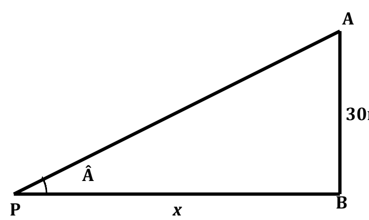
3
Limites

Ao expor o método dos incrementos fizemos uso da expressão limite. Muito mais que uma notação a noção de *limite* alcança um horizonte bem mais amplo dentro do contexto matemático, na realidade muito pouco poderia ser feito se não existisse à disposição dos matemáticos essa conceituação. No entanto, para iniciar o estudo do *Cálculo* acreditamos ser perfeitamente dispensável a formalização de uma teoria de limite, optando por considerar o que ela possui em termos operatórios.

O procedimento que adotaremos é, inicialmente, o de apresentar situações concretas através das quais o leitor irá se familiarizando com a utilização do limite à medida que for interpretando em linguagem simbólica a situação apresentada. Em seguida, passaremos a encarar o limite em seu sentido operacional.

Exemplo 3.1

Um corpo desloca-se num plano horizontal aproximando-se de uma torre, suposta vertical. Supondo-se que a torre tenha 30 metros de altura, construir uma tabela de valores que indique a variação do ângulo formado pela linha de visão do corpo em relação ao alto da torre, quando o corpo avança diretamente para a base da torre. Indicar em termos de limite o valor para o qual tenderá esse ângulo, quando a distância do corpo à base da torre tender para zero.



A figura ao lado indica a posição P do corpo distanciado x metros da base da torre AB e $\hat{A}$ representa o *ângulo de visão* nesse instante.

Como a torre é suposta vertical, temos:

$$tg\hat{A} = \frac{30}{x} \quad \text{ou} \quad \hat{A} = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$$

Tabela de Valores

x	$\frac{30}{x}$	$\hat{A} = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$*	$\hat{A} = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$**
30	1	0,78540	45,00133
10	3	1,24905	71,56716
2	15	1,50423	86,18847
1	30	1,53748	88,09345
0,5	60	1,55413	89,04778
0,1	300	1,56746	89,81166
0,05	600	1,56913	89,90716
0,01	3000	1,57046	89,98356
0,005	6000	1,57063	89,99310
0,004	7500	1,57066	89,99501
0,003	10000	1,57070	89,99692
0,002	15000	1,57073	89,99883
0,0015	20000	1,57075	89,99979

***** medida em radiano** ****medidas equivalentes aos da coluna anterior convertida em graus***

Nas colunas 1, 3 e 4 observamos que à medida que x se aproxima de zero o valor de $arctg(30/x)$ aproxima-se de $\pi/2\ rad$ (na coluna 3) ou, equivalentemente, de 90° (na coluna 4).

Simbolicamente:

$$\lim_{x \to 0} arctg\left(\frac{30}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Observação: no decorrer de nosso estudo, sempre que tratarmos de funções trigonométricas usaremos o radiano como medida de arco. Neste exemplo interpretamos os resultados também em graus apenas no intuito de tornar o entendimento melhor, uma vez que as aproximações racionais para as medidas em radianos, em geral, não refletem o entendimento delas da mesma forma que quando expressas como frações do número π.

Aproveitemos o Exemplo 3.1 para construir outra uma nova tabela, invertendo o movimento do corpo, isto é, ao invés de aproximá-lo vamos afastá-lo da torre segundo a linha que passa por P e A no gráfico anterior.

x	$\frac{30}{x}$	$\hat{A} = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$*	$\hat{A} = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$**
30	1	0,78540	45,00133
100	0,3	0,29146	16,69974
500	0,06	0,05993	3,43373
1000	0,03	0,02999	1,71841
2000	0,015	0,01500	0,85940
5000	0,006	0,00600	0,34378
10000	0,003	0,00300	0,17189
50000	0,0006	0,00060	0,03438
100000	0,0003	0,00030	0,01719
1000000	0,00003	0,00003	0,00172

***** medida em radiano** ****medida equivalentes aos da coluna anterior convertida em graus***

Os valores de x (primeira coluna) podem ser cada vez maiores, isto é, os valores de x podem crescer indefinidamente. Enquanto isso os valores de $\hat{A} = arctg(30/x)$ (terceira coluna) vão ficando cada vez menores, aproximando-se de zero, o que podemos indicar como sendo:

$$\lim_{x\to\infty} arctg\left(\frac{30}{x}\right) = 0$$

Levando-se em conta o que está no Exemplo 3.1 e resultados subsequentes podemos considerar a função:

$$f: (0, \infty) \to R$$

$$y = arctg\left(\frac{30}{x}\right)$$

e, então,

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{30}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} arctg\left(\frac{30}{x}\right) = 0$$

