

GEOMETRIA ANALÍTICA

AULA 6 - 2024.1

Prof. Dr. Mário José de Souza



UFG

Propriedades das operações com vetores

Propriedades da adição de vetores

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

- **Comutatividade:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Associatividade:** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- **Existência de elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\vec{0}$ é tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor \vec{u} existe um único vetor, que designamos $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

- De fato, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se D é o outro vértice do paralelogramo $ABCD$, então $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Logo,

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u}.$$

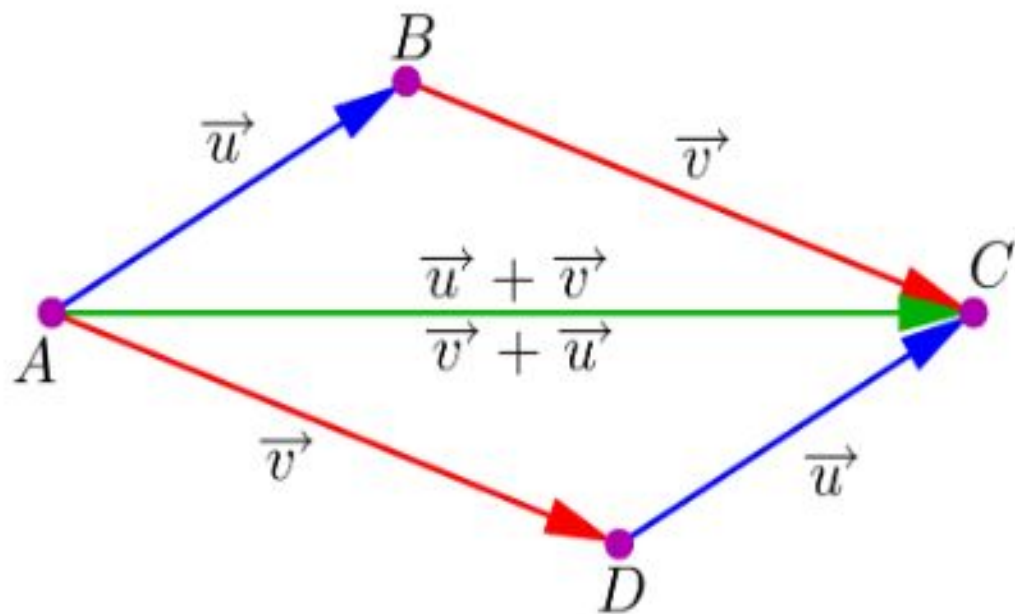


Figura 25: Comutatividade da adição de vetores.

- A associatividade da adição de vetores se verifica de maneira análoga.

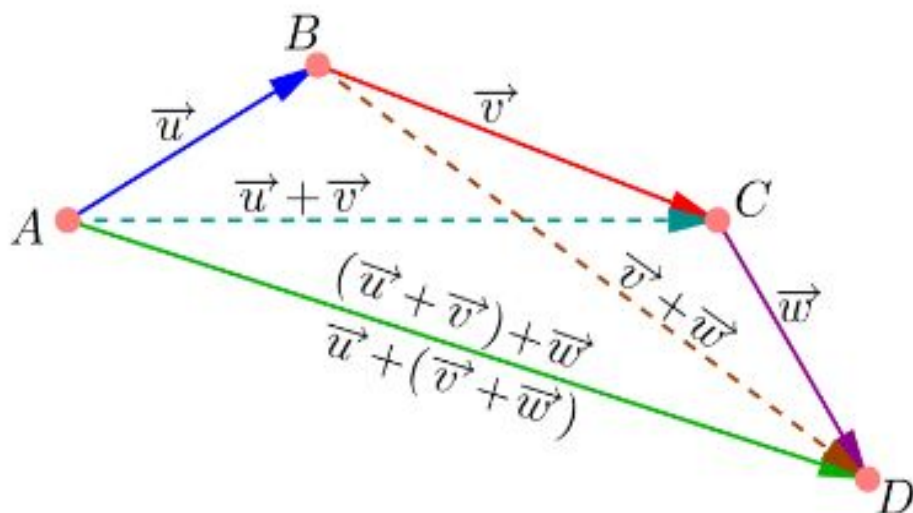


Figura 26: Associatividade da adição de vetores.

