2
A Derivada

O objetivo geral desse curso de Cálculo será o de estudar dois conceitos básicos: a *Derivada* e a *Integral*. No decorrer do curso esses dois conceitos, embora motivados de formas distintas, serão por mais de uma vez relacionados. Neste relacionamento é que, na realidade, reside toda a força da teoria, e é ele que permite tratar de uma grande variedade de aplicações.

O nosso primeiro trabalho será a formalização do conceito de *derivada*. Com este intuito abordaremos duas situações aparentemente distintas. A primeira delas envolverá um conceito físico: a *velocidade*. A segunda, um conceito geométrico: *determinação da reta tangente a uma curva*.

2.1 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Basicamente, define-se a *velocidade média* de um corpo em movimento como sendo o quociente entre o espaço percorrido pelo corpo e tempo gasto em percorrer esse espaço. Assim, se uma pessoa em um carro percorre 120km em 2 horas então sua velocidade média será: $120km/2h = 60\,km/h$. No entanto, o fato de que essa pessoa tenha desenvolvido a velocidade média de $60\,km/h$ não nos dá direito de concluir muita coisa a respeito de como os $120km$ foram percorridos. Essa pessoa poderia, por exemplo, ter percorrido os $60km$ iniciais em 30 minutos, descansado outros 30 minutos e ter gasto uma hora nos $60km$ restantes. Dessa forma ou de outra qualquer, desde que gaste duas horas, a velocidade média alcançada para percorrer os $120km$ continua sendo de $60\,km/h$. Se desejássemos, no entanto, investigar a forma pela qual essa distância foi percorrida, uma boa medida seria dividir o espaço total em trechos menores e indagar ao motorista qual o tempo que ele gastou para percorrer cada um desses trechos e teríamos, então, uma noção melhor do que a anterior de como a distância foi percorrida. É claro que essa noção se tornará mais precisa quanto menor for cada trecho, isto é, quanto maior for o número de trechos em que estiver subdividido o espaço. Entretanto, enquanto tivermos um trecho para ser percorrido ainda teremos como informação uma velocidade média. A pergunta natural é: como proceder para se ter a informação exata do percurso?

O ideal seria se fosse possível identificar a velocidade em cada ponto do trajeto. Aí entra um fato novo, pois enquanto tivermos um espaço a ser percorrido iremos gastar um tempo em percorrê-lo e, uma vez realizado o movimento, o quociente entre suas grandezas nos dará uma velocidade média. Se reduzirmos nossas considerações a pontos a ocorrência se tornará instantânea, mas, nesse caso, o espaço será nulo e o mesmo ocorrerá com o tempo. O cálculo direto nos conduzirá ao quociente $0/0$ que, matematicamente, não possui significado. No entanto, o fenômeno físico é real. Se concebermos um ponto imaginário na estrada haverá um instante em que o carro passará por aquele ponto desenvolvendo certa velocidade medida naquele instante.

A procura de um método matemático responsável pela solução desse tipo de problema pertence aos fundamentos que, entre outros, conduziram *Isaac Newton* (1642 – 1727) e *G. W. Leibniz* (1646 – 1716) a uma das mais importantes descobertas matemáticas: o *Cálculo Infinitesimal*.

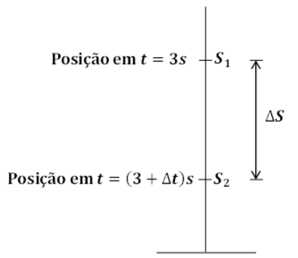
O método que iremos estudar é comumente chamado de *método dos incrementos* e o faremos, inicialmente, através de um exemplo. O leitor perceberá que o método tem muito a ver com a ideia inicialmente exposta.

Exemplo 2.1

O espaço percorrido por um corpo que cai de uma altura qualquer, a partir do repouso, é dado pela função $S(t) = 4{,}9t^2$, onde S é medido em metros, de cima para baixo a partir da posição inicial, e t é medido em segundos. Achar a velocidade do corpo aos 3 segundos de queda.

