GEOEMETRIA ANALÍTICA

AULA 7 - 2024.1

Prof. Dr. Mário José de Souza

UFG

Produto interno de dois vetores

Vamos agora definir um novo tipo de multiplicação. Os fatores desta nova operação são vetores e o produto é um número real.

Começamos com a seguinte definição:

Definição

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o número real não negativo:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B).}$$

Observe que a norma de um vetor é um número bem definido, isto é, depende apenas do vetor e não do segmento orientado escolhido para representá-lo.

De fato, se

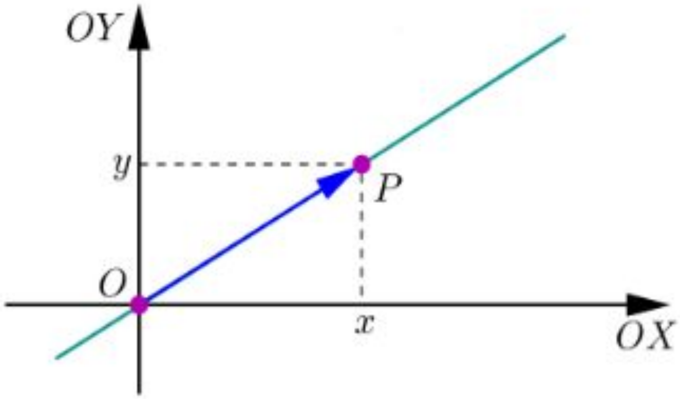
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow AB \equiv CD \Longrightarrow d(A, B) = d(C, D).$$

Ou seja, a norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ se calcula usando qualquer segmento representante.

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais OXY.

Se $\overrightarrow{v} = (x, y) = \overrightarrow{OP}$, então $P = (x, y)$ e

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$



Quando $\|\vec{v}\| = 1$, dizemos que o vetor $\vec{v}$ é um **vetor unitário**.

Observação

Se $\vec{v} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$. De fato, como $\lambda\,\vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$,

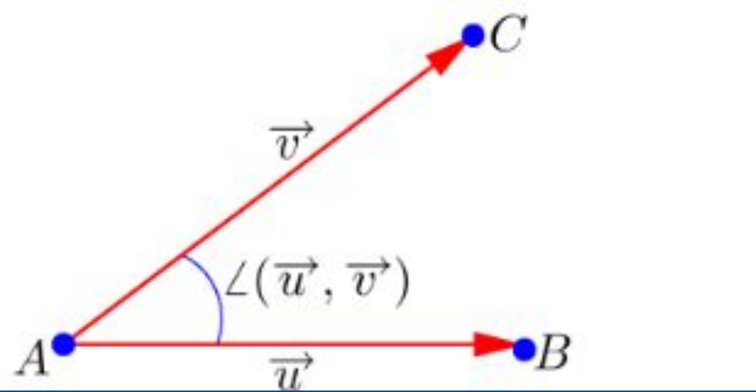
então:

$$\begin{aligned} \|\lambda\,\vec{v}\| &= \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 + y^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|\,\|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

Definição

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores no plano.

O **ângulo** *entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, designado $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC.*



Observação

Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo, então $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$. Com efeito,

$$\left\|\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right| \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\|\overrightarrow{v}\| = 1.$$

Além disso, como

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\| \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

e $\|\overrightarrow{v}\| > 0$, temos que $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Assim, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos,

$$\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Definição

O **produto interno** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real, que designamos por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{c} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0\,, \quad \text{se} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = 0 \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta\,, \quad \text{se} \quad \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \quad \text{e} \quad \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}}$$

Proposição

Sejam $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ dois vetores no plano. Então,

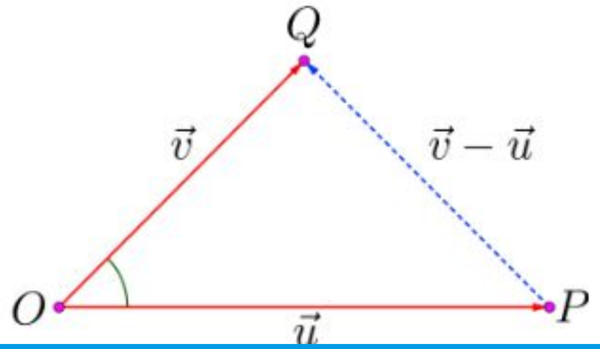
$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'}$$

Prova.

Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ são vetores nulos, a identidade acima verifica-se, pois, neste caso, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, então $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \\ &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \\ &= (\alpha' - \alpha, \beta' - \beta). \end{aligned}$$



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OPQ$, temos:

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta\,,$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Desta identidade, obtemos:

$$\begin{array}{rcl}
2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta & = & \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \\
& = & (\alpha^2 + \beta^2) + ((\alpha')^2 + (\beta')^2) - ((\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2) \\
& = & \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - ((\alpha')^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 \\
& + & (\beta')^2 - 2\beta'\beta + \beta^2) \\
& = & \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - (\alpha')^2 + 2\alpha'\alpha - \alpha^2 \\
& - & (\beta')^2 + 2\beta'\beta - \beta^2 \\
& = & 2\alpha'\alpha + 2\beta'\beta \\
& = & 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')
\end{array}$$

Portanto, $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, como queríamos demonstrar. ■

Com a expressão do produto interno em coordenadas, fica fácil provar as seguintes propriedades.

Proposição

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$

(2) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(4) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(6) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

(7) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

Definição

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** a $\overrightarrow{v}$ se $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^o$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Se $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

Temos, então, a seguinte caracterização da perpendicularidade entre dois vetores por meio do produto interno.

Proposição

Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o seu produto interno é igual a zero. Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0}$$

Prova.

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Se algum destes vetores é o vetor nulo, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, por definição.

Suponhamos, então, que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, e seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90^o,$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição

Seja $\overrightarrow{u} = (a, b)$ um vetor não nulo. Então o vetor $\overrightarrow{v}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u}$ se, e só se, $\overrightarrow{v} = \lambda(-b, a)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova.

De fato, se $v = \lambda(-b, a)$, então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

Reciprocamente, se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$, então $ac + bd = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, pela Proposição 7, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = (c, d) = \lambda(-b, a)$. $\blacksquare$

Exemplo

Dados os pontos $A = (-2, 3), B = (0, 1)$ e $C = (4, 2)$. Calcule o cosseno do ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Solução.

Sabemos que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cos\theta.$$

Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -1)$, temos:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 2 \cdot 6 - 2 \cdot (-1) = 14.$$

E ainda, $||\overrightarrow{AB}|| = 2\sqrt{2}$ e $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{37}$, o que implica que

$$14 = 2\sqrt{2}\sqrt{37}\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = 7/\sqrt{74}.$$

$\square$

Exemplo

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (4, -3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (x, 1)$, *determine* $x \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 5.$

Solução.

Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 5$ temos:

$$4 \cdot x - 3 \cdot 1 = 5 \Longrightarrow x = 2.$$

Portanto, $x = 2$. $\square$

Exemplo

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (a+1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 1)$, calcule o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{u}$ seja perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

Solução.

Para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam perpendiculares, é necessário e suficiente que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$(a+1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 0 \Longleftrightarrow -3a - 3 + 2 = 0 \Longleftrightarrow a = -\tfrac{1}{3}.$$

Portanto, $a = -\dfrac{1}{3}$. $\square$

Proposição

Seja $\overrightarrow{u} = (a, b)$ um vetor não nulo. Então os vetores unitários $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que fazem um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ com o vetor $\overrightarrow{u}$ são dados por:

$$\overrightarrow{v_1} = \cos\theta \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \cos(-\theta) \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}(-\theta) \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},$$

onde $\overrightarrow{w} = (-b, a)$ é um vetor perpendicular a $\overrightarrow{v}$.

Prova.

