A Diferencial

Embora o conceito de *diferencial* tenha sua importância intrínseca devido ao fato de poder ser estendido a situações mais gerais, introduziremos agora esse conceito com o objetivo maior de dar um caráter operatório às diferenças dx e dy. Além disso, a noção de *diferencial* torna mais preciso o conceito de taxa de variação e nos auxilia no estudo das *equações diferenciais* e, consequentemente, no da *integral indefinida* que introduziremos no próximo capítulo.

Consideremos $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo $]a, b[$ e seja $x_0 \in\,]a, b[$. Seja Δx um acréscimo arbitrário dado a x_0, de forma tal que $x_0 + \Delta x \in\,]a, b[$.

Definição 6.1

A função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0 se existir um número m e uma função de Δx, $R(\Delta x)$, tal que:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m\Delta x + R(\Delta x)\Delta x, \text{com } \lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = 0.$$

O termo $m\Delta x$ é chamado de *diferencial de* $y = f(x)$ *em* x_0, sendo denotado por dy, ou seja $dy = m\Delta x$.

Embora a definição anterior pareça ser complexa a sua utilização é simples, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6.1

A função $y = x^2$ é diferenciável em $x_0 = 1$.

Como

$$f(x_0 + \Delta x) = f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2$$

teremos:

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

ou

$$f(1 + \Delta x) = 1 + (2)\Delta x + (\Delta x)\Delta x.$$

Comparando com a expressão construída na Definição 6.1, se conclui que:

$$m = 2, \qquad R(\Delta x) = \Delta x \text{ e, ainda: } \lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Portanto a função $y = x^2$ é diferenciável em $x_0 = 1$ e $dy = 2\Delta x$.

Exemplo 6.2

Podemos estender o resultado do exemplo anterior e afirmar que a função $y = x^2$ é diferenciável em qualquer ponto x_0 do seu domínio, pois, procedendo como antes teremos:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = {x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Pela Definição 6.1 concluímos que:

$$m = 2x_0, \qquad R(\Delta x) = \Delta x, \qquad \text{com} \lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Portanto, $y = x^2$ é diferenciável em x_0 e $dy = 2x_0\Delta x$.

Observe que em ambos os casos o valor de m coincide com o valor da derivada de $f(x) = x^2$ no ponto x_0 considerado. Como $f'(x) = 2x$ tivemos, no primeiro caso $f'(1) = 2$ e, no segundo caso, $f'(x_0) = 2x_0$. Assim a diferencial $m\Delta x$ coincidiu com o valor $f'(x_0)\Delta x$. Isto não foi uma simples coincidência, como mostraremos a seguir.

Teorema 6.1

Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo $]a, b[$ e x_0 um ponto de seu domínio. Uma condição necessária e suficiente para que $y = f(x)$ seja diferenciável em x_0 é que ela seja derivável em x_0.

Demonstração

Em primeiro lugar vamos mostrar que sendo $y = f(x)$ diferenciável em x_0 então $y = f(x)$ é derivável em x_0.

Sendo $y = f(x)$ diferenciável em x_0 segue-se pela Definição 6.1 que existem m e $R(\Delta x)$ de modo que:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m\Delta x + R(\Delta x)\Delta x, com \lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = 0.$$

Então $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = m\Delta x + R(\Delta x)\Delta x$ e dividindo-se ambos os membros por Δx, obtemos:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m + R(\Delta x)$$

que, passando ao limite com $\Delta x \to 0$, fica:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [m + R(\Delta x)] = m + \lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = m.$$

Logo $y = f(x)$ é derivável em x_0 e $f'(x_0) = m$.

Para concluir, vamos mostrar que ao supor $y = f(x)$ derivável em x_0 concluiremos que ela é, também, diferenciável em x_0.

Com $y = f(x)$ derivável em x_0, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \;\; ou \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0.$$

Logo

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=R(\Delta x),\text{com } R(\Delta x)\to 0 \text{ quando } \Delta x\to 0.$$

Daí, concluímos que:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+R(\Delta x)\Delta x,\text{com} \lim_{\Delta x\to 0} R(\Delta x)=0.$$

Portanto $y=f(x)$ diferenciável em x_0 e $dy=f'(x_0)\Delta x$ o que completa a demonstração.

O Teorema 6.1 nos mostra que os conceitos de derivabilidade e diferenciabilidade para uma função real de variável real são equivalentes. Os dois conceitos são importantes, sendo o primeiro pelo se lado prático e o segundo pelo alcance teórico.

