

Cálculo 1A – 2024-1

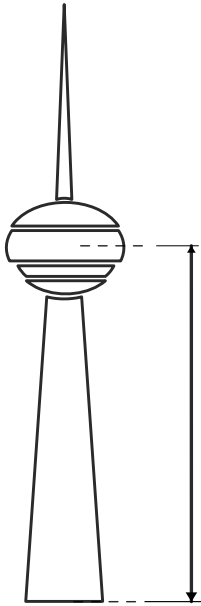
Aula 12 (15/04/2024)

Pauta

- Motivação ao estudo de limites
 - Os problemas da velocidade, da área e da tangente
-

Problema da velocidade

Exemplo - Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.



Problema da velocidade

Exemplo - Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

sol. Deve-se a Galileu a observação empírica de que a distância percorrida por qualquer corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda (num modelo que despreza os efeitos de resistência do ar).

Indicando $S(t)$ distância percorrida até o instante t

$$S(t) = 4,9t^2$$

pela lei de Galileu.

Dificuldade: não nos ser dado um intervalo de tempo...

Problema da velocidade

Escolhendo o intervalo de 0,1 s após o instante alvo...

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{5,1 - 5} = 49,49 \text{ m/s}$$

Repetindo o cálculo em diferentes intervalos de tempo...

Problema da velocidade

Escolhendo o intervalo de 0,1 s após o instante alvo...

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{5,1 - 5} = 49,49 \text{ m/s}$$

Repetindo o cálculo em diferentes intervalos de tempo...

Intervalo de tempo (s)	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Problema da velocidade

Aparenta:

Os valores das velocidades médias se aproximam de 49 m/s se encurtamos o intervalo de tempo.

Matematicamente

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow 49, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

lê-se: $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ tende 49, quando Δt tende a zero.

Problema da velocidade

Aparenta:

Os valores das velocidades médias se aproximam de 49 m/s se encurtamos o intervalo de tempo.

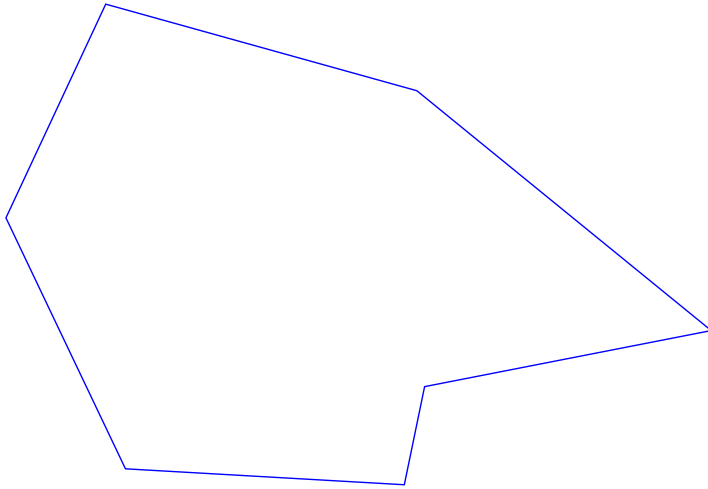
Matematicamente

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow 49, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

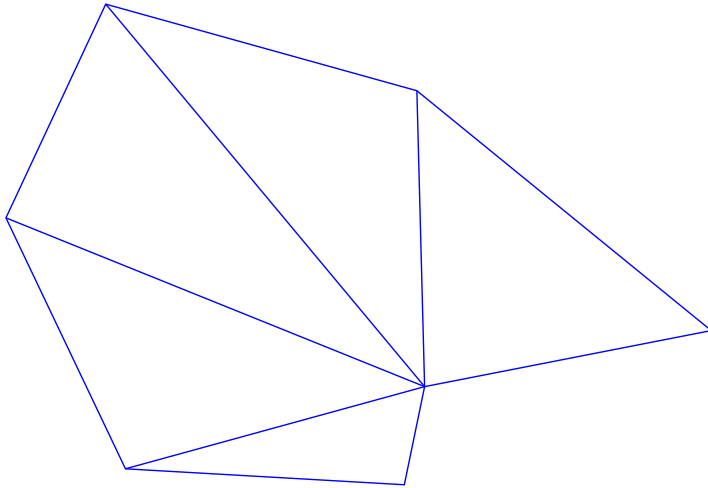
lê-se: $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ tende a 49, quando Δt tende a zero.

