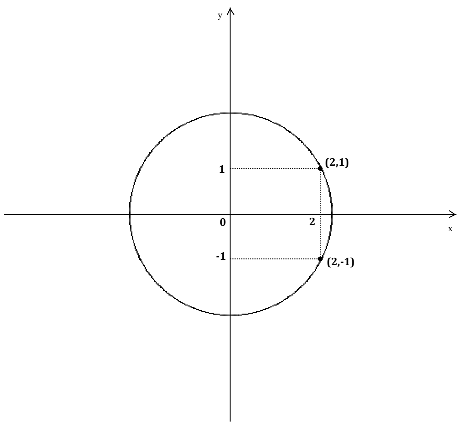
5

Taxa de Variação

Neste capítulo faremos uso da derivada para resolver certos tipos de problemas relacionados com algumas aplicações físicas e geométricas. Nessas aplicações nem sempre as funções envolvidas aparecem de forma evidenciada, tornando-se necessário, na maioria das vezes, construí-las a partir dos dados do problema. Outras vezes, as equações envolvidas podem não representar uma função na forma explícita $y = f(x)$. Em ambos os casos a derivada poderá ser usada depois de feitas as devidas adaptações. Para o caso em que as funções não estão explicitadas podemos fazer o uso da *regra da cadeia* para estabelecer um método de derivação para essas funções. Esse método será abordado em seguida.

5.1 Derivação Implícita

A abordagem do assunto será feita inicialmente explorando uma curva bastante conhecida: a circunferência. Escolheremos como referência a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ cuja expressão analítica é a seguinte:



$$x^2 + y^2 = 5$$

cujo gráfico está exibido ao lado.

Como sabemos a circunferência não é gráfico de função. Basta observar que para $x = 2$ correspondem dois valores para y: $y = 1$ e $y = -1$, isto é, a $x = 2$ encontram-se em correspondência duas imagens.

Associadas à circunferência dada podem ser definidas duas funções:

$$y = \sqrt{5 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{5 - x^2},$$

ambas com domínio no intervalo $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.

Neste caso o gráfico da primeira função é a parte que está no semiplano superior e o gráfico da segunda função está no semiplano inferior. As funções obtidas são deriváveis no intervalo $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$ e suas derivadas, obtidas com aplicação da *regra da cadeia,* são respectivamente:

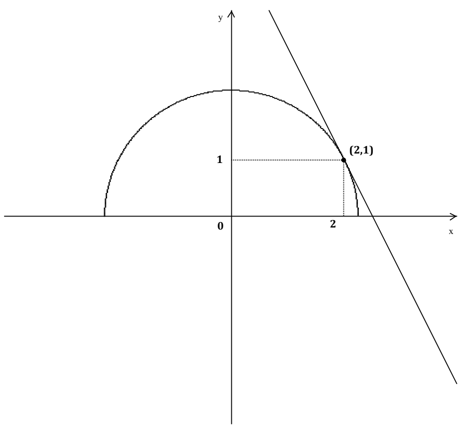
$$y' = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \quad \text{e} \quad y' = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

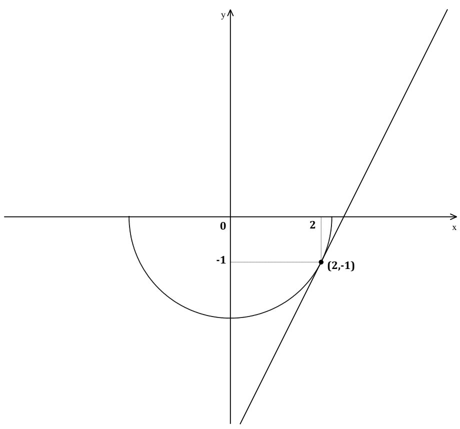
Para, por exemplo, encontrar a equação da reta tangente à circunferência dada, em um dado ponto, deve-se localizar em qual semiplano encontra-se o ponto e considerar a função correspondente. Assim, se o ponto escolhido for (2,1) toma-se a função $y = \sqrt{5-x^2}$ e calcula-se, através da sua derivada, o coeficiente da reta tangente para $x = 2$. Usando a derivada, dada anteriormente, obteremos: $y' = -2$.

