Séries

12.1 Sequência

O matemático italiano *Leonardo de Pisa (1180 – 1250)*[1], também chamado *Fibonacci*, escreveu em 1202 o Livro *Liber Abaci (O Livro do Ábaco)*, no qual propôs o seguinte problema:

> *" Caso não ocorram mortes, encontrar ao final de um ano o número de casais de coelhos nascidos de um único casal, sabendo-se que cada casal produz um outro casal a cada mês e que, com dois meses de idade, o casal já é adulto e começa a reproduzir".*

O esquema usado a seguir permite um melhor entendimento da forma de se obter a solução do problema.

Tempo	Casais Adultos	Casais Não Adultos	Total de Casais
	1	0	1
1º mês	1	1_0	2
2º mês	1	$1_1 + 1_0 = 2$	3
3º mês	2	$1_1 + 2_0 = 3$	5
4º mês	3	$2_1 + 3_0 = 5$	8
5º mês	5	$3_1 + 5_0 = 8$	13
⋮	⋮	⋮	⋮
12º mês	144	233	377

Observação: Os índices inferiores usados nos números da 3º coluna representam a idade do casal em meses.

Completando-se as colunas até o 12º mês, o leitor encontrará, no final da última coluna, valor correspondente a 377 casais, que compreende os 376 casais nascidos (resposta do problema) mais o casal inicial.

A solução deste antigo e interessante problema apresenta, curiosamente, em cada uma das colunas da tabela anterior, exceto a primeira, a mesma listagem de números, a partir de certo valor, como podemos perceber a seguir:

---

[1] *Leonardo Fibonacci* (1175-1250), também chamado *Leonardo de Pisa* foi, segundo *Howard Eves – Introdução à História da Matemática*, Ed. Da Unicamp, 1995, p.292, "o mais talentoso matemático da Idade Média". É interessante ler *in Eves*: *Fibonacci e o Século XIII*, p.292 e seguintes. Vale a pena, também, ler cinco tópicos, começando com "*A Expansão dos Numerais Indo-Arábicos*", páginas 172-175, de *Carl B. Boyer*, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, 1996, São Paulo.

Segunda coluna: 1, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Terceira coluna: 0, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Quarta coluna: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A primeira listagem, a partir do terceiro termo, e a segunda, a partir do segundo termo, repetem os termos da terceira listagem. Os números destas listagens, com exceção do primeiro da segunda listagem, prolongados indefinidamente, são denominados *Números de Fibonacci*.

Observem que se designarmos os números da listagem: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$

por

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \cdots \quad n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$\begin{array}{ccc} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 1 \\ a_3 & = & a_1 + a_2 \\ a_4 & = & a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \end{array}$$

Esta listagem é denominada *Sequência de Fibonacci*.

Exemplo 12.1

Escolhendo-se $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ e adotando-se $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, tem-se:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, \cdots$$

Em geral, usamos o termo *Sequência* para designar uma listagem com infinitos números dispostos numa certa ordem, tal como mostramos no exemplo a seguir.

Exemplo 12.2

a) $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ (Sequência dos números naturais);

b) $0, 2, 4, 6, 8, \cdots$ (Sequência dos números pares não negativos);

c) $1, 4, 7, 10, \cdots$ (Termos de uma Progressão Aritmética);

d) $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ (Termos de uma Progressão Geométrica);

e) $1,2,3,1,2,3, \cdots$

f) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$

Uma sequência pode ser escrita listando os seus elementos na forma

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots \qquad (1)$$

onde os índices indicam a posição ou a ordem de cada elemento na sequência ou, quando for possível, através de uma forma compacta na qual o termo de *ordem* n, a_n, encontra-se definido por alguma lei de formação. Neste caso, a sequência será denotada por $\{a_n\}$ e a_n é chamado de *termo geral* da sequência. No item a) do Exemplo 12.2, temos:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_2 = 3, \cdots, a_n = n$$

Logo esta sequência será denotada por $\{n\}$. O leitor deverá verificar que a sequência do item b), do Exemplo 12.2, pode ser escrita na forma compacta por $\{2(n-1)\}$.

A representação da sequência tanto na forma compacta, quanto através da listagem de seus termos, como em (1), sugere a construção de uma função com domínio no conjunto $\mathbb{N}$ dos *números naturais* e com contradomínio no conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais*. Em outras palavras, estamos dizendo que, conhecida a sequência

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$$

podemos definir a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n$$

Equivalentemente, a toda função com domínio $\mathbb{N}$ podemos associar uma sequência pela lei $a_n = f(n)$. Deste modo, a definição de sequência pode ser formalizada por meio de função. Como consequência, podemos falar no gráfico de uma sequência como sendo o gráfico da função que lhe é associada.

