GEOEMETRIA ANALÍTICA

AULA 5 - 2024.1

Prof. Dr. Mário José de Souza

UFG

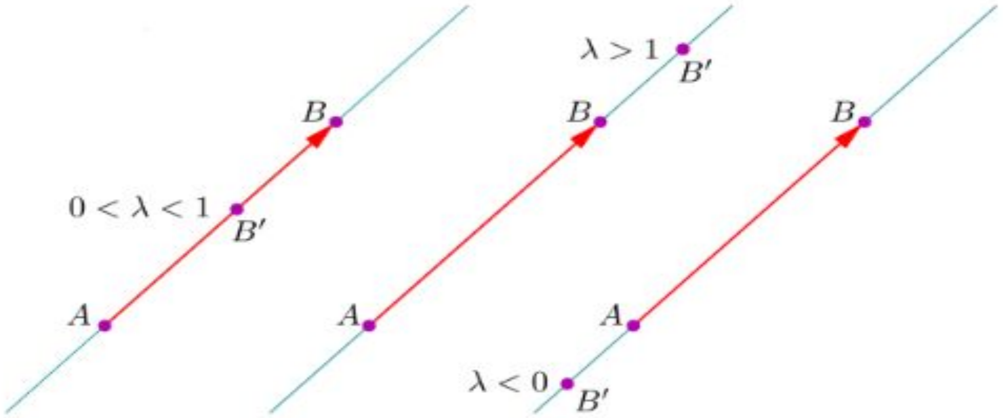
Multiplicação de um número real por um vetor

Definição Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** é o vetor

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda\,\overrightarrow{AB}}$$

representado pelo segmento orientado AB', tal que:

- A, B, B' são colineares;
- $d(A, B') = |\lambda| d(A, B)$;
- o sentido de AB' é igual ao sentido de AB se $\lambda > 0$, e oposto, se $\lambda < 0$;
- $B' = A$, se $\lambda = 0$.



Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Vamos mostrar, usando a definição geométrica dada acima, que:

$$\boxed{B' = (a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1), a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2)),}$$

onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $\lambda \neq 0$.

De fato:

$$\begin{aligned} \bullet\ d(A, B') &= \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda| d(A, B); \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d(B, B') &= \sqrt{(\lambda(b_1 - a_1) + (a_1 - b_1))^2 + (\lambda(b_2 - a_2) + (a_2 - b_2))^2} \\ &= \sqrt{(\lambda - 1)^2(b_1 - a_1)^2 + (\lambda - 1)^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda - 1|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda - 1| d(A, B). \end{aligned}$$

Para verificar que A, B e B' são colineares, analisaremos os quatro casos abaixo:

Caso 1. Se $\lambda \in (0, 1)$, então:

$$d(A, B') + d(B', B) = \lambda d(A, B) + (1 - \lambda) d(A, B) = d(A, B).$$

Logo, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B' está entre A e B.

Caso 2. Se $\lambda = 1$, $B' = (b_1, b_2) = B$, o que coincide com a definição geométrica de B'.

Caso 3. Se $\lambda > 1$, então:

$$d(A, B) + d(B, B') = d(A, B) + (\lambda - 1) d(A, B) = \lambda d(A, B) = d(A, B').$$

Então, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B está entre A e B'.

Caso 4. Se $\lambda < 0$, então:

$$d(B', A) + d(A, B) = -\lambda d(A, B) + d(A, B) = (1 - \lambda) d(A, B) = d(B', B).$$

Assim, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e A está entre B' e B.

Resta provar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB'}$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Suponhamos primeiro que

$$b_1 - a_1 > 0.$$

Neste caso, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OX, com o sentido de crescimento das abscissas dos pontos.

