

Um convite à Matemática

**Fundamentos-lógicos,
com técnicas de demonstração,
notas históricas**

e

curiosidades

por

Daniel Cordeiro de Moraes Filho

(Universidade Federal de Campina Grande)

Para Magna e João Pedro, com amor.

Para Magna e João Pedro, com amor.

Prefácio

A idéia que nos fez escrever este livro foi a de preencher a lacuna de um texto que apresentasse os fundamentos básicos da Lógica-Matemática, usando a própria Matemática. Visávamos um texto que pudesse ser usado por professores do Ensino Médio, por alunos do último ano dessa fase, como do primeiro ano das universidades, e por demais interessados. É justamente nesta passagem da vida estudantil que a maioria de nossos alunos se chocam ao se depararem com o formalismo e a abstração que requerem as primeiras disciplinas de Matemática das universidades. Este choque decorre, principalmente, de carências na formação de alunos e professores, e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não fornece um preparo adequado aos alunos, por não treiná-los para usar o raciocínio lógico-dedutivo que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a este danoso fato alguns livros-texto que trazem erros conceituais, não distinguem *definição* de *demonstração*, provam fatos matemáticos com exemplos, fazem mal uso de notações, entre outros disparates.

Ainda temos o fracasso de certos cursos introdutórios de Lógica e Fundamentos da Matemática, que se perdem em teorias, não conseguem corrigir falhas impregnadas na formação dos alunos ([Hellmeister, 2001]), nem preparar-lhes adequadamente para o Magistério ou para disciplinas mais adiantadas, deixando de ensinar-lhes como a Matemática realmente funciona.

É necessário despertar em professores do Ensino Médio e em nossos jovens alunos o espírito crítico, o raciocínio correto e o cuidado com a linguagem, para que repassem esses conhecimentos às próximas gerações.

Nosso objetivo neste livro é que, em curto intervalo de tempo, o leitor possa compreender como a Matemática funciona, como as idéias da Matemática surgem e se desenvolvem, e comece desde cedo a dar atenção ao mínimo de rigor que as idéias matemáticas demandam, aprendendo a se comunicar com uma linguagem clara, precisa e fundamentada na Lógica. Cremos que, quanto mais cedo um estudante puder ter acesso a esses conhecimentos, mais facilmente aprenderá vários outros tópicos que irão aparecer ao longo de sua formação.

Tivemos a intenção de escrever o livro com uma linguagem cativante e leve. Trabalhamos com diversos casos reais de erros e dificuldades em relação a esses temas, que alunos e professores encontram em livros-texto e enfrentam nas salas de aula e em seus cotidianos. Também objetivamos despertar a curiosidade dos leitores para vários tópicos que julgamos interessantes, tanto da Matemática como de sua história.

Para ler o livro, são necessários, basicamente, conhecimentos matemáticos do Ensino Médio, principalmente os da Teoria Elementar dos Números e da Geometria Plana.

O texto destina-se a cursos iniciais de Fundamentos de Matemática, de Lógica Matemática (elementar), de Resolução de problemas, em cursos de preparação para Olimpíadas de Matemática, de aperfeiçoamento para professores dos Ensino Fundamental e Médio e em outros cursos de natureza semelhante.

Aos leitores, ressaltamos os seguintes fatos:

- As definições estão grifadas em fontes negrito-italicas;
- As palavras estrangeiras estão escritas em itálico;
- Ao enunciarmos certas definições, fizemos uso de idéias intuitivas e de noções preliminares que certamente os leitores têm de alguns temas, mas que só posteriormente foram abordados com detalhes;
- Algumas referências, mesmo não citadas nos capítulos, são sugestões para consultas posteriores e constam na Referência Bibliográfica;

- Os exercícios se propõem contemplar os mais diversos casos em que possam se apresentar os temas estudados;
- Algumas citações que usamos foram tiradas do Mathematical Quotation Server, na página eletrônica <http://math.furman.edu/mqs.html>, e revertidas para o Português pelo autor.

A Revista do Professor de Matemática (RPM) e o livro [Lima et al., 2001], ambos editados pela Sociedade Brasileira de Matemática, foram, além de inspiração, razão de vários temas que abordamos ao longo do texto. Utilizamos a última referência como fonte para criar vários exercícios baseados em fatos reais, com o intuito de desenvolver o senso crítico do leitor em relação aos livros didáticos e à maneira como esses livros abordam alguns desses temas.

Agradecemos aos seguintes colegas por sugestões e correções: Ângelo Roncalli, Antônio Brandão, Claudianor Oliveira Alves, Daniel Pellegrino, Francisco Júlio de Araújo Corrêa, Lúcio Guerra, Marcelo Martins dos Santos, Samuel Duarte, Sinval Braga, Tomás Edson Barros e Vandik Estevam. Agradeço ao professor José Lindonberg Possiano Barreiro pela ajuda com o *Latex*.

Contamos que nos enviem sugestões, nos apontem falhas e erros para que possamos melhorar nosso texto. Usem o endereço: daniel@dme.ufcg.edu.br

Caso possamos cumprir um pouco daquilo que imaginamos, nos daremos satisfeitos por nossa modesta tentativa de melhorar o Ensino.

SUGESTÕES PARA LEITURA E USO DO LIVRO:

1. Os capítulos, seções ou subseções marcados com um asterisco (*) podem ser suprimidas em uma primeira leitura, sem que se altere a proposta principal do livro. Esses tópicos podem ficar para leitura individual complementar ou para serem apresentados pelos próprios alunos, como algum trabalho da disciplina na qual o livro esteja sendo usado. Essa sugestão não indica que esses tópicos não sejam importantes na formação dos alunos!
2. Para uma leitura mais rápida, recomendamos *não* incluir capítulos, seções ou subseções marcados com *um* (*) ou *dois* asteriscos (**).
3. Para quem desejar dar um enfoque maior à Lógica Formal, sugerimos acrescentar ao item anterior os capítulos, seções ou subseções marcados com *dois* asteriscos (**).

As respostas aos exercícios estão na página eletrônica: <http://www.fabricadeensino.com.br>. O autor também pretende interagir com os leitores usando esta página.

NOTA IMPORTANTE: Nosso livro tem a finalidade de apresentar, de maneira prática, conhecimentos básicos da Lógica para facilitar o ensino e aprendizagem, visando a alunos iniciantes na Matemática e professores dos Ensinos Fundamental e Médio. Portanto, está longe de ser um texto a partir do qual se possa estudar, em profundidade, idéias e teorias da Lógica-Matemática e dos Fundamentos da Matemática. Tais teorias principiaram com G. W. Leibniz (1646-1716) e tiveram seu apogeu, principalmente, no começo do Século XX, com os trabalhos de expoentes brilhantes, como E. F. F. Zermelo (1871-1953), Fraenkel (1891-1965), Bertrand A. W. Russel (1872-1970), F. L. G. Frége (1848-1925), K. Gödel (1906-1978), G. Peano (1858-1932), A. N. Whitehead (1861-1947), D. Hilbert (1862-1943), L. E. J. Brouwer (1881-1966), entre outros. O estudo mais profundo dessas teorias pertence a disciplinas bem mais especializadas das que o livro destina-se.

Portanto, para dar o mínimo de formalismo possível e manter nossa proposta, tivemos de explorar noções intuitivas que os leitores certamente possuem de certos temas e, por vezes, assumimos uma apresentação, até certo ponto, *ingênua*, de alguns outros temas.

SUMÁRIO

1 *A notação matemática	9
1.1 Para que servem as notações matemáticas?	9
1.2 Algumas das notações mais utilizadas	10
1.2.1 O cuidado com o uso de certas notações	12
1.2.2 Algumas notações da atualidade	13
1.2.3 Como representar o infinito	13
1.2.4 Expressões indeterminadas e expressões impossíveis	14
1.2.5 Curiosidades sobre o número π	16
1.3 O alfabeto grego	17
1.4 Uma viagem pelas notações do passado	18
1.4.1 Curiosidade: como surgiu o símbolo de igualdade?	20
1.4.2 Outros episódios da história das notações	20
2 A lógica-matemática	23
2.1 Como formular um resultado matemático? Sentenças, sentenças abertas e quantificadores	23
2.1.1 Os quantificadores universal e existencial	25
2.1.2 A linguagem de conjuntos e a Lógica	27
2.1.3 *Curiosidade: os paradoxos lógicos	30
2.2 Conectivos e proposições compostas. (O Cálculo Proposicional)	31
2.2.1 Tabelas-verdade	34
2.3 Sentenças equivalentes na Lógica Formal	36
2.3.1 **Sentenças condicionais e implicativas na Lógica Formal	37
2.4 Argumentos, sentenças condicionais e sentenças implicativas	38
2.4.1 Argumentos	38
2.4.2 Silogismos	39
2.4.3 Sentenças condicionais	41
2.4.4 Sentenças implicativas	43
2.4.5 *Curiosidade: a verdade das premissas	45
2.5 Duas notações que se costumam confundir	46
3 Definição, modelo axiomático e convenção	49
3.1 O que é uma definição matemática?	49
3.2 O que é um Modelo Axiomático?	54
3.2.1 Axiomatização da adição de números reais	57
3.2.2 *Curiosidade: o modelo axiomático em outras áreas	60
3.3 Convenções matemáticas	60

4 Desvendando os teoremas-Parte I	65
4.1 O que é um teorema? (Hipótese e tese)	65
4.1.1 *Curiosidade: famosos e apaixonados por Matemática	70
4.2 Condição necessária e condição suficiente	71
4.3 A recíproca de uma sentença	74
4.4 Sentenças equivalentes	76
4.4.1 Uma outra classe de teoremas	78
4.5 Sentenças equivalentes e definições	79
4.5.1 Como deve ser entendida a conjunção gramatical ‘se’ de uma definição	79
4.5.2 Definições equivalentes	80
4.6 **A bicondicional	81
5 Desvendando os teoremas-Parte II	83
5.1 Mais um exemplo de como usar a recíproca de uma proposição	83
5.2 A generalização de um teorema	86
5.3 A família dos teoremas	88
5.3.1 Teoremas de existência e unicidade	91
6 Desvendando as demonstrações	93
6.1 O que é uma demonstração? (O raciocínio dedutivo)	93
6.1.1 Trabalhando com demonstrações em um modelo axiomático	96
7 Conjecturas, problemas em aberto e contra-exemplos	105
7.1 Conjecturas e contra-exemplos	105
7.1.1 *Curiosidade: A perfeição do Conjunto Vazio	109
7.2 *Relato de algumas das conjecturas mais socialmente famosas da Matemática que já foram resolvidas	110
7.2.1 O problema das quatro cores	110
7.2.2 Até os gênios se enganam	111
7.2.3 A sensação do século passado: o Último Teorema de Fermat	111
7.2.4 Curiosidade: coisas da Matemática...	113
7.3 *Alguns problemas em aberto, de fácil entendimento para os não-especialistas	115
7.3.1 A Conjectura de Goldbach	115
7.3.2 Os primos gêmeos	116
7.3.3 Números perfeitos	116
7.3.4 Os números de Mersenne	116
7.3.5 Números amigos	117
7.3.6 Números de Fermat	118
7.3.7 Outros problemas em aberto	118
7.3.8 Dinheiro para quem resolver problemas matemáticos	118
7.3.9 Curiosidade: uma palestra silenciosa	119
8 Técnicas de demonstração	121
8.1 Introdução	121
8.2 As técnicas mais simples de demonstração	122
8.3 Demonstrações usando ‘artifícios’	124
9 Quando é necessário saber negar (aprendendo a negar na Matemática)	127

10 **Mais sobre Lógica	133
10.1 Tautologias, contradições e redução do número de conectivos	133
10.1.1 Tautologias	133
10.1.2 Contradições	134
10.1.3 Redução do número de conectivos	134
10.1.4 Curiosidade: um papo tautológico	135
10.2 Tabelas-resumo das Leis do Cálculo Proposicional	135
10.3 Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais	136
10.3.1 Teoremas cuja hipótese é uma sentença disjuntiva	136
10.3.2 Teoremas cuja hipótese é uma sentença conjuntiva	137
10.3.3 Teoremas cuja tese é uma sentença disjuntiva	138
11 O absurdo tem seu valor! (As demonstrações por redução a um absurdo)	139
11.1 Redução a um absurdo	139
11.2 Teoremas resultantes apenas do uso da técnica de redução a um absurdo (As demonstrações gratuitas)	148
12 Mais técnicas de demonstração	151
12.1 A contrapositiva de uma sentença	151
12.2 *Curiosidade: algumas cômicas “demonstrações”	155
13 *Sofismas, o cuidado com os auto-enganos e com os enganadores!	157
13.1 Sofismas	157
14 Demonstrações com o auxílio de figuras	163
15 O método indutivo	167
15.1 Princípio de Indução: vale para um, se valer para k implicar valer para $k + 1$, então vale sempre! (O raciocínio indutivo)	167
15.2 *Raciocínio indutivo, generalizações	173
16 *Um roteiro para provar um teorema	175
16.1 O que fazer para demonstrar um teorema?	175

CAPÍTULO 1

*A notação matemática

“Uma boa notação possui uma engenhosidade e uma sugestividade que, às vezes, a faz parecer com um professor de verdade.”

Bertrand Russell (1872-1970)

In The World of Mathematics,
New York: Simon & Schuster, 1956, J. R. Newman (ed.)

1.1 Para que servem as notações matemáticas?

Hoje as notações constituem os elementos básicos da linguagem simbólica matemática, mas nem sempre elas foram usadas como fazemos atualmente, com tanta freqüência e naturalidade. Desde os primeiros passos significativos que a Matemática deu na Antiga Babilônia, passaram-se quase 3.000 anos até que nos Séculos XVI e XVII o uso de notações começasse a ser sistematizado e se tornado uma prática.

Vale a pena conhecer a história da criação e do uso das notações, por ser uma das mais belas e interessantes páginas da História da Matemática. Mais adiante, trataremos sobre algumas das notações mais usadas e de fatos históricos sobre sua criação¹.

Uma **notação matemática** é um conjunto de símbolos (que pode ser apenas um único símbolo) que representa um objeto ou uma idéia. Estes símbolos podem ser construídos com letras de alfabeto, figuras conhecidas ou ser de qualquer outra natureza, desde que sirvam para os propósitos.

O uso de notações matemáticas deve ser uma forma de comunicação concisa e precisa, que possa contribuir para a facilidade e a economia da linguagem. Por esse motivo, uma notação não deve expressar ambigüidades, deve ter uma forma estética simples, que seja fácil de manipular, de memorizar e de nos lembrar o objeto que representa toda vez que a virmos.

Na Matemática é comum o uso de símbolos para representar conjuntos, elementos de um conjunto, operações matemáticas ou qualquer outro objeto. Muitas vezes a Linguagem Matemática reduz-se à manipulação de símbolos. Por isso, deve-se sempre ter em mente que a escolha de uma notação adequada e eficaz é um dos primeiros passos a fim de expressar e manipular com eficiência as idéias matemáticas. Dessa forma, se facilitam a apresentação de teorias e a resolução de problemas.

As notações são tão importantes para a compreensão de um texto que vários livros trazem um índice com as principais notações que serão utilizadas.

¹Os interessados em saber mais sobre a história das notações matemáticas podem consultar a monumental obra de Cajori ([Cajori, 1993]).

Atualmente, após centenas de anos de desenvolvimento e da contribuição de inúmeras pessoas, cada parte da Matemática – seja Álgebra, Trigonometria, Geometria ou outra – possui sua notação própria, que é universalmente aceita e utilizada.

CUIDADOS:

1. Em qualquer ocasião, se você precisar optar por alguma notação, deve escolher a que seja convencional, a mais usada ou aquela que provenha de fontes sérias, de boa reputação e credibilidade. Em outros casos, é bom ficar atento, já que muitas vezes você vai ter de inventar suas próprias notações. Lembre-se sempre de levar em consideração as características principais de uma notação, que mencionamos anteriormente.
 2. Alguns autores têm o péssimo hábito de usar notações que não são consagradas ou que não foram previamente definidas. Outros partem para criar notações à toa, sem necessidade. Esses maus hábitos devem ser combatidos. Daí, só denote um objeto se for realmente necessário e respeite as notações consagradas; só as substitua se tiver razões suficientes para isso.

No que segue, vamos explicar o significado de algumas das notações mais utilizadas na Matemática. Veremos também como algumas delas foram criadas e como certas notações do passado eram muito interessantes, bem diferentes das usadas atualmente.

を得る. また, ③より $\frac{e-1}{n+2} \leq I_{n+1}$ であるが, この右辺の I_{n+1} に②を代入すると,

$$\frac{e-1}{n+2} \leq e - (n+1)I_n \iff I_n \leq \frac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$$

を得る。

Figura 1.1: Fragmento de um texto matemático escrito em Japonês, mostrando os mesmos símbolos matemáticos que atualmente são usados mundo a fora.

1.2 Algumas das notações mais utilizadas

A maioria dos símbolos que apresentaremos nas tabelas a seguir são bastante conhecidos. Aconselhamos apenas checar a maneira correta de ler cada símbolo e certificar-se de que você sabe realmente o que cada um deles significa.

Observe que algumas notações foram criadas simplesmente usando as primeiras letras dos nomes dos objetos que elas representam, às vezes, em alguma língua estrangeira.

Tabela 1.1: Tabela de notações.

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	SÍMBOLO	COMO SE LÊ
\exists	Existe; Existe um; Existe pelo menos um ²	\Rightarrow	Implica que; Acarreta
$\exists!$	Existe um único; Existe um e apenas um; Existe só um ³	\Leftrightarrow	Se, e somente se; Equivalente (no caso de proposições)
\leq	Menor (do) que ou igual a ⁴	$>$	Maior (do) que
\geq	Maior (do) que ou igual a	$<$	Menor (do) que
$\approx \approx$	Aproximadamente igual a	\forall	Para todo; Qualquer que seja; Para cada ⁵
$\sum_{i=1}^n P(i)$	Somatório de $P(i)$, em que i varia de 1 a n	\equiv	Equivalente a; Congruo a
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais	\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais ⁶	\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros ⁷
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos	$\mathbb{Q}^C, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Conjunto dos números irracionais ⁸
$\prod_{i=1}^n Q(i)$	Produtório de $Q(i)$, em que i varia de 1 a n	;	Tal que; Tais que
∞	Infinito ⁹	\therefore	Então; Portanto; Logo; Donde
\subset	Está contido	\supset	Contém
\in	Pertence	\cup	União
\cap	Interseção	$\mp \pm$	Menos ou mais; Mais ou menos
$\stackrel{\text{Def}}{=}$	Por definição	${}^{10}e$	é ou ê
i	i	π	Pi

²O símbolo \exists é chamado **quantificador existencial**. A ele retornaremos na Seção 2.1.³Vale a pena nesse ponto conferir a Subseção 5.3.1⁴Aconselhamos ler esse símbolo da maneira como está escrito: “menor (**do** que ou igual a”. O mesmo vale quando for ler os outros símbolos de ordem.⁵O símbolo \forall é chamado de **quantificador universal**. Este símbolo decorre da letra ‘A’ invertida, inicial das palavras “all” do Inglês e de “allgemein” do Alemão, que significam “todo”. A ele retornaremos na Seção 2.1⁶Essa notação é devido ao fato de um número racional ser a razão (o *quociente*) de um número inteiro por outro número inteiro não-nulo.⁷O “Z” vem da palavra alemã “Zahl”, que significa número.⁸Por mais que alguns autores tentem insistir, não há registro de uma notação universalmente aceita para o conjunto dos números irracionais, além da mencionada: *o conjunto dos números reais menos o conjunto dos números racionais*.⁹Esse símbolo foi introduzido pelo matemático inglês **John Wallis** (1616-1703). Wallis produziu trabalhos pioneiros que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.¹⁰O número e representa a base dos logaritmos neperianos ou naturais. Essa constante é um número **irracional**, i.e., não pode ser representado por uma fração tais que o numerador e o denominador sejam números inteiros (vide uma demonstração elementar desse fato em [de Figueiredo, 2002], p.12, ou consulte [Maor, 1994] para uma história do número e). Este número vale aproximadamente 2,7182818284.O nome *neperiano* vem de **John Napier** (1550-1617), um matemático escocês que inventou os logaritmos e, com isso, naquela época, reduziu em meses o tempo gasto com vários cálculos, principalmente os da Astronomia.Apenas em 1737 é que o matemático suíço **Leonhard Euler** (1707-1783) (lê-se: \ óiler \) provou a irracionalidade de e . Euler está no **Guiness**, o famoso Livro dos Recordes, como o matemático mais produtivo de todos os tempos [Guiness, 1995]. Ele deixou trabalhos em praticamente todos as áreas da Matemática que então existiam em sua época. É conhecido no Ensino Médio pelo Teorema de Euler para poliedros convexos: $V - A + F = 2$.¹¹Número imaginário, raiz quadrada de -1 . Aparece no estudo de números complexos.

Ainda sobre notações, comumente se usam:

1. x, y, z, w, t para denotar incógnitas ou números reais;
2. a, b, c para representar constantes reais;
3. $i, j, k, l, m, n, r, s, p, q$ para representar números inteiros

1.2.1 O cuidado com o uso de certas notações

1. Um erro que se vê freqüentemente: atente para a diferença entre as notações $f(x^2)$ e $f^2(x)$. Enquanto $f(x^2)$ denota a função f aplicada no valor $x^2 = x \cdot x$, o símbolo $f^2(x)$ representa o produto $f(x) \cdot f(x)$. Por exemplo, $\operatorname{sen}x^2 = \operatorname{sen}(x^2)$, já $\operatorname{sen}^2(x) = (\operatorname{sen}x) \cdot (\operatorname{sen}x)$. A mesma notação é usada para outros expoentes, que sejam inteiros positivos, e para outras funções.

Em outras ocasiões, a notação $f^2(x)$ também pode representar a composição da função f com ela mesma, isto é,

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)).$$

Convém ressaltar que os dois significados dessa notação dependem do contexto no qual ela está sendo usada. Portanto, é aconselhável sempre, de início, deixar bem determinado o que uma notação significa para que não haja ambigüidades.

2. Em geral, as calculadoras importadas usam uma notação diferente da nossa para escrever números: aquela adotada nos EUA e em outros países. Nessa notação, usa-se uma vírgula para separar os milhares e um ponto para separar a parte decimal de um número, justamente o contrário do que é utilizado em nosso país. Com a difusão dessas calculadoras e de outros instrumentos de cálculo, acabam-se adotando essas convenções.

No entanto, cabe-nos registrar que, no Brasil, a notação usada para números é regulamentada por lei. Por curiosidade, a Lei é do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial: Resolução n.º 12, de 12 de Outubro de 1988.

Por exemplo: 3.129,89 representa para nós, o número três mil, cento e vinte e nove e oitenta e nove centésimos. Já uma calculadora, usando uma notação importada, exibiria este número como “3,129.89”, que não faz sentido na notação legal que devemos adotar.

3. Na linguagem escrita ou falada, podemos utilizar palavras diferentes para expressar a mesma idéia. Semelhantemente, na Matemática, em decorrência de motivos históricos e de conveniências de uso, existem notações diferentes para representar o mesmo objeto.

Por exemplo, é bem conhecido que o produto de dois números a e b pode ser representado por

$$ab, a.b \text{ ou } a \times b.$$

A escolha há de depender do contexto e de uma opção pessoal. Entretanto, diferentemente do permitido na linguagem falada ou escrita, deve-se ser fiel em todo o texto à opção escolhida. Não vale ficar mudando!

4. Não represente conjuntos na forma

Evite: $A = \{\text{conjunto dos números reais}\}$.

Usamos o símbolo $\{\dots\}$ para que dentro das chaves possamos descrever as propriedades que caracterizam um conjunto. Também podemos usar as chaves para listar nominalmente todos elementos de um conjunto.

Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x > 4 \text{ e } x^3 - x \leq 200\},$$

$$C = \{2, 8, 6, \pi\}.$$

1.2.2 Algumas notações da atualidade

1. Certos símbolos matemáticos tornaram-se tão populares e de uso tão amplo, que hoje são utilizados com significados bem diferentes dos que foram originalmente adotados para eles na Linguagem Matemática. Por exemplo, um jornal local anunciou a seguinte propaganda:

JORNAL + R\$ 5,00 = CD COM QUESTÕES DO VESTIBULAR

2. Com o advento da computação, algumas notações tiveram de ser criadas para se adaptarem às possibilidades dos símbolos do teclado de um computador ou aos novos programas computacionais matemáticos. Vale a pena registrar as seguintes

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2^{\wedge}3, \text{ para a exponenciação} \\ 7 \cdot 2 &= 7 * 2, \text{ para o produto.} \end{aligned}$$

Escreve-se

$$\left(\frac{x^2 + 7x}{9} \right)^3,$$

como

$$[(x^{\wedge}2 + 7 * x) / 9]^{\wedge}3.$$

1.2.3 Como representar o infinito

(Esta seção poderá ser melhor aproveitada por aqueles que já têm conhecimento de limites de função; em particular, limites infinitos e limites no infinito.)

Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não denotam números. São símbolos empregados para representar “mais infinito” e “menos infinito”, respectivamente. *Grosso modo*, a idéia intuitiva de infinito positivo (negativo) é de “algo” que seja ilimitado, no sentido de que “seja maior (menor) do que qualquer número real”. A chamada **Propriedade Arquimediana dos Números Reais**, ou seja, o fato de que, dado um número real x , existe sempre um número natural n , de sorte que $n > x$, é um bom começo que serve de inspiração para entendermos a concepção do infinito¹².

Alertamos que, ao se trabalhar com a idéia de infinito, todo cuidado é pouco¹³.

Apresentamos a seguir algumas convenções que valem ao operar com esses símbolos. Degustando atentamente a idéia intuitiva que devemos ter sobre o infinito, não é difícil se convencer de que cada resultado dessas operações deve ser o que agora apresentamos:

¹²À parte as concepções matemáticas sobre o infinito, ele, sob suas múltiplas acepções e facetas, tem encantado e intrigado escritores, teólogos, filósofos, artistas, entre muitos. Vale citar uma estrofe bastante irreverente do músico Paulinho da Viola: “...se for preciso eu repito. Porque hoje eu vou fazer, a meu jeito eu vou fazer, um samba sobre o infinito” in ‘Para ver as meninas’ (Samba infinito).

¹³Já na Grécia Antiga, certos usos da idéia de infinito fizeram grandes estragos no raciocínio grego vigente, resultando em paradoxos. Os mais famosos são os Paradoxos do Movimento de **Zeno de Eléa** (também chamado de Zenão de Eléa, Século V a.C.) (Vide [Boyer, 1974], pp. 55-56). A partir desse fato, os gregos evitavam ao máximo o uso explícito do infinito no raciocínio matemático. Falaremos sobre paradoxos no final da Seção 2.1

$a.(+\infty) = +\infty$, se $a > 0$	$(\pm\infty).(\pm\infty) = +\infty$
$a.(+\infty) = -\infty$, se $a < 0$	$a + (\pm\infty) = \pm\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	

Tabela 1.2: Operações com o infinito.

Mais uma vez, advertimos que ∞ é apenas um símbolo, e não se comporta como um número. Para corroborar ainda mais a nossa observação de que devemos permanecer atentos ao manipularmos com o infinito, listamos abaixo alguns símbolos que fornecem o que chamamos de *indeterminações*, isto é, expressões para as quais não se podem assegurar o que elas significam, muito menos seu valor preciso. É bom conhecê-las e lembrar-se delas, pois, vez em quando, aparecem (em particular, quando se estuda limite de funções)¹⁴:

$$\infty - \infty, 0.\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (\pm\infty)^0, 1^{\pm\infty}, 0^0$$

Tabela 1.3: Indeterminações.

1.2.4 Expressões indeterminadas e expressões impossíveis

Com relação às frações, é preciso entender a diferença matemática dos termos *expressões indeterminadas* e *expressões impossíveis*.

Vejamos: sabemos que $\frac{6}{2} = 3$, pois $6 = 3 \cdot 2$; sabemos que $\frac{49}{14} = \frac{7}{2}$, pelo fato de que $49 = 14 \cdot \frac{7}{2}$ e, em geral, se a e b são números reais, sabemos que a igualdade $\frac{a}{b} = c$ vale para algum $c \in \mathbb{R}$, se tivermos $a = b \cdot c$ e reciprocamente. Caso a expressão $\frac{0}{0}$ tivesse algum valor determinado c , então, pelo que acabamos de descrever, $0 = c \cdot 0$. Mas essa igualdade vale para qualquer número real c , donde concluímos que não se pode determinar um valor preciso para $\frac{0}{0}$. Nesse caso, dizemos que a *expressão é indeterminada*.

Seguindo o mesmo raciocínio, já a *expressão $\frac{1}{0}$ é impossível* pois, se $\frac{1}{0} = c$ para algum número c real, então $1 = c \cdot 0$. Mas não existe um número c que satisfaça a última igualdade, o que resulta na impossibilidade desta ocorrer.

EXERCÍCIOS:

- Como já dissemos, uma das formas mais usuais de criar notações é utilizar as iniciais dos nomes dos objetos que se deseja representar. Das notações apresentadas nas tabelas da Seção 1.2, quais delas foram criadas usando essa idéia?
- Você conhece algum objeto na Matemática que possui mais de uma notação para representá-lo? Qual ou quais?

¹⁴À primeira vista, por mais estranho que possa parecer que alguns desses símbolos representem indeterminações, há razões matemáticas para esse fato. Precisa-se apenas de um pouco mais de teoria matemática para convencer do que dissemos, mas isso foge dos nossos objetivos. Após um curso introdutório de Cálculo é possível entender o porquê dessas expressões resultarem em indeterminações, o que não é nada de outro mundo!

3. TEMA PARA DISCUSSÃO

UMA BOA NOTAÇÃO:

Pare e pense um pouco na vantagem do nosso sistema de representação numérica, no qual usamos os algarismos indo-arábicos. Diferente de vários outros sistemas numéricos que apareceram ao longo da História em civilizações e épocas distintas, o nosso é simplesmente fenomenal. Podemos representar qualquer número empregando apenas *dez* símbolos (que são os algarismos), sem falar-se na facilidade de se operar usando essa notação. Sem dúvida, essa foi uma idéia que trouxe grande avanço para a humanidade. Quem ainda não alertou para esse fato, tente, por exemplo, sem recorrer ao nosso sistema de numeração indo-arábico, multiplicar os seguintes números, escritos em algarismos romanos: *MDCLXI* e *XXXIII*.

4. Muitas vezes, é necessário fazer a negação de uma frase matemática (dedicamos todo o Capítulo 9 para esta finalidade) e, consequentemente, denotar essa negação. No caso das notações, usamos um pequeno traço cortando um símbolo para denotar a negação do que aquele símbolo representa. Tendo essa convenção em mente, escreva o que cada símbolo a seguir significa:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \notin & \text{iv)} \not> & \text{vii)} \not\mid \\ \text{ii)} \not\subset & \text{v)} \not\leq & \text{viii)} \not= \\ \text{iii)} \not\models & \text{vi)} \not\geq & \text{ix)} \not\equiv \end{array}$$

5. Há várias formas interessantes de escrever um número como uma *soma infinita (série infinita)* ou um *produto infinito* de termos. Use os símbolos de somatório (\sum) ou de produtório (\prod) apenas uma única vez, para reescrever cada expressão a seguir:

$$\text{i)} \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\text{iii)} \quad \pi = 2\sqrt{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{3^2 \times 5} \right) - \left(\frac{1}{3^3 \times 7} \right) + \dots \right]$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$$

Foi o matemático inglês John Wallis (vide nota de rodapé 8, da Seção 1.2) quem, no seu famoso trabalho *Arithmetica Infinitorum* (1655), deu essa sensacional expressão para π , que posteriormente fascinou o jovem *Newton*.¹⁵

v) Já a expressão

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots$$

foi desenvolvida pelo matemático francês *François Viète*¹⁶ (1540-1603). Em 1593, num estudo sobre Trigonometria, Viète descobriu essa curiosa expressão que envolve um produto infinito de somas e raízes quadradas de 2.

¹⁵*Sir Isaac Newton* (1642-1727), célebre matemático, filósofo e físico inglês, considerado um dos mais brilhantes cientistas de todos os tempos. Principal responsável por uma concepção científica clássica do mundo, fundou a Teoria Gravitacional e deu enormes contribuições à Óptica e à Mecânica. Muito conhecido no Ensino Médio por suas três leis dos movimentos dos corpos, pelo Teorema Binomial e por uma unidade de medida de força que leva seu nome, também foi um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral.

¹⁶Deu significativas contribuições à Álgebra.

6. CASO VERÍDICO:

- (a) O autor de um livro do Ensino Médio escreveu que o conjunto-solução de uma certa equação é

$$\{x|x \in \mathbb{R}\}.$$

Será que não há uma maneira mais simples de representar esse conjunto? Dê sua opinião.

- (b) Já outro conjunto-solução foi escrito como

$$\{\forall x \in \mathbb{R}\}(Sic).$$

Analise criticamente o descuido ao se escrever este conjunto.

1.2.5 Curiosidades sobre o número π

O número π é, sem dúvidas, a constante mais conhecida e badalada de toda a Matemática. É um número irracional que vale aproximadamente 3,1415926 e representa o valor da razão do comprimento de uma circunferência pelo comprimento do seu diâmetro.

1. Até na Bíblia há referências sobre o π , no Velho Testamento: no Primeiro Livro dos Reis, 7 : 23; e no Segundo Livro das Crônicas, 4 : 2.
2. Usando as constantes e os símbolos matemáticos mais conhecidos, Euler encontrou uma expressão considerada das mais belas de toda a Matemática: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
3. Quanto mais se avança nos estudos, mais percebe-se como é incrível que as constantes e e π apareçam inesperadamente na descrição dos mais diversos fenômenos matemáticos e da Natureza.
4. Há várias formas de escrever π usando expressões que envolvem somas ou produtos infinitos de termos. Dentre elas, algumas são bastante extravagantes, chegando a ser “arrogantes” (o que não tira seu fascínio), como a que segue:

$$\pi = \left(12 \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \times \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+\frac{3}{2}}} \right)^{-1}$$

([Blatner, 1997], p.71)

Dependendo do número n de termos que se faça variar, e da capacidade de fazer cálculos, expressões como as anteriores podem ser usadas para encontrar boas aproximações para o valor de π .

Algumas expressões, usando menos termos, podem fornecer excelentes aproximações de π , bem mais rapidamente que outras. As que apresentamos, apesar de sua importância histórica, estão longe de serem as melhores para este fim.

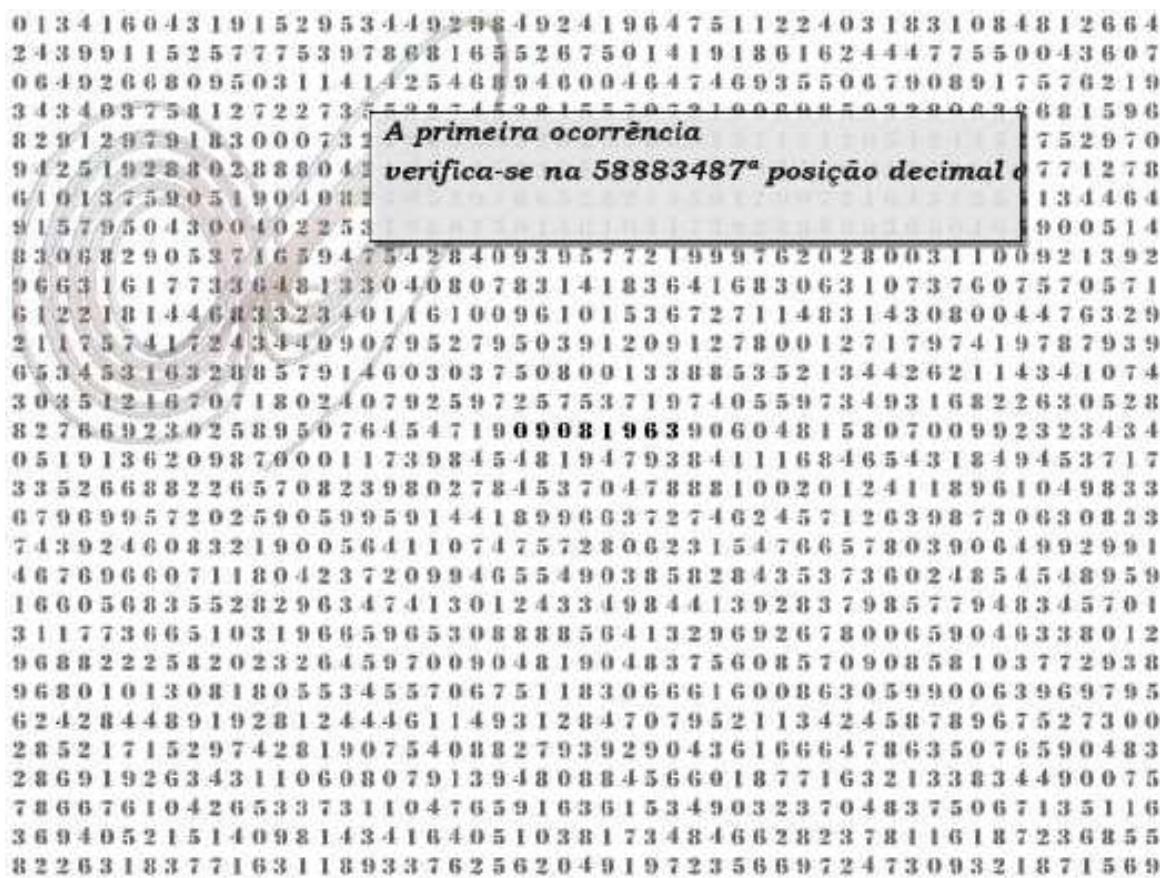


Figura 1.2: Uma “propriedade” muito interessante de π : parece que em sua expressão decimal pode-se encontrar qualquer número inteiro. Faça um teste na página eletrônica <http://www.atractor.pt>.

5. Veja um método mnemônico para gravar uma excelente aproximação de π usando fração e apenas os três primeiros números ímpares: escreva 113355 e separe esse número em dois outros de três dígitos, contando da esquerda para a direita. Agora é só escrever o quociente

$$\frac{355}{113} \approx 3,1415929.$$

6. Os pitagóricos, seguidores das idéias de Pitágoras (Vide nota de rodapé 1, da Seção 4.1), cultuavam e “viam” números em toda parte. Hoje, talvez como um ressurgimento moderno e inconsciente do que concebiam os antigos pitagóricos, é possível encontrar certas páginas eletrônicas de verdadeiros adoradores do número π . Há uma delas na qual os candidatos apenas são admitidos caso consigam recitar, de cor, e em lugares ou situações excêntricas, as 100 primeiras casas decimais de π .

É possível encontrar um conjunto de diversas páginas eletrônicas sobre o número π , reunidas no chamado

“The Pi Web Ring”: <http://members.aol.com/Pimath314/webring.html>.

1.3 O alfabeto grego

Para escrever um texto matemático, não é preciso fazer nenhum curso de Grego, mas é aconselhável saber o nome das letras do alfabeto grego que freqüentemente são usadas para batizar objetos matemáticos. Em muitos casos, as letras do nosso alfabeto não seriam suficientes para este propósito e, assim, conservamos ainda hoje essa tradição, como uma homenagem aos antigos gregos que tanto desenvolveram a Matemática. As letras gregas também aparecem na Física, na Química e em outras partes da ciência. Daí a importância de conhecer esse alfabeto e saber o nome de suas letras.

Tabela 1.4: O Alfabeto Grego.

Minúsc.	Maiúsc.	Escreve /lê/	Minúsc.	Maiúsc.	Escreve /lê/
α	A	Alfa <i>/alfa/</i>	ν	N	Nu <i>/ni*/ ou /nu*/</i>
β	B	Beta <i>/beta/</i>	ξ	Ξ	Ksi <i>/kiçil/</i>
γ	Γ	Gama <i>/gámal/</i>	o	O	Omicron <i>/ómicron/</i>
δ	Δ	Delta <i>/délta/</i>	π Variante: ϖ	Π	Pi <i>/pi/</i>
ϵ Variante: ε	E	Épsilon <i>/épcilon/</i>	ρ Variante: ϱ	P	Rô <i>/rô/</i>
ζ	Z	Zeta <i>/dzéta/</i>	σ Variante: ς	Σ	Sigma <i>/sígma/</i>
η	H	Êta <i>/êta/</i>	τ	T	Tau <i>/táu/</i>
θ Variante: ϑ	Θ	Teta <i>/téta/</i>	v	Υ	Upsilon <i>/ípsilon/</i>
ι	I	Iota <i>/iótal/</i>	ϕ Variante: φ	Φ	Fi <i>/fi/</i>
κ	K	Kapa <i>/cápal/</i>	χ	X	Khi <i>/ki/</i>
λ	Λ	Lambda <i>/lâmbdal/</i>	ψ	Ψ	Psi <i>/psí/</i>
μ	M	Mu <i>/mi*/ ou /mu*/</i>	ω	Ω	Ômega <i>/ômega/</i>

*Pronúncia aproximada. O “u” deve ser lido como o “ü” do Alemão ou como o “u” do Francês.

1.4 Uma viagem pelas notações do passado

Olhe para as expressões abaixo:

$$R.c.\lfloor 72.m.R.q.1088 \rfloor$$

e

$$R.c.\lfloor R.q.4352.p.16 \rfloor$$

O que você acha que significam?

Pois era dessa forma que, na Europa do século XVI, algumas pessoas escreviam, respectivamente, as raízes

$$\sqrt[3]{72 - \sqrt{1088}} \text{ e } \sqrt[3]{\sqrt{4352} + 16}.$$

Naquela época, usava-se R representando a primeira letra da palavra latina *radix*, que significa *raiz*. Com o passar do tempo, acredita-se que R transformou-se em $\sqrt{}$. Junto à letra R , escrevia-se q ou c ,

as primeiras letras das palavras latinas *quadratus* e *cubus*, para representar que se estava extraiendo a raiz quadrada ou cúbica, respectivamente. Já *p* e *m*, hoje substituídos pelos atuais símbolos + e −, respectivamente, vinham das palavras *plus* e *minus*, que significam *soma* e *subtração* em Latim; os símbolos [e] substituíam nossos atuais parênteses.

As expressões acima não são invenções, elas aparecem no livro *Algebra*, que foi bastante influente em seu tempo, escrito pelo italiano **Rafael Bombelli** (1526-1572) que, dentre outros feitos, foi o primeiro matemático a conceber números imaginários para raízes de polinômios.

Por sinal, só para você treinar a tradução desses símbolos para a Linguagem Matemática atual, Bombelli calcula uma expressão para soma das raízes acima e a apresenta como:

$$R.c.[232.p.R.q.53312.]$$

Apenas com este exemplo, já percebe-se a necessidade de se usar uma *notação universal*, a fim de que todos sejam capazes de compreender o que os símbolos utilizados significam matematicamente. Convém ressaltar que, no tempo de Bombelli, alguns outros autores usavam símbolos diferentes dos dele e que apenas posteriormente é que se conseguiu uniformizar a notação algébrica e seu uso. A invenção da imprensa e a consequente facilidade de impressão de livros para a divulgação de resultados científicos favoreceram a uniformização das notações matemáticas, o que ainda levaria muitos anos para chegar ao estágio atual.

Qualquer folheada em algum texto matemático bastante antigo pode revelar um mundo de símbolos esdrúxulos e obsoletos que eram usados centenas de anos atrás. Alguns deles são tão complicados visualmente que hoje chegam a ser engraçados (veja o exercício no final da seção).

Concluímos, informando que, com o decorrer do tempo e com o desenvolvimento da Matemática, a preocupação com a uniformização dos símbolos matemáticos tornou-se tão premente que, no final do século XIX, alguns comitês foram criados exclusivamente para este propósito. Hoje, felizmente, os símbolos e as convenções matemáticas mais comuns são usados e têm os mesmos significados em qualquer parte do mundo e em qualquer língua, mesmo as que usam alfabetos diferentes do nosso (salvo, talvez, por raras exceções).

EXERCÍCIOS:

- O exercício a seguir é apenas um jogo de adivinhação que só requer um pouco de cuidado. Ligue cada expressão escrita há centenas de anos à sua expressão usada em nossos dias, que está escrita em Linguagem Matemática atual. Abaixo de cada expressão aparece o nome do matemático que a criou.([Cajori, 1993])

$$(i) R.V.cu.R.325.\tilde{p}.18.\tilde{m}.R.V.cu..R.325.\tilde{m}.18$$

Pedro Nunez (1502-1578)

$$(ii) x \text{ potestas} + \frac{y \text{ potestate} - x \text{ potesta}}{y \text{ gradui} + x \text{ gradu}} \text{ in } x \text{ gradum}$$

François Viète (1540-1603)

$$(iii) 12L M 1Q p 48 aequalia 144 M 24L P 2Q$$

Guillaume Gosselin (?-1590)

$$(iv) \sqrt{B \text{ plano} - \text{plano} - \text{plani} + Z \text{ solido} - \text{solido} - Z \text{ solidoequetur} D \text{ cubo}}$$

François Viète (1540-1603)

$$(v) sA3|2 scB\pi tC2, 7^4$$

Pierre Hérigone (1580-1643)

$$(a) \sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3 = D^3$$

$$(b) \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}$$

$$(c) \sin A > \frac{\cos B}{\tan C^2(7 - 4)}$$

$$(d) x^m + \frac{y^m - x^m}{y^n + x^n} \cdot x^n$$

$$(e) 12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$$

1.4.1 Curiosidade: como surgiu o símbolo de igualdade?

O símbolo de igualdade ‘=’, usado hoje em dia, foi inventado pelo matemático inglês **Robert Recorde** (1510-1558). Recorde escreveu em Inglês, um dos primeiros livros significativos sobre Álgebra (*The Whetstone of Witte*, Londres, 1557), no qual utiliza o novo símbolo.

Segundo suas próprias palavras:

“Porei, como muitas vezes emprego neste trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas de um mesmo comprimento, assim: =, porque duas coisas não podem ser mais iguais.”

No tempo de Recorde, o símbolo de igualdade usado era talvez quatro vezes maior do que o usado atualmente. Também eram bem maiores o símbolo de *mais* + e o de *menos* -. Alguns autores também usavam o símbolo “∞” para representar a igualdade e, naquela época, era comum cada um usar sua notação particular. Mas a notação de Recorde para a igualdade prevaleceu, talvez por ser uma notação inteligente, bem ao modelo do que comentamos no começo do capítulo.

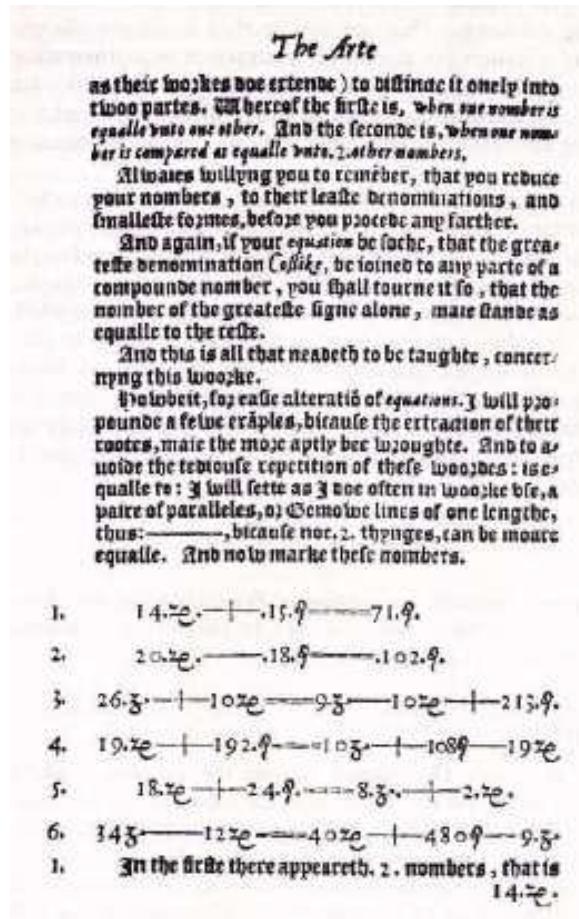


Figura 1.3: *Fac-simile* do Livro de Robert Record, no qual pode-se ver o símbolo de igualdade que ele inventou. Observe, também, o tamanho dos símbolos de ‘mais’, de ‘menos’, e o de ‘igualdade’, usados por Record.

1.4.2 Outros episódios da história das notações

I) Euler mais uma vez!

Leonard Euler, além de excepcional matemático, foi um grande inventor de várias notações que hoje utilizamos amplamente e nem nos damos conta disso. Seja em Trigonometria, Álgebra ou Análise, sempre deparamo-nos com uma de suas brilhantes convenções. Com Euler, a escolha de boas notações parece ter se transformado em uma arte.

Vejamos algumas que ele inventou:

a) Em 1706, o inglês William Jones utilizou pela primeira vez a letra grega π para representar a razão do comprimento de uma circunferência pelo comprimento do seu diâmetro. Mas foi Euler que

contribuiu definitivamente para o uso desta notação (1736). William Jones é o exemplo de alguém que, desapercebidamente, acabou marcando sua presença na História por causa de uma simples notação. O símbolo π vem da primeira letra da palavra *perímetro* e *periferia* escritas em grego: $\pi\epsilon\rhoιμετρο\zeta$ e $\pi\epsilon\rhoιφερι\alpha$;

- b) Notação $f(x)$ para o valor de uma função no ponto x (1734);
 - c) Notação $\ln x$ para o logaritmo natural;
 - d) Notação \sum para somatório. O símbolo \sum vem da letra grega *sigma* maiúscula, correspondente a nosso “*s*”, primeira letra da palavra *summam* (‘*soma*’ em Latim) (1755);
 - e) Uso das letras minúsculas a, b, c, \dots para os lados de um triângulo, e das maiúsculas A, B, C, \dots , para os respectivos vértices opostos;
 - f) Notação i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ (1777);
 - g) Notação e para a base do logaritmo natural (1727 ou 1728).
- ([Daintith & Nelson, 1989], p.120; [Cajori, 1993], p.8, p.13, p.61, p.128, p.268 & [Boyer, 1974])



Figura 1.4: Leonard Euler (1707 - 1783), um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos.

II) Foi **René Descartes**¹⁷ quem introduziu a notação x^2, x^3, \dots ; ele também foi o primeiro a usar as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas, e as últimas letras, para as incógnitas. ([Daintith & Nelson, 1989] p. 93)

¹⁷**René Descartes** (1596-1650), filósofo e matemático francês, foi um dos precursores do Cálculo Infinitesimal e, juntamente com Pierre de Fermat, foi um dos inventores da Geometria Analítica. Introdutor do racionalismo filosófico, foi o fundador da Filosofia Moderna, tema em que é sempre lembrado por sua máxima: “*Cogito ergo sum*” (*Discurso da Razão*, 1637), que é traduzido do Latim como: “*Penso, logo existo!*”

CAPÍTULO 2

A lógica-matemática

“Não se preocupe com suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são bem maiores.”

Albert Einstein (1879-1955)

“Talvez o maior paradoxo de todos é que há paradoxos na Matemática.”

E. Kasner & J. Newman

In Mathematics and the Imagination,
New York, Simon and Schuster, 1940.

2.1 Como formular um resultado matemático? Sentenças, sentenças abertas e quantificadores

Primeiramente, os resultados matemáticos devem ser expressos com a exatidão necessária que exigem. Na Linguagem Matemática não há lugar para ambigüidades, para figuras de linguagem ou para metáforas, que são tão comuns e até mesmo apreciadas na Linguagem Coloquial ou Literária.

No dia-a-dia, alguém que diz uma frase como “*Estou chegando num minuto!!!*”, significa que ela vai chegar em pouco tempo. Já na Matemática, “*um minuto*” representa um minuto mesmo, sessenta segundos. Sem querer ser chato, matematicamente, essa pessoa não pode levar nenhum segundo a mais, nem a menos para chegar! Não é à toa que a Matemática é uma Ciência Exata, e é dessa forma que ela funciona. Felizmente, podemos ficar tranquilos, ninguém no dia-a-dia é obrigado a interpretar matematicamente a frase anterior.

De um simples exemplo, é possível perceber que as informações na Matemática devem ser expressas com a linguagem e os cuidados específicos que, muitas vezes, são diferentes daqueles que estamos acostumados a usar na *Linguagem Coloquial*. Alertados deste fato, vamos aprender como isso é feito.

DEFINIÇÃO:

Chamamos *frase* a um conjunto de palavras (incluindo os sinais de acentuação e pontuação) ou símbolos matemáticos, que se relacionam para comunicar uma idéia.

Uma *sentença* ou *proposição* é uma frase (que, no nosso caso, pode, eventualmente, incluir apenas símbolos matemáticos) tal que:

1. Apresenta-se de forma estruturada como uma oração, com sujeito, verbo e predicado;
2. É afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa);

3. Satisfaz o **Princípio do Terceiro Excluído**, que garante que uma sentença ou é falsa ou é verdadeira, não havendo uma terceira alternativa; e o **Princípio da Não-contradição**, que assegura que uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo.

