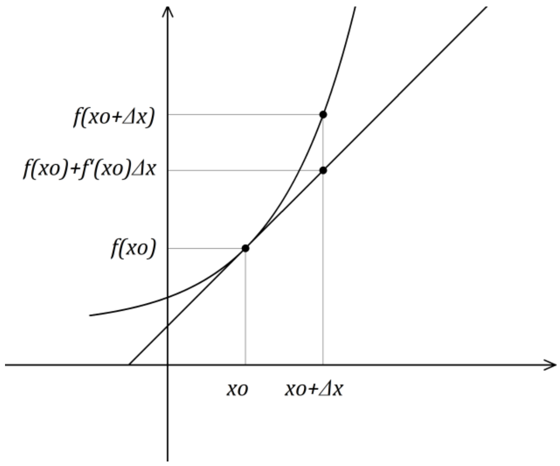
# Fórmula de Taylor

Quando estudamos a diferencial vimos que poderíamos calcular o valor aproximado de uma função usando a sua reta tangente. Isto pode ser feito encontrando-se a equação da reta tangente a uma função $y = f(x)$, em um valor $x_0$ do seu domínio e, em seguida, usando essa equação para obter uma aproximação para $f(x_0 + \Delta x)$, da seguinte forma:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$




O estudo sobre diferenciais foi suficiente para mostrar que em aproximações desse tipo bons resultados são encontrados quando são utilizados valores pequenos para $|\Delta x|$. No entanto, àquela oportunidade não tínhamos um instrumento para medir qual a diferença entre o valor exato e a aproximação obtida. O objetivo principal deste capítulo é mostrar que, tendo-se uma função diferenciável numa vizinhança de um ponto, podemos construir polinômios que se aproximam dessa função e, além disso, determinar qual o erro que se comete nessas aproximações.

## 13.1 Aproximações

Quando queremos encontrar uma reta que mais se aproxima do gráfico de $y = f(x)$, numa vizinhança de $x_0$, pensamos logo na reta tangente à função dada no ponto $x_0$. A reta tangente constitui-se na melhor aproximação linear da função $y = f(x)$ e sua equação é:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

As características importantes dessa função são destacadas pelos seguintes fatos:

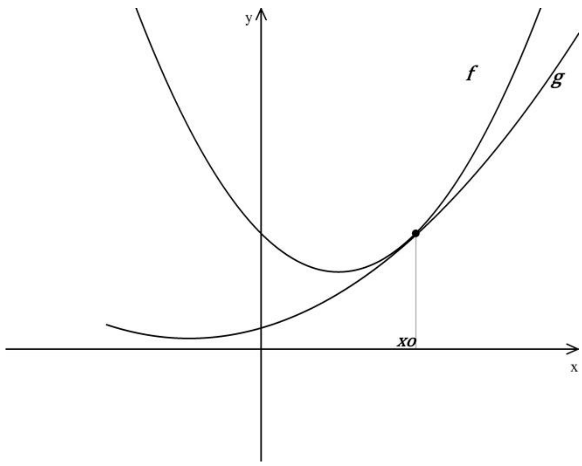
1) $\lim_{x \to x_0} [g(x) - f(x)] = \lim_{x \to x_0} [f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) - f(x)] = 0$

2) $$\lim_{x \to x_0} \left[ \frac{g(x) - f(x)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) - f(x)}{x - x_0} \right] = 0$$

A igualdade dada pelo primeiro fato significa que quando $x$ aproxima-se de $x_0$, $g(x)$ e $f(x)$ ficam próximas. A segunda igualdade significa que $g(x)$ aproxima-se de $f(x)$ mais rapidamente do que $x$ de $x_0$. Ou seja, quando $x \to x_0$, $|g(x) - f(x)|$ é menor do que $|x - x_0|$. Na linguagem de infinitésimos, diz-se que $|g(x) - f(x)|$ é um infinitésimo de ordem superior a $|x - x_0|$.

A função dada $y = f(x)$ pode ser aproximada por funções não lineares. Uma função polinomial do segundo grau, por exemplo, pode ser encontrada de forma a constituir-se numa aproximação de $y = f(x)$ com resultados, muitas vezes, melhores do que aqueles obtidos pela função linear. Evidentemente, algumas exigências são necessárias para se obter uma função quadrática da forma desejada.