Solução:

O método consiste em atribuir incremento (acréscimo) ao tempo antes ou após o momento correspondente a 3 segundos de queda – se antes o acréscimo é negativo, após ele é positivo. Através da função obtém-se o incremento correspondente ao espaço e, consequentemente, intervalos de espaço e tempo, diferentes de zero, para se calcular uma velocidade média como mostra os cálculos a seguir:



a) Para $t = 3$, $S_1 = 4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1$

b) Para $t = 3 + \Delta t, (\Delta t > 0)$, $S_2 = 4{,}9(3 + \Delta t)^2 = 44{,}1 + 29{,}4\Delta t + 4{,}9\Delta t^2$

c) Seja $\Delta S = S_2 - S_1 = 29{,}4\Delta t + 4{,}9\Delta t^2$ o espaço percorrido no intervalo de tempo Δt, começado em $t = 3s$.

Então a velocidade média correspondente ao intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{29{,}4\Delta t + 4{,}9\Delta t^2}{\Delta t} = 29{,}4 + 4{,}9\Delta t, \quad (1)$$

É claro que Δt não pode ser igual a zero pois, neste caso, o membro esquerdo de (1) se tornará $0/0$, o que não tem significado. No entanto, podemos atribuir valores arbitrários para Δt e calcular a velocidade média $\Delta S/\Delta T$ em intervalos de tempo cada vez menores. A tabela a seguir exibe resultados obtidos para a velocidade média com valores de Δt cada vez menores.

Δt	$3 + \Delta t$	ΔS	$\Delta S/\Delta t$
1,00	4,00	34,30	34,30
0,50	3,50	15,925	31,85
0,10	3,10	2,989	29,89
0,01	3,01	0,2944	29,44
0,001	3,001	0,0294049	29,4049
0,0001	3,0001	0,00294004	29,4004

A primeira e a terceira coluna da tabela nos mostram que ΔS torna-se cada vez menor à medida que Δt diminui, isto é, à medida que $(3 + \Delta t)$ aproxima-se de 3. Enquanto isso, na quarta coluna, verifica-se que $\Delta S/\Delta t$ aproxima-se de 29,4, quando Δt diminui. Observando (1) podemos dizer que

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - 29{,}4 = 4{,}9\Delta t \quad (2)$$

aproxima-se de zero.

A diferença exibida no primeiro membro de (2) pode-se tornar tão próxima de 0 quanto queiramos, basta tomar Δt cada vez menor. Esse fato é traduzido em linguagem matemática da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = 29{,}4 \quad (3)$$

Na expressão (3), o primeiro membro da igualdade deve ser lido da seguinte maneira:

"limite de $\frac{\Delta S}{\Delta T}$, quando Δt tende a zero".

Observações:

1) **Sobre o incremento Δt, que na expressão (3) é dito estar "tendendo" para zero (este é o significado da notação $\Delta t \to 0$) deve ser entendido como uma variável que é sempre diferente de zero, embora possa tomar valores arbitrariamente próximos de zero**
2) **Embora, como se encontra no texto, todo o estudo tenha sido feito para $\Delta t > 0$ é necessário ressalvar que, neste caso, resultado final idêntico pode ser encontrado utilizando-se de $\Delta t < 0$. Em cada caso se dá uma aproximação lateral em relação ao instante considerado: aproximação à esquerda se $\Delta t < 0$ ou aproximação à direita se $\Delta t > 0$.**

Voltando ao problema do movimento do corpo, define-se como sendo a *velocidade instantânea* V do corpo no instante $t = 3s$ como sendo o resultado do limite apresentado na expressão (3), isto é

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = 29{,}4\, m/s$$

Procedimento idêntico ao anterior prevalece para se calcular a velocidade instantânea do corpo em queda livre, do exemplo dado, em qualquer outro instante do movimento. Por exemplo, para $t = 2{,}5s$ teremos:

a) Para $t = 2{,}5$: $S_1 = 4{,}9 \cdot (2{,}5)^2 = 30{,}625$

b) Para $t = 2{,}5 + \Delta t$: $S_2 = 4{,}9(2{,}5 + \Delta t)^2 = 30{,}625 + 24{,}5\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2$