Por isso, define-se a velocidade instantânea quanto $t = 5$ s como o valor limite dessas velocidades médias (começando/terminando) em $t = 5$, isto é, $v = 49$ m/s.

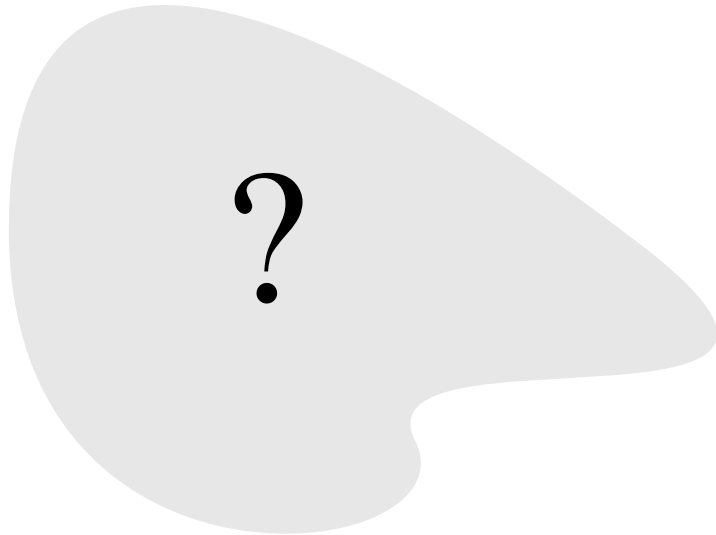
Limites: Problema da área



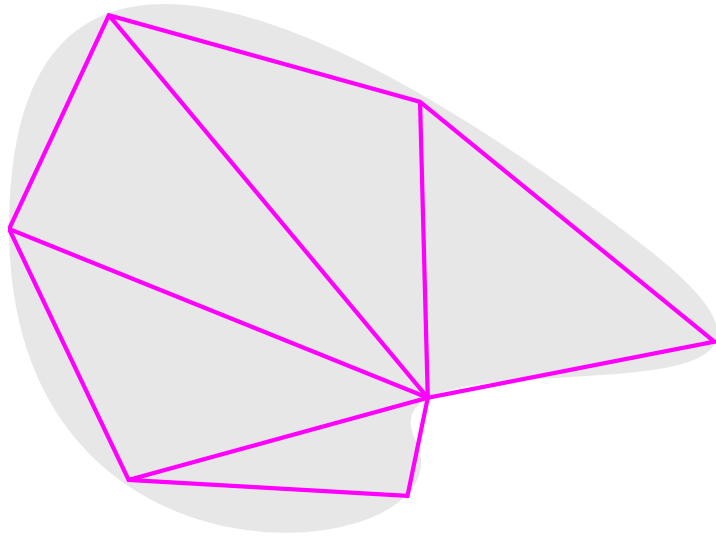
Limites: Problema da área



Limites: Problema da área

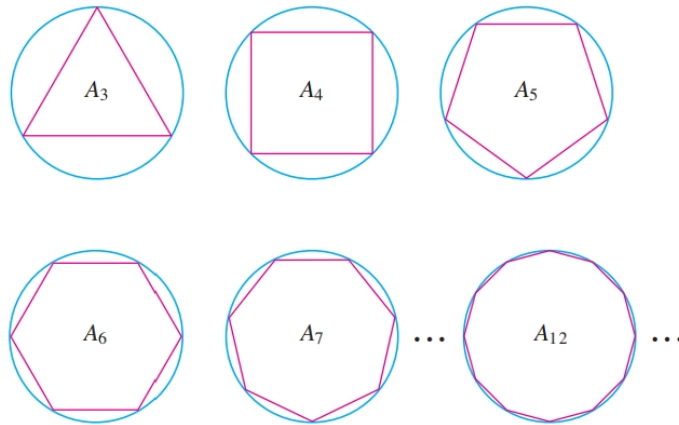


Limites: Problema da área



Limites: Problema da área

Vamos abordar o problema da área do círculo de raio r .
Inscrivendo (ou circunscrevendo) polígonos regulares)

