GEOEMETRIA ANALÍTICA

AULA 3 - 2024.1

Prof. Dr. Mário José de Souza

1. Coordenadas no Plano

- Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais. O número x chama-se **primeira coordenada** e o número y chama-se **segunda coordenada** do par ordenado (x, y).

- Um **sistema de eixos ortogonais** OXY num plano π é um par de eixos OX e OY, tomados em π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O.

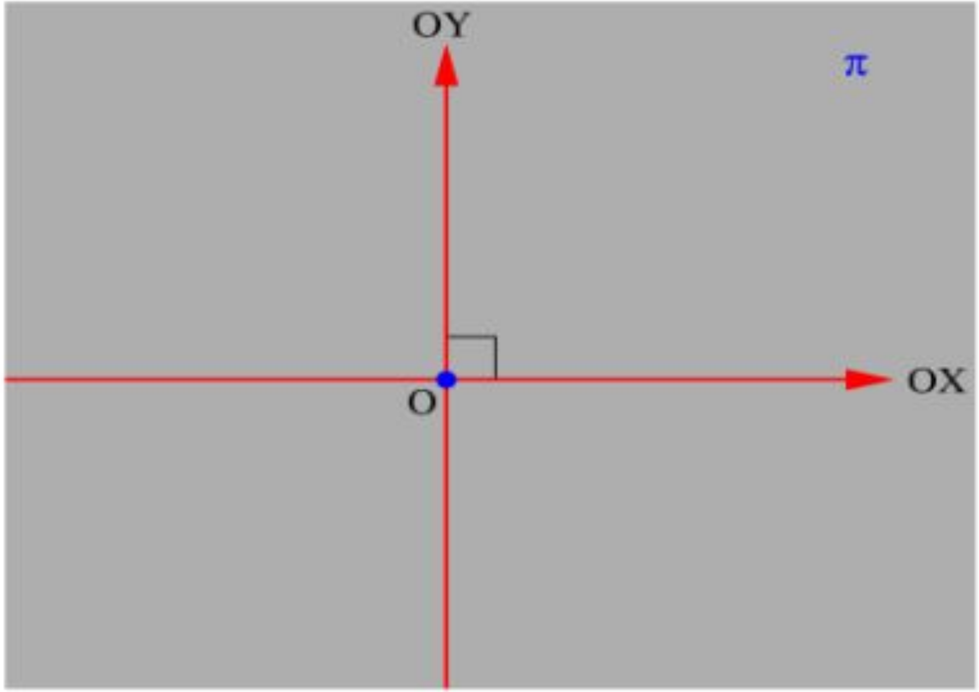


Figura 10: Sistema de eixos ortogonais OXY no plano π.

O eixo$-OX$ é chamado **eixo horizontal** e o eixo$-OY$, **eixo vertical**.

• Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de maneira natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2}$$

De fato, dado um ponto $P \in \pi$, tomamos as retas r e s tais que:

- $r \parallel$eixo$-OY$ e $P \in r$,
- $s \parallel$eixo$-OX$ e $P \in s$.

Se o ponto X de interseção da reta r com o eixo$-OX$ tem coordenada x no eixo$-OX$ e se o ponto Y de interseção da reta s com o eixo$-OY$ tem coordenada y no eixo$-OY$, associa-se ao ponto P o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

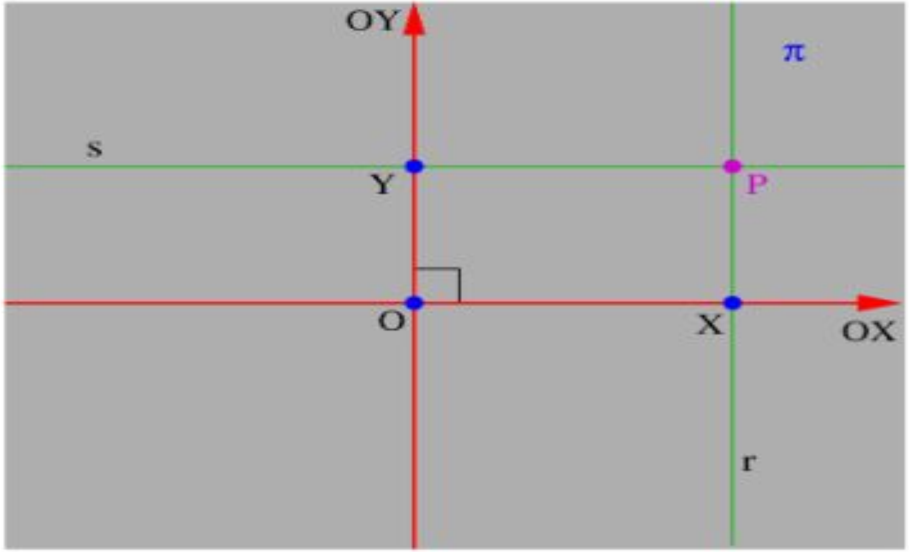


Figura 11: Determinando as coordenadas do ponto $P \in \pi$

Reciprocamente:

Dado o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

temos que, se:

- X é o ponto do eixo$-OX$ de coordenada x;
- Y é o ponto do eixo$-OY$ de coordenada y;
- r é a reta paralela ao eixo$-OY$ que passa por X;
- s é a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por Y, **então** $\{P\} = r \cap s$.

• Os números x e y chamam-se **coordenadas cartesianas do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado.**

A coordenada x é a abscissa de P e y é a ordenada de P.

Observação 2

No eixo$-OX$, os pontos têm coordenadas $(x, 0)$.

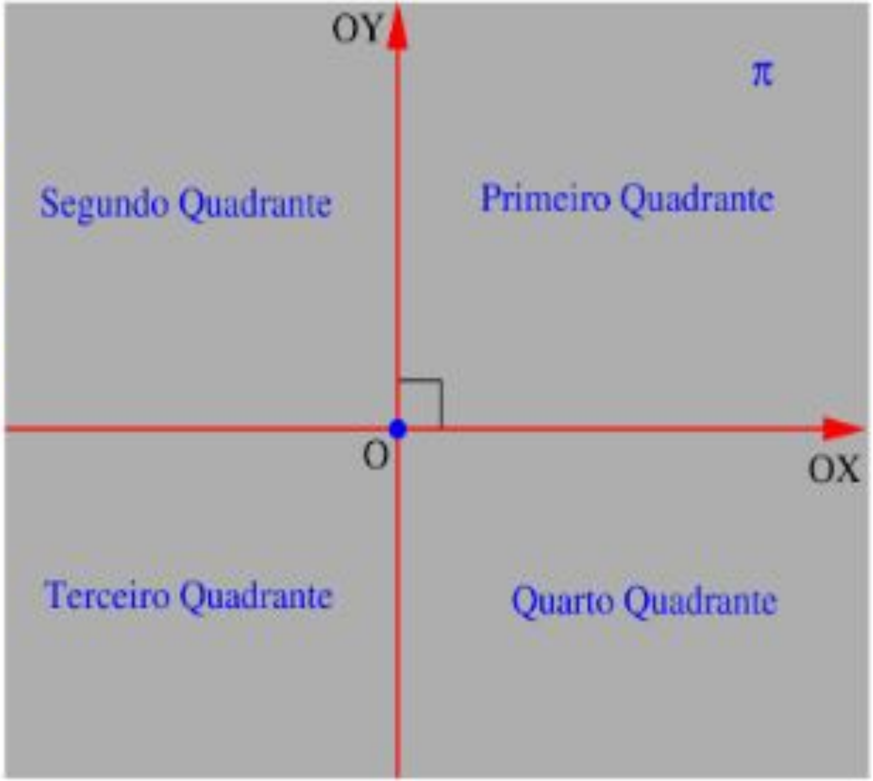
No eixo$-OY$, os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Observação 3

