Funções Inversas

No primeiro capítulo vimos que uma função é caracterizada pelo seu domínio, contradomínio e uma lei de formação que associa a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio. Certas funções possuem ainda a propriedade de que cada elemento do contradomínio se encontrar associado a um único elemento do domínio, isto é, ele é imagem de um único elemento do domínio. Essas funções têm um papel muito importante na matemática e são denominadas *funções inversíveis*.

Definição 10.1

Diz-se que uma função $f: D \to C$ é inversível se a cada elemento y do contradomínio C estiver associado um único elemento x do domínio D, tal que $y = f(x)$.

Podemos, então, pensar em definir outra função $g: C \to D$, que a cada y em D associe o único elemento x em C que é o associado a y por f, ou seja:

$$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

A função g é chamada de função inversa de f. Podemos dizer que g desfaz a ação de f sobre x. Será f a inversa de g? É claro que sim, e podemos pensar também que f desfaz a ação de g.

Do exposto, podemos concluir que se f é uma função inversível, com domínio D e contradomínio C, e se g é a sua inversa, então

$$g\big(f(x)\big) = x, \forall x \in D \ \text{ e } \ f\big(g(y)\big) = y, \forall y \in C.$$

Uma função inversível possui também as propriedades:

1) a imagem de f, denotada por Imf, coincide com o seu contradomínio, ou seja, $Imf = C$. Uma função que possui esta propriedade é denominada *função sobrejetora*;

2) um elemento do contradomínio corresponde-se, no máximo, com um único elemento do domínio, ou seja, se x_1 e x_2 são elementos diferentes do domínio então $f(x_1)$ é também diferente de $f(x_2)$. Este fato é expresso, equivalentemente, por uma das sentenças matemáticas:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \ ou \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Uma função que possui a propriedade 2) é denominada *função injetora*.

Você pode concluir, então, que uma função $y = f(x)$ é inversível se e somente se ela é injetora e sobrejetora. Uma função injetora e sobrejetora é denominada *função bijetora.*

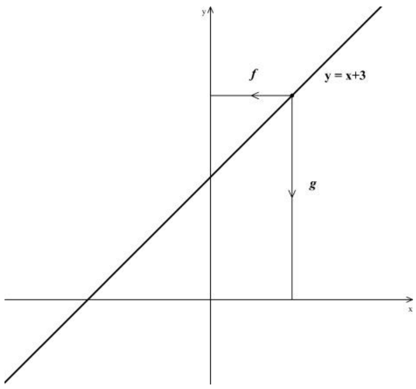
Exemplo 10.1

A função dada por $y = x + 3$, com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ é inversível, pois:

a) a cada $y \in \mathbb{R}$, está associado o único elemento $x = y - 3 \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = f(y - 3) = y.$$

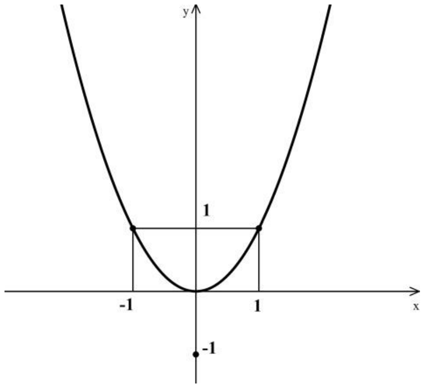
b) para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ teremos $x_1 + 3 \neq x_3 + 3$ e, portanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$.



A função dada é uma função bijetora, como foi mostrado por a) e b), tem seu gráfico exibido ao lado.

Exemplo 10.2

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.



A função, cujo gráfico encontra-se ao lado, não é inversível, pois, nem todo elemento $y \in \mathbb{R}$ é imagem de algum elemento do domínio. Por exemplo, $y = -1$ não é imagem de nenhum elemento, pois não existe x real tal que $x^2 = -1$. Desta forma, a função não sobrejetora. Também, $y = f(x)$ não é injetora, pois $1 = f(1) = f(-1)$, isto é, 1 é imagem de dois elementos do domínio.

Exemplo 10.3

A função $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ não é inversível, apesar de ser injetora.

No Exemplo 10.3 a função dada não e inversível porque a Imf é diferente do contradomínio. Para evitar isto basta retirarmos do contradomínio os elementos que não fazem parte da imagem e teremos, como consequência, a sobrejetividade. Desta forma a função $g: [0, \infty[\to [0, \infty[$, dada por $g(x) = x^2$ é inversível.

Sempre que a função $f: D \to C$ for injetora, a função $g: D \to Imf$, dada por $g(x) = f(x)$ é inversível. Nosso estudo se restringirá a funções deste tipo.

Definição 10.2

Dizemos que $f: D \to C$ é uma função inversível na Imf, se a função $g: D \to Imf$ tal que $f(x) = g(x), \forall x \in D$, for inversível.

Para que f seja inversível na imagem, basta que ela seja injetora, pois a sobrejetividade está garantida pela restrição do contradomínio.

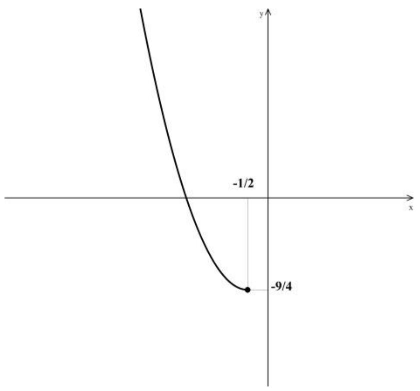
Exemplo 10.4

A função

$$f(x) = x^2 + x - 2, x \leq -\frac{1}{2}$$

é inversível na Imf.