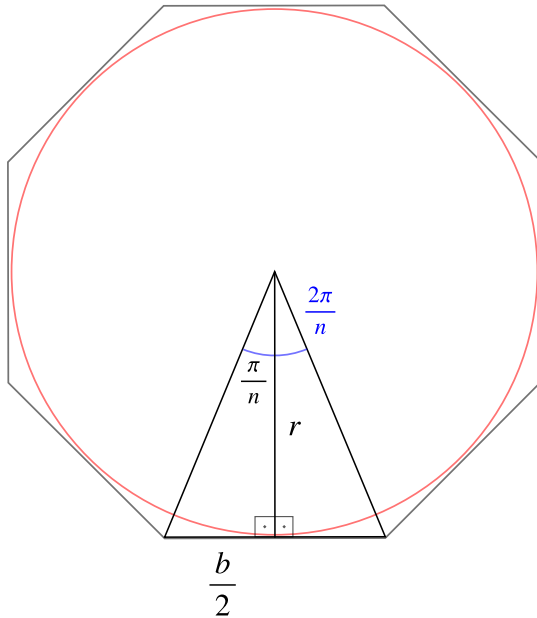


ao passo em que o número, n , de lados do polígono cresce a área, A_n , se aproxima de πr^2

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi r^2$$

Limites: Problema da área

Vamos abordar o problema da área do círculo de raio r circunscrevendo polígonos regulares

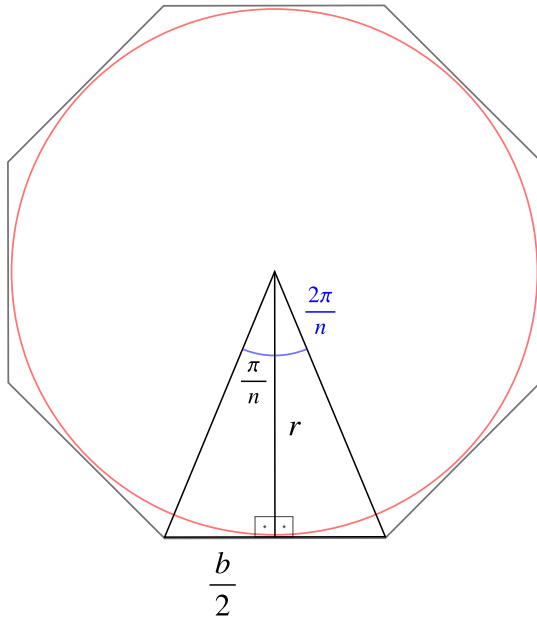


$$A_n = nS_n \quad S_n = \frac{b}{2} \cdot r$$

$$\frac{b}{2} = r \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \implies S_n = r^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad \therefore \quad nS_n = nr^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \rightarrow \pi r^2, \quad n \rightarrow \infty$$

Limites: Problema da área

Vamos abordar o problema da área do círculo de raio r circunscrevendo polígonos regulares



$$A_n = nS_n \quad S_n = \frac{b}{2} \cdot r$$

$$\frac{b}{2} = r \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \implies S_n = r^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad \therefore \quad nS_n = nr^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \stackrel{?}{\rightarrow} \pi r^2, \quad n \rightarrow \infty$$

Limites: Problema da área

Evidência numérica

n	$\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$	$n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$
1	6,283185307	-1,22515E-16	-1,22515E-16
2 [†]	3,141592654	1,63246E+16	3,26491E+16
3	2,094395102	1,732050808	5,196152423
4	1,570796327	1	4
5	1,256637061	0,726542528	3,63271264
6	1,047197551	0,577350269	3,464101615
7	0,897597901	0,481574619	3,371022332
8	0,785398163	0,414213562	3,313708499
9	0,698131701	0,363970234	3,275732108
10	0,628318531	0,324919696	3,249196962
11	0,571198664	0,293626493	3,229891422
12	0,523598776	0,267949192	3,215390309
13	0,483321947	0,246477863	3,204212219
14	0,448798951	0,228243474	3,195408641
15	0,41887902	0,212556562	3,188348425
16	0,392699082	0,198912367	3,182597878
17	0,369599136	0,186932397	3,177850751
18	0,34906585	0,176326981	3,173885653

Tabela 1 continuação

19	0,330693964	0,166870486	3,170539238
20	0,314159265	0,15838444	3,167688806
21	0,2991993	0,150725748	3,165240713
22	0,285599332	0,143778294	3,163122468
23	0,27318197	0,137446836	3,161277236
24	0,261799388	0,131652498	3,159659942
25	0,251327412	0,126329378	3,158234461
26	0,241660973	0,121421983	3,156971564
27	0,232710567	0,116883237	3,155847392
28	0,224399475	0,11267294	3,154842317
29	0,216661562	0,108756554	3,153940066
30	0,20943951	0,105104235	3,153127058
31	0,202683397	0,101690061	3,152391885
32	0,196349541	0,098491403	3,151724907
33	0,190399555	0,095488422	3,151117935
34	0,184799568	0,092663646	3,150563972
35	0,17951958	0,090001629	3,150057015
36*	0,174532925	0,087488664	3,149591887
37	0,169815819	0,085112543	3,149164105
38	0,165346982	0,082862362	3,148769773
39	0,161107316	0,080728346	3,148405489
40	0,157079633	0,078701707	3,148068273
41	0,153248422	0,076774525	3,147755507