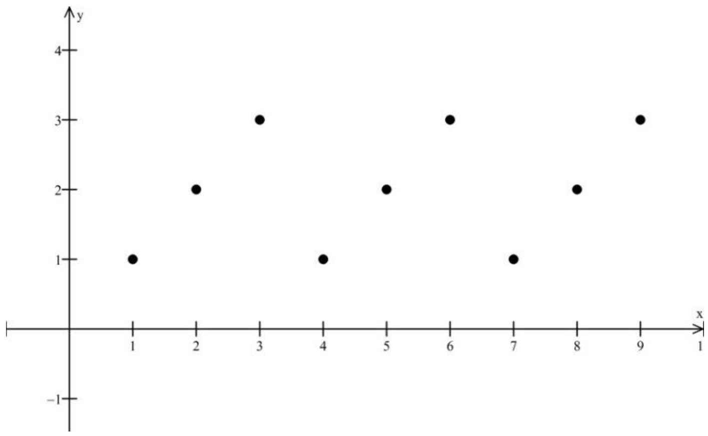


Gráfico da Sequência e) do Exemplo 12.2

É importante observar que a exemplo do que tem sido feito até o momento, iremos nos referir à função associada a uma sequência usando apenas a sua lei de formação, deixando subentendido o seu domínio $\mathbb{N}$ e o seu contradomínio $\mathbb{R}$, exceto quando o contexto exigir a necessidade de suas referências.

Exemplo 12.3

a) A sequência definida pela função

$$f(n) = \frac{1}{2n+1}$$

é

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{1}{2n+1}, \cdots$$

b) O termo geral da sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$$

é

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

O estudo que desenvolveremos terá por objetivo classificar uma sequência como convergente ou divergente (não convergente). Com esse intuito daremos a seguinte definição:

Definição 12.1

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é convergente quando existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Caso este limite não exista, dizemos que a sequência é divergente. O valor do limite, quando ele existe, é denominado *limite da sequência*.

A sequência do item f) do Exemplo 12.2 possui termo geral dado por

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

e, portanto, é convergente, pois

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right] = 0$$

Por outro lado, a sequência d) do mesmo exemplo tem termo geral dado por $a_n = 2^{n-1}$ e, portanto, é divergente, pois.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty.$$

Exemplo 12.4

A sequência

$$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$$

é convergente, pois

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\cdot$$

Exercício 12.1

1) Justifique porque as sequências a), b) c) e e) do Exemplo 12.2 são divergentes.
2) Encontre o termo geral das sequências seguintes e represente graficamente as três primeiras.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ b) $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ c) $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

d) $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \cdots$ e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ f) $\frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{20}, \cdots$

3) Verifique se as sequências do exercício anterior convergem ou divergem.

4) Verifique se as sequências dadas a seguir convergem ou divergem.

a) $\left\{\frac{n^2+n}{2n}\right\}$ b) $\left\{\frac{n^2+1}{5n^2}\right\}$ c) $\left\{\frac{4n}{n^2+5}\right\}$ d) $\left\{\frac{sh(n)}{ch(n)}\right\}$

e) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ f) $\left\{\frac{ln(1+n)}{n}\right\}$ g) $\{sh(n)\}$ h) $\left\{\frac{sen(n)}{n}\right\}$

i) $\{\cos(n)\}$ j) $\left\{\frac{\cos(n)}{e^n}\right\}$

Definição 12.2

Dizemos que uma sequência a_n é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.

Definição 12.3

Dizemos que uma sequência a_n é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Sequências crescentes ou decrescentes são denominadas *sequências monótonas*.

Exemplo 12.5

A sequência $\{1/n\}$ é decrescente e a *sequência de Fibonacci* é crescente.

Pelos exemplos que vimos anteriormente, poderíamos pensar que o fato de uma sequência ser monótona implica obrigatoriamente sua convergência. Entretanto, existem sequências monótonas convergentes e sequências monótonas divergentes. Mas o teorema que iremos enunciar a seguir relaciona os dois conceitos. Antes, porém, daremos uma definição.

Definição 12.4

Dizemos que uma sequência a_n é limitada se existir um número $k \geq 0$, tal que $|a_n| \leq k$, para qualquer número n.

Exemplo 12.6

As sequências e) e f) do Exemplo 12.2 e as do Exemplo 12.3 são limitadas. As sequências a), b), c) e d) do Exemplo 12.2 não o são.

De fato, na sequência e) do Exemplo 12.2, podemos considerar $k = 3$. Encontre os valores de k para as demais sequências limitadas, citadas no parágrafo anterior. Já as demais sequências citadas não são limitadas, pois:

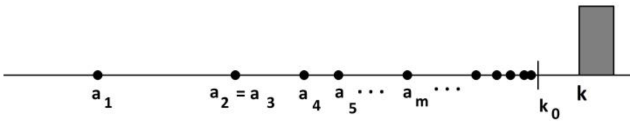
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Teorema 12.1

Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Não demonstraremos este teorema por sua demonstração faz uso de conceitos que fogem aos objetivos desse curso. Faremos apenas uma ilustração gráfica para deixar mais claro o seu enunciado.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência monótona crescente e limitada, com $a_n \geq 0$, sendo k um número real tal que $a_n \leq k, \forall n$.



É de se esperar que os valores de a_n vão se aproximando de um número $k_0 \leq k$, quando n cresce indefinidamente. Isto acontece porque esses valores estão crescendo e não podem ultrapassar a "barreira" imposta por k.

Quando necessitamos apenas de saber se uma determinada sequência é convergente ou não, independentemente do valor do limite, este teorema é de grande utilidade. Isto acontece, principalmente, nas aplicações teóricas.

12.2 Séries

O estudo de *Integral Definida* fez uso de somas do tipo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_{x_i}$$

e do limite dessas somas com n tendendo ao infinito. Essas somas, denominadas *Somas de Riemann*, constituem termos da sequência

$$\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

cuja convergência depende da função $y = f(x)$ e da natureza das partições do intervalo no qual a função está definida. Tendo-se a convergência de $\{S_n\}$ e supondo-se $[a, b]$ o intervalo onde as somas foram construídas, definimos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Relembramos o conceito de *Integral Definida* para dizer que pelo menos numa situação particular já trabalhamos com a adição de um número infinito de parcelas e obtendo, em contrapartida, um número real como resultado da soma. O assunto que iremos abordar em seguida tratará de somas desta natureza, as quais denominaremos *Séries.* Vejamos um exemplo.