Iremos admitir os dois princípios acima citados. Logo, segundo a definição anterior, toda sentença ou é verdadeira ou é falsa, não havendo uma terceira opção, e não podendo ser ao mesmo tempo falsa e verdadeira. Por estes fatos, a lógica que iremos utilizar tem a característica de ser bivalente.

Perceba que uma *sentença* ou *proposição* é uma afirmação de significado preciso, que não deixa margens para interpretações ambíguas. Em Matemática, as idéias precisam ter essa característica e, por isso, os resultados formais são formuladas por meio de sentenças. A Lógica Formal também trabalha diretamente com sentenças, como veremos mais adiante.

Como exemplo, considere as frases a seguir:

P_1 : A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a cento e oitenta graus.

P_2 : $87 < 85^2$.

P_3 : Existe $x \in \mathbb{R}$ positivo tal que $x < 0,1$ e $x^2 > 10$.

P_4 : $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

P_5 : Todo número par é divisível por 3.

P_6 : Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $2x^2 + 8x - 10 < 0$ ou $x \geq 1$ ou $x \leq -5$.

P_7 : O Brasil é o maior país da América Latina.

P_8 : $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

P_9 : $3 + 9 = 11$.

P_{10} : Se a_1, a_2, \dots, a_n forem os termos de uma progressão aritmética, então

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

P_{11} : $x \in \mathbb{R}, x^2 - 16 > 0 \Rightarrow x > 4$ ou $x < -4$.

Você pode verificar que todas as frases acima são sentenças. Todas elas satisfazem as condições 1), 2) e 3) da definição.

Dizemos que o **valor lógico** de uma sentença é **verdadeiro** quando a sentença é verdadeira, e **falso**, caso contrário. Também diremos que uma sentença é **válida** se seu valor lógico for verdade, e **não-válida** se for falso. Do item 3) da definição de sentenças, segue que, a toda sentença, está associado um único valor lógico: **falso** ou **verdadeiro**.

A Lógica Formal visa a estudar as relações entre as sentenças, sem se preocupar efetivamente com os valores lógicos de sentenças básicas. Já a Matemática, tem como um de seus objetivos descobrir e provar se certas sentenças são falsas ou verdadeiras. É interessante ressaltar que, às vezes, leva-se séculos para isso! Na Seção 7.2 damos alguns exemplos famosos de casos desse tipo.

Nos exemplos precedentes, todas as sentenças são verdadeiras, com exceção de P_3 , P_5 , P_8 , P_9 e, apenas P_7 não é uma **sentença matemática**, já que nela não aparecem objetos matemáticos.

Neste ponto, cabe-nos esclarecer que, agora, não é importante nos preocuparmos com as demonstrações dos vários resultados que irão aparecer em várias partes do texto. Aqui nossa preocupação é outra. Mas adiantamos que, quando chegar o devido momento, iremos nos devotar totalmente às demonstrações.

Voltando ao tema desta seção, para gravar mais acuradamente a definição do que seja uma sentença, vamos agora analisar algumas frases que deixam de satisfazer pelo menos uma das condições 1), 2) ou 3) e, consequentemente, não são sentenças:

a) $\frac{1}{9} + 9$

Essa frase não está estruturada como uma sentença, pois não cumpre a condição 1) da definição. A frase tem sujeito ('*um nono mais nove*'), mas não tem verbo nem predicado. Não há alguma afirmação nela, apenas uma fração somada a um número. Para tornar-se uma sentença, ela poderia ser completada, por exemplo, como:

$$\frac{1}{9} + 9 = \frac{82}{9}.$$

Dessa forma, essa frase é afirmativa declarativa, tem sujeito ('*um nono mais nove*'), verbo e predicado ('é igual a oitenta e dois nonos') e cumpre os dois Princípios (do Terceiro Excluído e da Não-contradição). Alguém também a poderia ter completado como:

$$\frac{1}{9} + 9 = \sqrt{5},$$

ou de outras maneiras. Da maneira como a completamos, ela tornou-se uma sentença falsa.

b) $10^9 > 9^{10}$?

A frase está estruturada como uma oração, satisfaz os dois Princípios, mas é interrogativa. Portanto, não é uma sentença.

c) $2x + 6 = 3$

Essa frase está estruturada como uma oração, mas observe que para $x = \frac{-3}{2}$, a frase é verdadeira e é falsa para $x = 1$, $x = -9$ ou para qualquer outro valor de x diferente de $\frac{-3}{2}$. Portanto, não há como determinar se ela é verdadeira ou falsa, já que nada foi dito sobre o valor da variável x . Este fato contradiz o Princípio do Terceiro Excluído e, dessa forma, a frase não é uma sentença.

Chama-se *sentença aberta* a uma frase apresentada como a anterior, subordinada a uma variável (às vezes, a algum objeto) que fica livre, sobre a (o) qual nada se afirma, não possibilitando determinar o valor lógico dessa frase. Apesar do incômodo de chamar “*sentença aberta*” a uma frase que, na verdade, não é uma sentença, conforme definimos anteriormente, vamos respeitar essa terminologia usada na literatura.

A frase ‘*Este número não é par*’ também é uma sentença aberta.

Note que uma sentença aberta pode conter mais de uma variável livre, como esta:

$$‘x^2 + y > \cos z’.$$

2.1.1 Os quantificadores universal e existencial

Uma das maneiras de transformar uma sentença aberta numa sentença, é quantificar, em um determinado conjunto, cada variável livre que aparece na sentença aberta. Ou seja, indicar a quantidade de elementos de determinado conjunto que gozam da propriedade correspondente a cada variável que aparece na sentença aberta. Uma das formas de se conseguir isso é utilizando as palavras “*existe*” ou “*para todo*”.

Por exemplo, uma maneira de transformar a sentença aberta acima, ‘ $2x + 6 = 3$ ’, em uma sentença, seria escrever:

‘*Existe* $x \in \mathbb{R}$, tal que $2x + 6 = 3$.’

Dessa maneira, temos uma sentença!

Semelhantemente, poderíamos ter escrito

‘Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $2x + 6 = 3$ ’,

frase que agora também é uma sentença.

Observe que a primeira das duas últimas sentenças é verdadeira, enquanto a segunda é falsa.

Os termos “*para todo*” e “*existe*” são, com muita razão, chamados, respectivamente, de ***quantificador universal*** e ***quantificador existencial*** e são denotados usando-se os símbolos \forall e \exists , respectivamente. Os quantificadores têm uma importância muito grande dentro da Linguagem Matemática. O quantificador universal é usado para definir propriedades que valem para *todos os elementos* de um conjunto. Já o quantificador existencial é usado para definir propriedades que valem para, *pelo menos, um* elemento de um conjunto.

Ao usar qualquer desses quantificadores, tenha em mente os seguintes cuidados:

1. Cada quantificador de uma sentença deve estar subordinado a uma variável pertencente a um determinado conjunto;

No exemplo ‘*Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $2x + 6 = 3$* ’, escolhemos o conjunto como sendo o dos números reais.

2. Em geral, a variável à qual a sentença está subordinada é representada por uma letra. O significado da sentença permanece o mesmo, independentemente da letra que se possa escolher e utilizar para representar a variável. Por exemplo, tanto faz escrever

‘*Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $2x + 6 = 3$* ’,

como escrever

‘*Existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $2y + 6 = 3$* ’,

ou

‘*Existe $\xi \in \mathbb{R}$, tal que $2\xi + 6 = 3$* ’.

3. Ao utilizar um símbolo para representar uma variável, tome cuidado para não reutilizá-lo no mesmo contexto para uma outra variável, o que poderia causar grande confusão;
4. A ordem na qual os quantificadores de naturezas distintas (existencial e universal ou universal e existencial) aparecem numa sentença pode modificar inteiramente o sentido dessa sentença. Por exemplo, os significados das sentenças abaixo são totalmente distintos, já que trocamos a ordem na qual aparecem os quantificadores de naturezas distintas:

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } y^2 = x$$

e

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall y \in \mathbb{Z} \text{ temos } y^2 = x.$$

5. Já quantificadores de mesma natureza podem ser comutados.

Tanto faz escrever

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tem-se } |y| + |n| \geq 0,$$

como

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z} \text{ tem-se } |y| + |n| \geq 0.$$

Ou ainda, tanto faz escrever

$$\exists w \in \mathbb{N}, w \neq 0, \exists z \in \mathbb{Z}, z \neq 0; z^2 + w^2 = 20,$$

como

$$\exists z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \exists w \in \mathbb{N}, w \neq 0; z^2 + w^2 = 20.$$

6. Outras expressões que podem substituir “*para todo*” são, por exemplo: “*dado*”, “*para qualquer*”, “*(para) qualquer que seja*”, “*para cada*”.
7. Outras expressões que podem substituir “*existe*” são, por exemplo: “*existe algum*”, “*existe pelo menos um*”.

Há também outras maneiras de transformar uma sentença aberta numa sentença, sem necessariamente ter de utilizar os quantificadores universal ou existencial (Exercício 7, desta seção).

2.1.2 A linguagem de conjuntos e a Lógica

A utilização da linguagem de conjuntos já está consolidada e tem seu papel de destaque na Matemática atual. Os conjuntos substituem com concisão e precisão as idéias de *condições* e *propriedades* que definem os elementos de uma classe e que poderiam ser formuladas por longas frases. Na Lógica, os conjuntos têm grande aplicabilidade ao se prestarem com eficácia para sintetizar e organizar o raciocínio lógico, além da vantagem de ser possível efetuar operações com eles (união, interseção, etc.).

Vamos agora, e no decorrer do texto, tirar proveito das relações existentes entre a Linguagem de Conjuntos e a Lógica. Veremos como certos conceitos lógicos podem ser expressos com a linguagem de conjuntos, tornando-os mais simples de serem manipulados.

Por exemplo, no caso dos quantificadores, se $P(x)$ é uma sentença aberta que depende de uma variável x pertencente a um conjunto universo \mathcal{U} e, se denotamos

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ é válida}\},$$

então

1) A sentença ‘ $\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ vale}$ ’ acarreta ‘ $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ’ e, reciprocamente, caso ‘ $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ’ seja verdade, resulta que a sentença ‘ $\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ vale}$ ’ é verdadeira;

2) Já a sentença ‘ $\forall x \in \mathcal{U}, P(x) \text{ vale}$ ’ acarreta ‘ $\mathcal{P} = \mathcal{U}$ ’ e, reciprocamente, caso ‘ $\mathcal{P} = \mathcal{U}$ ’ seja verdade, resulta que a sentença ‘ $\forall x \in \mathcal{U}, P(x) \text{ vale}$ ’ é verdadeira.

Um exemplo explícito, referente ao primeiro exemplo de sentença aberta que demos nesta seção:
se

$$P(x) : 2x + 3 = 6 \text{ e } \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}; P(x) \text{ é válida}\},$$

então

1) A sentença ‘*Existe* $x \in \mathbb{R}$, tal que $2x + 3 = 6$ ’ significa que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, e reciprocamente;

2) Já a sentença ‘*Para todo* $x \in \mathbb{R}$ temos $2x + 3 = 6$ ’, significa que $\mathcal{P} = \mathbb{R}$, e reciprocamente.

Finalizamos, ressaltando que, no decorrer do texto, usaremos as palavras “*sentença*” e “*proposição*” indistintamente, já que possuem os mesmos significados.

Agora que você já sabe o que é uma proposição matemática, treine um pouco com os exercícios a seguir.

EXERCÍCIOS:

1. Determine, dentre as frases abaixo, quais são proposições e quais não são, e explique o porquê:

- (a) $3 - 1 > 1$.
- (b) $10^{2002} - 1$ é divisível por 3.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } |x - r| < \varepsilon$.
- (d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{3 - 7}{10} = \frac{-4}{21}$.
- (e) $\exists a \in \mathbb{R}; a^2 > 36 \text{ e } 0 < a < 7$.
- (f) $\notin \mathbb{Q}$.
- (g) *Este é um número primo.*
- (h) $\exists a \in \mathbb{R}; a^2 > 36 \text{ e } a^2 < 36$.
- (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} ?$
- (j) $3 < 1$ ou $3 = 1$.
- (k) *O número $x \in \mathbb{R}$ é tal que $\ln x = 63$.*
- (l) *Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas de si.*
- (m) $-x$ é um número negativo.
- (n) *Os ângulos internos de um triângulo escaleno.*
- (o) $\sqrt{2} < 1,4143$ e $1,4142 < \sqrt{2}$
- (p) *A função seno (real) assume valores no intervalo $[-1, 1]$.*
- (q) *Se $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.*
- (r) $n = 4002^{2004} - 2003^{3002} \Rightarrow n$ é um número ímpar ou positivo.
- (s) y não é um divisor de 2004.

2. (a) Escolha cinco, dentre as proposições do exercício anterior, e determine quais delas são sentenças verdadeiras e quais são falsas.

(b) Identifique no Exercício 1 as sentenças abertas. Utilize os quantificadores universal ou existencial para, a seu critério, transformar essas *sentenças abertas* em sentenças.

3. Transforme as seguintes *sentenças abertas* em sentenças. Faça isso de modo que a primeira e a quarta sentenças sejam verdadeiras, e a segunda e a terceira sejam falsas.

- (a) $|x - 3| \geq 10$.
- (b) $z^2 - 10 > \varepsilon$ para algum número real $\varepsilon \geq 0$.
- (c) $\operatorname{sen}(w + l) = 0, 12$.
- (d) O determinante da matriz $\begin{pmatrix} r^2 & 27 \\ 1 & r \end{pmatrix}$ é nulo.

4. Explique, usando exemplos, por que os significados das sentenças a seguir são distintos. Determine quais dessas sentenças são verdadeiras e quais são falsas:

- (a) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ tal que $y^2 = x$.
- (b) $\exists x \in \mathbb{N}$, tal que $\forall y \in \mathbb{Z}$ temos $y^2 = x$.

- (c) $\exists x \in \mathbb{N} \text{ e } \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tais que } y^2 = x.$
 (d) $\forall x \in \mathbb{N} \text{ e } \forall y \in \mathbb{Z} \text{ temos } y^2 = x.$

5. Às vezes, os quantificadores não aparecem explicitamente nas sentenças. Reescreva a frase abaixo explicitando os quantificadores:

Os diâmetros de uma circunferência se intersectam num ponto.

6. Use o máximo de símbolos matemáticos para reescrever as sentenças abaixo. Não se preocupe (muito) neste momento com o que elas significam.

- (a) Sejam x e y números reais. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** em x quando, para todo epsilon positivo, existir um delta positivo, tal que o módulo da diferença de $f(x)$ e $f(y)$ é menor do que epsilon, sempre que o módulo da diferença de x e y for menor do que delta.
 (b) Sejam a_n e l números reais. Dado epsilon positivo, existe um número natural n_0 tal que, se n for maior do que ou igual a n_0 , então o módulo da diferença de a_n e l é menor do que epsilon.

7. Usando o mínimo possível de símbolos, reescreva as seguintes sentenças:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists r \notin \mathbb{Q}; |x - r| < \varepsilon.$
 (b) $\forall p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, \exists y_0 \in \mathbb{R}; p(y_0) = 0.$

8. Transforme, de maneiras distintas, as seguintes *sentenças abertas* em sentenças, sem usar o quantificador universal ou o existencial:

- (a) $2z + 5 \geq 43.$
 (b) $|6u - u^4| + u = \frac{\operatorname{sen} u}{98}u^3.$

9. Encontrando um conjunto apropriado para a(s) variável(eis) livre(s), faça um estudo do valor lógico das sentenças abertas a seguir.

- (a) $2x^2 + 5x - 1 = 0.$
 (b) $x + y = 10, x$ é divisível por 3. (Trabalhe no conjunto \mathbb{Z} .)
 (c) O polígono tem exatamente quatro lados, todos paralelos.

10. Assinale, dentre as frases que seguem, aquelas que têm o mesmo significado da frase
Todo número primo, diferente de dois, é um número ímpar.

- (a) *Se algum número primo é diferente de dois, ele é ímpar.*
 (b) *Existe pelo menos um número primo diferente de dois que é ímpar.*
 (c) *Um número será ímpar se for primo e diferente de dois.*
 (d) *Qualquer número primo diferente de dois é ímpar.*
 (e) *Os números primos diferentes de dois são ímpares.*
 (f) *Não há nenhum número primo diferente de dois que não seja ímpar.*
 (g) *Nenhum número primo é diferente de dois, a menos que seja ímpar.*

11. No que segue, n é um número natural. Dado o conjunto $\{a, a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$, considere a sentença:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Assinale, dentre as frases abaixo, aquela que *não* corresponde ao que esta sentença significa:

- (a) Para cada número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 , de sorte que $|a_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n \in \{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$.
- (b) Para qualquer que seja o número real positivo ε , existe um número natural n_0 , tal que $|a_n - a| < \varepsilon$, caso $n > n_0$.
- (c) Para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 , de sorte que, se $n \in \{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$, então $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (d) Para todo número real ε positivo, temos $|a_n - a| < \varepsilon$ para algum $n > n_0$, onde n_0 é um número natural.
- (e) Dado um número real ε positivo, existe um número natural n_0 , de modo que, se $n > n_0$, então $|a_n - a| < \varepsilon$.
12. Dentre as afirmações a seguir, detecte quais delas não representam a idéia do que seja um número par.

Um número par é um número inteiro m tal que

- (a) $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) m é da forma $2k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) $\forall k \in \mathbb{Z}, m = 2k$.
- (d) $\exists k \in \mathbb{Z}; m = 2k$.

2.1.3 *Curiosidade: os paradoxos lógicos

A Lógica, mesmo com todo o seu rigor, pode incrivelmente levar a contradições nos raciocínios, aos quais chamamos paradoxos. Em nosso texto, um **paradoxo** é uma frase autocontraditória, falsa e verdadeira ao mesmo tempo, que contraria o Princípio da Não-contradição. Advertimos que os paradoxos em nada maculam a Lógica e a importância do correto pensar.

A seguir apresentaremos alguns deles.

1. É impossível construir uma máquina (um computador, por exemplo) que sempre determine se qualquer frase é verdadeira ou falsa. Se tal máquina existisse, ela determinaria que a frase abaixo é falsa e verdadeira ao mesmo tempo:

“Esta máquina não vai determinar que essa frase é verdadeira.”

De fato, se a frase acima for verdadeira, então a máquina vai determinar que ela é falsa. E se for falsa, a máquina vai determinar que ela é verdadeira! Logo, essa frase não pode ser uma sentença, conforme definimos.

Contendo idéias semelhantes, vale apresentar os paradoxos abaixo:

2. (Paradoxo do barbeiro) Numa determinada cidade havia um barbeiro que barbeava apenas, e só somente, as pessoas que não se barbeavam.

Estude o valor lógico da afirmação:

“O barbeiro se barbeava.”

3. (Paradoxo do mentiroso) Acredita-se que na Grécia Antiga, lá pelo Século VI a.C., já se conheciam os paradoxos ([Daintith & Nelson, 1989], p.196). O filósofo cretense Epimênides afirmava “*Eu estou mentindo!*”, e saía perguntando se era verdade ou não o que tinha acabado de falar. O que você lhe responderia? Analise as consequências de sua resposta.
4. Por fim, responda: a resposta à pergunta abaixo é “sim” ou “não”?

“*Sua resposta a essa pergunta é ‘não’?*”

Há outros paradoxos famosos na Matemática (vide nota de rodapé 13, da Seção 1.2) e várias histórias interessantes, até mesmo na Literatura ([Al-Din, 2001]), que usam basicamente as mesmas idéias dos paradoxos anteriores.



Figura 2.1: Um “desenho paradoxal” do artista holandês M.C. Escher (1898-1972), um dos preferidos de muitos que estudam Matemática.

2.2 Conectivos e proposições compostas. **(O Cálculo Proposicional)**

Comecemos esta seção recordando duas operações muito importantes envolvendo conjuntos: *união* e *interseção*. Mesmo sendo conhecidos desde os primeiros anos de colégio, esses conceitos ainda causam muitas dúvidas, principalmente quando se apresentam os conjuntos-solução de equações ou inequações, e é comum ver-se que se confundem uniões com interseções.

A partir de dois conjuntos quaisquer A e B , podemos formar dois outros conjuntos:

- 1) O primeiro, constituído pelos elementos de A juntamente com os elementos de B , chamado A **união** B (ou A **reunião** B) e representado por $A \cup B$. Escrevemos $x \in A \cup B$, se $x \in A$ **ou** $x \in B$. Portanto, tenha em mente que a união está relacionada com a conjunção gramatical “**ou**”.

2) O segundo conjunto é formado pelos elementos de A que também são elementos do conjunto B , chamado A **interseção** B e denotado usando-se o símbolo $A \cap B$. Escrevemos $x \in A \cap B$, se $x \in A$ e $x \in B$. Portanto, fixe bem que a interseção está relacionada com a conjunção gramatical “*e*”.

Dizemos que uma união $A \cup B$ é **disjunta** quando $A \cap B = \emptyset$.

Observe que, geralmente, na linguagem coloquial, quando se emprega a conjunção gramatical ***ou***, o fazemos no sentido excludente: “*Você mora na capital ou no interior?*”, “*Pedro é filho de Maria ou de Joana?*”, “*Hoje às 7 h vai fazer calor ou frio?!*”, etc. No uso cotidiano, o comportamento é como se a união de dois conjuntos fosse algo separado de sua interseção.

No uso matemático, ao se referir a qualquer união, sempre deve-se levar em consideração a interseção, já que para dois conjuntos quaisquer A e B temos $A \cap B \subset A \cup B$, e nem sempre a união é disjunta (ou seja, nem sempre é verdade que $A \cap B = \emptyset$). Dessa forma, diferentemente da linguagem cotidiana, na Matemática nunca usaríamos numa frase as conjunções gramaticais *e/ou* simultaneamente. Na Linguagem Matemática isso seria um pleonasmo enfático! Matematicamente, quando usamos o “*ou*”, deve-se entender que também estamos considerando a possibilidade de ocorrer o “*e*”. É necessário que estes conceitos fiquem bem entendidos.

Como no caso de conjuntos, quando trabalhamos com proposições matemáticas, também podemos construir outras proposições a partir de proposições dadas, juntando-se a essas proposições certas palavras, chamadas ***conectivos lógicos***, ou simplesmente, ***conectivos***. Por exemplo, “*não*”, “*se então*”, “*se, e somente se*”, “*ou*” e “*e*” são conectivos. Observe que utilizamos alguns desses conectivos nos exemplos da Seção 2.1, para formar as proposições P_3, P_6, P_8 e P_{10} . Proposições desse tipo são chamadas ***proposições compostas***, pois foram formadas por outras proposições com o auxílio de conectivos. Oportunamente, chamam-se ***proposições simples*** aquelas que não contêm mais de uma proposição em sua formação. Em alguns textos de Lógica, as proposições simples são também chamadas ***proposições atômicas***.

Quando for importante enfatizar, a notação $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ será usada para denotar uma sentença composta P constituída de k sentenças simples R_1, R_2, \dots, R_k . Portanto, no decorrer do texto, quando não explícito, P, Q, R, S, T etc. denotam sentenças compostas ou simples.

As definições anteriores são o passo inicial para o estudo do chamado ***Cálculo Proposicional***, ou ***Cálculo Sentencial*** ou ainda, ***Cálculo das Sentenças***, que é a parte da Lógica que, entre outras coisas, trata de sentenças compostas resultantes de operações lógicas, e dos valores lógicos dessas sentenças.

Comecemos tratando dos conectivos “*e*” e “*ou*”. O estudo de outros conectivos e do Cálculo Proposicional continuará ao longo de outros capítulos.

Como ocorre com os conjuntos, se temos duas proposições P e Q , podemos formar duas novas proposições:

$$\begin{aligned} &P \text{ } e \text{ } Q \text{ } (\text{conjunção} \text{ das sentenças } P \text{ e } Q) \\ &\quad \text{e} \\ &P \text{ } ou \text{ } Q \text{ } (\text{disjunção} \text{ das sentenças } P \text{ e } Q). \end{aligned}$$

Segundo a linguagem da Lógica Simbólica Formal (que usa apenas símbolos), denota-se a proposição conjuntiva por $P \wedge Q$ (lê-se: ‘*P e Q*’), e a disjuntiva por $P \vee Q$ (lê-se: ‘*P ou Q*’).

Na Lógica Formal, pode-se ver a conjunção, a disjunção e as sentenças geradas por outros conectivos como resultantes de operações com sentenças.

Vamos aos exemplos de sentenças conjuntivas e disjuntivas:

EXEMPLO 1: Se temos as proposições

$$P: \text{‘Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x^2 > 2 \text{’}$$

e

$$Q: \text{‘Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x + 3 > 1 \text{’}$$

podemos construir as proposições:

$$P \wedge Q: \text{‘Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x^2 > 2 \text{ e } x + 3 > 1\text{’}$$

e

$$P \vee Q: \text{‘Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x^2 > 2 \text{ ou } x + 3 > 1\text{’}.$$

Definiremos, e é bem natural de aceitar, que **uma proposição conjuntiva**

$$P \wedge Q$$

seja verdadeira, apenas no caso em que as duas proposições P e Q o forem; e, reciprocamente, apenas quando as proposições P e Q forem ambas verdadeiras é que a proposição $P \wedge Q$ também será verdadeira.

Por sua vez, definimos que **uma proposição disjuntiva**

$$P \vee Q$$

é verdadeira, apenas quando pelo menos uma das proposições P ou Q for verdadeira; e, reciprocamente, apenas quando, ou a proposição P ou a proposição Q for verdadeira (pelo menos uma das duas for verdadeira), é que a proposição $P \vee Q$ será verdadeira.

EXEMPLO 2:

$P: 3 > 1$ (Proposição verdadeira)

$Q: -1 > 0$ (Proposição falsa)

$P \vee Q: 3 > 1$ ou $-1 > 0$ (Proposição verdadeira)

$P \wedge Q: 3 > 1$ e $-1 > 0$ (Proposição falsa).

Ainda sobre o valor lógico de sentenças disjuntivas, podemos construir sentenças logicamente verdadeiras bastante bizarras, como: ‘*3 < 7 ou na lua se fabrica queijo do reino com leite de soja tirado de um ornitorrinco marciano*’. O fato é sério, mas a última sentença é só uma brincadeira!

Qual a relação de união e interseção de conjuntos com disjunção e conjunção de sentenças?

Uma resposta é a seguinte: Sejam P e Q duas proposições que se referem a propriedades de um elemento pertencente a um conjunto universo \mathcal{U} . Associemos a P o conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ dos elementos que gozam de P , e, à proposição Q , o conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$ dos elementos que gozam de Q . Dessa forma, o conjunto dos elementos que satisfazem a sentença disjuntiva $P \vee Q$ é $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, e o conjunto dos elementos que satisfazem a sentença conjuntiva $P \wedge Q$ é $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

EXEMPLO 3: No Exemplo 1, temos $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, $\mathcal{Q} = (-2, +\infty)$ e daí resulta que os conjuntos que satisfazem $P \vee Q$ e $P \wedge Q$ são, respectivamente, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

NOTA: Não se deve confundir os símbolos. Observe que \vee e \wedge são usados, respectivamente, para conjunção e disjunção de *sentenças*, enquanto \cup e \cap são usados para denotar, respectivamente, união e interseção de *conjuntos*.

2.2.1 Tabelas-verdade

Você deve ter notado, a partir dos exemplos que demos na seção anterior, que o valor lógico de uma proposição composta, resultante de uma operação lógica de sentenças, depende dos conectivos e dos valores lógicos das proposições simples que a compõem, e não de seus conteúdos em si. Lembre-se dessa informação quando apresentarmos outras operações lógicas definidas com outros conectivos.

Uma maneira prática de encontrar e exibir os valores lógicos de proposições compostas é usando um dispositivo chamado *tabela-verdade*. Nas tabelas-verdade, empregaremos a letra V para denotar o valor lógico “verdade”, e a letra F para denotar o valor lógico “falsidade” de uma proposição. Como, pelos Princípios do Terceiro Excluído e da Não-contradição, toda proposição está associada a um único valor lógico (F ou V), usando uma tabela-verdade é possível determinar os valores lógicos de uma proposição composta $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$, levando em consideração os conectivos e as possibilidades dos valores lógicos das proposições simples R_1, R_2, \dots, R_k que a compõem.

As tabelas-verdade têm larga aplicação, em particular, na Linguagem Dual da Computação, em circuitos elétricos, etc.

Como exemplo, veja como podemos dispor, numa tabela-verdade, os valores lógicos de proposições conjuntivas e disjuntivas que definimos na seção anterior:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Tabela 2.1: Tabela-verdade da conjunção e disjunção.

Adiantamos que não é difícil verificar que uma tabela verdade de uma sentença composta $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$, formada por k sentenças simples R_1, R_2, \dots, R_k , tem exatamente 2^k linhas. Este é o Exercício-1(h), proposto na Seção 15.1.

Na medida em que apresentarmos algum conectivo, iremos exibir a tabela-verdade de proposições formadas por este conectivo.

EXERCÍCIOS:

1. Explique porque ‘ $10 \geq 10$ ’ é uma sentença verdadeira.
2. Classifique, no Exercício 1, da Seção 2.1, as proposições compostas e as proposições simples.
3. Determine o valor lógico das seguintes sentenças, justificando sua resposta:
 - (a) Existem dois números primos entre os números 2^2 e 3^2 , ou $\pi > \sqrt{3}$.
 - (b) Se x é um número real, então $x^3 - 1 > 0$ e $2x > 0$.
 - (c) $-3 > 9$ e $5 < 3$, ou $25 > 3$.

4. Complete a tabela verdade abaixo:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \vee R$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
F	V	V					
V	F	F					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Responda às seguintes perguntas, justificando sua resposta (observação: estamos trabalhando com Matemática.):

(a) Se você não conhece os números x e y , e alguém afirma que

$$\text{"}x > 0 \text{ ou } y > 0\text{"},$$

pode-se concluir que:

- i. x pode ser negativo?
- ii. y pode ser zero?
- iii. x pode ser negativo ou zero?
- iv. y não pode ser negativo?

(b) E se essa pessoa diz que

$$\text{"}x > 0 \text{ e } y < 0\text{"},$$

então:

- i. x ou y pode ser nulo?
- ii. x e y podem ser nulos?
- iii. x ou y podem ser positivos?
- iv. x pode ser negativo ou nulo ou y pode ser positivo?

6. Marque a alternativa correta para as seguintes questões. Sua resposta só é válida com a respectiva justificativa.

(a) O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; (x - 2)(x - 1) = 0\}$ pode ser representado na forma

- i. $A = \{x \in \mathbb{R}; x = 2 \text{ e } x = 1\}$
- ii. $A = \{x \in \mathbb{R}; x = 2 \text{ ou } x = 1\}$

(b) Sejam $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x > 9\}$ e $C = \{9\}$. Assim, tem-se:

- i. $A = B \cap C$
- ii. $A = B \cup C$

(c) Se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $\frac{x}{y} < 0$, podemos afirmar que:

- i. $x < 0$ ou $y < 0$
- ii. $x < 0$ e $y < 0$
- iii. $x > 0$ ou $y < 0$
- iv. $x < 0$ ou $y > 0$

- v. $(x > 0 \text{ e } y < 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ e } y > 0)$
 vi. $(x > 0 \text{ ou } y < 0) \text{ e } (x < 0 \text{ ou } y > 0)$
- (d) Se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $x \cdot y > 0$, podemos afirmar que:
- $x > 0 \text{ ou } y > 0$
 - $x > 0 \text{ e } y > 0$
 - $(x > 0 \text{ e } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ e } y < 0)$
 - $(x > 0 \text{ ou } y > 0) \text{ e } (x < 0 \text{ ou } y < 0)$
7. Ao resolverem uma equação algébrica do segundo grau na variável x , quatro alunos escreveram suas respostas de maneiras distintas. Eles afirmaram que as raízes da equação eram:
- $x = 2 \text{ e } x = 3$
 - $x = 2 \text{ ou } x = 3$
 - $x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$
 - $x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = 3$

Quais das respostas estão formuladas de maneira correta? Por quê?

2.3 Sentenças equivalentes na Lógica Formal

Na Lógica Formal, duas sentenças compostas $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ e $Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ são ditas **equivalentes** se possuem as mesmas tabelas-verdade. Quando isso ocorre, representamos esse fato por

$$P(R_1, R_2, \dots, R_k) \equiv Q(R_1, R_2, \dots, R_k),$$

que é lido como “(a sentença) P é equivalente à (sentença) Q ”. Alguns textos utilizam a igualdade em vez do símbolo ‘ \equiv ’ para representar equivalência de sentenças.

Quem fez o Exercício 4 da seção anterior, agora pode constatar que as sentenças $P \wedge (Q \vee R)$ e $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ são equivalentes.

A equivalência de sentenças é importante, pois, em muitos casos, é conveniente substituir uma sentença por outra que lhe seja equivalente. Isso, muitas vezes, simplifica o cálculo com sentenças.

Listamos a seguir as principais propriedades de equivalência de conjunção e disjunção de proposições que valem na Lógica Simbólica:

IDEMPOTÊNCIA	COMUTATIVIDADE
$P \wedge P \equiv P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
$P \vee P \equiv P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
ASSOCIATIVIDADE	DISTRIBUTIVIDADE
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Tabela 2.2: Propriedades da equivalência de sentenças.

Essas propriedades podem ser checadas, sem dificuldades, usando-se tabelas-verdade.

EXERCÍCIOS:

1. Usando tabelas-verdade, verifique três das propriedades listadas na última tabela.
2. Verifique que são verdadeiras as chamadas “*propriedades de absorção*”:

$$P \wedge (P \vee R) \equiv P \quad \text{e} \quad P \vee (P \wedge R) \equiv P$$

3. Responda à seguinte pergunta, justificando sua resposta:
“Qual a relação dos valores lógicos de duas sentenças equivalentes?”

2.3.1 **Sentenças condicionais e implicativas na Lógica Formal

Na Lógica Formal, a duas proposições dadas, P e Q , associa-se uma outra proposição ‘ $P \rightarrow Q$ ’, chamada **sentença condicional**, que é lida como “Se P , então Q ”. Neste contexto, a proposição P chama-se **antecedente** e a proposição Q **consequente**.

Define-se a tabela-verdade da sentença condicional $P \rightarrow Q$ como:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.3: Tabela-verdade da condicional.

A princípio, visto desta forma, o símbolo ‘ \rightarrow ’ nada tem a ver com a idéia de *dedução matemática*. Da tabela-verdade anterior resulta, por exemplo, que uma sentença da forma ‘Se a lua é feita de queijo, então π é irracional’ é uma sentença verdadeira. Sentenças condicionais dessa natureza, envolvendo coisas tão distintas, não nos interessam.

Na Lógica Formal, o símbolo \rightarrow é encarado como uma operação lógica de sentenças, que a cada par de sentenças (P, Q) associa uma outra sentença ‘ $P \rightarrow Q$ ’.

Ainda na Lógica Simbólica Formal, diz-se que a sentença composta $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ **implica logicamente** (ou **implica materialmente**) uma sentença composta $Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$, nos casos em que a última coluna da tabela-verdade de $P(R_1, R_2, \dots, R_k) \rightarrow Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ contiver apenas V , independentemente dos valores lógicos das sentenças R_1, R_2, \dots, R_k . Denota-se este fato por $P(R_1, R_2, \dots, R_k) \Rightarrow Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$, que é lido como “(A sentença) $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ implica logicamente (a sentença) $Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ ”. Isto é, na Lógica Formal, a **implicação lógica** (ou **implicação material**) $P(R_1, R_2, \dots, R_k) \Rightarrow Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ ocorre, quando o valor lógico da sentença $P(R_1, R_2, \dots, R_k) \rightarrow Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ for sempre verdade, independentemente dos valores lógicos das sentenças R_1, R_2, \dots, R_k .

Observe a seguinte tabela-verdade:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Conforme definimos anteriormente, como a última coluna desta tabela contém apenas V , independentemente dos valores lógicos das sentenças P e Q , temos $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$.

OBSERVAÇÕES:

1. O símbolo ‘ \rightarrow ’ ficará reservado para sentenças condicionais da Lógica Formal, representando uma operação de sentenças.
2. Já o símbolo ‘ \Rightarrow ’ será usado na implicação lógica de proposições.
3. Muitas vezes, vêem-se os símbolos ‘ \Rightarrow ’ e ‘ \rightarrow ’ sendo usados em começo de frases, como ornamentação. Aconselhamos evitar esses usos. Esses símbolos têm significados próprios na Lógica e na Matemática, e convém respeitá-los.

EXERCÍCIOS:

1. Compare a afirmação “*Uma sentença condicional $P \rightarrow Q$ é verdadeira se Q for verdadeira todas as vezes em que P for verdadeira*” com a definição da tabela-verdade de $P \rightarrow Q$.
2. Construa as tabelas-verdade das sentenças ‘ $(P \vee Q) \rightarrow R$ ’ e ‘ $P \vee (Q \rightarrow R)$ ’. Discuta a importância da posição dos parênteses numa sentença.
3. Construa a tabela-verdade de cada uma das sentenças
 - (a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$;
 - (b) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R))) \rightarrow (P \wedge (P \vee R))$;
 - (c) $(P \wedge Q) \rightarrow P$.
4. Em quais dos itens do exercício anterior é possível trocar o símbolo ‘ \rightarrow ’ pelo símbolo ‘ \Rightarrow ’?
5. Determine os valores lógicos das sentenças P e Q sabendo que os valores lógicos das sentenças $P \rightarrow Q$ e $P \wedge Q$ são verdadeiro e falso, respectivamente.
6. Na Lógica Simbólica Formal, verifique que
 - (a) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)))$;
 - (b) $P \Rightarrow ((Q \rightarrow (Q \wedge P))$.

2.4 Argumentos, sentenças condicionais e sentenças implicativas

2.4.1 Argumentos

Considere as sentenças

P : ‘Pedro é brasileiro’

Q : ‘Pedro é terráqueo’.

Assumindo a sentença P , de que forma podemos deduzir a sentença Q ? Pense um pouco e elabore uma justificativa para responder esta pergunta. Feito isso, sugerimos que continue a leitura.

Qualquer que tenha sido a maneira que você tenha concluído a sentença Q partindo da sentença P , você usou afirmações advindas do raciocínio lógico. Essas afirmações são chamadas **argumentos**. Os argumentos são elaborados com a finalidade de convencer de que certos fatos são válidos.

Sendo menos informais, dado um número finito de proposições P_1, P_2, \dots, P_k, Q ¹, chamamos **argumento** a qualquer afirmação de que as sentenças P_1, P_2, \dots, P_k acarretam, ou têm como consequência a sentença Q . Quando isso ocorre, também diz-se que “*a sentença Q se deduz (ou se infere) das sentenças P_1, P_2, \dots, P_k* ”. As sentenças P_1, P_2, \dots, P_k são chamadas **premissas**, e a sentença Q chama-se **conclusão**. As premissas devem estar adequadamente relacionadas com a conclusão.

No caso das sentenças anteriores, ‘*Pedro é brasileiro*’ foi a premissa inicial usada para deduzir a conclusão ‘*Pedro é terráqueo*’.

As palavras ‘*deduzir*’ e ‘*inferir*’ são sinônimos bastante conhecidos, e usaremos a idéia intuitiva do que significam. Sabemos que deduções são consequências de argumentações produzidas pelo raciocínio e são práticas habituais do dia-a-dia.

Vamos exemplificar as definições anteriores:

Considerando a seguinte sequência de sentenças que se relacionam

P_1 : ‘*Pedro é brasileiro*’ ,

P_2 : ‘*O Brasil é na Terra*’

Q : ‘*Pedro é terráqueo*’,

podemos usar as sentenças P_1 e P_2 para montar nosso argumento a fim de deduzir Q : “*Como Pedro é brasileiro e o Brasil é na Terra, concluímos que Pedro nasceu na Terra e, portanto, é um terráqueo*”.

Na conclusão dos argumentos, geralmente usamos expressões como: “*portanto*”, “*logo*”, “*concluímos que*”, “*assim*”, “*consequentemente*”, entre outras.

2.4.2 Silogismos

Um **silogismo** é um tipo de argumento lógico-dedutivo da forma

$$\begin{aligned} H &\text{ é } M. \\ S &\text{ é } H. \\ \text{Logo, } S &\text{ é } M. \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} &\text{Todos os homens são mortais.} \\ &\text{Ora, Sócrates é um homem.} \\ &\text{Logo, Sócrates é mortal.} \end{aligned}$$

Um silogismo é formado por três elementos básicos:

Premissa maior (que contém uma afirmação geral).

Exemplo: ‘*Todos os homens são mortais*’.

Premissa menor ou **termo médio** (que contém uma afirmação particular derivada).

Exemplo: ‘*Ora, Sócrates é um homem*’.

Conclusão (que deve ser coerente com as premissas anteriores).

Exemplo: ‘*Logo, Sócrates é mortal*’.

Cada premissa tem um elemento comum com a conclusão, e ambas, um termo em comum. Qual seria esse *elemento em comum* e esse *termo em comum* no exemplo acima?

¹É claro que essas proposições devem se relacionar entre si. Para nós, a definição ficaria vaga, caso tivéssemos proposições de naturezas absurdamente distintas, como P_1 : ‘*Meu sapato é bonito*’, Q : ‘ *π é um número irracional*’ e P_2 : ‘*Vivaldi era um padre*’.

O filósofo grego *Aristóteles*², pioneiro no estudo da Lógica, descreveu e classificou alguns tipos de silogismo. Nos contentaremos com o tipo de silogismo apresentado, que, em sua homenagem, ficou conhecido como *silogismo aristotélico*.

O silogismo é uma argumentação típica do raciocínio lógico-dedutivo.

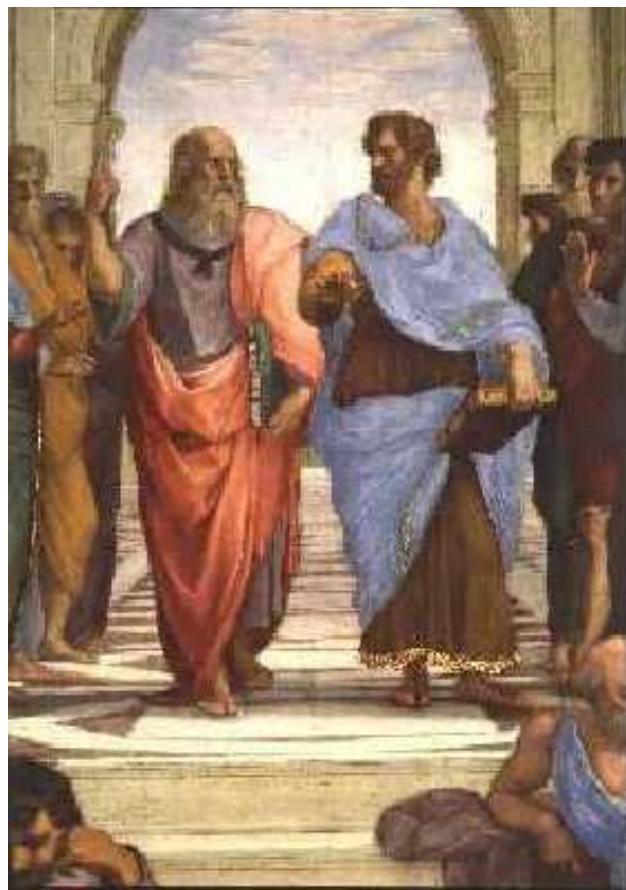


Figura 2.2: Detalhe do afresco *A Academia de Platão* (1508-1511), do pintor renascentista Rafael (1483-1520), mostrando Aristóteles e Platão conversando.

EXERCÍCIOS:

1. Refaça a argumentação que aparece na frase

“Como Pedro é brasileiro, e o Brasil é na Terra, concluímos que Pedro nasceu na Terra e, portanto, é um terráqueo”.

usando a idéia de silogismo.

2. Dê exemplos de silogismos dentro da Matemática.

3. Complete a conclusão do seguinte silogismo, que parte de uma premissa falsa:

Premissa maior: *Todos os gatos são pardos* (Premissa falsa)

Premissa menor: *Pretinho é um gato (de cor preta)* (Premissa verdadeira)

Conclusão:..... (Conclusão falsa)

4. Explique o silogismo usando a Linguagem de Conjuntos. Mais uma vez, evidencia-se a forte ligação da linguagem de conjuntos e a Lógica.

²Vide nota de Rodapé 3, da Subseção 5.3.1.

2.4.3 Sentenças condicionais

Em nosso texto, *sentença condicional* é uma sentença composta

‘Se P , então Q ’,

formada por duas sentenças P e Q , ligadas pelo conectivo “Se...então”, de maneira que a sentença Q pode ser deduzida da sentença P , todas as vezes em que admitirmos a ocorrência de P .

Vejamos exemplos de sentenças condicionais.

EXEMPLO 1: Se n é um número inteiro divisível por 10, então n é um número par.

é uma sentença condicional, em que

P : ‘ n é um número inteiro divisível por 10.’

e

Q : ‘ n é um número par.’

Como todo número divisível por 10 também é divisível por 2, ou seja, é par, temos a sentença Q deduzida da sentença P .

EXEMPLO 2: Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Neste exemplo, temos:

R : ‘Um triângulo é retângulo.’

e

S : ‘O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.’

Apesar de não ser tão imediato como no exemplo anterior, sabemos que a proposição R pode ser deduzida da proposição S (faremos isso no Capítulo 14).

Para nossos objetivos, a maneira de checar que uma sentença ‘Se P , então Q ’ é condicional, será por meio de uma *demonstração*, com a qual se pode deduzir a sentença Q , assumindo-se a sentença P . Este procedimento é chamado *método dedutivo*.

Como vimos na seção precedente, os argumentos são usados para se fazer deduções e, assim, executar os passos de uma demonstração. Nas deduções, usamos sempre *argumentos válidos*, ou seja, aqueles nos quais a conclusão é verdadeira, sempre que as premissas forem simultaneamente verdadeiras. Neste texto, além de estarmos trabalhando com a Lógica Bivalente, nossos argumentos estarão sustentados por duas regras que precisamos admitir. A primeira é a *generalização*: se algo vale para todos os elementos de um conjunto, então vale para cada elemento desse conjunto. A segunda regra tem o nome latino de *modus ponens*: se as sentenças ‘Se P , então Q ’ e ‘ P ’ ocorrem, então, necessariamente, a sentença ‘ Q ’ também ocorre. Note que, mesmo sem nos darmos conta, aplicamos constantemente essas regras nos raciocínios do dia-a-dia.

Em termos gerais, uma *demonstração matemática* é um processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, admitindo-se a sentença P , deduz-se, por uma seqüência de argumentações válidas, a sentença Q . Ou ainda, uma demonstração garante que a sentença Q ocorre todas as vezes em que P ocorrer. Retornaremos mais detalhadamente a esses temas na Seção 6.1. Neste ponto, apenas as idéias básicas que se têm desses conceitos são o suficiente para o que queremos.

Numa dedução matemática, os elementos usados como ponto de partida para armar um raciocínio são chamados *premissas*. As conclusões são deduzidas por argumentações válidas a partir de um conjunto estabelecido de premissas.

Na prática, dependendo das circunstâncias, muitas vezes usa-se uma expressão do tipo ‘Se P , então Q ’, sem que necessariamente tenha-se uma demonstração de que Q se infere de P . Mesmo quando isso ocorre, é comum ainda chamar-se *sentença condicional* a uma sentença desse tipo. Por este fato, ao trabalharmos com sentenças escritas na forma condicional, e caso seja necessário distinguir as que possuem uma demonstração das que não possuem, iremos substituir a expressão *sentença condicional* por *sentença condicional válida*, no caso em que existir essa demonstração, e adotaremos a terminologia *sentença condicional não-válida*, caso contrário.

UM FATO MUITO IMPORTANTE:

Convém agora comparar a definição da Tabela-verdade 2.3.1 de uma sentença condicional $P \rightarrow Q$, que demos na Subseção 2.4.3, com o que pode ocorrer com a demonstração de uma sentença condicional:

i) De uma sentença P verdadeira, só é possível deduzir-se uma sentença Q verdadeira (compare com o 1º caso da Tabela-verdade 2.3), ou ainda, de uma sentença verdadeira não se pode deduzir uma sentença falsa (compare com o 2º caso da Tabela-verdade 2.3);

Por exemplo: sabemos que a sentença ‘ $1 = 1$ ’ é verdadeira, e que a sentença ‘ $1 = 0$ ’ é falsa, logo, por um processo lógico-dedutivo, não será possível deduzir a sentença ‘ $1 = 0$ ’ da sentença ‘ $1 = 1$ ’. Como as demonstrações usam argumentações válidas, a regra geral é: *não se pode deduzir sentenças falsas de sentenças verdadeiras*.

ii) Já no caso em que a sentença P for falsa (ou uma das premissas for falsa), é possível deduzir uma sentença Q que pode ser falsa ou verdadeira (o mesmo ocorre com os 3º e 4º casos da Tabela-verdade 2.3).

Vamos ilustrar este fato com dois exemplos:

Sejam P : ‘ $1 = 0$ ’ e Q : ‘ $1 = 1$ ’. Da sentença P , decorre que $1 = 0$ e $0 = 1$. Daí, somando os respectivos termos dos lados esquerdo e direito dessas igualdades, temos $1 + 0 = 0 + 1$, donde ‘ $1 = 1$ ’. Logo, a sentença ‘Se P , então Q ’ do nosso exemplo é válida, nesse caso em que P é falsa e Q é verdadeira. No exemplo que demos, *deduzimos uma sentença verdadeira de uma sentença falsa* (compare com o 3º caso da Tabela-verdade 2.3).

Ainda da sentença P , podemos deduzir que, se $1 = 0$, então $1 + 2 = 0 + 2$ ou seja, $3 = 2$. Dessa maneira, considerando Q : ‘ $3 = 2$ ’, a sentença ‘Se P , então Q ’ é válida, nesse caso em que P é falsa e Q é falsa. Neste exemplo, *deduzimos uma sentença falsa de uma outra também falsa* (compare com o 4º caso da Tabela-verdade 2.3).

Finalizamos essa subseção, afirmando que todas as proposições matemáticas, mesmo que não esteja explícito, são sentenças condicionais do tipo

‘Se P , então Q ’.

EXERCÍCIOS:

1. Nos exercícios a seguir, assinale as alternativas verdadeiras.

(a) Ao se utilizar premissas falsas, pode-se deduzir conclusões:

- i. Verdadeiras
- ii. Falsas
- iii. Nada se pode afirmar.

(b) Ao se utilizar premissas verdadeiras, pode-se deduzir conclusões:

- i. Verdadeiras
- ii. Falsas

- iii. Nada se pode afirmar.
2. Enuncie dois silogismos na forma de sentenças condicionais.
 3. Complete os silogismos:
 - (a) *O que tem folhas é um livro* (Premissa maior falsa)
Uma árvore tem folhas (Premissa menor verdadeira)

 (Conclusão falsa)
 - (b) *Todo número par é maior do que cinco* (Premissa maior falsa)
9 é um número par (Premissa menor falsa)

 (Conclusão verdadeira)
 4. Dê exemplos de silogismos na Matemática que tenham premissas falsas e conclusão falsa; premissas falsas e conclusão verdadeira; premissa maior verdadeira, premissa menor falsa e conclusão verdadeira.
 5. Verifique se algumas afirmações matemáticas que você conhece podem ser enunciadas na forma ‘Se P , então Q ’.

2.4.4 Sentenças implicativas

Na Subseção 2.3.1 vimos que o símbolo ‘ \Rightarrow ’ é usado na Lógica Formal para denotar as chamadas *implicações lógicas* (ou *materiais*). Já na Seção 1.2, vimos que o mesmo símbolo é usado para representar a palavra *implica* ou *acarreta*, que deve ser usado no seguinte caso: Dadas duas proposições P e Q , em vez de escrever ‘*a proposição P implica a proposição Q* ’, escrevemos simplesmente, ‘ $P \Rightarrow Q$ ’.

A sentença $P \Rightarrow Q$ é chamada **sentença implicativa**.

Na verdade, para nós, ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ é apenas uma outra maneira de escrever uma sentença condicional ‘*Se P , então Q* ’. Em nosso texto, sentenças implicativas e condicionais representam a mesma idéia, só que escritas de formas diferentes. Dessa maneira, escreveremos ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ quando a sentença Q puder ser deduzida da sentença P . Neste caso, diremos que ***a sentença P implica a sentença Q*** .

Assim, uma outra maneira de enunciar os exemplos da seção anterior é:

EXEMPLO 3: *n é um número inteiro divisível por 10 $\Rightarrow n$ é um número par.*

Na implicação anterior, a primeira sentença é

P : ‘*n é um número inteiro divisível por 10*’

e a segunda é

Q : ‘*n é um número par*’.