Como consequência do Teorema 6.1 a diferencial de uma função $y=f(x)$ em x_0, é da forma $dy=f'(x_0)\Delta x$ ou $d\big(f(x)\big)=f'(x_0)\Delta x$, onde Δx independe da função $y=f(x)$ e do ponto x_0. Consequentemente, tomando-se a função $f(x)=x$ teremos: $dx=1.\Delta x=\Delta x$. Desta forma, dada uma função $y=f(x)$ a sua diferencial em x será representada por uma das formas:

$$dy=f'(x)dx \quad ou \quad df=f'(x)dx$$

Essas representações correspondem às formas usualmente empregadas e que serão utilizadas no restante deste livro.

Um aspecto ainda a se observar na definição da diferencial é o seguinte: retornando à expressão indicada na Definição 6.1 e utilizando as notações acima, para uma função $y=f(x)$ diferenciável em x, teremos:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+dy+R(\Delta x)\Delta x$$

ou

$$\Delta y=dy+R(\Delta x)\Delta x$$

ou, ainda

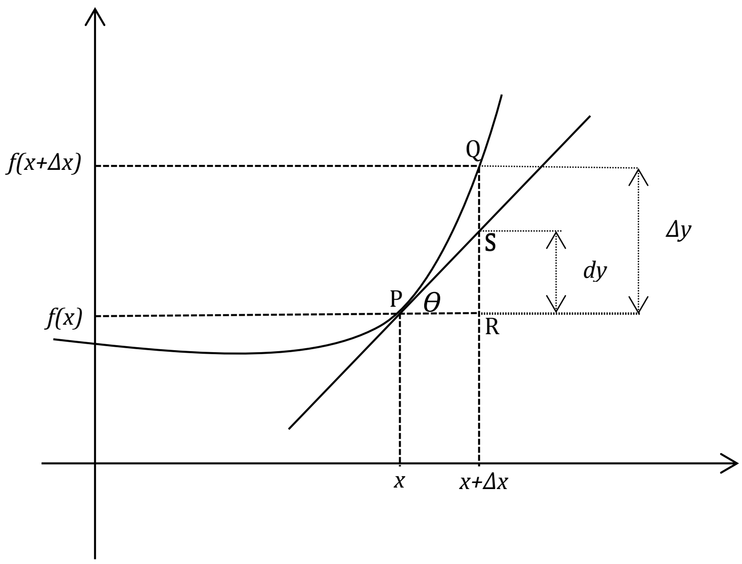
$$\Delta y-dy=R(\Delta x)\Delta x, com \lim_{\Delta x\to 0} R(\Delta x)\Delta x=0$$

A conclusão é que embora tenhamos, no geral, $\Delta y\neq dy$ o que se observa é que eles passam ter valores próximos à medida que Δx tende para zero, isto é:

$$|\Delta y-dy|\to 0 \; quando \; \Delta x\to 0$$

A interpretação geométrica apresentada a seguir ajuda a esclarecer esse fato.

No gráfico são exibidos uma função $y=f(x)$, a reta r, tangente à curva em $(x,f(x))$, e o acréscimo Δx de forma que $x+\Delta x$ se encontre no domínio da função.



No triângulo de vértices P, S e R tem-se:

$$RS = tg\theta PR = tg\theta\Delta x = f'(x)dx$$

de onde se conclui que dy coincide, em valor absoluto, com o comprimento RS, para x e Δx fixados.

Pela figura pode-se perceber que, ao fazer $\Delta x \to 0$, o ponto Q, ao longo da curva, aproxima-se do ponto P e, portanto, $QS = |\Delta y - dy| \to 0$

Exemplo 6.3

Vamos considerar a função $f(x) = x^3$ e escolher como referência o valor $x = 1$. A tabela, colocada em seguida, apresenta diferentes valores de Δx e os correspondentes Δy e dy, para a função e o ponto considerados.

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
Δy	7,0000000	0,3310000	0,0303011	0,0030030	0,0003000
dy	3,0000000	0,3000000	0,0300000	0,0030000	0,0003000

Para pequenos valores de Δx vê-se, pela tabela, que Δy se aproxima de dy. Vejamos o que ocorre algebricamente:

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Como $dy = f'(x_0)\Delta x$ teremos, para $f(x) = x^3$ e $x_0 = 1$, $dy = 3\Delta x$ e, assim, relação anterior fica:

$$\Delta y = dy + (3\Delta x + \Delta x^2)\Delta x, onde\ R(\Delta x)\Delta x = (3\Delta x + \Delta x^2)\Delta x.$$

Vejamos a tabela a seguir:

Δx	1	0,1	0,01	0,001
dy	3,000000	0,300000	0,030000	0,003000
$R(\Delta x)\Delta x$	4,000000	0,031000	0,000301	0,000003

Observe na tabela apresentada que quando Δx tende a zero o mesmo acontece com $R(\Delta x)\Delta x$. Por esse motivo costuma-se afirmar, em linguagem clássica, que Δx e $R(\Delta x)\Delta x$ são *infinitésimos*. Na tabela percebe-se, ainda, que $R(\Delta x)\Delta x$ tende a zero mais rapidamente que Δx e, por esse motivo, afirma-se que $R(\Delta x)\Delta x$ é um infinitésimo de *ordem superior* ao infinitésimo Δx.