Tabela 1 continuação

42	0,14959965	0,07493964	3,147464881
43	0,146120589	0,073190566	3,147194352
44	0,142799666	0,071521412	3,146942109
45	0,13962634	0,069926812	3,146706537
46	0,136590985	0,068401874	3,1464862
47	0,133684794	0,066942124	3,146279811
48	0,130899694	0,065543463	3,146086215
49	0,128228272	0,06420213	3,145904377
50	0,125663706	0,062914667	3,145733363
51	0,123199712	0,061677889	3,145572329
52	0,120830487	0,060488856	3,145420515
53	0,118550666	0,059344853	3,145277229
54	0,116355283	0,058243367	3,145141843
55	0,114239733	0,057182069	3,145013788
56	0,112199738	0,056158795	3,144892543
57	0,110231321	0,055171537	3,144777633
58	0,108330781	0,054218425	3,144668625
59	0,106494666	0,053297714	3,144565121
60	0,104719755	0,052407779	3,144466757
61	0,103003038	0,051547102	3,144373197
62	0,101341699	0,05071426	3,144284134
63	0,0997331	0,049907925	3,144199284
64	0,09817477	0,04912685	3,144118385

Tabela 1 continuação

65	0,096664389	0,048369865	3,144041196
66	0,095199777	0,047635871	3,143967493
67	0,093778885	0,046923837	3,14389707
68	0,092399784	0,04623279	3,143829733
69	0,091060657	0,045561816	3,143765307
70	0,08975979	0,044910052	3,143703625
71	0,088495568	0,044276684	3,143644533
72	0,087266463	0,043660943	3,143587889
73	0,086071032	0,043062104	3,14353356
74	0,08490791	0,042479479	3,14348142
75	0,083775804	0,041912418	3,143431353
76	0,082673491	0,041360306	3,143383252
77	0,081599809	0,040822559	3,143337014
78	0,080553658	0,040298622	3,143292545
79	0,079533991	0,039787972	3,143249755
80	0,078539816	0,039290107	3,143208561
81	0,077570189	0,038804554	3,143168884
82	0,076624211	0,038330862	3,143130651
83	0,075701028	0,0378686	3,143093793
84	0,074799825	0,03741736	3,143058245
85	0,073919827	0,036976752	3,143023944
86	0,073060294	0,036546405	3,142990834
87	0,072220521	0,036125964	3,14295886

Tabela 1 continuação

88	0,071399833	0,035715091	3,142927971
89	0,070597588	0,035313462	3,142898117
90	0,06981317	0,034920769	3,142869254
91	0,069045992	0,034536718	3,142841338
92	0,068295492	0,034161025	3,142814328
93	0,067561132	0,033793421	3,142788184
94	0,066842397	0,033433648	3,142762871
95	0,066138793	0,033081456	3,142738354
96	0,065449847	0,03273661	3,1427146
97	0,064775106	0,032398882	3,142691576
98	0,064114136	0,032068054	3,142669255
99	0,063466518	0,031743915	3,142647606
100	0,062831853	0,031426266	3,142626604
101	0,062209756	0,031114913	3,142606224
102	0,061599856	0,030809671	3,14258644
103	0,061001799	0,030510361	3,142567229
104	0,060415243	0,030216813	3,142548571
105	0,05983986	0,029928861	3,142530443
106	0,059275333	0,029646347	3,142512826
107	0,058721358	0,029369119	3,142495701
108	0,058177642	0,029097028	3,14247905
109	0,057643902	0,028829934	3,142462855
110	0,057119866	0,028567701	3,1424471

Tabela 1 continuação

111	0,056605273	0,028310196	3,142431769
112	0,056099869	0,028057293	3,142416847
113	0,05560341	0,02780887	3,142402319
114	0,055115661	0,027564809	3,142388173
115	0,054636394	0,027324995	3,142374394
116	0,054165391	0,027089319	3,142360969
117	0,053702439	0,026857674	3,142347888
118	0,053247333	0,026629959	3,142335138
119	0,052799877	0,026406073	3,142322709
120	0,052359878	0,026185922	3,142310588
⋮	⋮	⋮	⋮

