GEOEMETRIA ANALÍTICA

AULA 4 - 2024.1

Prof. Dr. Mário José de Souza

Vetores

Definição

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, dizemos que eles representam o mesmo **vetor** $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Isto é, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB. Tais segmentos são chamados **representantes** do vetor $\overrightarrow{v}$.

Observação 1

(a) Da definição de vetor, temos $AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(b) Por convenção, o **vetor nulo** é o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, qualquer que seja o ponto A no plano.

(c) Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Na prática, trabalhamos com vetores usando a sua expressão em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam

$$A = (a_1, a_2) \qquad C = (c_1, c_2)$$
$$B = (b_1, b_2) \qquad D = (d_1, d_2)$$

pontos do plano. A seguinte proposição caracteriza a equipolência em termos de coordenadas.

Proposição 4

$$\boxed{AB \equiv CD \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2}$$

Prova.

Pela proposição 2,

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC \\ &\iff \left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right) \\ &\iff (a_1+d_1, a_2+d_2) = (b_1+c_1, b_2+c_2) \\ &\iff a_1+d_1 = b_1+c_1 \quad \text{e} \quad a_2+d_2 = b_2+c_2 \\ &\iff b_1-a_1 = d_1-c_1 \quad \text{e} \quad b_2-a_2 = d_2-c_2. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição

Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Note que, se $AB \equiv CD$, então, pela proposição anterior,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Exemplo 1

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ *e* $C = (4, 0)$. *Determine as coordenadas do*

vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *e as coordenadas do ponto* D *tal que* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução.

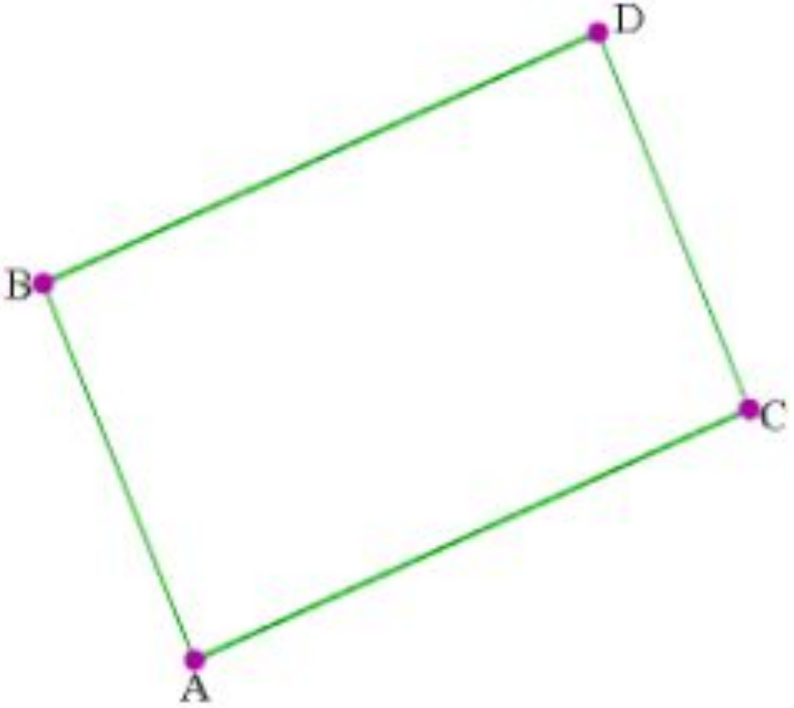
Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 1-2) = (2,-1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\
&\iff (2,-1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\
&\iff 2 = d_1 - 4 \quad \text{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\
&\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1\,.
\end{aligned}$$

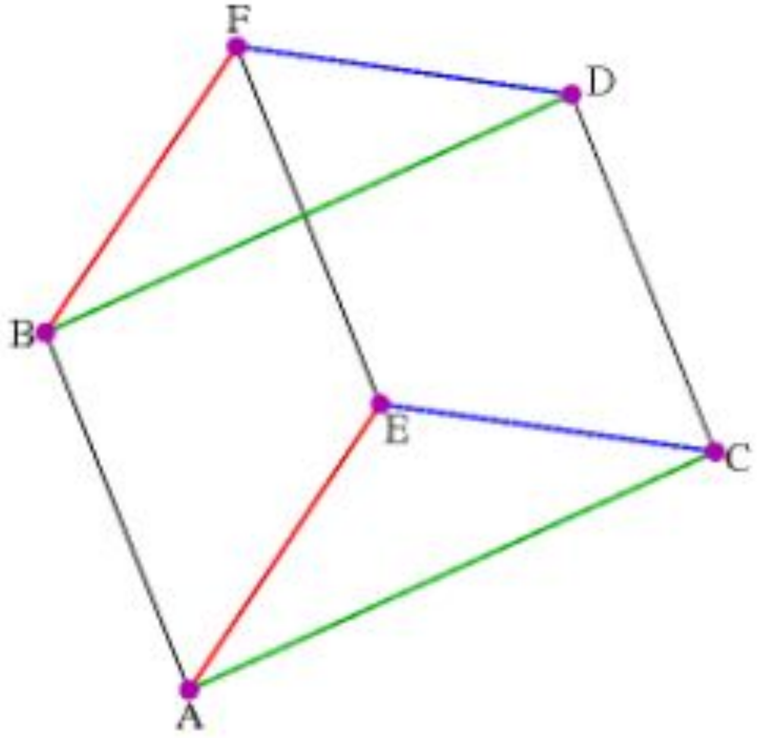
Portanto, $D = (6,-1)$. $\square$

Corolário 1

(a) $AB \equiv CD \iff AC \equiv BD.$



(b) $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \Longrightarrow AB \equiv EF$.



Em virtude do item (c) da observação 1, temos:

Proposição 5

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor.