Inicialmente exigiremos que a parábola e a função $y = f(x)$ tenham em comum o ponto $(x_0, f(x_0))$. Exigiremos, também, que a função e a parábola tenham retas tangentes comuns neste ponto, ou seja, as suas primeiras derivadas em $x_0$ devem ser iguais. Seria bom, também, que elas tivessem a mesma convexidade, ou seja que as suas segundas derivadas coincidissem em $x_0$. Podemos ilustrar essas condições com o seguinte gráfico




Procuremos, então, uma parábola da forma

$$g(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$$

que satisfaça as condições estabelecidas:

1) de $g(x_0) = f(x_0)$, obtemos $c = f(x_0)$;
2) de $g'(x_0) = f'(x_0)$ e de $g'(x) = 2a(x - x_0) + b$, teremos:

$$2a(x_0 - x_0) + b = f'(x_0)$$

e, daí, segue-se que $b = f'(x_0)$;

3) de $g''(x_0) = f''(x_0)$ e de $g''(x) = 2a$ obtemos que $a = f''(x_0)/2$.

Desta forma, teremos a parábola:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Esta parábola é uma aproximação de $y = f(x)$, quando $x \to x_0$, pois,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

E, ainda, como no caso da reta tangente, teremos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

pois,

$$\lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0) - f'^{(x_0)(x - x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) \right] = 0.$$

Ou seja, $|f(x) - g(x)|$ é um infinitésimo de ordem superior a $|x - x_0|$. Isto reforça a afirmação de que $g(x)$ aproxima-se de $f(x)$, mais rapidamente do que $x$ aproxima-se de $x_0$. Continuando este processo, podemos pensar em obter um polinômio do 3º grau que se aproxime da função dada, em condições similares ao caso da função quadrática. Neste caso, exigiremos que a função $y = f(x)$ e o polinômio $g(x)$, tenham no ponto $x_0$:

1º) os mesmos valores;

2º) as mesmas primeiras derivadas;

3º) as mesmas segundas derivadas;

4º) as mesmas terceiras derivadas.

O polinômio obtido daí teria a seguinte forma:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$$

com

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Na próxima seção, verificaremos que este processo pode ser generalizado e apresentaremos uma forma de escrever a diferença entre $g(x)$ e $f(x)$.

Exercício 13.1

1) Faça os cálculos para verificar que o polinômio de 3º grau que satisfaz as seguintes propriedades: $g(x_0) = f(x_0)$, $g'(x_0) = f'(x_0)$, $g''(x_0) = f''(x_0)$ e $g'''(x_0) = f'''(x_0)$ é realmente aquele apresentado anteriormente. Encontre, também, o polinômio do 4º grau, sob condições semelhantes às anteriores.

2) Com as condições do problema anterior, encontre os polinômios de 1º, 2º e de 3º graus que mais se aproxima de:

a) $y = senx$, em $x_0 = 0$;

b) $y = cosx$, em $x_0 = 0$;

c) $y = e^x$, em $x_0 = 0$;

d) $y = x^3 - 5x^2 + 2x$, em $x_0 = 0$ e $x_0 = 8$.

## 13.2 A Fórmula de Taylor[1]

Generalizando o processo anterior, é possível encontrar-se um polinômio $g(x)$, de grau $n$, que se aproxime de uma função dada. De acordo com o processo esboçado na seção anterior, uma função $y = f(x)$, derivável até a ordem $(n+1)$ em $x_0$, poderá ser aproximada pelo polinômio $g(x)$ da forma:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

O teorema seguinte além de formalizar este fato, exibirá qual o erro que se comete nessa aproximação.

Teorema 13.1 (Fórmula de Taylor)

Se $y = f(x)$ uma função derivável e com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ em $]a, b[$ e seja, ainda, $x_0 \in\ ]a, b[$ , então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}$$

[1] Taylor, B. (1698 – 1746) – Matemático inglês.

onde

$$R_{n+1} = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

Demonstração:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$$

e, daí

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \quad (1)$$

Se considerarmos que a própria função é a sua derivada de ordem zero, a expressão (1) é a Formula de Taylor para $n = 0$.