De fato, o gráfico de f é um ramo da parábola $f(x) = x^2 + x - 2$ com vértice em $(-1/2, -9/4)$.



Pelo gráfico, ao lado, notamos facilmente que a função é injetora. Basta verificarmos que uma reta horizontal por qualquer ponto do gráfico só o corta neste ponto.

Verifiquemos agora, algebricamente, o fato descrito anteriormente. Mostraremos que se $f(x_1) = f(x_2)$, devermos ter $x_1 = x_2$, Sejam, então, x_1 e x_2 tais que $x_1 \leq -1/2$, $x_2 \leq -1/2$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

Assim

$$x_1{}^2 + x_1 - 2 = x_2{}^2 + x_2 - 2 \Rightarrow x_1{}^2 + x_1 = x_2{}^2 + x_2$$

ou

$$x_1{}^2 - x_2{}^2 + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0$$

e, finalmente,

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

Para isto acontecer devemos ter: $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 + 1 = 0$.

Se $x_1 + x_2 + 1 = 0$, segue-se que $x_1 + 1 = -x_2$ e como:

$$x_2 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -x_2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 + 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \geq -\frac{1}{2}.$$

Neste caso, forçosamente, teremos $x_1 = -1/2$ e, em consequência, $x_2 = -1/2$. Noutra situação, teríamos $x_1 + x_2 + 1 \neq 0$, o que obrigaria $x_1 - x_2 = 0$, resultando, imediatamente, $x_1 = x_2$.

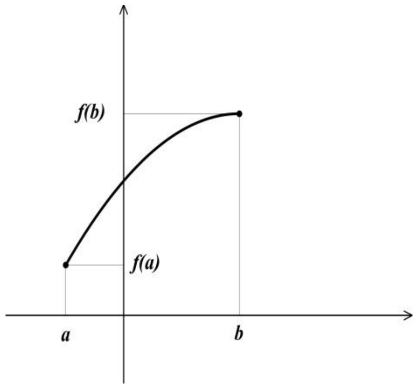
10.1 Inversa de função derivável

Verificar se uma função é injetora, às vezes, é trabalhoso, como pudemos ver no exemplo anterior. Este trabalho será reduzido se nos restringirmos ao estudo das funções deriváveis. Nosso conhecimento de Cálculo terá aqui um papel muito importante. Obteremos através dele um meio simples de caracterizar a existência da inversa de uma função derivável. Esse método prático será dado nos Teoremas 10.1 e 10.2

Teorema 10.1

Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável com $f'(x) > 0$ em $]a, b[$, então f é inversível em $[f(a), f(b)]$.

Demonstração:



Se $f'(x) > 0$, para $\forall x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a. b]$ e, portanto, f é injetora em $[a. b]$ (por quê?). Resta mostrar que $Imf = [f(a), f(b)]$.

Do fato de f ser estritamente crescente, $f(a)$ e $f(b)$ são, respectivamente, o mínimo e o máximo absoluto de f em $[a, b]$. Além disso, como f é contínua em $[a, b]$ ela assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ (Teorema do Valor Intermediário).

De maneira semelhante podemos demonstrar o teorema seguinte, cuja demonstração será deixada para o leitor.

Teorema 10.3

Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável com $f'(x) < 0$ em $]a, b[$, então f é inversível em $[f(b), f(a)]$.

Exemplo 10.5

Vamos verificar se a função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

definida no intervalo $[0,4]$ é inversível na imagem.

Visto que

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

temos $f'(x) < 0$, para $0 < x < 4$ e, portanto, a função dada é inversível na sua imagem e o domínio da inversa é o intervalo $[f(4), f(0)] = [1/17\,, 1]$.

Como estamos interessados em funções que sejam inversíveis na imagem, de agora em diante, quando falarmos que uma função f é inversível, queremos dizer que f é inversível na imagem.

Em alguns casos, (veja exemplo a seguir), faremos uma extensão dos resultados do Teorema 10.1 ou Teorema 10.2 para funções definidas em intervalos não fechados.

Exemplo 10.6

A função

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \text{ para } 0 < x < 1,$$

é inversível, pois a sua derivada é

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 1 > 0.$$

O domínio de sua inversa é

$$\left]\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to 1^-} f(x)\right[=]-\infty, 0[$$

pois, a função dada é estritamente crescente no intervalo]0,1[.

Exercício 10.1

Verifique se a função é inversível e nos casos afirmativos dê o domínio de sua inversa.

1) $y = x^4 - 2x^2, \quad 0 \le x \le 1$

2) $y = 3x - x^3, \quad -1 \le x \le 1$

3) $y = -\dfrac{1}{x^2+4}, \quad x < 0$

4) $y = x^3 - x^2 - x + 1, \quad x \ge 1$

5) $y = \dfrac{1}{x}, \quad x < 0$

6) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x < -1$

Já conseguimos encontrar o domínio da função inversa sem conhecer a sua expressão. Agora veremos dois teoremas que nos darão condições de conhecê-la melhor e esboçar o seu gráfico sem explicitá-la. Isto pode ser feito para funções deriváveis, com derivadas não nulas.

Teorema10.3

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em $]a, b[$ com derivada positiva neste intervalo, então a sua inversa $x = g(y)$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\cdot$$

Demonstração:

Para mostrar que $x = g(y)$ é derivável em y, devemos provar que existe o limite:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}.$$

Para tanto, consideremos: $x = g(y)$ e $x + \Delta x = g(y + \Delta y)$. Daí segue-se que $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$ e que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Além disso, devido ao fato de serem injetoras, teremos $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$. Além disso, como f é, também, contínua, pode-se mostrar que fazer $\Delta y \to 0$ equivale fazer $\Delta x \to 0$, ou inversamente, fazendo $\Delta x \to 0$ teremos, em consequência, $\Delta y \to 0$.