Exemplo 12.7

Imaginemos que uma pulga está a 1m de um cachorro e que saltando na direção dele percorra, em cada salto, a metade da distância que a separa dele. É possível que a pulga alcance o cachorro?

Para responder a pergunta, observemos que a pulga se aproxima do cachorro, da seguinte maneira: $(1/2)m$, após o primeiro salto; $(1/4)m$, após o segundo salto; $(1/8)m$, após o terceiro salto e, assim por diante. Logo a distância da pulga ao cachorro pode ser descrita pela sequência:

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

A resposta da questão será afirmativa caso seja possível efetuar a seguinte soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \quad (1)$$

e, se o seu valor for, no mínimo, igual a 1.

Vamos considerar, inicialmente, a soma no momento em que a pulga completou o *n-ésimo* salto. Nesse caso teremos

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

e, é fácil observar, que S_n representa a soma dos termos de uma *Progressão Geométrica*, na qual o primeiro termo é igual a $1/2$ e razão, também, igual a $1/2$. Ora, quando se tem uma *Progressão Geométrica* de primeiro termo igual a a e razão igual a q, a soma dos n primeiros termos

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} \quad (3)$$

é dada por

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (4)$$

Para se obter (4), basta multiplicar (3) por q, encontrando-se

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

que subtraída de (3) dará

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

de onde resulta (4).

Além disso, quando $0 < q < 1$, teremos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right] = \frac{a}{1-q}\cdot$$

Voltando ao nosso caso, temos em (2): $a = 1/2$ e $q = 1/2$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

e, ainda em (1), teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Como inicialmente a pulga se encontrava a $1m$ do cachorro, é certo que ela o alcançará.

O procedimento utilizado no exemplo pode ser generalizado. Consideremos $\{a_n\}$ uma sequência qualquer e

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

a soma dos n primeiros termos dessa sequência. A soma S_n é chamada *Soma Parcial* e o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

é denominado *Série*. A notação utilizada é a seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Caso o limite das somas parciais exista quando n tende ao infinito, diremos que a série é *Convergente* e que converge para o valor desse limite, que é então denominado *soma da série*. Quando esse limite não existe diremos que a série é *Divergente*.

Devido ao grande interesse histórico e ao grande número de aplicações, tanto práticas quanto teóricas, duas séries merecem menções especiais: a *série geométrica* e a *série harmônica*. Uma amostra particular da série geométrica foi exibida no exemplo anterior. Em geral, a série geométrica é uma série do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \quad a \neq 0.$$

O estudo apresentado no Exemplo 12.7 permite concluir que a série geométrica é divergente quando $|q| \geq 1$ e convergente para $|q| < 1$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}\cdot$$

Faremos o estudo da série harmônica, no exemplo a seguir.

Exemplo 12.8

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

é denominada série harmônica. O nome da série é proveniente do seguinte fato: "se a, b e c são três termos consecutivos da série harmônica, então o número b é média harmônica de a e c". Em outras palavras, entre a, b e c, vale a relação:

$$b = \frac{2ac}{a+c}\cdot$$

A série harmônica é um exemplo de uma série divergente. O argumento utilizado para demonstrar a divergência dessa série faz uso de um procedimento bastante comum no estudo de convergência ou divergência, tanto de sequências quando de series. O procedimento resume-se em comparar a série (ou sequência) dada com outra de comportamento conhecido. Para tanto vamos reescrever a série harmônica e agrupar seus termos da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right\} + \left\{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right\} + \cdots$$

onde no primeiro grupo ficam dois termos, no segundo ficam quatro termos, no terceiro ficam oito termos, no quarto dezesseis e assim por diante (observar que o denominador do último termo de cada grupo é sempre uma potência de 2). Em seguida, substituindo todos o termos de cada grupo pelo menor termo do grupo, obteremos o seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right\} + \left\{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right\} + \cdots$$

Substituindo-se cada grupo pela soma dos seus termos, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \geq 1+\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Como o segundo termo desta desigualdade cresce ilimitadamente, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

é divergente.

Para exibir a versatilidade do procedimento utilizado anteriormente, vamos agora utilizá-lo para se estudar a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exemplo 12.9

Os termos da série dada podem se agrupados da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\ \left\{\frac{1}{2^2}+\ \frac{1}{3^2}\right\}+\ \left\{\frac{1}{4^2}+\ \cdots+\frac{1}{7^2}\right\}+\left\{\frac{1}{8^2}+\ \cdots+\frac{1}{15^2}\right\}+\ \cdots$$

Substituindo-se todos os termos de cada grupo, pelo maior termo do grupo, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq 1+\ \left\{\frac{1}{2^2}+\ \frac{1}{2^2}\right\}+\ \left\{\frac{1}{4^2}+\ \cdots+\frac{1}{4^2}\right\}+\left\{\frac{1}{8^2}+\ \cdots+\frac{1}{8^2}\right\}+\ \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq 1+\ \frac{2}{2^2}+\ \frac{4}{4^2}+\frac{8}{8^2}+\ \cdots$$

De onde se conclui que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq 1+\ \frac{1}{2}+\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \cdots$$

isto é, a série dada é menor do que uma série geométrica convergente. Como a sequência das somas parciais da série dada é crescente, segue-se pelo Teorema 12.1 que essa sequência é convergente. Logo a série dada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente.