A equação da reta que passa por (2,1) com coeficiente angular igual a -2 tem por equação: $y = -2x + 5$.

Caso o ponto dado seja (2,-1) usaremos a função definida por $y = -\sqrt{5-x^2}$ que para $x = 2$ tem-se $y' = 2$. Portanto a equação da reta que passa por (2,-1) e tem coeficiente angular igual a 2 é dada por: $y = 2x - 5$.

Os gráficos das duas funções e suas respectivas retas tangentes nos pontos indicados são:





O processo de *derivação implícita* abrevia o caminho utilizado, tornando-se desnecessária a explicitação das duas funções como anteriormente. Na equação da dada circunferência devemos considerar a variável y como função de x e usar a *regra da cadeia* para derivar y^2 como sendo o quadrado de uma função de x, pensando na seguinte composição:

$$x \to y = f(x) \to u = (f(x))^2 \qquad (1)$$

que pela *regra da cadeia* teremos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ou, de acordo com (1), segue-se que

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \cdot$$

Portanto, usando a relação anterior e regras de derivação, teremos:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(5)}{dx}$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \;\; ou \;\; \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Assim, conseguimos obter a derivada da função $y = f(x)$ implícita na equação

$$x^2 + y^2 = 5$$

sem que tivéssemos o trabalho de explicitá-la, como foi feito no início do parágrafo. Mesmo que a variável y apareça na expressão da derivada ela deve ser entendida como função da variável x. Nesse caso ao se tomar um ponto para calcular a derivada deve-se ter o par (x, y).

Exercício 5.1

Dada a equação $x^2 + y^2 = 5$ e, usando derivação implícita:

1) Mostre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{\sqrt{5 - x^2}}, se\ y > 0$

2) Mostre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{5 - x^2}}, se\ y < 0$

O processo de *derivação implícita* se aplica a uma equação do tipo $F(x, y) = C$, onde se considera uma das variáveis como função da outra, por exemplo, $y = f(x)$. Assim a equação passa a ser interpretada na forma $F\big(x, f(x)\big) = C$ que, então, é derivada em relação a x em ambos os lados da igualdade.

Exemplo 5.1

Dada a equação

$$y^3x^2 + y^2 - x^2\text{y} = 2$$

e considerando $y = f(x)$ vamos encontrar a derivada de y em relação a x, usando o processo de *derivação implícita*. Para tanto, vamos observar as seguintes passagens:

$$\frac{d(y^3x^2 + y^2 - x^2\text{y})}{dx} = \frac{d(2)}{dx}$$

$$x^2\frac{d(y^3)}{dx} + 2xy^3 + \frac{d(y^2)}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + 2y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$(3x^2y^2 + 2y - x^2)\frac{dy}{dx} = -2xy^3 + 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + 2xy}{3x^2y^2 + 2y - x^2}$$

Para calcular a derivada, por exemplo, em $(1,-2)$ teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(-2) - 2(-8)}{3.4 + 2(-2) - 1} = \frac{12}{7}$$

Exercício 5.2

1) Encontre a equação da reta tangente à:

a) Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ no ponto $\left(-1, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

b) Hipérbole $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $(5,-6)$

c) Circunferência $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ no ponto $(2{,}2+\sqrt{3})$

d) Elipse $16x^2 + 32x + 9y^2 + 18y - 120 = 0$ no ponto $(1,-4)$

2) Encontre $y' = \frac{dy}{dx}$ na função $y = f(x)$ definida implicitamente em:

a) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$

b) $x^2y + sen(xy) + x = 1$

c) $e^{xy} + xy = 0$

d) $x^2y + x^3 + y^3 + 2 = 0$

e) $\frac{x^3y - x^2}{x^5y^2} = 1$

f) $sen(xy) + cos(x^2) + ye^{xy} + y$

5.2 Problemas de Taxa de Variação

Já vimos que a derivada de uma função poder ser interpretada como *velocidade instantânea* e como o *coeficiente angular da reta tangente a uma curva*. Outra maneira de interpretar a derivada é através de uma *taxa de variação*. Neste sentido introduzimos uma nova definição.