Nas duas primeiras colunas das duas tabelas anteriores temos outra função, definida por:

$$g: (0, \infty) \to R$$

$$y = \frac{30}{x}$$

que nos fornece as duas situações seguintes:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{30}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{30}{x} = 0$$

Gráfico de $y = arctg(30/x), 0 < x < \infty$

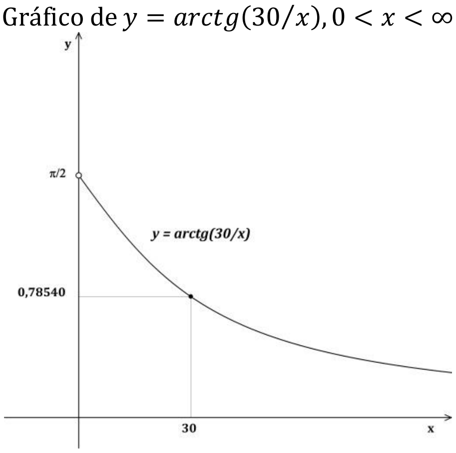
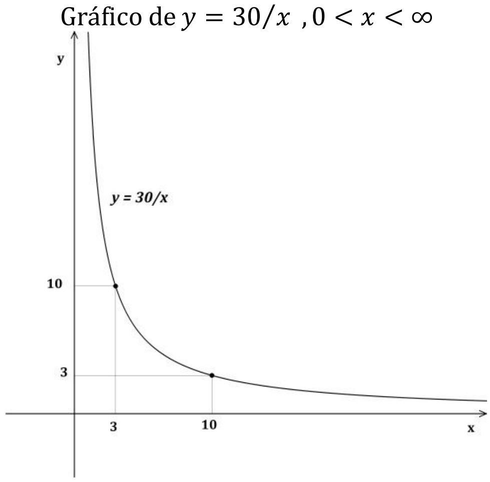


Gráfico de $y = 30/x$, $0 < x < \infty$



A função $y = 30/x$ tratada anteriormente, devido à natureza do problema que a originou, possui como domínio o conjunto dos números reais positivos, pois x indica distância e, portanto, não assume valores negativos. No entanto, se considerarmos que x não representa uma distância, podemos destacar a função:

$$f: R^* \to R$$

$$y = \frac{30}{x}$$

onde $R^* = \{x \in R: x \neq 0\}$.

Obviamente esta função é diferente da primeira uma vez que ela possui um domínio mais amplo do que aquela.

Na função dada observamos que:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{30}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{30}{x} = 0$

No entanto, quando x aproxima-se de zero já não estaremos certos de que cresça indefinidamente. Acontece que agora x pode assumir, próximo de zero, valores negativos e, quando isso acontecer, $y = 30/x$ também será negativo. Portanto, para estudarmos o limite de $y = 30/x$ quando x tender para zero deveremos estar cientes do sinal de x. Por isso separamos o estudo desse limite em duas etapas:

1) estudamos o limite de $y = 30/x$ quando x tender para zero assumindo valores positivos;
2) estudamos o limite de $y = 30/x$ quando x tender para zero assumindo valores negativos.

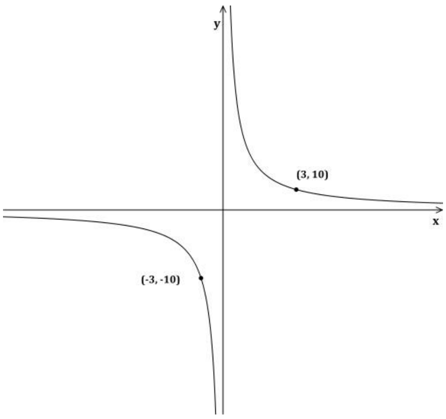
Dizemos que na primeira etapa é estudado o limite lateral da função à direita de zero e, na segunda, o limite lateral da função à esquerda de zero. As notações utilizadas são, respectivamente, as seguintes:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{30}{x}$, *que se lê: limite de* $30/x$, *quando* x *tende a zero pela direita*

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{30}{x}$, *que se lê: limite de* $30/x$, *quando* x *tende a zero pela esquerda*

No caso da função dada, teremos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{30}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{30}{x} = -\infty$$



O gráfico da função $y = 30/x$ está dado ao lado.