Como já vimos, todo número inteiro divisível por 10 também é divisível por 2, ou seja, é par. Logo, a primeira sentença P implica a segunda sentença Q . Em nosso texto, a menos que se trate exclusivamente da Lógica Formal, é sempre nesses casos que o símbolo ‘ \Rightarrow ’ será usado.

EXEMPLO 4: *Um triângulo é retângulo \Rightarrow o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos*

Mais uma vez, a linguagem dos conjuntos se revela extremamente útil para ajudar a manipular e entender o uso do símbolo ‘ \Rightarrow ’ e das sentenças formadas por implicações lógicas: sejam P e Q duas proposições que se referem a propriedades de um elemento pertencente a um conjunto universo \mathcal{U} . Associemos a sentença P ao conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$, dos elementos que gozam de P , e a sentença Q ao conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$, dos elementos que gozam de Q . Feito isso, resulta que a implicação ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ é

verdadeira sempre que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ e, reciprocamente, se $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, então ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ é verdadeira. Como já frisamos, a mesma idéia vale para sentenças condicionais.

(Observação: no decorrer do texto, ao nos referirmos ao fato acima, iremos convencionar, salvo menção contrária, que \mathcal{P} e \mathcal{Q} estão contidos no mesmo conjunto universo \mathcal{U} .)

Voltemos ao nosso primeiro exemplo. Se

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{n \in \mathbb{Z}; n \text{ é divisível por } 10\} \\ &= \{\dots - 30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, \dots\}\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{Q} = \{n \in \mathbb{Z}; n \text{ é par}\} = \{\dots - 8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\},$$

então, como $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ temos $P \Rightarrow Q$, e, reciprocamente, como $P \Rightarrow Q$, mesmo se não soubéssemos quem são os conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{Q} , teríamos $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Sempre que conveniente, iremos recorrer a essa maneira de interpretar implicações usando a linguagem de conjuntos.

Quanto às sentenças condicionais ou implicativas, observamos:

1. Vale a propriedade transitiva (Exercício 3, desta subseção), ou seja:

i) ‘Se P , então Q ’ e ‘Se Q , então R ’ resulta ‘Se P , então R ’.

ii) ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ e ‘ $Q \Rightarrow R$ ’ resulta ‘ $P \Rightarrow R$ ’.

2. Cuidado, o símbolo ‘ \Rightarrow ’ não representa a palavra “*portanto*”, mas, como já dissemos, representa a palavra “*implica*”, quando usada para ligar duas sentenças. A notação propícia para “*portanto*” ou “*então*” é três pontinhos formando um triângulo: \therefore .

3. **NÃO USE:** Se $x \in \{1, 2\} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

EXERCÍCIOS:

1. Dê três exemplos, na Matemática, de sentenças condicionais verdadeiras e as reescreva na forma implicativa. Não use exemplos que decorrem de definições e capricho!
2. Dê três exemplos, na Matemática, de sentenças implicativas verdadeiras e as reescreva na forma condicional. Não use exemplos que decorrem de definições, nem os exemplos do Exercício 1 e, novamente, capricho.
3. Usando a linguagem de conjuntos, explique a transitividade da implicação de proposições sobre a qual falamos na observação final desta seção.
4. Sejam P , Q e R três sentenças, de sorte que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$. É verdade que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ é uma sentença? Justifique sua resposta.

5. Use o símbolo de implicação para ligar as proposições abaixo em sua ordem natural lógica, construindo, dessa forma, novas proposições.

(a) $Q : y \in \mathbb{Z}$ é tal que $y = \frac{19 - 13}{3} + 7 = \frac{27}{3} = 9$
 $P : y = 9$

(b) $C : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ é uma Progressão Geométrica
 $U : \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$
 $T : a_1, a_2, \dots, a_n$ é uma seqüência tal que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

(c) V : O volume de P é o produto da área da base pela altura
 X : P é um paralelepípedo
 Z : P é um prisma

(d) $G : x = \frac{9}{2}$
 $H : 5x - 3x = 9$
 $I : x \in \mathbb{Q}$ é tal que $3x + 9 = 5x$
 $L : 2x = 9$

(e) $D : \sin \alpha$ e $\cos \alpha$ têm sinais opostos
 $E : \tan \alpha$ é negativo
 $F : \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

6. Por que a frase abaixo está impropriamente formulada?

$$\text{“Se } x \in \{1, 2\} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.”$$

7. Verifique: “ $x^3 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x^5 + 2x^2 - 36x + 12 = 0$.”

2.4.5 *Curiosidade: a verdade das premissas

Como vimos, em um processo lógico-dedutivo, admite-se o fato de as premissas ocorrerem para se deduzir a conclusão. Observe que na frase anterior, escrevemos: “*admite-se o fato de as premissas ocorrerem*”, o que é diferente de afirmar que: “*as premissas são verdadeiras*”!

Essa idéia ocorre até mesmo no dia-a-dia. Vejamos: uma pessoa afirma

“*Se eu ganhar dinheiro suficiente, vou comprar o carro dos meus sonhos*”.

Se a pessoa cumprir, de fato, o que diz, a sentença acima é válida, independentemente de ser verdadeiro o fato dela ter ganhado dinheiro.

Vamos a exemplos na Matemática. Provamos na Subseção 2.4.3 que a sentença

$$\text{‘Se } 1 = 0, \text{ então } 3 = 2’$$

é válida, mesmo não sendo a premissa ‘ $1 = 0$ ’ verdadeira. Neste caso, admitimos, como suposição, que ‘ $1 = 0$ ’ ocorresse e daí concluimos a sentença ‘ $3 = 2$ ’. O mesmo acontece com a sentença condicional ‘*Se $1 = 0$, então $1 = 1$* ’.

Mais uma vez, sentenças condicionais são válidas quando, ao admitir-se o fato de que as premissas ocorrem, se puder deduzir que a conclusão também ocorre. Note o termo: *admitir*. Não estamos dizendo que as premissas *devam* ser verdadeiras. Veja os exemplos do Exercício 3, da Subseção 2.4.3

Em resumo, sentenças condicionais podem ser válidas, independentemente dos valores lógicos das premissas!

EXERCÍCIOS:

- Dê exemplos de sentenças condicionais válidas que tenham premissas falsas.

2.5 Duas notações que se costumam confundir

Temos percebido que algumas pessoas confundem facilmente o símbolo de *implica* ‘ \Rightarrow ’ com o de *igualdade* ‘ $=$ ’. Vimos na Subseção 2.4.4 como utilizar o símbolo de implicação, vamos agora discorrer sobre a igualdade.

Primeiramente, uma coisa só é igual a ela mesma, esse é um dos princípios lógicos básicos que estamos assumindo.

Para quaisquer objetos a , b e c , *admitiremos* três propriedades importantes que a igualdade satisfaz:

- $a = a$ (*Propriedade reflexiva*);
- Se $a = b$, então $b = a$ (*Propriedade simétrica*);
- Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ (*Propriedade transitiva*).

Ressaltamos que essas mesmas propriedades podem valer para outras relações diferentes da igualdade (Exercício 2, desta seção).

Vejamos como essa noção é repassada à Matemática. Só por curiosidade, a idéia de igualdade nos permite dar uma definição muito interessante do conjunto vazio:

$$\emptyset = \{x; x \neq x\}.$$

Você, com certeza, já deve ter visto vários casos de objetos matemáticos aparentemente diferentes, mas que na realidade são iguais. Por exemplo, quanto você acha que vale a expressão abaixo?

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

Apesar de seu aspecto estético parecer um pouco complicado, ela vale simplesmente 2. Você poderá provar esse resultado no Exercício 3, mais adiante.

Por via das dúvidas, dê uma olhada com cuidado nos seguintes conjuntos:

- Números reais que são abscissa e ordenada da interseção das retas de equações $\frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 2$ e $y = 5 - x$;
- $\{2, 3\}$;
- $\{x \in \mathbb{R}; x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Mesmo escritos de formas diferentes, você pode checar que os três conjuntos acima são os mesmos (lembre-se de que, para verificar se dois conjuntos A e B são iguais, basta checar que $A \subset B$ e $B \subset A$). A maneira de apresentá-los apenas varia diante do contexto no qual se está trabalhando.

EXERCÍCIOS:

1. Escreva uma representação do conjunto vazio diferente da que demos. Use a criatividade, solte a imaginação!
2. A inclusão ‘ \subset ’ de conjuntos goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva? Por quê? E a implicação ‘ \Rightarrow ’ de sentenças, goza de quais dessas propriedades? Fazemos a mesma pergunta para a relação de ordem ‘ \geq ’ de números reais. Justifique suas respostas.
3. Verifique que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.
Dica: $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ e $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$. Em seguida, use a definição de **módulo** ou **valor absoluto** de um número x real:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4. Corrija as seguintes resoluções dos exercícios abaixo, explicando o porquê de cada correção que fizer. Essas resoluções foram colhidas entre as respostas das provas de alguns alunos recém-ingressos na universidade. Alertamos que, apesar das respostas encontradas serem corretas, as resoluções estão erradas, já que a Linguagem Matemática não foi utilizada corretamente!

- (a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{7-3}{21} \Rightarrow \frac{4}{21}$
- (b) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \Rightarrow x+2$
- (c) $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \rightarrow \frac{7-3}{21} \Rightarrow \frac{4}{21}$
- (d) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow x+2$
- (e) $\frac{2}{5} + \left(\frac{-8}{9}\right) \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{8}{9} = \frac{18 - 40}{45} = -\frac{22}{45}$

5. TEMA PARA DISCUSSÃO

Com relação a triângulos, ângulos e segmentos de reta, discuta a diferença dos termos *igual* e *congruente*. Muitos confundem essas terminologias. Por que é necessário fazer essa diferença?

CAPÍTULO 3

Definição, modelo axiomático e convenção

“A verdade sobre o fato é que, embora a verdade matemática possa ser bela, ela só pode ser vislumbrada após se pensar bastante. A Matemática é difícil para que muitas mentes humanas a compreendam por causa de sua estrutura hierárquica: uma coisa é construída sobre outra que depende da primeira.”

M. Holt & D. T. E. Marjoram, *in Mathematics in a Changing World*,
Walker, New York, 1973

“Como definir o que só sei sentir?”

Catulo da Paixão Cearense (1863-1946), na canção ‘*Ontem, ao luar*’.

3.1 O que é uma definição matemática?

Saber definir e manipular corretamente as definições é uma habilidade essencial para quem estuda Matemática. Nos capítulos anteriores já apresentamos algumas definições. Como você pôde observar, **definir** é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam. Esses nomes devem se constituir de uma única palavra, como “*triângulo*”, ou de uma frase curta, como “*números primos entre si*”.

As definições são importantes, pois evitam repetições longas e desnecessárias e, juntamente com as notações, são mais um aliado na ajuda da economia da linguagem. Com as definições é que nasce a terminologia apropriada para ser usada ao construir uma teoria matemática.

Veja as definições:

Definição 1: Dados três pontos não colineares, chamamos ***triângulo*** à união dos três segmentos de reta que ligam esses pontos e os têm como extremidades. (Nesta definição estamos dando um nome a um objeto matemático: *triângulo*)

Definição 2: Chamamos ***operação de união*** a operação que a cada dois conjuntos A e B associa o conjunto $A \cup B$. (Aqui estamos definindo uma operação com objetos matemáticos; neste caso, a *operação de união de conjuntos*)

Definição 3: Um triângulo é dito ***isósceles*** quando tem dois dos seus lados congruentes. (Estamos classificando certos triângulos que possuem a propriedade de terem dois de seus lados congruentes)

Uma boa definição é clara, sucinta, na medida do possível, classifica e distingue plenamente o objeto definido, e nela não aparecem termos inadequados ao contexto.

Devemos observar que, em toda definição, o nome do objeto definido está diretamente associado às propriedades que o caracterizam, e essas propriedades, por sua vez, identificam plenamente esse objeto, de modo que ele não possa ser confundido. Por exemplo, de acordo com a Definição 3, *um triângulo é isósceles se possui dois lados congruentes*. Quando consideramos esta frase como uma definição, a recíproca deve ser também válida: se *um triângulo possui dois lados congruentes*, então ele é *isósceles*. Da mesma maneira, conforme a Definição 1, se um objeto matemático é *a união de três segmentos de retas que ligam três pontos não colineares e que os têm como extremos*, então esse objeto é um triângulo; e reciprocamente, se chamarmos um objeto de “*triângulo*”, então ele tem de ser *a união de três segmentos de retas que ligam três pontos não colineares e os têm como extremos*. A conjunção “*se*”, explícita ou não *numa definição*, deve sempre ser entendida da maneira que acabamos de explicar, como: “*se, e somente se*”.

CONVÉM OBSERVAR OS SEGUINTESS FATOS:

1. Só deve-se definir um objeto se for estritamente necessário.
2. Quem escreve um texto matemático deve tomar cuidado para não sair inventando terminologias que, muitas vezes, só complicam o entendimento.
Deve-se também preservar as definições e terminologias já consagradas.
3. Veremos na próxima seção que definições não são afirmações que precisam ser demonstradas, como no caso dos teoremas. Atente para o fato de que ninguém prova definições!!!
4. Outro fato que convém ressaltar: não é recomendável - de jeito algum! - usar as palavras “*daí*”, “*então*” ou “*portanto*”, ao redigir uma definição. Estas palavras devem ser reservadas para serem usadas em sentenças nas quais haja alguma dedução matemática, como no caso dos teoremas. Observe que não há dedução matemática alguma em uma definição.
5. Ao estabelecer uma definição, tome cuidado com os *círculos viciosos*: definir um objeto *A* usando um outro objeto *B* e, para definir *B*, usar o objeto *A*. Damos um exemplo desse caso no Exercício 3-(c), desta seção.

EXERCÍCIOS:

1. Defina os seguintes elementos de um triângulo (você pode consultar outros livros):
 - (a) lado;
 - (b) vértice;
 - (c) ângulos internos;
 - (d) altura;
 - (e) mediana.
2. Como definir *ângulo reto* sem ser necessário falar em qualquer tipo de medida de ângulo?
3. (a) Intuitivamente, é natural aceitar que uma reta é um conjunto de pontos. Mas é preciso conceber com cuidado esta idéia.
Levando em consideração o que afirmamos antes da observação do final desta seção, analise criticamente a seguinte “definição”:
“DEFINIÇÃO”: “*Uma reta é um conjunto de pontos*”.

(b) CASO VERÍDICO:

Em um livro para o Ensino Médio, o autor redigiu a seguinte “definição”:

“DEFINIÇÃO”: “Chamamos de intervalo a determinados conjuntos de números reais”.

Analise e critique vigorosamente esta “definição”.

(c) Critique a seguinte “definição”, na qual se pretende definir ângulo reto.

“DEFINIÇÃO”: “Um ângulo reto é um ângulo que mede 90 graus. Definimos 1 grau como sendo $1/90$ da medida de um ângulo reto”.

4. Vejamos como surge uma definição.

a) PRIMEIRO PASSO: nesse estágio da construção de uma definição, parte-se das noções do objeto a ser definido, para uma concepção mais elaborada desse objeto. Deve-se levar em conta, principalmente, a descoberta das principais propriedades que o caracterizam. Essa é a fase de conceituação, quando se pode usar exemplos particulares para descobrir essas propriedades. Suponhamos que se queira definir objetos que tenham quatro lados, da forma em que se vê no desenho abaixo:

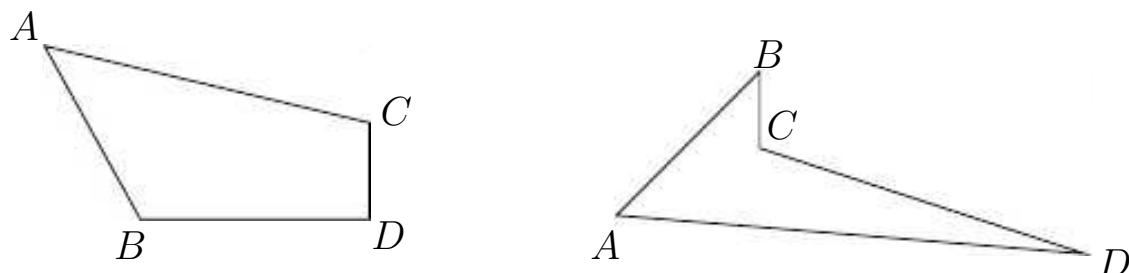


Figura 3.1: Figuras relativas ao Exercício 4-(a).

De que maneira podemos fazer isso?

b) SEGUNDO PASSO: a formalização da definição, usando as propriedades que foram concebidas na conceituação do objeto. Neste estágio, é necessário usar o formalismo e a terminologia adequada. Essa é a fase da redação do que foi conceituado, é o momento de redigir a definição, que deve ter um caráter geral.

Considere num plano, quatro pontos A , B , C , e D , de sorte que:

- i) três deles não sejam colineares;
- ii) quaisquer dois pares de segmentos, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} não possuam pontos em comum, além dos extremos.

Chamamos **quadrilátero** ao conjunto formado pela união desses quatro segmentos.

Cada um dos segmentos chama-se **lado do quadrilátero**, e cada um dos pontos A , B , C , e D chama-se **vértice do quadrilátero**.

- (a) As palavras empregadas na definição para nomear o objeto que aparece no Primeiro Passo foram apropriadas? Comente.
- (b) Formulada a definição anterior, defina, agora, os seguintes elementos de um quadrilátero:
 - i. Ângulos internos;
 - ii. Lados opostos;
 - iii. Diagonal.
- (c) Defina **paralelogramo**. (Aqui, é necessário usar a palavra “*paralelo*”).

c) *EM TODO O PROCESSO DE FORMULAÇÃO DA DEFINIÇÃO: o cuidado para que as propriedades listadas na definição caracterizem, de fato, o objeto.*

Na definição de quadrilátero, quais as condições que, se fossem relaxadas, nos levariam admitir os seguintes objetos como quadriláteros?

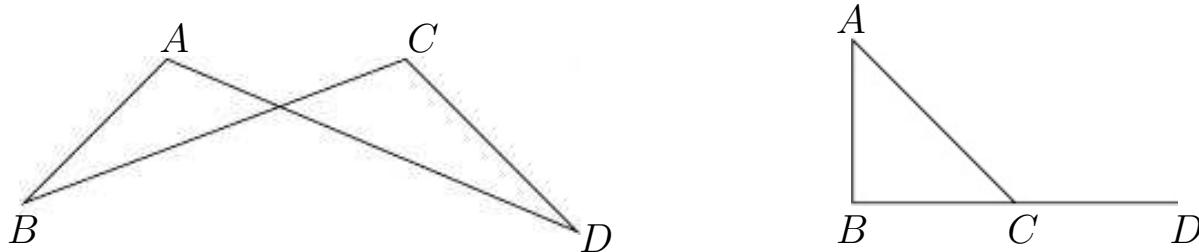


Figura 3.2: Figuras relativas ao Exercício 4-(c).

5. CASO VERÍDICO:

Faça uma análise crítica das seguintes frases, ou trechos de frases que seguem abaixo. Observe que, em cada uma delas, ou definições ou terminologias matemáticas foram usadas incorretamente: ou não foi corretamente expresso o que se gostaria de comunicar, ou há alguma incoerência lógica na construção da frase. A maioria das frases, matematicamente erradas, são reais e foram extraídas de resoluções de provas da disciplina Geometria Analítica. Elas são exemplos de como deve-se tomar cuidado ao expressar as idéias e utilizar adequadamente termos e conceitos matemáticos.

- (a) “*Com certeza, o vértice dessa parábola P_1 é menor do que o vértice da parábola P_2 .*”
- (b) “*O eixo focal encontra-se nos pontos F_1 e F_2 .*”
- (c) “*... a parábola está sobre o eixo Oy .*”
- (d) “*As extremidades da circunferência.*”
- (e) “*O centro do plano.*”
- (f) “*A equação representa uma parábola paralela ao eixo Ox .*”
- (g) “*A cônica em questão é uma parábola com vértice paralelo ao eixo x .*”

6. CASO VERÍDICO (MAIS CRÍTICO):

Neste exercício, proceda da mesma maneira que no anterior. A diferença, o que é mais crítico, é que agora a maioria das frases foram tiradas de livros publicados no país e adotados em escolas do Ensino Fundamental ou Médio. Faça uma análise crítica das frases abaixo.

(Algumas das frases apareceram na RPM - Revista do Professor de Matemática-, a partir do número 40, na Seção *Pisando na Bola*.)

- (a) “*Uma tangente e uma secante se interceptam num ponto P externo à circunferência. A tangente e a secante medem, respectivamente, 6 e 8 cm. Determine a medida da parte externa da circunferência.*”
 - (b) “*Assinale a única afirmação falsa:*
a)....
b)....
c) *três pontos distintos são sempre coplanares.*”
- Resposta (dada no livro): a letra c) é falsa. Confira o desenho a seguir:*

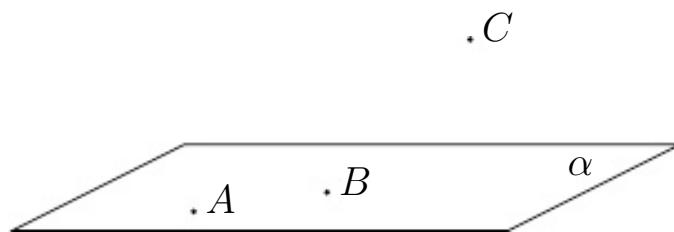


Figura 3.3: Figura relativa ao Exercício 6-(b).

- (c) “Prolongando o raio até a outra extremidade da circunferência,... temos o diâmetro”.
- (d) “Reta tangente: reta que toca uma linha em um único ponto. Isto é, elas têm apenas um ponto em comum.”
- (e) “Um ponto não pode ser medido. Mas quando você tem infinita fila de sucessivos pontos, todos se tocando entre si, eles formam algo que pode ser visto e medido. Formam uma reta. É assim que os matemáticos vêem uma reta, como uma fileira de pontos”.
- (f) “Traçando uma reta e fazendo dois pontos sobre ela, verifica-se que podemos sempre colocar um ponto entre os dois e, repetindo o processo, sucessivamente, completamos com pontos a reta toda”.
- (g) “O centro $C(x, y)$ da mediatrix de AB é...”.
- (h) “Como $r^2 = -1$ não pertence ao conjunto dos reais,...”.

7. CASO VERÍDICO:

Adicionado aos exemplos anteriores, ainda temos declarações de algumas pessoas famosas que utilizam inapropriadamente certos termos matemáticos. Esses fatos deixam a Matemática em evidência, mas, por outro lado, têm seu lado negativo, já que não é possível descobrir o que essas pessoas querem expressar. Será que há como entender as frases abaixo?

- (a) “Minha vida deu uma guinada de 360 graus.”
(Famosa modelo na Revista Veja, de 11/10/98)
 - (b) “Minha vida teve uma mudança de 360 graus.”
(Uma entrevista no Jornal O Estado de São Paulo, de 24/10/98)
8. Em alguns casos, a literatura não é unânime ao estabelecer e usar determinadas definições e terminologias, de modo que certos livros definem determinados objetos de uma maneira, e outros, de maneira diferente. Mais adiante, daremos alguns exemplos desses casos.

Mas o que fazer quando isso ocorre? Primeiramente, recomendamos adotar a definição dos textos cujos autores têm reputação comprovada perante a comunidade ou aquelas que já são consagradas e coerentes. Em segundo lugar, antes de trabalhar com esses objetos, estabeleça, logo a princípio, qual a definição que você irá adotar e use somente ela.

Faça uma pesquisa bibliográfica e encontre livros em que as seguintes definições variam de um para o outro:

- (a) Círculo e circunferência;
- (b) Comprimento de arcos;
- (c) Ângulo e região angular;
- (d) Poliedros.

(Esta última definição é delicada! Deve-se ter cuidado ao redigí-la, já que não é incomum encontrar-se definições erradas de poliedro.)

9. CASO VERÍDICO:

Em um livro para o Ensino Médio, escrevem-se as seguintes “definições” de potência inteiros de números reais:

“Se $a \neq 0$ é um número real não-nulo e n é um número inteiro positivo, definimos $a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ vezes}}.$ Valem as seguintes propriedades $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$ ”

e é acrescentado:

“Da definição, podemos concluir que $1 = \frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$, ou seja, $2^0 = 1$. O mesmo raciocínio nos permite deduzir que $a^0 = 1, \forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.”

Após esta dedução, os autores definem potências negativas de números reais.

Diante da definição e das propriedades de potências de números reais apresentadas, a dedução acima está correta? Se não, onde está o erro?

10. TEMA PARA DISCUSSÃO:

Uma definição matemática pode depender de um desenho?

11. TEMA PARA DISCUSSÃO:

Detectamos que em alguns livros, mesmo definindo corretamente *porcentagem*, se escrevem, por exemplo, informações do tipo:

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Analise e critique o fato.

3.2 O que é um Modelo Axiomático?

Observe a Definição 3 no começo da seção anterior. É claro que, para definir o que seja um *triângulo isósceles*, precisamos saber – e portanto, torna-se necessário definir previamente – o que seja um “*triângulo*”, os “*lados de um triângulo*” e o que entendemos por “*lados congruentes*”. Nesse intuito, podemos recorrer à Definição 1, na qual foi definido *triângulo* e onde usou-se mais três outros novos conceitos: a operação de “*união de conjuntos*”, de “*pontos não colineares*” e de “*segmentos de reta*”. Na Definição 2, definimos a *união de conjuntos*; mas, para que todos os objetos matemáticos utilizados, direta ou indiretamente, na Definição 3 fiquem definidos, restam ainda: “*lados de um triângulo*”, “*segmentos de reta*”, “*segmentos congruentes*” e “*pontos não colineares*”. Note que a definição de cada um desses últimos objetos depende da noção de *ponto*, *reta* e *plano*.

Ora, caso numa definição se comece a proceder dessa maneira, definindo todos os elementos que estão sendo usados, os quais, por sua vez, dependem de outras definições e se vá seguindo uma espécie de “seqüência descendente” de definições, podem ocorrer dois fatos: ou chega-se a um círculo vicioso, usando uma definição para definir uma outra e vice-versa (como no caso dos dicionários lingüísticos), ou não se pára nunca.

Entretanto, é possível fugir dessas armadilhas parando na definição de um objeto matemático mais simples, cujo conceito se aceite naturalmente, sem explicações, e que seja evidente por si mesmo. Por exemplo: se procedermos dessa maneira com as definições da Geometria Plana, chega-se, inexoravelmente, aos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano*, os quais todos temos noção do que sejam. Nesse momento, não definimos mais estes objetos e os aceitamos como *noções primitivas*.

Chamam-se **noções primitivas** aos conceitos adotados sem que seja preciso defini-los. As noções primitivas não surgem de opiniões pessoais isoladas, elas são frutos da experiência, da observação e de um certo “consenso coletivo”. Por esses motivos, às vezes, também chamam-se **noções comuns**. Como exemplo, no caso da Geometria Plana, *ponto*, *reta* e *plano* são consideradas *noções primitivas* e, dessa forma, não precisam ser definidos.

Com certas afirmações matemáticas que devem ser demonstradas (teoremas) pode ocorrer fato semelhante. Se quisermos provar um determinado resultado matemático, muitas vezes precisamos usar outros resultados, os quais, por sua vez, também devem ser provados, e assim por diante, como numa “seqüência descendente”. Aqui também podemos nos deparar com duas alternativas: ou chega-se a um círculo vicioso, quando é preciso usar um resultado para provar o outro e vice-versa, ou não se pára nunca. Para evitar esses inconvenientes, paramos em certas afirmações mais simples, que sejam evidentes por si mesmas e que possam ser aceitas sem que se precise prová-las. Essas afirmações são hoje, indistintamente, chamadas de axiomas ou postulados. Um **axioma** ou **postulado** é uma sentença matemática que não é uma definição, e é aceita sem precisar ser justificada.

No caso da Geometria Plana, já na Antiga Grécia, os cinco primeiros postulados adotados eram os seguintes:

1. Pode-se **traçar** uma única reta **passando** por quaisquer dois pontos;
2. Para cada **segmento** \overline{AB} e para cada segmento \overline{CD} , existe um único ponto E tal que B **está no segmento** \overline{AE} e o **segmento** \overline{CD} é **congruente ao segmento** \overline{BE} (ou escrito apenas com palavras: *pode-se continuar uma semi-reta indefinidamente*);
3. Pode-se **descrever** uma **circunferência** com qualquer **centro** e qualquer **raio**;
4. Todos os **ângulos retos** são congruentes.
5. Por um ponto fora de uma reta pode-se **traçar** uma única **reta paralela** à reta dada.

Note que, se quisermos ser rigorosos, antes de enunciar e utilizar esses axiomas, seria necessário definir ou dar um significado mais preciso às palavras em negrito. Não é esse nosso objetivo, mas cabe-nos neste ponto tecer esta observação. Para mais detalhes, vide [Barbosa, 2004] ou [Greenberg, 1993].

Para os antigos filósofos gregos, axiomas eram verdades gerais comuns a outras áreas de estudo. Exemplo: *Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si*. Já os postulados eram afirmações sobre um assunto específico estudado. Exemplo: *Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos dados*. Hoje a distinção já não é mais considerada ([Barbosa, 2004], p. 88).

Para desenvolver uma certa teoria matemática, que se constitui de definições e afirmações dedutivas, é preciso estabelecer os axiomas, as noções primitivas e as regras que podemos usar para manipular e deduzir (provar) essas afirmações. Essas regras são chamadas **regras de inferência**. Em nosso texto, já adotamos duas regras de inferência básicas que comporão os modelos axiomáticos que trabalharemos: a *generalização* e a *modus ponens* (vide Subseção 2.4.3). Só para relembrar, a *generalização* afirma que se algo vale para todos os elementos de um conjunto, então vale para cada elemento desse conjunto; já a *modus ponens* estabelece que se as sentenças ‘*Se P, então Q*’ e *P* ocorrem, então, necessariamente, a sentença *Q* também ocorre. Outras regras de inferência decorrem dessas duas regras básicas, mas estas serão suficientes para nossos propósitos.

Chama-se **modelo axiomático** a um conjunto constituído de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência. Ao montar um modelo axiomático, deve-se tomar cuidado para que o número de axiomas seja o menor possível, e que eles sejam independentes, isto é, nenhum deles possa ser deduzido dos demais.

Um modelo axiomático é dito **consistente**, se nele não for possível deduzir afirmações contraditórias. E é dito **inconsistente**, caso contrário.

Os modelos axiomáticos são utilizados para apresentar com eficácia certas teorias matemáticas. A princípio, uma das vantagens de empregá-los, além de fornecerem um tratamento fundamentado num rigor lógico, é que, em geral, não se exigem dos leitores conhecimentos extras ou qualquer experiência matemática anterior naquele assunto.

RESUMO: Um modelo axiomático é um conjunto finito de axiomas, de noções primitivas e de determinadas regras de inferência, usadas para deduzir certas afirmações (que são os teoremas) e definir objetos.

A Matemática desenvolvida pelas civilizações anteriores à grega (babilônica e egípcia, principalmente) resolia apenas problemas particulares, fornecendo certas “receitas”: “faça isso”, “faça aquilo”, etc., para solucionar cada problema. Não havia métodos ou modelos gerais para atacar os problemas, o que de alguma forma depende de um certo rigor e de um método lógico-dedutivo que só surgiria posteriormente com os gregos.

Acredita-se que com o matemático grego **Tales**¹, iniciou-se a preocupação de introduzir o formalismo na Matemática, fundamentado no raciocínio lógico-dedutivo.

No entanto, o primeiro e o mais famoso modelo axiomático que se conheceu foi o da Geometria Plana, mencionado anteriormente. Esse modelo foi estabelecido pelo matemático grego **Euclides**,² por volta do Século *III* a.C., em seu famoso tratado **Os Elementos**. Euclides começa definindo algumas noções comuns, alguns postulados (os que já apresentamos) e, a partir destes, deduz os principais resultados da Geometria e Teoria dos Números então conhecidos. Ainda hoje, em nossas escolas, quando devidamente ensinada, aprende-se Geometria Plana baseada em modelos axiomáticos.

No final do Século XIX e começo do Século XX, houve uma preocupação muito grande em tornar as idéias e os procedimentos matemáticos mais rigorosos. Foi quando grande parte da Lógica-Matemática que hoje conhecemos começou a ser desenvolvida. Com essa finalidade, o modelo axiomático ressurgiu com toda força, sendo aplicado a outras áreas além da Geometria.

Diferentemente do que às vezes pode-se imaginar durante o Ensino Médio, há vários outros exemplos conhecidos, além da Geometria Plana, que também podem ser formulados usando-se modelos axiomáticos. Citamos o caso da *construção dos números naturais* e das *operações com números reais*.

¹ A tradição considera **Tales de Mileto** (625-546 a.C.) como o primeiro investigador da natureza. Pelos critérios atuais, isso também significa que ele foi o primeiro matemático e filósofo ocidental, no sentido de que abstraiu as idéias de uma Matemática puramente aplicativa, dando-lhe um tratamento lógico e transformando-a numa disciplina intelectualmente independente da aplicação. Este fato, que não havia ocorrido em outras culturas, se consolidaria com os pitagóricos e com o posterior desenvolvimento da matemática grega.

Pelo tratamento dedutivo dado à Geometria por Tales, credita-se a ele a primeira demonstração formal que foi feita na Matemática.

² **Euclides** (c.300-260 a.C.): geômetra grego e autor d' **Os Elementos**, um conjunto de 13 livros (hoje seriam como 13 capítulos) que, até o século *XIX*, era um dos livros mais famosos que compunham a formação de quem pretendia ter uma cultura geral de boa qualidade. A obra reunia a maior parte da Matemática até então conhecida no Mundo Ocidental Antigo. Ao longo dos séculos, parece que depois da Bíblia chegou a ser o livro que mais tinha sido editado. **Os Elementos** não versam apenas sobre Geometria (Plana e Espacial), mas também sobre Aritmética e pelo que hoje conhecemos como Teoria dos Números. A obra destacou-se por seu ineditismo ao tratar a Matemática por meio de um *modelo axiomático*, utilizando postulados e demonstrações lógico-dedutivas. Com esse estilo, Euclides fundou o método axiomático, que influenciou definitivamente o paradigma da certeza racional e o modo de fazer Ciência. Após 23 séculos, sua maneira de tratar a Geometria ainda é ensinada nas escolas de todo o mundo.

Pouco ficou registrado sobre a vida de Euclides, mas sabe-se que ele também escreveu outras obras sobre Matemática, Astronomia, Óptica e Música.

Quem quiser referências sobre as traduções de *Os Elementos* para o Inglês e o Português, pode consultar os comentários feitos por João Pitombeira Carvalho, tradutor de [Aaboe, 1984], às páginas 90-93 da citada referência.



Figura 3.4: Edição grega dos Elementos do Século IX (Museu do Vaticano), na qual vê-se uma demonstração do Teorema de Pitágoras que tornou-se célebre.

No processo de aprendizagem, sabemos que a Geometria Euclidiana é, por excelência, onde o modelo axiomático é (geralmente) utilizado pela primeira vez. Como muitos de nossos leitores já devem ter passado – ou irão passar – por essa experiência, e por concisão do texto, optamos por exibir modelos axiomáticos fora da Geometria Euclidiana.

3.2.1 Axiomatização da adição de números reais

Definiremos a operação de soma de números reais por meio de axiomas e, depois, deduziremos as principais propriedades dessa operação. Os axiomas que apresentaremos fazem parte de um conjunto maior de axiomas que são usados para estabelecer toda a estrutura algébrica dos números reais. Completaremos este estudo no Capítulo 6, quando apresentaremos formalmente as *demonstrações*, e provaremos as principais propriedades de adição e multiplicação de números reais.

AXIOMAS DE ADIÇÃO DE NÚMEROS REAIS

Para cada par de números reais x e y , associamos um número real $x + y$, chamado *soma de x com y* . A operação que leva cada par (x, y) no número $x + y$ chama-se *adição* e satisfaz às seguintes propriedades:

S1) Associatividade da adição:

Para todos x, y e $z \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

S2) Existência do elemento neutro da adição:

Existe um número real $\xi \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as igualdades

$$x + \xi = \xi + x = x.$$

(Posteriormente usaremos o símbolo 0 para denotar ξ . Não refute essa notação do elemento neutro, ela serve como treinamento para algumas idéias abstratas que um estudante ou professor de Matemática deve ter).

S3) Existência do elemento inverso ou elemento simétrico da adição:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que

$$x + y = y + x = \xi.$$

(Posteriormente, o símbolo $-x$ denotará o elemento y . Aqui vale o mesmo comentário do item anterior).

S4) Comutatividade da adição:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x + y = y + x.$$

1. Pare um pouco, observe e confronte o uso dos quantificadores universal e existencial em (S2) e (S3).
2. Oportunamente, também observe que as letras x e y , que representam números reais, têm funções diferentes em (S3), daquelas que desempenham nos demais axiomas.
3. É possível que exista mais de um modelo axiomático para apresentar determinada teoria matemática. Quando isso ocorre, o que é formulado como um axioma num modelo pode tornar-se um teorema noutro, e vice-versa. Tudo depende de uma possível opção de quem apresenta a teoria.

EXERCÍCIOS:

1. Responda às perguntas a seguir, justificando cada resposta.
 - (a) Axiomas são sentenças?
 - (b) Axiomas possuem valor lógico?
2. Vamos agora definir, conjuntamente, também por meio de axiomas, a operação de multiplicação de números reais e suas propriedades básicas.

Os leitores estão agora convidados a preencher o texto a seguir, utilizando passos análogos aos que foram dados nesta seção, quando definimos a operação de adição de números reais.

AXIOMATIZAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS:

Para cada par de números reais , associaremos um número real $x.y$, chamado de x por y . A operação que leva cada par (x, y) em é chamada **multiplicação**, e satisfaz às seguintes propriedades:

P1) da multiplicação

Para todos e $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\underline{\hspace{2cm}} = x.(y.z).$$

P2) Existência do _____ da multiplicação

Existe um número real $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \xi$, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ valem as igualdades

$$\underline{\quad} = \underline{\quad} = x.$$

(Posteriormente, usaremos o símbolo 1 para denotar θ .)

P3) Existência do elemento inverso _____)

_____ $x \neq \xi$, existe um $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x.y = \underline{\quad} = \underline{\quad}.$$

(Posteriormente, usaremos a notação x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ para denotar y .)

P4) (_____ do _____)

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, _____

$$x.y = \underline{\quad}.$$

3. Defina os objetos abaixo e, em cada definição, identifique os conceitos usados que são previamente necessários; dentre estes conceitos, identifique os conceitos primitivos:

- (a) Segmento (de reta) e extremos de um segmento;
- (b) Planos perpendiculares;
- (c) Paralelepípedo;
- (d) Números primos;
- (e) Números compostos.

4. Usando os quatro axiomas de Euclides que apresentamos nesta seção, esboce uma justificativa para a afirmação de que *toda reta contém pelo menos um ponto*.

5. Pense nisso:

- (a) Qual sua concepção pessoal de *ponto*, *reta* e *plano*? Não estamos pedindo uma definição! Talvez este simples exercício lhe convença de que, às vezes, mesmo certos conceitos básicos que usamos diariamente podem não ser tão simples de serem formulados. Esta é mais uma indicação de que é pertinente considerar estes entes matemáticos como *noções primitivas*.
- (b) Responda convincentemente: considerando os quatro postulados da Geometria Plana dados por Euclides, alguém poderia conceber uma reta como um arco de circunferência?

6. Ainda sobre a concepção de objetos admitidos como noções primitivas e a compatibilidade dessa concepção com os axiomas adotados:

Quais, dentre os axiomas de Euclides, continuariam válidos, caso admitíssemos as seguintes noções (nada convencionais!) de pontos e retas:

- (a) Pontos: vértices de triângulos;
Retas: lados de triângulos.
- (b) Pontos: pontos sobre esferas ocas;
Retas: círculos máximos sobre esferas.

7. Faça uma pesquisa em livros de Geometria Plana e, em cada um deles, analise qual o conjunto de axiomas que adotam. Há diferença entre os axiomas adotados?
8. **Nossa Constituição Federal e os modelos axiomáticos.**

Nossa constituição, com todas as leis e artigos pode ser encarada como um modelo axiomático. De fato, há várias definições nos artigos da Constituição, e as leis podem ser vistas como axiomas. Perceba que o trabalho de advogados e juristas é inferir logicamente suas conclusões, a partir dessas definições e leis.

O Artigo 10 da nossa Constituição, na parte dos Princípios Fundamentais, reza que:

A República Federativa do Brasil, formada pela união indissolúvel dos Estados e Municípios e do Distrito Federal, constitui-se em Estado Democrático de Direito e tem como fundamentos: I – a soberania; II – a cidadania; III – a dignidade da pessoa humana; IV – os valores sociais do trabalho e da livre iniciativa; V – o pluralismo político.

No parágrafo acima, identifique uma definição e o que poderíamos encarar como um axioma.

3.2.2 *Curiosidade: o modelo axiomático em outras áreas

O modelo axiomático também foi usado por Newton para escrever sua obra magna, **O Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**³, onde apresenta as idéias da “sua Física”.

Outro fato que merece registro é que um modelo axiomático também foi usado pelo filósofo holandês **Baruch de Espinosa** (ou Spinoza) (1632-1677) em seu livro **Ética Demonstrada à Maneira dos Geômetras**. Entretanto, no caso de Espinosa, os teoremas que ele demonstrou e os axiomas que utilizou tratavam de Deus e das paixões humanas. A partir de conceitos primitivos e dos axiomas adotados, dentre os teoremas que Espinosa provou, estão, por exemplo, o que prova a existência de Deus e a

“PROPOSIÇÃO XLV: O ódio nunca pode ser bom”

(Vide [de Spinoza, 2002] p. 328).

3.3 Convenções matemáticas

Outra noção bastante usada em Matemática é a de *convenção*. **Convencionar** é estabelecer, dentro de um determinado contexto, certas normas que posteriormente serão usadas. Essas normas nascem de uma necessidade prática e devem ser aceitas e adotadas pela comunidade matemática.

As convenções também evitam que haja mau uso ou má interpretação futura de quaisquer objetos com os quais se trabalhe, e ainda pode estabelecer certos casos complementares de uma definição.

Por exemplo, a **raiz quadrada de um número real positivo** a é definida como sendo o **número real positivo** r tal que $a = r^2$. Usa-se \sqrt{a} para denotar essa raiz. Mas nessa definição, se r satisfizesse a equação anterior, então $-r$ também satisfaria a equação, já que $r^2 = (-r)^2$. Dessa forma, se não houvesse restrição ao sinal de r , então todo número positivo teria duas raízes, uma positiva e outra negativa e, ao falarmos sobre “raiz quadrada de um número”, a qual delas estaríamos nos referindo?

Já em outros casos, dependendo do uso que se irá fazer, pode-se convencionar que $\sqrt{a} = \pm r$. Para evitar ambigüidades, quando alguém for trabalhar com raízes, deve convencionar, logo de início, o que

³Há tradução em Português: **Principia - Princípios matemáticos de filosofia natural (livro 1)** Isaac Newton, tradução de Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sônia Terezinha Gehring e Maria Helena Curcio Célia, São Paulo, Edusp, 2002.



Figura 3.5: O cientista inglês Sir Isaac Newton (1642-1727), sobre quem A. Einstein (1879-1955) escreveu: “*Para ele a Natureza era um livro aberto, cujas letras podia ler sem esforço algum*”.

significa “raiz”. Dessa maneira não haverá ambigüidades. Para nós, neste livro, adotaremos a definição de raiz quadrada que demos anteriormente.

Um outro exemplo: o número 0 é ou não um número natural? Depende do que você previamente convencione! Se o importante é usar o conjunto dos números naturais para contar, então não faz sentido colocar o zero. Atente que ninguém começa a contar a partir do zero: “*zero, um, dois, três, etc*”. Caso o que se precise seja a existência de um elemento neutro da adição no conjunto dos números naturais, então se considera *zero* como um número natural. Tudo se resume a previamente estabelecer a definição dos objetos que irá usar.

Como último exemplo, define-se fatorial de um número natural n como $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$. Ora, esta definição não faz sentido para $n = 0$ mas, na prática, o fatorial $0!$ aparece. Por necessidade prática, convencionou-se que $0! = 1$, caso que não aparece na definição geral.

Há vários outros casos em que convenções desse tipo são necessárias e, o mais importante, imprescindíveis.

Ressaltamos novamente que, quando for utilizar qualquer definição, é prudente, logo de início, deixar todos os conceitos claramente explicados e entendidos e o que cada palavra utilizada na definição há de significar!

Um detalhe com os exageros: se considerarmos, ao “pé da letra”, a Definição 1 de triângulo, dada na Seção 3.1, então todo triângulo teria área nula, já que é apenas a reunião de segmentos de reta, os quais têm área zero. O fato é que, na maioria das vezes, também chama-se *triângulo* ao que a Definição 1 estabelece como triângulo, juntamente com a região interior que ele delimita. Alguns chamam *região triangular* a essa região. Às vezes, o mesmo também ocorre com a definição de *polígono*, resultando na chamada *região poligonal*.

A fim de simplificar a terminologia e evitar que se resultem em dúvidas ou ambigüidades, convém avisar ao leitor que se usará a palavra *triângulo* para também denominar a chamada *região triangular*; daí, se “relaxa” um pouco com o uso “rigoroso” dessas definições. Note como ficaria longa uma frase do tipo: “*Encontre a área triangular limitada pelo triângulo de lados medindo....*” Com certeza, é bem mais simples dizer “*Encontre a área do triângulo de lados medindo....*”.

Esses são exemplos de que, em *alguns momentos*, o excesso de rigor só atrapalha. Convém ficarmos atentos e sempre apelarmos para o bom-senso.

EXERCÍCIOS:

1. Responda às perguntas:

- (a) Notações são convenções?
- (b) Definições são convenções?

2. DEFINIÇÃO DE POTÊNCIAS INTEIRAS DE UM NÚMERO

(a) Dados um número real a e um número inteiro positivo n , define-se a *n -ésima potência de a* como o produto de n fatores iguais a a :

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$$

O próximo passo da definição é estendê-la para potências negativas a^{-n} de números reais $a \neq 0$, de modo que a propriedade $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ valha para potências quaisquer de números inteiros m e n . Dessa forma, como definir a^{-n} , a^0 e a^{n-m} ? Justifique cada uma de suas respostas.

(b) Dê uma razão para que se defina as seguintes potências racionais de um número (considere os casos quando a definição é possível):

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{e} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

3. Define-se o factorial de um número natural n não-nulo como o produto

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots2 \cdot 1$$

Note que essa definição não faz sentido para $n = 0$, mas se convencionou que $0! = 1$. Indique um motivo para se estabelecer a definição desse caso particular?

(Dica: qual a fórmula da combinação de n objetos?)

4. (a) Defina *raio* e *diâmetro* de um círculo.

(b) Às vezes, vê-se o seguinte uso:

“O raio desse círculo vale 2 cm.” “Considere o diâmetro do círculo como 5 m”.

Ora, nesse caso, se está chamando de *raio* e de *diâmetro* aos comprimentos desses segmentos. Esses usos correspondem às definições que você deu no item (a)? O que está ocorrendo?

(c) Muitas vezes, o Teorema de Pitágoras é enunciado como

“Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Analise essa forma de apresentar o teorema. Há algum abuso de linguagem? Qual? Comente.

5. Define-se *número primo* como um número inteiro $n \neq \pm 1$ tal que seus divisores sejam apenas ele mesmo e a unidade.

Você já perguntou por que excluir os números ± 1 nesta definição? Por que se convencionou que $n = \pm 1$ não são números primos?

Uma resposta é o seguinte teorema da Teoria dos Números, chamado Teorema da Fatoração Única ou

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA (T.F.A)⁴:

Se m é um número inteiro maior do que 1, então m pode ser decomposto na forma

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

onde p_1, p_2, \dots, p_k são números primos distintos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são inteiros positivos. Essa decomposição é única a menos da ordem dos fatores.

Note que o T.F.A. assegura que os números primos são como ‘átomos’ da Aritmética, pois todo número inteiro, cujo módulo é diferente de zero e da unidade, é um produto de potências de primos. Daí uma primeira importância dos números primos.

Passemos aos exercícios:

- (a) Caso $n = \pm 1$ fossem números primos, dê exemplos mostrando que não mais valeria a unicidade no teorema anterior (a unicidade é um fato muito importante quando da aplicação desse teorema).
- (b) Defina números compostos.
- (c) Os números $n = \pm 1$ são primos ou compostos?

⁴A demonstração desse teorema pode ser vista em [Collier, 2003].

CAPÍTULO 4

Desvendando os teoremas-Parte I

“*Não existem teoremas difíceis – apenas teoremas que não entendemos muito bem.*”

Nicholas P. Goodman

In The Mathematical Intelligencer, vol. 5, n.3, 1983

4.1 O que é um teorema? (Hipótese e tese)

Na escola, você já estudou vários teoremas e, apesar de não termos entrado em detalhes, eles já apareceram na seção anterior. Acreditamos que a palavra ‘teorema’ não seja estranha para qualquer pessoa que tenha formação básica em Matemática. Os nomes de certos teoremas chegam a ser de conhecimento do público em geral, como o de **Pitágoras**¹ e o de Tales.

A princípio, um **teorema** é uma sentença matemática condicional ‘Se P , então Q ’ ou implicativa ‘ $P \Rightarrow Q$ ’, cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, chama-se **hipótese** a sentença P e **tese** a sentença Q .

Como já dissemos, a partir do Capítulo 8 iremos nos dedicar totalmente às demonstrações e a alguns métodos especiais para provar resultados matemáticos. Por enquanto, nos concentraremos nos teoremas e nos elementos que os compõem.

Os exemplos que seguem são apresentados diretamente como teoremas, pois sabemos de antemão que são verdadeiros e podem ser demonstrados com o conhecimento dos Ensinos Fundamental e Médio. Os teoremas que apresentaremos estão na forma condicional, todavia, caso estivessem na forma implicantiva, as mesmas idéias que iremos expor continuariam valendo.

¹**Pitágoras de Samos** (Século VI a.C.), apontado como o ‘Pai da Matemática’, foi o fundador da Escola Pitagórica, escola filosófica que tinha os moldes e o rigor de uma “seita religiosa” e pregava que os números eram o princípio de todas as coisas. Para os **pitagóricos**, adeptos dessa filosofia, ‘números’ eram os números naturais. Eles criam que o universo, com suas leis e fenômenos, podia ser explicado pela relação entre os números e pelo simbolismo que lhes creditavam. O lema deles era: *Tudo é número*.

Nosso mundo moderno, cercado de números por todos as partes, chega-nos a dar a impressão de que os pitagóricos teriam, na verdade, predito o *mundo do futuro*.

Há registros de que no Egito e Babilônia (1000 anos antes de Pitágoras), bem como na Índia e na China (antes da era cristã) ([Stillwell, 1989], p.3) se conheciam casos particulares do Teorema de Pitágoras, mas foi na Escola Pitagórica, provavelmente com Pitágoras ou um de seus discípulos, que teria surgido a primeira demonstração do teorema que leva seu nome.

É importante registrar que, se Pitágoras foi um “místico”, dizem que Tales de Mileto foi um bem sucedido homem de negócios. Entretanto, não se conservou nenhum documento escrito sobre eles, o que torna suas biografias - às vezes, até mesmo a certeza de suas existências - um misto de lenda e realidade.

TEOREMA 1: *Se as diagonais de um retângulo se intersectam em ângulo reto, então o retângulo é um quadrado.*

Chamemos P a proposição (a condição) ‘as diagonais (do retângulo) se intersectam em ângulo reto’, e Q a proposição (a conclusão) ‘o retângulo é um quadrado’. Para que nosso primeiro exemplo seja considerado de fato como um teorema, é necessário provar que todo retângulo que goza da propriedade P , isto é, *todo retângulo cujas diagonais se intersectam em ângulo reto*, satisfaz a condição Q , ou seja, que *o retângulo é um quadrado*. A sentença ‘As diagonais (do retângulo) se intersectam em ângulo reto’ é a *hipótese*, e a sentença ‘O retângulo é um quadrado’ é a *tese* do Teorema 1.

Como veremos no Capítulo 6, numa demonstração é preciso utilizar a hipótese para, por meio de um processo lógico-dedutivo, obter a conclusão do teorema, que é sua tese.

RESUMO: Como uma primeira idéia, um teorema é uma sentença condicional

Se ‘hipótese’, então ‘tese’,

ou uma sentença implicativa

‘hipótese’ \Rightarrow ‘tese’,

da qual se possui uma demonstração que ela é válida.

É importante que você saiba sempre identificar a hipótese e a tese de cada teorema. Não é demais ressaltar que tanto a hipótese quanto a tese de um teorema podem ser constituídas por um número finito de sentenças. Quando a hipótese for formada por mais de uma sentença, chamaremos: ‘as hipóteses do teorema’. Já com a *tese*, mesmo que isso ocorra, continuamos usando a palavra no singular: ‘a tese do teorema’.



Figura 4.1: Antigo desenho representando Pitágoras (Século VI a.C.), um homem que mistificava a Matemática e cuja biografia está misturada com a lenda.