A tabela acima é evidência numérica de que

$$n \rightarrow \infty, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \rightarrow 0$$

mas

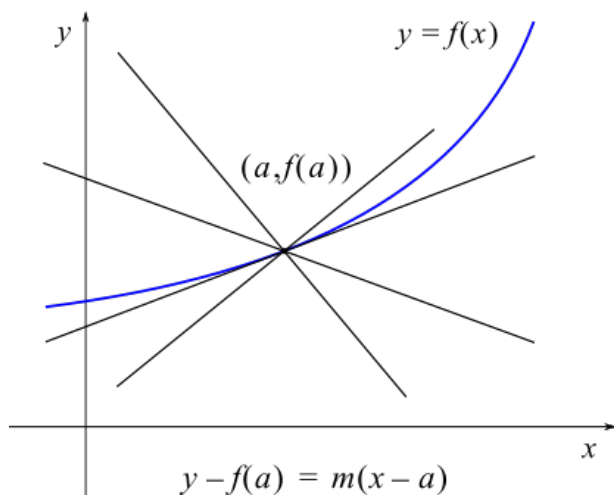
$$n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi.$$

Outro modo de exprimir este fato matematicamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) = \pi.$$

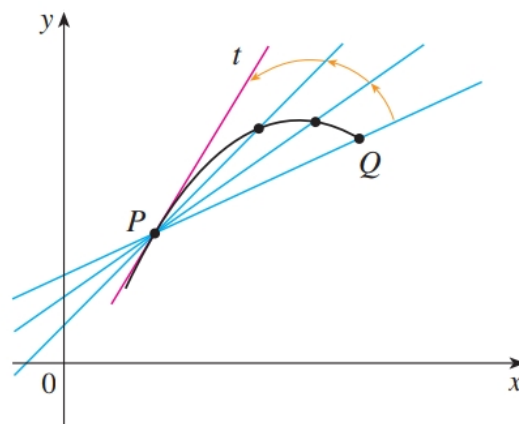
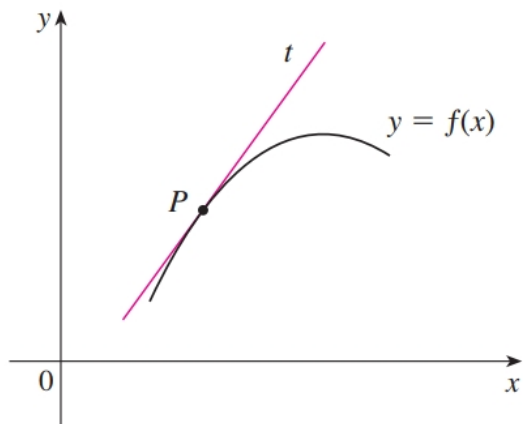
Problema da tangente

Encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função, $y = f(x)$, num ponto dado $(a, f(a))$



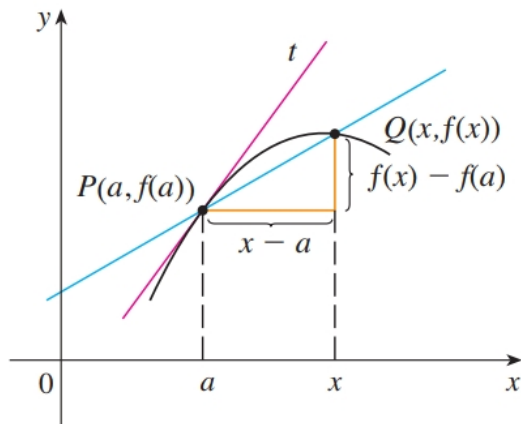
Problema da tangente

Encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função, $y = f(x)$, num ponto dado $(a, f(a))$



Problema da tangente

Encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função, $y = f(x)$, num ponto dado $(a, f(a))$



$$\text{Mas } m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

de modo que o declive, m_t , da tangente será obtido ao fazermos $Q \rightarrow P$ ou

$$m_t = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo 1

Obter a equação da reta tangente à $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

A equação procurada é da forma $t : y - 1 = m(x - 1)$, com m a ser encontrado.

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$

Deste modo, $x \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2$.

Exemplo 2

Obter a equação da reta tangente à $y = x^2$ no ponto $(0, 0)$.

A equação procurada é da forma $t : y - 0 = m(x - 0)$, com m a ser encontrado.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x, \quad x \neq 0$$

Deste modo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$