O fato de que $\Delta y \neq dy$ é bastante útil para calcular valores aproximados de uma função num ponto x quando, por algum motivo, não se tem acesso ao valor exato de $f(x)$. Para tanto, considera-se $x = x_0 + \Delta x$, sendo x_0 um ponto tal que $f(x_0)$ seja conhecido, e, em seguida, toma-se:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (2)$$

Pelo que foi visto, o resultado será tanto melhor quanto menor for Δx.

Exemplo 6.4

Usando diferencial vamos calcular o valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$.

Vamos considerar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e o valor $x_0 = 8$, que é o valor mais próximo de 9 para o qual a raiz cúbica é exata. Desta forma, tomaremos $\Delta x = 1$ e, em virtude da expressão (2), teremos:

$$f(9) = f(8+1) \approx f(8) + f'(8).1$$

ou

$$f(9) \approx 2 + 0{,}0833 = 2{,}0833.$$

A conclusão é que 2,0833 é um valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$.

6.1 Regras de Diferenciação

Como a diferencial de $y = f(x)$ é dada por $dy = f'(x)dx$ segue-se que são válidas para as diferenciais regras operatórias semelhantes às de derivação. Listamos a seguir essas regras:

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$
2) $d(kf) = kdf, \;\; k \in R$
3) $d(f.g) = fdg + gdf$
4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}, \;\; g(x) \neq 0$

Exemplo 6.5

A regra da *diferencial de uma soma*, regra (1) relacionada anteriormente é demonstrada da seguinte maneira:

$$d(f+g) = (f+g)'(x)dx = [f'(x) + g'(x)]dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df + dg.$$

Outras regras são, também, demonstradas utilizando-se das regras conhecidas para a derivação.

O conceito de diferencial foi criado por Leibniz e, como consequência, ele criou também as notações dy e dx para simbolizar os diferenciais em y e x, respectivamente. São dele, também, as regras de diferenciação enunciadas anteriormente. Em sua obra[1], publicada em 1684, ele concebeu dy e dx como sendo as *menores diferenças* ou *diferenças infinitamente pequenas* em y e x, respectivamente. Nesse mesmo sentido considerava que o quociente dy/dx representava a divisão dos dois infinitésimos como resultado da razão incremental $\Delta y/\Delta x$, quando Δx e, consequentemente, Δy tornavam-se arbitrariamente próximos de zero. Em razão disso é que em laboratórios, dependendo da precisão exigida, costuma-se aproximar o valor de dy/dx pelo valor do quociente $\Delta y/\Delta x$.

Exercício 6.1

1) Para cada uma das funções $y = f(x)$ dadas a seguir calcule Δy e dy para valores genéricos de x e de Δx. Use os resultados obtidos para preencher a tabela dada em seguida, calculando-os para os valores particulares de x e Δx dados.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	0,1			
2	0,01			
2	0,001			

a) $y = 4x^2 - 3x + 1$ b) $y = x^3 + x$ c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

2) Use diferenciais para encontrar o valor aproximado de:

a) $\sqrt[5]{33}$ b) $(4{,}01)^{\frac{3}{2}} + 4{,}01 + (4{,}01)^{-\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[3]{26} + \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

d) $(15{,}99)^{\frac{3}{4}}$ e) $(8{,}01)^{\frac{4}{3}} + (8{,}01)^{-\frac{1}{3}} + 8{,}01$ f) $(15{,}99)^{\frac{1}{4}} + (15{,}99)^{\frac{1}{2}}$

3) A medida do lado de um cubo é encontrada como sendo igual a 15cm, com possibilidade de erro de 0,01cm. Use diferencial para encontrar o erro aproximado no cálculo de:
   a) Volume do cubo;
   b) Área de uma face.

4) Usando diferencial, mostre que:
   a) $sen x \approx x$ para x próximo de zero;
   b) $tg(0{,}1) \approx 0{,}1$.

---

[1] A obra de Leibniz publicada em 1684, que se constitui na primeira exposição do Cálculo Diferencial, recebeu o seguinte nome: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais)*, como encontra-se citado no livro: *História da Matemática, de Carl B. Boyer, Ed. Edgar Blucher, p.278*. Esse livro do Boyer, bem como inúmeros sites que são encontrados na *internet* constituem excelentes fontes de referências sobre o desenvolvimento do Cálculo e da matemática em geral.