Às vezes, os teoremas podem ser apresentados sem que estejam numa forma implicativa ou numa forma condicional explícitas, como no exemplo que segue:

TEOREMA 2 (Versão 1): *Todo número inteiro múltiplo de 5 termina em 0 ou 5.*

Se quisermos apresentar este teorema na forma condicional, é preciso reescrevê-lo, por exemplo, como:

TEOREMA 2 (Versão 2): *Se um número inteiro é múltiplo de 5, então ele termina em 0 ou 5.*

Poderíamos ainda ter redigido o teorema na forma:

TEOREMA 2 (Versão 3): *Seja n um número inteiro. Se n é um múltiplo de 5, então n termina em 0 ou em 5.*

Escrito desta maneira, percebem-se as hipóteses e a tese do teorema mais claramente:

Hipóteses:

i) ‘ n é um número inteiro’

e

ii) ‘ n é múltiplo de 5’

Tese:

i) ‘ n termina em 0 ou 5’.

É sempre mais fácil identificar a hipótese e a tese de um teorema escrevendo-o na forma condicional ou implicativa. Em qualquer dessas formas: ‘Se P , então Q ’ ou ‘ $P \Rightarrow Q$ ’, segue-se que P é a hipótese (ou *as hipóteses*, se P for constituído por mais de uma sentença) e Q é a tese. Aconselhamos reescrever o teorema em qualquer dessas formas quando a hipótese ou a tese não estiverem claras.

Os leitores também devem perceber que, ao isolarem a hipótese ou a tese de um teorema, escrevendo-os como sentenças, estas podem ficar escritas de forma diferente daquelas em que originalmente aparecem no teorema. Confira as versões que apresentamos do Teorema 2.

Nosso último exemplo de um teorema que não está apresentado na forma condicional é particularmente interessante:

TEOREMA 3 (Versão 1): *O conjunto dos números primos é infinito.*

Escrito dessa maneira, o Teorema 3 apresenta-se constituído apenas por uma conclusão: “*O conjunto dos números primos é infinito*”. Qual é a hipótese?

Mesmo aparentando ser um pouco artificial, uma maneira de responder essa pergunta é:

TEOREMA 3 (Versão 2): *Se X é o conjunto dos números primos, então X é infinito.*

Agora podemos identificar:

Hipótese: ‘ X é o conjunto dos números primos’

Tese: ‘ X é infinito’.

Note, dos exemplos exibidos, que a maneira de redigir um teorema depende de uma opção pessoal. Entretanto, um teorema sempre deve ter um enunciado claro e preciso, no qual as hipóteses e a tese estejam claramente distinguidas.

EXERCÍCIOS:

1. Responda às perguntas:
 - (a) Hipóteses são premissas?
 - (b) Axiomas podem ser premissas?
 - (c) Numa dedução matemática, partindo-se de premissas falsas, qual o valor lógico da conclusão que se pode encontrar?
E partindo-se de premissas verdadeiras?
2. Comumente usamos as expressões “Teorema válido”, “Teorema verdadeiro”, “Teorema não-válido” e “Teorema falso”. Há, nessas expressões, *pleonasmo* e *abuso de linguagem*. Comente o fato.
3. “Se $1 = 0$, então $3 = 2$.” é um teorema? Justifique sua resposta.
4. Um teorema pode ser verdadeiro partindo-se de hipóteses falsas?
5. Dê exemplo de uma sentença condicional que não é um teorema e nem é uma definição.
6. Como fizemos com os Teoremas 2 e 3, desta seção, identifique a(s) hipótese(s) e a tese em cada um dos teoremas a seguir. Caso não ocorra, reescreva cada sentença em sua forma condicional.

Observação.: Tanto a(s) hipótese(s) como a tese devem ser apresentadas como uma sentença, conforme definimos na Seção 2.1.

- (a) Se a soma dos algarismos de um número é divisível por 9, então esse número é divisível por 9.
 - (b) Se uma matriz quadrada possui uma linha ou uma coluna de elementos nulos, então seu determinante é nulo.
 - (c) Três pontos num plano que não são colineares determinam um círculo.
 - (d) Por um ponto do espaço não pertencente a um plano, pode-se traçar um, e somente um plano, paralelo ao primeiro.
 - (e) O comprimento de um lado de um triângulo é menor do que a soma dos comprimentos dos outros lados.
 - (f) O volume de um prisma é igual ao produto da área de sua base pela altura.
 - (g) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
 - (h) Em qualquer triângulo, a medida de um lado é menor do que a soma e maior do que o valor absoluto da diferença das medidas dos outros dois lados.
 - (i) $n \in \mathbb{Z}, n = 5 \Rightarrow 2^{2^n} + 1$ não é primo.
 - (j) Por duas retas paralelas passa um só plano.
 - (k) Existe um triângulo retângulo.
 - (l) $\pi \notin \mathbb{Q}$.
7. Escolha cinco sentenças não-implicativas do exercício anterior e as reescreva em sua forma implicativa.

8. Faça uma pesquisa e encontre teoremas na forma:

- (a) Se ' P_1 ou P_2 ' então ' Q_1 ou Q_2 '. (Hipótese e tese disjuntivas)
- (b) Se ' P então Q_1 ' e Q_2 . (Tese conjuntiva)

9. Considere o seguinte teorema:

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS NÚMEROS PRIMOS²:

Se um número primo p divide o produto $m \cdot n$ de dois números inteiros, então p divide m ou p divide n .

- (a) Para ficar mais íntimo do teorema, dê alguns exemplos checando que ele “funciona”.
ATENÇÃO: este procedimento não comprova que o teorema é válido!!!
- (b) Dê contra-exemplos para verificar que, sem a hipótese ‘ p é primo’, o teorema não vale.
- (c) Usando o teorema esboce uma justificativa para os casos $k = 2$ e $k = 3$ do seguinte resultado:

Sejam m um número inteiro e $k \in \mathbb{N}$. Se um número primo p divide m^k , então p divide m .

(O caso geral, para um k qualquer, pode ser provado com a teoria do Capítulo 15.)

- (d) Se $p, q \in \mathbb{N}$, usando o resultado do item anterior, esboce uma justificativa por que uma igualdade do tipo $3^p = 10^q$ não pode ocorrer. Faça o mesmo, justificando que, se $4 \cdot q^3 = p^3$, então p e q são ambos múltiplos de 2.

10. CASO VERÍDICO:

Os exemplos abaixo, extraídos de livros do Ensino Médio, mostram, mais uma vez, como deve-se ter cuidado ao expressar as idéias na Matemática (principalmente os professores para os alunos). É preciso deixar claro se certas frases são definições ou se podem ser demonstradas.

- (a) Em um livro, sem maiores advertências, escreve-se a seguinte frase:

“Sendo a um número real não-nulo e n um número inteiro, temos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.”

E agora? Como um aluno poderá saber se o que o autor afirmou é uma definição ou um teorema? Dê sua opinião crítica sobre o fato.

- (b) Já em outro livro, afirma-se que:

“A área de uma superfície esférica de raio r é definida por $A = 4\pi r^2$ e o volume de uma esfera é, por definição, igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$ (Sic).”

Faça uma análise crítica dessa frase. Mas bem crítica mesmo!!!

²A demonstração desse resultado pode ser vista em [de Oliveira Santos, 2000], [Collier, 2003], mas agora não se preocupe com ela.



Figura 4.2: Antigo desenho representando Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.C.) que, há aproximadamente 2.300 anos, de maneira notável, calculou a área e o volume da esfera.

4.1.1 *Curiosidade: famosos e apaixonados por Matemática

A aparição do Teorema de Pitágoras remonta aproximadamente ao ano 500 a.C. Acreditamos que seja o teorema mais conhecido de domínio público. Talvez por esse motivo, possui várias demonstrações e, por sinal, figura no Guiness, O Livro dos Recordes [Guiness, 1995], como o teorema que mais possui demonstrações em toda a Matemática (foram registradas 370 [Rosa, 1983]). Entre essas demonstrações, vale citar uma, feita pelo gênio renascentista **Leonardo da Vinci** (1452-1519), e outra, creditada ao vigésimo presidente norte-americano **James Abram Garfield** (1831-1881), que será apresentada no Capítulo 14.

Observe que pessoas de atividades tão distintas admiravam a Matemática, indicando que ela faz parte do saber básico de qualquer boa educação.

Outro caso de paixão: o general e imperador francês **Napoleão Bonaparte** (1769-1821) era admirador e incentivador das Ciências. Apreciador da Matemática, relacionou-se, em particular, com famosos matemáticos franceses contemporâneos seus, entre os quais destacamos: **Monge**³, **Laplace**⁴ e **Lagrange**⁵. Alguns matemáticos foram nomeados pelo próprio imperador para assumir cargos administrativos importantes em seu governo.

Atribui-se a Napoleão um belo teorema da Geometria Plana que leva seu nome:

TEOREMA DE NAPOLEÃO⁶: *Se sobre os lados de um triângulo arbitrário se construir triângulos equiláteros e ligar os centros desses novos triângulos por segmentos de reta, a figura formada será um triângulo equilátero.*

³**Gaspar Monge** (1746-1818): matemático e cientista francês que, entre outros feitos, desenvolveu a Geometria Descritiva e deu significativas contribuições à Geometria Analítica.

⁴**Pierre Simon (Marquês de) Laplace** (1749-1827): matemático e físico francês. Contribuiu de modo decisivo com trabalhos em Mecânica Celeste, Teoria das Probabilidades e no conceito de potencial físico, é bastante conhecido pela equação e pela transformada de Laplace.

⁵**Joseph Louis Lagrange** (1736-1813): notável matemático ítalo-francês. A abrangência de sua obra é comparável à de Euler, já que contribuiu em várias partes da Matemática. Seu nome está ligado a importantes resultados na Teoria das Equações Diferenciais, dos Grupos Algébricos, Teoria das Equações Algébricas, Teoria dos Números, Cálculo das Variações, entre outras áreas.

⁶Os interessados podem encontrar uma demonstração desse teorema em [Matsufuji, 1989], e outra em [Dalcín, 2000].

Veja também, no final da Subseção 7.3.8, outro interessante caso de paixão pela Matemática. Naquela seção, apresentaremos a *Conjectura de Beal*, um banqueiro texano apaixonado por Matemática, que paga U\$100.000,00 a quem conseguir provar a conjectura que ele enunciou!

OBSERVAÇÃO: uma *conjectura* é uma sentença cuja falsidade ou verdade ainda não foi possível determinar.

4.2 Condição necessária e condição suficiente

Vimos que, mesmo não estando explícita, todo teorema encerra em sua estrutura uma forma condicional ‘Se P , então Q ’, a qual também pode ser considerada como ‘ $P \Rightarrow Q$ ’. Sabemos que essa última sentença é lida como ‘ P implica Q ’.

Vamos agora aprender dois outros estilos de apresentar uma sentença implicativa ‘ $P \Rightarrow Q$ ’, muito comuns na Lógica-Matemática ao se enunciar teoremas:

“ P é (uma) condição suficiente para Q ”,

ou

“ Q é (uma) condição necessária para P ”.

EXEMPLO 1: Uma das duas maneiras com as quais apresentamos o Teorema 2, da Seção 4.1, foi

1ª Versão: Seja n um número inteiro. Se n é um múltiplo de 5, então n termina em 0 ou em 5.

Nesse teorema vamos considerar:

P : ‘Um número inteiro n é múltiplo de 5’

e

Q : ‘ n termina em 0 ou em 5’.

Sabemos que ‘ $P \Rightarrow Q$ ’. Pelo que acabamos de expor, duas outras maneiras de enunciar esse resultado são:

2ª Versão: Um número inteiro n ser múltiplo de 5 é uma condição suficiente para que ele termine em 0 ou em 5.

ou

3ª Versão: Um número inteiro n terminar em 0 ou 5 é uma condição necessária para que ele seja múltiplo de 5.

Note que, usando a primeira, segunda, ou terceira versão, estamos apenas apresentando o mesmo teorema de maneiras distintas; o que muda é unicamente a maneira de enunciá-lo.

Para justificar essa terminologia, recordemos que uma sentença implicativa ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ ou condicional ‘Se P então Q ’ é válida, caso seja possível provar que a sentença Q ocorre, todas as vezes em que considerarmos que P ocorre. Quando isso acontece, observe que é *suficiente* (*é bastante!*) a sentença P valer, para que a sentença Q valha; ou, ainda, é *necessário* que a sentença Q valha todas as vezes em que a sentença P valer.

Esses conceitos devem ficar bem claros pois, em geral, percebemos que podem ser facilmente confundidos pelos iniciantes. Talvez por exigirem atenção para entendê-los, vários livros publicados hoje em dia estão abandonando essa linguagem tão específica da Matemática e preferem fingir que ela não existe. Em nossa opinião, essa é uma linguagem tradicional que deve ser preservada.

Vamos treinar mais um pouco. Comecemos agora com um exemplo fora da Matemática, onde os significados das palavras *necessária* e *suficiente* são bem instrutivos:

EXEMPLO 2:

Suponha que T seja a asserção ‘Pedro é terráqueo’, e que B seja a asserção ‘Pedro é brasileiro’. Como Pedro é brasileiro, e todo brasileiro é um terráqueo, concluímos que Pedro é terráqueo, logo, $B \Rightarrow T$, ou seja:

1^a Versão: Pedro é brasileiro, implica Pedro é terráqueo.

Como mencionamos, outra maneira de expressar essa frase é:

2^a Versão: Pedro ser brasileiro é uma condição suficiente para Pedro ser terráqueo

ou

3^a Versão: Pedro ser terráqueo é uma condição necessária para Pedro ser brasileiro.

Insistimos que estamos apenas enunciando o mesmo resultado de três maneiras diferentes.

Observe os significados das palavras suficiente e necessária nesse exemplo. Atente que é *suficiente* (é bastante) que Pedro seja brasileiro para ser terráqueo. Por outro lado, como não há brasileiros que não sejam terráqueos, é *necessário* que Pedro seja terráqueo para ser brasileiro.

Voltemos o mais rapidamente para outros exemplos dentro da Matemática.

EXEMPLO 3:

TEOREMA 1 (1^a Versão): Se dois números inteiros terminam em 6, então o mesmo ocorre com seu produto.

Nesse caso, se R é a sentença ‘dois números inteiros terminam em 6’, e S é a sentença ‘o produto desses números termina em 6’, é possível provar que ‘ $R \Rightarrow S$ ’. Visto dessa forma, torna-se simples reenunciar o teorema das seguintes maneiras:

TEOREMA 1 (2^a Versão): Dois números inteiros terminarem em 6 é uma condição suficiente para que seu produto termine em 6.

ou

TEOREMA 1 (3^a Versão): O produto de dois números terminar em 6 é uma condição necessária para que esses números terminem em 6.

Segundo a prática, é bem mais usual se enunciar a 2^a Versão do Teorema 1 da seguinte forma:

TEOREMA 1 (4^a Versão): Uma condição suficiente para que o produto de dois números termine em 6, é que esses números terminem em 6.

Vamos também escrever a 3^a Versão do Teorema 1 de uma maneira que é mais utilizada:

TEOREMA 1 (5^a Versão): Uma condição necessária para que dois números terminem em 6 é que seu produto termine em 6.

Passemos agora ao seguinte exemplo, um pouco mais longo:

EXEMPLO 4:

TEOREMA 2 (1^a Versão): *Se duas pirâmides têm mesma altura e áreas das bases iguais, então as secções transversais à mesma distância de seus vértices têm áreas iguais.*

Para esse teorema, definindo

P : ‘Duas pirâmides têm mesma altura e áreas das bases iguais’

Q : ‘As secções transversais à mesma distância dos vértices de duas pirâmides têm áreas iguais’

como $P \Rightarrow Q$, podemos reenunciar o teorema das seguintes maneiras:

TEOREMA 2 (2^a Versão): *Duas pirâmides terem mesma altura e áreas da base iguais é uma condição suficiente para que elas tenham secções transversais à mesma distância de seus vértices com áreas iguais.*

TEOREMA 2 (3^a Versão): *As secções transversais à mesma distância dos vértices de duas pirâmides terem áreas iguais é uma condição necessária para que elas tenham mesma altura e áreas das bases iguais.*

TEOREMA 2 (4^a Versão): *Uma condição necessária para que duas pirâmides tenham mesma altura e áreas das bases iguais é que as secções transversais à mesma distância de seus vértices tenham áreas iguais.*

TEOREMA 2 (5^a Versão): *Uma condição suficiente para que duas pirâmides tenham secções transversais à mesma distância de seus vértices com áreas iguais é que elas tenham mesma altura e áreas das bases iguais.*

OBSERVAÇÃO FINAL: Ainda tem-se as seguintes opções, não tão usuais, de ler a implicação ‘ $P \Rightarrow Q$ ’:

1. P somente se Q ;
2. Se P for verdadeira, então Q será verdadeira;
3. Se P for válida, então Q será válida;
4. Q é implicada por P ;
5. Q segue de P .

Por conseguinte, não se pode reclamar de falta de opção para expressar uma sentença implicativa! Só não vale enunciá-la de forma errada!

EXERCÍCIOS:

1. Reescreva cada teorema abaixo usando, primeiramente, os termos “condição necessária”, e depois, usando os termos “condição suficiente”:
 - (a) Se dois números terminam em 76, então o mesmo ocorre com o produto desses números.

- (b) Se $\{a, b, c, d, e\}$ é uma seqüência de cinco números inteiros consecutivos não-negativos que satisfazem a identidade
 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$, então $\{a, b, c, d, e\} = \{10, 11, 12, 13, 14\}$.
- (c) Se uma matriz quadrada de ordem 3 possui duas colunas proporcionais, então seu determinante é nulo.
- (d) Os pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) do plano cartesiano são colineares se

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

- (e) Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas.
- (f) Um número inteiro é divisível por 4, se o número formado pelos seus últimos dois algarismos for divisível por 4.
- (g) Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo.

2. Reescreva cada teorema abaixo na sua forma condicional ‘Se...então...’

- (a) Uma condição necessária para que um número seja divisível por 6 é que ele seja simultaneamente divisível por 2 e por 3.
- (b) Em todo triângulo retângulo a altura correspondente ao vértice do ângulo reto é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
- (c) Uma condição suficiente para que um triângulo seja isósceles é que ele tenha dois ângulos internos congruentes.
- (d) Ter duas colunas iguais é uma condição suficiente para que uma matriz quadrada tenha determinante nulo.
- (e) Não ser primo é uma condição necessária para que o número seja da forma $n^4 + 4$, para $n \geq 2$.
- (f) Uma condição necessária para que dois números terminem em 1 é que seu produto também termine em 1.

3. Reescreva o seguinte teorema de cinco maneiras *realmente distintas*:

Se o número $n^4 + 4$ é primo para algum $n \in \mathbb{N}$, então $n = 1$.

4.3 A recíproca de uma sentença

A **recíproca** de uma sentença implicativa ‘ $P \Rightarrow Q$ ’ é definida como a sentença ‘ $Q \Rightarrow P$ ’. No caso de uma sentença condicional ‘Se P , então Q ’, sua recíproca é definida como a sentença ‘Se Q , então P ’.

EXEMPLO 1: (recíproca do Exemplo 2, da Seção 4.2)
Pedro é terráqueo implica Pedro é brasileiro.

EXEMPLO 2: (recíproca do Teorema 2, da Seção 4.1)
Todo número inteiro que termina em 0 ou 5 é múltiplo de 5.

EXEMPLO 3: (recíproca do Teorema 1, da Seção 4.2 - 1ª Versão)
Se o produto de dois números termina em 6, então esses números terminam em 6.

Seguindo o que fizemos no Exemplo 2 da Seção anterior, também poderíamos ter escrito o Exemplo 3 como:

Uma condição suficiente para que dois números terminem em 6 é que seu produto termine em 6.

ou

Uma condição necessária para que o produto de dois números termine em 6 é que esses números terminem em 6.

e assim por diante.

Alertamos que, se uma sentença é *verdadeira*, o valor lógico de sua recíproca pode ser *falso* ou *verdadeiro*; o mesmo ocorre quando o valor lógico da sentença for *falso*. Em resumo, os valores lógicos de uma sentença e de sua recíproca são independentes, como você pode começar a comprovar com as considerações a seguir.

No Exemplo 1, se chamarmos T : ‘Pedro é terráqueo’ e B : ‘Pedro é brasileiro’ temos ‘ $B \Rightarrow T$ ’, mas ‘ $T \not\Rightarrow B$ ’ (Observação: $\not\Rightarrow$ é a negação de \Rightarrow . Lê-se ‘ $T \not\Rightarrow B$ ’ da seguinte forma: ‘ T não implica B ’), pois, evidentemente, existem terráqueos que não são brasileiros; nesse caso, diz-se que ‘ser brasileiro’ é *uma condição suficiente, mas não necessária* para que Pedro seja terráqueo. Ainda nesse caso, podemos dizer que ‘ser terráqueo’ é uma condição *necessária, mas não suficiente* para que Pedro seja brasileiro.

Já o Exemplo 2 é um fato verdadeiro, bastante conhecido.

O Exemplo 3 é falso, pois podemos escrever $26 = 2 \cdot 13$. Logo, se R : ‘Dois números inteiros terminam em 6’ e S : ‘O produto desses números termina em 6’, temos ‘ $R \Rightarrow S$ ’, mas ‘ $S \not\Rightarrow R$ ’. Dessa forma, dizemos que ‘dois números terminarem em 6’ é condição suficiente, mas não necessária para que seu ‘produto termine em 6’ ou que, ‘o produto (de dois números) terminar em 6’ é uma condição necessária, mas não suficiente para que ‘dois números terminem em 6’.

EXERCÍCIOS:

1. A recíproca de um teorema também é um teorema? Por quê?
2. Enuncie a recíproca de cada teorema a seguir usando o mesmo estilo com que cada um foi apresentado:
 - (a) Se duas retas forem cortadas por uma transversal, e as medidas dosângulos correspondentes forem iguais, então essas retas são paralelas.
 - (b) Todo número da forma $4n + 3$ é ímpar.
 - (c) Uma condição necessária para que uma equação do tipo $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ represente uma circunferência no plano cartesiano é que $a = b \neq 0$ e $c = 0$.
 - (d) Um número é divisível por 8 se o número formado por seus últimos três algarismos for divisível por 8.
 - (e) Uma condição suficiente para que o logaritmo de um número seja negativo é que este número esteja no intervalo $(0, 1)$.
3. A recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira. Enuncie o Teorema de Pitágoras e sua recíproca.
4. Verifique se a recíproca de cada proposição abaixo é válida. Em caso afirmativo, enuncie essa recíproca de, pelo menos, duas maneiras distintas:
 - (a) Todo quadrado é um polígono de lados congruentes.



Figura 4.3: Selo exibindo um dos casos mais importantes do Teorema de Pitágoras: $5^2 = 3^2 + 4^2$.

- (b) Uma condição necessária para que um número seja múltiplo de 8 é que esse número seja par.
 - (c) Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto que a tangencia.
 - (d) Se dois números são negativos, então sua soma também é negativa.
 - (e) Uma condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano
5. Dê exemplo de sentenças matemáticas implicativas tais que:
- (a) A sentença e sua recíproca sejam verdadeiras.
 - (b) A sentença e sua recíproca sejam falsas.
 - (c) A sentença seja verdadeira e sua recíproca seja falsa.
 - (d) A sentença seja falsa e sua recíproca seja verdadeira.

4.4 Sentenças equivalentes

E quando vale a recíproca de uma sentença?

Se tivermos duas proposições P e Q , tais que ' $P \Rightarrow Q$ ' e, simultaneamente, sua recíproca ' $Q \Rightarrow P$ ' sejam válidas, dizemos que

“(A sentença) P (vale) ***se, e somente se*** (a sentença) Q (vale)”,

ou

“(A sentença) P é ***condição necessária e suficiente para*** (a sentença) Q ”

ou ainda

“(A sentença) P é ***equivalente*** a (sentença) Q ”.

Neste caso, é natural que usemos o símbolo ' $P \Leftrightarrow Q$ ' para denotar o fato acima.

OBSERVAÇÃO: Pode-se também ler a sentença ‘ $P \Leftrightarrow Q$ ’ da seguinte maneira:

1. Se P , então Q , e reciprocamente.
2. Se P for válida, então Q será válida, e reciprocamente.

Acrescentando “e reciprocamente” ao final da frase, seguem-se todas as maneiras de se ler uma implicação, como exibimos no final da seção anterior.

Exemplo de sentença equivalente enunciada de maneiras diferentes:

Algumas das formas que usaremos para apresentar o resultado a seguir podem não ser as mais usuais, mas, com certeza, são instrutivas.

EXEMPLO 4: Dois números complexos são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ se, e somente se, um deles for $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e o outro for $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Poderíamos escrever:

Uma condição necessária e suficiente para que dois números complexos sejam raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, é que um deles seja $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e o outro seja $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Usando a linguagem de conjuntos:

Se $R = \{\text{raízes complexas da equação } ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$ e $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$, então $S = R$.

(Observe que $S \subset R$ e $R \subset S$).

Ou ainda:

As condições abaixo são equivalentes:

- i) Dois números complexos x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$;
- ii) Um dos números complexos x_1 ou x_2 é igual a $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, e o outro é igual a $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ou usando mais símbolos:

Os números complexos x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0 \Leftrightarrow$ um deles for $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e o outro for $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

EXEMPLO 5:

Em vez de enunciar:

Uma condição necessária e suficiente para que um raio de um círculo seja perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) é que ele a divida em dois segmentos congruentes,

poderíamos ter escrito:

Uma condição necessária e suficiente para que um raio de um círculo divida uma corda (que não é um diâmetro) em dois segmentos congruentes é que ele seja perpendicular a essa corda.

Ou ainda:

Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) de um círculo se, e somente se, ele a dividir em dois segmentos congruentes.

4.4.1 Uma outra classe de teoremas

Suponha que um teorema seja válido, como por exemplo: *Todo número inteiro que termina em 0 ou 5 é múltiplo de 5*; e que seu teorema recíproco *Todo número inteiro múltiplo de 5 termina em 0 ou 5* também seja válido. Dessa forma, por economia, podemos enunciar esses dois teoremas como duas sentenças equivalentes, formando um único teorema, da seguinte maneira:

TEOREMA: *Um número inteiro termina em 0 ou 5 se, e somente se, é múltiplo de 5.*

De agora em diante, vamos estabelecer que uma sentença $P \Leftrightarrow Q$ – inclusive as diferentes formas de escrevê-la – é um teorema, desde que as sentenças $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ sejam ambas verdadeiras.

Esses tipos de teorema constituem-se de duas partes: um resultado, e seu resultado recíproco. Para que uma sentença desse tipo seja um teorema, ambos os resultados devem ser verdadeiros e, geralmente, a demonstração do teorema é feita em duas etapas, que são as demonstrações de cada um desses resultados.

Diante do que acabamos de expor, os Exemplos 4 e 5, da seção anterior, são teoremas.

EXERCÍCIOS:

1. Se “ P é condição necessária e suficiente para Q ”, então “ Q é condição necessária e suficiente para P ?”. Justifique sua resposta.
2. Reescreva cada frase abaixo na forma ‘... se, e somente se...’.
 - (a) A condição necessária e suficiente para que um polinômio p , na variável x , tenha $x = a$ como raiz é que esse polinômio seja divisível por $(x - a)$.
 - (b) Um triângulo ter de seus lados medindo 3, 4 e 5 é equivalente a esse triângulo ser o triângulo retângulo, de lados inteiros, com menor perímetro.
 - (c) Ser par é uma condição necessária e suficiente para que um número seja da forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$.
 - (d) A reta r é paralela ao plano $\alpha \Leftrightarrow r$ é paralela a uma reta de α .
 - (e) O seno de um ângulo ser negativo é condição necessária e suficiente para que esse ângulo esteja no terceiro ou no quarto quadrante.
 - (f) Dois planos são paralelos se não têm pontos em comum, e reciprocamente.
3. Escolha três das proposições do exercício anterior e as reescreva como um teorema, composto por duas sentenças condicionais.
4. Escolha três das proposições do Exercício 2 e as apresente usando o símbolo ‘ \Leftrightarrow ’.

5. Identifique, nas asserções do Exercício 2, duas condições que são necessárias, mas não são suficientes, e outras duas, que são suficientes, mas não são necessárias. Reescreva cada uma dessas asserções usando as frases “... é condição suficiente, mas não é necessária...” e “... é condição necessária, mas não é suficiente...”.

6. Considere três proposições P_1 , P_2 e P_3 de sorte que

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_1.$$

Verifique que essas proposições são equivalentes, isto é,

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3.$$

Algumas vezes, para deduzir que três sentenças P_1 , P_2 e P_3 são equivalentes, é menos trabalhoso provar que $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_1$. Por quê?

7. Se um teorema e sua recíproca são válidos, então é verdade que a hipótese desse teorema é a tese do teorema recíproco e vice-versa?
 8. Verifique que o conectivo ‘se, e somente se’ (\Leftrightarrow) satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

9. CASO VERÍDICO:

Critique as seguintes frases matemáticas. As frases são reais e foram extraídas de provas de alunos.

- (a) $3^5(3^2)^{-2} \Leftrightarrow 3^5 \cdot 3^{-4} \Leftrightarrow 3^1 = 3$
 (b) $4ax - 8ax \Leftrightarrow 4a(x - 2x)$

10. CASO VERÍDICO:

Em um livro do Ensino Médio, no capítulo que trata de polinômios, consta a seguinte frase:

“Se $B(x)$ é divisor de $A(x)$ $\Leftrightarrow R(x) = 0$ (Sic).”

Não pense que a frase está transcrita de forma errada! Ela foi escrita dessa forma mesmo. Faça um comentário sobre a frase e não poupe críticas.

4.5 Sentenças equivalentes e definições

4.5.1 Como deve ser entendida a conjunção gramatical ‘se’ de uma definição

Já frisamos no final da Seção 3.1 que toda definição é, na realidade, uma sentença da forma ‘se, e somente se’, mesmo que nela apareça apenas uma única conjunção ‘se’. Usando a terminologia da Seção 4.2, este fato significa que as condições exigidas numa definição são sempre necessárias e suficientes. Por esse motivo, alguns autores preferem usar em suas definições os termos ‘se, e somente se’ e, até mesmo, o símbolo \Leftrightarrow .

Reveja a Definição 3 da Seção 3.1. Naquela definição, dissemos que ‘*um triângulo é isósceles se possui dois lados congruentes*’. Dissemos também que, para que esta frase seja uma definição, deve valer a recíproca: ‘*se um triângulo possui dois lados congruentes, então ele é isósceles*’. Logo, ‘*possuir dois lados congruentes*’ é condição necessária e suficiente para um triângulo ser isósceles. Por esse motivo, alguns autores escreveriam a definição de triângulo isósceles como: *Um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes*. Já outros autores acham que essa forma de redigir uma definição tem mais jeito de um teorema do que mesmo de uma definição, e a evitam. Caso de preferência pessoal.

Em nosso caso, resevamos o símbolo ‘ \Leftrightarrow ’ e o conectivo ‘*se, e somente se*’ para ligar duas proposições, tais que uma é deduzida da outra, o que não ocorre ao se escrever uma definição. Dessa forma, ao escrevermos uma definição, optamos por usar apenas um ‘*se*’. Já em um texto formal, jamais usaríamos o símbolo ‘ \Leftrightarrow ’ para escrever uma definição. Achamos por demais impróprio. Essa é nossa opinião.

4.5.2 Definições equivalentes

Dizemos que *duas definições D_1 e D_2 são equivalentes* quando $D_1 \Leftrightarrow D_2$. Certos objetos matemáticos podem ter várias definições equivalentes e, quando for o caso, tanto faz usar qualquer uma delas. É importante frisarmos que, ao optar por uma das definições, as outras podem ser deduzidas como consequência da definição escolhida.

Por exemplo: uma maneira alternativa de definir triângulo isósceles, diferente daquela que demos na Definição 3 da Seção 3.1, poderia ser:

Definição 3’: *Um triângulo é isósceles se tem dois de seus ângulos internos côngruos.*

Nos cursos de Geometria Plana, prova-se que todo triângulo com dois ângulos internos côngruos possui os respectivos lados opostos a esses ângulos também côngruos, e reciprocamente. Ou seja, as Definições 3 e 3’ são equivalentes ($D_3 \Leftrightarrow D_{3'}$) e, portanto, tanto faz usar uma ou outra para definir triângulo isósceles.

EXERCÍCIOS:

1. Qual das definições abaixo **não** é equivalente às demais:

Um **retângulo** é ...

- (a) ... um quadrilátero com quatro ângulos internos retos.
- (b) ... um paralelogramo com pelo menos um ângulo interno reto.
- (c) ... um quadrilátero com a média aritmética dos ângulos internos valendo um ângulo reto.
- (d) ... um quadrilátero com quatro ângulos internos congruentes.

2. Dê quatro definições equivalentes de **quadrado**. Faça uma pesquisa, caso necessite.

3. Descubra a quais entes matemáticos as frases abaixo se referem, e utilize essas frases para dar definições equivalentes desses entes.

- (a) ... é um número que dividido por 2 deixa resto 0.
- (b) ... é um número da forma $2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) ... é um número que termina em 0, 2, 4, 6, ou 8.
- (d) ... é um número da forma $2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

- (e) ... é um número cuja soma de seus algarismos é divisível por 3.
 (f) ... é um número que não é par.
 (g) ... é um número que não é ímpar.
 (h) ... é um número que dividido por 2 deixa resto 1.

4.6 **A bicondicional

Na Lógica Formal, dadas duas sentenças P e Q , se tivermos ' $P \rightarrow Q$ ' e ' $Q \rightarrow P$ ' simultaneamente, escrevemos que ' $Q \leftrightarrow P$ ', que é lido como ' P se, e somente se Q '.

O símbolo ' \leftrightarrow ' define uma operação entre sentenças, chamada **bicondicional**, que leva um par de sentenças (P, Q) noutra sentença, representada como ' $Q \leftrightarrow P$ '.

Diante do valor lógico de sentenças condicionais, é natural que o **valor lógico da sentença bicondicional** seja definido como

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 4.1: Tabela verdade da sentença bicondicional.

Na Lógica Simbólica Formal, levando em consideração o que já expusemos sobre implicação entre sentenças, escrevemos ' $P \Leftrightarrow Q$ ' nos casos em que a última coluna da tabela-verdade acima contiver apenas V . Isso ocorre quando ambas as sentenças P e Q são verdadeiras ou falsas.

Como já foi definido na Seção 2.3, duas sentenças $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ e $Q(R_1, R_2, \dots, R_k)$ são equivalentes (' $P \equiv Q$ '), quando possuem os mesmos valores lógicos na última coluna de suas respectivas tabelas-verdade. Note que, pela definição do parágrafo anterior, o mesmo ocorre quando temos ' $P \Leftrightarrow Q$ '. Dessa forma, vale o seguinte

$$'P \equiv Q' \text{ se, e somente se } 'P \Leftrightarrow Q'.$$

E assim, no Cálculo Proposicional, tanto faz usar os símbolos “ \equiv ” ou “ \Leftrightarrow ” para sentenças equivalentes.

Finalizamos a seção, ressaltando que o símbolo \leftrightarrow representa uma operação entre sentenças. Já o símbolo \Leftrightarrow é usado para ligar duas sentenças equivalentes.

EXERCÍCIOS:

1. A BICONDICIONAL E LINGUAGEM DE CONJUNTOS:

Sejam duas proposições P e Q referentes a propriedades de um elemento pertencente a um conjunto universo \mathcal{U} . Associemos a proposição P ao conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ dos elementos que gozam de P , e a proposição Q ao conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$ dos elementos que gozam de Q . Se ' $P \Leftrightarrow Q$ ', como expressar a relação entre os conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{Q} ? Comente plenamente sua resposta.

2. Verifique que

- (a) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R));$
 (b) $(P \wedge Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R).$

CAPÍTULO 5

Desvendando os teoremas-Parte II

“A curva é o caminho mais agradável entre dois pontos.”

Mario Quintana (1906-1994)

UM POUCO DE GEOMETRIA, *in* Caderno H,
Editora Globo, 1995

5.1 Mais um exemplo de como usar a recíproca de uma proposição

Analisemos a seguinte tentativa de resolver uma equação do segundo grau:

EXEMPLO 1:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 6 &= 0 \Rightarrow \\(x - 2)(x + 3) &= 0 \Rightarrow \\x - 2 = 0 \text{ ou } x + 3 &= 0 \Rightarrow \\x = 2 \text{ ou } x &= -3 \Rightarrow \\x &\in \{2, -3\}.\end{aligned}$$

Note que, se cada uma das linhas do exemplo acima for considerada como uma proposição, representadas, respectivamente, como P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 , o que se fez foi provar que $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5$. Essa seqüência de implicações resulta que toda raiz – caso exista alguma! – da equação $x^2 + x - 6 = 0$ deve necessariamente pertencer ao conjunto $\{2, -3\}$. Isto é, chamando S o conjunto-solução da equação $x^2 + x - 6 = 0$, provou-se que $S \subset \{2, -3\}$.

Na verdade, esse procedimento não assegurou a existência de qualquer raiz para a equação, tampouco provou que 2 ou -3 sejam as raízes procuradas. Se achar estranho esse fato, esperamos que o exemplo a seguir definitivamente lhe convença do que estamos afirmado.

Sabemos que a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui soluções reais. Suponha que alguém deseje imitar os procedimentos usados no Exemplo 1 e escreva as seguintes implicações:

EXEMPLO 2:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \Rightarrow \\(x^2 - 1)(x^2 + 1) &= 0 \Rightarrow \\x^4 - 1 &= 0 \Rightarrow \\x^4 &= 1 \Rightarrow \\x &\in \{-1, 1\}.\end{aligned}$$

Cada implicação anterior é verdadeira, entretanto, a equação não tem raízes reais x , e encontrou-se que $x \in \{-1, 1\}$. O que está havendo? Deparamo-nos com algum paradoxo? Seguramente não! Em Matemática, é preciso estar consciente de que cada passo dado não deve, e nem pode ser puramente mecânico. Como no primeiro exemplo, a seqüência anterior de implicações apenas garante que, se a equação $x^2 + 1 = 0$ possuir alguma raiz real, ela deve necessariamente pertencer ao conjunto $\{-1, 1\}$. Não há contradição alguma neste fato! Vejamos:

O que houve foi o seguinte: se R for o conjunto-solução da equação $x^2 + 1 = 0$, sabemos que $R = \emptyset$, já que queremos apenas soluções reais e as raízes da equação são complexas. Como seguimos o procedimento do primeiro exemplo, apenas provou-se que $R \subset \{-1, 1\}$, uma inclusão que é verdadeira, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Esperamos que esse último exemplo seja persuasivo para você perceber que os mesmos procedimentos foram usados na equação do Exemplo 1 e, rigorosamente falando, eles também não garantem que aquela equação possua qualquer raiz.

Diante dessas considerações, é natural que surja a pergunta:

“O que, de fato, pode garantir que o conjunto $S = \{2, -3\}$ seja, ou não, o conjunto-solução da equação $x^2 + x - 6 = 0$? ”

A resposta é que a recíproca de cada implicação do Exemplo 1 deve ser válida, ou seja, que $P_5 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1$. Isso garante que $\{2, -3\} \subset S$ e, consequentemente, $S = \{2, -3\}$, pois já que sabíamos que $S \subset \{2, -3\}$.

É claro que uma maneira bem mais simples de responder à pergunta seria substituir na equação os valores encontrados de x e verificar, de fato, que eles são raízes. Certamente esse procedimento evitaria o trabalho de verificar se a recíproca de cada implicação é válida, todavia, deixamos claro que nosso objetivo não é resolver equações, mas alertar para certas manipulações com as implicações.

Já no segundo exemplo, há uma implicação cuja recíproca não é válida (encontre qual!) e, dessa forma, $\{1, -1\} \not\subset R$, o que acarreta $R \neq \{1, -1\}$. Conseqüentemente, $x = -1$ ou $x = 1$ não são raízes da equação $x^2 + 1 = 0$.

Conclusão: usando mais rigor —, ou o rigor necessário! — para garantir que $S = \{2, -3\}$ é realmente o conjunto-solução da equação do primeiro exemplo, dever-se-ia ter levado em conta a recíproca de cada implicação, checando que são válidas, e ter-se escrito:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 6 &= 0 \Leftrightarrow \\(x - 2)(x + 3) &= 0 \Leftrightarrow \\x - 2 = 0 \text{ ou } x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\x = 2 \text{ ou } x = -3 &\Leftrightarrow \\x &\in \{2, -3\}.\end{aligned}$$

Feito isso, pode-se afirmar imediatamente que $S = \{2, -3\}$. De fato, as implicações $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5$ garantem $S \subset \{2, -3\}$; já as implicações $P_5 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1$ garantem $\{2, -3\} \subset S$. Logo, as duas seqüências de implicações asseguram $S = \{2, -3\}$.

Não é demais alertar que, antes de usá-las, deve-se verificar cuidadosamente se a reáproca de cada implicação é verdadeira. Muita gente escorrega bastante nesse ponto, sendo tentada a escrever \Leftrightarrow ,

antes de verificar se realmente a recíproca ‘ \Leftarrow ’ de uma implicação ‘ \Rightarrow ’ é válida. O Exercício 2, desta seção, há de convencer-lhe de que não estamos excedendo em cautela.

O que falamos nesta seção deve lembrar-lhe da técnica de resolver equações irracionais no Ensino Médio: segue-se uma cadeia de implicações, como fizemos nos exemplos anteriores e, depois de encontrar os valores de x , parte-se para substituí-los na equação, checando quais desses valores são realmente raízes. Lembra-se? Por que se procede dessa forma? Vamos dar um exemplo antes de responder à pergunta:

EXEMPLO 3:

Para resolver equação $\sqrt{x} = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, procede-se assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= x - 2 \Rightarrow \\ (\sqrt{x})^2 &= (x - 2)^2 \Rightarrow \\ x &= x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \Rightarrow \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 \Rightarrow \\ x = 1 \text{ ou } x &= 4 \Rightarrow \\ x \in \{1, 4\}. &\end{aligned}$$

Como nos Exemplos 1 e 2 anteriores, o que foi feito até esse ponto foi provar que, se algum valor x for raiz da equação $\sqrt{x} = x - 2$, então $x \in \{1, 4\}$; nada, a princípio, assegura que $x = 1$ ou $x = 4$ seja alguma das raízes procuradas ou, sequer, que essas raízes existam. Substituindo esses valores em $\sqrt{x} = x - 2$, vê-se que apenas $x = 4$ é raiz da equação, já que quando substituímos $x = 1$ encontramos $1 = -1$.

Na verdade, ocorre que, quando tomamos as recíprocas das implicações na seqüência do Exemplo 3, elas valem para $x = 4$, mas há uma delas que não vale para $x = 1$. Encontre qual! Por este motivo, $x = 1$ é chamada **raiz falsa da equação**.

EXERCÍCIOS:

1. Verifique que a recíproca de cada uma das implicações do Exemplo 1 é verdadeira.
2. Dos valores de x encontrados no Exemplo 3, mostre que as recíprocas das implicações são válidas apenas para $x = 4$.
3. **Jogo dos erros:** encontre os erros nas “equivalências” abaixo. Em cada uma delas há uma implicação que não vale e você deve encontrá-la.

Lembre-se de que, para invalidar a veracidade de uma sentença, basta encontrar um exemplo para o qual ela não seja válida. O exemplo deve ser explícito.

No que segue, $\alpha, \beta, a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) $a = b \Leftrightarrow |a| = |b|$.
- (b) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.
- (c) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
- (d) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
- (e) $x > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$.
- (f) Se $x \in \mathbb{Z}$, as asserções a seguir são equivalentes:

$$A) \frac{x}{x+1} > 0 \qquad B) x > 0.$$

- (g) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b = 0$.
- (h) $(x - y)^4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y$.
- (i) Um polinômio com coeficientes reais tem raiz real se, e somente se, tiver grau ímpar.
- (j) $\frac{1}{(x-2)(x+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x < -2$.

5.2 A generalização de um teorema

Observe os seguintes teoremas:

TEOREMA 1: *A soma dos ângulos internos de um triângulo isósceles vale 180° .*

TEOREMA 2: *A soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° .*

Ambos os teoremas são verdadeiros e têm a mesma tese: ‘*a soma dos ângulos internos dos triângulos vale 180°* ’. Entretanto, a hipótese do Teorema 1 é que o ‘*triângulo seja isósceles*’, enquanto a do Teorema 2 é ‘*que o triângulo seja qualquer*’, já que no último teorema não se impôs nenhuma restrição ao tipo de triângulo considerado.

Quando um teorema é um caso particular de outro, dizemos que o segundo é um **generalização** do primeiro. Voltando aos teoremas anteriores, o Teorema 2 é uma generalização do Teorema 1.

Em muitos casos, o trabalho do matemático consiste em tentar generalizar resultados que se provou serem verdadeiros apenas para casos particulares.

Ressaltamos que um mesmo teorema pode ter generalizações diferentes, dependendo sob qual enfoque deseja-se generalizá-lo. Daremos um exemplo desse fato no Exercício 2, desta seção. No capítulo final do livro, trabalharemos mais com generalizações.

Convém enfatizar que, ao apresentar um teorema, deve-se ter o cuidado para apresentá-lo de forma que o conjunto dos elementos que gozam das propriedades requeridas pelas hipóteses seja o mais “abrangente” possível. Decerto que os teoremas que você já estudou e que lhe foram apresentados contêm as melhores hipóteses.

A maioria dos teoremas apresentados nos Ensino Fundamental e Médio estão em sua forma mais generalizada. Todavia, nada lhe impede de, ao ler o enunciado de um teorema, comece analisando as hipóteses, perguntando por que elas estão ali, se não podem ser melhoradas, se alguma delas pode ser suprimida, qual o conjunto de elementos para os quais as hipóteses são válidas, se não existe outra demonstração mais elementar, e assim por diante. É procedendo dessa maneira que exercitamos e desenvolvemos o espírito crítico. Nossos alunos e os apreciadores da Matemática não podem ser apenas meros espectadores, e são essas atitudes que esperamos de nossos leitores.

EXERCÍCIOS:

1. Melhorando as hipóteses, escreva uma generalização para cada resultado abaixo. Procure dar a generalização mais abrangente possível.
 - (a) Todo número terminado em 4 ou 16 é divisível por 2.
 - (b) Existe um número inteiro entre $-\pi$ e $\sqrt{2}$.
 - (c) Se um número é da forma $2n + 7$, $n \in \mathbb{N}$, então esse número é ímpar.
 - (d) Uma condição suficiente para que dois planos tenham uma reta em comum é que eles se intersectem em ângulo reto.

- (e) O volume de um cone reto vale $1/3$ da área da base vezes à altura.
- (f) Para todo prisma, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$, na qual V =número de vértices, A =número de arestas e F =número de faces.

2. DUAS BELAS GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS:

- (a) Na Geometria Plana prova-se um conhecido teorema, chamado

Lei dos Co-senos:

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo co-seno do ângulo formado por eles.

Analise este teorema e justifique por que ele é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

- (b) Tomando uma direção diferente da que seguimos no item anterior, daremos agora outra interessante generalização do Teorema de Pitágoras.

Se considerarmos um triângulo retângulo com medida da hipotenusa valendo a , e medidas dos catetos valendo b e c , sabemos que:

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Denotando a área de um quadrado de lado medindo x por $A_q(x)$, geometricamente, a equação (1) significa que

$$(2) \quad A_q(a) = A_q(b) + A_q(c).$$

Isto é, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de lados medindo b e c .

- i. Levando adiante essa maneira geométrica de analisar o Teorema de Pitágoras usando áreas, construa triângulos eqüiláteros de lados a , b e c sobre os respectivos lados do triângulo retângulo. Se $A_t(x)$ denota a área de um triângulo eqüilátero de lado valendo x , certifique-se de que:

$$(3) \quad A_t(a) = A_t(b) + A_t(c).$$

- ii. Faça o mesmo para semicírculos de diâmetros a , b e c , construídos sobre os respectivos lados do triângulo retângulo. Se $A_{sc}(x)$ denota a área de um semicírculo de diâmetro x , verifique a validade da igualdade:

$$(4) \quad A_{sc}(a) = A_{sc}(b) + A_{sc}(c).$$

- iii. Agora responda: em cada caso acima, o que as figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo têm em comum?

- iv. Se você respondeu que em cada caso as figuras são “ampliações” ou “reduções” umas das outras, acertou. Figuras desse tipo são chamadas **homotéticas**.¹

Do que constatamos até este ponto, surge a pergunta:

“Será que uma equação do tipo (2), (3) e (4) vale para áreas de três figuras homotéticas quaisquer desenhadas sobre os lados do triângulo retângulo?”

¹Duas figuras A e A' são ditas **homotéticas** quando existe uma bijeção $\Psi : A \rightarrow A'$ com a seguinte propriedade: para todo ponto $x \in A$ corresponde um ponto $x' = \Psi(x) \in A'$, de sorte que, se \overline{ab} é o comprimento do segmento que liga os pontos a e $b \in A$, então $\overline{a'b'} = k\overline{ab}$, para alguma constante positiva k . A função Ψ é chamada **homotetia** e a constante k chamada **constante de homotetia**. Se $k < 1$, a figura A' é uma **redução** da figura A ; caso $k > 1$, a figura A' é uma **ampliação** da figura A .

v. A resposta à pergunta anterior é afirmativa, garantindo uma belíssima generalização do Teorema de Pitágoras.

Para verificar esse fato, se $A_h(x)$ denota a área da figura desenhada sobre o lado x de um triângulo retângulo, sendo $A_h(a)$, $A_h(b)$, $A_h(c)$ as áreas das figuras homotéticas, é possível provar que valem as relações:

$$(5) \quad \frac{A_h(a)}{A_h(b)} = \frac{a^2}{b^2} \text{ e } \frac{A_h(a)}{A_h(c)} = \frac{a^2}{c^2}.$$

(Não se preocupe em provar essas relações. Ao menos agora!)

Valendo-se das relações acima e da equação (1), verifique que

$$A_h(a) = A_h(b) + A_h(c).$$

Pronto, agora temos uma igualdade que é uma generalização das igualdades (2), (3) e (4), que vale para figuras homotéticas quaisquer desenhadas sobre os lados de um triângulo retângulo. Muito interessante, não acha?

5.3 A família dos teoremas

Muitas vezes, dependendo do contexto e para não abusar da palavra ‘teorema’, que freqüentemente aparece na Matemática, alguns teoremas são chamados por outros nomes:

- Chamamos **corolário** a um teorema obtido como consequência de outro recém provado. Neste caso, o segundo teorema é chamado **corolário do teorema** provado;
- Já um teorema usado para provar outro que lhe sucede é chamado **lema**; podemos dizer que um lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema.
- Em algumas ocasiões, chama-se **proposição** a um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada. Recorde que, como definida na Seção 2.1, essa palavra também é utilizada na Matemática com outro significado.

Vamos aos exemplos. Suponha que queiramos demonstrar o seguinte teorema (em especial, devido à importância da técnica empregada, iremos demonstrá-lo na Seção 11.1):

TEOREMA 1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Na Seção 11.1, veremos que para demonstrar esse teorema, precisaremos do seguinte resultado, que ora apresentamos como:

TEOREMA 2: Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é par, então n é par.

Por outro lado, vê-se claramente que o resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 1.

TEOREMA 3: Existem números irracionais.

Já que o Teorema 3 decorre dos resultados do Teorema 1, o qual, por sua vez, decorre do Teorema 2 e, como dissemos, para não abusar em demasia da palavra “teorema”, uma opção de apresentar a seqüência desses três teoremas é:

LEMA: Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é par, então n é par.

TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

COROLÁRIO: Existem números irracionais.

Ninguém está obrigado a usar esses nomes ao apresentar teoremas. Seu uso depende do contexto e de uma opção pessoal, mas convém ressaltar que o respeito às convenções matemáticas, à elegância da escrita e ao bom senso sempre devem prevalecer!

Além disso, o uso desses nomes expressam que há uma seqüência lógico-dedutiva nas três demonstrações dos teoremas:

$$\text{Lema} \Rightarrow \text{Teorema} \Rightarrow \text{Corolário}.$$

Entretanto, em geral, essa seqüência lógica não indica qualquer “grau de dificuldade” referente às demonstrações do lema, do teorema ou do corolário.

Em vários casos, alguns teoremas podem ser denominados de outras formas, tais como, *regras*, *leis*, *propriedades*, etc. Lembre-se da *Lei dos Senos*, *Lei dos Co-senos*, da *Regra de Sarrus*, *Regra de Cramer*, *Dispositivo Prático de Briot-Ruffini* e de tantos outros resultados conhecidos que possuem nomes particulares. No Ensino Superior, ainda temos os conhecidos *Lema de Zorn* e o *Lema de Fatou*. Todos, na verdade, são teoremas.

EXERCÍCIOS:

1. Considere o seguinte teorema:

O produto de dois números que terminam em 25 também termina em 25.