Essas observações permitem-nos escrever que

$$\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

e, finalmente,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Isto demonstra a derivabilidade da função $x = g(y)$ e nos fornece uma expressão para a sua derivada:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Deixamos para o leitor a demonstração do teorema seguinte:

Teorema 10.4

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em $]a, b[$ com derivada negativa neste intervalo, então a sua inversa $x = g(y)$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exemplo 10.7

Vamos restringir a função $f(x) = x^4 - 2x^2$ a um intervalo para o qual ela seja inversível e de modo que $y = 8$ pertença ao domínio da inversa $x = g(y)$ e, depois, calcular $g'(8)$.

De $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, concluímos que:

a) $f'(x) > 0$ para valores de x em $]-1,0[$ ou em $]1, \infty[$ e, portanto, f restrita a um desses domínios é inversível;

b) $f'(x) < 0$ para valores de x em $]-\infty, -1[$ ou em $]0,1[$ e, portanto, f restrita a um desses domínios é inversível.

Queremos que $y = 8$ seja pertencente ao domínio de g. Para isso tomamos $f(x) = 8$, o que resulta a equação:

$$x^4 - 2x^2 = 8 \; ou \; x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

cuja solução é $x = -2$ ou $x = 2$. Assim, teremos $f(-2) = 8$ ou $f(2) = 8$.

Escolhendo o domínio da inversa como sendo o intervalo $]-\infty, -1]$ teremos, pelo Teorema 10.4 que

$$g'\,(8) = \frac{1}{f'(-2)} = -\frac{1}{24}.$$

Exercício 10.2

1) Restrinja f de modo que seja inversível e que o ponto indicado pertença ao domínio da inversa. Depois calcule o domínio da inversa g e a sua derivada no ponto indicado.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad y = 3$

b) $f(x) = -x^3 + 3x - 5, \quad y = -5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}, \quad y = -\dfrac{1}{8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad y = \dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+4}, \quad y = -\dfrac{1}{4}$

g) $f(x) = senx, \quad y = \dfrac{1}{2}$

2) Admitindo que g, inversa de f derivável, também é derivável e que $f'(x) \neq 0$ mostre, usando a *regra da cadeia*, que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

10.3 Funções trigonométricas inversas

A função $y = senx$ não é inversível (por quê?), mas podemos restringí-la a um intervalo no qual ela seja inversível. Vamos considerar apenas o caso em que $y = senx$ esteja restrita ao intervalo $[-\pi/2, -\pi/2]$. O leitor poderá fazer, como exercício, outras restrições sobre o domínio de $y = senx$, de modo torná-la inversível.

Para o caso da restrição considerada temos que $y' = cosx$ e que $cosx > 0$, para $-\pi/2 < x < \pi/2$. Logo $y = senx$ é inversível, pois é estritamente crescente no intervalo $[-\pi/2\,,\ \pi/2]$. A inversa da função $y = senx$ é chamada *arco-seno* e é denotada por

$x = arcseny$. Lembre-se que já trabalhamos com essa função nas regras de derivação. A sua derivada foi incluída numa tabela por não termos condições, naquele momento, de estabelecer formalmente o seu valor, o que faremos agora.

Pelos teoremas 10.1 e 10.3, podemos concluir que:

a) o domínio da inversa de $y = senx, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, é o intervalo:

$$\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1,1] \cdot$$

b) a derivada da inversa é dada pela expressão:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ou

$$\frac{d(arcseny)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Observação: nos cálculos anteriores usamos $cosx = \sqrt{1 - sen^2x}$ porque, no intervalo dado, $[-\pi/2, -\pi/2]$, temos que $cosx > 0$.

Para manter a notação tradicional $y = f(x)$, usaremos as expressões:

$$y = arcsenx \ \ e \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = senx$ oferece uma infinidade de intervalos de comprimento π onde inversas podem ser definidas. No entanto, trataremos a função $y = arcsenx$ como sendo aquela com domínio no intervalo $[-1,1]$ e com imagem em $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exercício 10.3

Mostre que a função $u = senx, \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, é inversível e calcule a derivada da inversa.

Vamos agora, como fizemos anteriormente com outras funções, esboçar o gráfico de $y = arcsenx, \ -1 \leq x \leq 1$.

1) Interseções com os eixos coordenados.

Quando $x = 0$, teremos $seny = 0$ e, portanto, $y = 0$. Inversamente, se $y = 0$, teremos: $arcsenx = 0$, que nos dá $senx = 0$, e, portanto, $x = 0$. Logo a função intercepta os eixos coordenados na origem do sistema.

2) Pontos Críticos.

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$ a função não tem pontos críticos.

3) Regiões de Crescimento e de Decrescimento.

Pelo item anterior, a derivada é positiva e, portanto, a função é estritamente crescente.

4) Máximos e Mínimos Locais.

A função sendo estritamente crescente não tem máximos e mínimos locais.

5) Convexidades e pontos de inflexão.

A derivada segunda da função é dada por:

$$y'' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

a) $y'' > 0$, para $0 < x < 1$, sendo a função convexa para cima nesse intervalo;
b) $y'' < 0$, para $-1 < x < 0$, sendo a função convexa para baixo nesse intervalo;
c) $x = 0$ é ponto de inflexão.

