Disciplina: Geometria Analítica (IME0345)

1^a Lista de Exercícios - 05/04/2024

Vetores no Plano.

Exercícios

Ex.1 Verifique se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação e justifique sua resposta:

a) ( ) $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b) ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies A = C \;\; e \;\; B = D$.

c) ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overline{AB} = \overline{CD}$.

d) ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies AC \cap BD = \emptyset$.

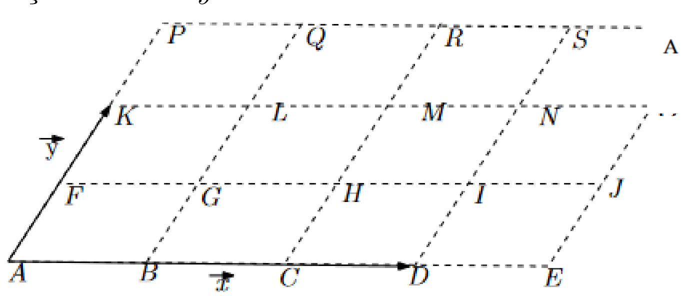
e) ( ) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

f) ( ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

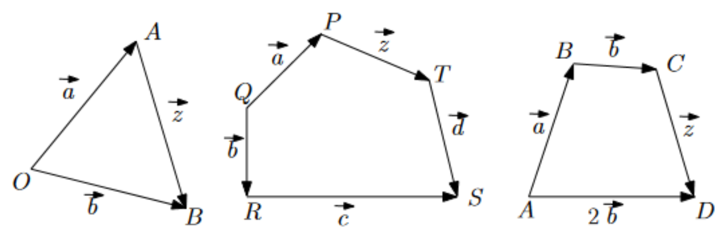
g) ( ) *Se* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então existe um único plano contendo A, B, C e D.

h) ( ) $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \implies |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

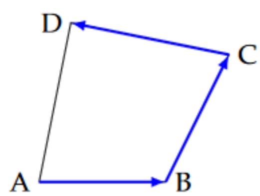
Ex.2 Na figura abaixo, todos os paralelogramos menores são congruentes. Sendo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{y}$, escreva os vetores $\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{SI}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{OC}$ em função de $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$.

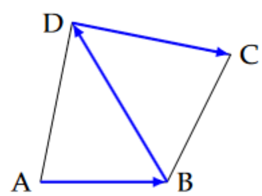


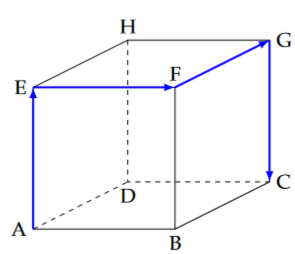
Ex.3 Em cada uma das figuras abaixo, escreva o vetor $\overrightarrow{z}$ em função dos demais.



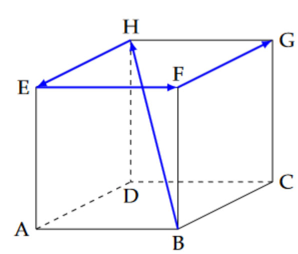
Ex.4 Ache a soma dos vetores indicados em cada uma das figuras abaixo:



