Departamento de Economia/PUC-Rio **2022.1**
Estatística e Ciência de Dados

Lista 1

1. Sejam A, B, C e D eventos de um espaço amostral Ω, com $P(A) = P(B) = 0.01$, e $P(C) = P(D) = 0.99$.

   (a) Prove que $P(A \cup B) \leq 0.02$.

   (b) Prove que $P(C \cap D) \geq 0.98$.

   (c) O que você pode dizer sobre $P(A \cap B)$ e $P(C \cup D)$?

2. Sejam A, B e $A_1, A_2, \ldots$ eventos num espaço amostral, com $A_n \nearrow A$, e $P(A) = 1$. Prove que $P(A_n \cap B) \to P(B)$.

3. Considere a seguinte sequência de eventos sobre o espaço amostral $\Omega = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$:

$$A_1 = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}, \qquad A_2 = \{0, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\},$$

$$A_3 = \{1/3, 1/4, \ldots\}, \qquad A_4 = \{0, 1/4, \ldots\}, \ldots$$

   (formalmente, $A_n = \{1/k : k \geq n\}$ se n for ímpar, e se n for par, $A_n = \{1/k : k \geq n\} \cup \{0\}$).

   (a) Essa sequência de eventos *quase* converge monotonicamente...: mostre que $\bigcap_n A_n = \emptyset$, mas não $A_n \searrow \emptyset$.

   (b) ... mas *quase* não basta para convergência no vazio: prove, por meio de um exemplo, que não necessariamente $P(A_n) \to 0$. (Dica: *quase* qualquer exemplo funciona.)

4. Considere o espaço amostral $\Omega = [0, 1]$ (ou seja, ω é um número real entre zero e um). Para intervalos fechados $A = [a, b] \subset \Omega$, definimos $P(A) = b - a$.

   (a) Você acredita que uma função definida dessa forma pode ser um probabilidade? (Ela pode atender os axiomas de Kolmogorov?)

   (b) Qual deve ser o valor de $P((a, b))$ (ou seja, a probabilidade de um intervalo aberto) para respeitar os axiomas?

(c) Eu fiquei confuso: eu achava que a resposta do item a era “sim”, mas estudando melhor essa função, descobri que $P(\{a\}) = 0$, para todo ponto a; como todo conjunto é a união (disjunta) de seus pontos, $P(A)$ deveria ser uma soma de zeros, que dá 0!

Esclareça essa situação: Conclua que P não é uma probabilidade OU aponte o erro no raciocínio do parágrafo anterior.

5. Mostre que para um evento B dado com $P(B) > 0$, a função $Q : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida como $Q(A) = P(A|B)$ satisfaz todos os axiomas de probabilidade.

   Mostre que, para um evento A dado, a função $R : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida como $R(B) = P(A|B)$ não os satisfaz.

6. Em sala, vimos um exemplo em que 3 eventos A, B e C são independentes 2 a 2, mas não mutuamente independentes.

   (a) Apresente um exemplo em que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B \cap C) = 1/8$, mas A e B não são independentes. (Portanto, independência “3 a 3” não implica 2 a 2.)

   (b) No exemplo visto em classe, $P(A \cap B \cap C) > P(A)P(B)P(C)$. Apresente um outro exemplo em que A, B e C são independentes 2 a 2, mas não mutuamente independentes por que $P(A \cap B \cap C) < P(A)P(B)P(C)$.

7. (Barry James) No jogo de “craps” dois dados são jogados. Se a soma dos pontos for 7 ou 11 o jogador vence. Se for 2, 3 ou 12 ele perde. Nos outros casos ele joga o dado novamente até sair 7, caso em que ele perde, ou o primeiro resultado, caso em que ele ganha. Qual a probabilidade dele ganhar?

8. (Nessa questão você pode supor que a probabilidade de uma criança ser do sexo masculino é 50% e que a determinação do sexo de dois irmãos são eventos independentes.)

   (a) Eu sou pai de duas crianças. Meu filho mais velho é um menino. Com base nessas informações, qual a probabilidade dos dois serem meninos?

   (b) Eu sou pai de duas crianças. Um deles é um menino. Com base nessas informações, qual a probabilidade dos dois serem meninos?