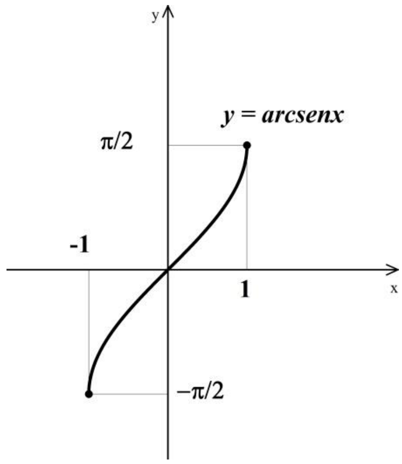
6) Limites necessários.

Para obtermos um melhor esboço do gráfico é conveniente analisarmos o comportamento da derivada da função em $x = 0$ e nos extremos do intervalo:

a) $y'(0) = 1$

$b)$ $\lim_{x\to -1^+} y' = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$

$c)$ $\lim_{x\to 1^-} y' = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$



Reunindo as informações anteriores, apresentamos ao lado o gráfico da função $y = arcsenx$.

Exercício 10.4

Verifique que a função $y = cosx$, $0 \leq x \leq \pi$ admite uma inversa $x = g(y)$. Essa função é denominada $g(y) = arccosy$. Mostre que sua derivada é dada por

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

e calcule $g'(1/2)$. Considere a notação $y = arccosx$ e esboce o gráfico da função.

Vamos agora verificar que $y = tgx$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, admite inversa denotada por, $x = arctgy$, que deve ser lida: *x é o arco cuja tangente é y*.

A derivada da função $y = tgx$, é dada por:

$$y' = sec^2x = \frac{1}{cos^2x}.$$

Como $y' > 0$, teremos y estritamente crescente no intervalo considerado e, portanto, $y = tgx$ admite inversa que é representada por $x = arctgy$ (por que a função dada não é inversível no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$?). O domínio da função $x = arctgy$ é dado pelo intervalo:

$$\left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} tgx\,,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx\right[=]-\infty,\infty[.$$

A derivada de $x = arctgy$ é dada por:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Usando a notação convencional $y = f(x)$, denotaremos a função arco-tangente por $y = arctgx$, definida no intervalo $]-\infty,\infty[$. Seu gráfico será esboçado em seguida.

1) Interseção com os eixos coordenados.

Para $x = 0$, teremos $tgy = 0$ e, portanto, $y = 0$. Se $y = 0$, segue-se $x = tg0 = 0$. Logo, o gráfico da função intercepta os eixos coordenados na origem do sistema.

2) Pontos críticos.

Como a derivada da função

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

é sempre positiva, função não possui pontos críticos.

3) Regiões de crescimento e de decrescimento

Como $y' > 0$, a função é estritamente crescente no intervalo considerado.

4) Máximos e mínimos locais.

A função não tem máximos e mínimos locais.

5) Convexidades e pontos de inflexão.

A derivada segunda da função é dada por:

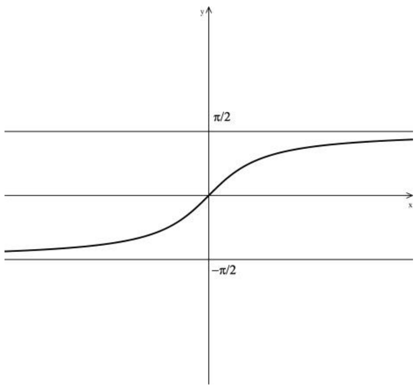
$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

a) Quando $y'' < 0$, teremos $x > 0$ e, portanto, y é convexa para baixo em $]0, \infty[$.
b) Quando $y'' > 0$, teremos $x < 0$ e, portanto, y é convexa para cima em $]-\infty, 0[$.
c) Em $x = 0$, temos o ponto de inflexão.

6) Limites Necessários.

Para a presente função é necessário o estudo dos limites:

$$\lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2} \quad e \quad \lim_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \cdot$$



Reunindo as informações anteriores esboçamos, ao lado, o gráfico da função dada.

Exercício 10.5

1) Mostre que $y = secx$, $0 \leq x < \pi/2$, admite inversa $x = arcsecx$. Encontre o domínio e a derivada dessa inversa e esboce o seu gráfico.

2) Faça o mesmo para a função $y = cotgx$, $0 < x < \pi$.

3) Calcule:

a) $arcsen(sen\, 3\pi/2)$ b) $arcsen(sen2\pi)$ c) $arcsen(sen\, \pi/4)$
d) $arctg(tg\pi)$ e) $arccos\big(cos(-\pi/2)\big)$

4) Se $g(x) = arcsenx$, calcule:

a) $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5) Se $g(x) = arccosx$, calcule:

a) $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10.4 Função Logaritmo Natural

No início do curso lançamos mão de uma tabela de funções e suas respectivas derivadas, na qual figurava uma que denominamos *logaritmo natural.* Transcrevemos, a seguir, a notação utilizada para essa função e a sua derivada:

$$y = lnx \quad e \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

onde x é um número real positivo.

Estudaremos essa função, como fazem vários autores, utilizando um ponto de vista geométrico, pelo qual poderemos construí-la através da noção de área sob uma curva, curva essa definida por uma função contínua. Antes, porém, faremos uma pequena digressão acerca dos logaritmos apenas para relembrar alguns fatos que, sem dúvida, já são do conhecimento dos leitores.

Historicamente, os logaritmos surgiram após o ano de 1600 com a finalidade de tornar mais simples os cálculos utilizados, principalmente, pelos astrônomos, que viviam à volta com operações aritméticas complicadas e sem dispor de mecanismos mais simples para suavizar o trabalho. Vários foram os matemáticos que tiveram seus nomes ligados à história do desenvolvimento científico por terem-se dedicado à busca de mecanismos dessa natureza e, especificamente, em relação aos logaritmos, até hoje são lembrados, entre outros, os nomes de John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1631).