Apresentaremos agora algumas propriedades que serão úteis para se decidir sobre a convergência de séries. Essas propriedades aplicam-se nos casos em que uma série é obtida de outra através de operações elementares.

Suponhamos que determinada série é convergente. Se multiplicássemos por um número todos os termos da sequência que a originou, seria a nova série convergente? O teorema a seguir responde questões deste tipo.

Teorema 12.2

Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

séries convergentes e c um número . Então, também são convergentes as seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n).$$

Demonstração

1º) Mostraremos inicialmente que $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é convergente.

Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Chamemos $T_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$, a soma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ e para mostrar convergência da série deveremos mostrar a existência de $\lim_{n\to\infty} T_n$.

Mas, $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n) = \lim_{n\to\infty} c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$,

de onde se conclui que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

Logo, a série em questão é convergente.

2º) Mostraremos agora que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ também é convergente.

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

são convergentes e se $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ então existem os limites

$$\lim_{n\to\infty} S_n \ e \ \lim_{n\to\infty} T_n$$

que denominaremos por S e T, respectivamente.

Nosso objetivo é mostrar que existe o $\lim_{n\to\infty} U_n$ onde:

$$U_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} [(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)]$$

segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} [(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)]$$

donde se tem que

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} [S_n + T_n] = S + T.$$

Concluímos que o limite existe e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente.

Deixamos a prova da última propriedade como exercício. Observe que ela é consequência das duas primeiras.

Observações

1) Da primeira propriedade observe que também podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente e c um número real não nulo, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ também será divergente.

2) Já a segunda propriedade não nos permite concluir nada quando à convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

quando as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **e** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **forem divergentes. E, realmente, neste caso aquela série tanto pode ser convergente quanto divergente. O exemplo a seguir ilustra este fato.**

Exemplo 12.10

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1+1+1+\cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ é divergente.

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Logo, pela observação (parte 1) também será divergente a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1).$$

No entanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

é convergente. Por outro lado, é divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2.$$

Exercício 12.2

1) Justifique a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$.
2) Justifique a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n} - \frac{5}{3^n}\right)$.

Os procedimentos usados até agora para verificar a convergência ou divergência de uma série foram muito particulares, como no caso da série geométrica ou da série harmônica. Para um estudo mais geral, destacam-se os denominados *Testes de Convergência*, que apresentaremos na forma de teoremas. Esses testes, como a própria denominação diz estabelecem apenas se uma dada série converge ou diverge sem, no entanto, calcular o valor da soma da série no caso das convergentes. Essa situação, entretanto, é o que mais interessa na maioria das aplicações. Um primeiro teste, que é bem natural, diz respeito ao limite da sequência $\{a_n\}$ que dá origem à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Teorema 12.3 (Teste do Termo Geral)

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Demonstração:

Sejam $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ e $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$

Daí, conclui-se que $S_n - S_{n-1} = a_n \quad (1)$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, temos a existência do limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$, cujo valor chamaremos de S. Daí teremos, também, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ e, portanto, concluímos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Observações

1) Este teorema é mais usado na sua forma negativa, ou seja:

"se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente".

2) A recíproca do Teorema 12.3 não é válida, pois na série harmônica tem-se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e. no entanto, sabemos que a série é divergente.

Exemplo 12.11

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ é divergente, pois, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot$

Os próximos testes que abordaremos são mais conclusivos que o do *termo geral*, no sentido de se decidir se uma série converge ou não. Contudo, todos eles têm certas restrições quanto à sua aplicabilidade, não esgotando, portanto, a discussão sobre a convergência de séries. Apresentaremos os mais usados.

12.3 Séries de Termos Positivos

Uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é chamada *série de termos positivos*, quando $a_n \geq 0$, para todo *n*.

Os quatro testes que apresentaremos em seguida referem-se às séries que possuem essa característica.

Teorema 12.4 (Teste da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Então:

a) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente;

b) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$, para todo *n*, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.

Demonstração:

Usaremos o Teorema 12.1 para provar a parte (a). Para tanto, vamos considerar as somas parciais:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \text{ e } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n.$$

Observe que as sequências $\{S_n\}$ e $\{T_n\}$ são crescentes, pois $S_n \leq S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$. O mesmo ocorre com $\{T_n\}$.

Como a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, digamos para um valor *T*, podemos afirmar que $|S_n| = S_n \leq T_n \leq T$. Assim, concluímos que $\{S_n\}$ é uma sequência monótona e limitada e, portanto, existe o $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Como consequência, temos a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para provarmos a parte (b) é suficiente observar que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ fosse convergente teríamos, pela parte (a), a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o que contradiz a hipótese. Logo o que se afirma na parte (b) é verdadeiro.

O teorema que acabamos de demonstrar pode ser expresso, numa maneira informal, do seguinte modo: ***"se uma série for menor do que outra convergente, ela própria será convergente; quando for maior do que outra divergente, ela também será divergente".***

Exemplo 12.12

a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$ é divergente.