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**:

1^o Quadrante $= \{(x, y) \,|\, x > 0$ e $y > 0\}$
2^o Quadrante $= \{(x, y) \,|\, x < 0$ e $y > 0\}$
3^o Quadrante $= \{(x, y) \,|\, x < 0$ e $y < 0\}$
4^o Quadrante $= \{(x, y) \,|\, x > 0$ e $y < 0\}$

Cada ponto do plano pertence a um dos eixos ortogonais ou a um dos quadrantes.



2. Distância entre dois pontos no plano

Seja π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY e sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano π.

Seja $Q = (x_1, y_2)$. Como,

$$d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|,$$

$$d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|,$$

temos, pelo teorema de Pitágoras,

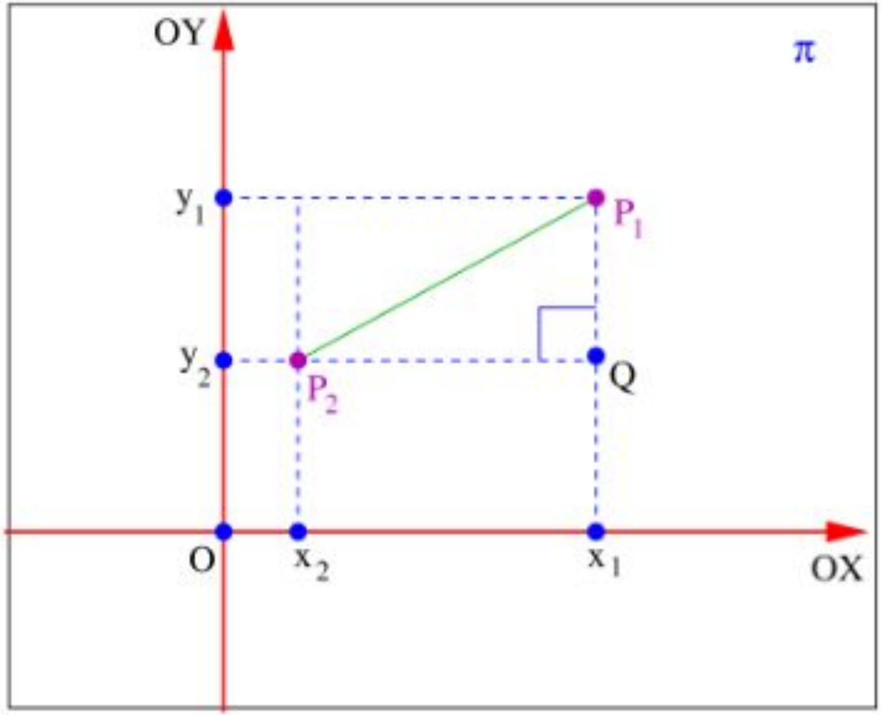


Figura 13: Distância entre dois pontos no plano.

$$
\begin{aligned}
& d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2 \\
\iff \; & d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\
\iff \; & \boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Calcule a distância do ponto $A = (-1, 2)$ *ao ponto* $B = (2, -3)$.

Solução.

Temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

□

Exemplo 2

Determine para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ os pontos $P = (m, 1)$ e $Q = (2m, -m)$ têm distância igual a 1.

Solução.

Temos:

$$
\begin{aligned}
& d(P,Q) = \sqrt{(2m-m)^2 + (-m-1)^2} = \sqrt{2m^2+2m+1} = 1 \\
\iff \quad & 2m^2 + 2m + 1 = 1 \\
\iff \quad & m(m+1) = 0 \\
\iff \quad & m = 0 \ \text{ ou } \ m = -1.
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 3

Determine os pontos P pertencentes ao eixo-OX tais que $d(P, A) = 5$, onde $A = (1, 3)$.

Solução.

O ponto P é da forma $(x, 0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}
& d(A, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2} = 5 \\
\iff \ & (x-1)^2 + 9 = 25 \iff (x-1)^2 = 16 \\
\iff \ & x - 1 = \pm 4 \iff x = 5 \ \text{ ou } \ x = -3 \\
\iff \ & P = (5, 0) \ \text{ ou } \ P = (-3, 0).
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 2

Dados um ponto A num plano π e o número $r > 0$, o **círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio $r > 0$** é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:

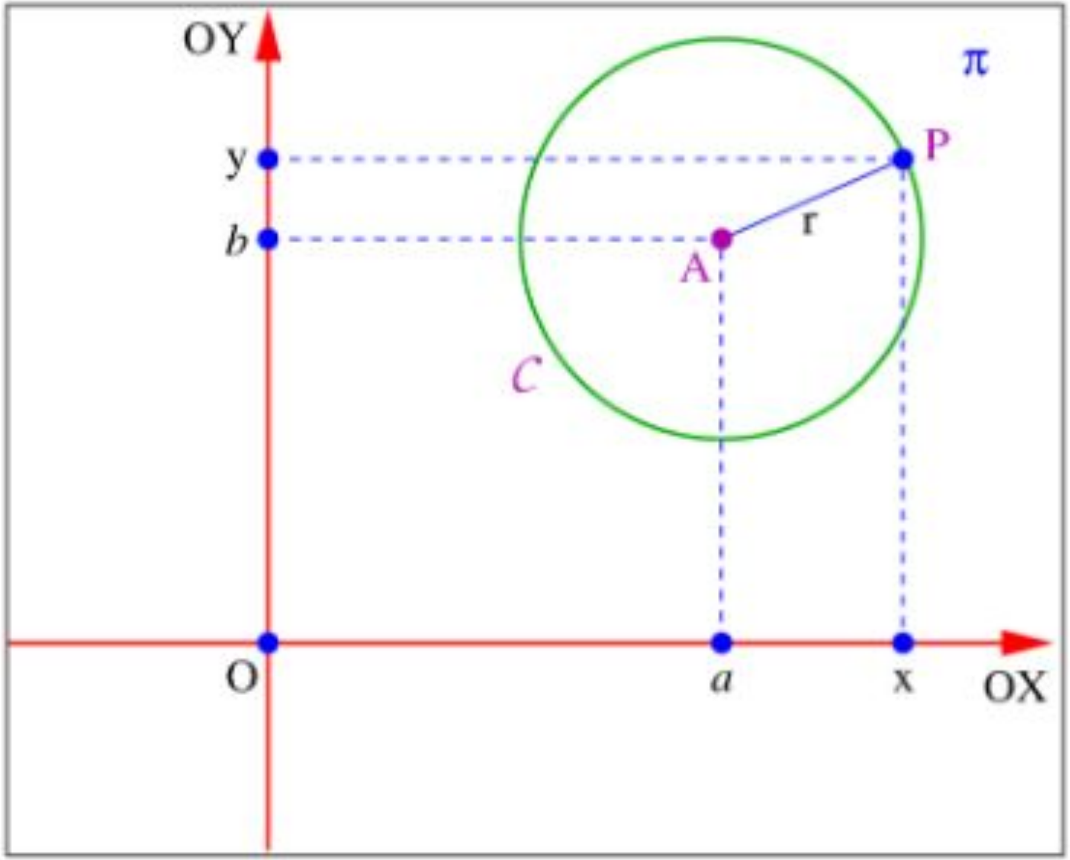
$$\mathcal{C} = \{P \in \pi \,|\, d(P, A) = r\}.$$