Daí, teremos:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 24{,}5\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{24{,}5\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 24{,}5 + 4{,}9\Delta t$$

E, finalmente:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (24{,}5 + 4{,}9\Delta t) = 24{,}5\, m/s$$

Em casos como o do exemplo anterior em que movimento do corpo é dado por uma função do tempo, no caso $S(t) = 4{,}9t^2$, pode-se deduzir uma expressão geral para determinar a velocidade instantânea do corpo em movimento, para qualquer valor de t. Em outras palavras, pode-se determinar a velocidade instantânea V em função do tempo t, como faremos em seguida:

a) Para t, tem-se: $S(t) = 4{,}9t^2$

b) Para $t + \Delta t$, tem-se: $S(t + \Delta t) = 4{,}9(t + \Delta t)^2 = 4{,}9t^2 + 9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2$

Então,

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = 9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9{,}8t + 4{,}9\Delta t$$

E, portanto,

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (9{,}8t + 4{,}9\Delta t) = 9{,}8t \quad (4)$$

O valor do limite acima, que para $S(t) = 4{,}9t^2$ é $V(t) = 9{,}8t$ é denominado de *derivada de S em relação a t* e denotado por ds/dt. Assim, a velocidade instantânea é definida pela derivada do espaço em relação ao tempo.

Notação:

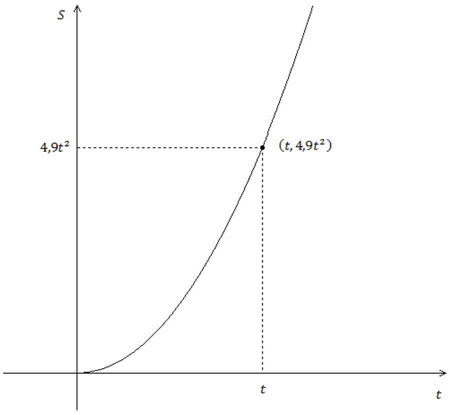
$$V(t) = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Exercício 2.1

1) Para o problema apresentado no Exemplo 2.1 use o resultado (4) obtido anteriormente para calcular a velocidade instantânea nos instantes $t = 2{,}5s$ e $t = 3s$.
2) Um corpo é lançado horizontalmente sobre uma superfície lisa e seu movimento tem por equação $S(t) = 6t - t^2$. Qual é a sua velocidade em $t = 4$.
3) Uma partícula se move segundo a equação $S(t) = 3t^2 + 2t$. Achar a velocidade em um instante genérico t e, depois, em $t = 2$.
4) Dado $S(t) = 2t^2 - 4t + 1$, encontrar ds/dt.

2.2 Inclinação de uma curva num ponto

No Exemplo 2.1, $S(t) = 4{,}9t^2$ define o espaço S como função do tempo t. O gráfico dessa função, lembrando que a variável t é uma grandeza não negativa, é a parte de uma parábola simétrica ao eixo vertical, com vértice na origem do sistema cartesiano



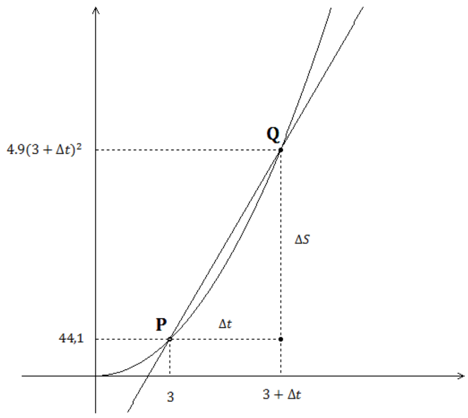
e voltada para cima. Os pontos do gráfico de $S(t) = 4{,}9t^2$ são, portanto, pontos do plano e são da forma $(t, S) = (t, 4{,}9t^2)$.

Baseado no gráfico da função $S(t) = 4{,}9t^2$ daremos a seguir uma interpretação geométrica da velocidade instantânea em $t = 3s$, que foi calculada no Exemplo 2.1. Acompanhe na figura seguinte todos os passos referentes a essa interpretação.