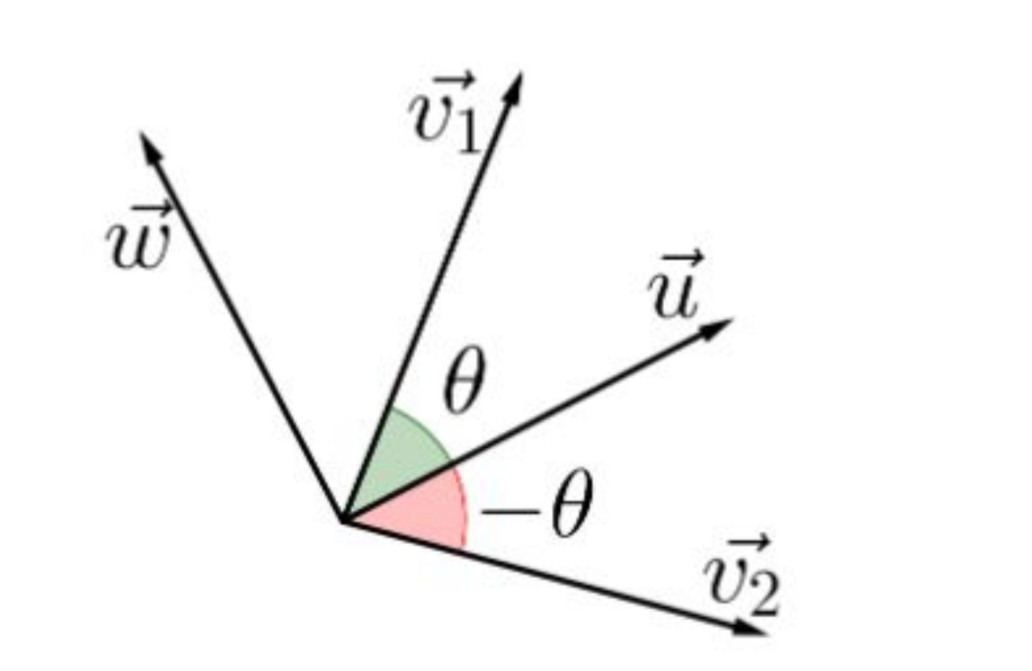
De fato:

- $$\begin{aligned} ||\overrightarrow{v_1}||^2 &= <\cos\theta\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}+\operatorname{sen}\theta\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},\cos\theta\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}+\operatorname{sen}\theta\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}> \\ &= \cos^2\theta<\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||},\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}>+2\cos\theta\operatorname{sen}\theta<\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||},\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}> \\ &\quad+\operatorname{sen}^2\theta<\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}> \\ &= \cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1, \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\cos\angle(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u}) &= \frac{<\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{u}||}\\ &= \frac{<\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}+\operatorname{sen}\theta\dfrac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||}\\ &= \cos\theta\frac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||^2}+\operatorname{sen}\theta\frac{<\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{w}||\cdot||\overrightarrow{u}||}=\cos\theta,\end{aligned}$$

pois,

- $\dfrac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||^2}=\dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||^2}<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>=\dfrac{||\overrightarrow{u}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2}=1$
- $\dfrac{<\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}>}{||\overrightarrow{w}||^2}=\dfrac{1}{||\overrightarrow{w}||^2}<\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}>=\dfrac{||\overrightarrow{w}||^2}{||\overrightarrow{w}||^2}=1$
- $\dfrac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}>}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{w}||}=\dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{w}||}<\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}>=0.$



De modo análogo, podemos mostrar que $||\overrightarrow{v_2}|| = 1$ e $\cos \angle(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u}) = \cos(-\theta) = \cos\theta$.

■

Exemplo

Determine os vetores unitários $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que fazem um ângulo $\theta \in (0, \pi)$ com o vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Solução. Como $\theta \in (0, \pi)$ e $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Logo, pela proposição anterior,

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \cos\theta\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1,2) + \frac{1}{5}(-2,1) = (0,1), \end{aligned}$$

e

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2} &= \cos(-\theta)\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}(-\theta)\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1,2) - \frac{1}{5}(-2,1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

□

Exemplo

Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

Solução.

Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X, Y, Z e W os pontos médios dos lados AC, CD, DB e BA, respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 33).

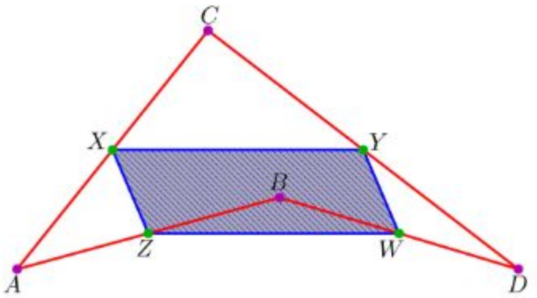


Figura 33: Pontos médios dos lados de um quadrilátero determinando um paralelogramo.

□

Solução.

Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X, Y, Z e W os pontos médios dos lados AC, CD, DB e BA, respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 33).

Temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,, \\
\overrightarrow{ZW} &= \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BW} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,.
\end{aligned}$$

Logo $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ZW}$. Entao $XY \equiv ZW$, e portanto, $XYZW$ é um paralelogramo.

Muito obrigado!