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano π e sejam a e b as coordenadas do centro A neste sistema de eixos. Então,

$$P = (x, y) \in \mathcal{C} \iff d(P, A) = r \iff d(P, A)^2 = r^2 \iff$$

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Assim, associamos ao círculo $\mathcal{C}$ uma *equação* que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Uma vez obtida a equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas por métodos algébricos.



Exemplo 4

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$

(b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0.$

Solução.

(a) *Completando os quadrados*, obtemos:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

Portanto, o círculo $\mathcal{C}$ tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) *Completando os quadrados*, obtemos:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1 \\
&\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\
&\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{C}$ é o círculo de centro no ponto $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{30}}{2}$. $\square$

Exemplo 5

Seja OXY *um sistema de eixos ortogonais e considere os pontos* $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. *Então,* $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ *é o* **ponto médio** *do* segmento P_1P_2.

Solução.

De fato, considerando os pontos $Q_1 = (x_M, y_1)$ e $Q_2 = (x_M, y_2)$, temos que os triângulos $\triangle P_1MQ_1$ e $\triangle P_2MQ_2$ são congruentes (AAL), onde $M = (x_M, y_M)$.

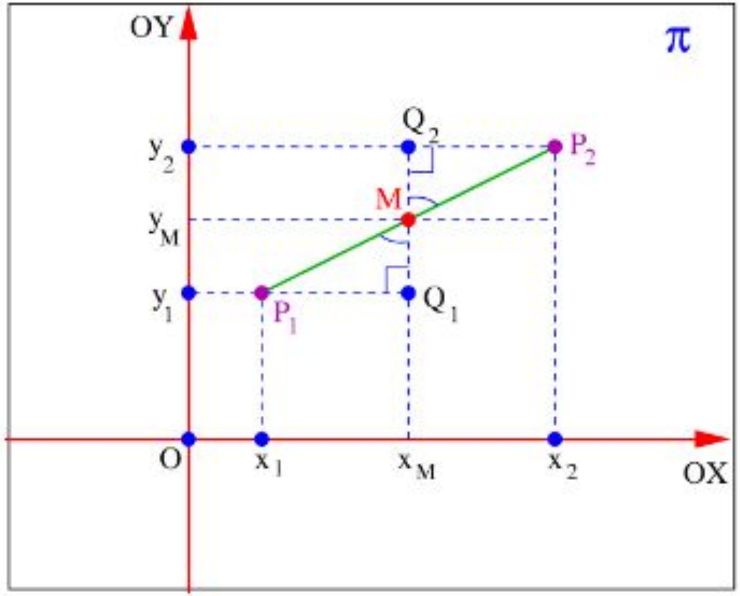


Figura 15: M é o ponto médio do segmento P_1P_2.

Logo,

- $d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2)$
  $\Longrightarrow$ $|x_M - x_1| = |x_2 - x_M|$
  $\Longrightarrow$ x_M é o ponto médio entre x_1 e x_2
  $\Longrightarrow$ $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

- $d(Q_1, M) = d(Q_2, M)$ $\Longrightarrow$ $|y_M - y_1| = |y_2 - y_M|$
  $\Longrightarrow$ y_M é o ponto médio entre y_1 e y_2
  $\Longrightarrow$ $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Assim, as coordenadas do ponto médio M do segmento P_1P_2 são os valores médios das respectivas coordenadas dos pontos P_1 e P_2. $\square$

Exemplo 6

Dados dois pontos A e B do plano π, seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos equidistantes de A e B, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{P \in \pi \,|\, d(P, A) = d(P, B)\}.}$$

Mostre algebricamente que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento** AB*, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M de AB.*

Solução.

Para isso, escolhemos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento AB e orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 17).

Neste sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
P = (x, y) \in \mathcal{R} &\iff d(P, A) = d(P, B) \iff d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \\
&\iff (x - (-x_0))^2 + (y - 0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - 0)^2 \\
&\iff (x + x_0))^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \\
&\iff x^2 + 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 \\
&\iff 2xx_0 = -2xx_0 \iff 4xx_0 = 0 \iff x = 0 \iff P \in \text{eixo} - OY\,.
\end{aligned}
$$

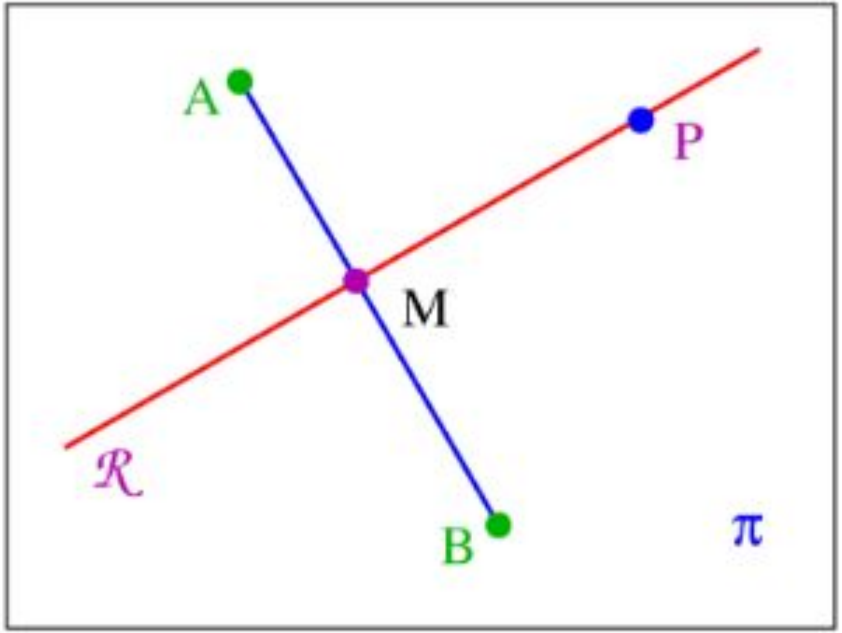


Figura 16: Mediatriz e ponto médio de AB.