Exercício 3.1

Justifique com uma tabela de valores os limites abaixo:

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{30}{x} = \infty$ 2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{30}{x} = -\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{30}{x} = 0$ 4) $\lim_{x \to \infty} \frac{30}{x} = 0$

Definição 3.1

Dizemos que os *limites laterais de uma função* $y = f(x)$ *em um ponto* a existem se eles forem finitos.

No caso da função $y = 30/x$ os limites laterais em torno de zero não existem. Neste caso dizemos que a função $y = 30/x$ não possui limite em $x = 0$.

Exemplo 3.2

Estudo dos limites laterais da função abaixo, no ponto $x = 2$.

$$f: R - \{2\} \to R$$

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Quando estudamos a função $y = 30/x$ os limites laterais foram desenvolvidos em torno do valor $x = 0$, onde a função não se encontra definida, isto é, o número real zero não pertence ao domínio da função. Assim, o estudo dos limites laterais da função em torno de zero foi motivado pela pergunta: se em $x = 0$ a função não está definida, o que ocorre com $y = 30/x$ quando x aproxima-se de zero?

No caso deste exemplo a função dada não está definida em $x = 2$. O que ocorre com y quando x aproxima-se de 2? A resposta encontra-se nos limites laterais da função dada em torno de $x = 2$.

1) Estudo do limite lateral de $y = 1/(x-2)$ quando $x \to 2^+$.

Ora, $x \to 2^+$, significa que x está à direita de 2 e, portanto, $x > 2$. Daí $x - 2 > 0$ e, então

$$\frac{1}{x-2} > 0$$

Como o denominador da fração acima tende para zero, a fração cresce ilimitadamente e, portanto, teremos:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

2) Estudo do limite lateral de $y = 1/(x-2)$ quando $x \to 2^-$.

Quando $x \to 2^-$ significa que x se encontra à esquerda de 2 e, portanto, $x < 2$. Daí $x - 2 < 0$ e, então

$$\frac{1}{x-2} < 0$$

Como o denominador da fração acima tende para zero, a fração assume valores negativos com módulos sempre crescentes e assim, portanto, concluímos que:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Assim, de acordo com a Definição 3.1, os limites laterais da função dada não existem.

Exercício 3.2

1) Encontre os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-2}$

2) Utilize os resultados do Exemplo 3.2 e os do exercício 1) acima para esboçar o gráfico da função

$$y = \frac{1}{x-2}, x \neq 2$$

3) Dada a função $y = \dfrac{1}{x+2}, x \neq -2$ calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x+2}$

4) Use os resultados encontrados para esboçar o gráfico da função do exercício anterior.

Exemplo 3.3

Para a função dada a seguir vamos estudar os limites laterais em torno de $x = 0$.

$$y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

1) Estudo do limite lateral de y quando $x \to 0^+$

Se $x \to 0^+$ então $x > 0$ e, portanto, por definição $y = x + 1$. Como $x \to 0$, teremos $(x+1) \to 1$. Logo

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$

2) Estudo do limite lateral de y quando $x \to 0^-$

Se $x \to 0^-$ então $x < 0$ e, portanto, por definição $y = x - 1$. Como $x \to 0$, teremos $(x-1) \to -1$. Logo

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1$$

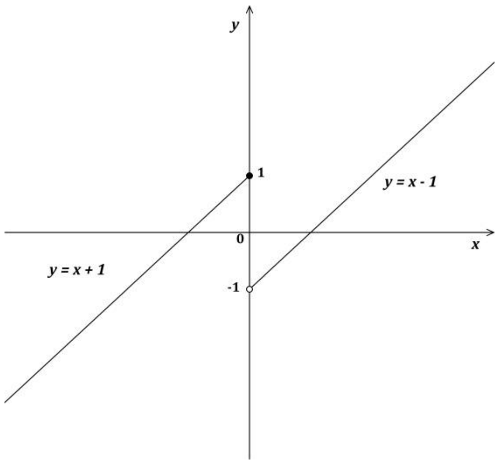
Exemplo 3.4

A função $y = x$, chamada *função identidade,* vamos estudar o seu limite em $x = 0$.

