FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA - QUESTÕES DE LÓGICA
Prof. Gregory Duran

Problema 1. Os brinquedos de Ana, Bia e Carla são, não necessariamente nesta ordem, uma bola, um patins e um patinete. Um dos brinquedos é amarelo, um outro é verde e o outro é azul. O brinquedo de Ana é amarelo. O brinquedo de Carla é o patinete. O brinquedo de Bia não é verde e não é a Bola. Quais são as cores da bola, do patins e o patinete?

Solução: Por hipótese, brinquedo de Bia não é a bola, e também não pode ser o patinete (que pertence à Carla), logo é o patins. A cor do patins é azul, pois sabemos que, por pertencer à Bia, não pode ser verde, e também não é amarelo que é a cor do brinquedo de Ana. Para o patinete de Carla só restou a cor verde. E para Ana, sobrou a bola amarela.

Problema 2. Existem cinco caixas consecutivas numeradas de 1 a 5, nas quais um gato está escondido em uma delas. Todas as noites ele pula para uma caixa vizinha da qual se encontra e todas as manhãs você tem uma chance de abrir exatamente uma caixa para tentar encontrá-lo. Se você abrir uma caixa e o gato não estiver lá, então você deve fechá-la e tentar novamente no outro dia. Existe alguma estratégia para encontrar o gato em no máximo seis dias?

Solução: Há uma estratégia na qual você pode encontrar o gato em no máximo seis dias. Essa estratégia é a seguinte: abra as caixas 2, 3, 4, 2, 3 e 4 nesta ordem até encontrá-lo.

Agora iremos justificar por qual motivo essa estratégia funciona. Observe que o gato encontra-se inicialmente em uma caixa de número ímpar ou par.

- Se o gato está inicialmente em uma caixa par (caixa 2 ou 4). Ao abrir a caixa 2, você poderá encontrar o gato na primeira tentativa. Caso contrário, isso significa ele estava na casa 4. Portanto, na noite seguinte ele passará para a casa 3 ou 5. Na manhã seguinte, ao abrir a caixa 3; se ele não estiver lá, isso significa que ele estava na caixa 5 e, portanto, na noite seguinte, ele estará na necessariamente na caixa 4, e na manhã seguinte você abrirá a caixa na qual o gato estará.

- Se o gato estava inicialmente em uma caixa de numeração ímpar (1, 3 ou 5), você não irá encontrá-lo na primeira rodada de caixas 2, 3 e 4. Mas se for esse o caso, você saberá que na quarta noite ele terá que estar em uma caixa de número par (porque ele muda todas as noites: ímpar, par, ímpar, par). Assim, você pode iniciar o processo novamente conforme descrito anteriormente. Isso significa que se você abrir as caixas 2, 3 e 4 nessa ordem, você o encontrará o gato nessa segunda rodada.

Problema 3. Em um concurso de música, Alice, Bento, Catarina e Darwin ficaram com as quatro primeiras colocações. O concurso tinha três jurados. Cada jurado fez duas considerações no anúncio final das classificações, sendo apenas uma consideração verdadeira. O primeiro jurado disse: "Alice foi a vencedora do concurso e Bento foi o vice-campeão". O segundo jurado disse: "Alice foi a vice-campeã e Darwin foi o terceiro colocado". O terceiro jurado disse: "Catarina foi a vice campeã e Darwin obteve somente a quarta colocação". Sabendo que não houveram empates entre os quatro primeiros colocados do concurso, determine o resultado correto das quatro primeiras colocações.