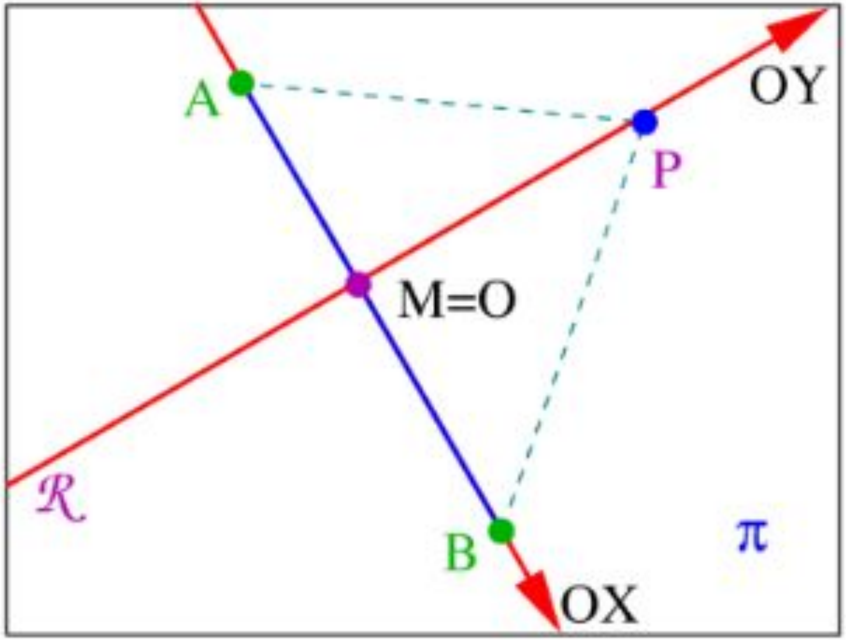


Figura 17: Escolha do sistema de eixos ortogonais OXY.

Portanto, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} = \text{eixo} - OY$, que é geometricamente

a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M deste segmento, como queríamos provar. $\square$

Exemplo 7

Dado o ponto $P = (x, y)$, considere os pontos $P' = (-y, x)$ e $P'' = (y, -x)$. Mostre que os pontos P' e P'' são obtidos a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

Convencionamos dizer que a rotação de 90^o que leva o ponto $P = (x, y)$ ao ponto $P' = (-y, x)$ tem **sentido positivo***, e que a rotação de 90^o que leva o ponto P ao ponto P'' tem* **sentido negativo**.

Solução.

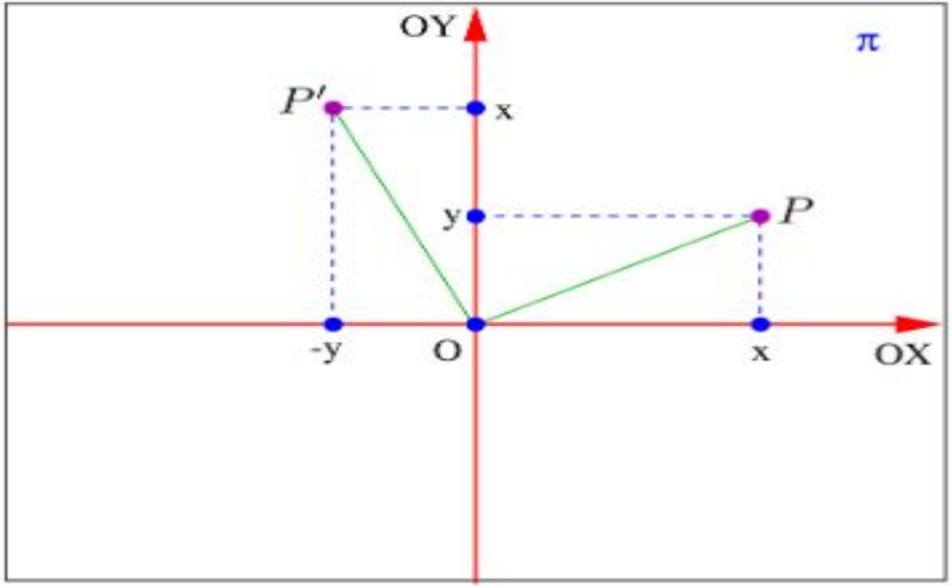


Figura 18: Posição dos pontos P e P' no plano.

Como

$$\begin{cases} d(P,O)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2 \\ d(P',O)^2 = (-y-0)^2 + (x-0)^2 = y^2 + x^2, \end{cases}$$

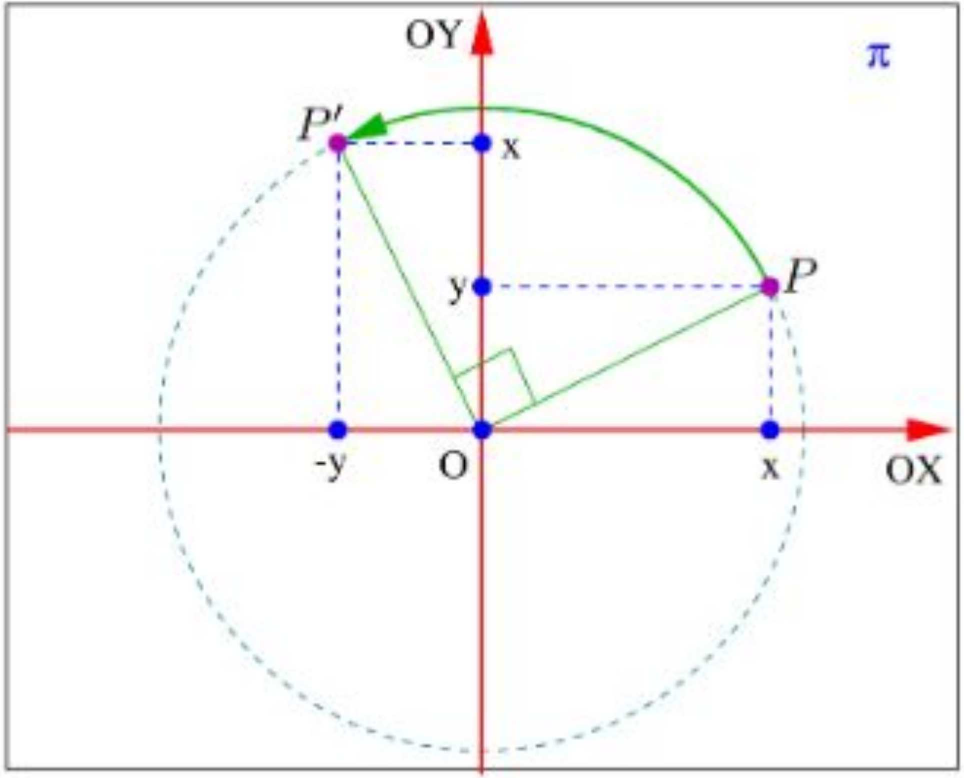
temos que o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles.