Comecemos marcando sobre o gráfico da função os pontos P e Q de coordenadas $(3,\ 44{,}1)$ e $(3 + \Delta t,\ 4{,}9(3 + \Delta t)^2)$, respectivamente. Observe que

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = 29{,}4 + 4{,}9\Delta t$$

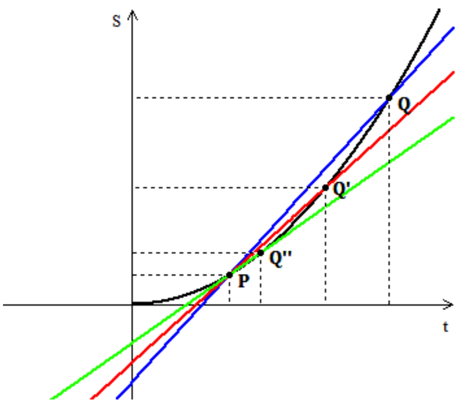
é o coeficiente angular da reta que passa por P e Q e que é secante à curva.



Lembre-se que, para calcular a velocidade instantânea em $t = 3s$, tomamos valores de Δt cada vez menores, isto é, fizemos "Δt tender a 0". Geometricamente, isto equivale a fazer o ponto Q deslizar ao longo da curva assumindo as posições Q', Q'', ..., aproximando-se de P. Assim, as retas secantes por P e Q, P e Q', P e Q'', ..., vão tendendo para a *reta tangente* à curva em P. No mesmo sentido, os coeficientes angulares dessas secantes irão tendendo para o coeficiente angular da *reta tangente* à curva em P.

O processo geométrico descrito conduz aos resultados obtidos anteriormente, ou seja:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (29{,}4 + 4{,}9\Delta t) = 29{,}4$$



O mesmo resultado encontrado para o valor da *velocidade instantânea* é o valor do *coeficiente angular* da reta tangente ao gráfico da função $S(t) = 4{,}9t^2$ em $t = 3$. Esse coeficiente angular, que é o da reta tangente à curva em P, é denominado *inclinação da curva* no ponto em questão.

Juntando-se as duas coisas: o *processo matemático* para a solução do problema de Física, mostrado no Exemplo 2.1, e a sua *interpretação geométrica* exposta anteriormente, deparamos com algo notável: o trabalho de determinação de velocidades instantâneas é equivalente ao cálculo de coeficientes angulares de retas tangentes às curvas que representam seus respectivos movimentos. Além disso, o método construído para a obtenção desses resultados constituiu-se num dos alicerces da revolução ocorrida na matemática, que se iniciou a partir da Idade Moderna com os trabalhos de Descartes, Fermat, Newton, Leiniz e muitos outros.

Neste ponto é aconselhável que o leitor reveja tudo o que foi desenvolvido até o momento, detendo-se em cada conceito apresentado e faça uma reflexão acerca da interpretação geométrica apresentada. Depois faça o exercício a seguir.

Exercício 2.2

Faça uma interpretação geométrica do problema 1, do Exercício 2.1

O leitor que entendeu bem o exemplo desenvolvido anteriormente e que fez o exercício anterior deve ter percebido que a interpretação geométrica apresentada é de mesma natureza, quer seja a do Exemplo 2.1 ou a do Exercício 2.2. No entanto, as funções envolvidas são diferentes e os fenômenos físicos também. Daí se percebe que o que foi desenvolvido é parte de um processo mais geral, isto é, ele pode ser aplicado a outras situações independentemente de estar relacionado ou não a um problema de movimento. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2

Encontrar a inclinação da curva $y = 1/x$, em $x = 1$ e, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva no ponto $(1,1)$.

a) Em $x = 1$, $y_1 = 1$.

b) Em $x = 1 + \Delta x$, $y_2 = \frac{1}{1+\Delta x}$

Então,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$$

Daí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}}{\Delta x} = \frac{-1}{1 + \Delta x}$$