Para verificarmos no caso em que $n = 1$, basta aplicar a *técnica de integração por partes* em

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Assim, fazendo $u = f'(t)$ e $dv = dt$, teremos $du = f''(t)dt$ e $v = t - x$ (em vez de $v = t$, como se considera usualmente, usamos neste caso $v = t - x$ por ser mais conveniente, o que é possível uma vez que $x$ é constante em relação à $t$). Então, teremos:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = (t-x)f'(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)f''(t)\,dt$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt \quad (2)$$

Levando (2) em (1), teremos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$$

que é a Fórmula de Taylor para $n = 1$.

Para provarmos o caso geral usaremos o *princípio da indução finita*. Supondo-se que a fórmula seja válida para $n - 1$, mostraremos, em consequência que ela será válida para $n$.

Para $n-1$, a Fórmula de Taylor será

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n \quad (3)$$

onde

$$R_n=\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \quad (4)$$

Aplicando a *técnica de integração por partes* em (4), considerando:

$$u=f^{(n)}(t) \quad \text{e} \quad dv=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt, \quad \text{tem-se} \quad du=f^{(n+1)}(t)dt \quad \text{e} \quad v=-\frac{(x-t)^n}{n!},$$

e, daí, resulta que:

$$R_n=-\left[\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(t)\right]\Bigg|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$$

ou

$$R_n=\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt \quad (5)$$

Levando (5) em (3) obtemos, justamente, a Fórmula de Taylor para $n$, sendo a integral que aparece em (5) o termo $R_{n+1}$.

Exemplo 13.2

Vamos escrever a Fórmula de Taylor para $f(x)=senx$, em $x_0=0$. Para isso, ao calcular as derivadas da função, teremos:

$$f'(x)=cosx, \quad f''(x)=-senx, \quad f'''(x)=-cosx, \quad f^{(4)}(x)=senx, \quad f^{(5)}(x)=cosx$$

O leitor pode observar que, a partir da derivada de ordem 5, as derivadas da função $f(x)=senx$ começam a repetir-se e, assim, podemos determinar sem dificuldade o valor da derivada em qualquer ordem. Dessa forma, calculando-se as derivadas em $x=0$, teremos:

$$f'(0)=1, \qquad f''(0)=0, \qquad f'''(0)=-1, \qquad f^{(4)}(0)=0, \qquad f^{(5)}(0)=1,\cdots$$

Ao calcularmos as derivadas em $x = 0$, notamos que as derivadas de ordem par são nulas e as de ordem ímpar são 1 ou $-1$, alternadamente. Portanto, podemos escrever a Fórmula de Taylor para $f(x) = senx$ como sendo:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + R_{n+1}$$

com

$$R_{n+1} = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$$

onde

$$f^{(n+1)}(t) = \pm sent \text{ ou } f^{(n+1)}(t) = \pm cost.$$

Uma aplicação importante da Fórmula de Taylor é a do cálculo aproximado do valor de funções. Além de podermos aproximar uma função por um polinômio, a expressão $R_n$ que denominamos *resto de ordem n*, nos permite "medir" qual foi a aproximação. Nos exemplos a seguir esta idéia ficará mais clara. Mas, antes dos exemplos, demonstraremos um teorema que nos facilitará as aplicações.

Teorema 13.2 (Teorema do Resto de Lagrange[2])

Seja $y = f(x)$ uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ em $[x_0, x]$. O resto da Fórmula de Taylor, neste caso denominado *Resto de Lagrange*, pode ser escrito da seguinte forma:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad a \in [x_0, x].$$

Demonstração:

Como $f^{(n+1)}(t)$ é contínua em $[x_0, x]$, existem $c$ e $d$, neste intervalo, onde essa função assume máximo e mínimo absolutos. Consideremos $M = f^{(n+1)}(d)$ e $m = f^{(n+1)}(c)$, respectivamente, os valores máximo e mínimo absolutos de $f^{(n+1)}(t)$ no intervalo $[x_0, x]$. Assim,

$$f^{(n+1)}(c) \leq f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(d), \qquad t \in [x_0, x]$$

e, portanto,

---

[2] Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) foi um matemático italiano, nascido em Turim. Segundo Howard Eves *in Introdução à História da Matemática*, p.483, Lagrange e Leonhard Euler (1707 – 1783), são considerados " os dois maiores matemáticos do século XVIII".

$$\frac{f^{(n+1)}(c)(x-t)^n}{n!} \leq \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} \leq \frac{f^{(n+1)}(d)(x-t)^n}{n!}$$