Além disso,

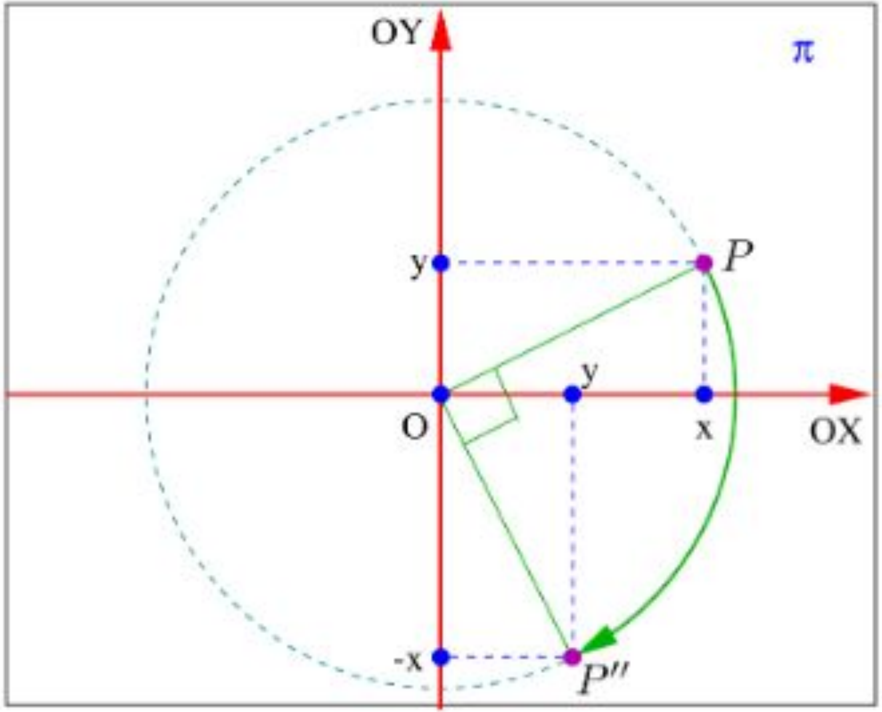
$$d(P,P')^2 = (-y-x)^2 + (y-x)^2 = y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$\Longrightarrow d(P,P')^2 = 2(x^2+y^2) \Longrightarrow d(P,P')^2 = d(P,O)^2 + d(P',O)^2\,.$$

Logo, pela lei dos cossenos, o triângulo $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.


OY
π
P′
x
y
P
-y
O
x
OX

Consideremos agora o ponto $P'' = (y, -x)$. De maneira análoga, podemos provar que P'' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.



3.Vetores no plano
3.1 Paralelogramos

Lembremos que um **paralelogramo** é um quadrilátero (figura geométrica com quatro lados) cujos lados opostos são paralelos.

Usando congruência de triângulos, podemos verificar que as seguintes afirmativas são equivalentes:

- O quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo;
- Os lados opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Os ângulos opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Dois lados opostos de $ABDC$ são congruentes e paralelos;
- As diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

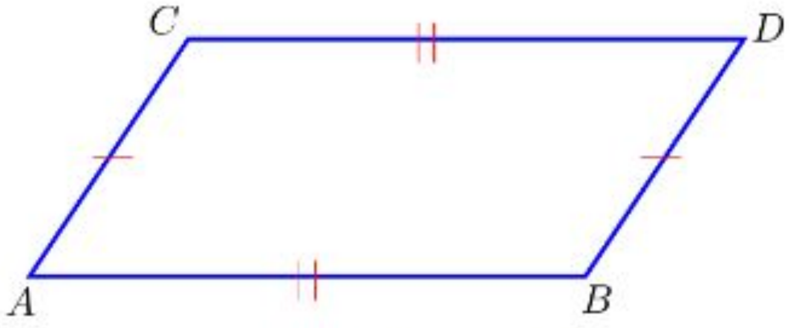


Figura 1: Paralelogramo $ABDC$.

Por exemplo, vamos demonstrar a seguinte equivalência:

Proposição 1

No quadrilátero $ABDC$ os lados opostos AC e BD são congruentes e paralelos se, e somente se, as diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

Prova.

(a) Suponhamos que os lados opostos AC e BD no quadrilátero $ABDC$ são congruentes e paralelos, e seja M o ponto de interseção das diagonais AD e BC. Pela hipótese, temos:

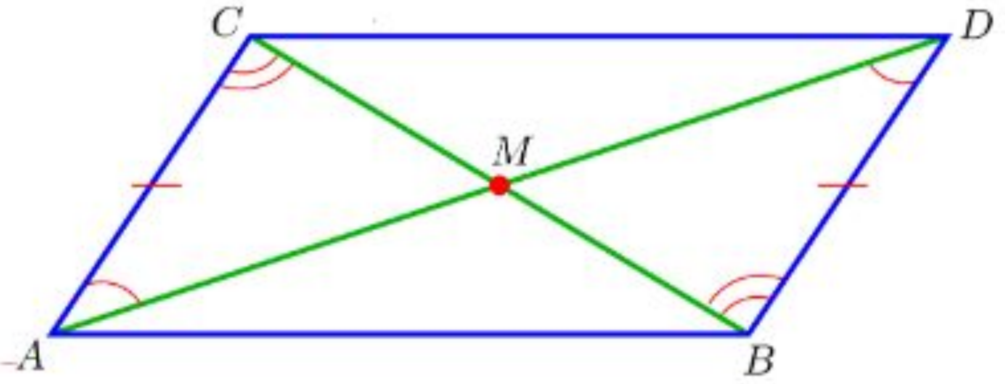


Figura 2: $ABDC$ de lados opostos congruentes e paralelos.

Proposição 1

No quadrilátero $ABDC$ os lados opostos AC e BD são congruentes e paralelos se, e somente se, as diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

- $|AC| = |BD|$, isto é, os comprimentos dos lados AC e BD são iguais;

- $AC \parallel BD$.

Logo,

- $\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$, por serem ângulos alternos internos;

- $\widehat{CAD} = \widehat{BDA}$, por serem ângulos alternos internos.

Pelo critério ALA (ângulo-lado-ângulo), concluímos que os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |CM|$. Portanto, M é o ponto médio das diagonais AD e BC.

(b) Suponhamos agora que as diagonais AD e BC do quadrilátero $ABDC$ se intersectam no ponto M que é o ponto médio de ambas.