E, finalmente,

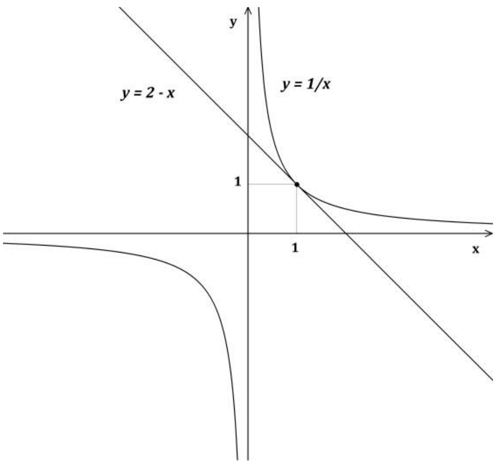
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1$$

Portanto, -1 é a inclinação da curva $y = 1/x$ em $x = 1$, a qual representa o coeficiente angular da reta tangente a essa curva em $x = 1$.

Da Geometria Analítica sabemos que a reta que passa por $(1,1)$ e que possui coeficiente angular igual a -1 tem por equação:

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \text{ ou } y = 2 - x.$$

Para ilustrar, apresentamos a seguir o gráfico de $y = 1/x$ e da reta tangente em $(1,1)$.



Definição 2.1

O limite de $\Delta y/\Delta x$ quando $\Delta x \to 0$ é chamado de derivada de y em relação a x e será denotado por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No exemplo dado temos:

$$para\ y = \frac{1}{x}, temos\ \frac{dy}{dx} = -1, em\ x = 1$$

Se desejássemos calcular a derivada de $y = 1/x$ para algum outro valor de x, procederíamos da mesma forma que foi desenvolvida para $x = 1$. Se em algum problema for necessário o cálculo da derivada de $y = 1/x$ para vários valores de x aplicaríamos, repetidamente, o processo exposto no caso particular de $x = 1$. No entanto, esse trabalho pode ser abreviado se calcularmos a derivada da função dada para um valor genérico de x. Como consequência, obteremos uma fórmula para calcular rapidamente a derivada da função em qualquer valor de x. Veja como isso pode ser feito:

a) Para $x, y_1 = 1/x$

b) Para $x + \Delta x, y_2 = 1/(x + \Delta x)$

Então,

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$

Daí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}.$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Desta forma a derivada de y em relação a x aparece como uma função de x cujo domínio, nesse caso, é o mesmo da função inicial. Essa função é chamada *função derivada* da função inicial, enquanto a função inicial é chamada *função primitiva*[1].

No caso em questão teremos:

Função Primitiva	Função Derivada
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

Outras notações que são usadas frequentemente:

Função Primitiva	Função Derivada
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

A última notação é mais conveniente quando se deseja indicar o valor da derivada num valor particular de x e, nesse caso, o limite que define a derivada é indicado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para exemplificar:

1) A derivada para $x = 1$ é $f'(1) = -1/1^2 = -1$;
2) A derivada para $x = 2$ é $f'(2) = -1/2^2 = -1/4$.

Pode-se achar a derivada de $y = 1/x$ para qualquer valor de $x \neq 0$.

Exemplo 2.3

Dadas as funções $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2$ e $h(x) = 6x$, vamos calcular, nesse exemplo, as funções derivadas de f e de g.

[1] Os conceitos de *função primitiva* e de *função derivada* somente tem sentido quando aparecem relacionados. Isto significa dizer que quando uma função é uma *derivada*, deve ser explicitada qual é a *primitiva* e vice versa. Este cuidado deve ser tomado devido ao fato de que uma função pode, em determinado problema, ser uma *primitiva* e, em outro, ser uma *função derivada.*

1) Cálculo da função derivada da função $f(x) = x^3$.

a) Para x, temos $f(x) = x^3$

b) Para $x + \Delta x$, temos $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

Daí,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

e, portanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

Assim $g(x) = f'(x)$ e, portanto, $g(x) = 3x^2$ é a função derivada de $f(x) = x^3$.

2) Cálculo da função derivada da função $g(x) = 3x^2$.

a) Para x, temos $g(x) = 3x^2$.

b) Para $x + \Delta x$, temos $g(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$

e, portanto,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x$$

Assim $h(x) = g'(x)$ e, portanto, $h(x) = 6x$ é função derivada de $g(x) = 3x^2$.