Admitindo esse teorema, esboce uma justificativa do seguinte corolário:

As potências positivas inteiras quaisquer de um número que termina em 25 também terminam em 25.

2. Seja um pouco saudoso e procure identificar entre os teoremas provados nos livros do Ensino Médio, quais são *corolários* e quais são *lemas* de outros teoremas. As Geometrias Plana e Espacial estão repletas desses exemplos.
3. Como já mencionado, a maneira de escrever o enunciado de teoremas depende muito de uma escolha pessoal. Às vezes, pode-se enunciar um teorema usando-se apenas palavras, sem nenhum símbolo matemático ou figura; outras vezes, pode-se optar pelo contrário.

Nos exemplos a seguir, faça um desenho e explique com símbolos matemáticos o que cada teorema quer dizer.

- (a) **Lei (Teorema) dos Senos:**

A medida de cada um dos lados de um triângulo qualquer é proporcional ao seno do respectivo ângulo oposto, e a constante de proporcionalidade é duas vezes a medida do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

- (b) **Lei (Teorema) dos Co-senos:**

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo co-seno do ângulo formado por eles.

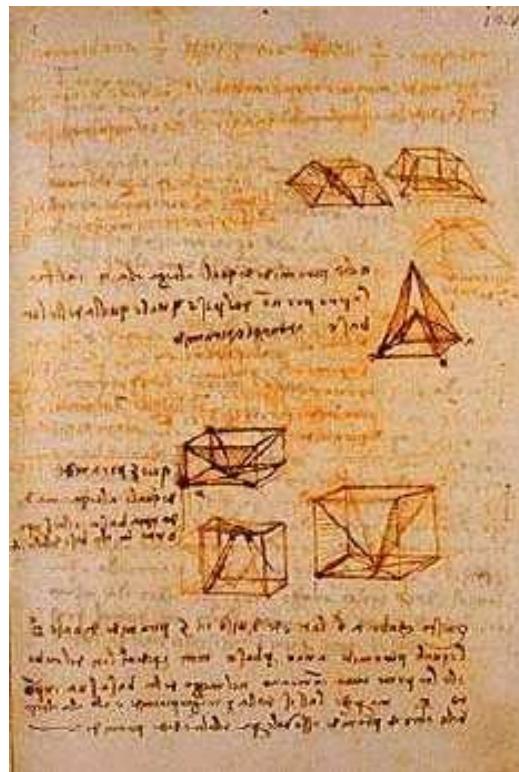


Figura 5.1: Estudos de Leonardo da Vinci (1452-1519), nos quais se vêem desenhos de poliedros.

4. Este exercício é para você perceber que, além de uma escolha pessoal, a maneira de enunciar teoremas pode também depender da linguagem usada na época em que foram demonstrados pela primeira vez.

Como curiosidade, apresentamos alguns resultados matemáticos escritos com a linguagem original em que foram enunciados há centenas de anos. Observe como é utilizada uma linguagem totalmente geométrica e como os resultados também eram apresentados usando-se proporções, um estilo que perdurou por centenas de anos na Matemática Grega Antiga.

Os teoremas que seguem são muito conhecidos, só que estão escritos de uma forma diferente da que estamos acostumados. Em cada caso, descubra qual teorema estamos enunciando e o reescreva no estilo em que são apresentados hoje em dia.

- (a) *Se um segmento de reta é dividido aleatoriamente em dois pedaços, o quadrado construído sobre o segmento inteiro é igual aos quadrados sobre os segmentos parciais e duas vezes os retângulos construídos por esses segmentos.*

Euclides, n'***Os Elementos***, II. 4; 300 a.C.

- (b) *A área de qualquer círculo é igual ao triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio, e o outro lado vale a circunferência do círculo.*

Arquimedes², 225 a.C., no ***Medida do círculo***.

- (c) *A superfície de qualquer esfera é igual a quatro vezes o maior círculo que ela contém.*

Arquimedes, 220 a.C., no ***Sobre a esfera e o cilindro***.

²Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.C.) é considerado um dos maiores sábios da Antigüidade. Nos seus trabalhos pode-se encontrar as idéias germinais do Cálculo Integral. Usando métodos surpreendentes para sua época, calculou a área de figuras planas (círculo, parábola) bem como áreas e volumes de sólidos (esfera, por exemplo). Brilhante inventor (catapultas, máquinas de guerra, Parafuso de Arquimedes), foi descobridor do Princípio do Empuxo e da Lei das Alavancas. Ficou conhecido por sua frase “Dá-me um ponto de apoio e eu moverei o mundo” e por seu grito “Eureka!” (descobri!, em Grego). Reza uma lenda que, enquanto tomava banho, ele teria descoberto a Lei do Empuxo e, eufórico, teria saído às ruas correndo e gritando ‘eureka!’, ‘eureka!’. No entanto, no ímpeto da descoberta, Arquimedes teria esquecido de vestir suas roupas!!

- (d) *O volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3.*

Arquimedes, Sec. III a.C.

5.3.1 Teoremas de existência e unicidade

Na Linguagem Matemática, quando dizemos “*existe um elemento que satisfaz determinada propriedade*”, diferentemente do que ocorre na Linguagem Coloquial, deve-se entender na verdade que “*existe pelo menos um elemento que satisfaz aquela propriedade*”, nada impede que possam existir outros. Ao dizer “*existem dois elementos que satisfazem tal propriedade*”, entenda-se, “*existem pelo menos dois elementos que satisfazem aquela propriedade*”, mas podem existir mais do que dois; e assim por diante.

Se, por acaso, for possível determinar o número exato de elementos que satisfazem a propriedade em questão, o resultado, sem dúvida, é mais preciso. Por isso, esse número deve sempre ser enfatizado ao redigir o teorema.

Lembre-se de enunciados de teoremas nessa linha, como:

*Existem cinco e somente cinco poliedros de Platão*³.

Os teoremas que garantem a existência de qualquer objeto matemático são chamados **teoremas de existência**. Um fato interessante é que, várias vezes, um teorema garante a existência de determinado objeto matemático, mas não o exibe, tampouco se constrói um exemplo desse objeto. Em muitos casos, diante da natureza do problema, realmente é impossível exibir um exemplo, mesmo tendo sido assegurada sua existência! Muitas vezes o que importa é a *existência do objeto* e não propriamente *o objeto em si*. Interessante, não? Mais adiante vamos dar um exemplo de um teorema desse tipo.

Há também os resultados de **unicidade (teoremas de unicidade)**, garantindo que, se existir algum objeto que possua determinada propriedade, então ele é único. Por exemplo:

Por um ponto do espaço pode-se traçar um único plano perpendicular a uma determinada reta

Convém registrar que, em certos casos, pode-se deduzir alguns resultados apenas usando a unicidade, independente de estar assegurada a existência do objeto!

Outros teoremas asseguram a existência e a unicidade de objetos matemáticos. Estes teoremas, com muita razão, são chamados **teoremas de existência e unicidade**. Por exemplo:

UMA PROPRIEDADE DOS NÚMEROS INTEIROS CONSECUTIVOS:
Dada uma seqüência qualquer de n números inteiros consecutivos $k, k+1, k+2, \dots, k+n-1$, existe um, e apenas um deles, que é divisível por n .

Observe que o resultado acima assegura a existência e a unicidade de um certo número na seqüência de n números consecutivos, mas não o exibe, tampouco informa qual deles esse número seja.

³**Platão** (c.428-348 a.C) era um filósofo grego ateniense, discípulo de **Sócrates** (469-399 a.C) e mestre de **Aristóteles** (c.384-322 a.C). Não contribuiu com descobertas matemáticas, entretanto, seu entusiasmo e sua maneira de tratar a Matemática, dando-lhe importância como parte vital do pensamento filosófico e da Educação, contribuiu para que a Matemática alcançasse a grande reputação que obteve no mundo Ocidental. Dois de seus famosos Diálogos têm como personagem *Teeteto*, que era um matemático. Inspirados pelo mestre, alguns discípulos de Platão tornaram-se destacados matemáticos, sobressaindo-se **Eudoxo de Cnido** (408-355? a.C.). Sobre os pórticos da *Academia de Platão*, estava escrito: “*Que ninguém que ignore a geometria entre aqui*”.

EXERCÍCIOS:

1. Analise e dê as interpretações de como a frase abaixo é concebida na Linguagem Coloquial e na Linguagem Matemática:

“Há 21 alunos na sala-de-aula”.

2. Que outras opções você daria para reescrever a frase:

Existem cinco e somente cinco poliedros de Platão,

ressaltando a existência de exatamente cinco desses poliedros?

3. Considere o seguinte teorema de unicidade:

A equação $x^2 + x - 6 = 0$ possui uma única raiz positiva.

Como justificar o fato acima, sem usar as raízes do trinômio?

CAPÍTULO 6

Desvendando as demonstrações

“Senhor, perdoai que a Verdade esteja confinada às demonstrações matemáticas!”

William Blake (1757-1827) in Notes on Reynold’s Discourses, c. 1808

“Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente de ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.”

Leonardo da Vinci (1452-1519)

6.1 O que é uma demonstração? (O raciocínio dedutivo)

“Senhoras e senhores, vamos apresentar uma sensacional e maravilhosa mágica, ou melhor, uma MATEMÁGICA, que há de lhes deixar surpresos! Precisamos de sua ajuda para essa surpreendente e incrível façanha da Matemática, que nos intriga com seus mistérios! Primeiramente, escolha quantos dias da semana você gosta de sair para passear. Multiplique esse número por 2. Adicione 5. Multiplique o resultado por 50. Se você já fez aniversário no ano de 2006, some 1756 ao número que encontrou¹; se ainda não aniversariou, some 1755. Finalmente, para completar nosso intento, subtraia o ano do seu nascimento do resultado encontrado. Você está agora com um número de três dígitos²! E....observe: o primeiro dígito é o número de dias da semana que você gosta de passear, e o número formado pelos dois últimos dígitos é sua idade! Sensacional e surpreendente, não acham??!!”

(Inspirado em *O jogo da idade*, Revista do Professor de Matemática, 37, p. 53)

E agora? Por trás de toda mágica há um truque. Por que a ‘matemágica’ acima funciona? Como funciona?

Primeiramente, para responder a essas perguntas, é preciso descobrir o ‘truque’ nos procedimentos feitos, e depois provar que a ‘matemágica’ sempre vale quando aplicada para qualquer pessoa. Nada, a princípio, nos garante essa validade.

Sabemos que na Matemática é necessário provar várias afirmações; essa é a natureza e a forma como a Matemática funciona.

Enfim, o que pode garantir que certos resultados são verdadeiros? Qual a razão que nos leva a acreditar na validade de certos fatos, principalmente aqueles que não sejam simples ou naturais de serem aceitos? No caso da Matemática, uma resposta a essa pergunta é: uma *demonstração*.

¹Se já fez aniversário no ano 2006+N, deve-se somar 1756+N; caso contrário, deve-se somar 1756+N-1. Por exemplo, no ano de 2009=2006+3, se já fez aniversário, deve-se somar 1756+3=1759, ou 1756+3-1=1758, caso contrário.

²Se o resultado encontrado for um número de apenas dois dígitos, você escolheu 0 (zero) dias para passear, e, portanto, não esqueça de considerá-lo à esquerda desse número.

Uma demonstração garante que determinado resultado é válido, que um teorema é verdadeiro, e, até mesmo, que a ‘*matemágica*’ que acabamos de apresentar sempre funciona. Provaremos este último fato no final da seção.

Apesar de já termos falado sobre *demonstrações* e evocado a idéia que os leitores têm sobre as demonstrações, pedindo-lhes em alguns exeráculos que “esboçassem algumas justificativas”, precisamos tornar essa idéia menos informal.

Primeiramente, sem recorrer a detalhes, uma *demonstração* de que uma proposição T é deduzida de uma outra proposição H é uma cadeia de argumentações lógicas válidas que usam H para concluir os resultados apresentados em T . Neste processo, H é chamada **hipótese(s)** e T chama-se **tese**.

Numa demonstração, prova-se que todo objeto matemático que satisfaz as condições das hipóteses, cumpre necessariamente o que afirma a tese. Como já vimos, esse fato garante a validade de uma proposição implicativa ‘ $H \Rightarrow T$ ’.

Cada passo de uma demonstração é provado por meio de argumentações válidas, usando-se hipóteses, axiomas, definições, outros resultados anteriormente provados e os passos precedentes, formando uma cadeia dedutiva de raciocínio. Ressaltamos que nossos argumentos estão baseados em duas regras básicas de inferência: a *modus ponens* e a *generalização* (vide Seção 2.4).

MENOS INFORMALMENTE:

Dentro de um modelo axiomático, dadas duas proposições H e T , uma *demonstração* de que a proposição H acarreta a proposição T é uma seqüência finita de sentenças P_1, P_2, \dots, P_k , tais que cada uma delas é, ou um axioma, ou uma definição, ou uma hipótese, ou uma sentença que é resultante de sentenças anteriores e que foi deduzida por argumentações³ válidas. A proposição final P_k da seqüência é a proposição T (tese), que é o resultado de todo o processo dedutivo.

Feito isso, tem-se assegurada a validade da sentença ‘ $H \Rightarrow T$ ’.

Portanto, numa demonstração, para deduzir a tese, você tem à disposição e pode usar nas argumentações, quantas vezes forem necessárias, os seguintes elementos:

1. Hipótese(s);
2. Axiomas;
3. Definições;
4. Teoremas já demonstrados;
5. Os passos da demonstração que já foram previamente provados;
6. As regras de inferência, e as técnicas de demonstração que apresentaremos nos próximos capítulos.

Chamamos **premissa** a qualquer dos quatro primeiros itens. Em uma demonstração, caso seja conveniente, tanto a tese, quanto qualquer dos quatro primeiros ítems podem ser substituídos por outras sentenças que lhes sejam equivalentes.

Devido à qualidade dos exemplos de demonstração que desejamos exibir, não exemplificaremos agora a definição de demonstração que demos. Pedimos aos leitores para aguardarem um pouco esses exemplos até a próxima seção.

Voltemos a falar sobre as demonstrações. Demonstrar é uma ato de persuasão. As demonstrações são como rituais indispensáveis usados para provar resultados, o que garante que estes são válidos, mesmo os que, a princípio, possamos não acreditar ou sequer aceitar, como:

³Quem desejar recordar o que é um argumento, sugerimos que (re)leia a Subseção 2.4.1.

A equação $x^4 + y^4 = z^4$ não possui soluções inteiras x, y, z não-nulas⁴

Por outro lado, mesmo considerando muito relativo o adjetivo “óbvio”, há também resultados matemáticos tão naturais de serem aceitos e, de fato, extremamente “óbvios”, mas que, da mesma forma, necessitam ser demonstrados. Por exemplo:

Não há um número natural que seja maior do que todos os outros (números naturais)⁵.

Não seria demais afirmar que não há Matemática sem demonstrações; elas compõem parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira como a Matemática funciona.

Lamentamos, entretanto, a atitude de certos professores e autores de livros didáticos que parecem desejar abolir definitivamente a palavra “demonstração” das salas de aula e dos livros, como se esse deserviço pudesse contribuir de alguma maneira para a melhoria do ensino. Para estes, quando os resultados enunciados não são impostos como decretos, as demonstrações são, quase sempre, substituídas por frases do tipo “podemos observar”, “temos”, “é possível verificar”, etc. Comparativamente, é como se, de repente, professores de Português deixassem de falar em *verbos*, ou professores de Química em *elementos químicos*!

Já outros falam apenas de demonstrações quando ensinam Geometria Plana, o que pode transmitir aos alunos a falsa impressão de que só na Geometria é possível usar o *método dedutivo*.

Na próxima seção daremos exemplos de demonstrações dentro de um sistema axiomático.

Agora, como prometido, finalizamos esta seção provando que a “matemágica” apresentada realmente funciona, e porque funciona.

Vamos por passos:

1) Suponha que $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ seja o número de dias da semana que você gosta de passear;

2) **Multiplique esse número por 2:** $2 \times a$;

3) **Adicione 5:** $(2 \times a) + 5$;

4) **Multiplique o resultado por 50:** $[(2 \times a) + 5] \times 50 = (100 \times a) + 250 = a00 + 250$;

5) **Se você já fez aniversário nesse ano de 2006, some 1756** (o outro caso prova-se da mesma maneira):

$$(a00 + 250) + 1756 = a00 + (250 + 1756) = a00 + 2006;$$

6) **Finalmente, para completarmos nossa demonstração, subtraia o ano do seu nascimento do resultado final:**

Se N for o ano do seu nascimento e sua idade for representada pelo número de dois dígitos bc , temos

$$(a00 + 2006) - N = a00 + (2006 - N) = a00 + bc = abc.$$

Portanto, o primeiro dígito do resultado final, a , é a quantidade de dias da semana que você gosta de passear, e o número bc , formado pelos outros dois dígitos, é a sua idade. Pronto! Além de descobrirmos o truque da mágica, provamos que ela realmente vale quando aplicada para qualquer pessoa.

A demonstração que demos transformou a ‘matemágica’ em matemática!

EXERCÍCIOS:

1. Vez em quando, a Matemática fornece alguns “magicálculos” utilizando números, que são bastante interessantes para se divertir com amigos, usar em sala-de-aula, etc. A seguir, vamos exibir

⁴Este resultado é um caso particular do famoso Teorema de Fermat, sobre o qual falaremos no próximo capítulo.

⁵A demonstração desse resultado pode ser vista em um primeiro curso de Análise Real. Vide, por exemplo, [Lima, 2002], p.36.

alguns deles. O que você tem de fazer é descobrir qual o segredo da “mágica” que está por trás de cada caso e . . . boa diversão.

- (a)
 - i. Escolha um número de dois algarismos (36, por exemplo);
 - ii. Multiplique esse número por 15 ($36 \times 15 = 540$);
 - iii. Multiplique o resultado por 7 ($540 \times 7 = 3780$);
 - iv. Subtraia desse resultado o quádruplo do número que você escolheu ($3780 - (4 \times 36) = 3780 - 144$);
 - v. E o resultado é 3636!!!!

Se o número escolhido fosse 17, ou 49, por exemplo, as operações levariam, respectivamente, aos números 1717 ou 4949, e assim por diante. Sempre encontra-se um número formado com a repetição do original.

Explique matematicamente: por que isso ocorre?

(Oscar Guelli, *Fazendo Mágica com a Matemática*, Revista do Professor de Matemática 17, pp.1-3)

- (b) Para o “magicálculo” que segue você pode usar uma calculadora, caso deseje.

- i. Digite um número com três algarismos;
- ii. Repita os três algarismos, formando um número com seis algarismos;
- iii. A seguir, divida esse número por 7, depois por 11 e finalmente por 13;
- iv. Todas as divisões acima foram exatas, sem deixar resto!!!!!!

(Oliveira, José Carlos de; *Magicálculo*, Revista do Professor de Matemática 23, p.34)

Dica: Chame o número de três algarismos de abc , onde $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Siga os passos com esse número. Note que $abcabc = 1001 \times abc$. Quanto vale $7 \times 11 \times 13$?

- (c) Considere o número 15873. Multiplique-o por um número qualquer de um algarismo e depois por 7. O resultado? É um número cujos dígitos são formados apenas pelo algarismo escolhido.

Exemplo: $15873 \times 5 = 79365$ e $79365 \times 7 = 555555$ (Revista do Professor de Matemática 36, p. 40).

Explique a razão porque isso ocorre.

Dica: $15873 \times 7 = ?$.

6.1.1 Trabalhando com demonstrações em um modelo axiomático

A partir do Capítulo 8, apresentaremos algumas técnicas de demonstração. Entretanto, nesta seção, vamos exemplificar a definição de demonstração que demos e trabalhar com demonstrações dentro de um sistema axiomático, usando diretamente axiomas e definições recém-formuladas.

Escolhemos um exemplo que julgamos bastante didático, no qual os leitores terão oportunidade de provar, com rigor, algumas propriedades das operações com números reais que há anos estão acostumados a usar. Talvez, pelo fato dessas propriedades terem se tornado tão naturais, nem imaginassem que precisam ser provadas. Mas, como já advertimos, as coisas não são bem assim! De fato, é necessário prová-las, e para fazer e entender as demonstrações foi que montamos toda a teoria até este ponto. Sem falar que, para uma boa formação, todo aluno de Matemática deve, pelo menos uma vez na vida, provar os resultados que apresentaremos.

Nos próximos capítulos nos dedicaremos a demonstrações de outros resultados.

No Exercício 2, da Subseção 3.2.1, apresentamos a operação de adição e a de multiplicação de números reais por meio de axiomas. Para efeito de completude, os reenunciaremos a seguir:

AXIOMAS DE ADIÇÃO ENTRE NÚMEROS REAIS

Para cada par de números reais x e y , associamos um número real $x + y$, chamado **soma de x com y** . A operação que associa a cada par (x, y) ao número $x + y$ é chamada **adição** e satisfaz as seguintes propriedades:

S1) Associatividade da adição:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

S2) Existência do elemento neutro da adição:

Existe um número real $\xi \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as igualdades

$$x + \xi = \xi + x = x.$$

(Posteriormente, usaremos o símbolo 0 para denotar ξ .)

S3) Existência do elemento inverso (ou elemento simétrico) da adição:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y = y + x = \xi.$$

(Posteriormente, usaremos o símbolo $-x$ para denotar o elemento y .)

S4) Comutatividade da adição:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x + y = y + x.$$

AXIOMAS DE MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS:

A cada par de números reais x e y , associaremos um número real $x.y$, chamado **produto de x por y** . A operação que associa cada par (x, y) ao número $x.y$ é chamada **multiplicação** e satisfaz as seguintes propriedades:

P1) Associatividade da multiplicação:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(x.y).z = x.(y.z).$$

P2) Existência do elemento neutro da multiplicação:

Existe um número real $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \xi$, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ valem as igualdades

$$x.\theta = \theta.x = x.$$

(Posteriormente, o símbolo 1 será usado para denotar o elemento θ .)

P3) Existência do elemento inverso ou simétrico da multiplicação:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \xi$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$x.y = y.x = \theta.$$

(Posteriormente, o símbolo x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ denotará o elemento y .)

P4) Comutatividade da multiplicação:

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$x.y = y.x .$$

Todas as demais propriedades de adição e de multiplicação de números reais decorrem desses dois conjuntos de axiomas, juntamente com esse outro:

D) Distributividade do produto:

Para todos x, y e $z \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x.(x + z) = x.y + x.z.$$

Antes de usar os axiomas para provar algumas propriedades de adição e multiplicação de números reais, façamos alguns comentários:

1. Os axiomas anteriores constituem o menor conjunto de axiomas com o qual se pode provar todas as propriedades conhecidas de adição e multiplicação de números reais. Nenhum axioma pode ser deduzido dos demais.
2. Adicionamos o comentário após o axioma S_2 , pois, a princípio, nada garante que o elemento neutro da adição seja único. Essa unicidade é uma das primeiras consequências que decorrem dos axiomas, e a provaremos a seguir:

De fato, caso existissem dois elementos neutros da adição, digamos, ξ e ξ' , então ambos deveriam satisfazer ($S2$)⁶:

$$x + \xi' = \xi' + x = x$$

e

$$x + \xi = \xi + x = x,$$

para todo número real x . Em particular, considerando $x = \xi$ nas duas primeiras igualdades, e $x = \xi'$ nas duas últimas, resulta

$$\xi + \xi' = \xi' + \xi = \xi \text{ e } \xi' + \xi = \xi + \xi' = \xi'.$$

Segue de ($S4$) que

$$\xi = \xi' + \xi = \xi + \xi' = \xi',$$

⁶Aqui estamos usando a (regra de inferência) *generalização*. Ao longo do texto usaremos as regras de inferência sem mencioná-las.

garantindo a unicidade do elemento neutro da adição. Agora sim, podemos denotar esse elemento. E, como já dissemos, para preservar a tradição, a notação não poderia ser diferente de $\xi = 0$.

3. Como no caso anterior, cada número real possui um único inverso aditivo, isto é, para cada número real x , só existe um único número real y , tal que $(S3)$ vale.

Com efeito, caso algum número real x tivesse dois elementos inversos da adição, digamos, y e y' , então ambos deveriam satisfazer $(S3)$:

$$(h.1) \quad x + y = y + x = 0 \text{ (hipótese)}$$

e

$$(h.2) \quad x + y' = y' + x = 0 \text{ (hipótese).}$$

Temos então⁷:

$$y \stackrel{(S2)}{=} y + 0 \stackrel{(h.2)}{=} y + (x + y') \stackrel{(S1)}{=} (y + x) + y' \stackrel{(h.1)}{=} 0 + y' \stackrel{(S2)}{=} y'.$$

Como acabamos de provar que cada número real x possui um único inverso aditivo, podemos agora denotá-lo, e o faremos usando o símbolo $-x$.

EXERCÍCIOS:

EXERCÍCIO 1:

Enuncie e demonstre resultados análogos aos Itens (2) e (3) anteriores, para o caso da multiplicação de números reais. É claro que após provar as respectivas unicidades, você deve usar o símbolo 1 para denotar o elemento neutro da multiplicação, e x^{-1} para denotar o inverso multiplicativo de um número real não nulo x . ◇

(Nesta seção, usaremos o símbolo ◇ para sinalizar que o enunciado do exercício foi encerrado.)

As demonstrações e os exercícios a seguir provarão alguns resultados que, com certeza, você já usou e abusou deles e talvez nem tenha imaginado que só valem porque podem ser demonstrados. Agora, portanto, chegou o momento de prová-los. Para ajudá-lo, vamos fazer algumas demonstrações antes de propormos os exercícios.

PROPOSIÇÃO 1: $0.a = 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

(“O produto do elemento neutro da adição com qualquer número real é igual ao próprio elemento neutro.”)

(Hipótese: $a \in \mathbb{R}$.

Tese: $0.a = 0$.)

Demonstração:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(S2)}{=} 0 + 0 \Rightarrow a.0 = a.(0 + 0) \stackrel{(D)}{=} a.0 + a.0 \stackrel{(S3)}{\Rightarrow} a.0 + (-a.0) = (a.0 + a.0) + (-a.0) \stackrel{(S1)}{=} \\ &a.0 + (a.0 + (-a.0)) \stackrel{(S3)}{\Rightarrow} 0 = a.0 + 0 \stackrel{(S2)}{\Rightarrow} 0 = a.0. \end{aligned}$$

C.Q.D.

Nota: Observe que na demonstração usamos apenas os axiomas e nenhum resultado adicional. Note também que todos os passos da demonstração foram devidamente justificados.

⁷A validade de cada igualdade que segue é justificada pela referência acima de cada uma delas. Adotaremos esta convenção a partir deste ponto.

PAUSA PARA UMA OBSERVAÇÃO PERTINENTE:

É aconselhável terminar uma demonstração com uma frase que ressalte que se chegou à dedução da tese e que a demonstração foi encerrada. Com este fim, e, até mesmo como forma de expressar a satisfação por ter concluído o trabalho, alguns autores costumavam (outros, raros, ainda constumam) empregar as iniciais **C.Q.D.** no final da demonstração. Essas três letras são as iniciais das palavras **“como queríamos demonstrar”**. Antigamente, usavam-se as letras **Q.E.D.**, iniciais das palavras anteriores escrita em Latim, **quod erat demonstrandum**. Essa tradição remota à obra de Euclides e era usada em diversas edições do seu *Elementos*.

Atualmente, em artigos científicos, existe uma tendência de usar o símbolo ■ ou □, com a mesma finalidade.



Figura 6.1: Desenho representando Euclides (c.300-260 a.C.), que usou o modelo axiomático pela primeira vez.

EXEMPLO DE DEMONSTRAÇÃO ESTRUTURADA COMO NA DEFINIÇÃO

Sugerimos que releia a definição de demonstração dada na seção anterior. Vamos agora, de acordo aquela definição, apresentar a seqüência de sentenças que constitui a demonstração da Proposição 1:

$P_1 : S_2$ (Axioma);

$P_2 : 0 = 0 + 0$. Decorre de P_1

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_3 : a \in \mathbb{R}$ (Hipótese);

$P_4 : a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$. Decorre de P_2 e de P_3 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_5 : D$ (Axioma);

$P_6 : a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Decorre de P_4 e de P_5 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_7 : S_3$ (Axioma);

$P_8 : a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$. Decorre de P_6 e de P_7 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_9 : S_1$ (Axioma);

$P_{10} : a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$. Decorre de P_9 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_{11} : 0 = a \cdot 0 + 0$. Decorre de P_7 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações);

$P_{12} : 0 = a \cdot 0$ (Tese). Decorre de P_1 .

(Sentença resultante de sentenças anteriores deduzida por argumentações).

Esta demonstração está escrita dessa maneira apenas para exemplificar a definição de demonstração que demos. Na prática, uma demonstração deve ser escrita de forma mais simples, como fizemos nas demonstrações anteriores, e como continuaremos a fazer.

Voltemos a outros exemplos de demonstração:

PROPOSIÇÃO 2: $-a = (-1) \cdot a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(“O inverso aditivo de um número real é igual ao produto do inverso multiplicativo do elemento neutro da multiplicação com esse número.”)

(Hipótese: $a \in \mathbb{R}$.)

Tese: $-a = (-1) \cdot a$.)

Demonstração:

$$(S3) \Rightarrow 1 + (-1) = 0 \Rightarrow (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a \xrightarrow{\text{Prop.1}} (1 + (-1)) \cdot a = 0 \xrightarrow{(D)} 1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0 \xrightarrow{(P2)} a + (-1) \cdot a = 0 \xrightarrow{(S3)} (-a) + (a + (-1) \cdot a) = (-a) + 0 \xrightarrow{(S2) \text{ e } (S3)} (-a + a) + (-1) \cdot a = -a \xrightarrow{(S3)} 0 + (-1) \cdot a = -a \xrightarrow{(S2)} (-1) \cdot a = -a \Rightarrow -a = (-1) \cdot a. \text{ C.Q.D.}$$

Nota: Já nesta demonstração, além de axiomas de soma e multiplicação, usamos a Proposição 1, que já foi demonstrada.

EXERCÍCIO 2: Para ilustrar mais uma vez a definição de demonstração que demos, encontre a seqüência de sentenças que constitui a demonstração da Proposição 2.◊

Usando a existência e unicidade dos elementos inversos da adição e da multiplicação, é possível definir a subtração e a divisão de números reais.

DEFINIÇÃO DE SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS REAIS:

Para cada par de números reais x e y associamos um número real, chamado **diferença entre x e y** , que é definido como

$$x - y \stackrel{\text{Def}}{=} x + (-y).$$

A operação que leva cada par (x, y) no número $x - y$ é chamada **subtração**.

EXERCÍCIO 3: Complete a definição de divisão de números reais, seguindo o modelo da definição anterior:

DEFINIÇÃO DE DIVISÃO DE NÚMEROS REAIS:

Para cada par , $y \neq 0$, associamos um , chamado **quociente de x por y** , que é como

$$\frac{x}{y} \stackrel{\text{Def}}{=} x \cdot y^{-1}.$$

A operação que leva cada par (x, y) no número é chamada **divisão**.◊

Observe que o fato de um número ter um único inverso aditivo, e um número não-nulo ter um único inverso multiplicativo, garante que as duas **definições** anteriores sejam “**boas**”, isto é, que não há ambigüidade alguma nelas.

Usando a definição acima, vamos agora provar um resultado conhecido relativo à divisão de números reais. Em nossa demonstração, usaremos propositadamente o resultado que apresentaremos no Exercício 4-(v), sugerido mais adiante.

PROPOSIÇÃO 3: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $y, w \neq 0$, então $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x.z}{y.w}$.

(Hipóteses: $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ e $y, w \neq 0$.)

Tese: $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x.z}{y.w}$.)

Prova:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} &\stackrel{\text{Por def.}}{=} (x.y^{-1}).(z.w^{-1}) \stackrel{(P1)}{=} x.(y^{-1}.z).w^{-1} \stackrel{(P4)}{=} \\ &= x.(z.y^{-1}).w^{-1} \stackrel{(P1)}{=} (x.z).(y^{-1}.w^{-1}) \stackrel{\text{Exercício 4(v)}}{=} (x.z).(y.w)^{-1} \stackrel{\text{Por def.}}{=} \frac{x.z}{y.w} \end{aligned}$$

C.Q.D

NOTA: Nesta demonstração, além de axiomas de multiplicação e da definição de divisão de números reais, utilizamos também o Exercício 4-(v), desta subseção. Ao usarmos esse exercício, estamos admitindo que ele foi provado antes da demonstração da Proposição 3. Por esse fato, a Proposição 3 não poderá ser usada ao resolver o Exercício 4-(v), caso contrário, incorreríamos em um círculo vicioso.

Note que, antes de começarmos as demonstrações, escrevemos a hipótese e a tese de cada uma delas. Procedemos desta forma para sermos mais didáticos e porque estamos apenas iniciando com a prática de demonstrar um resultado. Quem, neste ponto, ainda não estiver muito seguro em distinguir hipóteses de tese, aconselhamos seguir esta prática.

EXERCÍCIO 4: Prove as seguintes propriedades de adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais. Justifique *cada* igualdade ou implicação que utilizar. Lembre-se de que é permitido usar os resultados anteriormente provados, exceto usar a Proposição 3 para provar o Exercício 4-(v).

Considere $x, y, w \in \mathbb{R}$. Prove:

- i) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (Lei do Cancelamento da Soma)
- ii) $x.y = x.z$ e $x \neq 0 \Rightarrow y = z$ (Lei do Cancelamento do Produto)

OBSERVAÇÃO: Note que a demonstração da Proposição 1 ficaria bem mais curta, se, naquela ocasião, já tivéssemos a Lei do Cancelamento da Soma.

iii) $(-x).y = -(x.y)$

Dica: Pense um pouco onde se quer chegar e trabalhe com a soma $(-x).y + (x.y)$.

iv) $(-x).(-y) = x.y$

Dica: Trabalhe com a soma $(-x).(-y) + [-(x.y)]$, usando o item (ii). Depois use a Proposição 1.

v) Se $x, y \neq 0$, então $(x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$.

Escreva com palavras o que essa igualdade quer dizer.

vi) $x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Enuncie resultado análogo para o produto de três números reais.

Dica: Trabalhe com as possibilidades de x e y serem ou não nulos.

$$vii) \frac{x}{y} = \frac{x.z}{y.z}, \text{ se } y, z \neq 0.$$

$$viii) \frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{x.w + z.y}{y.w}, \text{ se } y, w \neq 0.$$

$$ix) \left(\frac{1}{y}\right)^{-1} = y, \text{ se } y \neq 0.$$

$$x) \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}, \text{ se } x, y \neq 0.$$

xi) Definindo $x^2 \stackrel{\text{Def}}{=} x.x$, prove que

$$a) (x+y).(x-y) = x^2 - y^2.$$

$$b) (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

EXERCÍCIO 5: Lembre de algumas propriedades de adição e multiplicação de números reais que você usava e as demonstre agora.

EXERCÍCIO 6: Todo estudante, algum dia, já resolveu inequações envolvendo números reais. Isso só foi possível graças às propriedades de ordenação que os números reais possuem. Essa ordenação significa que os números reais possuem uma ordem, permitindo que eles possam ser comparados; isto é, um deles é sempre igual, menor do que, ou maior do que outro. A seguir, vamos apresentar essa ordenação por meio de dois simples axiomas. Nos exercícios, os leitores poderão provar as várias propriedades de ordem que os números reais possuem e que, enquanto estudantes, têm utilizado no decorrer de sua vida acadêmica.

AXIOMA DE ORDENAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS:

No conjunto dos números reais \mathbb{R} existe um subconjunto P tal que

O1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ ocorre uma única das três possibilidades:

$$x = 0, \text{ ou } x \in P, \text{ ou } -x \in P.$$

O2) Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x.y \in P$.

Você consegue adivinhar qual é o conjunto P ? Pois bem, ele é o conjunto dos números reais positivos, que você conhece perfeitamente e é representado por \mathbb{R}^+ . Este conjunto apenas está sendo enunciado de uma maneira mais formal, o que permitirá provar as propriedades de ordem dos reais a partir dos axiomas (O1) e (O2).

Para prosseguir, complete a definição:

DEFINIÇÃO:

i) Dizemos que um número real x é **positivo** quando $x \in P$, e, neste caso, denotamos $x > 0$ ou $0 < x$.

ii) Dizemos que um número real x é _____ quando $-x \in P$, e, neste caso, denotamos _____ ou _____.

iii) Dados dois números reais _____, dizemos que x é **maior do que** y , quando $x - y \in P$. Nesse caso, denotamos _____ ou _____.

iv) _____ x é **menor do que** y , se $-(x - y) \in P$. _____
 _____ ou _____.

Agora chegou a hora de provar as principais propriedades de desigualdades de números reais:

Dados $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, usando as definições e os axiomas (O1) e (O2), demonstre as seguintes propriedades relativas à ordem de números reais:

i) Lei da Tricotomia:

Apenas uma das três alternativas abaixo ocorre:

$$x < y, \text{ ou } x = y, \text{ ou } x > y;$$

ii) Transitividade:

$$\text{Se } x < y \text{ e } y < z, \text{ então } x < z;$$

Dica: Complete a demonstração de (ii):

Como _____ e $y < z$, obtemos, respectivamente, $y - x \in P$ e _____. Logo, pela propriedade de adição em (O2), segue que $+z - y =$ _____ $\in P$. Ou seja, $x < z$. C.Q.D.

iii) Monotonicidade da Adição:

$$\text{Se } x < y \text{ e } z \in \mathbb{R}, \text{ então } x + z < y + z;$$

Dica: $x - y = (y - z) - (x + z)$.

iv) Monotonicidade da Multiplicação:

$$\begin{aligned} \text{Se } x < y \text{ e } z > 0, \text{ então } x.z < y.z; \\ \text{Caso } z < 0, \text{ tem-se } x.z > y.z; \end{aligned}$$

Dica: No caso em que $z > 0$, basta usar a propriedade de multiplicação, dada em (O2). O outro caso segue semelhantemente.

Do item (iv), deduza os seguintes corolários:

- 1) $a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow a.b < 0$;
- 2) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow a.b > 0$;
- 3) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow a.b > 0$;

v) Se $x < y$ e $z < w$, *então* $x + z < y + w$ e $x.z < y.w$, *caso* $x, z > 0$;

vi) Se $x \neq 0$, *então* $x^2 > 0$;

vii) Se $0 < x < y$, *então* $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ e $y^2 > x^2$.

CAPÍTULO 7

Conjecturas, problemas em aberto e contra-exemplos

“Se você quer realmente ser alguém que procura a verdade, deve pelo menos uma vez na vida duvidar, ao máximo possível, de todas as coisas.”

René Descartes (1596-1650)

In O Discurso do Método, 1637

“Quando você elimina o impossível, o que resta, mesmo que improvável, deve ser a verdade.”

Sir Arthur Conan Doyle (1859-1930)

The Sign of Four

“A busca da verdade é mais preciosa que sua posse.”

Albert Einstein (1879-1955)

The American Mathematical Monthly v. 100 no. 3

“Seis é um número perfeito nele mesmo, e não porque Deus criou o mundo em seis dias; a recíproca é que é verdade: Deus criou o mundo em seis dias porque este número é perfeito, e continuaria perfeito mesmo se o trabalho de seis dias não existisse.”

Santo Agostinho (354-430)

In A Cidade de Deus

“Tal como números perfeitos, homens perfeitos são muito raros.”

René Descartes (1596-1650)

7.1 Conjecturas e contra-exemplos

Leia com atenção as frases a seguir. Pare um pouco e gaste algum tempo investigando se elas são verdadeiras ou não. Não estamos pedindo uma demonstração ou uma resposta rigorosa, portanto, não se acanhe em dar sua opinião, qualquer que ela seja. Sugerimos que só prossiga com a leitura, após analisar cada uma das sentenças.

Sentença 0: *Toda garota brasileira de 17 anos usa batom.*

Sentença 1: *Todo número da forma $n^2 + n + 41$, para n natural, $n \geq 0$, é um número primo¹.*

Sentença 2: *Qualquer número da forma $991n^2 + 1$, para n natural, $n \geq 1$, não é um quadrado perfeito (isto é, não é da forma k^2 , para algum k natural)*

Sentença 3: *Um número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

Sentença 4: $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Vamos agora investigar a veracidade dessas sentenças, quando você poderá conferir as respostas que deu. A princípio, nenhuma das sentenças pode ser considerada como teorema, já que não foi apresentada qualquer demonstração.

A primeira frase, apesar de não ser matemática, está nos moldes do que definimos como sentença (vide Seção 2.1). Para verificar que ela é verdadeira, é preciso checar se cada garota brasileira com 17 anos usa batom. Não interessa a quantidade de garotas brasileiras com 17 anos que alguém possa apresentar, devemos verificar se *todas* elas usam batom. Caso alguém nos exiba pelo menos uma garota brasileira de 17 anos que não usa batom, a **Sentença 0** é falsa, fato este que ocorre.

Analisemos a **Sentença 1**. Numa primeira verificação, desconfiando de que a sentença é verdadeira, alguém pode começar a checá-la para a seqüência de números naturais $n = 0, n = 1, n = 2, \dots$. Com esforço, essa pessoa verifica que a sentença é verdadeira na medida em que avança na seqüência dos números naturais; é previsível que comece a ficar animada com os resultados obtidos e, intimamente, fique convencida de que a sentença é verdadeira. Mas essa alegria só durará até $n = 39$, pois a sentença é falsa para $n = 40$ (vide Exercício 2)!

De qualquer forma, o procedimento anterior não poderia jamais fornecer uma justificativa aceitável, assegurando que a sentença seja um teorema, pois seria preciso checá-la para todo número natural, não importando quão grande seja esse número. É claro que tal procedimento é impossível de ser realizado, já que não pararia nunca!

Mesmo que a Sentença 2 envolva números com muitos dígitos, vamos supor que as mesmas ideias e disposição aplicadas à Sentença 1 sejam direcionadas à análise da Sentença 2. Uma pessoa ao começar a checá-la, vai verificar que ela é verdadeira para a primeira dezena de números e, caso tenha fôlego para o intento, que é válida, também, para a primeira centena de números. Lembre-se de que estamos apenas supondo! Como começa a trabalhar com números muito grandes, recorre ao computador e verifica que a sentença é também válida para o primeiro milhar, para o primeiro milhão, para o primeiro bilhão, e, confiando nos resultados computacionais, é levada a crer que a **Sentença 2** realmente é verdadeira! Festa e alegria! Todavia, é prudente ir com calma! Mais uma vez, deve-se ter muito cuidado com esse tipo de argumentação, pois pode-se cair num engano! Incrivelmente, a sentença é falsa, e falha para o seguinte “monstrinho numérico”:

$$n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767.$$

([Golovina & Yaglon, 1981])

Mas não se preocupe, com certeza, só cálculos computacionais podem chegar a esses resultados!

Esse exemplo reforçou, ainda mais, nossa observação de que uma sentença pode ser falsa, não importando quão grande a quantidade de elementos para os quais seja possível verificar que ela é válida.

Agora, vamos analisar a **Sentença 3**. Se você conseguir prová-la ou encontrar um contra-exemplo para ela, não tenha dúvidas, você será famoso internacionalmente e, sem exageros, poderá apare-

¹Em 1772, Euler demonstrou esse fato para os quarenta primeiros números naturais, começando com $n = 0$.

CONTRA-EXEMPLO: em Matemática, quando é possível encontrar um exemplo de um elemento que satisfaz a hipótese, mas contraria (não cumpre) a tese de uma sentença implicativa ou condicional, esse exemplo é chamado *contra-exemplo*.

Um único contra-exemplo é suficiente para assegurar que determinada sentença é falsa. No que expusemos, uma garota brasileira de 17 anos que não usa batom é um contra-exemplo para a *Sentença 0*, já $n = 40$ é um contra-exemplo para a *Sentença 1*, e o “monstrinho numérico” apresentado nesta seção (não iremos reescrevê-lo, contém muitos dígitos!) é um contra-exemplo para a *Sentença 2*.

CUIDADO: basta apenas exibir um contra-exemplo para assegurar que uma proposição é falsa, mas, por outro lado, não basta exibir exemplos que satisfaçam uma sentença – não importa a quantidade deles que se exibam! – para garantir que ela seja verdadeira! É necessário apresentar uma demonstração.

cer nos principais jornais do mundo inteiro! Sem falar no prêmio de U\$1.000.000,00 que a editora **Faber and Faber** já ofereceu para quem resolvesse esse problema (<http://www.faber.co.uk>). A Sentença 3 é conhecida como a *Conjectura de Goldbach*, sobre a qual falaremos mais detalhadamente na Subseção 7.3.1.

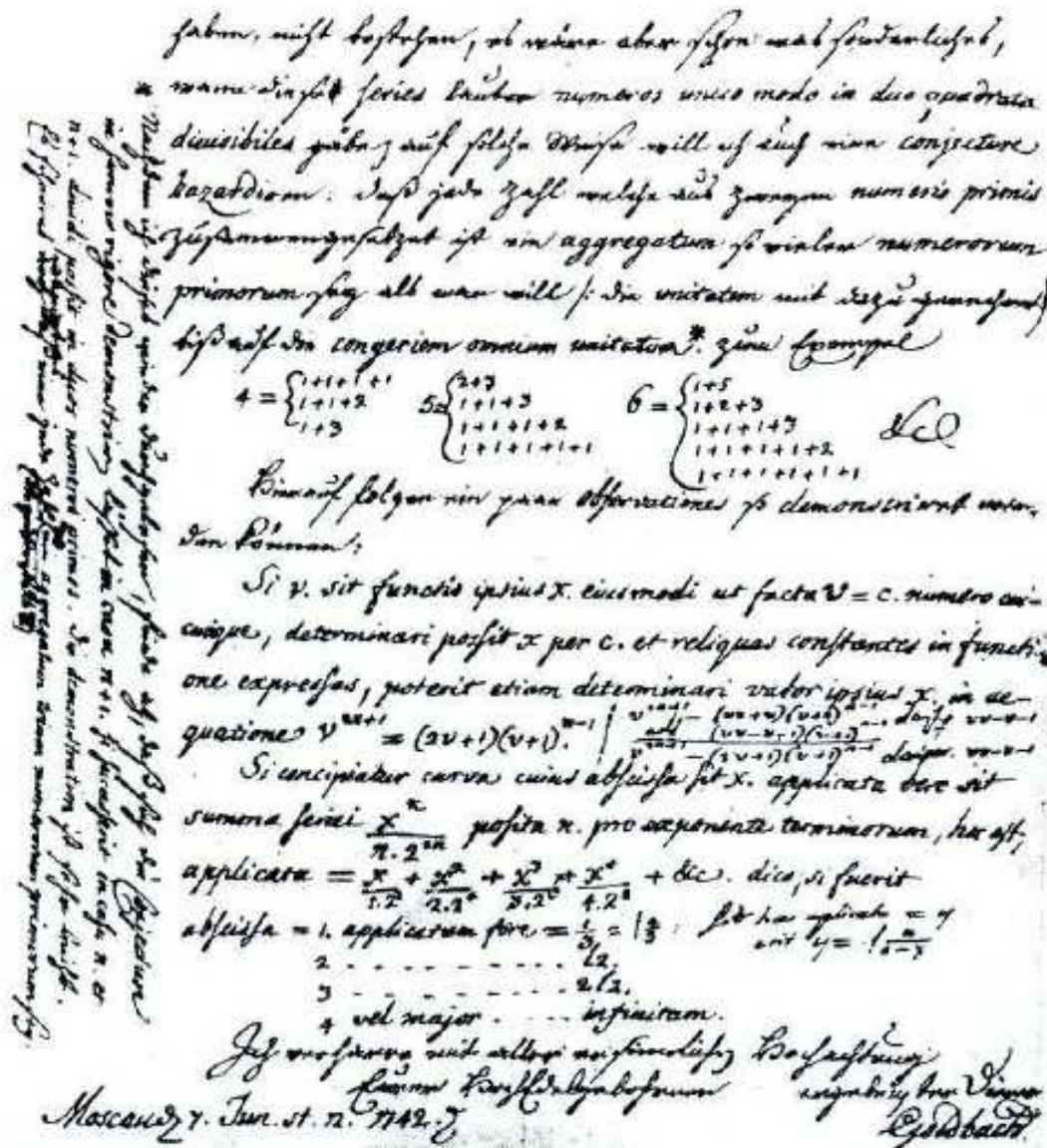


Figura 7.1: Fac-simile da carta de Goldbach para Euler, escrita em Latim, na qual expõe uma versão de sua conjectura. No final da carta, vê-se na data, o ano de 1742.

Pelo que dissemos, a *Sentença 3* (ainda) não é um teorema; por enquanto, é uma conjectura. Convém observar que, sendo mais rigorosos, como não conhecemos o valor lógico da *Sentença 3*,

CONJECTURA: na Matemática, uma *conjectura* (ou conjectura) é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade; ou de um contra-exemplo para garantir que ela não é verdadeira. Numa conjectura, alguém emite sua opinião sobre algum resultado e afirma sua convicção de que determinado fato é válido ou não. Já que essa pessoa não consegue provar a opinião que deu, cabe à comunidade matemática encontrar uma prova ou um contra-exemplo para a opinião emitida. É claro que para chamar uma sentença de conjectura, deve-se ter bastante desconfiança da veracidade do que se está afirmando.

nem mesmo poderíamos ter nos referido a ela como *sentença*. No caso, relaxamos um pouco no uso deste nome, pois acreditamos que, algum dia, seja possível dar uma resposta à Conjectura de Goldbach.

A questão se toda frase, estruturada como uma sentença, tem um valor lógico definido é uma questão delicada, que foge aos nossos objetivos, ficando reservado a estudos bem mais profundos de Lógica-Matemática.

Retornando às sentenças, antecipamos que a *Sentença 4* é verdadeira, e os leitores já ouviram falar dela, é um resultado conhecido desde a Grécia Antiga. Acredita-se que $\sqrt{2}$ foi o primeiro número irracional de que se teve notícia. Na Seção 11.1, vamos demonstrar esse teorema.

Finalizamos, ressaltando que as asserções com as quais trabalhamos nesta seção são instrutivas para que você sinta como a Matemática funciona em muitas circunstâncias: ao desconfiar de que algum resultado é verdadeiro, começamos testando-o com alguns exemplos; caso logremos êxito, este fato reforça a convicção para demonstrá-lo, apesar de ser, apenas, um *índicio*. Mas a certeza de que o resultado é válido ou não só se terá com uma demonstração ou com um contra-exemplo. Essa é a idéia do qual consiste o *método heurístico* matemático.

A desconfiança à qual nos referimos, nada mais é do que o espírito inquiridor que todo aquele que se dedica à Matemática deve ter e que tem movido a Ciência desde seus primórdios.

Cabe-nos dizer que a intuição é um ingrediente indispensável nessas análises, mas ela não é tudo e, se mal utilizada, pode enganar! A imaginação e a visão geométrica são outros dois requisitos que também devemos nos esforçar para desenvolver.

EXERCÍCIOS:

1. Encontre um contra-exemplo para as seguintes sentenças Lembre-se de que um contra-exemplo é um exemplo explícito, que contraria uma afirmação. Só é necessário exibir um contra-exemplo.
 - (a) Dois números terminarem em 6 é condição necessária para que seu produto também termine em 6.
 - (b) Se o produto de dois números termina em 9 então pelo menos um desses números é múltiplo de 3.
 - (c) Sejam a e b números reais. Tem-se: $a + b > 0 \Rightarrow a, b > 0$.
 - (d) Três números inteiros positivos dispostos na forma (a, b, c) , tais que $a^2 + b^2 = c^2$, são chamados *terno pitagórico*. Existe apenas um número finito de ternos pitagóricos.
 - (e) Veja um método maravilhoso de simplificação:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

e assim por diante. Ou seja, para encontrar o resultado de uma fração desse tipo, basta cancelar o algarismo do numerador, com o que se repete no denominador, e pronto!.

- (f) Todo polígono é circunscrito por uma circunferência.
- (g) O determinante da soma de duas matrizes quadradas é a soma dos determinantes de cada uma dessas matrizes.
- (h) Se x, y, z, w são números reais tais que $x < y$ e $z < w$, então $x - z < y - w$.
- (i) Ter duas linhas iguais é uma condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada de ordem 3 tenha determinante nulo.
- (j) Toda reta que passa pelo vértice de uma pirâmide intersecta a base da pirâmide.
- (k) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, para quaisquer x e y reais.
- (l) Uma condição suficiente para que um número seja primo é que ele seja da forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$.
2. (a) Prove que $40^2 + 40 + 41$ não é um número primo.
(Dica: $41 = 40 + 1$ e use fatoração)
- (b) Se $(*)f(n) = n^2 + n + 41$, verifique que $f(n - 1) = f(-n)$.
- (c) Já que $f(n - 1) = f(-n)$, deduza que a função $f(n) = n^2 + n + 41$ assume valores primos para os 80 números consecutivos $-40, -39, \dots, -1, 0, 1, \dots, 39$.
OBSERVAÇÃO: Já se provou que f assume mais de 580 valores primos. ([Ribenboim, 2001], p. 126)
- (d) Substitua n por $n - 40$ em $(*)$, e encontre

$$f(n - 40) = n^2 - 79n + 1601.$$

- (e) Da última expressão, conclua que você está diante de um trinômio do segundo grau

$$g(n) = n^2 - 79n + 1601,$$

que fornece primos para os primeiros 80 números naturais, começando com $n=0$. Um recorde, até hoje, para um polinômio desse tipo!