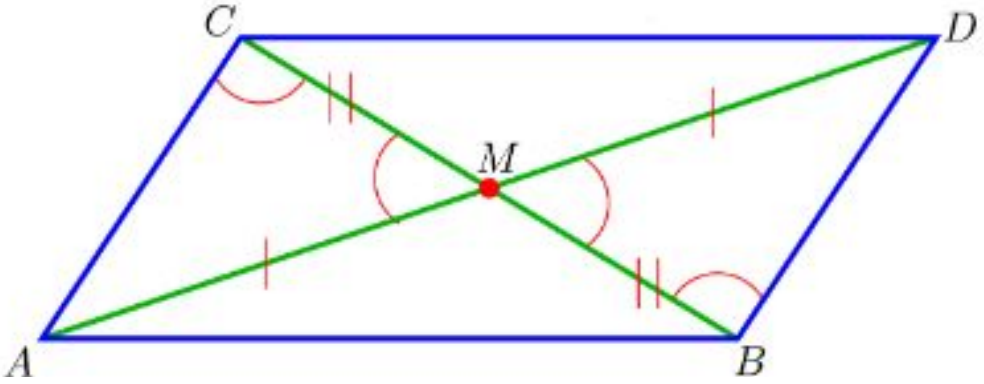


Figura 3: $ABDC$ com $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |MC|$.

Devemos mostrar que os lados opostos AC e BD no paralelogramo $ABDC$ são paralelos e congruentes. Temos:

- $|AM| = |DM|$
- $|BM| = |CM|$

- $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

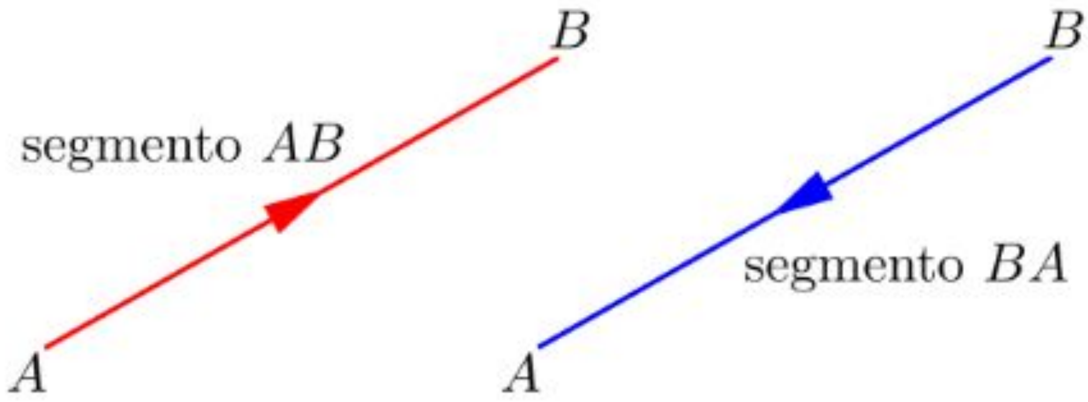
Pelo critério LAL (lado-ângulo-lado), os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AC| = |DB|$ e $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$, ou seja, os lados AC e DB são congruentes e paralelos. $\blacksquare$

3.2 Segmentos orientados

Seja AB um **segmento orientado** com origem A e extremidade B.

Isto é, no segmento AB estabelecemos um *sentido de percurso* (orientação) de A para B.



Dizemos que o segmento orientado BA tem sentido de percurso (ou orientação) **oposto ou contrário** ao do segmento AB. Classificamos os segmentos orientados da seguinte maneira:

Definição 1

Dizemos que os segmentos AB e CD são **equipolentes**, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem às três propriedades abaixo:

- AB e CD têm o mesmo comprimento: $|AB| = |CD|$.
- AB e CD são paralelos ou colineares.
- AB e CD tem o mesmo sentido.

Esclarecimento da definição de equipolência

- Se AB e CD são segmentos colineares, então eles têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

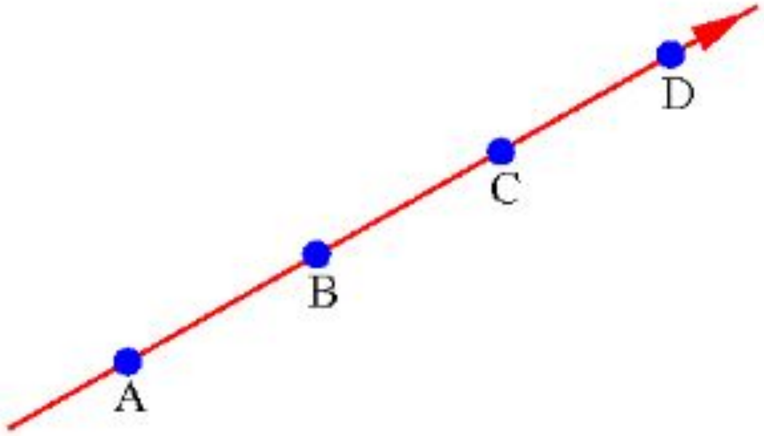


Figura 5: Segmentos colineares AB e CD que têm o mesmo sentido.

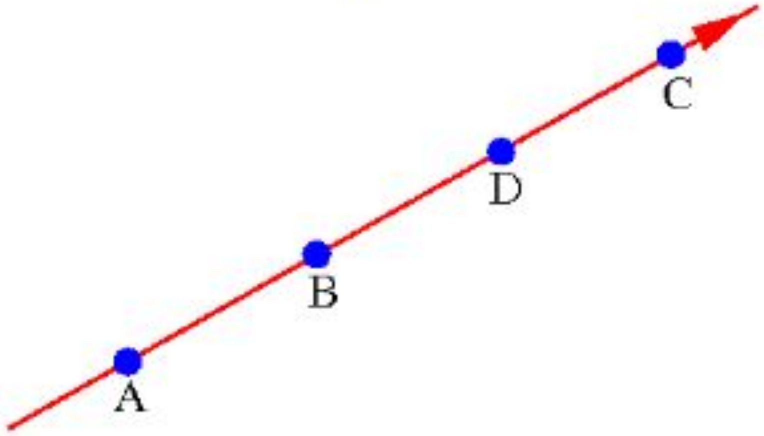


Figura 6: Segmentos colineares AB e CD que **não** têm o mesmo sentido.

- Se AB e CD são segmentos paralelos de igual comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo.

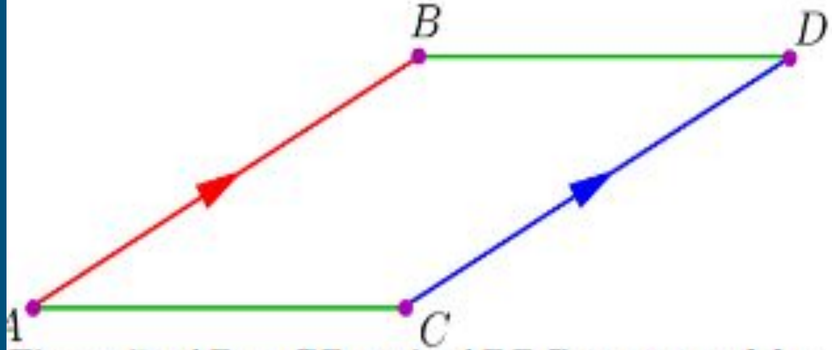


Figura 7: $AB \equiv CD$, pois $ABDC$ é um paralelogramo.