De fato, $\frac{n}{n^2+3} \geq \frac{n}{n^2+3n^2} = \frac{1}{4n}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ diverge (**ver Teorema 12.2**)

b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{8n^3+5n^2}$ converge, pois $\frac{4n+5}{8n^3+5n^2} \leq \frac{4n+5n}{8n^3+5n^2} \leq \frac{4n+5n}{8n^3} = \frac{9}{8n^2}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{8n^2}$ é convergente.

Exercício 12.3

1) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a,$ onde $a \in \mathbb{R}$, só é convergente quando $a = 0$.
2) Teste a convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{e^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{4}{5^n}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7.3^n - 5.2^n}{6^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$

3) Mostre que o *teste da comparação* permanece válido quando $a_n \leq cb_n$, na parte (a) e quando $a_n \geq cb_n$, parte (b), onde c é uma constante maior do zero.

4) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma outra série tal que $b_n = a_n$ para $n > N$, onde N é um dado número inteiro e positivo. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Sugestão:

Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ **convergem onde:** $c_n = \begin{cases} b_n, & n > N \\ 0 & n \le N \end{cases}$ **e** $d_n = \begin{cases} 0, & n \le N \\ a_n, & n > N \end{cases}$

5) Teste a convergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4n^4+3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{5n^4-3n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^3+4n^2+1}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2}{n^4+n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n^2+1}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^7+1}}$

O teste seguinte irá comparar a convergência de uma série com a convergência de uma integral imprópria.

Teorema 12.5 (Teste da Integral)

Seja $y = f(x)$ uma função contínua e decrescente, com $f(x) \ge 0$, no intervalo $[1, \infty[$. Então, se

a) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge;

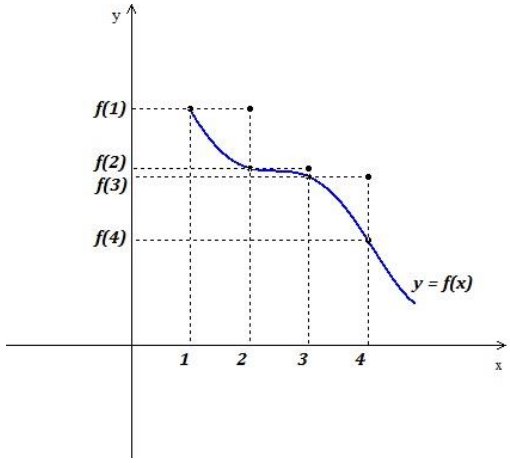
b) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ é divergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge.

Demonstração

Como $y = f(x)$ é contínua e positiva no intervalo $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, a integral

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

pode ser interpretada como a área sob a curva f em $[n, n+1]$.



Comparando as áreas dos retângulos, inscrito e circunscrito, com a área sob a curva f, em cada intervalo da forma $[n, n+1]$, devido ao fato de f ser decrescente, obtemos as seguintes desigualdades:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq f(1)$$
$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)\,dx \leq f(2)$$
$$\vdots$$
$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

Somando estas desigualdades, temos que:

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

ou

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1} \quad (1)$$

onde S_n é a soma parcial da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Da primeira desigualdade de (1), temos

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \quad (2)$$

Provaremos inicialmente a parte (a). Como em uma série de termos positivos a sequência $\{S_n\}$ é crescente segue-se, pelo Teorema 12.1, que para mostrar a existência do limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

basta verificarmos que $\{S_n\}$ é uma sequência limitada.

Estamos supondo que

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

converge e, portanto, vamos admitir que seja L o seu valor.

Como $f(x) \geq 0$, teremos que

$$\int_1^{n} f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx = L.$$

Deste fato e da desigualdade (2), concluímos que $S_n \leq f(1) + L$, para qualquer valor de n.

Como $S_n \geq 0$, para qualquer n, temos que $|S_n| \leq f(1) + L$ e, portanto, $\{S_n\}$ é limitada.

Para provarmos a parte (b), usaremos a segunda desigualdade de (1), ou seja

$$S_{n-1} \geq \int_1^{n} f(x)\,dx.$$

Supondo então que a

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

diverge e, como $f(x) \geq 0$ é decrescente, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)\,dx = \infty$$

de onde concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

é divergente.

Exemplo 12.13

Já vimos anteriormente que a *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente e que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente. Usando o *Teste da Comparação* podemos mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

denominada *p-série*, diverge se $0 < p \leq 1$ e converge se $p \geq 2$. De fato, para $n \geq 1$ tem-se:

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}, se\ 0 < p \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}\ , se\ p \geq 2.$$

O que podemos dizer sobre a convergência da série em questão quando se tem $1 < p < 2$?

Como a função

$$F(n) = \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$$

é decrescente, podemos usar o *Teste da Integral* para mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p > 0$$

é convergente para $1 < p < 2$.

Observando que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{B \to \infty} \int_1^B x^{-p}\, dx = \lim_{B \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right) \Bigg|_1^B = \lim_{B \to \infty} \left(\frac{1}{(1-p)B^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \right)$$

e que $(p-1) > 0$, teremos

$$\lim_{B \to \infty} \frac{1}{B^{p-1}} = 0$$

e, portanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}\cdot$$

Desta forma, concluímos que a série dada converge quando $p > 1$ e diverge quando $0 < p < 1$.