Quanto às outras duas propriedades, observe que:

- se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, sendo $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, temos:

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u},$$

$$\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

- o **simétrico** ou **inverso aditivo** do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, pois

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0},$$

$$-\vec{u} + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

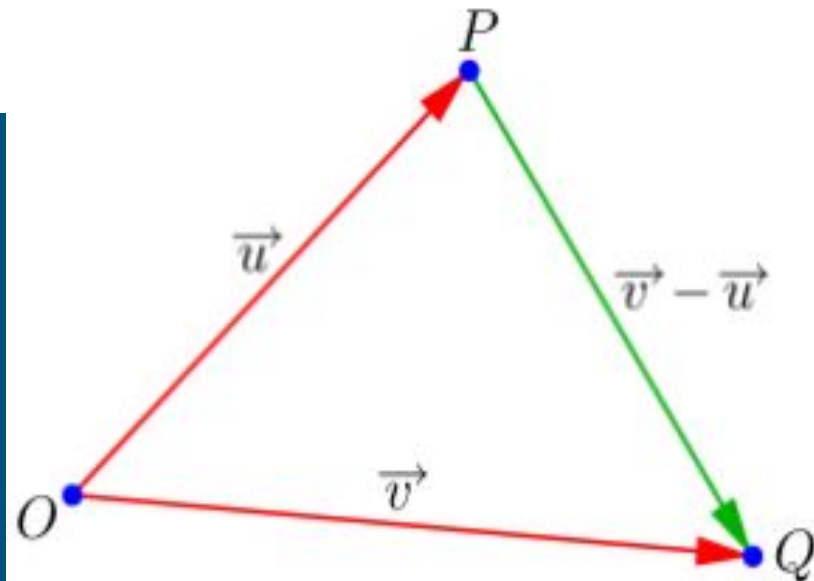
Observação

O **vetor simétrico** $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $(-1)\vec{u}$, pois se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ é o vetor \vec{u} dado em coordenadas, então:

$$\overrightarrow{BA} = (-\alpha, -\beta) = (-1)(\alpha, \beta) = (-1)\overrightarrow{AB}.$$

Definição

O vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, escrito $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado **diferença entre \vec{u} e \vec{v}** .



Sejam A, B, C pontos do plano tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$\begin{aligned}\vec{u} + (-\vec{v}) &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação de números reais por vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1 \vec{u} = \vec{u}$.
- **Propriedades distributivas:** $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

As propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e a propriedade distributiva que já conhecemos nos números reais.

De fato, se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$, então, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda[(a, b) + (a', b')] = \lambda(a + a', b + b') \\ &= (\lambda(a + a'), \lambda(b + b')) = (\lambda a + \lambda a', \lambda b + \lambda b') \\ &= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a, b) + \lambda(a', b') \\ &= \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.\end{aligned}$$

A outra propriedade distributiva se verifica da mesma forma (faça-o!).

Combinação linear de vetores

Definição

(a) Dizemos que o vetor \vec{v} é **múltiplo** do vetor \vec{u} se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

(b) Dizemos que um vetor \vec{v} é **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ quando existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Em relação a esta definição, observe que:

- O vetor nulo $\vec{0}$ é múltiplo de qualquer vetor \vec{u} .

De fato, $\vec{0} = 0\vec{u}$.

- Nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor nulo.

De fato, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{0} = \vec{u}$, pois $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ é múltiplo de \vec{u} , então \vec{u} é também múltiplo de \vec{v} .

Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$$\text{Logo } \vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}.$$

- Note que dizer que \vec{v} é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ significa que \vec{v} é soma de múltiplos dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

A seguinte proposição fornece uma maneira para determinar quando dois vetores são, ou não, múltiplo um do outro.

Proposição

Um dos vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0.$$

Prova.

(\implies) Suponha que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$, temos:

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \implies a' = \lambda a$$

e

$$b' = \lambda b \implies ab' - ba' = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

(\impliedby) Suponhamos agora que $ab' - ba' = 0$.

Caso $a = 0$: Se $a = 0$, então $ba' = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $a' = 0$. Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad b = 0 \implies \vec{u} = (0, 0) = \vec{0} \implies \vec{u} = 0\vec{v}. \\ \bullet \quad a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \implies (0, b') = \frac{b'}{b}(0, b) \implies \vec{v} = \frac{b'}{b}\vec{u}. \end{array} \right.$$

Caso $a \neq 0$: Se $a \neq 0$, temos $ab' - ba' = 0 \implies b' = b \frac{a'}{a}$. Logo:

$$\frac{a'}{a}\vec{u} = \frac{a'}{a}(a, b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b \right) = (a', b') = \vec{v}.$$

Portanto, em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro. ■

Exemplo

Determine se os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 6)$ são múltiplos um do outro.