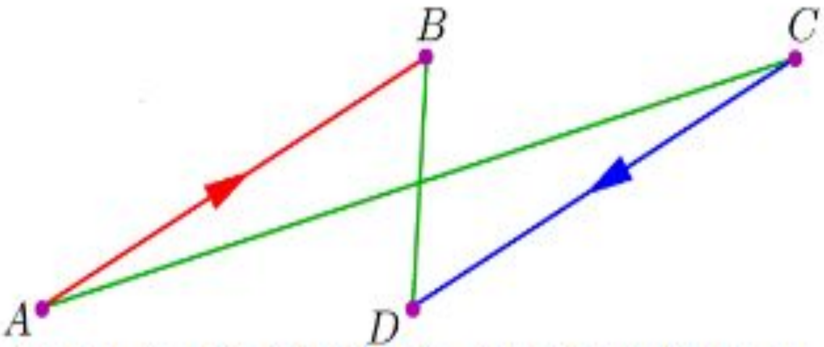


Figura 8: $AB \not\equiv CD$, pois $ABDC$ **não** é um paralelogramo.

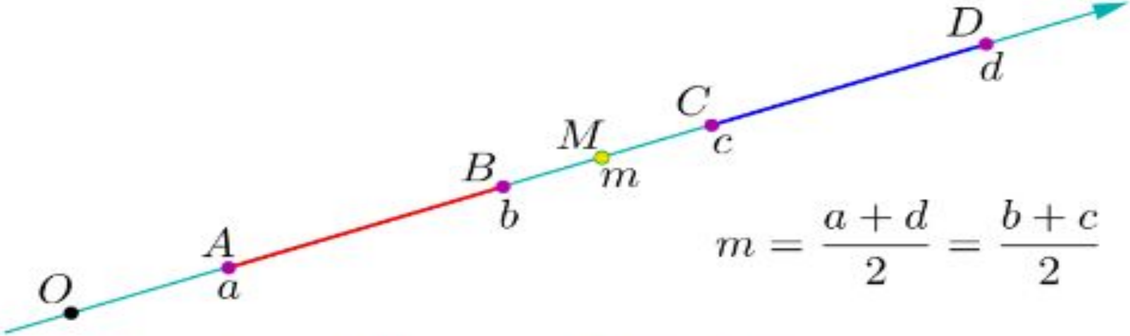
Proposição 2

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC}$$

Prova.

Com efeito, se $AB \parallel CD$ já sabemos que a equivalência é verdadeira, pois $ABDC$ é um paralelogramo.

Vejamos que isso também é verdadeiro quando AB e CD são segmentos colineares.



$$m = \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$$

Figura 9: $AB \equiv CD$ com A, B, C e D colineares.

Consideremos a reta r que contém A, B, C e D com uma orientação e uma origem O escolhidas de modo que B esteja à direita de A (figura 9).

Sejam a, b, c e d as respectivas coordenadas dos pontos A, B, C e D na reta r.

(a) Como AB e CD têm o mesmo sentido, $a < b$ e $c < d$, e, como estes segmentos têm o mesmo comprimento, $b - a = d - c$. Logo,

$$\begin{aligned} b - a = d - c \iff & \ a + d = b + c \iff \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} \\ \iff & \ \text{ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC. \end{aligned}$$

$$a + d = b + c \Longrightarrow b - a = d - c\,.$$

Como $b - a$ e $d - c$ têm o mesmo sinal e o mesmo módulo, AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento, além de serem colineares (por hipótese). Assim, $AB \equiv CD$. ■

Proposição 3

Dados A, B e C pontos quaisquer no plano, existe um único ponto D no plano tal que $AB \equiv CD$.

Prova.

Como os pontos A, B e C podem ou não ser colineares, temos dois casos a considerar.

(a) A, B e C são colineares.

Neste caso, a circunferência de centro no ponto C e raio $|AB|$ intersecta a reta que contém os pontos A, B e C em exatamente dois pontos, mas apenas um deles, que designamos D, é tal que AB e CD têm o mesmo sentido (veja a figura 10).

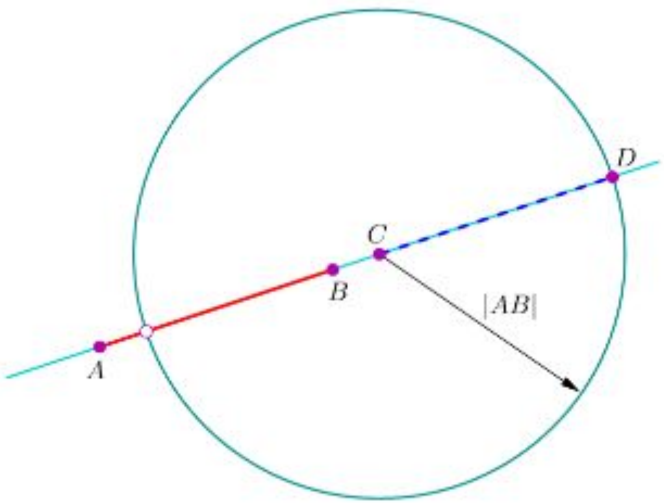


Figura 10: $AB \equiv CD$ com A, B e C colineares.

(b) A, B e C **não** são colineares.

Seja r a reta que passa pelo ponto C e é paralela à reta que contém os pontos A e B.

O círculo de centro C e raio $|AB|$ intersecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, que designamos D, é tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Ou seja, $AB \equiv CD$ (veja a figura 11).

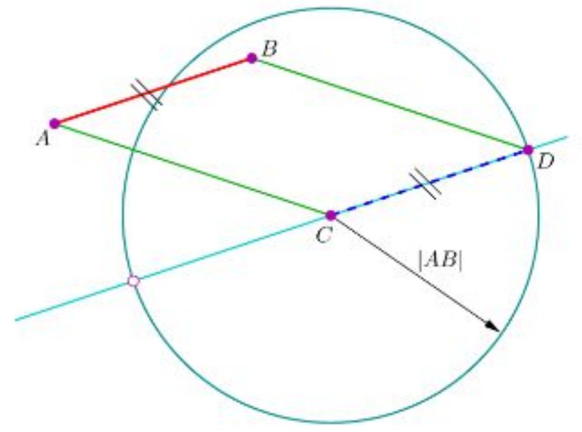


Figura 11: $AB \equiv CD$ com A, B e C não colineares.

3.3 Vetores

Definição 2

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, dizemos que eles representam o mesmo **vetor** $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Isto é, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB. Tais segmentos são chamados **representantes** do vetor $\overrightarrow{v}$.