Conclusão:

A função $g(x) = 3x^2$ é a função derivada de $f(x) = x^3$ e é primitiva de $h(x) = 6x$.

Para casos como o do Exemplo 2.3, usa-se a seguinte notação: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$ (leia-se: derivada segunda de f em relação a x ou, simplesmente, f duas linhas de x).

Outras notações também usadas:

Função	**Derivada Primeira***	**Derivada Segunda****
$y = x^3$	$y' = 3x^2$	$y'' = 6x$
$y = x^3$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

*** No primeiro caso leia-se "y linha" e no segundo "*d* y *d x*".**
**** No primeiro caso leia-se "y duas linhas" e no segundo "*d* 2 *y d x* 2".**

O processo de determinar funções derivadas de outras funções derivadas é chamado de *derivação sucessiva*. Em algumas situações essas derivadas possuem significados especiais, como na Física em que a derivada segunda do espaço em relação ao tempo é a *aceleração*. No Exemplo 2.1 em que temos um movimento em queda livre os elementos principais envolvidos são:

Equação do movimento	**Velocidade do corpo em queda**	**Aceleração do corpo em queda**
$S = 4{,}9t^2$	$\frac{dS}{dt} = 9{,}8t$	$\frac{d^2S}{dt^2} = 9{,}8$

Exercício 2.3

1) Encontre a derivada primeira e a derivada segunda das funções a seguir:

a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = 2x^2 - 3x + 1$ c) $y = x^2 + 3$
d) $f(x) = 3 - x^2$ e) $f(x) = 4x^2 + 12x$ f) $f(x) = 5x + 20$

2) Encontre a derivada da função no ponto dado

a) $g(x) = 2x^2 - 2x,\ \ x = -1$ b) $h(x) = 1 - x^3,\ \ x = 2$
c) $f(x) = 6 - 3x - x^2,\ \ x = 0$ d) $L(x) = x^3 + x^2,\ \ x = 1$

3) Uma partícula se move segundo a equação $S = 4t^2 + 3$. Qual a sua velocidade e a sua aceleração quando $t = 3s$.
4) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + 2x + 1$ no ponto $(2{,}9)$.
5) Verifique se a reta $y = 2x + 1$ é tangente à curva $y = x^2 + 1$.
6) Dentre as retas cujas equações são dadas abaixo, qual é a tangente à curva $y = 1/x$ no ponto de coordenadas $(-1, -1)$? Justifique a sua resposta.

a) $y - 2x = 1$ b) $y - x = 0$ c) $y + x = -2$

2.3 A derivada de $y = x^n$

Em exercícios anteriores já foram calculadas derivadas de algumas potências de x, que relacionamos a seguir juntamente com suas primitivas:

Função primitiva	**Função derivada**
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^3$	$y' = 3x^2$

Observe que o expoente de x na função primitiva aparece como coeficiente de x na função derivada; ainda, o expoente de x na função derivada é uma unidade a menos do que na função primitiva. Na primeira linha esta regra também se mantém, basta reescrevê-la de forma conveniente: se $y = x^1$ então $y' = 1x^0 = 1$.

Continuando essa regra, teremos:

Função primitiva	**Função derivada**
$y = x^4$	$y' = 4x^3$
$y = x^5$	$y' = 5x^4$
$\vdots$	$\vdots$
$y = x^n$	$y = nx^{n-1}$

Essa regra vale para todas as funções potências com expoente real. Apresentaremos uma justificativa para as funções com expoente natural n, utilizando-se o conhecido *Binômio de Newton*:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

Justificativa da regra para $y = x^n,\ \ n \in \aleph$:

a) Para x, temos $y_1 = x^n$

b) Para $x + \Delta x$, temos $y_2 = (x + \Delta x)^n$.

Aplicando o desenvolvimento do *Binômio de Newton,* temos:

$$y_2 = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n$$

Daí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x}$$

E, portanto, dividindo o membro, termo a termo, por Δx, teremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}$$

Finalmente, podemos calcular o limite:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

Exercício 2.4

Encontre a derivada da função:

1) $y = x^6$ 2) $y = x^{20}$ 3) $y = x^{\pi}$ 4) $y = x^{4/3}$