Solução.

Temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Portanto, um vetor é múltiplo do outro.

Note que $\vec{v} = 3\vec{u}$. \square

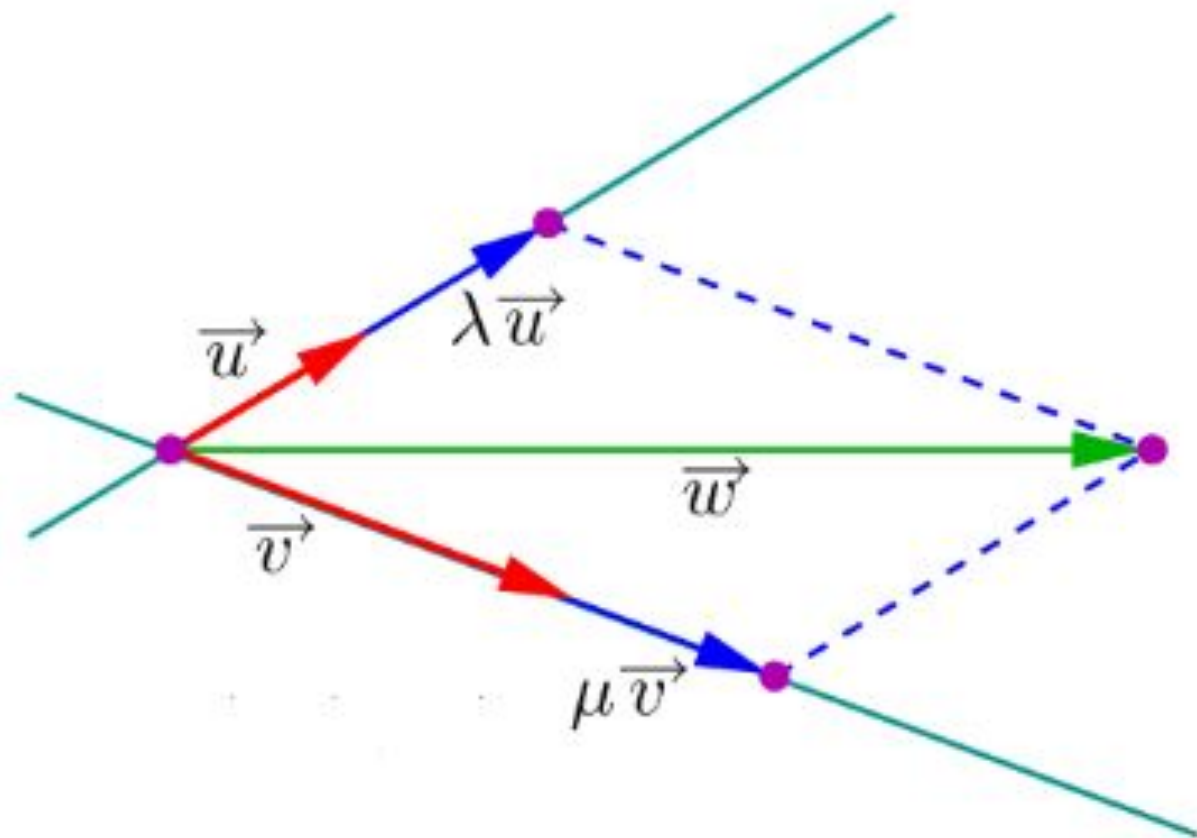
Proposição

Se nenhum dos vetores \vec{u} e \vec{v} é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor \vec{w} do plano se escreve de modo único como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} . Isto é, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinados de forma única por \vec{w} , tais que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Prova.

De fato, se $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (a', b')$ e $\vec{w} = (a'', b'')$ temos, pela proposição 7, que $ab' - ba' \neq 0$.

Vamos determinar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.