Então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (p_1, p_2)$, então $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

e

$$\begin{aligned} AB \equiv OP &\iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (p_1 - 0, p_2 - 0) \\ &\iff P = (p_1, p_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$

como queríamos verificar. ■

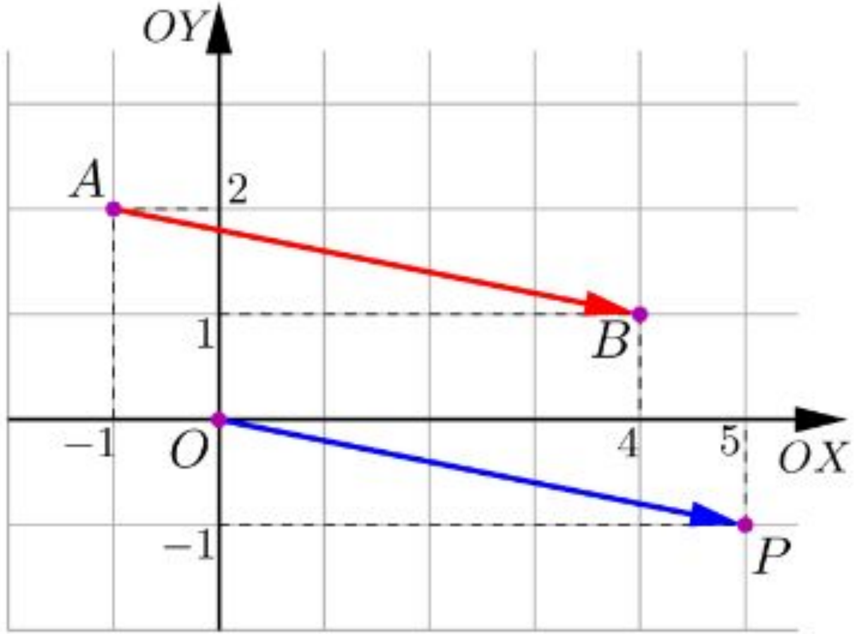
Exemplo 2

Sejam $A = (-1, 2)$ *e* $B = (4, 1)$. *Determine o ponto* P *tal que* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução.

Pela proposição anterior,

$$P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1).$$



Operações com vetores

Vamos definir a operação de adição de vetores que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ faz corresponder um novo vetor, chamado **soma** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores dados e seja E um ponto no plano. Tomemos pontos P e Q tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Definimos o **vetor soma** de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ como sendo o único vetor que tem o segmento EQ como um representante (veja a figura 15). Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EQ}}$$

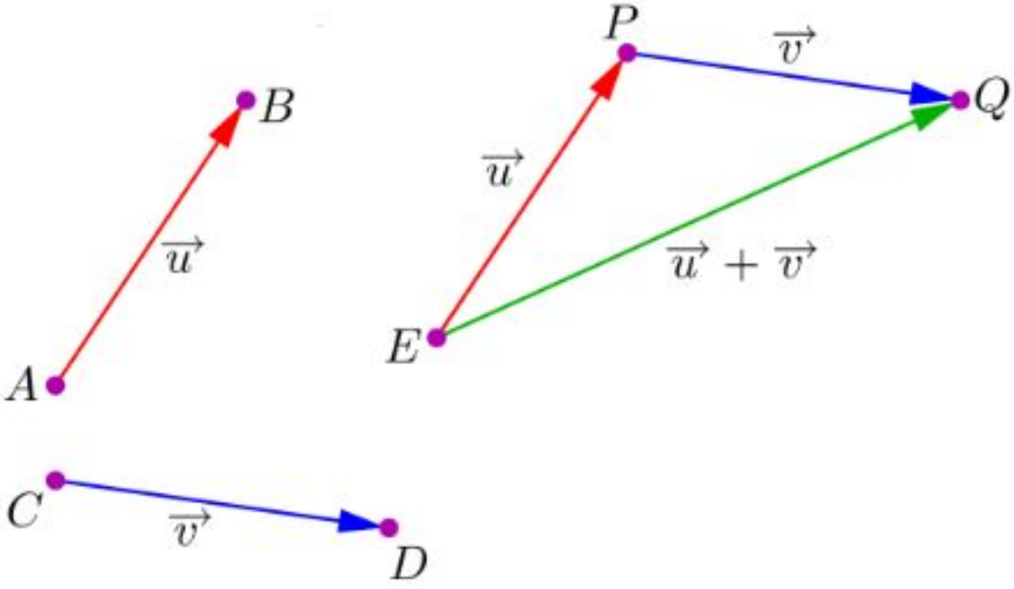


Figura 15: Adição de vetores.

Quando se faz uma definição que depende, aparentemente, da escolha de um representante devemos mostrar que a classe do novo objeto definido independe do representante escolhido.

A adição de vetores é uma operação bem definida.

Com efeito, seja E' outro ponto do plano, e sejam P' e Q' pontos tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{E'P'}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P'Q'}$. Segundo a definição anterior, deveríamos ter também $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{E'Q'}$.

Verifiquemos, então, que os segmentos EQ e $E'Q'$ são equipolentes.

