuição a posteriori do número de bolas brancas dentre as $N - n$ bolas remanescentes na urna é binomial. Quais os parâmetros dessa distribuição?

3. Refaça o exercício 1, considerando, a priori, que θ é distribuído segundo o modelo hipergeométrico de parâmetros A, B e N, com $A + B \geq N$. No item (d), mostre que a distribuição a posteriori do número de bolas brancas dentre as $N-n$ bolas remanescentes na urna é hipergeométrica de parâmetros $A - j$, $B - (n - j)$ e $N - n$.

4. Uma urna contém θ bolas, numeradas de 1 a θ, $\theta \in \{2, 3, 4, 5\}$. Uma bola é extraída da urna “ao acaso”. Seja X o número da bola retirada. Considere, a priori, θ é distribuído segundo o modelo uniforme sobre $\{2, 3, 4, 5\}$. Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X = 3$. Qual seria a distribuição a posteriori de θ dado $X = 5$?

5. Uma urna contém θ bolas, numeradas de 1 a θ, $\theta \in \{2, 3, ..., 100\}$. Duas bolas são retiradas SEM reposição da urna. Seja X_i o número da i-ésima bola extraída da urna, $i = 1, 2$. Considere, a priori, θ distribuído segundo o modelo uniforme sobre $\{2, 3, ..., 100\}$.

a) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = 16$ e $X_2 = 4$.

b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = 4$ e $X_2 = 16$.

c) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $\max\{X_1, X_2\} = 16$.

6. Uma urna contém θ bolas, numeradas de 1 a θ, $\theta \in \{k, k+1, ...\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ conhecido. Considere o experimento que consiste em retirar n bolas, $n < k$, uma a uma, da urna, SEM reposição. Seja X_i o número da i-ésima bola extraída da urna, $i = 1, ...n$. Mostre que para qualquer distribuição a priori para θ, a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ coincide com a distribuição a posteriori de θ dado $\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

7. Uma urna contém 5 bolas, das quais θ_1 são brancas, θ_2 são verdes e $5 - \theta_1 - \theta_2$ são amarelas. Duas bolas são retiradas, uma a uma, SEM reposição da urna. Seja $X_i = (1, 0, 0)$, se a i-ésima bola retirada da urna é branca, $X_i = (0, 1, 0)$, se é verde, e $X_i = (0, 0, 1)$ se é amarela, $i = 1, 2$. Suponha que $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ é distribuído, a priori, segundo o modelo uniforme no espaço paramétrico $\Theta = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 : u + v \leq 5\}$.

a) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = X_2 = (1, 0, 0)$.

b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = (0, 0, 1)$ e $X_2 = (1, 0, 0)$.

c) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X_1 = (1, 0, 0)$ e $X_2 = (0, 0, 1)$.

8. Suponha que a proporção de itens defeituosos em um grande lote produzido, θ, é $0,1$ ou $0,2$. Suponha ainda que, a priori, $\mathbb{P}(\theta = 0,1) = 0,6$ e $\mathbb{P}(\theta = 0,2) = 0,4$. Seis itens são selecionados ao acaso do lote e inspecionados. Seja $X_i = 1$ se o i-ésimo item inspecionado é defeituoso e $X_i = 0$, caso contrário, $i = 1, ..., 6$.

a) Obtenha a posteriori de θ dado $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0$.

b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $\sum_{i=1}^{6} X_i = 2$.

9. Considere novamente as condições do exercício 8. Suponha que n itens são selecionados ao acaso do lote e inspecionados. Seja $X_i = 1$ se o i-ésimo item inspecionado é defeituoso e $X_i = 0$, caso contrário, $i = 1, ..., n$.

a) Obtenha a posteriori de θ dado $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$.

b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

c) Sob quais condições sobre $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n$ vale $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta = \frac{1}{10} | \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) = 1$ onde $\bar{x}_n = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.

10. Considere $\Theta = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Suponha que X, dado $\theta = i$, seja uniformemente distribuída no conjunto $\{i, i+1, i+2\}$. Suponha, a priori, que $\theta \sim Poisson(\lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$. Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X = x$, $x = 0, 1, 2, ...$

11. Considere novamente o problema do avião desaparecido visto em aula. Considere agora que $\Theta = \{1, 2, 3, ...k\}$. Seja p_i a probabilidade a priori do avião estar na região i, $i = 1, 2, ..., k$. Seja α_i a probabilidade de uma busca na região i ser malsucedida quando, de fato, o avião desapareceu naquela região, $i = 1, 2, ..., k$.

a) Obtenha a distribuição a posteriori de θ se uma busca na região 1 é malsucedida. Para $i, j \neq 1$, $i \neq j$, compare a razão entre as probabilidades a posteriori de $\theta = i$ e

$\theta = j$ com a correspondente razão de probabilidades a priori.

b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ sabendo que m buscas, uma na região 1, uma na região 2,..., uma na região m, $m < k$, foram todas malsucedidas. (Observação: Suponha que buscas sucessivas malsucedidas não alteram as probabilidades de novas buscas malsucedidas)

12. Considere $\Theta = \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$. Suponha que X, dado $\theta = i$, seja uniformemente distribuída no conjunto $\{1, ..., i\}$. Suponha, a priori, que $\mathbb{P}(\theta = i) = i(1-p)^2 p^{i-1} \mathbb{I}_{\{1,2,...\}}(i)$. Obtenha a distribuição a posteriori de θ dado $X = x$, $x = 1, 2, ...$ Qual é a distribuição de $\theta - x$ dado $X = x$?

13. Refaça os exercícios 1, 2 e 3, considerando que a urna contém N bolas, das quais θ_1 são da cor 1, θ_2 são da cor 2, ..., θ_k são da cor k e $N - \sum_{i=1}^{k} \theta_i$ são da cor $k+1$. Especifique, nesse caso, espaço paramétrico, espaço amostral e distribuições a priori e a posteriori para o parâmetro de interesse $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

14. Classifique cada um dos itens a seguir em verdadeiro ou falso, justificando.

a) Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Então X_1 e X_2 são permutáveis.

b) Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias permutáveis. Então o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 é não-negativo.

c) Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias permutáveis. Então (X_i, X_j), $i \neq j$, possui a mesma distribuição que (X_1, X_2).

d) Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias de Bernoulli permutáveis. Então a distribuição condicional de $X_1, ..., X_n$ dado $\sum_{i=1}^{n} X_i = t$, $t \in \{0, 1, ..., n\}$, é uniforme no conjunto $\{(u_1, ..., u_n) \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^{n} u_i = t\}$.

e) Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias de Bernoulli permutáveis. Então o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 é não-negativo.