Em coordenadas, esta condição equivale a

$$\begin{aligned}(a'', b'') &= \lambda(a, b) + \mu(a', b') \\ &= (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b').\end{aligned}$$

Ou seja, os números λ e μ devem ser soluções do sistema:

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = a'' \\ \lambda b + \mu b' = b'' \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Ou seja, os números λ e μ existem e são determinados de forma única. ■

Observação

O plano é bidimensional (de dimensão 2). Isso significa que basta conhecer **dois** vetores \vec{u} e \vec{v} , que não sejam múltiplos um do outro, para conhecer todos os outros vetores do plano. De fato, pela proposição anterior, qualquer outro vetor se expressa de forma única como combinação linear destes dois vetores.

Exemplo

Verifique que qualquer vetor do plano se escreve como combinação linear dos vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$, e escreva o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

Solução.

- Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, os vetores \vec{u} e \vec{v} não são múltiplos um do outro. Pela proposição anterior, qualquer outro vetor se escreve de maneira única como soma de múltiplos dos vetores \vec{u} e \vec{v} .
- Dado o vetor $\vec{w} = (1, 1)$, devemos achar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:
$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, vemos que:

$$(1, 1) = \lambda(2, -1) + \mu(-3, 2) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1. \end{cases}$$

Os números λ e μ que resolvem este sistema são:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 - (-3) \times 1}{1} = 2 + 3 = 5$$

e

$$\mu = \frac{2 \times 1 - 1 \times (-1)}{1} = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, $\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$. \square

Produto interno de dois vetores

Vamos agora definir um novo tipo de multiplicação. Os fatores desta nova operação são vetores e o produto é um número real.

Começamos com a seguinte definição:

Definição

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o número real não negativo:

$$\|\vec{v}\| = d(A, B).$$

Observe que a norma de um vetor é um número bem definido, isto é, depende apenas do vetor e não do segmento orientado escolhido para representá-lo.

De fato, se

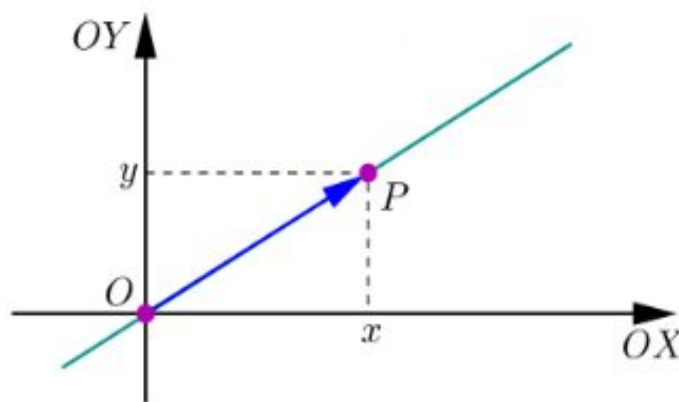
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies AB \equiv CD \implies d(A, B) = d(C, D).$$

Ou seja, a norma de um vetor \vec{v} se calcula usando qualquer segmento representante.

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais OXY .

Se $\vec{v} = (x, y) = \overrightarrow{OP}$, então $P = (x, y)$ e

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Quando $\|\vec{v}\| = 1$, dizemos que o vetor \vec{v} é um **vetor unitário**.

Observação

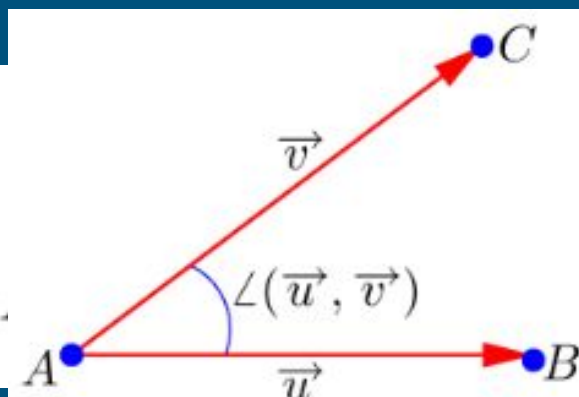
Se $\vec{v} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$. De fato, como $\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$, então:

$$\begin{aligned}\|\lambda \vec{v}\| &= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \|\vec{v}\|.\end{aligned}$$

Definição

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores no plano.

O **ângulo** entre \vec{u} e \vec{v} , designado $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC .



Observação

Se \vec{v} é um vetor não nulo, então $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{v} . Com efeito,

$$\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = 1.$$

Além disso, como

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

e $\|\vec{v}\| > 0$, temos que \vec{v} e $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Assim, se \vec{u} e \vec{v} são vetores não nulos,

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right).$$

Definição

O **produto interno** dos vetores \vec{u} e \vec{v} do plano é o número real, que designamos por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0, \quad \text{se} \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, \quad \text{se} \quad \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Proposição

Sejam $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ e $\vec{v} = (\alpha', \beta')$ dois vetores no plano. Então,

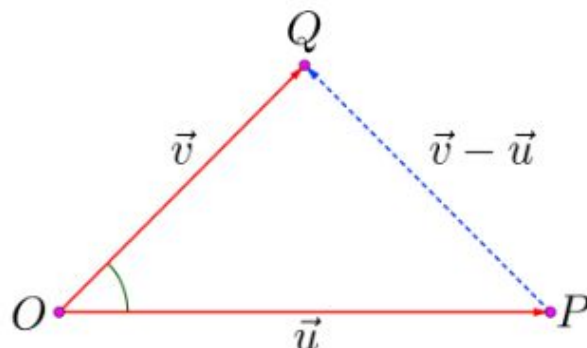
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

Prova.

Se \vec{u} ou \vec{v} são vetores nulos, a identidade acima verifica-se, pois, neste caso, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

Suponhamos agora que \vec{u} e \vec{v} são vetores não nulos. Se $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, então $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \\ &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{v} - \vec{u} \\ &= (\alpha' - \alpha, \beta' - \beta).\end{aligned}$$



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OPQ$, temos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Desta identidade, obtemos:

$$\begin{aligned} 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) + ((\alpha')^2 + (\beta')^2) - ((\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - ((\alpha')^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 \\ &\quad + (\beta')^2 - 2\beta'\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - (\alpha')^2 + 2\alpha'\alpha - \alpha^2 \\ &\quad - (\beta')^2 + 2\beta'\beta - \beta^2 \\ &= 2\alpha'\alpha + 2\beta'\beta \\ &= 2(\alpha\alpha' + \beta\beta') \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, como queríamos demonstrar. ■

Com a expressão do produto interno em coordenadas, fica fácil provar as seguintes propriedades.

Proposição

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores do plano e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

$$(1) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$$

$$(2) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

$$(3) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$(4) \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(5) \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$(6) \langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$(7) \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

Definição

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores do plano. Dizemos que \vec{u} é **perpendicular** a \vec{v} se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Se \vec{u} é perpendicular a \vec{v} escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$. Note que \vec{u} é perpendicular a \vec{v} se, e somente se, \vec{v} é perpendicular a \vec{u} .

Temos, então, a seguinte caracterização da perpendicularidade entre dois vetores por meio do produto interno.

Proposição

Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o seu produto interno é igual a zero. Isto é,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Prova.

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores do plano. Se algum destes vetores é o vetor nulo, então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, por definição.

Suponhamos, então, que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, e seja $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Então,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = 90^\circ,$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição

Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor não nulo. Então o vetor \vec{v} é perpendicular ao vetor \vec{u} se, e só se, $\vec{v} = \lambda(-b, a)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova.

De fato, se $v = \lambda(-b, a)$, então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Reciprocamente, se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\vec{v} = (c, d)$, então $ac + bd = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, pela Proposição 7, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = (c, d) = \lambda(-b, a)$. ■

Exemplo

Dados os pontos $A = (-2, 3)$, $B = (0, 1)$ e $C = (4, 2)$. Calcule o cosseno do ângulo θ entre os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Solução.

Sabemos que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos \theta.$$

Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -1)$, temos:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 2 \cdot 6 - 2 \cdot (-1) = 14.$$

E ainda, $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{2}$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{37}$, o que implica que

$$14 = 2\sqrt{2}\sqrt{37} \cos \theta \implies \cos \theta = 7/\sqrt{74}.$$



Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (4, -3)$ e $\vec{v} = (x, 1)$, determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 5$.

Solução.

Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 5$ temos:

$$4 \cdot x - 3 \cdot 1 = 5 \implies x = 2.$$

Portanto, $x = 2$. \square

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (a+1, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 1)$, calcule o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que \vec{u} seja perpendicular a \vec{v} .

Solução.

