

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a; 4,9a^2)$ e $Q(a + h; 4,9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4,9(a + h)^2 - 4,9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a + h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

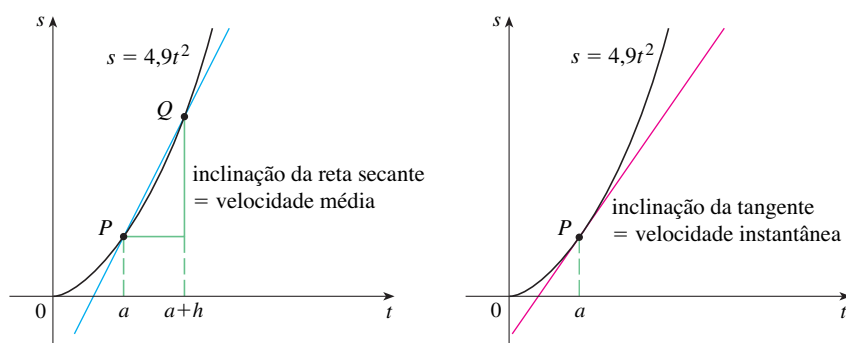


FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites. Após estudarmos métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, retornaremos aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 Exercícios

- 1.** Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

- (a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V , encontre as inclinações das retas secantes PQ , onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30 .
 (b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.
 (c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P . (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

- 2.** Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

- (a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$
 (c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

- 3.** O ponto $P(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1 - x)$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1 - x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ , com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x :

- (i) 1,5 (ii) 1,9 (iii) 1,99 (iv) 1,999
 (v) 2,5 (vi) 2,1 (vii) 2,01 (viii) 2,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.

(c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.

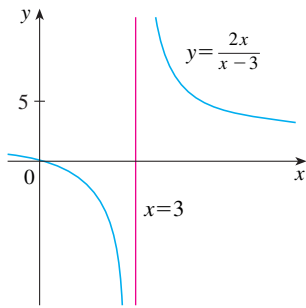


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^-$ e $\cos x \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^+$, enquanto $\operatorname{sen} x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

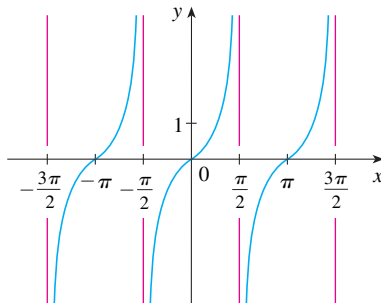


FIGURA 16

$y = \operatorname{tg} x$

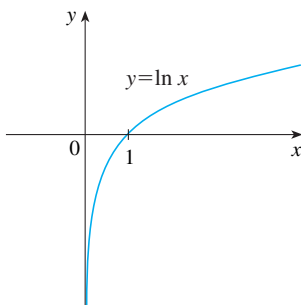


FIGURA 17

O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$$

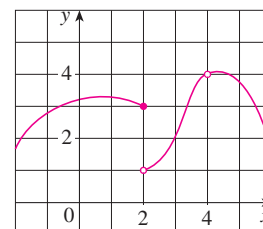
Nesta situação, é possível que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

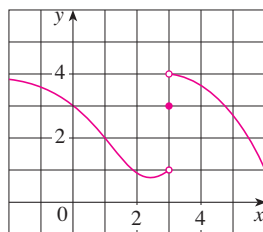
4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ (d) f(2) \quad (e) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad (f) f(4)$$



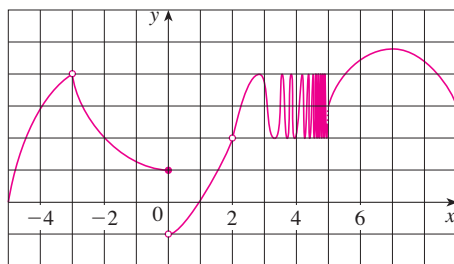
5. Para a função f , cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (e) $f(3)$



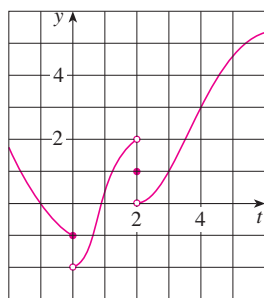
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$
 (d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$
 (j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x)$



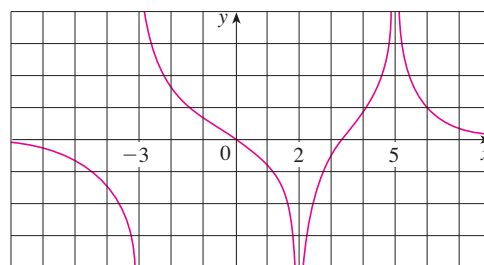
7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$
 (d) $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$
 (g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$



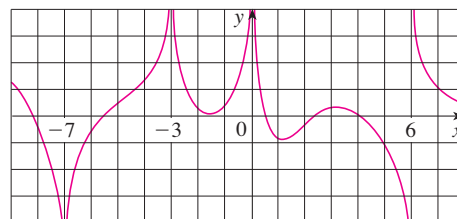
8. Para a função R , cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 5} R(x)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} R(x)$
 (e) As equações das assíntotas verticais.