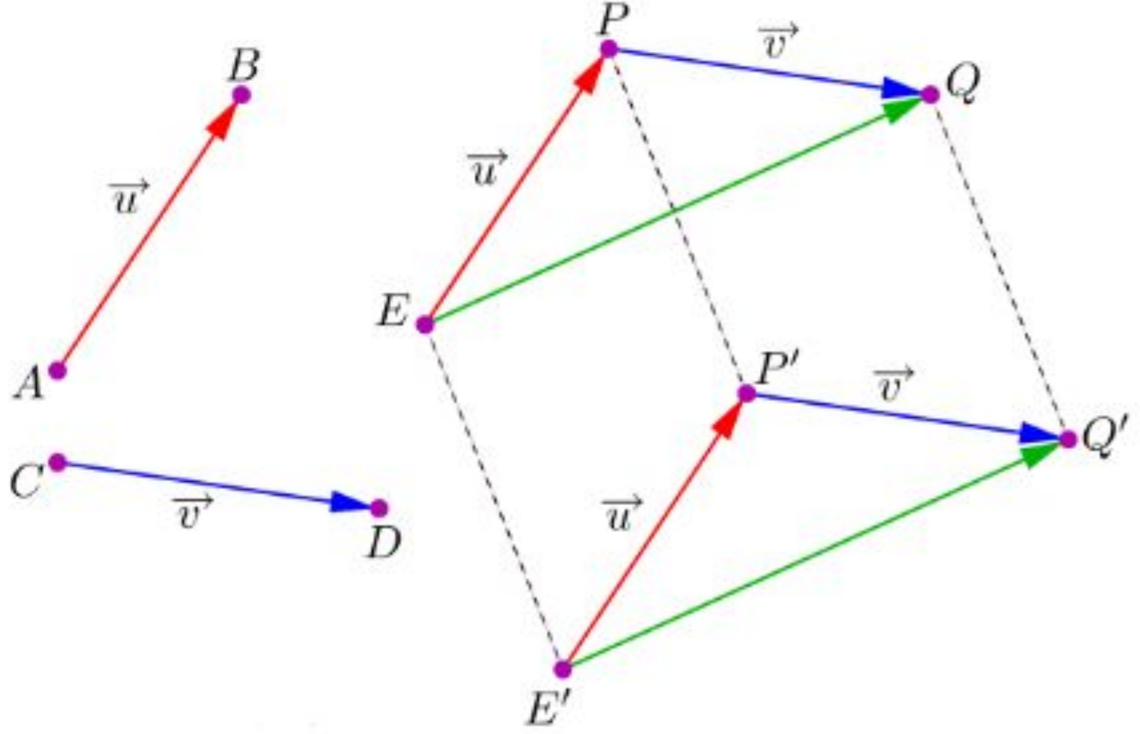


Figura 16: O segmento EQ é equipolente ao segmento $E'Q'$?

Pelo corolário 1(a) (acompanhe a argumentação na figura 16), temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{E'P'} &\implies EP \equiv E'P' \implies EE' \equiv PP'\,,\\
\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} &\implies PQ \equiv P'Q' \implies PP' \equiv QQ'\,.
\end{aligned}$$

Logo, pelo corolário 1(b), $EE' \equiv QQ'$ e novamente pelo corolário 1(a):

$$EQ \equiv E'Q' \Longrightarrow \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{E'Q'}\ .$$

Portanto, o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ está bem definido.

Observação

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores no plano. Quando os segmentos AB e CD não são colineares ou paralelos, podemos determinar também o vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ da seguinte maneira:

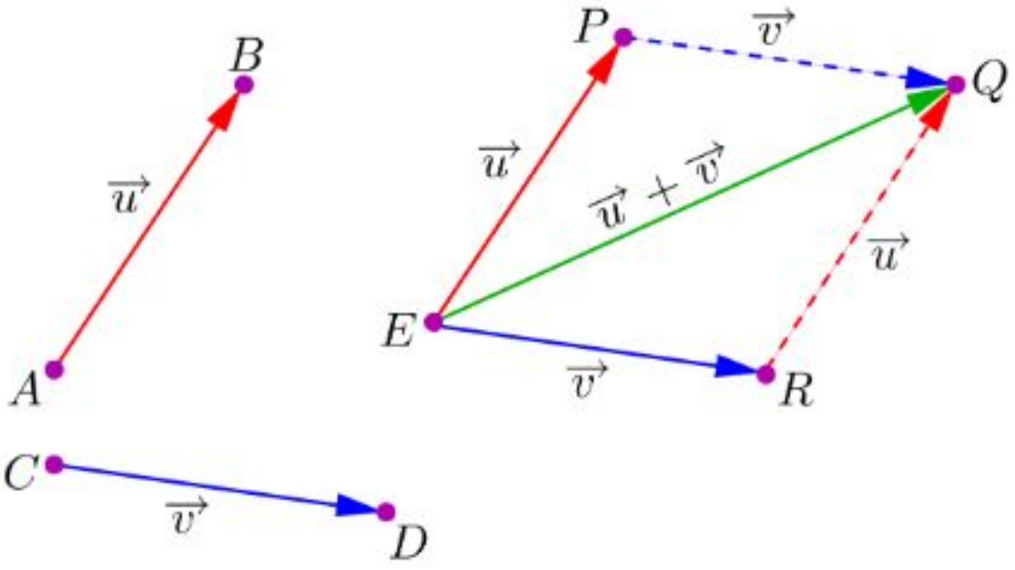


Figura 17: Adição de vetores como a diagonal de um paralelogramo.

Seja E um ponto do plano e sejam P e R tais que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP} \text{ e } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER}.$$

Então o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{EQ}$, onde EQ é uma das diagonais do paralelogramo que tem E, P e R como vértices.