Das propriedades da integral podemos concluir que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-t)^n}{n!}dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(d)(x-t)^n}{n!}dt$$

Daí,

$$\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt \leq \frac{f^{(n+1)}(d)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

A função

$$g(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

é contínua em $[c, d]$ e como

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$$

é um valor entre $g(c)$ e $g(d)$, pelo *Teorema do Valor Intermediário* existe $a$, $c \leq a \leq d$, e, portanto, $x_0 \leq a \leq x$, tal que

$$g(a) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt,$$

ou seja,

$$\frac{f^{(n+1)}(a)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}dt$$

Logo, podemos escrever que

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{onde } x_0 \leq a \leq x.$$

Este teorema também é válido quando $x_0 \leq x$ e, fazendo as devidas adaptações, a demonstração é semelhante à anterior.

Vejamos agora alguns exemplos de como o resto, colocado nessa forma, permite-nos aplicações interessantes no cálculo da medida do erro cometido nas aproximações de valores de funções e até de integrais definidas.

Exemplo 13.3

No Exemplo 13.2 vimos que

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + R_{n+1}$$

Pelo Teorema do Resto, podemos escrever:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mas, como $f^{(n+1)}(a)$ é igual a $\pm sena$ ou $\pm cosa$, teremos:

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Vamos usar esta limitação para calcular o valor de $sen(0{,}1)$, com erro inferior a $10^{-8}$. Neste caso, devemos ter então

$$|R_{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(10^{-1})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^{-n-1}}{(n+1)!} < 10^{-8}$$

Atribuindo valores a $n$ verificamos que para $n = 5$, obtemos

$$|R_6| \leq \frac{10^{-6}}{720} = \frac{1}{7{,}2} \cdot 10^{-8} < 10^{-8}.$$

Assim, basta tomar o termos até o grau 5 e teremos:

$$sen(0{,}1) = 10^{-1} - \frac{10^{-3}}{3!} + \frac{10^{-5}}{5!} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12000000} = \frac{1198001}{12.10^6} \approx 0{,}9983345.$$

Exemplo 13.4

Vamos calcular agora $\sqrt{e}$ com erro inferior a $10^{-4}$.

Tomando $f(x) = e^x$, sabemos que $f^{(n)}(x) = e^x$, logo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}$$

e

$$|R_{n+1}| = \frac{e^a|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad a \in [0.x].$$

Assim, para $0 \leq a \leq 1/2$ teremos que $e^a \geq 1$ (por quê?) e, ainda, $e^{1/2} < e < 3$ (veja Cap. 10, Seção 4). Daí, teremos:

$$|R_{n+1}| \leq \frac{3\left|\frac{1}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

A desigualdade é verificada para $n = 5$ e assim

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = \frac{6331}{3840} \approx 1{,}6487.$$

Exemplo 13.5

Vamos calcular a integral

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{ln(1+x)}{x} dx$$

com erro inferior a $10^{-3}$.

Pelos métodos apresentados até agora, não sabemos como resolver esta integral por desconhecermos uma primitiva para a função

$$f(x) = \frac{ln(1+x)}{x}.$$

Para resolver a questão precisamos encontrar a Fórmula de Taylor para a função integranda. Para tanto, iremos encontrar, primeiramente, a Fórmula de Taylor para a função $g(x) = ln(1+x)$, em $x_0 = 0$. Assim, apresentamos a seguir um quadro em que aparecem as derivadas dessa função e seus respectivos valores em $x_0 = 0$:

| **A função $g(x) = ln(1+x)$ e suas derivadas** | **Valores da função $g(x) = ln(1+x)$ e de suas derivadas em $x_0 = 0$** |
|---|---|
| $g(x) = ln(1+x)$ | $g(0) = 0$ |
| $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ | $g'(0) = 1$ |
| $g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ | $g''(0) = -1$ |
| $g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ | $g'''(0) = 2$ |
| $g^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ | $g^{(4)}(0) = -6$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Podemos provar por indução que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \;\; para\, n \geq 1.$$

Logo,

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1} \quad (1)$$

onde

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad com\;\; 0 \leq a \leq x.$$

Neste caso, teremos:

$$|R_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+a)^{n+1}} \leq \frac{|x|^{n+1}}{n}.$$

Para obter-se a função integranda dada, basta dividirmos (1) por $x$, como fazemos a seguir:

$$\frac{ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots + \frac{R_{n+1}}{x}$$