Solução: Primeiramente vamos provar que o 1^o jurado disse a verdade em "Alice foi a vencedora do concurso". Suponha por absurdo que isso não é verdade, logo a outra fala deste juiz deve ser verdade, ou seja, Bento foi o vice-campeão. Logo, a 2^a colocação não pode ficar com Alice e nem Catarina, tornando as primeiras falas dos 2^o e 3^o juízes falsas. Com isso, deve ser verdade as segundas falas falas destes dois juízes: Darwin foi o terceiro colocado e Darwin foi o quarto colocado, o que é um absurdo. Isso prova que o 1^o jurado disse a verdade em "Alice foi a vencedora do concurso". Sabendo que Alice foi a vencedora, concluímos que a primeira fala do 2^o jurado é falsa. Logo, é verdade a segunda fala deste jurado: "Darwin foi o terceiro colocado". Isso garante que é falsa a segunda fala do 3^o jurado e, logo, validando a sua primeira fala: "Catarina foi a vice campeã".

Portanto, Alice foi a vencedora, Catarina a vice, Darwin ficou em terceiro, e restou somente a quarta colocação para Bento.

Problema 4. Considere 25 cavalos e uma pista de corrida. Cada cavalo finaliza o percurso da pista sempre num mesmo tempo fixo e todos os cavalos finalizam o percurso em tempos diferentes. Nesta pista, cada corrida pode ser realizada com no máximo 5 cavalos. No final do percurso obtemos a ordem de chegada dos cavalos, mas não os tempos de chegada. Qual é o número mínimo de corridas necessárias para identificar os 3 cavalos mais rápidos?

Solução: Pode-se identificar os 3 cavalos mais rápidos em um mínimo de 7 corridas.

<u>Parte 1</u>: Dividir os 25 cavalos em grupos de 5 e realizar uma corrida para cada grupo. (5 corridas)

<u>Parte 2</u>: Selecione o vencedor de cada grupo e realize uma corrida com estes 5 cavalos. O vencedor desta corrida é o cavalo mais rápido dentre todos os 25. (1 corrida)

Denote os 5 grupos da parte 1 como a, b, c, d, e correspondendo aos grupos dos cavalos que terminaram em $1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o$ na corrida da parte 2, respectivamente. Utilize indexação para identificar a ordem de chegada de cada cavalo do grupo, assim, por exemplo, a_2 denota o cavalo que chegou em 2^o no grupo a.

<u>Parte 3</u>: Realize uma última corrida com os cavalos a_2, a_3, b_1, b_2, c_1. Os 2 cavalos mais rápidos nesta corrida são os 2^o e 3^o mais rápidos dentre todos os 25. (1 corrida)

Para justificar a parte 3, basta observar que podemos eliminar cavalos que são mais lentos do que outros 3. Note que podemos eliminar todos os cavalos dos grupos d e e, pois são todos mais lentos do que os cavalos a_1, b_1, c_1. Pelo mesmo motivo, no grupo c, podemos eliminar os cavalos c_5, c_4, c_3, c_2, pois são todos mais lentos do que a_1, b_1, c_1. No grupo b, podemos eliminar os cavalos b_5, b_4, b_3, pois são mais lentos do que b_2, b_1, a_1. No grupo a, podemos eliminar os cavalos a_5, a_4, pois são mais lentos do que a_3, a_2, a_1. Podemos também eliminar o cavalo a_1 da disputa pelos 2^o e 3^o lugar, pois já sabemos que ele é o mais rápido de todos. Assim, restaram apenas 5 cavalos: a_2, a_3, b_1, b_2, c_1. Realizando uma corrida com estes 5 cavalos restantes, concluiremos que o vencedor é o 2^o mais rápido de todos e o vice nesta corrida é o 3^o mais rápido de todos.

<u>Afirmação</u>: 7 corridas é minimal.

Como devemos testar em corrida cada um dos 25 cavalos, e só podemos testar 5 de cada vez, vamos precisar de 5 corridas para tal. Após estas 5 corridas, ainda não seremos capazes de identificar o cavalo mais rápido de todos, assim, iremos precisar realizar uma 6^a corrida com os 5 vencedores. E ainda assim, precisaremos de mais uma corrida, a 7^a, para comparar os cavalos a_2 e b_1 para identificar o 2^o mais rápido. Portanto, não é possível resolver o problema com menos do que 7 corridas.