De fato, como $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{PQ}$, então

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ}.$$

Adição de vetores em coordenadas

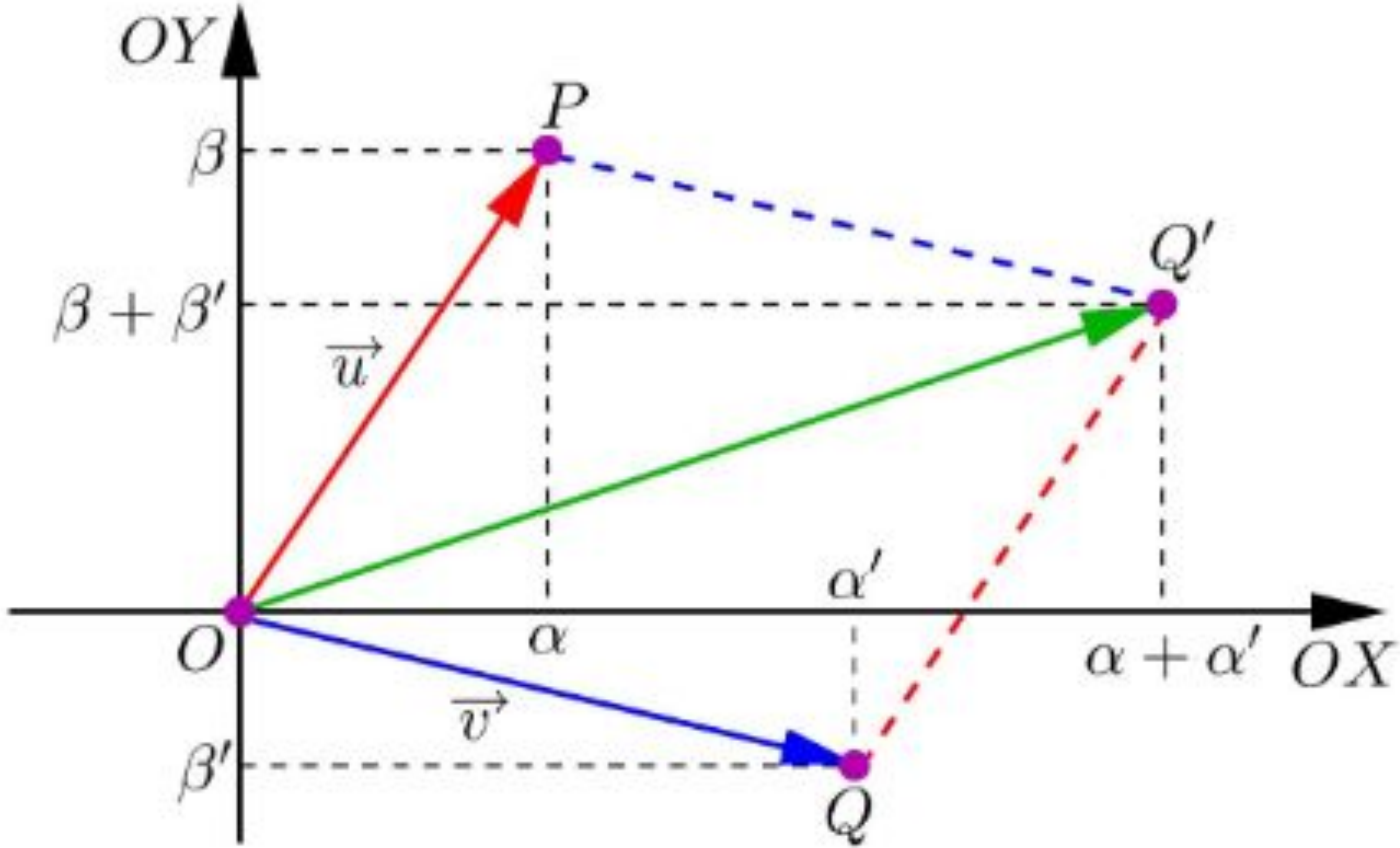
Se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ são dois vetores dados por suas coordenadas com respeito a um sistema ortogonal OXY, então

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')}$$

De fato, pela proposição 5, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, onde $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\alpha', \beta')$.

Seja $Q' = (a, b)$ o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ'}$. Então, pela proposição 4,

$$\begin{aligned} & (\alpha' - 0, \beta' - 0) = (a - \alpha, b - \beta) \\ \Longrightarrow \quad & Q' = (a, b) = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \\ \Longrightarrow \quad & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ & = \overrightarrow{OQ'} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta'). \end{aligned}$$



OY
P
β
$\beta + \beta'$
Q'
$\overrightarrow{u}$
α'
O
α
$\alpha + \alpha'$
OX
$\overrightarrow{v}$
β'
Q

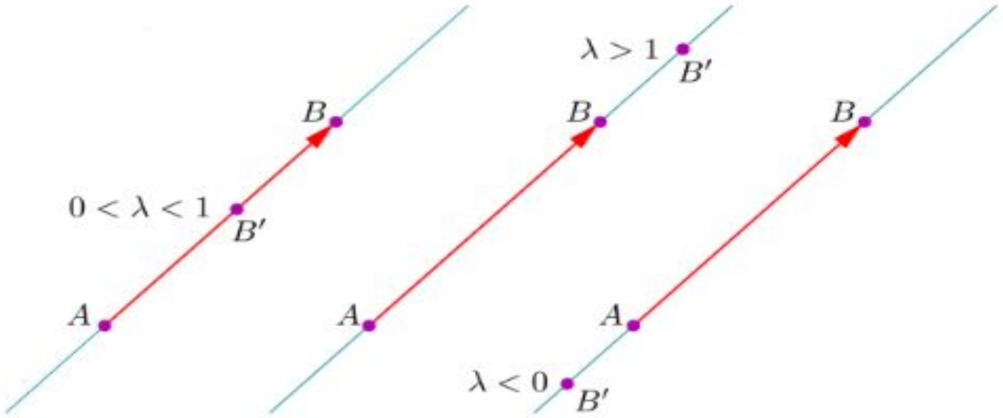
Multiplicação de um número real por um vetor

Definição Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** é o vetor

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}}$$

representado pelo segmento orientado AB', tal que:

- A, B, B' são colineares;
- $d(A, B') = |\lambda| d(A, B)$;
- o sentido de AB' é igual ao sentido de AB se $\lambda > 0$, e oposto, se $\lambda < 0$;
- $B' = A$, se $\lambda = 0$.



Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Vamos mostrar, usando a definição geométrica dada acima, que:

$$\boxed{B' = (a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1), a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2)),}$$

onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $\lambda \neq 0$.