Na terminologia moderna, como o leitor já deve ter visto, define-se o logaritmo de um número da seguinte forma:

*"Se **a** é um número real positivo e diferente de 1, dizemos que **y** é o logaritmo de **x** na base **a**, se **x** for igual a **a** elevado a **y**"*

Analiticamente:

$$y = log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Dessa definição e das regras elementares de potenciação, deduzem-se as propriedades operatórias do logaritmo, cujas principais são:

1) $log_a(x.y) = log_a x + log_a y$

2) $log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -log_a x$

3) $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$

4) $log_a x^m = m log_a x,$ onde m é inteiro

5) $log_a x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} log_a x,$ onde m é inteiro diferente de zero.

O número ***a*** da definição acima é denominado *base do sistema de logaritmos*. Tomando-se $a = 10$, por exemplo, teremos o chamado *sistema de logaritmos decimais* que, segundo *Carl B . Boyer* em seu livro *História da Matemática (Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1996)*, página 215, foi publicado em 1617, por Henry Briggs, já citado anteriormente. Desde sua publicação os *logaritmos decimais* foram largamente utilizados. As chamadas *tabelas de logaritmos*, introduzidas por *Briggs,* mantiveram-se atuais até meados do século passado quando perderam espaço para o avanço tecnológico que trouxe as calculadoras eletrônicas e os computadores, encerrando a estafante tarefa de cálculos manuais envolvidos no manuseio daquelas tabelas.

Utilizando-se da definição do logaritmo de um número, dada anteriormente, podemos construir, para cada valor de ***a*,** uma função, denominada *função logarítmica*, da seguinte maneira:

$$f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = log_a x$$

Determinadas escolhas da base (observar que a base é o elemento que diferencia duas funções logarítmicas) originaram nomes específicos para algumas funções logarítmicas. Entre essas escolhas encontra-se a que denominamos *função logaritmo natural* (também chamado *neperiano*, em homenagem a John Napier, um dos criadores do logaritmo, já citado anteriormente). Exibiremos, a partir de agora, uma forma de se construir essa função.

Comecemos por considerar a função:

$$f:]0, \infty[\to \mathbb{R} \;\; \text{dada por} \;\; f(x) = \frac{1}{x} \cdot$$

Sendo essa função contínua e positiva teremos que, para todos os números reais positivos a e b $(a \leq b)$, a *área sob a curva f de a até b* está definida e é dada por

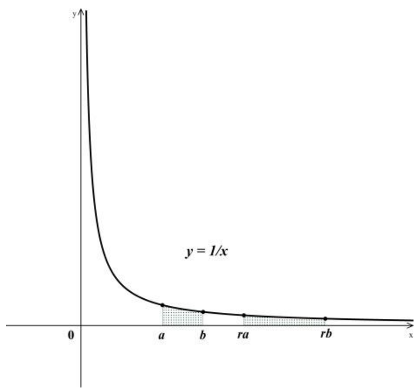
$$A_a^b\left(\frac{1}{x}\right) = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx.$$

As áreas sob a curva

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

gozam de uma propriedade bastante interessante, que é a seguinte:

$$A_a^b\left(\frac{1}{x}\right) = A_{ra}^{rb}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall r > 0.$$



A propriedade que está exibida graficamente ao lado pode, também, ser apresentada nos seguintes termos:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \int_{ra}^{rb} \frac{1}{x}dx, \qquad \forall r > 0.$$

Devido ao importante papel que essa propriedade assume no que vem a seguir iremos destacá-la na forma de um teorema.

Teorema 10.5

Sejam a e b números positivos quaisquer, com $a \leq b$. Então vale que

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \int_{ra}^{rb} \frac{1}{x}dx, \qquad \forall r > 0.$$

Demonstração:

A demonstração do teorema consiste em escrever cada uma das integrais dadas como limites de duas *somas de Riemann*, formadas de maneira conveniente. Inicialmente, para o intervalo $[a, b]$, tomaremos a seguinte partição:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$$

onde

$$x_i = a + i\Delta x, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n \text{ e } \Delta x = \frac{b-a}{n}\cdot$$

Se

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{então } f(x_i) = \frac{1}{a + i\Delta x}$$

e a *soma de Riemann* correspondente será:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x}{a + i\Delta x}\cdot$$

Quando $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$ e, portanto,

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x}{a + i\Delta x} \qquad (1)$$

Para o intervalo $[ra, rb]$ iremos tomar a seguinte partição:

$$ra = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ \cdots \ \le t_n = b$$

onde

$$t_i = ra + i\Delta t, i = 1,2,\cdots, n \ \ e \ \Delta t = \frac{rb - ra}{n}\cdot$$

Se

$$f(t) = \frac{1}{t}, \qquad \text{então } \ f(t_i) = \frac{1}{ra + i\Delta t}$$

e a *soma de Riemann* correspondente será:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta t}{ra + i\Delta t}\cdot$$

Entretanto,

$$\Delta t = \frac{rb - ra}{n} = r\left(\frac{b-a}{n}\right) = r\Delta x.$$

Além disso, devemos observar que quando $n \to \infty$, teremos que $\Delta t = r\Delta x \to 0$, para todo r, o que equivale a dizer que, também, $\Delta x \to 0$.

Daí, teremos:

$$\int_{ra}^{rb} \frac{1}{t}dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta t}{ra + i\Delta t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{r\Delta x}{ra + ir\Delta x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x}{a + i\Delta x} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), teremos:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \int_{ra}^{rb} \frac{1}{x}dx, \qquad \forall r > 0$$

que é o que queríamos demonstrar.