Observação 1

(a) Da definição de vetor, temos $AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Observação 1

(a) Da definição de vetor, temos $AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(b) Por convenção, o **vetor nulo** é o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, qualquer que seja o ponto A no plano.

(c) Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Na prática, trabalhamos com vetores usando a sua expressão em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2) \qquad & C &= (c_1, c_2) \\ B &= (b_1, b_2) \qquad & D &= (d_1, d_2) \end{aligned}$$

pontos do plano. A seguinte proposição caracteriza a equipolência em termos de coordenadas.

Proposição 4

$$\boxed{AB \equiv CD \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2}$$

Prova.

Pela proposição 2,

$$
\begin{aligned}
AB \equiv CD \iff & \text{ ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC \\
\iff & \left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right) \\
\iff & (a_1+d_1, a_2+d_2) = (b_1+c_1, b_2+c_2) \\
\iff & a_1+d_1 = b_1+c_1 \quad \text{e} \quad a_2+d_2 = b_2+c_2 \\
\iff & b_1-a_1 = d_1-c_1 \quad \text{e} \quad b_2-a_2 = d_2-c_2.
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 3

Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Note que, se $AB \equiv CD$, então, pela proposição anterior,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Exemplo 1

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do

vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\
&\iff (2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\
&\iff 2 = d_1 - 4 \quad \text{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\
&\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $D = (6, -1)$. □

Corolário 1

Usando a proposição 4, é fácil verificar que:

(a) $AB \equiv CD \Longleftrightarrow AC \equiv BD.$

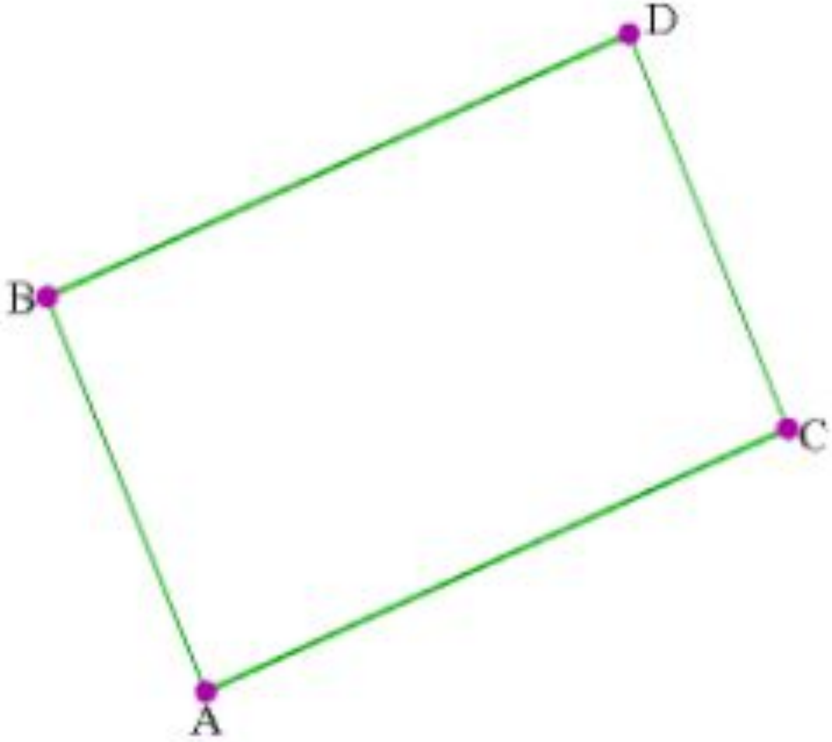


Figura 12: $AB \equiv CD \Longleftrightarrow AC \equiv BD$

(b) $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \Longrightarrow AB \equiv EF$.

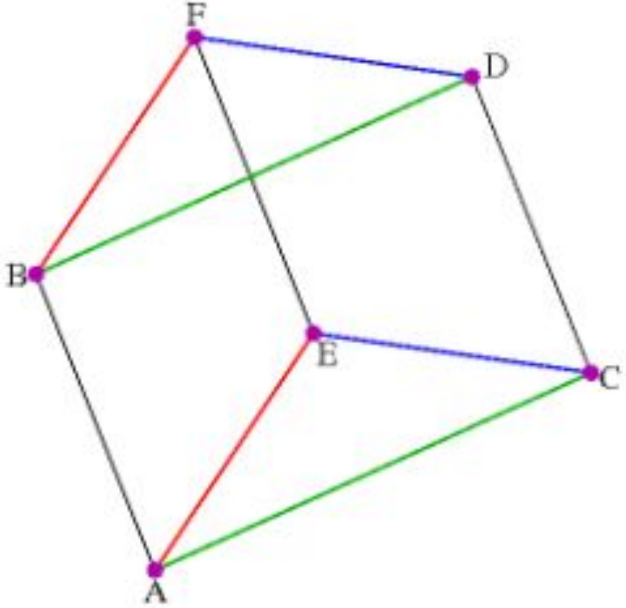


Figura 13: $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \Longrightarrow AB \equiv EF$.

Em virtude do item (c) da observação 1, temos:

Proposição 5

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor.

Então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (p_1, p_2)$, então $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

e

$$\begin{aligned} AB \equiv OP &\iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (p_1 - 0, p_2 - 0) \\ &\iff P = (p_1, p_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$

como queríamos verificar. ■

Exemplo 2

Sejam $A = (-1, 2)$ *e* $B = (4, 1)$*. Determine o ponto* P *tal que* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$*.*

Solução.

Pela proposição anterior,

$$P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1).$$

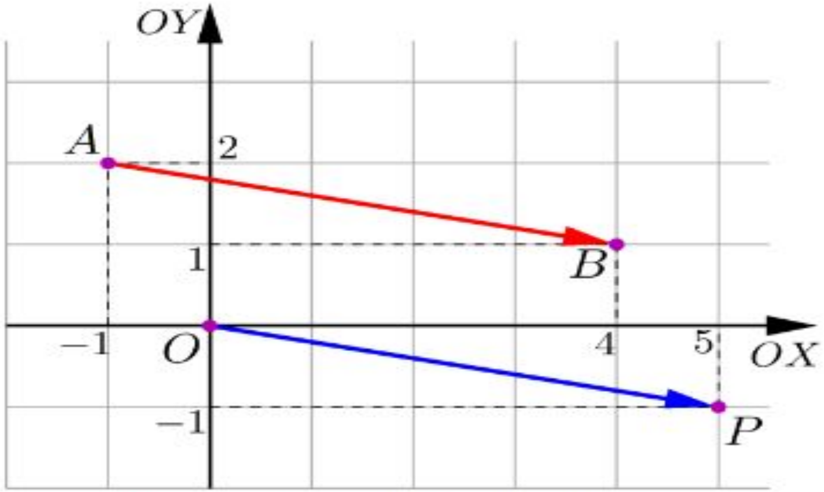


Figura 14: Exemplo 2, onde $AB \equiv OP$.

□

Operações com vetores

Muito obrigado!