De fato:

$$\begin{aligned} \bullet\ d(A, B') &= \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda| d(A, B); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\ d(B,B') &= \sqrt{(\lambda(b_1-a_1)+(a_1-b_1))^2+(\lambda(b_2-a_2)+(a_2-b_2))^2}\\
&= \sqrt{(\lambda-1)^2(b_1-a_1)^2+(\lambda-1)^2(b_2-a_2)^2}\\
&= |\lambda-1|\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\\
&= |\lambda-1|d(A,B).
\end{aligned}
$$

Para verificar que A, B e B' são colineares, analisaremos os quatro casos abaixo:

Caso 1. Se $\lambda \in (0,1)$, então:

$$d(A,B') + d(B',B) = \lambda d(A,B) + (1-\lambda)d(A,B) = d(A,B).$$

Logo, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B' está entre A e B.

Caso 2. Se $\lambda = 1$, $B' = (b_1, b_2) = B$, o que coincide com a definição geométrica de B'.

Caso 3. Se $\lambda > 1$, então:

$$d(A,B) + d(B,B') = d(A,B) + (\lambda - 1)d(A,B) = \lambda d(A,B) = d(A,B').$$

Então, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B está entre A e B'.

Caso 4. Se $\lambda < 0$, então:

$$d(B',A) + d(A,B) = -\lambda d(A,B) + d(A,B) = (1-\lambda)d(A,B) = d(B',B).$$

Assim, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e A está entre B' e B.

Resta provar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB'}$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Suponhamos primeiro que

$$b_1 - a_1 > 0.$$

Neste caso, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OX, com o sentido de crescimento das abscissas dos pontos.

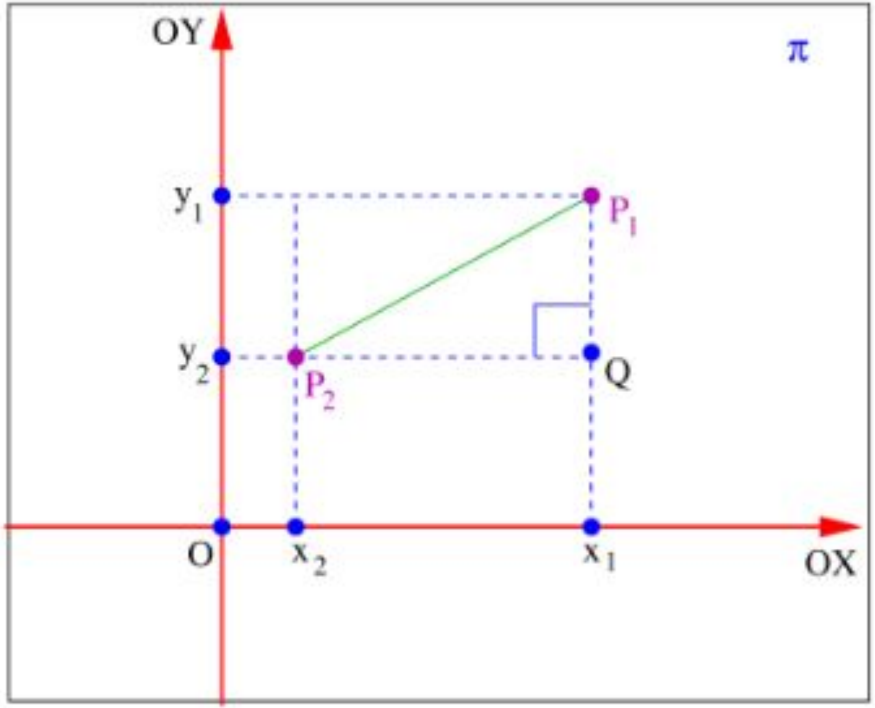


Figura 20: Sentido de percurso de A para B.

Portanto:

- Se $\lambda > 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) > a_1$, ou seja, o sentido de A para B' coincide com o sentido de A para B.

- Se $\lambda < 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) < a_1$, ou seja, o sentido de A para B' é oposto ao sentido de A para B.

O caso de $b_1 - a_1 < 0$ pode ser analisado de maneira análoga.

Suponhamos agora que $b_1 - a_1 = 0$. Neste caso, $b_2 - a_2 \neq 0$, pois A e B são pontos distintos.

Se $b_2 - a_2 > 0$, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OY, com o sentido de crescimento das ordenadas dos pontos.

De modo análogo ao caso $b_1 - a_1 > 0$, podemos verificar que o sentido de percurso de A para B' coincide com o de A para B se $\lambda > 0$, e é oposto ao de A para B, se $\lambda < 0$.

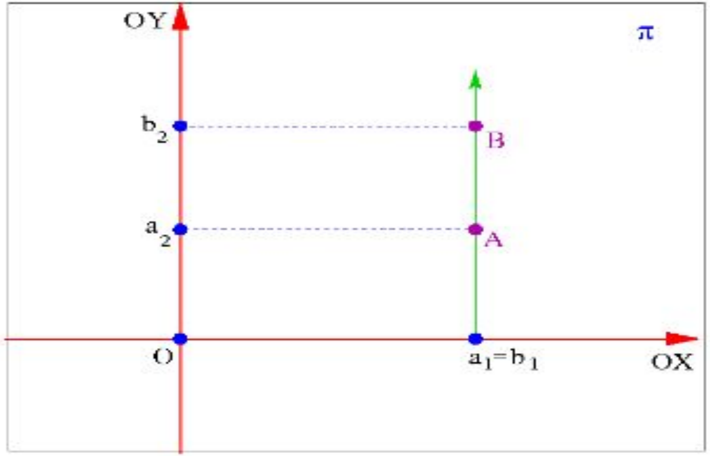


Figura 21: Sentido de percurso de A para B.