Solução:

Como $y = x$, teremos que $y \to 0$ independentemente de $x \to 0^+$ ou de $x \to 0^-$. Logo:

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^-} = 0.$$



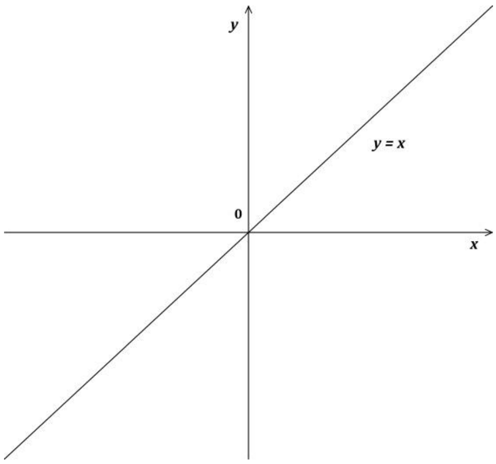


Gráfico da função do Exemplo 3.3 **Gráfico da função do Exemplo 3.4**

Em face da *Definição 3.1* tanto para a função do Exemplo 3.3 quanto para a do Exemplo 3.4, os limites laterais das funções dadas existem. No entanto, no caso do Exemplo 3.3 esses limites são diferentes. A igualdade dos limites laterais de uma função em torno de um ponto, como ocorre no Exemplo 3.4, é bastante importante. A título dessa importância, daremos a definição seguinte:

Definição 3.2

Dizemos que o limite de uma função $y = f(x)$ num ponto $x = a$ existe se existirem os limites laterais da função em torno de a e se esses limites forem iguais.

Assim, se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

escreveremos, simplesmente, que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e diremos que o *limite de $y = f(x)$, quando x tende para a é igual a b.*

Exemplo 3.5

Estude o $\lim_{x \to 1} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 < x < 1 \\ (x-2)^2 & 1 < x < 2 \end{cases}$

1) Estudo do limite lateral à esquerda de 1.

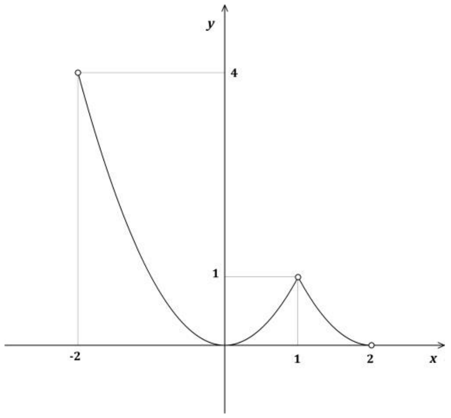
Se $x \to 1^-$ então $x < 1$ teremos $f(x) = x^2$ e, portanto, $x^2 \to 1$ e, assim, podemos escrever que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1.$$

2) Estudo do limite lateral à direita de 1.

Se $x \to 1^+$ então $x > 1$ teremos $f(x) = (x-2)^2$. Como $(x-2) \to -1$ quando $x \to 1^+$, concluímos que $(x-2)^2 \to 1$ e, assim, podemos escrever que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2)^2 = 1.$$



Conclusão:

Como os limites laterais da função dada são ambos iguais a 1, concluímos pela *Definição 3.2* que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

O gráfico da função estudada está apresentado à esquerda.

Importante!

A função dada no exemplo anterior não está definida para $x = 1$. Portanto, o limite da função $y = f(x)$ quando $\boldsymbol{x}$ tende para um valor $\boldsymbol{a}$ pode existir mesmo quando a função não estiver definida em $\boldsymbol{a}$, isto é, mesmo quando $\boldsymbol{a}$ não pertencer ao domínio da função.

Em cada caso, responda se o limite da função existe no ponto dado e, no caso afirmativo, dê o seu valor.

$f(x) = |x|, em\ x = 0$

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, em\ x = 1$

$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}, \quad em\ x = 1$

3.1 Limites de Funções Polinomiais e Racionais

No decorrer do nosso estudo é frequente o aparecimento de funções potências, do tipo $y = x^n$, com $n \in Z^*$, aliada à necessidade de explorar os seus comportamentos quando a variável x tende para ∞ ou para $-\infty$. O comportamento dessas funções que depende, evidentemente, da variação de x depende também da natureza do expoente n. Esses casos podem ser resumidos da seguinte maneira:

$$1) \quad x \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x^n \to \infty, & n \geq 1 \\ x^n \to 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$2) \quad x \to -\infty \Rightarrow \begin{cases} x^n \to 0, & n < 0 \\ x^n \to -\infty, & n \text{ ímpar} \\ x^n \to \infty, & n \text{ par} \end{cases}$$