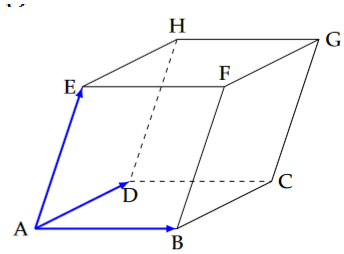




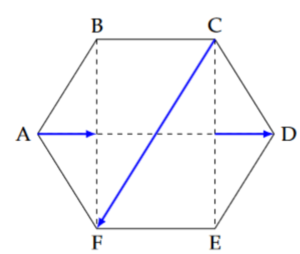
Cubo



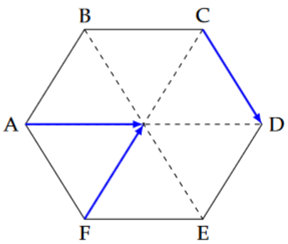
Cubo



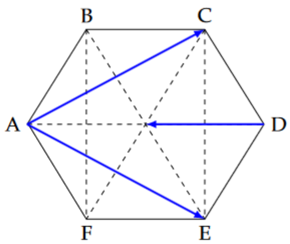
Paralelepípedo



Hexágono regular



Hexágono regular



Hexágono regular

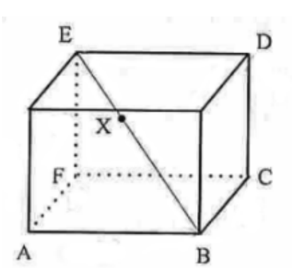
Ex.5 Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ dois vetores não paralelos, escreva $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ex.6 Considere um quadrilátero ABCD, onde $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$. Que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

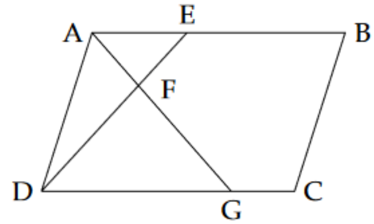
Ex.7 Considere um trapézio ABCD, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{a}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$. O ponto E é tal que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE}$ em função de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$.

Ex.8 Calcule a soma de seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

Ex.9 Dados $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, seja X o ponto ilustrado na figura abaixo. Escreva os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{FX}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, sabendo que $\overrightarrow{EX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$.



Ex.10 Seja ABCD um paralelogramo como na figura abaixo. Os pontos E e G são tais que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. F é o ponto de encontro de AG e DE. Escreva $\overrightarrow{AF}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



Ex.11 No trapézio ABCD com $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\rightarrow AD = 2\vec{v}$, seja E o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Sendo $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$, determine λ.

Ex.12 Num triângulo ABC, faça uma figura, temos $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$ e $3\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{QA}$.

a) Localize na figura os pontos P e Q, justifique sua resposta.

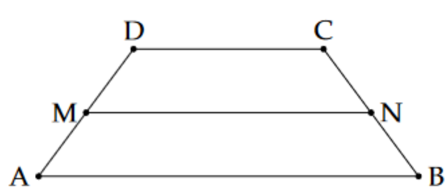
b) Expresse $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BQ}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Ex.13 Seja ABCD um paralelogramo de diagonais AC e BD.Faça uma figura. O ponto R é tal que $3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD}$ e S é tal que $2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$.

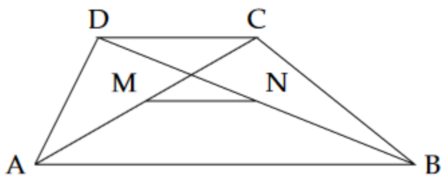
a) Marque R e S na figura.

b) Escreva $\overrightarrow{RS}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Ex.14 Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



Ex.15 Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



Ex.16 Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que as divide na razão de 2 para 1. (O ponto de encontro das medianas chama-se baricentro do triângulo.)

Ex.17 Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam ao meio.

Ex.18 No triângulo ABC, P, Q e R são os pontos médios, respectivamente, de AB, BC e AC. O ponto O é um ponto qualquer do espaço. Demonstre que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

(Sugestão: escreva $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{OR}$ em função de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.)

Gabarito

Ex.1 a (V), b (F), c (F), d (F) (considere o caso B = C), e (F), f (V), g (F) (considere o caso onde AB e CD são colineares), h (V).

Ex.2 $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{x}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{AT} = \frac{4}{3}\overrightarrow{x} + \frac{3}{2}\overrightarrow{y}.$

Ex.3 $\overrightarrow{z} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{z} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}, \overrightarrow{z} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

Ex.4

Ex.5 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}.$

Ex.6 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{v}; \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$

Ex.7 $\overrightarrow{AC} = 2\rightarrow - \overrightarrow{b}; \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$

Ex.8

Ex.9 $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\overrightarrow{c}, \overrightarrow{FX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} - \frac{1}{4}\overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\overrightarrow{c}$

Ex.10 $\overrightarrow{AF} = \frac{8}{23}\overrightarrow{AD} + \frac{6}{23}\overrightarrow{AB}$

Ex.11 $\lambda = \frac{1}{3}$

Ex.12 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BQ} = -\frac{40}{49}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{49}\overrightarrow{AC}$

Ex.13 $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$