Não é difícil provar que não existe um polinômio $p(x)$, com coeficientes inteiros a uma variável, tal que $p(n)$ seja sempre um número primo (vide [da Silva Ramos, 2001] ou [Collier, 2003], p.54). Entretanto, curiosamente, existe sim uma fórmula (nada polinomial!) de fácil acesso, que fornece todos os primos e somente eles (vide [Watanabe, 1998]). Outras fórmulas que fornecem vários primos podem ser vistas em [Ribenboim, 2001].

7.1.1 *Curiosidade: A perfeição do Conjunto Vazio

O conjunto vazio, apesar de transparecer algo desprezível, é um conjunto extremamente importante na Matemática. Com a teoria dos conjuntos ele assumiu um papel de destaque, e há mesmo aqueles que louvam quem teve a idéia de inventá-lo. Seu uso evita de escrever longas e possíveis exceções ao elaborar uma teoria matemática.

Sobre sua curiosa natureza, dizem até que o conjunto vazio é a única coisa perfeita no universo. De fato, para ele deixar de ser perfeito, deveria conter alguma imperfeição, ou algo nele que fosse imperfeito, mas ele nada contém!

A seguir, daremos uma aplicação do conjunto vazio dentro da lógica. Sabemos que uma sentença condicional da forma ‘se P , então Q ’ é verdadeira, se todo elemento que satisfizer a hipótese P , cumprir necessariamente a tese Q . E essa sentença será falsa, se pudermos exibir (pelo menos!) um elemento que satisfaça a hipótese e não cumpra a tese, ou seja, se existir um contra-exemplo para a sentença. Logo, essas sentenças serão verdadeiras se não possuírem contra-exemplos, e reciprocamente.

Existem sentenças condicionais que, pela sua construção, não possuem contra-exemplos, já que o conjunto dos elementos que satisfazem a hipótese é vazio. Quando isso ocorre, dizemos que a sentença é *verdadeira por vacuidade*.

Exemplos de sentenças verdadeiras por vacuidade:

Sentença 1: ‘*Todo quadrado de três lados tem área igual a 2013*’.

Sentença 2: ‘*Existe um número natural positivo menor do que 1 que é divisível por 9*’.

Na prática, apesar de dificilmente encontrarmos alguma sentença como as anteriores, vale a pena descrevê-las para se ter uma idéia de como a Lógica Formal pode funcionar.

EXERCÍCIOS:

1. Dê mais dois exemplos de sentenças matemáticas condicionais que são verdadeiras por vacuidade. Solte a criatividade!

7.2 *Relato de algumas das conjecturas mais socialmente famosas

da Matemática que já foram resolvidas

Vamos, a seguir, apresentar algumas conjecturas matemáticas que se tornaram famosas e já foram resolvidas. Elas têm por característica um enunciado de fácil compreensão para os não-especialistas. Esse fato, no entanto, não quer dizer que as técnicas e a teoria matemática que foram desenvolvidas no decorrer dos anos e utilizadas para resolvê-las sejam também de fácil entendimento para os não-especialistas da área, mesmo para os matemáticos profissionais.

7.2.1 O problema das quatro cores

“*Dado um mapa geográfico qualquer no plano, qual o número mínimo de cores que se deve usar para pintá-lo, de modo que cada país tenha uma cor e que países com fronteiras em comum tenham cores diferentes?*”

Se as fronteiras de dois países se tocam apenas num ponto (como o mapa dos estados brasileiros do Maranhão e da Bahia) então eles podem ser pintados com a mesma cor.

Como uma primeira resposta, um simples desenho é suficiente para se convencer que apenas três cores não bastam (Exercício 1, desta subseção). Conjeturou-se que quatro cores seriam suficientes.

O interessante é que essa conjectura foi formulada pela primeira vez por Francis Guthrie, irmão de Frederick Guthrie, um aluno de **De Morgan**². Em 1847, Francis pediu ao irmão que perguntasse a De Morgan se sua resposta estava certa.

De Morgan não conseguiu resolver o problema e o repassou a outros matemáticos, que também não conseguiram resolvê-lo. Em 1878, o matemático inglês **Arthur Cayley**³ propôs a questão à Sociedade

²O matemático e lógico inglês **Augustus de Morgan** (1806-1871) é conhecido pelas “*Leis de De Morgan*”, que apresentaremos no Exercício-3(a), do Capítulo 9.

³**Arthur Cayley** (1821-1895) escreveu cerca de 967 artigos científicos. Mesmo que seu nome não esteja associado a qualquer teorema do Ensino Médio, ele foi um dos fundadores da teoria dos determinantes e deu significativas contribuições à Álgebra Avançada.

de Matemática de Londres. Em 1890, na tentativa de resolvê-la, o também matemático inglês P. J. Heawood (1861-1955), provou que pelo menos cinco cores eram suficientes.

O número mínimo de quatro cores estava confirmado, só restava uma demonstração. O problema logo tornou-se desafiador e famoso, resistindo às várias tentativas de demonstrá-lo, até que em 1976, o famoso jornal americano *The New York Times* anunciava que haviam feito a tão procurada demonstração. A manchete espalhou-se também em revistas e jornais de todo o mundo, um caso raro para um feito matemático.

A prova dessa conjectura foi dada pelos matemáticos americanos Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Esse foi o primeiro teorema famoso cuja demonstração foi feita com auxílio computacional. A demonstração analisa um número tão grande de possíveis casos, que torna humanamente impossível checá-los. De imediato surgiram as críticas de alguns *puristas* que gostariam de realmente “ver” e “sentir” a demonstração, como sempre foi possível com as demais demonstrações.

A busca de uma teoria que pudesse resolver o Problema das Quatro Cores deu um grande avanço no desenvolvimento de uma área da Matemática chamada *Teoria dos Grafos*, hoje, de grande aplicabilidade a diversos problemas práticos.

7.2.2 Até os gênios se enganam

Em 1640, *Pierre de Fermat*⁴ conjecturou que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ eram números primos. Mas Fermat foi traído por seus cálculos. Em 1732, Euler, com sua usual habilidade em lidar com números muito grandes, mostrou que

$$2^{2^5} + 1 = 6.700.417 \times 671.$$

Os números da forma $2^{2^n} + 1$ ficaram conhecidos como *números de Fermat*, e os números primos dessa forma, como *primos de Fermat*. Até o momento, mesmo com todo o avanço computacional, não se conseguiu encontrar outros primos de Fermat, além dos cinco primeiros que ele mesmo conhecia. Apresentaremos mais detalhes na Seção 7.3.6.

Mas os números também enganaram Euler e, é claro, enganam muita gente ainda hoje. No caso de Euler, ele conjecturou que se $n \geq 3$, e k é um número inteiro positivo, então é necessário, *pelo menos*, a soma de n n-ésimas potências inteiras $a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n$ para escrever a potência k^n .

Em 1966, num artigo do Boletim da Sociedade Matemática Americana [Lander & Parkin, 1966], um simples exemplo põe por terra a conjectura de Euler: os matemáticos L. J. Lander e T. R. Parkin, mostraram que

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5.$$

Dessa história se tira a lição de que, vez em quando, temos também o direito de ousar em nossas opiniões sem ter medo de errar, pois, até os gênios se enganam...

7.2.3 A sensação do século passado: o Último Teorema de Fermat

No ano de 1993, a Matemática mais uma vez tomou conta das manchetes de jornais, semanários e revistas de todo o mundo. O último teorema de Fermat, que apresentaremos a seguir, tinha sido resolvido e

⁴*Pierre de Fermat* (1601-1665). Esse notável francês era advogado por profissão e um brilhante matemático amador. Fermat teve o respeito da comunidade científica e manteve uma intensa correspondência com vários matemáticos e cientistas de sua época, por meio da qual ajudou a fundamentar a base da Teoria Moderna dos Números. Foi um dos precursores do Cálculo Integral e Diferencial, foi também co-inventor independente da Geometria Analítica (compartilhada com René Descartes) e da Teoria da Probabilidade (compartilhada com *Blaise Pascal* (1623-1662)). Na Óptica, formulou o Princípio do Tempo Mínimo (Princípio de Fermat).



Figura 7.2: O matemático-amador e advogado Pierre de Fermat (1601-1665).

finalmente descansaria em paz, depois de uma verdadeira batalha de centenas de pessoas que tentaram demonstrá-lo durante 350 anos.

Por volta de 1637, na margem do seu exemplar do livro **Arithmetica**, de **Diofanto**⁵, justamente no ponto em que Diofanto encontra infinitas soluções inteiras para a equação $x^2 + y^2 = z^2$, Fermat escreveu mais uma de suas anotações, onde registrava que tinha descoberto um resultado sensacional, mas que naquela margem do livro não dispunha de espaço suficiente para prová-lo:

Se $n \geq 3$, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras x, y e z não-nulas.

Por seu enunciado simples e atrativo e pela dificuldade em demonstrá-lo, o problema tornou-se célebre e logo despertou o interesse de milhares de pessoas de todas as partes do mundo, matemáticos profissionais ou amadores, que desde então tentaram demonstrá-lo.

Ao longo dos séculos, surgiram demonstrações parciais do teorema para certos expoentes n , como também centenas de demonstrações erradas, que continuam a aparecer ainda hoje. Entre os matemáticos famosos que provaram casos particulares ou parciais do Teorema para certos expoentes n , estão Euler ($n = 3$); **Sophie Germain**⁶ (para certos casos envolvendo *os primos de Sophie Germain*, que são os primos p tais que $2p + 1$ são também primos); Dirichlet ($n = 5$; $n = 14$); Legendre ($n = 5$); Lamé ($n = 7$); Kummer (para certos tipos de primo), entre dezenas de outros.

Antes da Segunda Guerra Mundial, havia um prêmio de 100.000,00 marcos alemães para quem demonstrasse o teorema, e vários outros prêmios foram oferecidos posteriormente. Mas muita teoria ainda precisava ser desenvolvida para que pudesse surgir uma solução definitiva para o problema. O caminho para resolvê-lo residia no surgimento de novas técnicas e teorias, o que muito contribuiu para o desenvolvimento de um ramo da matemática chamado Teoria Algébrica dos Números.

Finalmente, uma prova foi apresentada em 1995, quando o matemático inglês, que trabalhava em Harvard (EUA), **Andrew Wiles** (1953-), deu uma demonstração completa do teorema. Sua primeira resolução de 1993 tinha um erro, que foi corrigido com a ajuda de Richard Taylor, matemático também

⁵**Diofanto de Alexandria** (c. 250) foi um matemático grego que nos legou o trabalho citado, em que considera vários problemas algébricos envolvendo polinômios com coeficientes inteiros. Por essa razão, essas equações passariam a ser chamadas de *equações diofantinas*.

⁶**Sophie Germain** (1776-1831): matemática francesa. Uma das primeira mulheres matemáticas a obter respeito e notoriedade pelas suas descobertas. Entre outros destaques, foram de seus trabalhos que nasceu o conceito de curvatura média usada em Geometria Diferencial. Para saber mais sobre a interessante história do papel da mulheres na Matemática, sugerimos [de Moraes Filho, 1996] e [de Moraes Filho, 1997].



Figura 7.3: Efígie de Sophie Germain (1776-1831), em uma medalha. Seguramente, Sophie foi a primeira mulher a obter resultados inéditos e relevantes em Matemática. Por motivos históricos e sociais, um fato desses só viria a ocorrer pela primeira vez na História da Matemática no Século XVIII.

inglês. A demonstração usa técnicas e teorias matemáticas bastante especializadas⁷, muito além do simples enunciado do teorema, e ocupa mais de 150 páginas. As técnicas e teorias que ele usou são bem sofisticadas, o que, consequentemente, restringe o entendimento da demonstração para os não-especialistas.

Mas muitos amadores não se dão por vencidos com a notícia de que o problema já foi resolvido. Vários deles sonham que seja possível dar uma demonstração elementar para o Último Teorema de Fermat, em particular, aquela que cada um ainda está buscando! Vez por outra, professores ainda são procurados para darem opiniões sobre alguma nova demonstração, que, infelizmente, está errada. Por um lado, isso é bom, pois comprova o poder desafiador que a Matemática sempre exerceu sobre um grande público.

Fermat costumava divulgar suas descobertas, perguntas e ideias entre os matemáticos de sua época, com os quais manteve uma intensa correspondência. O mais famoso resultado de suas pesquisas sobre números, a conjectura que acabamos de apresentar, ficou conhecido como “O Último Teorema de Fermat”, não por ter sido sua última descoberta, mas porque foi, na verdade, o último de seus questionamentos que ficou sem resposta.

Hoje é quase certo que Fermat não podia dispor de uma demonstração para seu resultado: a margem de seu livro não teria espaço suficiente para tanto⁸ ...

7.2.4 Curiosidade: coisas da Matemática...

Os números primos de Fermat, juntamente com a questão da existência de uma infinidade deles, entraram definitivamente para a história da Matemática quando, em 1796, o matemático alemão **Carl**

⁷Com esse comentário queremos deixar claro que é necessário tempo e dedicação para devotar-se ao estudo da teoria e das técnicas utilizadas na demonstração do Teorema de Fermat: Geometria Algébrica, Curvas Elípticas, Formas Modulares, Números p-ádicos, entre outros. Para constar, [Wiles, 1995] é o artigo original da demonstração do Teorema de Fermat. Na referência [Singh, 1998], muito bem vendida no Brasil e no mundo, pode-se encontrar toda a história do Último Teorema de Fermat, escrita para não-especialistas.

⁸Certa feita, ouvi dizer que viram no metrô de Nova Iorque a seguinte pichação: “*Acabei de demonstrar o Teorema de Fermat, mas meu metrô já está chegando e não tenho tempo de escrevê-la!!! Desculpem!!!*” Verdade ou não, a história por si só demonstra a fascinação popular por esse teorema, que continua viva ainda hoje.

Friedrich Gauss⁹ (1777-1855) demonstrou que

Com o uso apenas de um compasso e de uma régua sem escalas, é possível dividir uma circunferência em n partes iguais, $n \geq 3$ se, e somente se,

$$i) n = 2^k$$

ou

$$ii) n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l,$$

onde os p_i 's são números primos de Fermat distintos¹⁰.

O problema da divisão de uma circunferência em partes iguais remonta à Antiga Grécia. O resultado de Gauss, além de ser um resultado fabuloso, une, de uma forma extremamente inesperada, a Geometria à Teoria dos Números.

Esse teorema de Gauss revela uma lição: mostra que, às vezes, alguma descoberta matemática que, aparentemente, e naquele momento, não tem aplicação prática imediata e parece ser apenas teórica, pode tornar-se indispensável para a resolução de futuros problemas práticos! Há outros casos desse tipo na Matemática, como, por exemplo, o das Geometrias não-Euclidianas que, só muito tempo depois de *descobertas*, foram utilizadas para dar sustentação matemática à Teoria da Relatividade do famoso físico Albert Einstein (1879-1955).

Atualmente, alguns resultados da Teoria dos Números que, aparentemente, eram apenas teóricos, estão sendo largamente empregados na área de Códigos de emissão de mensagens (Criptografia). Vide uma excelente exposição sobre esse tema em [Collier, 2003].

EXERCÍCIOS:

1. Com o auxílio de um desenho, se convença que três cores não são suficientes para pintar um mapa de modo proposto no Problema das Quatro Cores.
2. Encontre os primeiros três números de Fermat. Não se iniba de usar calculadora, caso precise.
3. Mostre que, sem perda de generalidade, é possível considerar que se $x^n + y^n = z^n$, para números inteiros positivos x, y e z , então esses números não possuem fatores primos em comum.
4. Usando uma interpretação mais geométrica, o Teorema de Pitágoras assegura que, em certos casos, há quadrados de lados inteiros que podem ser decompostos em dois outros quadrados, também de lados inteiros. Vendo uma potência A^3 como o volume de um cubo de lado medindo A , qual poderia ser uma versão como a anterior para o Último Teorema de Fermat (abreviadamente: UTF)?
5. Os exercícios abaixo requerem um pouco de cálculo e uma análise crítica de comparação com outros resultados.
 - (a) Dados dois inteiros positivos m e n , de sorte que $m > n$, considerando $z = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$ e $x = 2m \cdot n$, verifique que a equação $x^2 + y^2 = z^2$ possui infinitas soluções. Um terno (x, y, z) com essa propriedade é chamado **terno pitagórico**.
 - (b) Uma generalização do caso anterior para o expoente 3 é a seguinte:

⁹Desde cedo, possuidor de uma prodigalidade admirável, Gauss deu enormes contribuições à Álgebra, aos Números Complexos, à Teoria dos Números e a várias outras áreas da Matemática, da Astronomia e da Física.

¹⁰A demonstração do teorema, que requer conhecimentos de Álgebra, pode ser encontrada em [Artin, 1991].

Se

$$\begin{aligned}x &= 28m^2 + 11m.n - 3n^2 \\y &= 21m^2 + 11m.n - 4n^2 \\z &= 35m^2 + 7m.n + 6n^2 \\t &= 42m^2 + 7m.n + 5n^2\end{aligned}$$

então a equação

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

possui infinitas soluções.

- (c) Analise os dois resultados acima, comparando-os com o UTF.
 - (d) Usando o UTF, mostre que a Conjectura de Euler, sobre a qual falamos na Subseção 7.2.2, vale para o caso $n = 3$.
6. Dê exemplos de números primos de Sophie Germain.
7. Dentre os polígonos regulares com n lados, determine quais deles podem ser construídos com régua e compasso, no caso em que:
- (a) $n = 34$
 - (b) $n = 7$
 - (c) $n = 20$

7.3 *Alguns problemas em aberto, de fácil entendimento para os não-especialistas

Chama-se **problema em aberto** a um problema matemático que ainda não foi resolvido. Em geral, esses tipos de problemas pertencem a áreas bastante específicas e especializadas, o que dificulta seu entendimento para os não-especialistas. Mas a Teoria dos Números é uma área repleta de problemas em aberto de fácil entendimento para qualquer pessoa que tenha apenas noções básicas sobre números. Mais uma vez, isso não significa que esses problemas também possam ser resolvidos usando somente conhecimentos matemáticos básicos. Adiantamos que, a princípio, tudo leva a crer que as resoluções desses problemas usarão, com certeza, técnicas e teorias bem avançadas. Mas não se desestimule em dar qualquer tentativa sua para resolvê-los.

Vejamos a seguir alguns dos mais conhecidos problemas em aberto de fácil entendimento, e que podem se tornar de domínio público, pois não requerem terminologias especializadas para serem enunciados.

7.3.1 A Conjectura de Goldbach

A conjectura de Goldbach: *Todo número par maior que dois é soma de dois números primos* é um dos mais famosos problemas em aberto da Teoria dos Números. Em 1742, uma versão dessa conjectura foi enunciada pelo matemático alemão **Christian Goldbach** (1690-1764), numa correspondência a Euler. A partir daquele ano os matemáticos começaram a tentar prová-la ou encontrar um contra-exemplo para ela! Até o presente momento, mesmo com os mais avançados recursos computacionais modernos, não se conseguiu provar ou encontrar um contra-exemplo para a sentença. Já se verificou que é válida para os maiores números pares que os computadores modernos conseguem trabalhar. Já foi checado,

também, que a conjectura é válida para todos os números pares menores do que 4×10^{14} (1998). (Vide <http://www.informatik.uni-giessen.de/staff/richstein/ca/Goldbach.html> ou [Ribenboim, 2001], p.178.)

7.3.2 Os primos gêmeos

Existem infinitos pares de primos da forma $(p, p + 2)$, como

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (100000000061, 100000000063)?$$

([Sierpinski, 1994], pp. 30-31).

Eles são chamados **primos gêmeos**. Quantos pares de primos gêmeos você conhece? Com o advento dos computadores, intensificou-se a busca por esses tipos de primos.

7.3.3 Números perfeitos

Um número é dito **perfeito**, segundo definição dos próprios pitagóricos que os classificaram, se for igual à soma de seus divisores próprios, excluindo o próprio número. Ex¹¹: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, 496 e 8128. Existe ou não uma infinidade deles? Ainda não se sabe.

Euclides, no Livro IX dos *Elementos*, provou que se $2^n - 1$ for um número primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito. Esse é o caso de $6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$, de $28 = 2^{3-1} \times (2^3 - 1)$, de $496 = 2^{5-1} \times (2^5 - 1)$, e de todos os outros números perfeitos que se conhecem até o presente.

Euler, em 1749, mais de 2000 anos após Euclides, demonstrou a recíproca desse resultado:

*Todo número perfeito par é da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, com $2^n - 1$ primo.*¹²

Já que não é uma tarefa simples verificar se um número com vários dígitos é perfeito, o resultado de Euclides fornece uma indicação para encontrar números desse tipo: devemos encontrar primos da forma $2^n - 1$ (o que, convenhamos, não torna o problema mais simples!). Mas a descoberta de Euclides só fornece números perfeitos pares, daí surge outra pergunta: existe algum número perfeito ímpar? ([Shanks, 1985], p.2). Até hoje não se encontrou qualquer deles.

Esse talvez seja um dos mais antigos problemas em aberto da teoria dos números e talvez de toda Matemática, que resiste a qualquer demonstração há 24 séculos!

Outra propriedade interessante dos números perfeitos é que todo ele é a soma de uma seqüência consecutiva de números inteiros ($6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, $496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 15$, etc. Vide o Exercício 5, desta seção).

7.3.4 Os números de Mersenne

Vimos na subseção anterior que os primos da forma $M_n = 2^n - 1$ se tornaram importantes na busca de números perfeitos. Pelo resultado de Euler, há tantos desses números quantos números perfeitos pares. Devido à importância que os números $M_n = 2^n - 1$ têm no estudo da primalidade de outros números, e devido ao padre e matemático francês **Marin Mersenne** (1588-1648), que estudou essas (e várias outras questões sobre números), eles se passaram a chamar **primos de Mersenne**¹³.

¹¹Estes são os únicos números perfeitos menores que 10.000. “O menor número perfeito, 6, era ligado, pelos escribas místicos e religiosos à perfeição; isso justifica porque a Criação de um mundo tão perfeito tenha necessitado apenas de 6 dias” ([Ribenboim, 2001], p.74 e p. 75).

¹²Essa demonstração, que requer um pouco de Álgebra Abstrata, pode ser vista, por exemplo, em



Figura 7.4: O Frade Marin Mersenne (1588-1648) que, surpreendentemente para sua época, conseguiu interagir cientificamente com vários matemáticos eminentes, contribuindo, dessa forma, para a divulgação e o desenvolvimento de idéias Matemática.

Se n é primo, $2^n - 1$ é chamado **número de Mersenne**, e pode ser um número primo ou não. Existem infinitos primos de Mersenne? Acredita-se que sim, mas até o presente momento se conhecem apenas 43 primos de Mersenne¹⁴, e eles vão ficando cada vez mais raros e cada vez maiores.

O procedimento de encontrar esses e outros números primos envolve avançados programas computacionais, aliados a sofisticados computadores. Hoje em dia, a disputa entre quem primeiro encontra esses números e consegue quebrar o último recorde, criou alguns grupos apenas para essa finalidade.

É o caso do GIMPS- Great Internet Mersenne Prime Search (Grande pesquisa pela Internet sobre os números de Mersenne), vide <http://www.mersenne.org> (consultado em maio de 2006). O grupo disponibiliza programas computacionais gratuitos para milhares de membros, especialistas ou amadores, espalhados em todo o mundo. Eles encontraram os últimos maiores números primos de Mersenne conhecidos, que, em especial, também são os maiores primos, e convida pessoas de todo o mundo para se juntarem ao grupo. Basta ter e saber operar um computador. Eles já receberam um prêmio de U\$50.000 dólares pelo último maior primo (de Mersenne) encontrado na época, oferecido pelo Electronic Frontier Foundation (<http://www.eff.org/coop-awards/award-prime-rules.html>), que ainda disponibiliza mais outros U\$550.000,00, desafiando quem encontrar certos primos com mais de um bilhão de dígitos. Nada mal, não acham?

7.3.5 Números amigos

Dois números são ditos **amigos**, quando um deles for igual à soma dos divisores do outro (excluindo o próprio número). Os pitagóricos já conheciam o menor desses pares de números: (220 e 284) (soma dos divisores de 220: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$; soma dos divisores de 284: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$). O segundo exemplo, séculos mais tarde, foi dado por Fermat, e o terceiro, por Descartes, ambos no Século XVII.

Coube a Euler descobrir outros 60 pares desses números. Quem vir os pares de números amigos encontrados por Euler, pode constatar sua capacidade de trabalhar com números enormes, numa época

[de Oliveira Santos, 2000], p.82 ou em [Collier, 2003], p.50.

¹³Outra propriedade interessante dos números de Mersenne: é possível provar que, para $M_n = 2^n - 1$ seja um número primo, é necessário que n seja primo (este resultado está proposto como o Exercício 3(d), da Seção 12.1). Sua recíproca não é verdade: $M_{11} = 2^{11-1} = 23 \times 89$.

¹⁴Dado de maio de 2006, retirado do sítio eletrônico <http://www.mersenne.org>.

em que mesmo uma calculadora manual era apenas um sonho. É interessante registrar que, apesar da sua argúcia e habilidade para lidar com produtos e somas de grandes números, Euler deixou escapar, desapercebido, um par de números amigos relativamente pequeno: (1184,1210), que foi descoberto em 1866, por Nicolò Paganini, um garoto de apenas 16 anos!

Muitos acreditavam que tais como os quadrados mágicos, os pares de números amigos tinham poderes sobrenaturais e por isso eles eram usados em talismãs e poções mágicas.

Com a computação, se conhece mais de dois milhões de pares de números amigos, e essa quantidade cresce a cada momento.

7.3.6 Números de Fermat

Existem outros primos de Fermat além de $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$? Os cálculos computacionais não são animadores, já que, até onde se conseguiu verificar, todos os outros números de Fermat são compostos. Chega-se a acreditar que a resposta a essa pergunta é negativa, mas, caso exista algum deles, será um número muito grande, com muitos dígitos. Só para se ter uma idéia do “tamanho” desses números, o último resultado, de 22 de novembro de 2005, é que o número $1207 \cdot 2^{410105} + 1$ divide o número de Fermat F_{410105} (descobridor: Jun Tajima). Com certeza, brevemente esta descoberta já estará superada.

Veja o que se encontrou até o momento sobre os fatores de certos números de Fermat na página:

<http://www.prothsearch.net/fermat.html> (página consultada em maio de 2006)

7.3.7 Outros problemas em aberto

1. Outros problemas envolvendo números primos:

- (a) Existe sempre um número primo entre dois quadrados consecutivos de números naturais n^2 e $(n+1)^2$? ([Rademacher & Toeplitz, 1957]; p. 204)
- (b) Há infinitos primos da forma $n! - 1$ ou $n! + 1$? Esses primos são chamados **primos fatoriais**. E primos da forma $n^2 + 1$?
- (c) Mesma pergunta anterior, onde $n!$ é substituído por $\#n$. Define-se $\#n$ como o produto de todos os primos menores do que ou iguais a n .

2. UM PROBLEMA EM ABERTO, DE FÁCIL ENTENDIMENTO, FORA DA TEORIA DOS NÚMEROS: dada uma curva no plano, que seja fechada e não tenha auto-interseção (**curva simples**), sempre existem quatro pontos nessa curva que formam os vértices de um quadrado? ([Croft et al., 1991]; p.51)

7.3.8 Dinheiro para quem resolver problemas matemáticos

Quem resolver algum dos problemas anteriores poderá ter seu momento de glória e, além de obter prestígio, quiçá, poderá receber algum bom retorno financeiro por seu feito. Existia uma página na Internet na qual seu autor prometia prêmios em dinheiro para quem resolvesse qualquer dos problemas que ele sugeria. O dinheiro não era muito, mas o fato merece ser registrado.

Já o bem sucedido banqueiro texano Andrew Beal, um amador que tem a Matemática como hobby, na sua tentativa de provar o Teorema de Fermat, chegou à seguinte conjectura:

CONJECTURA DE BEAL: Sejam A, B, C, x, y e z inteiros positivos com $x, y, z > 2$. Se $A^x + B^y = C^z$, então A, B e C possuem um fator primo em comum.

O banqueiro oferece um prêmio, que agora chega a U\$100.000,00, para quem der um contra-exemplo ou provar sua conjectura. Vide [Mauldin, 1997] ou <http://www.math.unt.edu/~mauldin/beal.html> (página consultada em abril de 2006).

Já que estamos falando em prêmios, vale conferir o artigo “*Bons de conta. Brasileiros perdem noites de sono em busca de respostas que valem milhões*”, da Revista ISTOÉ, de 2 de Agosto de 2000.

Finalizamos este capítulo ressaltando que, em geral, novos problemas surgem na tentativa de demonstrar um problema. E é dessa forma que a Matemática se mantém viva e sempre desafiadora.

EXERCÍCIOS:

1. Mostre que o par (1184, 1210), encontrado por Paganini, é de números amigos.

2. Verifique que 496 e 8128 são números perfeitos.

Dica: não vá desprender muito esforço. Prove que esses números são números perfeitos de Euclides da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, com $2^n - 1$ primo.

3. Prove o resultado de Euclides para números perfeitos pares:

Se $2^n - 1$ for um número primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito.

Dica: use a fórmula $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, que pode ser demonstrada por indução (Seção 15.1).

4. Conforme já dissemos, mostre que todo número perfeito par é soma de uma seqüência de números inteiros consecutivos.

Dica: use a fórmula da soma dos n primeiros números naturais

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que é um exercício proposto na Seção 15.1.

7.3.9 Curiosidade: uma palestra silenciosa

Em 1644, entre os números da forma $2^n - 1$ que Mersenne afirmara serem primos, estava $2^{67} - 1$.

Com referência a este número, em um encontro da American Mathematical Society, em 1903, o matemático F. N. Cole (1861-1927) deu o que parece ter sido a única palestra silenciosa de toda história. Ao ser anunciada sua conferência, o matemático dirigiu-se lentamente à lousa, escreveu silenciosamente quanto valia $2^{67} - 1$ e, sem pronunciar qualquer palavra, escreveu quanto resultava o produto dos números

$$193\,707\,721 \text{ e } 761\,838\,257\,287,$$

mostrando que dava o mesmo resultado. Logo depois, guardou o giz e retornou em silêncio à sua cadeira. Toda a platéia explodiu em entusiástica vibração.

CAPÍTULO 8

Técnicas de demonstração

“Não é apenas uma ou duas vezes, mas um sem n úmero de vezes que uma mesma idéia aparece no mundo.”

Aristóteles (c.384-322 a.C.) in Sobre os Céus. T. L. Heath Manual of Greek Mathematics, Oxford: Oxford University Press, 1931

“Repetir repetir – até ficar diferente”

Manoel de Barros na poesia ‘Uma didática da invenção’, in O Livro das Ignorâncias, Civilização Brasileira, 1993

8.1 Introdução

No Capítulo 6, vimos o que é uma demonstração e sua importância na Matemática. Respeitando a definição que demos do que é uma demonstração, adiantamos que há uma total liberdade de raciocínio e de procedimentos que alguém pode utilizar para provar qualquer resultado matemático. Isso inclui, também, quando possível, o uso de recursos computacionais.

Na verdade, em muitas demonstrações, são usados argumentos bastante engenhosos e elaborados, o que as tornam admiráveis. É nesse ponto que reside a qualidade de uma *boa* demonstração, a eficácia da teoria empregada para fazê-la funcionar e a habilidade de quem a elaborou.

Vamos aos poucos, neste capítulo, começar a estudar os tipos mais usuais de técnicas de demonstração.

Com esse intuito, classificamos as demonstrações em:

1. *Demonstrações diretas;*
2. *Demonstrações indiretas:*
 - 2.1 *Demonstrações por redução a um absurdo;*
 - 2.2 *Demonstrações usando a contrapositiva.*

Dentre as técnicas que estudaremos e que podem ser úteis nessas classes de demonstração estão as que chamaremos:

1. *Demonstrações por verificação;*
2. *Demonstrações com o auxílio de figuras;*
3. *Demonstrações usando o Princípio de Indução Finita.*

Você deve ter notado pelos vários livros que já estudou, que, em geral, quando alguém prova algum resultado, não cita o tipo de demonstração que utilizou, com exceção, às vezes, do Método de

demonstração por redução a um absurdo, que apresentaremos na Seção 11.1.

Ao final deste e dos próximos capítulos, esperamos que os leitores, ao se depararem com alguma demonstração sejam capaz de distinguir qual método está sendo utilizado e, o mais importante, possam manipulá-lo com pleno domínio.

“Como saber qual tipo de demonstração que devo usar para provar um determinado resultado?”

Não há resposta precisa para essa pergunta. Não existe uma “*receita infalível*” que pode sempre ser aplicada para provar qualquer resultado. Como já vimos, um dado que comprova ainda mais o que estamos dizendo é que há ainda muitos problemas em aberto na Matemática, que têm resistido ao longo de centenas de anos às mais diversas tentativas de demonstrá-los (vide Seção 7.3).

Um método de demonstração adequado que alguém pode usar para provar determinado resultado depende do resultado em si, da existência de uma teoria eficaz para atacar o problema e, muitas vezes, de uma escolha possível e pessoal do tipo de argumentação que poderá ser usada naquela demonstração. Lembremos que na Seção 4.1.1 dissemos existir 370 demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras. Cada uma com suas particularidades, usando argumentos, muitas vezes, bastante distintos.

Em geral, mesmo não existindo regras para seguir, uma primeira atitude para iniciar uma demonstração é tentar usar um mesmo argumento para provar resultados semelhantes. Por vezes, quando possível, resultados bastante distintos também podem ser provados usando-se uma mesma idéia.

Em verdade, um bom começo, que ajuda muito, é conhecer detalhadamente as demonstrações de diversos resultados e, ao se deparar com algum outro resultado que deseja demonstrar, tentar empregar alguma dessas idéias e técnicas para este fim. Não tenha medo de imitar uma demonstração conhecida.

Além desses casos, é claro que devemos levar em conta e confiar na inventividade de cada um, que não deve possuir limites.

Por fim, terminado o trabalho de provar algum resultado, é necessário redigir a demonstração. Este é o passo final. Dessa forma, estude as regras das Gramáticas Normativas e as respeite, leia com muita atenção as demonstrações dos bons livros, analisando o estilo de cada escritor; treine redação matemática e se esforce para desenvolver seu estilo pessoal de escrever. Não é exagero dizer que expor suas idéias e saber redigir uma demonstração é tão importante quanto inventá-las; não basta apenas resolver exercícios, ter idéias geniais ou entender teorias matemáticas. O ato de escrever melhora as idéias, fortalece as convicções nos argumentos, apura os pensamentos e deve se tornar uma prática. Escrever um texto matemático, quer seja uma simples resolução de um problema a uma dissertação, é um excelente exercício de Lógica.

8.2 As técnicas mais simples de demonstração

Segundo nosso objetivo, começemos com uma classe de demonstrações chamadas **demonstrações diretas**. Se quisermos demonstrar uma proposição da forma ‘ $H \Rightarrow T$ ’, usando a demonstração direta, supõe-se que a hipótese H é válida e, usando-se um processo lógico-dedutivo, se deduz *diretamente* a tese T .

Relembrando um pouco, note que quase todas as demonstrações que apareceram no texto até este ponto foram feitas utilizando-se demonstrações diretas.

Partindo para exemplos do processo de demonstração direta, vamos, inicialmente, introduzir as demonstrações diretas mais simples, que não requerem argumentos e nem procedimentos muito elaborados. Alertamos, que não queremos dizer com isso que esse tipo de demonstração deva ser feito sem o rigor necessário ou com argumentos duvidosos.

Essas demonstrações requerem apenas uma simples verificação para que funcionem. Como o nome já traduz a idéia, as chamaremos **demonstração por verificação**.

Por exemplo, consideremos o seguinte teorema:

TEOREMA: Existem dois, e apenas dois múltiplos simultâneos de 2 e de 3 entre os números de 9 a 19, incluindo estes últimos.

Uma maneira simples para provar esse resultado é escrever todos os números entre 9 e 19, e verificar quais deles satisfazem a tese; isto é, quais são múltiplos de 2 e de 3, simultaneamente, assegurando-se de que nenhum outro tenha a mesma propriedade. Para este fim não é necessário usar argumento especial algum, basta um simples raciocínio para checar no conjunto $\{9, 10, \dots, 18, 19\}$ dos elementos que satisfazem a hipótese, quais cumprem a tese, e pronto! Primeiramente, excluem-se os números ímpares, e, dentre os remanescentes, determina-se quais deles são também divisíveis por 3, restando apenas os números 12 e 18.

Convém observar que, nessa linha, mesmo provar um resultado de enunciado aparentemente inocente, como

Há pelo menos um número primo no conjunto $\{2^{2^4} + 1, 2^{2^5} + 1, 2^{2^6} + 1\}$

já seria uma outra história!!! (Por quê?)

EXERCÍCIOS:

A partir deste ponto, além de resolver um problema, você deve primar por escrever sua resolução, treinando para redigir demonstrações e desenvolver seu estilo próprio de *escrever matemática*.

1. Escreva os detalhes da demonstração apresentada no final da seção.
2. Treine um pouco com as demonstrações por verificação. Use este método para provar os seguintes resultados:
 - (a) Os números 13, 18, 29, 34 e 125 podem ser escritos como a soma de quadrados de dois números primos.
 - (b) O conjunto $\{1, 31, 7, 15\}$ é formado por números da forma $2^n - 1$, para algum número natural n .
 - (c) Considere um sólido formado por um paralelepípedo de cujo interior se retirou um outro paralelepípedo com faces paralelas ao primeiro. Mostre que o sólido resultante do processo acima não satisfaz a Relação de Euler: $V - A + F = 2$.
 - (d) Na seqüência abaixo de cinco números naturais consecutivos, não existem números primos

$$6! + 2, 6! + 3, 6! + 4, 6! + 5, 6! + 6.$$

- (e) O mesmo resultado anterior para a seqüência de cem números consecutivos

$$101! + 2, 101! + 3, \dots, 101! + 100, 101! + 101.$$

- (f) Mostre que é possível escrever um mesmo número racional de infinitas maneiras.

3. Seguem abaixo alguns resultados para serem provados, que também não necessitam de artifícios especiais ou de alguma argumentação mais elaborada.

Prove que:

- (a) Existem três retângulos diferentes, com lados de medidas inteiras e áreas valendo 42 cm^2 .
- (b) Para qualquer natural n , existe uma seqüência com n elementos de números naturais sucessivos, que não contém números primos (generalização dos Exercícios 2-(d) e 2-(e), anteriores).

Observe que esse exercício assegura que é possível encontrar uma seqüência de números consecutivos, com a quantidade de elementos que quisermos, sem que qualquer deles seja primo! Esse fato reforça que, quanto maior for um número n , menor a possibilidade de que ele seja primo.

Menos formalmente, o resultado significa que, na seqüência dos números naturais, existem verdadeiros “desertos de números primos” do “tamanho” que quisermos. Um fato realmente fantástico, já que o conjunto dos números primos é infinito (Exercício 5, da Seção 15.1).

- (c) O fatorial $n!$ de qualquer número natural $n > 4$ termina em 0.

8.3 Demonstrações usando ‘artifícios’

Sem entrar em digressões sobre terminologias, escolhemos a palavra *artifício* para chamar *um argumento qualquer que seja mais elaborado* do que os usados na seção anterior.

Comecemos aprendendo argumentações que requerem apenas certos artifícios simples.

APRENDENDO A PENSAR MATEMATICAMENTE

Sabe-se que *números racionais* podem ser representados como números fracionários, isto é, quocientes de um número inteiro por outro número inteiro, tal que o denominador não é o inteiro nulo. Os números racionais também podem ser escritos em sua forma decimal. Prova-se que, ao serem escritos desta maneira, eles são números decimais finitos, ou números decimais infinitos que são *dízimas periódicas* ([de Figueiredo, 2002]).

Por exemplo, $\frac{2}{3}, \frac{-8}{4}, \frac{9}{-54}, 3, -12; 1,345679; -9,876876876876\dots$ são números racionais.

Como acabamos de mencionar, o conjunto dos números racionais pode ser simbolicamente representado como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Para nossos objetivos, esta será a melhor maneira de escrever esse conjunto.

Agora, como você responderia à seguinte pergunta?

“A soma de dois números racionais é um número racional”?

A maioria das pessoas, pelo que já estudou e pela experiência ao lidar com frações, é levada a responder afirmativamente a pergunta. Entretanto, muitas vezes, quando se pede para justificar matematicamente a resposta, recebe-se uma justificativa do tipo:

“Justificativa”:

$$\frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \text{ e } \frac{8}{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5} \in \mathbb{Q}.$$

Vamos analisar essa resposta:

Uma olhada crítica nessa resposta indica que o esforço de quem a forneceu, mesmo tendo toda boa intenção, ficou resumido apenas a mostrar a resposta para um exemplo particular de soma entre dois números racionais específicos que escolheu: $\frac{3}{5}$ e $\frac{8}{5}$. E os demais casos?

Ora, quando fizemos a pergunta “A soma de dois números racionais é um número racional?”, não estamos especificando para quais racionais nossa pergunta é válida, queremos saber se ela é válida para quaisquer dois deles. Matematicamente, é desta forma que deve ser encarada uma pergunta desse tipo. Assim, a justificativa anterior não assegura, por exemplo, que $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}$ ou $\frac{-2}{5} + \frac{6}{7}$ ou que qualquer outra soma de números racionais sejam, de fato, números racionais.

A seguir vamos dar uma justificativa correta.

A resposta à pergunta acima é “sim”. Vamos justificar.

Justificativa (demonstração):

Sejam $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, com $q, s \neq 0$ (aqui está sendo usada a definição de números racionais). Ora, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$ (aqui se fez uma manipulação algébrica, começando a argumentação; o Exercício 4-(viii), da Seção 6, garante que essa igualdade é válida). Como $ps + qr$ e qs são números inteiros, por serem soma e produto de números inteiros e, como $qs \neq 0$, já que $q, s \neq 0$ (aqui se está fazendo a argumentação necessária para garantir que o número no lado direito da igualdade é racional; estamos usando um fato muito conhecido: ‘ $q, s \neq 0 \Rightarrow qs \neq 0$ ’, que é o Exercício 1-(b), da Seção 11.1), temos da igualdade anterior, que $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (aqui, conclui-se a argumentação). Logo, se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (neste ponto, estamos finalizando a demonstração, ressaltando o resultado provado) C.Q.D.

Observe que a demonstração foi baseada na maneira de como representar um número racional qualquer.

EXERCÍCIOS:

1. 0 é um número racional?
2. Treine um pouco com demonstrações cujo raciocínio seja semelhante ao que utilizamos nesta seção.

Mostre que:

- (a) O produto de dois números racionais é um número racional.
- (b) Se $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$, então $\frac{\beta^4 - 2\beta}{\beta + \frac{1}{\beta^3}}$ e $\beta^n \in \mathbb{Q}$, para todo inteiro positivo n .

PAUSA PARA UM ALERTA DE COMO REPRESENTAR UM NÚMERO:

A experiência nos induz a aceitar que a seguinte proposição é válida:

Proposição: A soma de um número par com um número ímpar resulta em um número ímpar.

Considere a seguinte “demonstração” deste fato.

“Demonstração”: Dados um número par e outro ímpar, eles são, respectivamente, da forma $2k$ e $2k+1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $2k + (2k+1) = 4k+1 = 2(2k)+1 = 2m+1$, onde $m = 2k \in \mathbb{Z}$. Concluímos, das últimas igualdades, que a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar, como queríamos demonstrar.

Analise a “demonstração” anterior e responda:

- i. Ela mostra, por exemplo, que $4+7$ é um número ímpar? Por quê?
 - ii. Onde está o erro na demonstração?

 - (c) Agora, dê uma “demonstração de verdade”, para a afirmação de que a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.
 - (d) A soma e o produto de dois números pares é um número par, ou seja, o **conjunto dos números pares é fechado com relação às operações de adição e multiplicação**. O que você pode afirmar sobre a soma e o produto de números ímpares? É um número par ou ímpar? Justifique suas respostas.
 - (e) Uma condição necessária para que o produto de dois números seja múltiplo de 6 é que um deles seja múltiplo de 2, e, o outro, seja múltiplo de 3.
 - (f)
 - i. O quadrado de um número da forma $3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ tem essa mesma forma. O mesmo ocorre com um número da forma $3a + 2b$, $a, b \in \mathbb{Z}$
 - ii. O produto de dois números da forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ tem essa mesma forma.
 - iii. O produto de dois números que terminam em 5, cada qual com três algarismos, também termina em 5.
- Dica: sem perda de generalidade, considere esses números positivos. Logo, um número da forma acima pode ser escrito como $ab5 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + 5$, para a, b inteiros não-negativos.
- iv. Esboce um argumento para concluir que o número 125^{200006} termina em 5.
3. (a) Se m é um número par e n é um número ímpar, o que você pode afirmar sobre a paridade dos números $m^2 + n^2$ e $m^2 - n^2$? E se ambos forem simultaneamente pares? E se forem simultaneamente ímpares?
- (b) Depois de fazer o item anterior, responda:
Existe triângulo retângulo com todos os lados de comprimento ímpar?

4. Palavras ou frases, quando lidas, indiferentemente, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda e permanecem as mesmas, são chamadas **palíndromos**.

Exemplo: *radar; osso; socorram-me subi no ônibus em Marrocos*.

Já os números que possuem essa propriedade são ditos **capicuas**.

Exemplo: *1221; 987789*.

Mostre que todo número capicua de quatro algarismos é divisível por 11.

Sugestão: escreva um número qualquer $abcd$ na forma $a1000 + b100 + c10 + d$. Use esse fato para checar que todo número capicua *abba* pode ser escrito como $11(91a + 10b)$. A mesma idéia funciona para um número capicua de vários algarismos.

Notícias sobre números capicuas tomaram a Mídia e a Internet em Fevereiro de 2002, quando muita gente ficou fascinada com a data capicua que “abrilhantou a entrada no novo milênio”:

20h e 02m do dia 20/02/2002.

Algumas notícias afirmavam que a hora e a data acima eram raras, só tendo ocorrido apenas uma única vez (10:01 de 10/01/1001) e que não mais se repetiriam datas desse tipo. Essas notícias eram corretas?

CAPÍTULO 9

Quando é necessário saber negar (aprendendo a negar na Matemática)

“...e não fie desafie e não confie desfie que pelo sim pelo não para mim prefiro o não no senão do sim ponha o não no im de mim ponha o não o não será tua demão...”

Haroldo de Campos (1929 - 2003)

Poema:*Galáxias*. In Os melhores Poemas de Haroldo de Campos,
3a. Edição, Global, 2001

“Como é mesmo o título deste capítulo??!!” Isso mesmo que você está lendo. É importante aprender a negar na Matemática.

Como a Matemática tem sua lógica própria de apresentar resultados, devemos também aprender a negar esses resultados, seguindo essa mesma lógica.

Adiantamos que, muitas vezes, a negação matemática de uma frase é diferente da negação de frases da maneira que fazemos no cotidiano. É preciso atenção, pois formular a negação de uma sentença matemática, não significa, como na linguagem do dia-a-dia, reformular a sentença usando o oposto ou os antônimos das palavras que formam a sentença. Por exemplo, geralmente, na linguagem cotidiana, a negação da frase “*Todo gato é pardo*”, seria “*Nem todo gato é pardo*”, enquanto na linguagem matemática, essa frase deveria ser negada de uma maneira mais útil para nossos propósitos, que apresentaremos mais adiante.

Frisamos que na seção seguinte, onde estudaremos as demonstrações utilizando argumentos de redução a um absurdo, será necessário saber formular a negação de frases matemáticas. No aprendizado da Matemática, também é muito importante saber negar definições e sentenças.

A **negação de uma sentença** P é a sentença ‘ $\neg P$ ’, cuja notação é $\neg P$. Definimos o valor lógico da sentença $\neg P$ como o oposto do valor lógico da sentença P .

Observe que, conforme o Princípio da Não-contradição apresentado na Seção 2.1, temos:

$$\begin{aligned}P \text{ é verdadeiro} &\Rightarrow \neg P \text{ é falso} \\ \neg P \text{ é verdadeiro} &\Rightarrow P \text{ é falso.}\end{aligned}$$

Conseqüentemente, ou P é verdadeiro ou $\neg P$ é verdadeiro, excludentemente. Da mesma forma, ou P é falso ou $\neg P$ é falso, excludentemente.

Comecemos aprendendo como formular a negação de sentenças conjuntivas e disjuntivas. Para isso, pedimos que preencha com atenção as seguintes tabelas-verdade:

P	Q	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Tabela 9.1: Construção da tabela-verdade da negação da disjunção.

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Tabela 9.2: Construção da tabela-verdade da negação da conjunção.

Se você preencheu corretamente as tabelas-verdade, pôde constatar que

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q \text{ e } \sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q,$$

ou seja,

‘a negação da disjunção (de duas sentenças) é a conjunção das negações (destas sentenças)’ e que

‘a negação da conjunção (de duas sentenças) é a disjunção das negações (destas sentenças)’.

As equivalências anteriores são chamadas **Leis de De Morgan da Lógica**. Essas leis também podem ser provadas usando-se as propriedades de conjuntos complementares (vide Exerácia 3, desta seção).

Vamos aos exemplos: a negação da proposição

$$P_8: \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \text{ e } \sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

apresentada na Seção 2.1 é

$$\sim P_8: \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \text{ ou } \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \geq \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Já a negação da sentença disjuntiva

$$P \vee Q: A \text{ soma dos números } e + \pi \text{ é irracional ou é maior do que } 5,86$$

é

$$\sim P \wedge \sim Q: A \text{ soma dos números } e + \pi \text{ é racional e é menor do que ou igual a } 5,86.$$

Vamos agora aprender a negação de sentenças envolvendo os quantificadores universal e existencial. Para esta finalidade, vamos fazer uso da Linguagem de Conjuntos.

Dado um conjunto \mathcal{A} contido num conjunto universo \mathcal{U} , chamamos **conjunto complementar** de \mathcal{A} (em relação a \mathcal{U}) ao conjunto

$$\mathcal{A}^C = \{x \in \mathcal{U}; x \notin \mathcal{A}\}.$$

Não é difícil provar que valem as propriedades

- 1) $\mathcal{A} = \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{A}^C = \emptyset$
- 2) $\mathcal{A} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{A}^C = \mathcal{U}$.

Ora, seja $P(x)$ uma sentença aberta que depende de uma variável x , pertencente a um conjunto universo \mathcal{U} , e denotemos

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ é válida}\}.$$

Logo,

$$\{x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ não é válida}\} = \mathcal{P}^C.$$

Como já vimos na Seção 2.1,

$$\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ vale} \Leftrightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$$

e negar a sentença acima é afirmar que $\mathcal{P} = \emptyset$, ou seja, que $\mathcal{P}^C = \mathcal{U}$. Esta última igualdade equivale afirmar que ' $\forall x \in \mathcal{U}, P(x)$ ' não vale. Diante do exposto, temos a seguinte negação

$$\neg(\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ vale}) \text{ é } (\forall x \in \mathcal{U}, P(x) \text{ não vale}).$$

Semelhantemente, é fácil verificar que

$$\neg(\forall x \in \mathcal{U}, P(x) \text{ vale}) \text{ é } (\exists x \in \mathcal{U}; P(x) \text{ não vale}).$$

Por exemplo, as negações das proposições que aparecem na Seção 2.1:

P_3 : Existe $x \in \mathbb{R}$ positivo tal que $x < 0, 1$ e $x^2 > 10$.

e

P_6 : Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $2x^2 + 8x - 10 < 0$ ou $x \geq 1$ ou $x \leq -5$.

são, respectivamente,

$\neg P_3$: Para todo $x \in \mathbb{R}$ positivo temos $x \geq 0, 1$ ou $x^2 \leq 10$.

e

$\neg P_6$: Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $2x^2 + 8x - 10 \geq 0$ e $x < 1$ e $x > -5$.

RESUMO:

1. A negação de uma disjunção ' P ou Q ' é a conjunção ' $\neg P$ e $\neg Q$ ';
2. A negação de uma conjunção ' P e Q ' é a disjunção ' $\neg P$ ou $\neg Q$ ';
3. A negação de '*existe x que goza da propriedade P*' é '*dado x, ele não goza da propriedade P*', '*para todo x, ele não goza da propriedade P*', '*qualquer que seja o x, ele não goza da propriedade P*';
4. A negação de '*dado x que goza da propriedade P*', '*para todo x que goza da propriedade P*', '*qualquer que seja x que goza da propriedade P*' é '*existe x que não goza da propriedade P*'.
5. RESUMO DE (3) e (4) :

A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial, e vice-versa.