Todas as situações acima podem ser identificadas nos três gráficos seguintes:

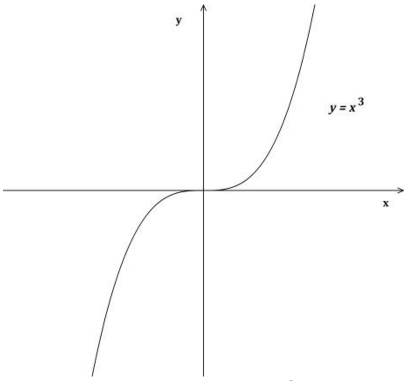


Gráfico de $y = x^3$

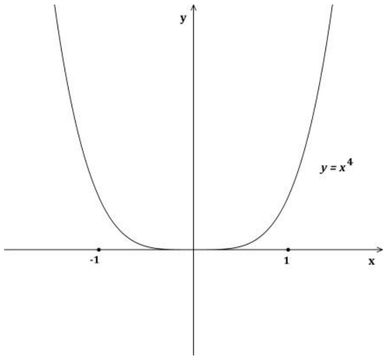


Gráfico de $y = x^4$

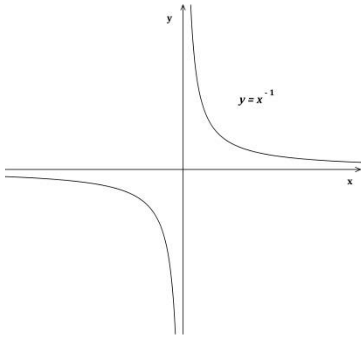


Gráfico de $y = x^{-1}$

Importante!

Os resultados apresentados permanecem mesmo quando a função potência possui um coeficiente real positivo; no caso do coeficiente negativo deve-se proceder a troca de sinal. A análise anterior é importante não apenas para reconhecer rapidamente o comportamento das funções potências mas, também, para o estudo dos limites de polinômios na variável x , quando $x \to \infty$ ou quando $x \to -\infty$, como veremos nos exemplos seguintes.

Exemplo 3.6

Vamos estudar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \infty} (3x^2 + 4x + 1)$$

A técnica consiste em fatorar o polinômio pelo termo de mais alto grau, no caso x^2:

$$3x^2 + 4x + 1 = x^2 \left(3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Observando a análise anterior referente ao comportamento das funções potências teremos:

$$quando\ x \to \infty, temos\ que\ \frac{4}{x} \to 0\ e\ \frac{1}{x^2} \to 0\ e, portanto, \left(3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \to 3.$$

Assim, como $x^2 \to \infty$, quando $x \to 0$ não é difícil concluir que:

$$x^2\left(3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \to \infty, quando\ x \to \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2 + 4x + 1) = \infty$$

Exemplo 3.7

Dado o polinômio $p(x) = -4x^2 + 2x$, vamos calcular o seu limite quando $x \to \infty$.

Solução:

Usando a técnica utilizada no exemplo anterior, teremos:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty}(-4x^3 + 2x) = \lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{2}{x^2}\right)\right] \quad (1)$$

Observando a expressão algébrica no último limite da relação (1) acima constatamos que:

$$quando\ x \to \infty, teremos\ \frac{2}{x^2} = 2x^{-2} \to 0\ e, portanto, \left(-4 + \frac{2}{x^2}\right) \to -4.$$

Como $x^3 \to \infty$, quando $x \to \infty$, segue-se que

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{2}{x^2}\right)\right] = -\infty.$$

Observe que, embora o limite de x^3 seja infinito quando x tende ao infinito, o valor negativo do limite de $(-4 + 2x^{-2})$ fez com que o limite de $p(x)$ fosse para menos infinito.

Importante!

Ao estudar limites de polinômios o que se deve evitar é o surgimento da "operação" $\infty - \infty$ que é uma das chamadas <u>formas indeterminadas</u>. Elas não devem aparecer como "solução" de um problema de limite.