Voltando à função

$$f(x) = \frac{1}{x}\ , x > 0$$

e relembrando a definição de de função área, vamos considerar

$$F(x) = \begin{cases} -A_x^1\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x < 1 \\ A_1^x\left(\frac{1}{x}\right), & x \geq 1 \end{cases}$$

Lembrando que:

a) se $0 < x < 1,\ A_x^1\left(\frac{1}{x}\right) = \int_x^1 \frac{1}{x}dx = -\int_1^x \frac{1}{x}dx;$

b) se $x \geq 1,\ \ A_1^x\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{1}{x}dx,$

podemos redefinir a função $F(x)$, dizendo que

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \qquad \forall x > 0.$$

É evidente que $F(x)$ é uma função derivável e que a sua derivada é

$$F'(x) = \frac{1}{x}\ \ \forall x > 0.$$

Mostraremos que a função $F(x)$ possui todas as propriedades do logaritmo.

Teorema 10.6

A função

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \qquad \forall x > 0$$

possui todas as propriedades operatórias do logaritmo, ou seja, para todos x e y positivos, teremos:

$$1)\ F(xy) = F(x) + F(y);$$
$$2)\ F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x);$$
$$3)\ F\left(\frac{x}{y}\right) = F(x) - F(y);$$
$$4)\ F(x^m) = mF(x),\ \ para\ m\ inteiro;$$
$$5)\ F\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}F(x),\ \ para\ n\ inteiro\ e\ diferente\ de\ zero.$$

Demonstração:

Serão demonstradas as propriedades 1), 2) e 4). As propriedades 3) e 5) serão deixadas para o leitor.

a) Demonstração da Propriedade 1).

Considerando os números 1, x e xy teremos, pela propriedade de integral, que:

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt \quad (1)$$

Pelo Teorema 10.5, tomando-se $r = x$, teremos:

$$\int_1^y \frac{1}{t}dt = \int_x^{xy} \frac{1}{2}dt \quad (2)$$

Levando-se (2) em (1), ficará:

$$\int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_1^y \frac{1}{t}dt.$$

Pela definição da função $F(x)$, teremos: $F(xy) = F(x) + F(y)$.

b) Demonstração da Propriedade 2).

Tomando-se $r = x$ no Teorema 10.5 e, também, usando propriedade de integral, podemos escrever que:

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}dt = \int_x^{x\frac{1}{x}} \frac{1}{t}dt = \int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\int_1^x \frac{1}{t}dt = -F(x).$$

c) Demonstração da Propriedade 4)

Inicialmente, para provar a validade da propriedade para m inteiro e positivo, usaremos o processo denominado *indução finita.*

i) Para $m = 1$, a verificação é evidente;
ii) Suponhamos que a propriedade seja válida para $m = k$, isto é,

$$F(x^k) = \int_1^{x^k} \frac{1}{t} dt = k \int_1^{x} \frac{1}{t} dt = kF(x);$$

iii) Para $m = k + 1$, tomemos os números 1, x^k, x^{k+1} e apliquemos a mesma propriedade de integral utilizada na demonstração da propriedade 1):

$$\int_1^{x^k} \frac{1}{t} dt + \int_{x^k}^{x^{k+1}} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x^{k+1}} \frac{1}{t} dt.$$

Entretanto,

$$\int_{x^k}^{x^{k+1}} \frac{1}{t} dt = \int_{x^k}^{x^k.x} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt$$

pela aplicação do Teorema 10.5, fazendo $r = x^k$.

Daí,

$$\int_1^{x^{k+1}} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x^k} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x} \frac{1}{t} dt.$$

Aplicando a hipótese de indução, teremos:

$$\int_1^{x^{k+1}} \frac{1}{t} dt = k \int_1^{x} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x} \frac{1}{t} dt = (k+1) \int_1^{x} \frac{1}{t} dt.$$

Concluindo, teremos:

$$F(x^m) = mF(x), \qquad \forall m, \text{inteiro e positivo.}$$

Para $m = 0$, teremos $x^0 = 1$

$$F(1) = \int_1^{1} \frac{1}{t} dt = 0.$$

Resta-nos, agora, demonstrar que a propriedade vale para m inteiro e negativo. Assim, para m é negativo existe p inteiro e positivo tal que $m = -p$. Então teremos:

$$F(x^m) = F(x^{-p}) = \int_1^{x^{-p}} \frac{1}{t} dt = \int_1^{\left(\frac{1}{x}\right)^p} \frac{1}{t} dt.$$

Pela primeira parte da demonstração:

$$F(x^m) = p \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} dt = pF\left(\frac{1}{x}\right).$$

Usando a propriedade (2), concluímos:

$$F(x^m) = (-p)F(x) = mF(x).$$

Assim concluímos, finalmente, que a propriedade (4) é válida para todo m inteiro.

O exposto é suficiente para podermos afirmar que a função

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \qquad x > 0$$

é uma função logarítmica. Ela é chamada *Função Logaritmo Natural,* e a denotaremos por:

$$F(x) = lnx,$$

ou na forma mais comumente utilizada:

$$y = lnx, \qquad x > 0.$$

Como vimos, ela é derivável e a sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Tendo-se a função anterior como uma função logarítmica, uma pergunta que deverá surgir naturalmente será com respeito à base desse logaritmo. Quanto a isso, responderemos, em parte, na forma do se segue.