Exemplo 12.14

Vamos agora testar a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}.$$

Na série dada a primeira coisa que nos chama a atenção é o fato de a variação começar a partir de 2. Isto acontece porque a função

$$f(n) = \frac{1}{nlnn}$$

não está definida para $n = 1$. No entanto, o termo geral da série poderia ser redefinido de forma a poder tomar-se o n variando a partir de 1. Para a série em questão teríamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)ln(n+1)}.$$

Em geral isto sempre pode ser feito mas, na prática, utiliza-se a expressão mais apropriada. Quando a variação acontece a partir de um valor $n > 1$ e o *Teste da Integral* puder ser aplicado, este deve ser adaptado. No presente caso devemos testar a convergência da série:

$$\int_2^\infty \frac{1}{xln(x)}dx.$$

Assim, lembrando que

$$\int \frac{1}{xln(x)}dx = ln\big(ln(x)\big) + C,$$

teremos

$$\int_2^\infty \frac{1}{xln(x)}dx = \lim_{B\to\infty}\int_2^B \frac{1}{xln(x)}dx = \lim_{B\to\infty}\Big(ln\big(ln(x)\big)\Big)\Big|_2^B$$

ou

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{xln(x)} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\left(ln(lnB) \right) - \left(ln(ln2) \right) \right] = \infty.$$

Como a integral diverge, concluímos que a série também diverge.

Exercício 12.4

1) Teste a convergência de:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{lnn}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{lnn}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg(n)}{1+n^2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

2) Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(lnn)^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

Os dois próximos testes serão muito utilizados no estudo de *Série de Potências*, que veremos mais adiante. Esses testes são denominados de *Teste da Razão* e *Teste da Raiz*.

Teorema 12.6 (Teste da Razão)

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos com $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c.$ Então, se $0 \leq c < 1$ a série converge e, se $c > 1$, a série diverge.

Demonstração:

Como o $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c,$ podemos dizer que $\displaystyle\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right|$ aproxima-se de zero quando *n* cresce. Ou seja

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right| < \epsilon, \qquad \text{para } n \geq N$$

onde $\in$ é um número positivo que pode ser tomado menor do que 1. Logo,

$$-\in +c < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \in +c = q \quad (1)$$

Se $c < 1$, podemos considerar $\in$ tal que $\in +c = q < 1$, bastando para isso escolher N convenientemente.

Pela segunda parte da desigualdade (1) e usando o fato de que ela é válida para $n \geq N$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\begin{gathered} a_{N+1} < q a_N \\ a_{N+2} < q a_{N+1} < q^2 a_N \\ a_{N+3} < q^3 a_N \\ \vdots \\ a_{N+m} < q^m a_N \end{gathered}$$

e, a partir dos dois lados da última desigualdade, fazendo m assumir todos os valores inteiros e positivos, podemos construir as seguintes séries:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{N+m} \ e \ \sum_{m=1}^{\infty} q^m a_N$$

Como a segunda série é convergente, por ser uma série geométrica com razão $q < 1$, concluímos, pelo *Teste da Comparação*, que a primeira delas também é uma série convergente. Finalmente, rememorando o Exercício 12.3 (item 4), concluímos que a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é convergente.

No caso em que c é maior do que 1, usando a primeira parte da desigualdade (1) e o fato de que o número $\in$ pode ser tomado de forma que $c - \in \geq 1$, para N escolhido adequadamente. Desta forma, teremos:

$$-\in +c < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n \geq N.$$

Daí,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

de onde se conclui que $a_{n+1} > a_n$ para $n \geq N$.

Finalmente, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

e, pelo *Teste do Termo Geral*, a série diverge.

Exemplo 12.15

a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$ é convergente, pois

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)2^{-(n+1)}}{n2^{-n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right] = \frac{1}{2}$$

b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ é divergente, pois

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{(n+1)n!\,n^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

e daí, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

c) Pelo *Teste da Razão* nada podemos dizer sobre a convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \qquad p \geq 1,$$

pois

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

No entanto, pelo Exemplo 12.13, sabemos que a série dada diverge para $0 < p \leq 1$ e converge para $p > 1$.

Teorema 12.7 (Teste da Raiz)

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, onde c é um número não negativo. Então, se $0 \leq c < 1$, a série é convergente e, se $c > 1$, a série é divergente.

Demonstração:

O procedimento é semelhante ao adotado na prova do *Teste da Razão*. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c,$$

então para n grande, ou seja, $n \geq N$, teremos $\left|\sqrt[n]{a_n} - c\right| < \in$, onde $\in > 0$ pode ser tomado pequeno à medida em que se aumenta o valor de N. Da desigualdade anterior tem-se que

$$-\in + c < \sqrt[n]{a_n} < \in + c \quad (2)$$

No caso em que $c < 1$, toma-se $\in + c = q < 1$ e, com isto, a segunda parte da desigualdade (2) nos dá que $\sqrt[n]{a_n} < q$. Daí $a_n < q^n$, para $n \geq N$. Pelo *Teste da Comparação*, concluímos que a série dada é convergente.

Por outro lado, se $c > 1$, basta tomar $\in$ tal que $c - \in > 1$ para concluir que $\sqrt[n]{a_n} > 1$ para todo $n \geq N$, resultando $a_n > 1$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

e, portanto, a série dada é divergente.

Exemplo 12.16

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ é convergente, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n}$ é divergente, pois $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

Exercício 12.5

Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-n^2}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}$

12.4 Convergência Absoluta

Os testes de convergência estudados no parágrafo anterior, aplicados somente às séries de termos positivos, podem ser estendidos ao estudo de convergência de séries que não são enquadrados naqueles tipos. Estudaremos nesta seção alguns tipos de séries que, embora não sendo constituídos de termos positivos, permitem que apliquemos os testes anteriores, com adaptações necessárias.