Definição 5.1

Se $y = f(x)$ é uma função derivável em x_0, o valor de $f'(x_0)$ mede o número de unidades de variação de y por unidade de variação de x no instante x_0 e, por esse motivo, é chamada de *taxa de variação de y em relação à x em* x_0.

Exemplo 5.2

A que *taxa de variação* cresce a área de um círculo em relação ao seu raio, quando o raio é igual a 2?

Sabemos que a área de um círculo é função do seu raio através da fórmula $A(r) = \pi r^2$.

Daí, teremos que:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Portanto, quando $r = 2$ encontraremos:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi.$$

Logo 4π é o valor da taxa de crescimento da área em relação ao raio, quando este é igual a 2.

Algumas vezes lidamos com a composição $y = f(x)$ e $x = g(t)$ em que se deseja calcular a taxa de variação y em relação a t, num instante t_0, conhecendo a taxa de variação de x em relação a t, no mesmo instante t_0. Problema desse tipo ou como o do Exemplo 5.2 é chamado de *problema de taxa de variação*.

Exemplo 5.3

A que taxa cresce o volume de uma bola de neve esférica, sabendo-se que o raio cresce à razão de 5 cm/s, no instante em que ele mede 10 cm?

Sabemos que o volume da esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e que $\frac{dr}{dt} = 5$.

Usando a *regra da cadeia* para derivar V em relação a t teremos:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{e, portanto} \qquad \left.\frac{dV}{dt}\right]_{r=10} = 2000\pi.$$

Logo, o volume da esfera cresce a $2000\pi\ cm^3/s$.

Observação: A notação $\left.\frac{dV}{dt}\right]_{r=10}$ é usada para indicar que $\frac{dV}{dt}$ está sendo calculada para $r = 10$.

Exemplo 5.5

Dois carros partem de um cruzamento no mesmo momento. Um viaja para o norte a 80 km/h e outro viaja para o leste a 60 km/h. A que taxa aumenta a distância entre os dois carros 2 horas após a partida?

Sejam y a distância em relação ao ponto de partida P do carro que foi para o norte e x a distância do outro carro que foi para o leste, conforme figura ao lado. Logo x e y podem ser colocados em função do tempo através das equações: $x = 60t$ e $y = 80t$. Suas velocidades são, respectivamente,

$$\frac{dx}{dt} = 60 \text{ e } \frac{dy}{dt} = 80.$$

Seja S a distância entre os dois carros. Já que o triângulo da figura é retângulo em *P,* podemos relacionar S com x e y usando o *Teorema de Pitágoras*, ou seja

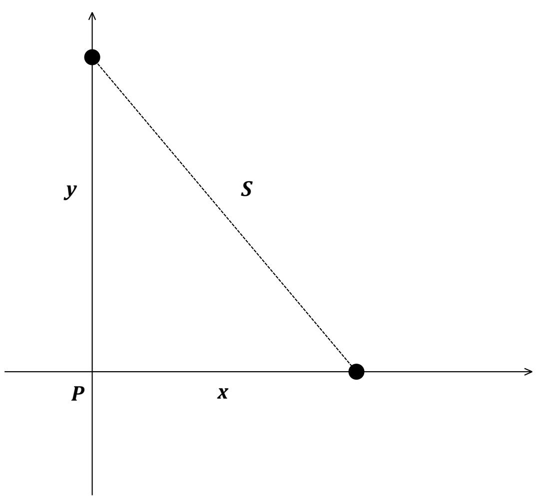
$$S^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

Para encontrar a taxa de variação de S em relação a t deveremos derivar implicitamente a expressão (1) em relação a t e, assim, teremos:

$$2S\frac{dS}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\cdot$$

Logo,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2S} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{60x + 80y}{S}$$



Para $t = 2$, teremos, $y = 160$, $x = 120$ e $S = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200$.