Integrando termo a termo, teremos:

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{ln(1+x)}{x}\,dx = \int_{0,1}^{0,2} \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots + \frac{R_{n+1}}{x}\right] dx$$

Como queremos que o erro seja inferior a $10^{-3}$, teremos de exigir que, para algum $n$, tenhamos

$$\left|\int_{0,1}^{0,2} \frac{R_{n+1}}{x}\,dx\right| < 10^{-3}.$$

Como

$$\left|\int_{0,1}^{0,2} \frac{R_{n+1}}{x}\,dx\right| \leq \int_{0,1}^{0,2} \left|\frac{R_{n+1}}{x}\right| dx \leq \int_{0,1}^{0,2} \frac{|x|^{n+1}}{n|x|}\,dx$$

e

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{|x|^{n+1}}{n|x|}\,dx = \int_{0,1}^{0,2} \frac{x^n}{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)n}\bigg|_{0,1}^{0,2} = \frac{(0,2)^{n+1} - (0,1)^{n+1}}{n^2+n} \quad (2)$$

Em (2) vamos considerar:

$$T(n) = \frac{(0{,}2)^{n+1} - (0{,}1)^{n+1}}{n^2 + n}$$

daí

$$T(3) = \frac{(0{,}2)^{3+1} - (0{,}1)^{3+1}}{3^2 + 3} = \frac{0{,}0016 - 0{,}0001}{12} = 0{,}000125 < 10^{-3}.$$

Assim,

$$\left|\int_{0,1}^{0,2} \frac{R_{3+1}}{x}\,dx\right| \leq 10^{-3}$$

e, portanto,

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{ln(1+x)}{x}\,dx \approx \int_{0,1}^{0,2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) dx = 0{,}09328.$$

Exemplo 13.6

Como última aplicação. Mostraremos uma regra de cálculo de limites denominada *Regra de L'Hospital*[3]. Faremos a demonstração apenas de um caso particular. Consideraremos funções $f$ e $g$ com derivadas de 2ª ordem contínuas num intervalo aberto contendo o zero, com $g'(x) \neq 0$ e satisfazendo, ainda, a condição a seguir:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

A *Regra de L'Hospital*, afirma que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot$$

Para verificá-la, vamos escrever a Fórmula de Taylor das funções $f$ e $g$, para $n = 1$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)x^2}{2},\ \ com\ c \in\ ]0, x[$$

e

[3] L'Hospital, G.F.A. (1661 – 1704), matemático francês, personagem de um feito bastante interessante, relatado por Eves, H., *in Introdução à História da Matemática*, p.444, que afirma: "O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696; seu autor, o marquês de L'Hospital, por um acordo singular, publicou as lições que recebeu do seu professor particular, Johann Bernoulli. Nesse livro encontra-se a chamada *regra de L'Hospital*..."

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(d)x^2}{2}, \quad com\ d \in \,]0, x[\,\cdot$$

Como $f$ e $g$ são contínuas temos que:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ e } g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(0)x + \frac{f''(c)x^2}{2}}{g'(0)x + \frac{g''(d)x^2}{2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(0) + \frac{f''(c)x}{2}}{g'(0) + \frac{g''(d)x}{2}}\right] = \frac{f'(0)}{g'(0)}\cdot$$

Como

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) \text{ e } g'(0) = \lim_{x\to 0} g'(x)$$

temos, finalmente, que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot$$

Exercício 13.2

1) Calcule, com erro inferior a $10^{-3}$, os valores indicados a seguir:

a) $sen(0,2)$ b) $\cos(0,1)$ c) $sen\left(\frac{\pi}{2} + 0,1\right)$

d) $e$ e) $e^{0,1}$ f) $\ln(0,9)$

2) Mostre que: $(1+x)^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}x$

3) Mostre que:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R(x), \qquad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \ onde \ |R(x)| \le \frac{1}{46080}$$

4) Calcule as integrais a seguir, com erro inferior a $10^{-3}$:

a) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ b) $\int_{0.1}^{0,2} \frac{senx}{x}\,dx$ c) $\int_0^{0,5} \frac{cosx - 1}{x}\,dx$

5) Usando a *Regra de L'Hospital*, calcule:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{senx}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{senx - x}{tgx - x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1 - e^x}$