O caso $b_2 - a_2 < 0$ pode ser analisado da mesma maneira.

Provamos assim que:

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB} = (\lambda\,(b_1 - a_1), \lambda\,(b_2 - a_2)).}$$

Definição

A multiplicação do vetor $\overrightarrow{v}$ *pelo número real* λ *é, por definição, o vetor* $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, *onde* $\overrightarrow{AB}$ *é um representante do vetor* $\overrightarrow{v}$.

Pelo provado acima, $\lambda\overrightarrow{v}$ está bem definido, pois se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, então, num sistema de eixos ortogonais,

$$\overrightarrow{v} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2),$$

onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$.

Portanto,

$$\lambda\overrightarrow{CD} = (\lambda(d_1 - c_1), \lambda(d_2 - c_2)) = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2))$$
$$\Longrightarrow \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Além disso, fica provado também que:

$$\boxed{\text{se } \overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) \text{ então } \lambda\overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta).}$$

Então, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP'}$, temos que $P = (\alpha, \beta)$ e $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$

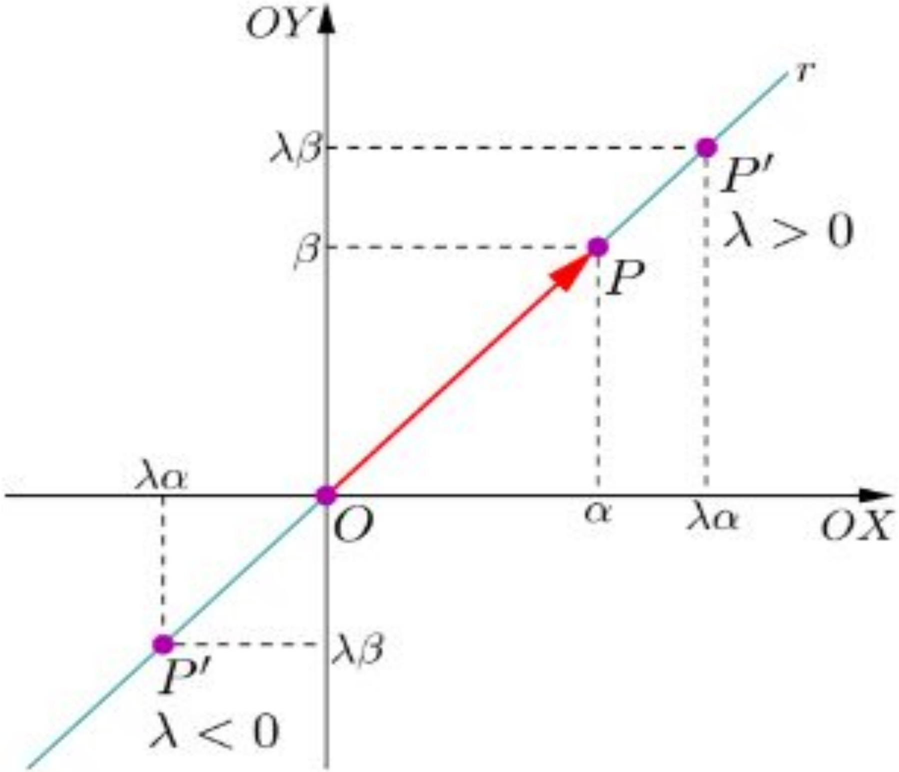


Figura 22: Coordenadas dos vetores $\vec{v} = \vec{OP}$ e $\lambda\vec{v} = \vec{OP'}$.

Observação

Note que,

- $\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$.

Proposição (

Um ponto P pertence a reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Pela definição de multiplicação do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo número real λ, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence a reta r.

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente a reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$.

Se o sentido de percurso de A para P, ao longo de r, coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.

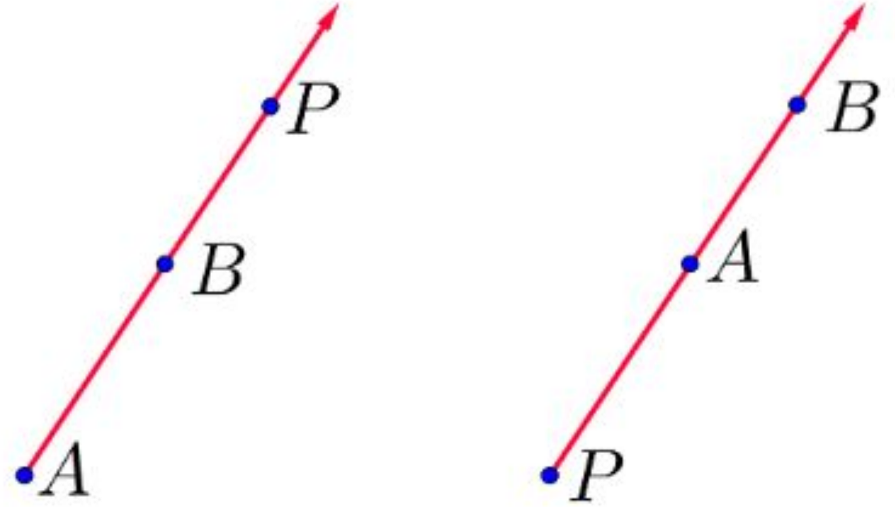


Figura 23: Sentido de percurso de A para B.