9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

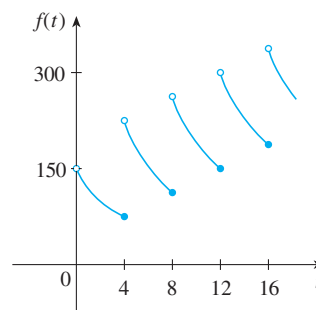
(a) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$
 (f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t \rightarrow 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



- 11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

- 13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$13. f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0) \text{ não está definido}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \\ f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3, \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \\ x = 2,5, 2,1, 2,05, 2,01, 2,005, 2,001, \\ 1,9, 1,95, 1,99, 1,995, 1,999$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \\ x = 0, -0,5, -0,9, -0,95, -0,99, -0,999, \\ -2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x = \pm 1, \pm 0,5, \pm 0,1, \pm 0,05, \pm 0,01$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x + x^2), \quad x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,001$$


23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$


$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$$

 **27.** (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

 **28.** (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

$$29. \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+2}{x+3}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x$$


$$35. \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função


$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$


 (b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

$$39. \text{Determine } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3 - 1} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$$

(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,


(b) raciocinando como no Exemplo 9, e


 (c) a partir do gráfico de f .

 **40.** (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?

 (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

 **42.** (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leq x \leq 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f ?

(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f ?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1$ e $0,05$, e conjecture qual o valor de


$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0,04, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003$ e $0,001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01$ e $0,005$.

(b) Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)

 (d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h . Compare com os resultados da parte (c).

45. Faça o gráfico da função $f(x) = \sin(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

46. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c , a velocidade da luz. O que acontece se $v \rightarrow c^-$?

47. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \tan(2 \sin x) \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

48. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

- (b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer conjecturas sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Nesta seção usaremos as *Propriedades dos Limites*, para calculá-los.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existam, então

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

- O limite de uma soma é a soma dos limites.
- O limite de uma diferença é a diferença dos limites.
- O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função.
- O limite de um produto é o produto dos limites.
- O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero).

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ estiver próximo a M , é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo a $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Propriedade 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para demonstrar essa propriedade. As demonstrações das propriedades remanescentes encontram-se no Apêndice F.

Propriedade da Soma

Propriedade da Diferença

Propriedade da Multiplicação por Constante

Propriedade do Produto

Propriedade do Quociente

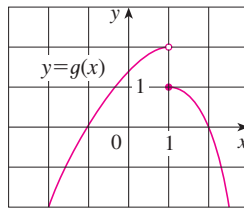
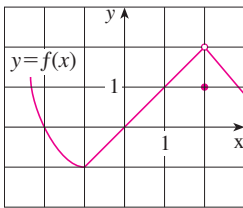
2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)] & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3 \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} \end{array}$$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)] & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2} [x^3 f(x)] & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)} \end{array}$$

3-9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

está correta.

11-32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t} \right)$

30. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$ (b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ com duas casas decimais.(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que

 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f , g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

38. Se $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para todo x , avalie $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

47. A função sinal, denotada por sgn , é definida por

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn } x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn } x$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sgn } x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de f .

49. Seja $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de g .

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g .

51. (a) Se o símbolo $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \llbracket x \rrbracket$ (iii) $\lim_{x \rightarrow -2,4} \llbracket x \rrbracket$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \rightarrow a} \llbracket x \rrbracket$ existe?

52. Seja $f(x) = \llbracket \cos x \rrbracket$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f .

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$, mostre que existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \rightarrow c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r .

57. Se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam.

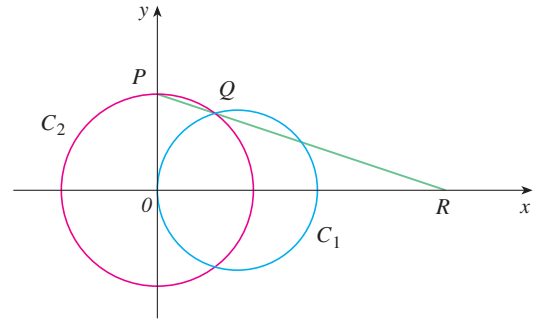
62. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

64. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2 , a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x . O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \rightarrow 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como “ x está próximo de 2” e “ $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L ” são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0,0001 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0,1 \quad \text{se} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0,1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0,1)/2 = 0,05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0,05) = 0,1$$

isto é, $|f(x) - 5| < 0,1$ se $0 < |x - 3| < 0,05$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0,05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0,01)/2 = 0,005$:

É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.

5. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que se $\left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta$ então $|\operatorname{tg} x - 1| < 0,2$

6. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que se $|x - 1| < \delta$ então $\left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0,4\right| < 0,1$

7. Para o limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$.

8. Para o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$.

9. Dado que $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg}^2 x = \infty$, ilustre a Definição 6 encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 1\,000$ e (b) $M = 10\,000$.

10. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se } 5 < x < 5 + \delta \quad \text{então} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x} - 5} > 100$$

11. Foi pedido a um torneiro mecânico que fabricasse um disco de metal circular com área de 1.000 cm^2 .

- (a) Qual o raio do disco produzido?
 (b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de $\pm 5 \text{ cm}^2$ na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?
 (c) Em termos da definição ε , δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, o que é x ? O que é $f(x)$? O que é a ? O que é L ? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ ?

12. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por

$$T(w) = 0,1w^2 + 2,155w + 20$$

onde T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.

- (a) Qual a potência necessária para manter a temperatura em 200°C ?
 (b) Se for permitida uma variação de $\pm 1^\circ\text{C}$ a partir dos 200°C , qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?
 (c) Em termos da definição ε , δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, o que é x ? O que é $f(x)$? O que é a ? O que é L ? Qual valor de ε é dado? Qual o valor correspondente de δ ?
13. (a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0,1$.
 (b) Repita a parte (a) com $\varepsilon = 0,01$.
14. Dado que $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 7) = 3$, ilustre a Definição 2 encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,05$ e $\varepsilon = 0,01$.

15–18 Demonstre cada afirmação usando a definição ε , δ de um limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

15. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim_{x \rightarrow -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x + 5) = -1$

19–32 Demonstre cada afirmação usando a definição ε , δ de limite.

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \rightarrow 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \rightarrow -1,5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

24. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \rightarrow -6^+} \sqrt[3]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

33. Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4 é $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

- SCA 35. (a) Para o limite $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para encontrar o valor de δ que corresponde a $\varepsilon = 0,4$.
 (b) Usando um sistema de computação algébrica para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o maior valor possível para δ que funcione para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.
 (c) Tome $\varepsilon = 0,4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).

36. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$.

[Dica: Use $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$.]

38. Se H é a função de Heaviside definida no Exemplo 6 na Seção 2.2, prove, usando a Definição 2, que $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$ não existe. [Dica: Use uma prova indireta como segue. Suponha que o limite seja L . Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição.]

39. Se a função f for definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, demonstre o Teorema 1 da Seção 2.3.

41. Quão próximo de -3 devemos deixar x para que

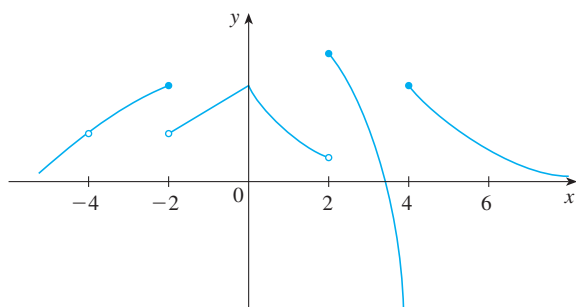
$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000?$$

42. Demonstre, usando a Definição 6, que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

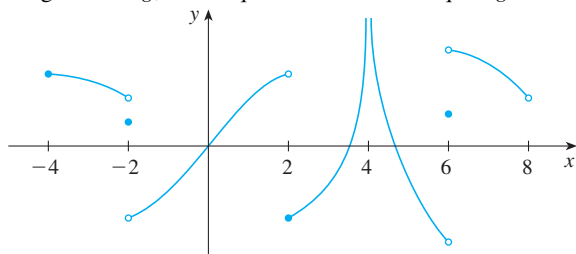
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

- Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.
- Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?
- (a) Do gráfico de f , identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



- Do gráfico de g , identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

- Descontínua, porém contínua à direita, em 2
- Descontinuidades em -1 e 4 , porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4
- Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5
- Não é contínua à direita nem à esquerda em -2 ; contínua somente à esquerda em 2
- A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t , medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

- Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

- Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a .

12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$, $a = 4$.

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4$, $a = -1$.

14. $h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}$, $a = 1$.

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$, $(2, \infty)$.

16. $g(x) = 2\sqrt{3-x}$, $(-\infty, 3]$.

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a . Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ $a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $a = 0$