6. A **negação dupla**, isto é, a negação da negação de uma sentença é a própria sentença: $\sim\sim P = P$.

Finalizemos esta seção, encontrando a negação de uma sentença implicativa.

Vimos que uma sentença condicional ‘Se H , então T ’ é válida, quando todo elemento que satisfizer a hipótese H cumprir necessariamente a tese T e, reciprocamente, quando todo elemento que satisfizer a hipótese H cumprir a tese T , temos a validade da sentença ‘Se H , então T ’. Dessa forma, a negação da sentença ‘Se H , então T ’ é ‘*existe um elemento que satisfaz a hipótese H e não cumpre a tese T* ’.

Na Lógica Formal, este fato é afirmado da seguinte maneira:

$$\sim(H \rightarrow T) \equiv H \wedge \sim T.$$

Por exemplo, a negação do Teorema de Pitágoras é:

Existe um triângulo que é retângulo, mas cujo quadrado da medida da hipotenusa é diferente da soma dos quadrados das medidas de seus catetos.

Mais uma vez ressaltamos que o processo de escrever a negação de uma frase matemática não é um processo automático. Às vezes é necessário reescrever toda a frase de maneira diferente da forma original, para tornar mais fácil a formulação de sua negação. Você vai perceber este fato fazendo os exercícios a seguir.

EXERCÍCIOS:

1. Na Linguagem Matemática, como seria a negação da frase

“*Todo gato é pardo*”?

2. Seja P uma sentença. O que pode-se afirmar sobre o valor lógico de P quando:

- (a) A negação de P for verdadeira?
- (b) A negação da negação de P for verdadeira?

3. (a) Usando as seguintes propriedades do complementar de conjuntos

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^C = \mathcal{A}^C \cap \mathcal{B}^C \text{ e } (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^C = \mathcal{A}^C \cup \mathcal{B}^C,$$

também conhecidas como Leis de DeMorgan da Teoria de Conjuntos, mostre as Leis de DeMorgan da Lógica que apresentamos neste capítulo.

- (b) Usando que $(\mathcal{A}^C)^C = \mathcal{A}$, mostre que a negação dupla de uma sentença é a própria sentença.

4. Prove que:

- (a) $\sim(H \rightarrow T) \equiv H \wedge \sim T$;
- (b) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow (\sim(Q \wedge R) \rightarrow \sim P)$;
- (c) $\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q))$.

5. Dê exemplos de sentenças matemáticas equivalentes, em que apareçam negações de sentenças.

6. Escreva a negação das seguintes sentenças lógicas:

- (a) $\sim(P \wedge Q) \vee (P \vee \sim Q)$;
 (b) $\sim(P \wedge Q) \rightarrow P$ (Sugestão: Exercício 4-a, anterior);
 (c) $(\sim P \rightarrow \sim Q) \wedge (P \rightarrow Q)$ (Sugestão: Exercício 4-a, anterior).

7. Escreva a negação matemática de cada sentença a seguir, **sem utilizar a palavra “não”**.

- (a) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < 87$.
 (b) Todo número da forma $2^{2^n} + 1$ é primo para $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Existem sete números naturais cujos quadrados estão no intervalo $(5, 26)$.
 (d) Existem números naturais cujos quadrados estão no intervalo $(5, 26)$.
 (e) Seja $x \in \mathbb{R}$. Tem-se $x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.
 (f) Todo número racional é maior do que ou igual a $\frac{2}{9}$.
 (g) Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. (Propriedade Arquimediana dos Números Reais)
 (h) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 89$ ou $x^2 \leq 34$.
 (i) Se Q é um quadrilátero então Q tem perímetro maior do que cinco.
 (j) O conjunto C não possui elementos.
 (k) Se $x^4 - 56x + x^7 \leq -9x^3$, então $x \geq 7$ ou $x < 98^4$.
 (l) O conjunto C possui exatamente sete elementos.
 (m) O conjunto C possui pelo menos sete elementos.
 (n) $(x > 0 \text{ e } y < 0) \text{ ou } (z < 0 \text{ e } w > 0)$
 (o) Existe um número real $K > 0$ tal que $|u_n| \leq K$ para todo número natural n . Aqui, $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ é uma seqüência (infinita) de números reais.
 (p) O produto de duas matrizes $A_{m \times 2}$ e $B_{2 \times n}$ é uma matriz de ordem $m \times n$.
 (q) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ tal que $y^2 = x$.
 (r) $\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varepsilon > 0, \exists r \notin \mathbb{Q}$ tal que $|x - r| < \varepsilon$.
 (s) (No exercício a seguir, $\{a, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ é uma seqüência (infinita) de números reais.)
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.
 (t) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, para todo $x, y \in D(f) \subset \mathbb{R}$. (Neste caso, f é uma função real e os números x e y estão no domínio $D(f)$ da função f).

8. Marque a alternativa certa:

- (a) Se $B = \{x \in \mathbb{R}; (x - 2)(x - 1) \neq 0\}$, então:
 i. $B = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2 \text{ e } x \neq 1\}$
 ii. $B = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2 \text{ ou } x \neq 1\}$
- (b) Se $A = \{z \in \mathbb{R}; -1 \leq z < 1\}$ e se $x \notin A$, então $x \in \mathbb{R}$ é tal que:
 i. $x > 1$ ou $x < -1$
 ii. $x \geq 1$ e $x < -1$
 iii. $x < -1$ ou $x \geq 1$

9. Escreva a negação do Quinto Postulado de Euclides, dado na Seção 3.2. Essa negação tem uma importância especial na História da Matemática, pois a partir dela é que nasceram as Geometrias não-Euclidianas.

Observe que, com um compasso e uma régua sem escalas, os quatro primeiros postulados apresentados naquela seção são imediatos de serem admitidos e, até mesmo, “experimentados”. Já o quinto postulado....

Daí surgiu a dúvida: será que o quinto postulado não seria de fato um teorema e poderia ser deduzido dos quatro primeiros? O resto dessa história é o nascimento das Geometrias não-euclidianas. Vide [Greenberg, 1993] ou [Barbosa, 1995].

10. Dizemos que uma função f é **par** quando $f(-x) = f(x)$ e é **ímpar** quando $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio da função f .

- (a) Dê exemplos de funções pares e ímpares.
- (b) Dê exemplos de funções que não são nem pares e nem ímpares.
- (c) **CASO VERÍDICO:**

Certo livro do Ensino Médio afirma que

“*Uma função $f : A \rightarrow B$ não é par nem ímpar quando, para qualquer $x \in A$, nem $f(-x) = f(x)$ e nem $f(-x) = -f(x)$.*”

Corrija o que afirmou o livro.

CAPÍTULO 10

**Mais sobre Lógica

“Se concebo o quê? Uma coisa ter limites? Pudera! O que não tem limites não existe. Existir é haver outra coisa qualquer e portanto cada coisa ser limitada. O que é que custa conceber que uma coisa é uma coisa, e não está sempre a ser uma outra coisa que est á adiante?”

Nesta altura senti carnalmente que estava discutindo, não com outro homem, mas com outro universo. Fiz uma última tentativa, um desvio que me obrigou a sentir legítimo.

“Olhe, Caeiro... Considere os números... Onde é que acabam os números?” Tomemos qualquer número, 34 por exemplo. Para além dele temos 35, 36, 37, 38, e assim sem poder parar. Não há número grande que não haja outro maior...”

“Mas isso são números”, protestou meu mestre Caeiro. E depois acrescentou, olhando-me com formidável infância: “O que é 34 na realidade?”

Notas para a recordação do meu mestre Caeiro, Posfácio das Poesias Completas de Alberto Caeiro, escrito por Álvaro de Campos.

Fernando Pessoa (1888-1935)

*in Obra Poética de Fernando Pessoa,
Editora Nova Aguilar Ltda., 1997*

10.1 Tautologias, contradições e redução do número de conectivos

10.1.1 Tautologias

Uma sentença composta é chamada **tautologia** ou **sentença tautológica** quando seu valor lógico for sempre verdade, independentemente dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. Por exemplo, a sentença $P \vee \neg(P \wedge Q)$ é uma tautologia, por ser sempre verdadeira, independentemente do valor lógico das sentenças P e Q .

O que faz uma sentença ser uma tautologia é sua estrutura, e não as sentenças ou valores lógicos das sentenças simples que as compõem. Por exemplo, independentemente de seus valores lógicos, quaisquer sentenças P e Q , que sejam substituídas em $P \vee \neg(P \wedge Q)$, tornam esta sentença verdadeira.

Usando o conceito de tautologia, é possível redefinir algumas operações envolvendo sentenças, de forma diferente da que fizemos anteriormente. Por exemplo, na Lógica Simbólica Formal, dadas duas

sentenças Q e P , pode-se definir que $P \Rightarrow Q$ quando a sentença $P \rightarrow Q$ for uma tautologia. Vários livros preferem dar definições usando o conceito de tautologia.

EXERCÍCIOS:

1. Usando tabelas-verdade, mostre que as sentenças abaixo são tautológicas:
 - (a) $\sim P \vee P$;
 - (b) $P \vee \sim(P \wedge Q)$;
 - (c) $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge \sim Q$.
 2. Dê exemplos de tautologia usando sentenças matemáticas.
 3. Usando o conceito de tautologia dê uma definição de ' $P \Leftrightarrow Q$ '.
 4. Todas as sentenças tautológicas são equivalentes entre si? Por quê?
-

10.1.2 Contradições

Um conceito oposto ao de tautologia é o de sentença contraditória. Uma sentença composta é dita uma **contradição, contra-tautologia ou contra-válida**, quando seu valor lógico for sempre falso, independentemente dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. Por exemplo, a sentença $\sim P \wedge P$ é uma contradição, para qualquer que seja a sentença P , independentemente de seu valor lógico.

EXERCÍCIOS:

1. Prove que as sentenças abaixo são contradições:
 - (a) $\sim P \wedge P$;
 - (b) $\sim P \wedge (P \wedge \sim Q)$.
 2. Todas as sentenças contraditórias são equivalentes? Por quê?
 3. Que relação existe entre uma sentença contraditória e uma sentença falsa qualquer?
-

10.1.3 Redução do número de conectivos

Usando tabelas-verdade, é possível verificar que as seguintes equivalências entre sentenças são válidas:

1. $P \vee Q \equiv \sim(\sim P \wedge \sim Q)$;
2. $P \rightarrow Q \equiv \sim(P \wedge \sim Q)$;
3. $P \leftrightarrow Q \equiv \sim(P \wedge \sim Q) \wedge \sim(\sim P \wedge Q)$.

Dessas equivalências, observa-se que, na Lógica Formal, todos os conectivos entre proposições já apresentados podem ser definidos usando apenas a conjunção (\wedge) e a negação (\sim). Com isso, torna-se possível reduzir o número de conectivos a apenas dois deles.

EXERCÍCIOS:

1. Prove as equivalências anteriores.
2. Mostre que é possível definir os conectivos ‘ \wedge ’, ‘ \rightarrow ’ e ‘ \leftrightarrow ’, usando apenas os conectivos de disjunção ‘ \vee ’ e o de negação ‘ \sim ’.
3. Defina o conectivo:

‘ $P \downarrow Q$ ’, como ‘ $\sim P \wedge \sim Q$.’

Prove que todos os conectivos podem ser definidos usando apenas o símbolo ‘ \downarrow ’. Dessa forma, todos os conectivos podem ser reduzidos a apenas um.

10.1.4 Curiosidade: um papo tautológico

Ao verem a equação $y = x + 1$, dois amigos começam a seguinte discussão:

- A_1 : “Quem é y ?”.
 A_2 : “ y é $x + 1$ ”
 A_1 : “E quem é x ?”.
 A_2 : “ x é $y - 1$ ”
 A_1 : “Mas quem é y ?”.
 A_2 : “Ora, você não está vendo? y é $x + 1$!”
 A_1 : “E agora? Quem é x ?”.
 A_2 : “ x é $y - 1$ ”...

E assim prosseguem. Observe que todas as respostas dos amigos A_1 e A_2 estão corretas, mas não resolvem absolutamente nada! Uma conversa realmente tautológica, e sem resultado algum!

10.2 Tabelas-resumo das Leis do Cálculo Proposicional

Nesta seção, resumimos em tabelas as leis do Cálculo Proposicional, que foram apresentadas no decorrer dos capítulos precedentes. Essas tabelas serão úteis para posteriores consultas e para demonstrar certos resultados da Lógica Formal.

LEIS DO CÁLCULO PROPOSICIONAL

Na tabela a seguir, representaremos por V uma sentença verdadeira e por F uma sentença falsa qualquer.

N. ^º	LEIS DA CONJUNÇÃO	LEIS DA DISJUNÇÃO	DENOMINAÇÃO
L.1	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Comutativa
L.2	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	Associativa
L.3	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	Idempotência
L.4	$P \wedge V \equiv P$	$P \vee V \equiv V$	
L.5	$P \wedge F \equiv F$	$P \vee F \equiv P$	
L.6	$P \wedge \sim P \equiv F$	$P \vee \sim P \equiv V$	
L.7	$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$	Leis de Morgan
L.8	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributiva

Tabela 10.1: Leis do Cálculo Proposicional.

L.9	$\sim(\sim P) \equiv P$	Lei da Dupla-negação
L.10	$\sim F \equiv V$	Lei da Negação da Logicamente Falsa
L.11	$P \rightarrow Q \equiv \sim(P \wedge \sim Q) \equiv \sim P \vee Q$	Lei de Passagem (da condicional para a forma conjuntiva e disjuntiva)
L.12	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Lei de Passagem da Bi-conditional para a forma conjuntiva

Tabela 10.2: Leis do Cálculo Proposicional (cont.).

Usando as tabelas acima, quando conveniente, não é mais necessário recorrer às tabelas-verdade para provar equivalências entre sentenças. Veja o exemplo a seguir:

UMA IMPORTANTE APLICAÇÃO:

Se F é uma sentença falsa qualquer, então

$$(H \rightarrow T) \Leftrightarrow [(H \wedge \sim T) \rightarrow F].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} ((H \wedge \sim T) \rightarrow F) &\stackrel{L_{11}}{\Leftrightarrow} \sim((H \wedge \sim T) \wedge \sim F) \stackrel{L_{10}}{\Leftrightarrow} \\ &\sim((H \wedge \sim T) \wedge V) \stackrel{L_4}{\Leftrightarrow} \sim(H \wedge \sim T) \stackrel{L_{11}}{\Leftrightarrow} H \rightarrow T \\ &\text{C. Q. D.} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS:

1. Usando as propriedades listadas anteriormente, prove as equivalências
 - (a) $\sim[(P \vee Q) \wedge R] \equiv \sim(P \wedge R) \wedge \sim(Q \wedge R);$
 - (b) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim P \vee Q;$
 - (c) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv \sim R \rightarrow (P \rightarrow \sim Q).$
2. Simplifique a sentença
 $(\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \vee \sim Q).$

10.3 Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais

10.3.1 Teoremas cuja hipótese é uma sentença disjuntiva

Na demonstração de certos teoremas, é necessário dividir a hipótese em alguns casos. Muitas vezes, esses casos estão explícitos no enunciado do teorema, outras vezes, não. De qualquer maneira, um teorema desse tipo tem uma hipótese disjuntiva da forma:

$$H_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_k \rightarrow T.$$

Para provar um teorema desses é necessário provar que cada uma das hipóteses H_i , que compõem a hipótese disjuntiva H , implica a tese; deve-se proceder como se o teorema fosse dividido em k teoremas parciais $H_i \rightarrow T$, $i = 1, 2, \dots, k$. Em verdade, pode-se provar que

$$(H_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_k \rightarrow T) \Leftrightarrow (H_1 \rightarrow T) \wedge \dots \wedge (H_k \rightarrow T).$$

EXERCÍCIOS:

1. Prove, usando as tabelas da Seção 10.2, a última equivalência para o caso $k = 2$.
2. O teorema a seguir é do tipo sobre o qual acabamos de falar, em que a hipótese pode ser considerada como uma sentença disjuntiva, mas que não está explícita dessa maneira.

Prove o teorema bastante conhecido:

O produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

Dica: dado um número inteiro n , temos três possibilidades: o resto da divisão de n por 3 pode deixar resto 0, 1 ou 2. Em cada um desses casos, n é, respectivamente, da forma $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, para algum número inteiro k .

Reescreva a hipótese do teorema como uma hipótese disjuntiva, formada pelas três possibilidades anteriores e, usando cada uma dessas hipóteses, conclua a demonstração.

3. Do resultado do Exercício 2 acima, deduza o seguinte corolário:

Para todo número inteiro n , o número $n^3 - n$ é sempre um múltiplo de 3.

4. Na Geometria Plana, a demonstração do seguinte teorema também é do mesmo estilo daqueles que abordamos nesta seção:

A medida do ângulo inscrito vale metade da medida do ângulo central correspondente.

Veja a demonstração desse teorema em qualquer livro de Geometria.

5. *Mostre que o quadrado de um número ímpar é da forma $8k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Dica: suponha que o número ímpar seja da forma $2n + 1$. Após elevar ao quadrado, deve-se considerar os casos em que n seja par, e depois, em que n seja ímpar.

10.3.2 Teoremas cuja hipótese é uma sentença conjuntiva

Se a tese de um teorema é uma sentença conjuntiva da forma $T = T_1 \wedge \dots \wedge T_k$, então, para provar que $H \rightarrow T$, é necessário provar que a hipótese H implica cada uma das sentenças T_i da tese, para $i = 1, 2, \dots, k$. É como se tivéssemos k teoremas parciais da forma $H \rightarrow T_i$. Na verdade, observamos que vale

$$(H \rightarrow T_1 \wedge \dots \wedge T_k) \Leftrightarrow (H \rightarrow T_1) \wedge \dots \wedge (H \rightarrow T_k).$$

EXERCÍCIOS:

1. Usando as tabelas da Seção 10.2, verifique para o caso $k = 2$, que vale a equivalência anterior.
2. Demonstre que, se um triângulo tem um ângulo valendo 100° , então os outros ângulos são agudos.
Verifique que o teorema é do tipo apresentado nesta seção.
3. Demonstre que se um número inteiro é múltiplo de 12, então ele é múltiplo de 3 e de 4.
Verifique que o teorema é do tipo apresentado nesta seção.

10.3.3 Teoremas cuja tese é uma sentença disjuntiva

Na demonstração de um teorema cuja tese é uma sentença disjuntiva da forma $T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_k$, deve-se provar que a hipótese H implica T_1 , ou H implica T_2 , e assim por diante. É válido que

$$(H \rightarrow T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_k) \Leftrightarrow (H \rightarrow T_1) \vee \dots \vee (H \rightarrow T_k).$$

EXERCÍCIOS:

1. Dê exemplo de um teorema que seja da forma anterior.
2. A seguinte equivalência é válida? Por quê?

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_k \rightarrow T) \Leftrightarrow (H_1 \rightarrow T) \wedge \dots \wedge (H_k \rightarrow T).$$

CAPÍTULO 11

O absurdo tem seu valor! (As demonstrações por redução a um absurdo)

“Reductio ad absurdum, que Euclides gostava tanto, é uma das armas mais admiráveis de um matemático. É uma jogada mais admirável do que qualquer jogada de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo de qualquer outra peça, mas o matemático oferece todo o jogo.”

Godfrey H. Hardy (1877 - 1947)

In A Mathematician’s Apology,
London, Cambridge University Press, 1941

11.1 Redução a um absurdo

“ISSO É UM ABSURDO!!!”

Você já deve ter ouvido essa frase várias vezes, principalmente em alguma discussão durante a qual um dos interlocutores rechaça os argumentos do outro, ou quando alguém exprime um fato inaceitável.

Em Matemática, por mais estranho que a princípio possa parecer, o “ABSURDO” é muito útil e bastante utilizado por meio de uma técnica de demonstração chamada **“demonstração por redução a um absurdo”**, **“demonstração por redução ao absurdo”**, ou, simplesmente, **“demonstração por absurdo”**. Essa técnica é ainda conhecida pelos nomes **“demonstração por contradição”**, ou pelo seu nome latino **“reductio ad absurdum”**.

Vejamos como provar por contradição (ou redução a um absurdo) uma sentença da forma ‘Se H , então T ’: em linhas gerais, o método consiste em supor temporariamente que a sentença é falsa e utilizar este fato para deduzir uma contradição, o que assegura que essa suposição não pode ocorrer, e, daí, a sentença tem de ser verdadeira. Ora, fazer essa suposição temporária significa admitir que existe um elemento que satisfaça a hipótese, mas para o qual a tese não se cumpre. Argumentando a partir desses fatos, deve-se chegar a alguma contradição.

Exibiremos um exemplo clássico de uma demonstração usando a técnica de redução ao absurdo. Nossa objetivo é provar que $\sqrt{2}$ é irracional, mas, antes disso, precisamos provar o seguinte lema, quando também usaremos a técnica de redução a um absurdo:

LEMA: Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é divisível por dois (é par), então n é divisível por dois (é par).

Neste lema temos:

H : $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é divisível por 2;

T : n é divisível por 2;

$\sim T$: n não é divisível por 2.

Para provar esse lema pelo método da redução ao absurdo, vamos supor, temporariamente, que valem H e $\sim T$, isto é, vamos supor que existe um número natural n tal que n^2 seja divisível por 2 (n satisfaz a hipótese), mas que n não é divisível por 2 (n não satisfaz a tese). Diante dessa suposição, devemos chegar a algum absurdo.

Demonstração do lema pelo método de redução a um absurdo:

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n^2 é divisível por 2. Suponha que n não seja divisível por 2, (*estamos negando a tese*) isto é, n seja ímpar. Logo n é da forma $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$, onde $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Portanto, n^2 é ímpar (*já que é da forma* $2r + 1$, $r \in \mathbb{Z}$), o que contradiz a hipótese de que n^2 é divisível por 2. Chegamos a um **ABSURDO!** Isto é equivalente ao fato de que a negação da nossa tese (n não é divisível por 2) é falsa, ou seja, n é divisível por 2, como queríamos demonstrar.

(Note que, nesta demonstração, a contradição a que chegamos é a sentença $H \wedge \sim H$.)

Cabe-nos, neste ponto, dar uma justificativa lógica para esse método de demonstração.

JUSTIFICATIVA LÓGICA DA DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO A UM ABSURDO:

Como o valor lógico de uma sentença do tipo $\sim Q \wedge Q$ é F , no final do Capítulo 9, provamos que

$$(H \rightarrow T) \Leftrightarrow ((H \wedge \sim T) \rightarrow (\sim Q \wedge Q)),$$

para uma sentença Q qualquer.

Interpretemos essa equivalência: *Para provar que $H \rightarrow T$ vale, supõe-se que a hipótese H é verdadeira, mas que a tese seja falsa, ou seja, que $H \wedge \sim T$ ocorre. Considerando o valor lógico de $H \wedge \sim T$ como verdadeira, deve-se deduzir uma sentença contraditória da forma $\sim Q \wedge Q$ (que é um absurdo!), para alguma sentença Q . Ora, mas não se pode deduzir uma sentença falsa partindo-se de uma outra verdadeira, como foi dito na Subseção 2.4.3. Logo, $H \wedge \sim T$ não pode ocorrer, donde $\sim(H \rightarrow T)$ também não pode ocorrer (esta última afirmação é consequência da última observação do Capítulo 9: $H \wedge \sim T \Leftrightarrow \sim(H \rightarrow T)$). Por conseguinte, $H \rightarrow T$ deve ocorrer, como queríamos.*

É importante frisar que o **absurdo** ao qual estamos nos referindo é uma sentença contraditória qualquer $\sim Q \wedge Q$.

Uma demonstração usando argumentos de contradição é um tipo de demonstração chamada **demonstração indireta**. Nessas demonstrações, diferentemente das demonstrações diretas, não se parte de H para deduzir diretamente T . A conclusão de que T ocorre é decorrência da técnica da demonstração utilizada.

Antes de retornarmos à demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional, vamos discorrer um pouco sobre a importância histórica deste fato. Como já dissemos, há indícios de que $\sqrt{2}$ foi o primeiro número irracional descoberto. Mas acredita-se também que possa ter sido $\sqrt{5}$ ([Boyer, 1974] p. 54). Já na Antiga Grécia, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ gerou a primeira grande crise da Matemática. Diante do que entendemos hoje por números, os pitagóricos, devotos de um misticismo numérico (vide nota de rodapé 1, da Seção 4.1), acreditavam que todos eles eram racionais. Na Grécia daquele tempo, os números eram considerados como comprimentos de segmentos de reta; eles entendiam que dois segmentos quaisquer eram sempre **mensuráveis**, isto é, existia sempre um terceiro segmento, do qual esses

dois eram múltiplos inteiros. Mas parece que a Matemática pregou-lhes uma peça: $\sqrt{2}$ é um número que aparece naturalmente ao se usar o Teorema de Pitágoras, por ser a diagonal de um quadrado de lado medindo 1, e não é número racional! Diz a lenda que foi um pitagórico quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$ (ou seja, que a diagonal e o lado de um quadrado nunca são mensuráveis) e que seus companheiros o afogaram para não divulgar esse fato que punha por terra toda crença pitagórica. Outra história, menos trágica, reza que foi o pitagórico Hipasus de Metaponto quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e que os pitagóricos o teriam expulso da seita. Mas qualquer que tenha sido o fato real que ocorreu, os pitagóricos não conseguiram manter essa descoberta em segredo.

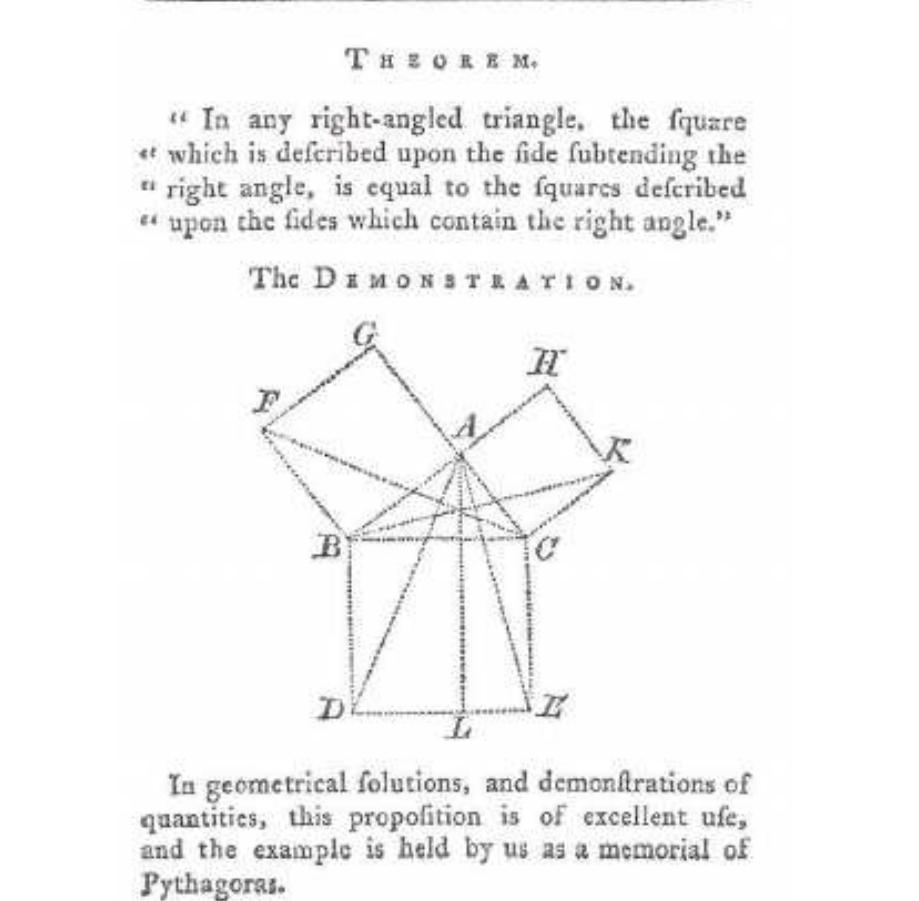


Figura 11.1: Teorema de Pitágoras em um livros inglês de 1775.

É surpreendente e notável de registro, que um método com um alto grau de abstração, como é o método de demonstração usando argumentos de contradição – o que não quer dizer que ele seja difícil ou complicado – já estava estabelecido por volta do Século IV a.C. Diferentemente de outras áreas da Ciência, esse fato comprova o alto nível de desenvolvimento e sofisticação em que a Matemática se encontrava naquela época. E muito mais ainda estava por vir.

Finalmente, passemos à demonstração do Teorema 1, da Seção 5.3, usando, mais uma vez, a técnica de redução a um absurdo:

TEOREMA 1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $q \neq 0$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que p e q sejam **primos entre si**, ou seja, que não possuam divisores comuns além da unidade. Da última igualdade temos $\frac{p^2}{q^2} = 2$, e, daí, $p^2 = 2q^2$ (*). Como 2 divide o lado direito da última igualdade, ele divide p^2 , garantindo que este último número é divisível por 2. Donde decorre do Lema que provamos, que p é divisível por 2, e,

portanto, da forma $p = 2k$, para algum número k inteiro. Substituindo p por $2k$ na igualdade (*) e fazendo a devida simplificação, encontramos $2k^2 = q^2$. Aplicando o raciocínio anterior para essa nova igualdade, se conclui que q é divisível por 2. Mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si. Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p e $q \neq 0$. Assim, a nossa suposição inicial de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C.Q.D.

Nota: se definirmos Q : ‘ p e q são primos entre si’, a contradição a que chegamos nesta demonstração é $Q \wedge \neg Q$.

Pausa para uma **PEQUENA ANÁLISE DO TEOREMA 1**: analisando atentamente, perceba que no teorema anterior apenas provamos que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Nossa demonstração não garante que $\sqrt{2}$ exista, ou seja, que exista um número x tal que $x^2 = 2$. Provamos apenas que, se $x^2 = 2$, então x não é um número racional. Nada foi comentado sobre a existência de um número x que satisfizesse a equação $x^2 = 2$.

Essa “demonstração aritmética” que acabamos de fazer para a irracionalidade de $\sqrt{2}$ aparece nos Elementos de Euclides e num dos livros do filósofo grego Aristóteles (384 a.C.-?). No Capítulo 14 daremos outra bela demonstração desse fato, usando argumentos puramente geométricos.

Para convencer da grande aplicabilidade do método da redução a um absurdo, e de como seu uso pode ser eclético, vamos encerrar essa seção demonstrando o seguinte resultado, bastante interessante, senão curioso:

RESULTADO: *em qualquer festinha (ou grupo de pessoas), existem pelo menos duas pessoas que têm o mesmo número de amigos na festa.*

(Não vamos considerar que uma pessoa seja amiga dela mesma e que a amizade entre duas pessoas é recíproca.)

Demonstração: consideremos que na festinha estejam n pessoas ($n \geq 2$). Suponhamos que cada convidado tenha um número diferente de amigos na festa (*estamos negando a tese*). Temos as seguintes possibilidades para o número de amigos que um convidado possa ter na festa: $0, 1, 2, \dots, n - 1$ (*não estamos contando que alguém seja amigo de si mesmo*). Digamos que o convidado, que chamaremos A_1 , tenha 0 amigos na festinha, que o convidado chamado de A_2 tenha 1 amigo, que o convidado A_3 tenha 2 amigos, e assim por diante. Seguindo esse raciocínio para todos os convidados, finalizaremos com o convidado chamado A_n , que tem $n - 1$ amigos na festa. Logo, ele é amigo de todos os outros presentes, em particular, do convidado A_1 , que não tem amigos na festa. Absurdo! Logo, nossa hipótese inicial é falsa, e, portanto, há pelo menos dois convidados com o mesmo número de amigos na festa. C.Q.D.

Note nesta demonstração que, se Q : ‘ A_1 tem 0 amigos na festinha’, chegamos ao absurdo de que a sentença $Q \wedge \neg Q$ é verdadeira.

Por fim, é importante atentarmos para a forma de se redigir uma demonstração por absurdo. Muitas vezes, empregam-se frases como “Vamos supor que T não ocorre...”, e conclui-se com “Dessa forma, chegamos a um absurdo e, portanto, nossa hipótese inicial de que T é falsa não é verdadeira, logo...”.

EXERCÍCIOS:

Em todos os exercícios desta seção você deve utilizar a técnica de demonstração por redução a um absurdo.

1. (a) Sejam a e b números reais. Mostre que uma condição necessária para que $a \cdot b > 0$ é $(a > 0 \text{ e } b > 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b < 0)$.

Dica: use os corolários do Exercício 6-(iv), da Subseção 6.1.1.

- (b) Mostre que $a, b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$.

2. Se P e Q são sentenças compostas, mostre que, se P e $(P \rightarrow Q)$ são tautológicas, então Q também é uma tautologia.

3. Mostre que a equação $x^2 + y^2 = 47$ não possui uma solução (x, y) formada por números primos.

Observação: também poderíamos ter enunciado o resultado acima com uma conotação geométrica: “Mostre que a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 47$ não passa por nenhum ponto do plano cartesiano cujas abscissa e ordenada sejam números primos.”

Sugestão: use o Exercício 3-(a), da Seção 8.3.

4. Mostre que a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

não possui raízes reais x e y positivas.

Dica: desenvolva a equação e chegue a uma contradição.

5. EXERCÍCIOS SOBRE O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT
(abreviaremos por UTF):

O próprio Fermat chegou a dar uma demonstração de seu teorema para o caso $n = 4$, um dos dois únicos casos que publicou. Mas não é difícil provarem-se alguns resultados sobre o UTF, como veremos a seguir.

- (a) Euler demonstrou o último Teorema de Fermat (UTF) para o caso $n = 3$. Usando esse fato e um argumento de redução a um absurdo, mostre que o UTF vale para $n = 6$.

Sugestão: note: $A^6 = (A^2)^3 = B^3$, onde $B = A^2$.

- (b) Prove que o resultado do item (a) vale para $n = 3, n = 9, n = 12$ e, em geral, para $n = 3k$, onde k é um inteiro positivo.

- (c) Leia o Teorema Fundamental da Aritmética, apresentado no Exercício 6, da Seção 3.3. Usando esse teorema, se convença de que todo número $n \geq 3$ ou tem um fator primo maior do que ou igual a 3, ou é divisível por 4. Usando esse resultado e o fato que acabamos de mencionar, conclua que basta provar o UTF para n primo.

Preâmbulo aos exercícios que seguem:

Em geral, não é uma tarefa simples determinar se certos números são ou não são irracionais, apesar de ser fácil dar exemplos de números irracionais. Basta exibir um número em sua forma decimal que seja infinita e não-periódica¹. Os números $5,010010001000100001\dots$; $1,234567891011\dots$ são irracionais. Note que esses números não foram construídos aleatoriamente, eles possuem uma

¹Em um curso de Cálculo ou de Análise Real, se prova (ou, se deveria provar!) esse fato.

lei de formação em sua construção que não permite qualquer periodicidade em sua parte decimal. Em cada um desses exemplos, encontre essa lei de formação.

O número π , que é um dos irracionais mais populares e badalados, já era conhecido desde o século XVII a.C. O primeiro registro de π foi feito por um escriba egípcio chamado **Ahmes** (c. Século XVI a.C.), no papiro de Rhind, que atualmente encontra-se no Museu Britânico. Entretanto, apenas em 1761 ([Boyer, 1974], p. 340) é que o matemático suíço-alemão **Johann Lambert** (1728-1777) provou a irracionalidade de π , resolvendo finalmente uma questão que há séculos tinha sido feita. Há demonstrações desse fato que usam apenas noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral (vide [Simmons, 1988], p.705).



Figura 11.2: Johann Lambert (1728-1777), que provou a irracionalidade de π , resolvendo um problema que há séculos estava em aberto.

Ainda não se sabe se $\pi + e$ ou $\pi \cdot e$ são ou não irracionais! ([Klee & Wagon, 1991], p. 243). A mesma pergunta permanece aberta para os números e^e , π^π e π^e . Entretanto, o número e^π é irracional (vide Revista do Professor de Matemática 4, p.15 (1984)).

Os exercícios a seguir proporcionarão treinamento em demonstração por redução a um absurdo e indicarão como reconhecer e conseguir exemplos de vários números irracionais. Os números irracionais estão presentes e ocorrem naturalmente em toda a Matemática, mais freqüentemente do que se poderia imaginar. Vamos a eles.

6. Usando o método de redução a um absurdo, mostre que:

- A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.
- O produto de um número racional não-nulo com um número irracional é um número irracional. E se o número racional for zero, o que ocorre?
- O quociente de um número racional não nulo por um outro irracional é um número irracional.

PAUSA PARA OS SEGUINTES EXEMPLOS: dê exemplos de dois números irracionais cuja soma seja racional. Dê exemplos semelhantes para o produto. Dê exemplo de dois números irracionais cujo quociente seja um número racional.

7. Se β é um irracional positivo, então $\sqrt{\beta}$ é um número irracional. A recíproca desse resultado é válida? E o que podemos dizer de $\sqrt[k]{\beta}$ para um inteiro positivo k ?
(Já antecipando a resposta, são números irracionais: $\sqrt{\pi}$, $\sqrt[6]{2}$, etc.)

8. Se β é um irracional, então $\frac{1}{\beta}$ é um número irracional.

(São números irracionais: $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, etc.)

Observe que os exercícios anteriores lhe dão uma forma de exibir infinitos números irracionais, caso conheçamos apenas um deles.

9. OUTRA DEMONSTRAÇÃO DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$, USANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

A seguir, daremos um roteiro de outra demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, bem mais curta que a apresentada neste capítulo. A demonstração usa uma idéia alternativa que também pode ser aplicada nos exercícios vindouros.

- (a) Do Teorema fundamental da Aritmética, deduza que, se n for um número inteiro, então os fatores de 2 que aparecem na decomposição de n^2 é em número par de vezes.

(Em verdade, o resultado é válido trocando-se 2 por um número primo qualquer!)

- (b) Do item anterior, prove que, para p e q inteiros, não pode ocorrer uma igualdade do tipo $2p^2 = q^2$.

- (c) Agora dê uma nova demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Nesta demonstração, não é preciso supor que p e q sejam primos entre si.

10. Chamamos **terno pitagórico primitivo** a um terno de números inteiros positivos (c, b, a) , que não têm divisores em comum diferentes de ± 1 , de sorte que $c^2 = a^2 + b^2$. Ou seja, c, b, a são mutuamente primos entre si e são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo de lados inteiros. Esses números possuem várias propriedades interessantes.

Mostre uma dessas propriedades: num terno pitagórico primitivo, os catetos não podem ser simultaneamente pares, como também não podem ser simultaneamente ímpares.

11. (a) Usando o resultado apresentado no Exercício 9-(c), da Seção 4.1, e, seguindo o mesmo raciocínio que usamos para provarmos a irracionalidade de $\sqrt{2}$, prove que $\sqrt{3}$ é também irracional.

Generalize, enuncie e demonstre esse resultado para um número primo qualquer.

- (b) Usando a mesma técnica anterior e o Exercício 9-(d), da Seção 4.1, demonstre que $\sqrt[3]{4}$ é irracional.

- (c) Como feito em (a), dê uma demonstração de que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ é irracional. Certifique-se de que a mesma demonstração continua válida para $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$, etc. Qual a propriedade que os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 têm em comum?

Enuncie uma generalização do resultado acima e dê uma prova para ele.

- (d) Usando o fato de que $\sqrt{2}$ é irracional, mostre que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ é irracional.

(Dica: suponha $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e escrevendo $\sqrt{3} = \sqrt{2} + \frac{p}{q}$, eleve ambos os membros ao quadrado, e....)

Dê uma generalização desse resultado.

- (e) Inspirando-se na dica que foi dada para o exercício anterior, prove que $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é um número irracional, partindo do fato que já se saiba que $\sqrt{35}$ é irracional (o Exercício a seguir garante a irracionalidade de $\sqrt{35}$). Formule uma generalização desse fato. Usando

que $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é um número irracional prove que $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{7}}$ é um número irracional.
Dica: racionalização.

DÊ UMA PAUSA PARA CONSTRUIR OS SEGUINTES EXEMPLOS: dê exemplos de dois números irracionais cuja soma seja um número irracional, de dois outros cujo produto seja irracional e de dois outros cujo quociente também seja um número irracional. Contraste esses exemplos com os exemplos pedidos no Exercício 6.

- (f) Se p e q são dois números primos distintos, então \sqrt{pq} é um número irracional. Dê exemplos desse caso, além do que aparece no exercício anterior.

Dica: use a Propriedade Fundamental dos Números Primos apresentada no Exercício 9, da Seção 4.1.

12. VALORES IRRACIONAIS DO LOGARITMO:

Alguns números que possuem logaritmos em suas expressões podem fornecer exemplos de números irracionais. Esse fato deve ser observado com a devida atenção, pois, em geral, os livros de Ensino Médio apresentam exemplos de números irracionais apenas envolvendo radicais, o que poder dar ao aluno a falsa impressão de que números irracionais, diferentes de π , têm necessariamente radicais em suas expressões. Vejamos que isso é falso:

- (a) Prove que $\log_3 10$ é um número irracional.

Dica: se $\log_3 10 = \frac{p}{q}$, então $3^p = 10^q$, e use o Exercício 9-(d), da Seção 4.1.

- (b) Usando a mesma técnica empregada no item (a), mostre que $\log_{10} 12$ é um número irracional.

- (c) Vamos generalizar os resultados (a) e (b) anteriores. Prove que $\log_{10} 2^n 5^m$, m, n inteiros, é um número racional, se e somente se, $n = m$.

- (d) De (c), deduza que $\log_{10} k$, k inteiro positivo, é um número racional se, e somente se, k for da forma

$$\dots, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, \dots$$

isto é, $k = 10^m$ com $m \in \mathbb{Z}$.

Portanto, ao usar a calculadora ou uma tabela para encontrar o logaritmo decimal de um número que não está na seqüência acima, devemos nos aperceber de que o logaritmo calculado é um número irracional; o valor que encontramos é sempre aproximado! Na verdade, rigorosamente falando, há um abuso de notação ao usar o símbolo de igualdade para a expressão decimal finita desses logaritmos.

Desde que seja informado o fato, não há mal nisto. Por exemplo, $\log_{10} 12 \approx 1.079181246$, mas é comum usar-se $\log_{10} 12 = 1.079181246$.

13. VALORES IRRACIONAIS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tal como foi feito, usando logaritmos, é possível encontrar números irracionais usando as funções trigonométricas. Vejamos:

- (a) Se $\cos 2\theta$ é um número irracional, mostre que $\cos \theta$, $\sin \theta$ e $\tan \theta$ são irracionais.

Sugestão: suponha que $\cos 2\theta$ seja racional e use as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1, \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

(b) Usando (a) mostre que $\sin 15^\circ, \sin 7^\circ 30', \dots, \cos 15^\circ, \cos 7^\circ 30', \text{etc}$, são todos irracionais

14. (a) Use o Teorema Fundamental da Aritmética apresentado no Exercício 6, da Seção 3.3, para mostrar que, se $m \in \mathbb{Z}$ não for um quadrado perfeito, então \sqrt{m} é um número irracional.

O famoso filósofo grego Platão ($\pm 428\text{-}348$ A.C.) — aquele dos poliedros! —, relata em um de seus Diálogos, *Teeteto*, que seu mestre, **Teodoro de Cirene** (viveu por volta de 390 A.C.) demonstrou a irracionalidade das raízes quadradas de todos os inteiros de 3 a 17 (incluindo esses números) que não são quadrados perfeitos. O fato de ter parado no número 17 deve, talvez, ter sido pelas limitações das técnicas que utilizou e que estavam disponíveis naquela época.

(b) Prove o mesmo resultado do item anterior para $\sqrt[r]{m}$, a menos que $m = n^r$, para algum inteiro positivo n .

(c) Observando os itens (a) e (b) acima, vê-se que, no primeiro caso, \sqrt{m} é uma solução da equação $x^2 - m = 0$, onde m não é um número inteiro. Já no segundo caso, $\sqrt[r]{m}$ é uma solução da equação $x^r - m = 0$, e, mais uma vez, m não é um número inteiro. Na verdade, vale a seguinte generalização desse fato:

Se m não for um inteiro e for raiz de alguma equação da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

onde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ são números inteiros, então m é um número irracional.

- (d) Prove a generalização acima, e a use para garantir a irracionalidade de números tais como:

$$\sqrt{2} + \sqrt{5}, \sqrt{7} - \sqrt[3]{2}, \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt[3]{14}, \text{etc.}$$

(e) Prove que $\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ é irracional. Dê um exemplo de um número irracional usando três radicais diferentes.

(f) Mostre que os números $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ e $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ apresentados na Seção 2.5, são ambos irracionais.

15. Considere a seguinte equação

$$x^2 = 2^x.$$

Fazendo um esboço dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$, é possível ver que eles se intersectam em três pontos cujas abscissas são as raízes da equação. Um deles, x_1 , é negativo, e os outros são $x_2 = 2$ e $x_3 = 4$. Prove que $x_1 \notin \mathbb{Q}$.

16. *Prova de unicidade por um argumento de redução a um absurdo:*

Usando o método de redução a um absurdo e sem resolver qualquer das equações abaixo, demonstre que:

- (a) Se $a \neq 0$, a equação $ax + b = 0$ possui uma única solução.
- (b) Dado x real, existe um único y positivo, também real, tal que $y^2 = x$.
- (c) A equação $z^2 - 25 = 0$ possui uma única solução negativa.

17. FATO VERÍDICO:

Analise criticamente as seguintes idéias e frases referentes a números irracionais, que foram retiradas de livros do Ensino Médio.

- (a) Para justificar a irracionalidade de $\sqrt{2}$:

“Hoje, com o auxílio de computadores, o valor de $\sqrt{2}$ foi calculado com milhares de casas decimais e nenhuma repetição periódica foi encontrada em sua dízima.”

- (b) Novamente, para justificar a irracionalidade de $\sqrt{2}$:

“Sabemos que $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, número este que não é decimal exato nem dízima periódica.”

- (c) Este é um exercício proposto em um livro:

“Classifique o número 2,8284271... como racional ou irracional.”

18. TEMA PARA DISCUSSÃO:

Certo livro cita que a soma de um número racional com um irracional é um número irracional, e que o produto de um número racional não-nulo por um irracional é um número irracional. E, talvez para incentivar o uso da calculadora, prossegue sugerindo a seguinte atividade:

“Com o uso de uma calculadora você pode descobrir outras propriedades dos números irracionais”.

Analise criticamente a atividade proposta pelo livro.

11.2 Teoremas resultantes apenas do uso da técnica de redução a um absurdo (As demonstrações gratuitas)

Alguns teoremas podem ser obtidos de outros, apenas com uma simples aplicação da técnica de redução a um absurdo. Os exercícios a seguir são exemplos desses tipos de teoremas.

EXERCÍCIOS:

- Denotaremos três retas no plano por r , s e t , e usaremos os símbolos \perp e \parallel para designar, respectivamente, retas perpendiculares e paralelas.

Considerando os teoremas abaixo, demonstre que quaisquer dois deles são corolários do terceiro. Faça um desenho para entender melhor o que cada um quer dizer.

$$T_1: r \parallel s \text{ e } r \perp t \Rightarrow s \perp t$$

$$T_2: r \parallel s \text{ e } s \not\perp t \Rightarrow r \not\perp t$$

$$T_3: r \perp s \text{ e } t \not\perp s \Rightarrow r \parallel t$$

- Considere um triângulo de lados a , b e c no qual, quando for o caso, a é o maior dos lados. Denotemos o ângulo oposto ao lado a por \hat{A} . Prove que, da Lei dos Co-senos (Exercício-2(a), Seção 5.2), decorrem os seguintes teoremas:

T_1 : Se o triângulo é acutângulo ($\text{med}\hat{A} < 90^\circ$), então $a^2 < b^2 + c^2$.

T_2 : Se o triângulo é retângulo ($\text{med}\hat{A} = 90^\circ$), então $a^2 = b^2 + c^2$.

T_3 : Se o triângulo é obtusângulo ($\text{med}\hat{A} > 90^\circ$), então $a^2 > b^2 + c^2$.

Uma coisa bastante interessante é que, de cada um dos teoremas acima decorre seu respectivo teorema recíproco. Ou seja, os teoremas recíprocos são corolários dos teoremas diretos. Verifique esse fato, provando que:

T'_1 : Se $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é acutângulo ($\text{med}\hat{A} < 90^\circ$).

T'_2 : Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo ($\text{med}\hat{A} = 90^\circ$).

T'_3 : Se $a^2 > b^2 + c^2$, então o triângulo é obtusângulo ($\text{med}\hat{A} > 90^\circ$).

Por que foi possível deduzir os teoremas recíprocos dos teoremas diretos? O que possibilitou esse fato?

CAPÍTULO 12

Mais técnicas de demonstração

“Euclides me ensinou que sem hipóteses não há qualquer demonstração. Portanto, em qualquer argumento, examine as hipóteses.”

Eric Temple Bell (1883-1960)

*In Return to Mathematical Circles, H. Eves;
Prindle, Weber & Schmidt, 1988*

12.1 A contrapositiva de uma sentença

Vamos olhar com mais cuidado a demonstração do lema que provamos na Seção 11.1. Se prestar atenção, naquela demonstração provamos que “Se n é ímpar, então n^2 é ímpar” e, com argumentos da técnica da demonstração por redução a um absurdo, utilizamos esse resultado para provar o que queríamos: “Se n^2 é par, então n é par”.

Portanto, na verdade, naquela demonstração, o que fizemos foi provar a seguinte implicação entre duas sentenças implicativas:

$$(*) (n \text{ é ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar}) \Rightarrow (n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}).$$

Se chamarmos as proposições

$$P: n^2 \text{ é par} \text{ e } Q: n \text{ é par},$$

as negações dessas sentenças são, respectivamente,

$$\neg P: n^2 \text{ é ímpar} \text{ e } \neg Q: n \text{ é ímpar}.$$

Dessa forma, a implicação $(*)$ torna-se

$$(**) (\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

É simples provar que, tanto a implicação $(**)$, como sua recíproca, também são válidas, e que esse fato é verdadeiro, em geral, para quaisquer sentenças P e Q (Exercício 7, desta seção). Ou seja, vale o

PRINCÍPIO DA CONTRAPOSITIVIDADE:
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

A sentença $\neg Q \Rightarrow \neg P$ é chamada **contrapositiva¹ da sentença** $P \Rightarrow Q$. Pelo Princípio da Contrapositividade, como uma sentença implicativa é equivalente à sua contrapositiva, a implicação $P \Rightarrow Q$ será verdadeira se, e somente se, sua contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$ for verdadeira.

Semelhantemente, definimos ‘Se $\neg T$, então $\neg H$ ’ como a contrapositiva da sentença condicional ‘Se H , então T ’, e segue-se a equivalência

$$(\text{Se } H \text{ então } T) \Leftrightarrow (\text{Se } \neg T, \text{ então } \neg H).$$

Convém observar que, às vezes, é mais fácil ou conveniente provar que a contrapositiva de uma sentença é verdadeira, do que provar que a própria sentença é verdadeira (vamos dar um exemplo desses a seguir). Ao demonstrar uma sentença provando sua contrapositiva, estamos utilizando o que chamaremos **método de demonstração usando a contrapositiva**. Este é um outro método de demonstração indireta, já que provar ‘ $P \Rightarrow Q$ ’, reduz-se a provar a implicação ‘ $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ’.

EXEMPLO 1: Um caso no qual provar a contrapositiva é mais conveniente do que provar a própria sentença

Provemos o seguinte resultado sobre números reais, bastante usado na Análise Real:

$$\text{Se } a \geq 0 \text{ e } a < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \text{ então } a = 0.$$

Ora, a contrapositiva dessa proposição é

$$\text{Se } a \neq 0, \text{ então } a < 0 \text{ ou existe um número } \varepsilon_0 \text{ tal que } a \geq \varepsilon_0$$

e provar essa contrapositiva é muito simples:

De fato, como $a \neq 0$, temos $a < 0$ ou $a > 0$. Caso $a < 0$, chegamos à tese, e, portanto, a demonstração está encerrada. Caso $a > 0$, basta considerar $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$, que temos $a \geq \varepsilon_0$, como queríamos demonstrar.

Pertinentemente, alguém poderia perguntar: “por que em vez de apresentar a sentença, não se apresenta sua contrapositiva, já que é ela que vai ser demonstrada?” Nesse caso, a apresentação da sentença da maneira em que está formulada é mais útil e, muitas vezes, tem uma forma mais “agradável” de ser apresentada do que a da sua contrapositiva.

OBSERVAÇÃO: note que o método de demonstração de uma sentença implicativa $H \Rightarrow T$, usando a contrapositiva, é um método de redução a um absurdo, onde o absurdo a se chega é $H \wedge \neg H$.

Com o método de demonstração utilizando a contrapositiva, encerra-se o estudo das técnicas de demonstração.

A seguir, apresentaremos um resumo muito importante.