Se o sentido de percurso, ao longo de r, de A para P for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois, pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A oposta a semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A, P) = \mu(A, B)$. ■

Exemplo 3

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (3, 1)$*, determine*

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\\
&= 2(1, -1) + (3, 1)\\
&= (2(1), 2(-1)) + (3, 1)\\
&= (2, -2) + (3, 1)\\
&= (2 + 3, -2 + 1)\\
&= (5, -1)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\\
&= (1, -1) + 2(3, 1)\\
&= (1, -1) + (2(3), 2(1))\\
&= (1, -1) + (6, 2)\\
&= (1 + 6, -1 + 2)\\
&= (7, 1)\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{c} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \\
&= \frac{1}{2}(7,1) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right) \\
&= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

□

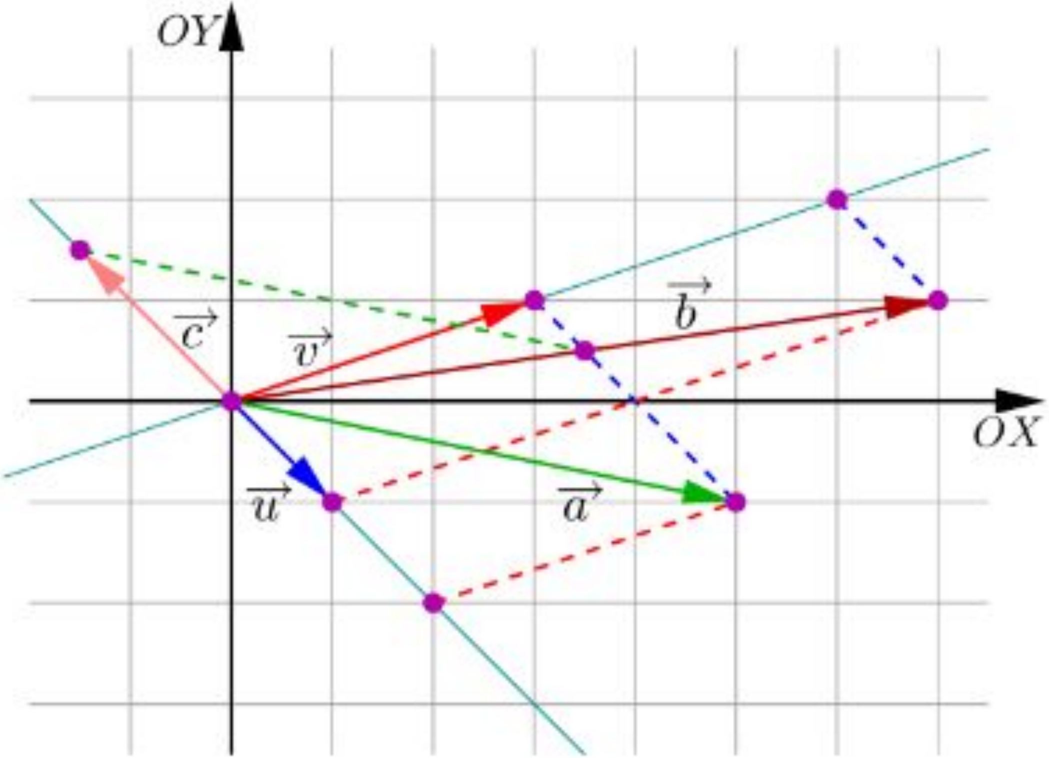


Figura 24: Exemplo 3.

Exemplo 4

Dados os pontos do plano $A = (1, 3)$ e $B = (6, 1)$.

(a) *Calcule o ponto médio C do segmento AB utilizando a multiplicação de um vetor por um número real.*

(b) *Determine os pontos D e E que dividem o segmento AB em três partes iguais.*

Solução.

(a) Para isto basta notar que

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.}$$

Assim, se $C = (x, y)$ temos:

$$(x - 1, y - 3) = \frac{1}{2}(5, -2) = \left(\frac{5}{2}, -1\right),$$

então:

$$\begin{cases} x - 1 &= \dfrac{5}{2} \\ y - 3 &= -1 \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ e } y = 2.$$

Portanto,

$$C = \left(\frac{7}{2}, 2\right).$$

(b) Note que:

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

Assim, se $D = (x, y)$ e $E = (z, w)$ temos:

$$(x-1, y-3) = \frac{1}{3}(5, -2) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$(z-1, w-3) = \frac{2}{3}(5, -2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

então:

$$\begin{cases} x - 1 &= \dfrac{5}{3} \\ y - 3 &= -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ e } y = \frac{7}{3}$$

e

$$\begin{cases} z - 1 &= \dfrac{10}{3} \\ w - 3 &= -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Longrightarrow z = \frac{13}{3} \text{ e } w = \frac{5}{3}$$

Portanto, $D = \left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$ e $E = \left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$. $\square$

Observação

O método utilizado para resolver o exemplo acima pode ser generalizado da seguinte maneira: dado um segmento AB, os pontos $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais são dados por:

$$\boxed{\overrightarrow{AP_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}, k = 1, \cdots, n-1.}$$

Propriedades das operações com vetores

Propriedades da adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

- **Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associatividade:** $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
- **Existência de elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\overrightarrow{0}$ é tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, que designamos $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

- De fato, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, então

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se D é o outro vértice do paralelogramo $ABCD$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$.