Uma série bastante importante cuja convergência estudaremos é a *série alternada*. O *Teste da Série Alternada* é interessante pela sua simplicidade e pelo alcance de suas aplicações.

Definição 12.5

Uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita alternada se os termos da sequência $\{a_n\}$ tem sinais alternados.

Exemplo 12.17

As séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ são séries alternadas.

Teorema 12.8 (Teste da Série Alternada)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série alternada, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $|a_{n+1}| \leq |a_n|$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Demonstração:

Vamos supor que a_1 seja positivo (supondo-o negativo a demonstração será análoga a que será desenvolvida). Podemos, então, afirmar que todos os termos de ordem ímpar serão positivos, enquanto todos os de ordem par serão negativos. Tomemos, agora, a seguinte soma parcial da série dada:

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Agrupando os $(2n-2)$ primeiros termos dessa soma, teremos:

$$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Como $|a_{2n}| \leq |a_{2n-1}|$, por hipótese, e, devido à suposição inicial, temos que $a_{2n-1} > 0$ e $a_{2n} \leq 0$, podemos escrever que $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0$.

Logo, $S_{2n} - S_{2n-2} \geq 0$ ou, ainda, $S_{2n-2} \leq S_{2n}$ (1)

A soma parcial dada anteriormente pode, ainda, ser reagrupada na forma:

$$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}.$$

Como $a_{2n} \leq 0$, podemos concluir que $S_{2n} \leq S_{2n-1}$ (2)

De forma semelhante, trabalhando com a soma parcial

$$S_{2n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-3} + a_{2n-2} + a_{2n-1}$$

podemos concluir que $S_{2n-1} \leq S_{2n-3}$ (3)

Usando (1), (2) e (3) podemos escrever que:

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n-2} \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_{2n-3} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1 \quad (4)$$

Consideremos, agora, as sequências $\{S_{2n}\}$ e $\{S_{2n-1}\}$. Da desigualdade (1) concluímos que a primeira das duas sequências dadas é crescente e, da desigualdade (4), que ela é limitada por S_1. Logo, pelo Teorema 12.1, $\{S_{2n}\}$ é convergente, digamos para o valor L_1. Já a sequência $\{S_{2n-1}\}$ é decrescente e também limitada, portanto, convergente, digamos para o valor L_2.

Aliando aos fatos anteriores a hipótese de que o limite do termo geral é zero, podemos escrever:

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

e, portanto, $L_1 = L_2 = L$. Deste fato deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = L$$

seja *n* par ou ímpar. Segue-se, portanto, que a série dada é convergente.

Exercício 12.6

Faça a demonstração do *Teste da Série Alternada* considerando que $a_1 < 0$.

Exemplo 12.18

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ é convergente, pois, é alternada, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ e $\lim_{n\to\infty}(-1)^n . \frac{1}{n} = 0$

O teste que apresentaremos agora mostra-nos que em muitas das vezes podemos testar a convergência de uma série de termos não positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ testando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Como esta última é uma série de termos positivos, podemos fazer uso dos testes já conhecidos.

Teorema 12.9 (Teste da Convergência Absoluta)

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente.

Demonstração:

A partir do termo geral a_n da série dada, vamos construir os seguintes termos gerais:

$$b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases} \text{ e } c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}$$

Estes termos gerais, assim construídos, gozam das seguintes propriedades:

$$b_n \leq |a_n| \;\; e \;\; c_n \leq |a_n|.$$

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \;\; \text{e} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

são séries de termos positivos e, devido às propriedades dadas, podemos concluir que elas são convergentes pelo *Teste da Comparação*. Como podemos escrever que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$$

temos, pelo Teorema 12.2, que a série dada é convergente.

Definição 12.6

Dizemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.

Exemplo 12.19

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois $\displaystyle\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente;

pela definição anterior a série também é absolutamente convergente.

b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ é convergente, como vimos pelo *Teste da Série Alternada,*

mas não é absolutamente convergente, pois a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Exemplo 12.20

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ é absolutamente convergente, onde x é um número real qualquer.

De fato, seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

então:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|^{2(n+1)-1}}{[2(n+1)-1]!}\cdot\frac{(2n-1)!}{|x|^{2n-1}}=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{|x|^{2n-1}}=\frac{|x|^{2}}{(2n+1)(2n)}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0.$$

Pelo *Teste da Razão*, temos a convergência absoluta da série.

Exercício 12.7

Dadas as séries seguintes verifique se são: a)convergentes; b) absolutamente convergentes.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{lnn}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^n n}{n^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{5}{2}}+n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]}{n^2+3n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$

12.5 Série de Potências

Se o leitor observar o Exemplo 12.20 notará que a convergência verificada não foi feita apenas para uma única série, mas para infinitas séries. Para cada x real a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

é convergente. Como para cada x a soma da série é única, podemos falar numa função real dada pela seguinte lei de formação:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Este processo pode ser generalizado para outras séries.

Definição 12.7

Uma série da forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^n$ é chamada *Série de Potências*.