Para que \vec{u} e \vec{v} sejam perpendiculares, é necessário e suficiente que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$(a+1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 0 \iff -3a - 3 + 2 = 0 \iff a = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, $a = -\frac{1}{3}$. \square

Proposição

Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor não nulo. Então os vetores unitários \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que fazem um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ com o vetor \vec{u} são dados por:

$$\vec{v}_1 = \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$$

$$\vec{v}_2 = \cos(-\theta) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin(-\theta) \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|},$$

onde $\vec{w} = (-b, a)$ é um vetor perpendicular a \vec{v} .

Prova.

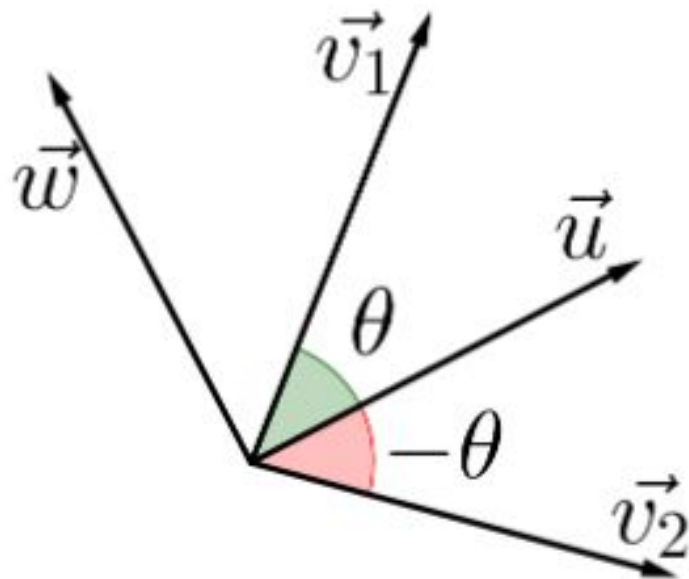
De fato:

$$\begin{aligned}\bullet \quad \|\vec{v}_1\|^2 &= \left\langle \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\rangle \\ &= \cos^2 \theta \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle + 2 \cos \theta \sin \theta \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\rangle \\ &\quad + \sin^2 \theta \left\langle \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\rangle \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \cos \angle(\vec{v_1}, \vec{u}) &= \frac{\langle \vec{v_1}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v_1}\| \|\vec{u}\|} \\
&= \frac{\langle \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|} \\
&= \cos \theta \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} + \sin \theta \frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\|} = \cos \theta,
\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} &= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = 1 \\
\bullet \quad \frac{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} &= \frac{1}{\|\vec{w}\|^2} \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \frac{\|\vec{w}\|^2}{\|\vec{w}\|^2} = 1 \\
\bullet \quad \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} &= \frac{1}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0.
\end{aligned}$$



De modo análogo, podemos mostrar que $\|\vec{v}_2\| = 1$ e $\cos \angle(\vec{v}_2, \vec{u}) = \cos(-\theta) = \cos \theta$.



Exemplo

Determine os vetores unitários \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que fazem um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ com o vetor $\vec{u} = (1, 2)$ tal que $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Solução.

Como $\theta \in (0, \pi)$ e $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtemos que $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Logo, pela posição anterior,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{v}_1 &= \cos \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin \theta \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1, 2) + \frac{1}{5}(-2, 1) = (0, 1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{v}_2 &= \cos(-\theta) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \sin(-\theta) \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1, 2) - \frac{1}{5}(-2, 1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$



Exemplo

Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

Solução.

Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X , Y , Z e W os pontos médios dos lados AC , CD , DB e BA , respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 33).

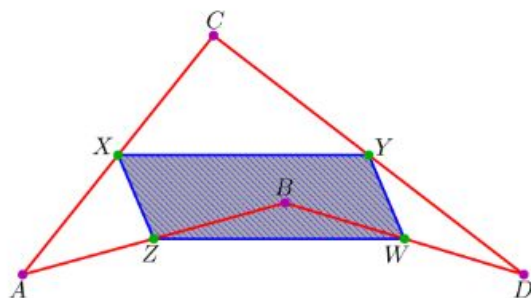


Figura 33: Pontos médios dos lados de um quadrilátero determinando um paralelogramo.

Solução.

Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X , Y , Z e W os pontos médios dos lados AC , CD , DB e BA , respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 33).

Temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{ZW} &= \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BW} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Logo $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ZW}$. Então $XY \equiv ZW$, e portanto, $XYZW$ é um paralelogramo.



Muito obrigado!