Logo,

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

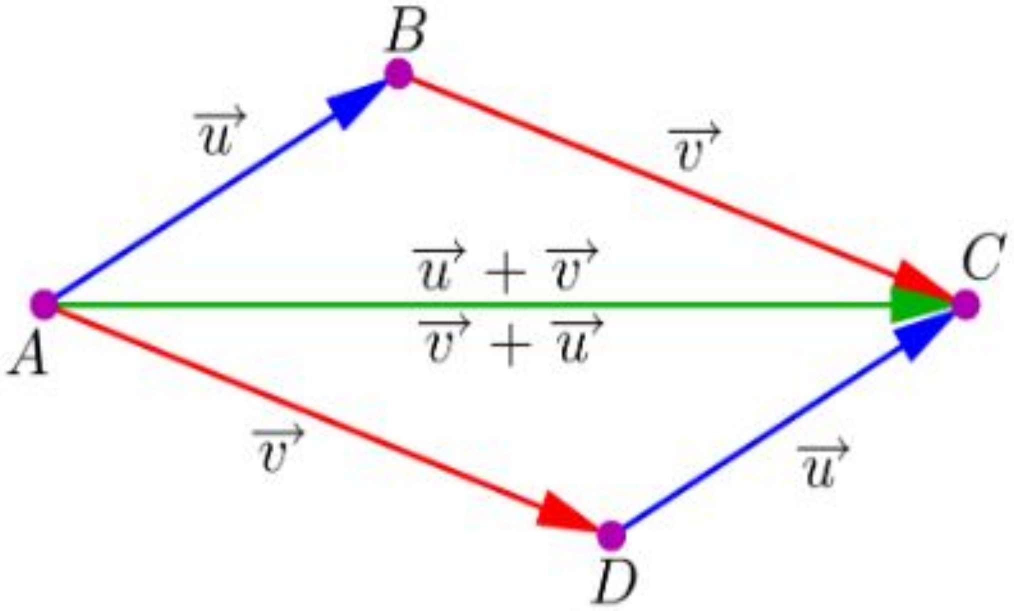


Figura 25: Comutatividade da adição de vetores.

- A associatividade da adição de vetores se verifica de maneira análoga.

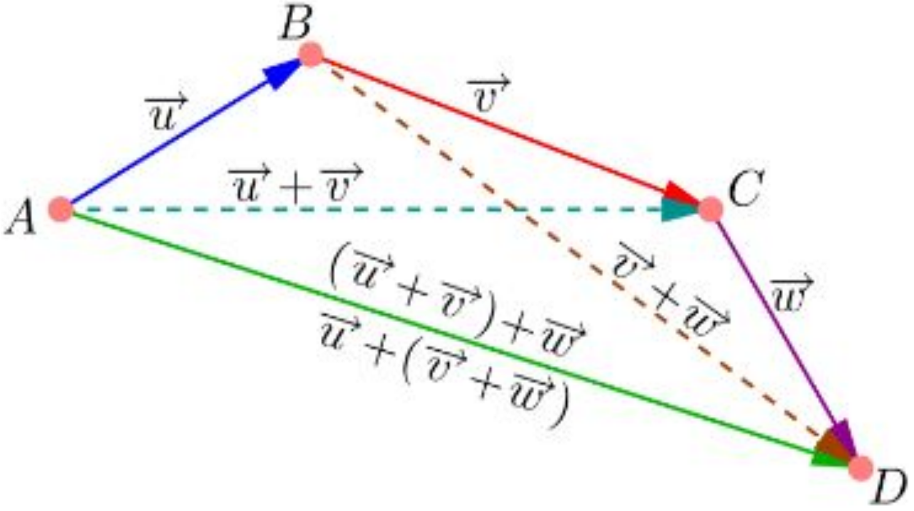


Figura 26: Associatividade da adição de vetores.

Quanto às outras duas propriedades, observe que:

- se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, sendo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u},$$
$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

- o **simétrico** ou **inverso aditivo** do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$, pois

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0},$$
$$-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}.$$

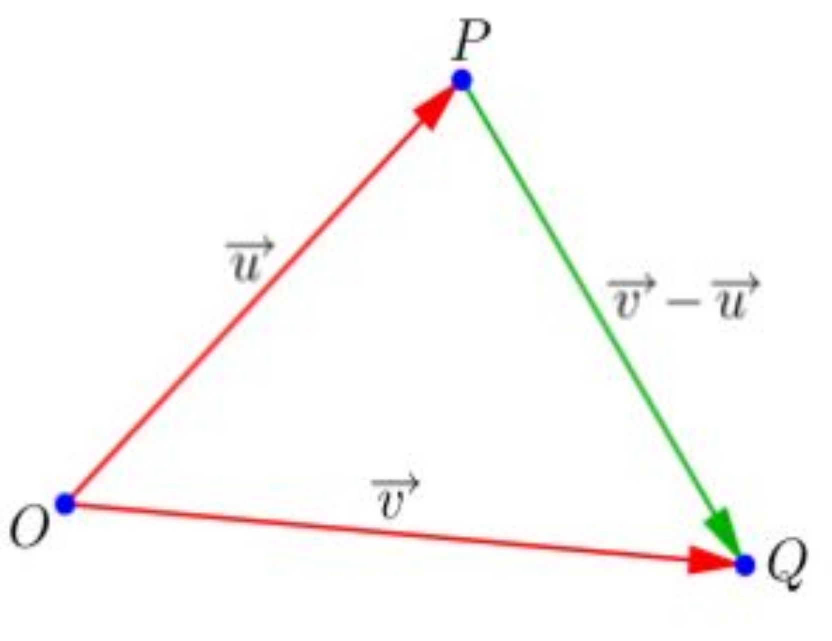
Observação

O **vetor simétrico** $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $(-1)\overrightarrow{u}$, pois se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ é o vetor $\overrightarrow{u}$ dado em coordenadas, então:

$$\overrightarrow{BA} = (-\alpha, -\beta) = (-1)(\alpha, \beta) = (-1)\overrightarrow{AB}.$$

Definição (

O vetor $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, escrito $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, é chamado **diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$**.



Sejam A, B, C pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação de números reais por vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- **Propriedades distributivas:** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ e $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

As propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e a propriedade distributiva que já conhecemos nos números reais.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, então, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= \lambda\left[(a, b) + (a', b')\right] = \lambda(a + a', b + b') \\
&= (\lambda(a + a'), \lambda(b + b')) = (\lambda a + \lambda a', \lambda b + \lambda b') \\
&= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a, b) + \lambda(a', b') \\
&= \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}\,.
\end{aligned}$$

A outra propriedade distributiva se verifica da mesma forma (faça-o!).

Muito obrigado!