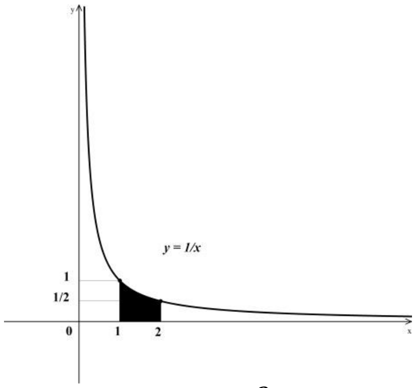
Pela definição de logaritmo, a base a é sempre um número que satisfaz a seguinte condição:

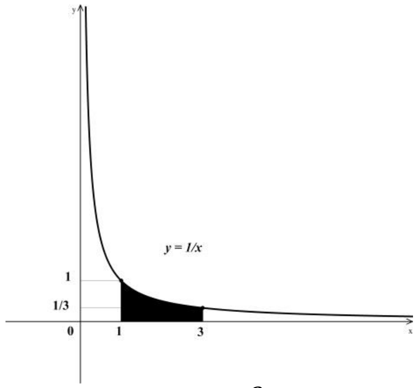
$$log_a a = 1.$$

Essa condição aplicada à nossa função nos dará:

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt = 1.$$

Mostraremos que realmente existe um número real que satisfaz a condição anterior e, de imediato, podemos concluir que ele não é um número inteiro e está entre 2 e 3. Para ver isto, apresentaremos uma justificativa geométrica:





$$F(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dt < 1 \quad (*)$$

$$F(3) = \int_1^3 \frac{1}{x} dt > 1 \quad (**)$$

$(*)$ **0,668771 é uma aproximação por falta, obtida pela soma das áreas de 10 retângulos inscritos à curva $f(x) = 1/x$, através de uma partição do intervalo $[1, 2]$ em 10 partes iguais;**

$(**)$ **1,066019 é uma aproximação por falta, obtida pela soma das áreas de 20 retângulos inscritos à curva $f(x) = 1/x$, através de uma partição do intervalo $[1, 3]$ em 20 partes iguais.**

Como a função dada é contínua (uma vez que é derivável), pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe um número real pertencente ao intervalo $]2,3[$, que designaremos por e, tal que

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Na realidade, e é um número irracional e 2,71828 é um valor aproximado.

10.4.1 Gráfico da Função Logaritmo Natural

Da definição de $y = lnx$, decorre imediatamente:

1) O domínio é o intervalo $]0, \infty[$, logo não há interseção com o eixo y. A interseção com o eixo x ocorre somente no ponto de coordenadas $(1,0)$, conforme o item 3, a seguir, comprovará;
2) Como $y' = 1/x$, a função em questão não possui pontos críticos;
3) Como $x > 0$ a derivada é sempre positiva e, portanto, a função é estritamente crescente;
4) Em razão do item anterior, a função não possui máximo e nem mínimo locais;
5) Como $y'' = -1/x^2 < 0$, o gráfico possui convexidade voltada para baixo e, portanto, não possui ponto de inflexão;
6) Duas outras consequências, não tão óbvias como as anteriores, são as seguintes:

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty} lnx = \infty \text{ e b) } \lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$$

Para demonstrarmos a primeira, observemos que para qualquer $x > 2$ existirá um número p, inteiro e positivo, tal que $2^p \leq x < 2^{p+1}$. Como a função $y = lnx$ é estritamente crescente, temos que $ln2^p \leq lnx$. Daí,

$$\lim_{p\to\infty} ln2^p \leq \lim_{x\to\infty} lnx \Rightarrow \lim_{p\to\infty} pln2 \leq \lim_{x\to\infty} lnx.$$

Como

$$\lim_{p\to\infty} pln2 = \infty$$

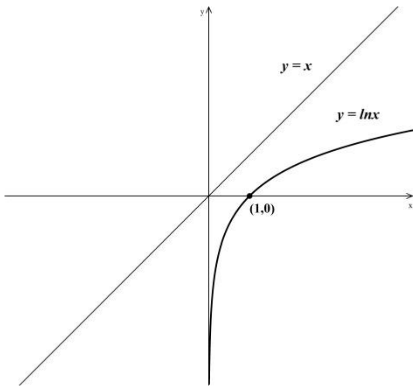
segue-se que

$$\lim_{x\to\infty} lnx = \infty.$$

No segundo caso, considerando $x = 1/u$, teremos:

$$\lim_{x\to 0^+} lnx = \lim_{u\to\infty} ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\lim_{u\to\infty} lnu = -\infty.$$

De posse de todas as considerações anteriores, podemos afirmar que o gráfico da função $y = lnx$, é o seguinte:



Observação:

Como $lnx < x$ (item 2 do Exercício 9.7) o gráfico de $y = lnx$ encontra-se sempre abaixo do gráfico de $y = x$.

10.5 Função Exponencial

Como a função $y = lnx$ é estritamente crescente em $]0, \infty[$ ela admite uma inversa, $x = g(y)$, definida no intervalo $]-\infty, \infty[$. Essa função é denominada *Função Exponencial* e é denotada por $x = e^y$.

Assim:

$$y = lnx \Leftrightarrow x = e^y.$$

Considerando a função exponencial na forma padrão $y = e^x$ (com $x = lny$) podemos determinar a sua derivada do seguinte modo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(lny)}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Assim, a derivada da função exponencial é igual à própria função.