No estudo que iremos desenvolver, em várias ocasiões, surgirá a necessidade de se expressar a série de potências de forma diferente daquela apresentada na definição anterior. A necessidade surge, principalmente, em razão de simplificações que são realizadas no termo geral da série o que nos leva, às vezes, a trocar o valor inicial do índice de variação da série por outro qualquer, como já foi feito na seção 12.3. Também, o termo geral da série nem sempre será da forma a_nx^n. A própria série que serviu de introdução a esta seção é um exemplo deste fato. Nessa série os termos de potências pares são nulos e, por isso, o termo geral expressa apenas os termos de ordem ímpar. Ainda, algumas vezes, torna-se conveniente expressar o termo geral em potências de $(x-a)$ em vez de potências de x. Por comodidade, desenvolveremos os nossos resultados para as séries de potências na forma apresentada na *Definição 12.7*, chamando a atenção para o fato de que é fácil a adaptação para os outros casos.

Estudaremos agora a convergência de séries de potências para podermos definir funções através dessas séries como fizemos no exemplo. O primeiro passo é dado na forma de um teorema que mostra que se uma série de potências converge quando $x=x_0$ então ela converge num intervalo.

Teorema 12.10

Seja $x_0 > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, x^n$ convergente quando $x = x_0$, então esta série é absolutamente convergente sempre que $|x| < x_0$.

Demonstração:

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, {x_0}^n$ é convergente. Como $|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|{x_0}^n$ temos pelo *Teste da Comparação* que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$ é absolutamente convergente se $|x| < x_0$.

Definição 12.8

Denominamos raio de convergência R de uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$ ao número tal que a série é absolutamente convergente para $|x| < R$ e é divergente para $|x| > R$

Quando a série for convergente para qualquer número real x diremos que o seu raio de convergência é infinito. Em $x = 0$ a série de potências é sempre convergente e, quando ela convergir somente nesse caso, diremos que o raio de convergência é zero.

Dos Teoremas 12.9 e 12.10 pode-se concluir que uma série de potências é convergente em intervalos da forma $]-R, R[$, $[-R, R[$, $]-R, R]$ e $[-R, R]$, onde R é o raio de convergência.

Definição 12.9

Denomina-se intervalo de convergência I da série de potências ao intervalo tal que a série converge se $x \in I$ e diverge para $x \notin I$.

Os testes da *Razão* e da *Raiz* são de grande valia na determinação do raio de convergência e, consequentemente, na determinação do intervalo de convergência.

Exemplo 12.21

Vamos encontrar o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Usaremos o *Teste da Razão* para determinar a convergência absoluta.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_x x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|$$

Logo se $|x| < 1$ a série é absolutamente convergente e é divergente se $|x| > 1$. Concluímos então que o raio de convergência é igual a 1.

Analisemos, agora, o que acontece com a série quando $|x| = 1$. Já vimos anteriormente que se $x = 1$ a série é divergente (série harmônica). Quando $x = -1$, a série é convergente (Exemplo 12.18). Logo o intervalo de convergência da série é $[-1,1[$.

Exemplo 12.22

Para encontrar o intervalo de convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ usaremos o Teste da Raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0.$$

Logo a série é convergente para qualquer número real. Então o raio de convergência é infinito e o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$.

Se I for o intervalo de convergência de uma série de potências poderemos definir uma função, cujo domínio é I, dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Pode-se provar que esta função tem derivada, tem primitiva e que estas são, também, séries de potências com o mesmo raio de convergência de f. Este resultado é expresso no teorema a seguir, que apresentaremos sem demonstração.

Teorema 12.11

Se $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad$ com $|x| < R$, onde R é o raio de convergência da série de potências $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \quad$ então:

a) $\quad f$ é derivável e $\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} \quad (1)$

b) $\quad f$ é integrável e $\quad \int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \quad (2)$

Ainda, os raios de convergência de (1) e (2) são, também, iguais a R.

Exemplo 12.23

A função $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{2^n} \quad$ é convergente para $|x| < 2$ (verifique!)

Tendo-se a convergência da função dada teremos pelo Teorema 12.11, que:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 x^{n-1}}{2^n} \quad \text{e} \quad \int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n(n+1)} x^{n+1}$$

são ambas convergentes para $|x| < 2$.

Escrevendo alguns termos das séries anteriores podemos observar que o Teorema 12.11, de fato, nos diz que uma série de potências convergente pode ser derivada e integrada termo a termo:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^3 + \cdots$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + x - \frac{9}{8}x^2 + \cdots$$

$$\int_0^x f(x)dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{32}x^4 + \cdots$$

Exemplo 12.24

Seja $f(x)$ uma função que possui derivadas de todas as ordens num intervalo contendo zero.

A série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

é denominada *Série de Maclaurin*[2] de f.

Se $f(x)$ for uma função que possui derivadas de todas as ordens num intervalo contendo o número real a, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

é chamada *Série de Taylor* da função *f*, em $x = a$.

Exercício 12.8

1) Resolva:

a) Dada a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ mostre que ela é convergente em $\mathbb{R}$.

b) Se $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ mostre que $f'(x) = f(x)$.

c) Que função você conhece com essa propriedade?

2) Verifique que a série de Maclaurin de $f(x) = senx$ é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

[2] Maclaurin, C. (1698-1746), matemático escocês, a quem Ives, H., *in Introdução à História da Matemática*, dedica duas citações: "(...) um dos matemáticos mais capazes do século XVIII", p.469, e "(...) foi um matemático prodígio", p.470, tendo-se graduado aos 15 anos de idade.