Exercício 3.5

1) Calcule para as funções seguintes os limites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

a) $f(x) = 3x^2 + x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = x^3 + x^2$

d) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - x$

e) $f(x) = x^3 - x^5$

f) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}$

g) $f(x) = x^{-3} + 2$

h) $f(x) = x^{-4} + x^2 + 1$

i) $f(x) = 3x - x^{-4}$

j) $f(x) = -\frac{4}{x^5} + 3x^{-3}$

2) Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n em x. Mostre que:

a) $$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & a_n > 0 \; e \; n \; par \\ -\infty, & a_n > 0 \; e \; n \; ímpar \\ \infty, & a_n < 0 \; e \; n \; ímpar \\ -\infty, & a_n < 0 \; e \; n \; par \end{cases}$$

Podemos também encontrar o limite de uma fração racional na variável x quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Como exemplo vamos determinar o limite, quando $x \to \infty$, de

$$q(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x} \cdot$$

Veja o que pode ser feito neste caso:

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{x\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}.$$

Fazendo como nos polinômios, separadamente, para o numerador e denominador, concluímos que:

$$\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \to 1 \; e \; \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \to \infty \; quando \; x \to \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+1}{x^3+2x} = 0.$$

> **Importante!**
> *Nos casos de limites de frações devem ser evitadas formas do tipo $0/0$ e ∞/∞ que são, também, chamadas <u>formas indeterminadas</u>. Elas, também, não podem ser apresentadas como "soluções" de problemas de limite.*

Exercício 3.7

1) Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^2+3}{x^3+5}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x^4+5}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{5x^2+6x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x-3}{x^5+x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x^5+1}-x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{x^2+4}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^8+5}{(16x^2-2)^4}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-x^{-2}}{4x-2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+2}}{x}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+2}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+3x-2}{2x^2+1}}$

2) Considere os dois polinômios em x de grau n e m, respectivamente:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Mostre que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty, & se\ \ n > m, com\ a_n\ e\ b_m\ de\ mesmo\ sinal \\ -\infty, & se\ n > m, com\ a_n\ e\ b_m\ de\ sinais\ contrários \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & se\ n = m \\ 0, & se\ n < m \end{cases}$$

Nos últimos casos estudados, os limites envolviam a tendência da variável x para ∞ ou $-\infty$, para os quais as técnicas apresentadas obtiveram sucesso. No entanto, quando a variável tende para valores finitos essas técnicas já não se aplicam mais. Novas técnicas serão apresentadas e, mesmo que não se consiga resolver todos os problemas de limite, pelo menos, resolveremos uma boa quantidade deles.

Exemplo 3.8

Na função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$ estudar o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Ao fazer $x \to 1$, separadamente, no numerador e denominador chegaremos ao quociente $0/0$ que é uma forma indeterminada. No entanto, antes de passar a expressão ao limite, pode-se observar que:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1.$$

Daí,

$$\lim_{x - 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x - 1}(x + 1) = 2.$$

Ao fazer a simplificação indicada, que é possível para $x \neq 1$ (observe a definição da função), fizemos o que é comumente chamado “levantar a indeterminação” que, no caso, é apresentado pela forma $0/0$. Observemos, ainda, que quando procuramos o limite de uma função $y = f(x)$ em um ponto $x = a$ estamos interessados no que acontece com $f(x)$ quando x está próximo de a.

Em situações como a apresentada no Exemplo 3.8 devem ser tentadas simplificações com o intúito de levantar possíveis indeterminações.

Exercício 3.9

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3x^2 + 10x + 3}{x + 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$

No decorrer das aplicações dos vários processos de cálculo de limites que foram empregados nos exemplos e exercícios anteriores deparamos com situações envolvendo somas, produtos e quocientes de limites. Esses resultados que foram utilizados sem maiores explicações serão agora reunidos com o nome de *propriedades operatórias de limite.* Antes necessitaremos da seguinte definição:

Definição 3.3

Dadas duas funções f e g e um número real c, definem-se as funções: $f+g$, cf, $f-g$, fg e f/g, da seguinte forma:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(cf)(x) = cf(x)$

3) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

4) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, se\ g(x) \neq 0$

3.2 Propriedades Operatórias de Limite

Sejam $y = f(x)$ e $z = g(x)$ duas funções para as quais existem os limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x).$$

Neste caso existirão os limites apresentados em seguida, bem como são válidas as propriedades operatórias envolvidas. Essas propriedades estão relacionadas a seguir:

1) $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2) $\lim_{x \to a}(f-g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a}(kf)(x) = \lim_{x \to a}[kf(x)] = k\lim_{x \to a} f(x), \forall k \in R$

4) $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5) $Quando\ g(x) \neq 0\ e\ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0,\ \ teremos: \lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Exemplo 3.9

Calcular o $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2+3)(x^3-5x)}{x^2-2}$

Para aplicar as propriedades de limite a um quociente (propriedade 5), deveremos verificar se o limite do denominador existe e se é diferente de zero. Não é difícil observar que isso acontece, pois,

$$\lim_{x \to -2} (x^2 - 2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Como o numerador é um produto verificaremos, separadamente, os fatores:

1) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3) = (-2)^2 + 3 = 7$

2) $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 - 5x) = (-2)^3 - 5(-2) = -8 + 10 = 2$

Usando as propriedades 4 e 5) teremos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x^2+3)(x^2-5x)}{x^2-2} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^2+3)(x^2-5x)}{\lim\limits_{x \to -2} (x^2-2)} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^2+3) \cdot \lim\limits_{x \to -2} (x^3-5x)}{\lim\limits_{x \to -2} (x^2-2)} = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7$$

O processo apresentado se apresenta longo quando se detalha cada passagem, no entanto, à medida que se vai adquirindo habilidades com a sua aplicação muitas passagens vão sendo simplificadas, grande parte do trabalho passa a ser mental e se alcança rapidamente as respostas. Entretanto deve-se ter sempre o cuidado de verificar a existência dos limites envolvidos para não aplicar as propriedades indevidamente.

Exercício 3.10

1) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 10(x^2-4)(x+2)^4$

b) $\lim\limits_{x \to -1} [(x^2+x-2)(x+2)x]$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2+10x+3}{x+3}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5-4x^3+3x}{x^4+5x}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4+3x^2-2x}{x^5-3x^3+5}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3-2x^2+1}{-5x^3+x}$

i) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2-3t}{t^3+1}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3+13x-12}$

k) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+5x+1}$

l) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$

m) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x}$

n) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

o) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{(2x+1)^{\frac{-1}{2}}+x^{-1}}$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3x^5+1}-x}$

q) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

r) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-4}{x+3}$

s) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{4x^3-2x^2}{2x^3+x}}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+2x}-3}{x}$

u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$

y) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}}$

w) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{6x^3-7x^2-x-3}{2x^3-3x^2-8x+12}$

z) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{-4x^3+2x^2-5}$

2) Nos exercícios a seguir as propriedades de limite não puderam ser aplicadas. Justifique porquê e, em seguida, calcule dos limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} \neq \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{1}{x}\right) \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{4-x^2}\right) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} + \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{4-x^2}$

3) Defina uma função $y=f(x)$ tal que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1\,.$$

4) Sabendo-se que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \dfrac{3}{5}$ e que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \dfrac{2}{3}$ calcule

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, onde $h(x) = \dfrac{3f(x)+2(g(x))^2}{5f(x)-27g(x)}$

5) Considere a função $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Encontre $y=g(x)$ tal que

$$\lim_{x\to a}[3f(x)-4g(x)] = 2, \forall\, a \in R.$$

6) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(x+2)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(|x|+x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}|x^3-27|$

d) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$

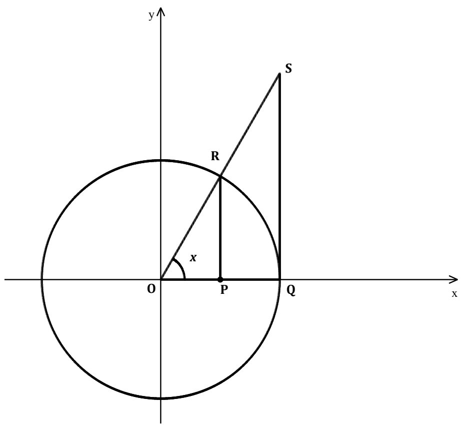
e) $\lim\limits_{x\to 6,5} f(x),\ \ onde\ f(x)=\begin{cases}[x], & x\le 6,5\\ x^2-3x+\dfrac{67}{4}, & x>6,5\end{cases}$

3.3 Limites envolvendo funções trigonométricas

Acreditamos que tenha ficado claro ao leitor que não existe uma técnica única para resolver problemas que envolvem limite. Para firmar mais ainda essa ideia determinaremos agora dois limites cujos processos de se encontrar as soluções fogem completamente da maneira pela qual foram tratados os casos anteriores. Existem vários outros limites como esses que iremos abordar que exigem processos específicos para serem solucionados. Esses limites são denominados *limites clássicos* ou *limites fundamentais.* Os dois que trataremos agora são os seguintes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1 \text{ e } \lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}=0$$

1) Prova de que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1\cdot$



No círculo trigonométrico ($r=1$), figura ao lado, tomamos um ângulo central x, medido em radiano no sentido anti-horário ($x>0$) e, com base na figura, podemos escrever:

$$Área\ do\ \Delta OPR \le Área\ do\ Setor\ OQR \le Área\ do\ \Delta)OQS \qquad (1)$$