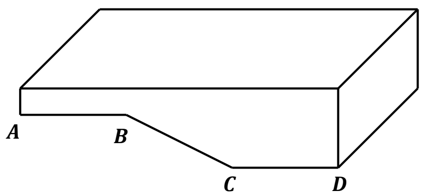
Portanto, duas horas após a partida, a distância entre os dois carros aumenta a uma velocidade de 100 km/h .

Exercícios 5.4

1) Uma escada de 3m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Sabendo-se que a extremidade inferior afasta-se do muro à razão de $1m/s$, com que rapidez desce a extremidade superior, quando a inferior dista do muro 2m?

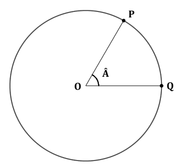
2) Qual a taxa de variação da área do círculo em relação ao seu diâmetro?

3) Uma piscina tem a forma como mostra a figura ao lado. Sabe-se que sua largura mede 25m, o comprimento 50m e que a sua parte mais funda mede 4m de profundidade e, a mais rasa, 1m de profundidade. Tem-se, também, que o comprimento de sua parte mais rasa (AB) possui o mesmo comprimento da parte mais funda (CD) de forma que $AB = CD = 15m$. Sabendo-se que a água entra na piscina a uma razão de $1m^3/min$, a que taxa sobe o nível h da água quando:
a) $h = 2m$?
b) $h = 3{,}5m$?

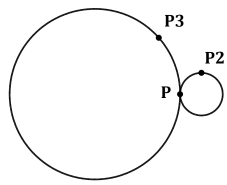


4) Um carro parte de um cruzamento a $50\, km/h$ na direção norte. Um outro carro, situado a 80 km a oeste do cruzamento, parte na direção leste a $60\, km/h$. A que taxa varia a distância entre os dois carros, quando se passou 1h? E quando se passaram 3h?

5) Um ponto P de uma polia de raio 3, conforme figura ao lado, se move no sentido horário a partir do ponto Q conforme a equação horária $S = 2t^2 + t$. Encontre a velocidade angular $d\hat{A}/dt$ quando $t = 2$.



6) Considere uma engrenagem formada por duas rodas dentadas, conforme figura ao lado, de raio r e $r/3$, respectivamente. Sabendo-se que a velocidade angular da primeira roda é constante e igual a ω, encontre a velocidade angular da segunda roda.



7) Um ponto se move na parábola $y = x^2 + 2x + 2$. Sabendo-se que dx/dt é igual a 5 calcule dy/dt para $x = -2$.

8) Um monte de areia, em forma de um cone, aumenta de volume à razão de $5m^3/h$. Se o raio da base é sempre igual à metade da altura, a que taxa cresce essa altura quando $h = 1m$?

9) Em um tanque em forma de cilindro despeja-se água à razão de $100cm^3/min$. Sabendo-se que o diâmetro da base mede $180cm$, com que rapidez varia o nível da água quando h mede 50 centímetros?

10) Um homem de $1{,}8m$ de altura caminha na direção de um poste de luz de $5m$ de altura a uma velocidade de $60m/min$. Com que velocidade se move a extremidade de sua sombra quando estiver a $10m$ do poste? Com que velocidade varia o comprimento de sua sombra nesse mesmo instante?

11) Se o raio da base de um cilindro circular reto é $50cm$ qual é a taxa de variação do volume em relação à altura, quando esta for de $100cm$?

12) Determine a equação da reta tangente à curva $xe^y - y + 1 = 0$, no ponto de coordenadas (1,0).

13) Um ponto se move ao longo da curva $y = x^3$ de forma que a sua distância à origem aumenta de 2 unidades por segundo. Determine dx/dt, quando $x = 2$.

14) O comprimento da aresta de um cubo está crescendo a $2\ cm/s$. A que taxa estará crescendo o volume quando a aresta for igual a $3cm$?

15) Um balão está subindo a uma velocidade de $30\ m/min$ quando se encontra a $20m$ de um observador. A que taxa aumentará o ângulo de visão do observador quando o balão estiver a $60m$ do solo?