¹Para aqueles que têm dúvida, a palavra *contrapositiva* e suas variantes não se escrevem usando hífen.

RESUMO DOS MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Pelo que vimos nos capítulos anteriores, há três maneiras de provar uma sentença condicional da forma

‘Se H , então T ’,

onde H representa a hipótese e T a tese:

1. Demonstração direta:

Considera-se H verdadeira e, por meio de um processo lógico-dedutivo, se deduz que T vale;

2. Demonstração indireta por contradição ou por (redução a um) absurdo:

Considera-se H verdadeira e, por meio de um processo lógico-dedutivo, supondo-se T falsa, se deduz alguma contradição;

3. Demonstração da Contrapositiva de $H \Rightarrow T$ (uma maneira indireta, também por redução a um absurdo, de se provar uma implicação):

Considera-se T falsa e, por meio de um processo lógico-dedutivo, se deduz que H é falsa .

É possível demonstrar um mesmo resultado utilizando-se cada uma dessas técnicas de demonstração. Recomenda-se que as demonstrações indiretas só sejam usadas como último recurso.

Como ilustração, vamos provar o seguinte resultado, bastante simples, usando cada um desses três métodos:

$$\text{Se } 2x^2 + x - 1 = 0, \text{ então } x < 1.$$

Demonstração 1 (Demonstração direta):

Usando a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, encontra-se diretamente que $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$ são as duas raízes dessa equação. Portanto, ambas são menores do que 1. *C.Q.D.*

Demonstração 2 (Demonstração indireta, usando contradição, em que a contradição não é a negação da hipótese):

Suponha que $2x^2 + x - 1 = 0$ e que $x \geq 1$. Logo, se $x \geq 1$, então $1 - x \leq 0$ e $2x^2 > 0$. Mas dessa forma, usando novamente a hipótese, teríamos $0 < 2x^2 = 1 - x \leq 0$, o que é uma contradição. Portanto, $x < 1$. *C.Q.D.*

Demonstração 3 (Demonstração da contrapositiva):

Demonstraremos que, se $x \geq 1$, então $2x^2 + x - 1 \neq 0$. De fato, se $x \geq 1$, temos $x - 1 \geq 0$ e $2x^2 > 0$. Somando essas duas desigualdades, encontramos $2x^2 + x - 1 > 0$, o que significa $2x^2 + x - 1 \neq 0$. *C.Q.D.*

Os exercícios a seguir garantem material para você treinar com demonstrações, utilizando a contrapositiva.

EXERCÍCIOS:

1. Escreva a contrapositiva das seguintes sentenças:

- (a) $H_1 \wedge \dots \wedge H_k \rightarrow T$;
- (b) $H \rightarrow T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_r$.

2. Determine as contrapositivas das seguintes sentenças abaixo. Empregue os mesmos modelos de apresentação para escrever cada contrapositiva.

- (a) Se $xy = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.
- (b) $n \in \mathbb{N}; -2 > n > -4 \Rightarrow n = -3$.
- (c) A condição $xy > 0$ é suficiente para que $x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$.
- (d) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.
- (e) Uma condição necessária para que $a - \varepsilon < b, \forall \varepsilon > 0$, é que $a \leq b$.
- (f) Se $\cos \theta$ é racional então $\cos 3\theta$ é racional.
- (g) Se $n \in \mathbb{N}$ e $-3 \leq n \leq -5$, temos $\{-3, -4, -5\}$.

3. Provando a contrapositiva, demonstre cada sentença a seguir:

- (a) Se a e b são números reais tais que $a^4 + b^6 = 0$, então $a = b = 0$.
- (b) Uma condição suficiente para que n^k seja par ($n \in \mathbb{N}$) é que n seja par.
- (c) Sejam a, b e ε números reais. Tem-se: $a < b + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$.
- (d) Se o número de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ é primo, então, necessariamente, n deve ser primo.
Dica: nos argumentos você deve usar a decomposição
 $A^r - 1 = (A - 1)(A^{r-1} + A^{r-2} + \dots + A + 1)$.

4. No exercício a seguir, apresentaremos um teorema e seis sentenças. Você deve detectar entre as sentenças apresentadas, aquela que é a *recíproca*, outra que é a *negação*, outra que é a *contrapositiva* do teorema, outra que é a *negação da contrapositiva*, como também aquela que é o teorema apresentado de uma forma diferente e, finalmente, aquela que *nada tem a ver* com o teorema.

Teorema: *Todo número inteiro positivo pode ser escrito como uma soma de quatro quadrados perfeitos.*²



Figura 12.1: Matemático e físico ítalo-francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que contribuiu para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática.

²Esse resultado é chamado **Teorema de Lagrange**, cuja demonstração requer noções da Teoria dos Números e pode ser vista em [de Oliveira Santos, 2000], p.131.

- (a) Existe um número inteiro positivo que não é a soma de quatro quadrados perfeitos.
- (b) Um número formado pela soma de quatro quadrados perfeitos é um número inteiro positivo.
- (c) Um número que não é um inteiro positivo não pode ser escrito como a soma de quatro quadrados perfeitos.
- (d) Seja $r \in \mathbb{Z}$. Então, $r = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ para certos $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Z}$.
- (e) Se um número não pode ser escrito como a soma de quatro quadrados perfeitos, então esse número não é um número inteiro positivo.
- (f) Uma condição necessária para que um número de quatro quadrados seja uma soma de inteiros é que ele seja um número inteiro.
5. No exercício abaixo, apresentaremos duas sentenças que já apareceram no texto. Você deve escrever a *recíproca*, a *negação*, a *contrapositiva* e a *negação da contrapositiva* de cada sentença, bem como reescrevê-la de uma outra maneira.
- (a) *Todo número par é a soma de dois números primos.*
- (b) *Se $n \geq 3$, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras x, y e z não-nulas.*
6. Como já dissemos, o método de demonstração que alguém pode escolher para provar algum resultado depende de uma possível e permissível escolha. Após ter falado sobre os métodos de demonstração direta e indireta, quais seriam as maneiras possíveis que se poderiam empregar para demonstrar uma proposição da forma ‘ $P \Leftrightarrow Q$ ’?
7. Usando o método de redução a um absurdo, justifique o Princípio da Contrapositividade.

12.2 *Curiosidade: algumas cômicas “demonstrações”

Como uma reção cômica à falta de demonstrações em alguns livros, há uma lista de certas “técnicas de demonstração” engraçadas que exibiremos a seguir.

Façamos uma pausa para relaxar (pausa que também tem seu lado didático), mas não permita que alguém utilize essas demonstrações de forma séria.

1) Demonstração por definição:

“Definimos que existe uma demonstração para o resultado!”

2) Demonstração do indeciso:

“Portanto, chegamos, assim, ao final da demonstração. Será? Ou não? E agora? O que faço?”

3) Demonstração do brigão intimidador-mal-educado:

“Qualquer idiota pode ver que isso é verdadeiro! Como é que você não está vendo?!”

4) Demonstração do brigão intimidador-mal-educado e, ainda por cima, arrogante:

“O resultado vale, pois assim o desejo! E pronto!!”

5) Demonstração do democrata:

“Quem acha que demonstramos o teorema, por favor, levante a mão para votar!”

6) Demonstração por falta de tempo:

“Já que não temos mais tempo, segue que a demonstração é válida, e cabe a vocês fazê-la!”

7) Demonstração por obviedade:

“Como é óbvio que o resultado é verdadeiro, ele está demonstrado!”

8) Demonstração por conveniência:

“Como seria muito bom e conveniente que isso fosse verdade, então é verdade!”

9) Demonstração por escolha do exemplo:

“Consideremos o número $x = 4$ para o qual a demonstração a seguir vale . . . ”

10) Demonstração do suplicante:

“Por favor, peço-lhes, acreditem que o teorema vale!!! Por favor! Por favor! Por favor!”

(Inspiramo-nos no sítio eletrônico <http://www.themathlab.com/geometry/funnyproofs.htm>, acessado em Março de 2006)

CAPÍTULO 13

*Sofismas, o cuidado com os auto-enganos e com os enganadores!

“Tu não me enganas, mundo, e não te engano a ti. ”.

Carlos Drummond de Andrade (1902-1987)

Poema: Legado. In Carlos Drummond de Andrade Poesia e Prosa em volume único, Editora Nova Aguilar, 6a. edição, 1988.

13.1 Sofismas

Se você usar argumentos não válidos em uma demonstração, tais como aqueles que ferem axiomas, argumentações lógicas ou definições, é possível deduzir contradições ou resultados “assustadores”, que podem trazer surpresas.

Várias vezes, esses argumentos são propositadamente elaborados, de modo que, a partir de premissas verdadeiras, alguém seja levado a deduzir conclusões falsas. Quando isso ocorre, esse tipo de raciocínio é chamado *sofisma* ou *falácia*. O sofisma¹ ou falácia é uma seqüência de argumentos, aparentemente válidos, que podem ser usados para deduzir resultados falsos. O termo *sofisma* decorre do nome de um grupo de filósofos da Antiga Grécia chamados *Sofistas* (\pm Século IV a.C.) e contra os quais se opunha o famoso filósofo *Sócrates* (470-399 a.C.). Como no caso dos silogismos, há também uma classificação de tipos diferentes de sofismas.

Diferentemente do que alguns apontam, um sofisma não é um paradoxo! Um paradoxo é uma sentença autocontraditória a que se chega por argumentações válidas.

Nos exercícios a seguir, apresentaremos alguns sofismas matemáticos. Exercitando seu espírito crítico, encontre os erros nas “demonstrações” apresentadas a partir do Exercício 2, desta seção. Você vai perceber o quanto se deve ser cuidadoso com argumentos que, quando mal usados, propositadamente ou não, podem resultar em contradições e trazer muitas surpresas, mesmo quando se parte de premissas verdadeiras.

¹Apesar da palavra terminar em ‘a’, ela é masculina: *o* sofisma.

EXERCÍCIOS:

1. Qual a diferença entre sofisma e paradoxo? Comente sua resposta.

SOFISMAS NUMÉRICOS

2. “Seja i a *unidade imaginária*, isto é, $i^2 = -1$. Então

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

e, portanto, $1 = -1$ ”.

3. Usando a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$\log(a^b) = b \log(a),$$

temos

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 > 3.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad -6 &= -6 \Rightarrow 4 - 10 = 9 - 15 \Rightarrow 4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} \Rightarrow 2 = 3. \end{aligned}$$

Conclusão: $-6 = -6 \Rightarrow 2 = 3$.

5. $x = y \Rightarrow x^2 = xy \Rightarrow x^2 - xy = 0 \Rightarrow x(x - y) = 0 \Rightarrow x = 0$.

COROLÁRIO: $13 = 0$.

SOFISMAS NA GEOMETRIA:

6. Encontre o erro na “demonstração” do seguinte “teorema”:

“Teorema”: “Todos os triângulos semelhantes são congruentes”

“Demonstração”: Considere os triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ na Figura 13.1, abaixo.

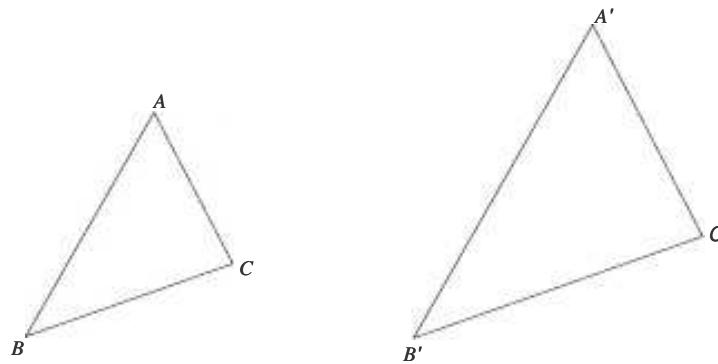


Figura 13.1: Figura relativa ao Exercício 6.

Pelas relações de semelhança de triângulos da Geometria Plana ([Barbosa, 2004]), temos

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB},$$

onde estamos representando por AB o comprimento do lado do triângulo de aresta A e B , e, da mesma maneira, o comprimento dos outros lados.

Da igualdade anterior decorre que

$$B'C'.AB = BC.A'B' \Rightarrow$$

$$(B'C' - BC)(B'C'.AB) = (B'C' - BC)(BC.A'B') \Rightarrow$$

$$(B'C')^2 \cdot AB - B'C'.AB \cdot BC = B'C'.BC.A'B' - (BC)^2 A'B' \Rightarrow$$

$$(B'C')^2 \cdot AB - B'C'.BC.A'B' = B'C'.AB \cdot BC - (BC)^2 A'B' \Rightarrow$$

$$B'C'.(B'C'.AB - BC.A'B') = BC.(B'C'.AB - BC.A'B') \Rightarrow$$

$$B'C' = BC.$$

De maneira análoga, também prova-se que $A'B' = AB$ e $C'A' = CA$. Portanto, concluímos destas igualdades que quaisquer dois triângulos semelhantes são congruentes. *C.Q.D.*

7. Complementando os exercícios desta seção, vamos agora apresentar algumas “demonstrações” usando figuras propositadamente desenhadas de maneira errada para induzir conclusões falsas.

Nosso objetivo é alertar para o cuidado com o uso de figuras numa demonstração e com a mínima qualidade que os desenhos devem ter. Na seção a seguir usaremos figuras para auxiliar-nos em nossas demonstrações, só que naquele caso, serão demonstrações verdadeiras!

O “Teorema” e a “demonstração” a seguir são muito interessantes:

“TEOREMA”: “Qualquer triângulo é isósceles”.

“Demonstração”: Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$, como desenhado na Figura 13.2.

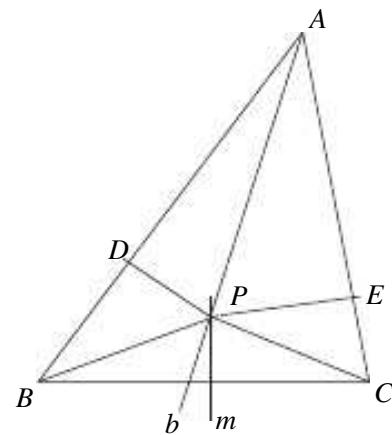


Figura 13.2: Triângulo propositadamente mal desenhado para induzir o sofisma: “*qualquer triângulo é isósceles*”.

(Nesta demonstração, vamos representar respectivos segmentos congruentes e triângulos congruentes pelo símbolo \equiv .)

Do triângulo da Figura 13.2:

- i) Trace a mediatrix m em relação ao lado BC ;
- ii) Trace a bissetriz b do ângulo \hat{A} ;
- iii) Seja P o ponto de intersecção das retas m e b ;
- iv) Pelo ponto P , trace os segmentos PD e PE perpendiculares aos lados AB e AC , respectivamente.

Desses elementos do triângulo, resulta que:

- i) $PD = PE$, pois a distância de qualquer ponto da bissetriz eqüidista dos lados do ângulo;
- ii) $\triangle APD \equiv \triangle APE$, já que possuem um ângulo medindo $\hat{A}/2$, o lado AP em comum e $PD \equiv PE$. Logo, $AD \equiv AE$.
- iii) $PB \equiv PC$, pois $P \in m$, e todo ponto da mediatrix eqüidista dos extremos. Daí, temos $\triangle PDB \equiv \triangle PEC$, donde $DB \equiv EC$.

Ora, como $AD \equiv AE$ e $DB \equiv EC$, segue que $AB \equiv AC$, ou seja, o triângulo é isósceles. *C.Q.D.*

SOFISMAS GEOMÉTRICOS

8. “O triângulo da Figura 13.3 foi decomposto em quatro outras figuras que, quando rearrumadas, formam um outro triângulo congruente ao primeiro, mas cuja área é a do primeiro menos a área de um dos quadrados que aparece na figura”. O que houve?

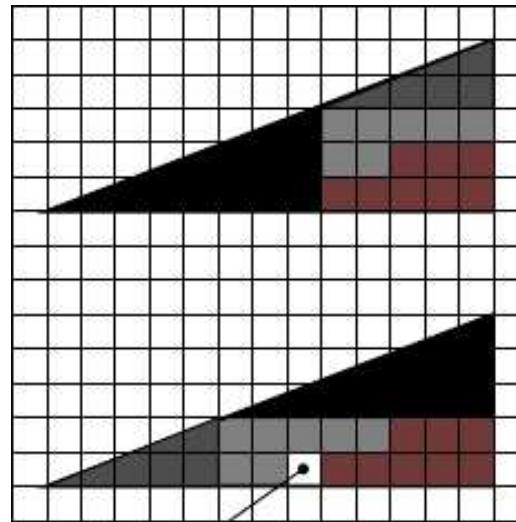


Figura 13.3: Figura referente ao Exercício 8. Uma figura bem desenhada, apenas para enganar.

9. Considere o primeiro retângulo da Figura 13.4. Decomponha esse retângulo em dois triângulos e dois trapézios, como foi feito no desenho. Rearrume essas figuras como no segundo desenho, formando um outro retângulo. Ora, observe agora que a área do primeiro retângulo é 64, enquanto a do segundo retângulo é 65. Ganhou-se, portanto, uma unidade de área ao rearrumar as figuras!!! O que houve???

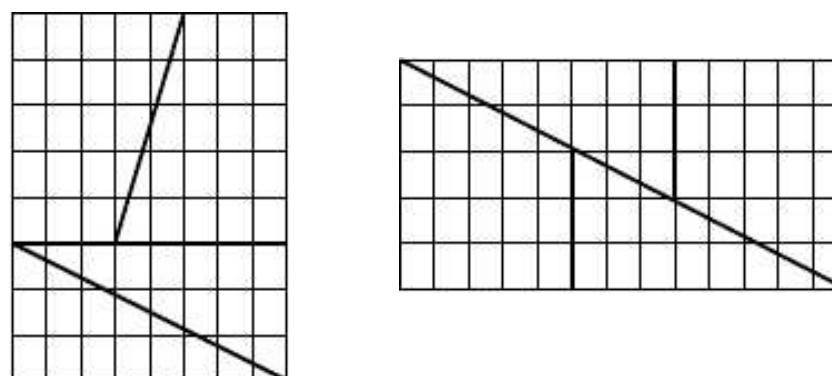


Figura 13.4: Figuras referentes ao Exercício 9.

Veja que interessante: do mesmo modo que trabalhamos com o par de números $(5, 8)$, a mesma idéia continua valendo caso substituíssemos esse par pelos pares de números $(8, 13 = 5 + 8)$, $(13, 21 = 8 + 13)$, $(21, 24 = 13 + 21)$, e assim por diante.

CAPÍTULO 14

Demonstrações com o auxílio de figuras

*“Ambas as palavras ‘figura’ e ‘ficação’ derivam da mesma raiz latina *fingire*. Cuidado!”*

M.J. Moroney, *in Facts from Figures*.

Raramente vemos alguém resolvendo algum problema matemático que não seja tentado a rabiscar alguma equação ou fazer algum desenho. Os desenhos ajudam a sintetizar o raciocínio e, decisivamente, contribuem com idéias e argumentos usados para entender, enunciar, demonstrar ou descobrir algum fato.

Reconhecemos que, em diversas circunstâncias, as figuras dizem mais que as palavras. Entretanto, é bom atentar para o fato de que os desenhos são apenas dispositivos que servem para auxiliar, eles sozinhos não podem demonstrar coisa alguma. É necessário extrair deles as informações que precisamos.

Nesse ponto, vale ressaltar o cuidado com a qualidade dos desenhos que alguém deseja fazer. As figuras, principalmente as mal desenhadas, intencionalmente ou não, podem enganar e induzir a falsas conclusões. Lembre-se das figuras da seção anterior.

Ninguém é obrigado a ser um artista para fazer um desenho que possa auxiliar em alguma demonstração, mas não se deve descuidar: por exemplo, as retas não podem ser sinuosas, os ângulos retos não podem ser traçados como obtusos, tampouco os círculos serem ovais como batatas, e assim por diante. Esse é um detalhe que deve merecer atenção.

Deixamos claro que, com certeza, usando-se desenhos é possível auxiliar, e muito, a demonstração de vários resultados, e essa prática tem sido assim por milênios entre as mais diversas civilizações que usaram ou desenvolveram a Matemática.

A seguir, daremos duas demonstrações que usam fortemente o uso de figuras geométricas.

TEOREMA DE PITÁGORAS: *num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração: a demonstração que segue é aquela sobre a qual falamos no final da Seção 4.1.1 , que é creditada ao presidente americano James Garfield. Entre as diversas opções de demonstrações do Teorema de Pitágoras, decidimos apresentá-la; não pela importância histórica de seu autor, mas porque julgamos ser uma das mais simples e porque envolve argumentos que chegam a ser pueris: as fórmulas das áreas do trapézio e do triângulo e resultados simples de geometria.

Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b . Usando esse triângulo, construa um trapézio, como na Figura 14.1, da próxima página. Note que o triângulo isósceles de lados c é retângulo, já que $\alpha + \beta = 45^0$. Daí, a altura e a base desse triângulo vale c . Igualando a área do trapézio, de bases a, b e altura $a + b$, com a soma das áreas dos três triângulos, temos

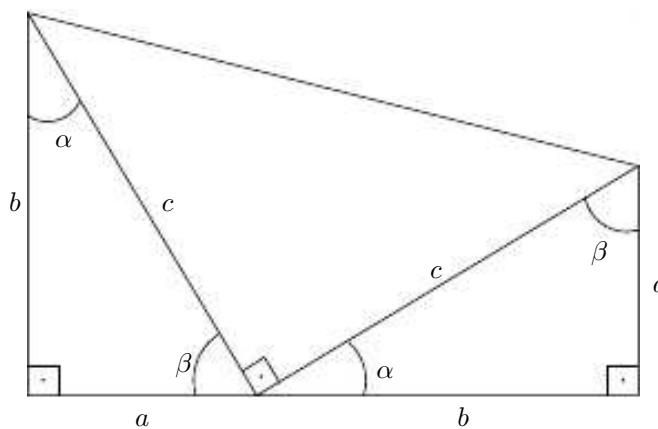


Figura 14.1: Figura de um trapézio usada para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2},$$

e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

C.Q.D.

A segunda demonstração, usando figuras, é uma belíssima demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, que emprega argumentos geométricos simples e inteligentes. Essa demonstração está bem no modelo da demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado (ou seja, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) dada pelos antigos gregos (vide [de Souza Ávila, 1998]).

DEMONSTRAÇÃO DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$:

(A demonstração é devida a Apostol. Vide [Apostol,])

Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional e que possa ser escrito como $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Logo, $\frac{p}{q}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1. Multiplicando os comprimentos dos lados desse triângulo por q , encontramos um novo triângulo retângulo $\triangle ABC$ de hipotenusa de comprimento p e catetos de comprimentos q (Figura 14.2). Nossa trabalho, a partir desse ponto, é provar que não pode existir um triângulo desse tipo: isósceles com lados de comprimentos inteiros.

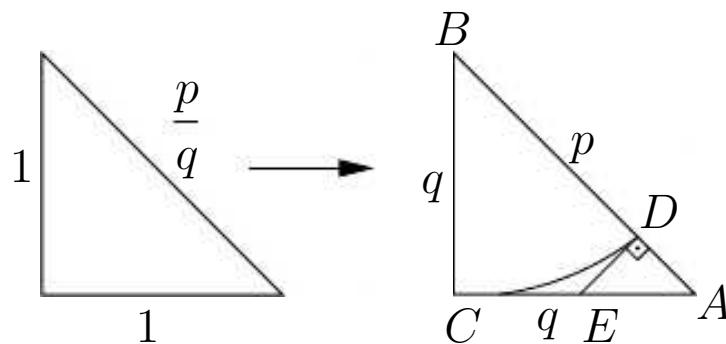


Figura 14.2: Uma bela demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Dessa vez, usando argumentos geométricos.

Traçando uma circunferência de centro no ponto B e raio BC , ela corta o lado AB no ponto D . Observe que AD é um segmento de comprimento inteiro valendo $p - q$. Baixe por D uma perpendicular ao lado AB , que toca o lado AC no ponto E . Verifica-se que DE é congruente a EC , e que os segmentos AD e DE também são congruentes. Dessa forma, o triângulo $\triangle ADE$ é um triângulo retângulo isósceles, cujas medidas dos lados ainda são números inteiros.

Podemos repetir os mesmos argumentos anteriores, agora, usando o triângulo $\triangle ADE$, encontrando um outro triângulo com as mesmas propriedades: sempre triângulos retângulos isósceles com lados de comprimentos inteiros. Continuando esse processo, as medidas dos lados desses triângulos estão diminuindo e, a partir de um certo passo do procedimento, esses comprimentos não mais poderão ser números inteiros. Chegamos assim a um absurdo. Portanto, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C.Q.D.

Compare essa demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ com aquela que demos na Seção 11.1.

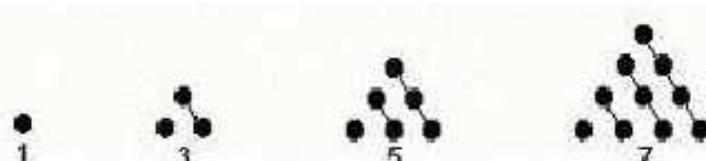
EXERCÍCIOS:

1. Readapte a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ que demos nesta seção, para provar que os números $\sqrt{n^2 + 1}$ e $\sqrt{n^2 - 1}$ são ambos irracionais, para qualquer número inteiro $n > 1$.

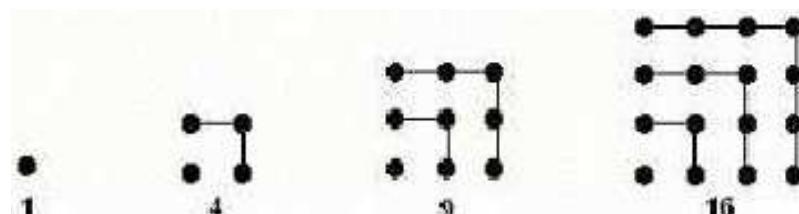
Dica: No primeiro caso, considere um triângulo retângulo de catetos 1 e n ; no segundo, considere um triângulo retângulo de cateto 1 e hipotenusa n .

2. Os pitagóricos, com sua forte ligação com os números, os classificaram em várias categorias que subsistiram até nossos dias: *números pares e ímpares*, *números perfeitos*, *números amigos*, etc., e *números poligonais*, que apresentaremos a seguir. A idéia de definirem números poligonais está ligada ao desejo de se transferir aos números certas propriedades conhecidas, intrínsecas a objetos geométricos. Veja a seguir:

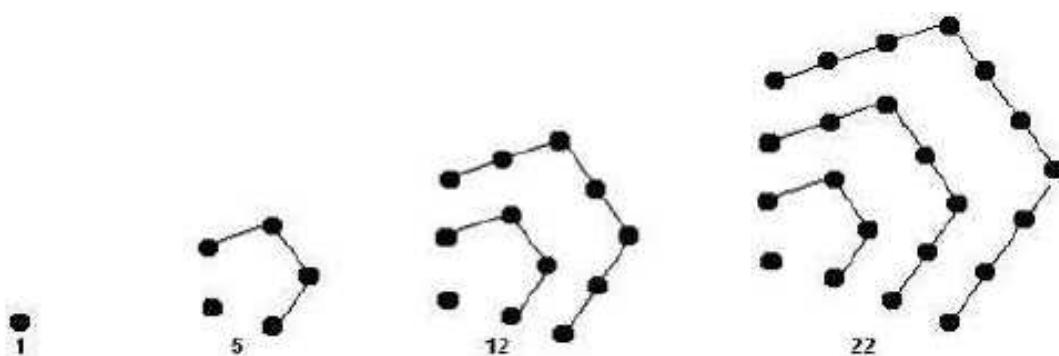
Números triangulares:



Números quadrados:



Números pentagonais:



Ao dispor os números dessa forma, é possível detectar várias propriedades de suas propriedades:

Vê-se que os números triangulares fornecem a soma da seqüência de números naturais:

$$1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \text{etc.}$$

Já os números quadrados determinam a soma dos números ímpares:

$$1, 1 + 3 = 4 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \text{etc.}$$

Mais adiante voltaremos aos números poligonais. Por ora, aproveite a oportunidade e, com o auxílio da forma geométrica na qual esses números estão dispostos, prove que todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.

3. Uma outra maneira de demonstrar o Teorema de Pitágoras é se utilizando a figura a seguir. A idéia é observar que as áreas das figuras geométricas achuradas são iguais. Usando essas figuras, encontre e escreva uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

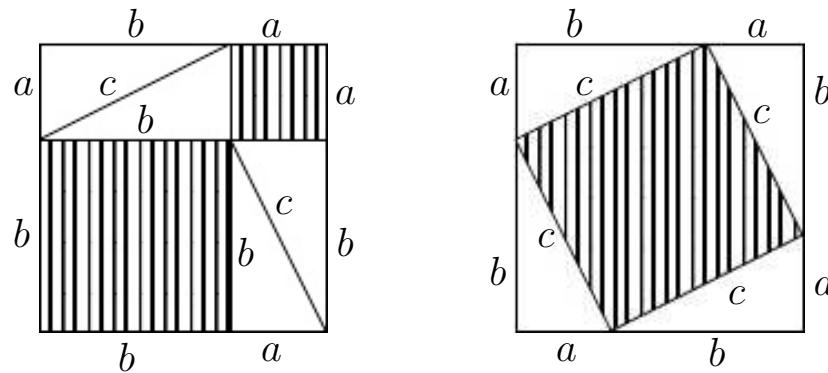


Figura 14.3: Figuras para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

4. Quaisquer dois quadrados podem ser recortados em cinco partes, de forma que, quando reagrupados, formem um novo quadrado. A figura abaixo indica como isso pode ser feito. Com essa idéia em mãos, dê uma outra demonstração para o Teorema de Pitágoras. Redija essa demonstração.

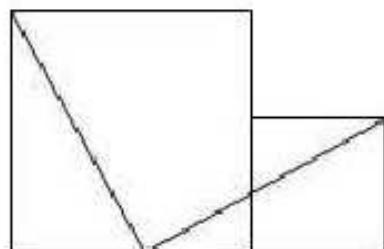


Figura 14.4: Figura que pode ser usada para fornecer mais uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

5. TEMA PARA DISCUSSÃO:

É bastante comum desenhar-se o gráfico de uma função f , marcando-se no plano cartesiano alguns pontos $(x, f(x))$ obtidos de um tabela que apresenta certos valores de x e de $f(x)$. Comente o rigor desse processo.

CAPÍTULO 15

O método indutivo

15.1 Princípio de Indução: vale para um, se valer para k implicar valer para $k + 1$, então vale sempre! (O raciocínio indutivo)

Quando conveniente, o Princípio de Indução é um método ideal para provar que certos fatos envolvendo números naturais são válidos para todos eles.

Em particular, é possível empregá-lo para demonstrar determinadas generalizações para todos os números naturais, de resultados que, a princípio, sabemos que valem apenas para casos particulares destes.

Você vai perceber, quando for possível aplicar o Princípio da Indução, que se pede desses resultados, não importa o que sejam, que apenas dependam explicitamente de um número natural genérico.

Esses resultados podem ser dos mais diversos tipos, como uma identidade:

$$(1) 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1;$$

ou uma desigualdade, como a *desigualdade de Bernoulli*¹,

$$(2) (1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ se } x \geq -1;$$

ou qualquer uma outra propriedade que se quer provar, que é válida para a seqüência de números naturais, tal como a propriedade a seguir, da Geometria Plana Elementar,

(3)² Se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n -lados é $(n - 2)180^\circ$.

¹Devida a *Jaques Bernoulli* (1654-1705). Os Bernoulli foram uma família suíça de renomados médicos e matemáticos. De 1650 a 1800, pelo menos oito excelentes matemáticos tinham nascido nessa família. Entre os mais importantes estão os irmãos James e Jaques, que tiveram papel fundamental na divulgação e desenvolvimento do, na época, recém-inventado Cálculo Diferencial e Integral.

²O resultado é válido para polígonos convexos quaisquer. A demonstração é a mesma.



Figura 15.1: Jacques Bernoulli (1654-1705), membro de uma família na qual, por gerações, nasceram renomados cientistas. Os Bernoulli foi a família que mais produziu matemáticos em toda História.

O Princípio de Indução, também chamado de **Método de Indução**, funciona da seguinte forma: Suponha que se deseja provar determinada propriedade envolvendo números naturais, a qual chamaremos $P(n)$. Para este fim, basta verificar que $P(1)$ é válida, e mostrar que, se $P(k)$ é válida para algum k natural, então $P(k + 1)$ é também válida. Isso garante que $P(n)$ será verdadeira para todo natural $n \in \mathbb{N}$. De fato, como $P(1)$ é verdadeira, $P(2) = P(1 + 1)$ é verdadeira. Como $P(2)$ é verdadeira, resulta que $P(3) = P(2 + 1)$ é verdadeira, e assim por diante.

No exemplo (1) acima, a propriedade $P(n)$ é

$$\text{“}1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1\text{”};$$

no exemplo (2), $P(n)$ é

$$\text{“}(1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ se } x \geq -1\text{”};$$

e no exemplo (3), $P(n)$ é

Se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n -lados é $(n - 2)180^\circ$.

Em resumo:

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

“Uma propriedade $P(n)$, que depende do número natural n , é verdadeira para todos os números naturais, se provarmos que:

- (i) $P(1)$ é verdadeira;*
- (ii) Se $P(k)$ for verdadeira para algum número natural k , então $P(k + 1)$ é verdadeira.”*

OBSERVAÇÕES:

1. Algumas vezes é necessário provar alguma propriedade $P(n)$ que só vale para os números naturais $n \geq n_0$, para algum número natural n_0 . A demonstração segue os mesmos passos anteriores, só que em (i), troca-se 1 por n_0 e, neste caso, tomamos $k > n_0$. Isso é o que ocorre no Exemplo 3, mais adiante, onde $n_0 = 3$.
2. O Princípio da Indução, como apresentamos nesta, decorre da construção axiomática dos números naturais (Axiomas de Peano) (Vide [Lima, 2002]).

Vamos utilizar o Princípio da Indução para provar os exemplos exibidos anteriormente. Eles servirão de modelos para o uso do Princípio em outros casos.

EXEMPLO 1:

$$P(n): 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1.$$

i) $P(1)$ é válida, já que

$$\frac{1 - r^{1+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r = 1 + r^1,$$

ii) Suponha que $P(k)$ vale, isso é, que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1} + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}.$$

Queremos mostrar que $P(k + 1)$ vale, ou seja, que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^k + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r}.$$

Em geral esse é o ponto mais sutil desse tipo de demonstração, e, muitas vezes, é aquele que pode “dar mais trabalho”, exigindo mais raciocínio. O caso $n = k$ chama-se **hipótese de indução**.

Continuando a demonstração, a idéia é sair da expressão do lado esquerdo e chegar na expressão do lado direito, usando o fato que $P(k)$ vale:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \dots + r^k + r^{k+1} &= (1 + r + \dots + r^k) + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \frac{1 + r^{k+1} + r^{k+1}(1 - r)}{1 - r} = \\ &= \frac{1 + r^{k+1} + r^{k+2} - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r}. \text{ C.Q.D.} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2:

$$P(n): (1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ se } x \geq -1.$$

- i) $P(1)$ é válida, visto que $(1 + x)^1 \geq 1 + x = 1 + 1x$;
- ii) Suponha que $P(k)$ vale, isso é, que

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx \text{ (hipótese de indução)},$$

e daí vamos provar que $P(k + 1)$ é válido, ou seja, que

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Ora, por hipótese, $x \geq -1$, donde $(1 + x) \geq 0$. Portanto, desse fato e do fato que $P(k)$ vale, temos

$$(1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx) \Rightarrow$$

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (1 + k)x + kx^2 \geq 1 + (1 + k)x,$$

já que $kx^2 \geq 0$ para qualquer x . C.Q.D.

EXEMPLO 3:

$P(n)$: Se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n -lados é $(n - 2)180^\circ$.

i) (Atenção: nesse caso $n_0 = 3$)

A propriedade para $n = 3$ diz respeito a um triângulo, que sabemos, da Geometria Elementar, ter a soma dos ângulos internos igual a $(3 - 2)180^\circ = 180^\circ$. Logo, $P(3)$ é válida.

ii) Suponha que $P(k)$ vale para todo $k \geq 3$, isto é, que

‘A soma dos ângulos internos de um polígono regular de k -lados é $(k - 2)180^\circ$ ’ (hipótese de indução).

Usando esse fato, vamos mostrar que ‘a soma dos ângulos internos de um polígono regular de $(k+1)$ -lados é $[(k + 1) - 2]180^\circ$ ’.

Com efeito, consideremos um polígono regular R de $k + 1$ lados. Escolhendo dois vértices apropriados, esse polígono pode ser decomposto em um triângulo T e outro polígono S de k lados. Ora, a soma dos ângulos internos de T vale 180° e, como pela hipótese de indução, a soma dos ângulos internos de S vale $(k - 2)180^\circ$, tem-se a soma dos ângulos internos de R valendo $(k - 2)180^\circ + 180^\circ = [(k + 1) - 2]180^\circ$. C.Q.D.

A Indução também se presta com bastante eficácia para fazer algumas definições que usam recorrência. Chamamos **definição recursiva** ou **definição indutiva** a esse tipo de definição.

Por exemplo:

DEFINIÇÃO 1: Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^0 = 1 \text{ e } a^n = a \cdot a^{n-1}.$$

DEFINIÇÃO 2: Se $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$0! = 1 \text{ e } n! = n(n - 1)!$$

É importante observar que nem todos os resultados que se referem a números naturais podem ou devem ser provados por Indução. Esse exemplo é um destes: *a soma de um número ímpar com um número par, ambos naturais, é um número ímpar*.

Também cabe-nos alertar para a necessidade de se usar o Princípio da Indução com prudência. Seria um desperdício de esforço utilizá-lo para provar, por exemplo, que um número da forma $8n + 1$ é ímpar!

EXERCÍCIOS:

1. Seguem abaixo alguns exercícios cujas resoluções envolvem a utilização do Princípio de Indução. Antes de começar a aplicar o Princípio de Indução, que tal testar, com alguns exemplos, que esses cada exercício é válido?

- (a) Prove o caso geral do corolário do Exercício 9-(c), da Seção 4.1.
- (b) Prove: O número 3^{2n+1} é divisível por 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (c) Prove as desigualdades a seguir. Uma de cada vez

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

- (d) Prove as fórmulas das somas dos n primeiros quadrados e dos n primeiros cubos:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2.$$

- (e) Voltando aos números poligonais dos pitagóricos, mostre a expressão da soma dos primeiros números pentagonais:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Faça o mesmo para os números hexagonais

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2 - n.$$

- (f) Demonstre a identidade usada no Exercício 3 da Subseção 7.3.8

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad n \geq 1.$$

- (g) Considere n retas no plano que se intersectam de forma que

- i. duas delas não sejam paralelas;
- ii. duas delas sempre se intersectam;
- iii. três delas não podem se intersectar no mesmo ponto.

Dessa forma, mostre que essas retas se intersectam em $\frac{n^2 - n}{2}$ pontos.

- (h) Prove a observação da Subseção 2.2.1, de que uma tabela-verdade de uma proposição composta $P(R_1, R_2, \dots, R_k)$ possui 2^k linhas.

- 2. Suponha que $P(n)$ seja a proposição (falsa)

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

- (a) Mostre que se $P(k)$ for válido para algum k , então $P(k+1)$ é válido.
- (b) Ora, isso garante uma demonstração para a identidade acima? O que está havendo?

- 3. Suponha que tenha sido provado o seguinte resultado

O produto de dois números terminados em 6 também termina em 6.

Usando esse resultado e o Princípio de Indução, mostre que se o número a termina em 6, então a^n , para todo $n \in \mathbb{N}$, também termina em 6.

4. Um algoritmo para se encontrar valores aproximados de π é dado pelas seqüências abaixo

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right]$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n \sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1} \text{ e}$$

$$\pi_{n+1} = \frac{x_n + 1}{y_n + 1} \pi_n,$$

onde as condições iniciais são dadas por

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = 0 \text{ e } \pi_0 = 2.$$

Esse algoritmo converge muito rapidamente. Com 4 passos você pode verificar que

$$\pi_4 = 3,14159265358976$$

uma aproximação com 14 casas decimais corretas! Que tal verificar a última igualdade? [Bongiovanni & Watanabe, 1991].

5. INTERESSANTE PROVA DE QUE EXISTEM INFINITOS PRIMOS.

Euclides, já nos *Elementos*, deu uma demonstração de que existem infinitos primos. Agora, vamos, a partir de uma identidade provada por indução, demonstrar que existem infinitos números primos. Ao final da demonstração você poderá escolher qual delas poderá se tornar a sua preferida. (Em [Ribenboim, 2001], os interessados poderão encontrar 8 demonstrações diferentes de que existem infinitos primos.)

Siga os passos:

i) Prove, usando Indução, que os números de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ gozam da seguinte propriedade

$$(*) F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} + 2 = F_{n+1}.$$

ii) Mostre que quaisquer dois números distintos de Fermat F_m e F_n , $m > n$ são sempre primos entre si.

Dica: da identidade (*), se existir algum número diferente de 1 que divida dois números distintos de Fermat F_m e F_n , então esse número deve ser 2. Mas isso não pode ocorrer.

iii) Ora, nas decomposições de dois números distintos primos entre si, aparecerão números primos distintos (por quê?). Como o conjunto $\{F_m; m \in \mathbb{N}\}$ é infinito (dê um argumento plausível para este fato) conclua, pela parte (ii) acima, que existem infinitos primos.

15.2 *Raciocínio indutivo, generalizações

Nos vários exemplos e exercícios que demos na seção anterior, apareceram várias expressões para serem provadas usando-se o Princípio da Indução Finita. Ora, é natural que surja a pergunta: “*Como se encontraram aquelas expressões?*”. Na verdade, chegar àquelas expressões envolvendo números naturais, decorre do que chamamos **raciocínio indutivo**, que funciona assim: vemos que um resultado vale para $n = 1$, verificamos se continua válido para $n = 2, n = 3, \dots$, até um número natural n que nos dê a sensação de certeza de que o resultado vale para todos os números naturais³. O processo divide-se em duas etapas: *a descoberta* do resultado e sua *justificativa*, que é uma demonstração.

Este é o raciocínio indutivo que, para que seja aplicado eficazmente, depende muito da experiência e da observação. Após a formalização do resultado, resta apenas prová-lo ou, caso não seja possível, tentar encontrar um contra-exemplo para ele. Como já vimos ao longo do texto, deve-se ter cuidado para não ser tentado a generalizar resultados que valem apenas para certos casos particulares.

Os exercícios abaixo lhe ajudarão a treinar seu raciocínio indutivo.

EXERCÍCIOS:

- Da primeira figura do Exercício 2, do Capítulo 14, deduza a seguinte fórmula para a soma dos primeiros números ímpares positivos:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Demonstre essa fórmula.

- Encontre uma lei de formação para as identidades abaixo e as prove

$$(a) 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$$

$$(b) \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = \frac{2^{2-1}}{(2-1)!}, \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3^{3-1}}{(3-1)!},$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4^{4-1}}{(4-1)!}, \dots$$

³Esta é a maneira usual de pensar sobre problemas desse tipo, infelizmente, não é infalível, como comprovam os exemplos que demos na Seção 7.1.

3. Em cada exercício abaixo, adote o fato de que as expressões foram provadas para $n = 2$ e as reescreva sem os símbolos de produtório ou somatório. Escreva como as expressões ficam para $n = 3$ e dê uma demonstração para esse caso particular. Generalize e demonstre as expressões para um inteiro positivo n qualquer. Considere que x_i são números reais.

(a) $\log \left(\prod_{i=1}^2 x_i \right) = \sum_{i=1}^2 \log x_i, \quad x_i > 0;$

(b) $\left| \sum_{j=1}^2 x_j \right| \leq \sum_{j=1}^2 |x_j|;$

(c) $\prod_{i=1}^2 x_i = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0$

CAPÍTULO 16

*Um roteiro para provar um teorema

“Não é que eles não possam ver a solução. É que eles não podem ver o problema.”

In The Point of a Pin in The Scandal of Father Brown

G. K. Chesterton (1874 - 1936)

“A imaginação é mais importante do que o conhecimento.”

In Sobre a Ciência

Albert Einstein (1879-1955).

Inspirados em [Pólya, 1994], vamos apresentar nossa tentativa de formular um roteiro de algumas atitudes que podem ser tomadas quando se está diante de um teorema que se pretende demonstrar. Deixamos claro que nosso objetivo não é que o leitor as leia sempre, antes de resolver algum problema, ou que as considere como um roteiro infalível para solucionar suas dificuldades. Longe disso!!!

Destacamos que essas dicas são de caráter geral, não são normas fixas ou rígidas, e podem funcionar com mais eficácia para aqueles que aprenderam as técnicas de demonstração mais usuais que apresentamos a partir do Capítulo 8, e que conhecem a teoria matemática satisfatória envolvida no teorema a ser demonstrado.

Convém ressaltar que o tipo de atitude e de procedimento a serem tomados dependem de cada caso, da complexidade do tema, da pessoa que há de utilizá-los, de seu conhecimento adquirido ao longo dos anos, de sua experiência e inclinações pessoais. Talvez resolver problemas matemáticos possa se transformar numa arte, para a qual seja possível ensinar algumas técnicas específicas; mas o sucesso depende principalmente de muita inspiração e de bastante transpiração.

16.1 O que fazer para demonstrar um teorema?

1. *O que quero provar?*

Diante do teorema a ser demonstrado, muitas vezes vemos algumas pessoas perdidas, sem ao menos saberem dar o primeiro passo. Primeiramente, é necessário saber o que se quer demonstrar. Não importa quantas vezes seja necessário repetir a pergunta anterior, só pare quando tiver plena consciência que pode respondê-la sem titubear. É necessário compreender um teorema antes de ensaiar qualquer tentativa de prová-lo.

2. *Conheço todos os elementos que compõem o teorema? Estou empregando uma notação adequada para entender o teorema e para usar na demonstração?*

3. Identifique precisamente e entenda a hipótese e a tese daquilo que deseja demonstrar.
4. É possível checar o teorema com alguns exemplos? Posso detectar nesses exemplos alguma propriedade ou característica que eles possuam em comum e que seja fundamental para que o resultado funcione? Essa propriedade ou característica pode ser usada na minha demonstração?
5. Antes de começar a desenvolver a demonstração: Conheço a demonstração de algum teorema semelhante?
6. Caso conheça algum teorema parecido: Posso utilizar a técnica de demonstração que conheço para esse teorema? É preciso introduzir algum elemento auxiliar extra, que me ajude neste sentido?
7. É necessário reenunciar o teorema de modo que fique mais simples de ser manipulado? Será que preciso resolver um problema mais simples, com algum caso particular do original, de forma que esse procedimento me dê argumentos a mais para fazer a demonstração?
8. Esboce um esquema de demonstração levando em conta todas as respostas às perguntas anteriores. O teorema depende de casos particulares? É preciso dividir a demonstração em alguns casos distintos? Preciso usar demonstrações diferentes em cada caso?
9. Ao longo da demonstração tome toda cautela para não usar raciocínios errados ou deduções falsas. Analise cada passo. Siga uma cadeia de raciocínio lógico. Deixe claro onde está usando cada hipótese. Conclua a demonstração ressaltando a conclusão que acabou de chegar. Caso a demonstração seja longa demais, é bom dividi-la em passos, e siga todas as dicas anteriores para cada um desses passos.
10. Escreva a demonstração. Esse passo é tão importante como fazer a demonstração.
11. Terminada a demonstração, é necessário fazer uma análise crítica dela, o que pode ser muito enriquecedor para o aprendizado: todos os dados do teorema foram usados? Há algum que seja supérfluo? O teorema admite alguma generalização? O método pode ser aplicado para outros resultados? Quais?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Aaboe, 1984] Aaboe, A. *Episódios da história antiga da Matemática.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [Al-Din, 2001] Al-Din, K. N. “*Como Nasrudin criou a verdade*”, organizado por Flávio Moreira da Costa. Os 100 melhores contos de humor da Literatura Universal. Ediouro.
- [Apostol,] Apostol, T. Number 9. The American Mathematical Monthly.
- [Artin, 1991] Artin, M. *Algebra.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [Bailey et al., 1997] Bailey, D., Borwein, J. M., Borwein, P. B., & Plouffe, S. *The quest for Pi.* The Mathematical Intelligencer, 19.
- [Barbosa, 1995] Barbosa, J. L. M. *Geometria Hiperbólica.* 20º Colóquio Brasileira de Matemática.
- [Barbosa, 2004] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Coleção do Professor de Matemática. SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).
- [Barbosa, 1974] Barbosa, R. M. *Fundamentos de Matemática Elementar (Tópicos).* Livraria Nobel S.A.
- [Blatner, 1997] Blatner, D. *The joy of π.* Walker and Company, NY.
- [Bongiovanni & Watanabe, 1991] Bongiovanni, V. & Watanabe, R. *Pi acaba?* Revista do Professor de Matemática, n.19.
- [Boyer, 1974] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Editora Edgard Blücher Ltda.
- [Cajori, 1993] Cajori, F. *A history of Mathematical Notations; Two volumes bound as one.* Dover Publication, Inc. New York.
- [Collier, 2003] Collier, S. C. *Números inteiros e Criptografia RSA.* Série de Computação e Matemática. IMPA, 2ª edição edition.
- [Croft et al., 1991] Croft, H. T., Falconer, D. J., & Guy, R. K. *Unsolved problems in Geometry.* Springer-Verlag, New York.
- [da Silva, 1985] da Silva, G. S. *Por que elipse, parábola e hipérbole?* Revista do Professor de Matemática, n.7.
- [da Silva Ramos, 2001] da Silva Ramos, W. C. *Painel II: Polinômios gerando primos.* Revista do Professor de Matemática, n.45.
- [Daintith & Nelson, 1989] Daintith, J. & Nelson, R. D. *The Penguin Dictionary of Mathematics.* Penguin Books.

- [Dalcín, 2000] Dalcín, M. *O Problema de Napoleão*. Revista do Professor de Matemática, n.42.
- [de Figueiredo, 1996] de Figueiredo, D. G. *Análise I*. Livros Técnicos Científicos.
- [de Figueiredo, 2002] de Figueiredo, D. G. *Números Irracionais e Transcedentes*. Coleção Iniciação Científica. SBM.
- [de Holanda, 1986] de Holanda, A. B. *Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. Editora Nova Fronteira.
- [de Moraes Filho, 1996] de Moraes Filho, D. C. *As mulheres na Matemática*. Revista do Professor de Matemática, n.30.
- [de Moraes Filho, 1997] de Moraes Filho, D. C. *E elas finalmente chegaram*. Revista do Professor de Matemática, n.33.
- [de Oliveira Santos, 2000] de Oliveira Santos, J. P. *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção Matemática Universitária, IMPA.
- [de Souza Ávila, 1998] de Souza Ávila, G. S. *Cálculo: Funções de uma variável*. Livro Técnicos e Científicos.
- [de Spinoza, 2002] de Spinoza, B. *Ética demonstrada à maneira dos Geômetras*. Série Ouro, Coleção a “Obra-prima de cada autor”. Editora Martin Claret.
- [Dickson, 1999] Dickson, L. *The History of the Theory of Numbers*. American Mathematical Society.
- [Fonseca & da Glória C. Lima, 2001] Fonseca, R. V. & da Glória C. Lima, M. *Painel I: Mais curiosidades numéricas*. Revista do Professor de Matemática, n.47.
- [Golovina & Yaglon, 1981] Golovina, L. & Yaglon, I. M. *Inducción en la geometría*. Editora Mir.
- [Greenberg, 1993] Greenberg, M. J. *Euclidean and non-euclidean geometries, development and history*. W. H. Freeman and Company New York.
- [Guiness, 1995] Guiness. *O Livro dos Recordes*. Editora Três.
- [Hellmeister, 2001] Hellmeister, A. C. P. *Lógica através de exemplos: vamos usar a Revista do Professor de Matemática?* Revista do Professor de Matemática, n.33.
- [Klee & Wagon, 1991] Klee, V. & Wagon, S. *Old and New unsolved problems in plane geometry and number theory*. Mathematical Association of America, Washington, DC.
- [Lander & Parkin, 1966] Lander, L. & Parkin, T. *Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers*. Bull. Amer. Math. Soc. 72. AMS.
- [Lima, 1986] Lima, E. L. *Conceitos e controvérsias*. Revista do Professor de Matemática, n.8.
- [Lima, 2002] Lima, E. L. *Curso de Análise*, volume I of *Projeto Euclides*. IMPA.
- [Lima et al., 1997] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio, Vols 1,2 e 3*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [Lima et al., 2001] Lima, E. L., Morgado, A. C., Júdice, E. D., Wagner, E., de Carvalho, J. B. P., Carneiro, J. P. Q., Gomes, M. L. M., & Carvalho, P. C. P. *Exames de Textos. Análise de livros de matemática para Ensino Médio*. VITAE, IMPA & SBM.