10.5.1 Gráfico da Função Exponencial

Para esboçar o gráfico da função $y = e^x$, observemos que:

1) Para $x = 0$, encontramos, $y = 1$ e para todo x, teremos $e^x > 0$ (por quê?). Portanto ela intercepta o eixo x em $(0,1)$ e não intercepta o eixo y;

2) Como $y' = e^x > 0$, a função não tem pontos críticos;

3) Como em 2), $y' > 0$ a função $y = f(x)$ é estritamente crescente;

4) Em consequência dos itens anteriores a função não possui máximo e nem mínimo locais;

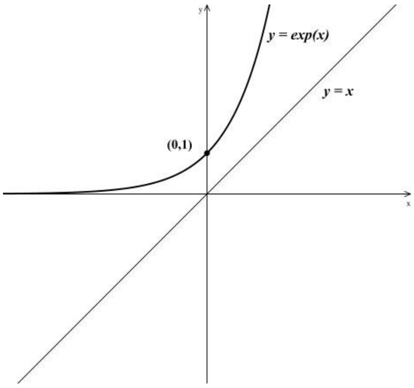
5) Como $y'' = e^x > 0$ a função é convexa para baixo;

6) Para estudar os limites laterais, quando $x \to -\infty$ e quando $x \to \infty$, lembremos primeiro $x < e^x$ (Exercício 10.5 a seguir) e, portanto, é evidente que:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty.$$

Por outro lado, para $x < 0$ podemos tomar $u > 0$ tal que $x = -u$ e, assim:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{u \to \infty} e^{-u} = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{e^u} = 0.$$



Com as informações anteriores esboçamos, ao lado, o gráfico da função exponencial.

Exercício 10.6

Mostre que $e^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$.

10.6 Limites envolvendo logaritmos e exponenciais

Reunimos no teorema a seguir dois limites, considerados fundamentais.

Teorema 10.7

1) $\lim_{h\to 0} ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$ 2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Demonstração:

Para demonstrar (1) comecemos por considerar a derivada da função $f(x) = lnx$, primeiramente pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - lnx}{h};$$

e, em seguida, pela expressão já deduzida:

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Calculando a derivada para $x = 1$ e comparando os resultados temos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Daí, utilizando propriedades de logaritmo, obtemos o resultado final:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1.$$

Para mostrar (2), observemos que, tomando-se $x = 1/h$, teremos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}},$$

e, portanto, basta-nos mostrar que o segundo limite da igualdade acima é igual ao número e. Assim,

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^{\lim_{h\to 0} ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^1 = e.$$

10.7 Exponencial Geral

Para $a > 0$, definimos $a^x = e^{xlna}$.

A derivada de $y = a^x$, é encontrada através *regra da cadeia*:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(e^{xlna})}{dx} = e^{xlna}.lna = (lna)a^x.$$

Observemos que, se $a > 1$, $y = a^x$ é estritamente crescente e que, se tivermos $0 < a < 1$, teremos $y = a^x$ estritamente decrescente. Em ambos os casos $y = a^x$ é inversível e sua inversa é dada por $x = log_a y$.

Lembrando-se que

$$y = log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

teremos a derivada de $y = log_a x$ da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(a^y)}{dy}} = \frac{1}{e^{ylna}lna} = \frac{1}{xlna}.$$

Exemplo 10.8

Para mostrar todas as regras de derivação que tabelamos inicialmente (Cap.4) falta-nos, apenas, mostrar que:

$$y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Até agora mostramos que a relação acima é válida somente para a inteiro. A extensão para o caso em que a é um número real se obtém para o caso em que x, base da potência, é positivo. Para isso basta observar que

$$y = x^a = e^{alnx}$$

e, daí teremos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{alnx} \cdot \frac{a}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Exemplo 10.9

Uma aplicação da *função logaritmo natural* é no cálculo de derivadas de algumas funções como, por exemplo, a função

$$y = x^x.$$

O processo que mostraremos é chamado *derivação logarítmica* e nele faz-se uso da *Propriedade 4* de logaritmos (Teorema 10.4) considerando-a válida para m real, como já fizemos na demonstração do primeiro limite fundamental (Teorema 10.7).

Se $y = x^x$, teremos $lny = lnx^x = xlnx$. Daí, derivando termo a termo teremos:

$$\frac{d(lny)}{dx} = \frac{d(xlnx)}{dx} \Rightarrow \frac{y'}{y} = lnx + x \cdot \frac{1}{x} = lnx + 1.$$

Logo, $y' = y(lnx + 1) = x^x(lnx + 1)$.

Exercício 10.7

1) Usando derivação logarítmica, calcule a derivada de:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$ b) $y = (senx)^{cosx}$ c) $y = (cosx)^{senx}$
d) $y = x^{\sqrt[3]{x}}$ e) $y = e^{e^x}$ f) $y = x^{x^x}$

2) Mostre que:

a) $e^{x+y} = e^x e^y$ b) $(e^x)^y = e^{xy}$
c) $a^{x+y} = a^x a^y$ d) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) Definindo as funções:

$shu = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ (seno hiperbólico de u) e $chu = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ (cosseno hiperbólico de u)

mostre que:

a) $ch^2u - sh^2u = 1$ b) $\dfrac{d(shu)}{du} = chu$ c) $\dfrac{d(chu)}{du} = shu$

4) Considerando as funções

Tangente hiperbólica de u: $thu = \dfrac{shu}{chu}$

Cotangente hiperbólica de u: $ctu = \frac{chu}{shu}$

Secante hiperbólica de u: $sechu = \frac{1}{chu}$

Cossecante hiperbólica de u: $cossechu = \frac{1}{shu}$

mostre que:

a) $\frac{d(thu)}{du} = sech^2u$

b) $\frac{d(cthu)}{du} = -cossech^2u$

c) $\frac{d(sechu)}{du} = -(sechu)(thu)$

d) $\frac{d(cossechu)}{du} = -(ctu)(cossechu)$