Mas,

$$Área\ do\ \Delta OPR = \frac{OP \cdot PR}{2} = \frac{cosx \cdot senx}{2} \qquad (2)$$

$$Área\ do\ Setor\ OQR = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2} \qquad (3)$$

$$Área\ do\ \Delta OQS = \frac{OQ \cdot QS}{2} = \frac{1.tgx}{2} = \frac{senx}{2cosx} \qquad (4)$$

Substituindo (2), (3) e (4) em (1), teremos:

$$\frac{cosx \cdot senx}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{senx}{2cosx} \text{ ou } cosx.senx \leq x \leq \frac{senx}{cosx}$$

Dividindo termo a termo por $senx$ e, em seguida, invertendo-se todos os termos da desigualdade, teremos:

$$\frac{1}{cosx} \geq \frac{senx}{x} \geq cosx$$

Finalmente, se fizermos $x \to 0$ teremos que $cosx \to 1$ e desta forma o termo central $senx/x$ ficará imprensados entre dois valores que tendem a 1 e portanto, necessariamente, também tenderá para 1.

Desta forma, concluímos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1.$$

Na demonstração acima se tomou o ângulo x maior do que zero e, portanto, o resultado corresponde-se ao valor do limite lateral à direita de zero. Para um arco menor do que zero e se aproximando de zero pela esquerda obtém-se, percorrendo os mesmos passos da demonstração acima, valor idêntico para o limite de $senx/x$ e, assim, consideramos a demonstração concluída.

1) Prova de que $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x} = 0.$

Valendo-se de identidades trigonométricas podemos escrever o seguinte:

$$\frac{cosx - 1}{x} = \frac{(cosx - 1)(cosx + 1)}{x(cosx + 1)} = \frac{cos^2x - 1}{x(cosx + 1)} = \frac{-sen^2x}{x(cosx + 1)}$$
$$= -\frac{senx}{x} \cdot senx \cdot \frac{1}{(cosx + 1)}$$

Aplicando as propriedades (3) e (4) de limites, teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}senx\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(cosx+1)}\cdot$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}=-1.0.\frac{1}{2}=0$$

Importante!

Os dois últimos limites foram desenvolvidos utilizando-se de um arco simples x, no entanto eles devem ser entendidos num sentido mais amplo, isto é, as funções podem estar aplicadas a arcos múltiplos kx, pois $kx \to 0$ quando $x \to 0$. Importa-se, nesse caso que o denominador seja o mesmo arco ao qual a função esteja aplicada.

Exemplo 3.10

Calcular o limite: $\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen5x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen5x}=\lim_{x\to 0}\left[3x\cdot\frac{sen3x}{3x}\cdot\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x}{sen5x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{\frac{sen3x}{3x}}{\frac{sen5x}{5x}}\right]=\frac{3}{5}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{5x}}=\frac{3}{5}$$

Além das propriedades de limites aplicou-se também o fato de que $3x \to 0$ e $5x \to 0$ quando $x \to 0$.

Exercício 3.11

Calcule:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(ax)}{sen(bx)}, a, b \in R$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{xcosx+x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{5x}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{sen3x}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x^2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{sen(x+1)}{x^2-1}$

8) $\lim_{x\to 1}\frac{sen(x-1)}{x^2-1}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,2x-2sen\,x}{x^2}$

10) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{sen(2x+1)}$

11) $\lim_{x\to -1}cos\sqrt{x^2-1}$

Exercício 3.12

1. Sejam f, g e h funções satisfazendo: $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in]a,b[$
   e x_0 um ponto deste intervalo, vale a seguinte propriedade:

   "$Se\ existirem\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ e\ \lim\limits_{x \to x_0} h(x)\ \ e\ forem\ iguais\ a\ L\ \ então\ \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$".

   $\left(\text{Esta propriedade foi usada na demonstração de que } \lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1\right)$

   Use propriedade essa para mostrar que:

A) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{senx}{x^2} = 0$

B) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen \frac{1}{x} = 0$

2. Considere as funções $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ e $h(x) = x^2 + 1$.
   a. Mostre que $g(x)$ e $h(x)$ têm a mesma reta tangente em $x = 1$. Encontre a equação dessa reta.
   b. Mostre que toda função $f: R \to R$, satisfazendo a condição:
   $$g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$
   é derivável em $x = 1$.