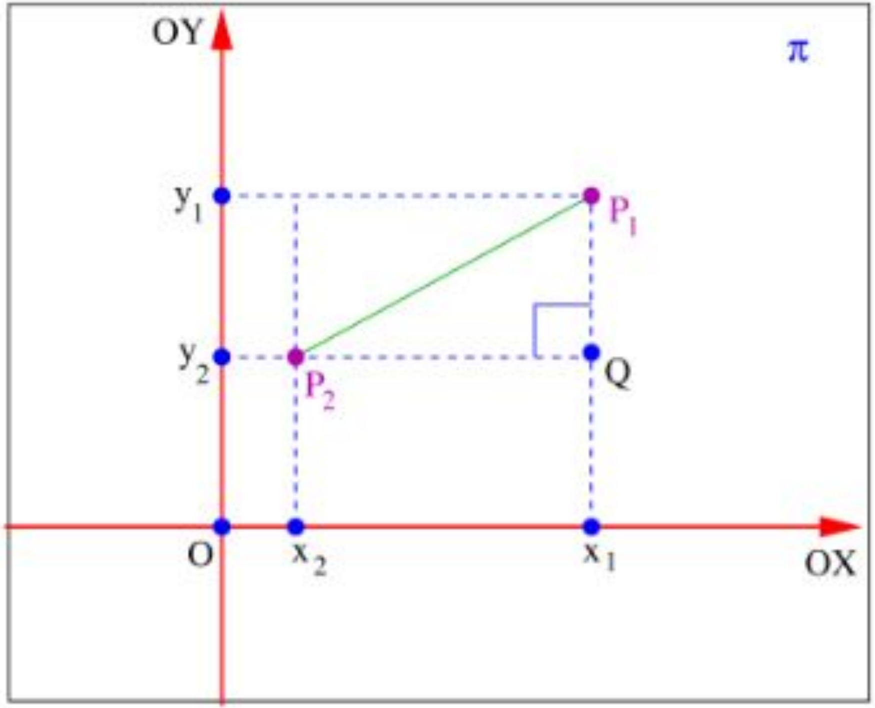


Figura 20: Sentido de percurso de A para B.

Portanto:

- Se $\lambda > 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) > a_1$, ou seja, o sentido de A para B' coincide com o sentido de A para B.

- Se $\lambda < 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) < a_1$, ou seja, o sentido de A para B' é oposto ao sentido de A para B.

O caso de $b_1 - a_1 < 0$ pode ser analisado de maneira análoga.

Suponhamos agora que $b_1 - a_1 = 0$. Neste caso, $b_2 - a_2 \neq 0$, pois A e B são pontos distintos.

Se $b_2 - a_2 > 0$, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OY, com o sentido de crescimento das ordenadas dos pontos.

De modo análogo ao caso $b_1 - a_1 > 0$, podemos verificar que o sentido de percurso de A para B' coincide com o de A para B se $\lambda > 0$, e é oposto ao de A para B, se $\lambda < 0$.

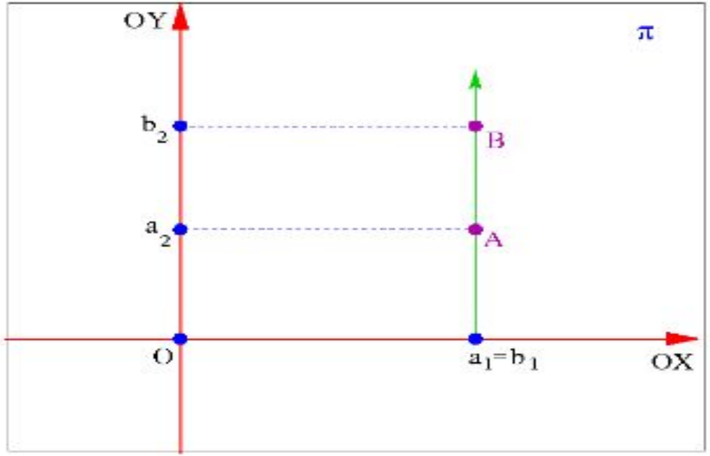


Figura 21: Sentido de percurso de A para B.

O caso $b_2 - a_2 < 0$ pode ser analisado da mesma maneira.

Provamos assim que:

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda\,(b_1 - a_1), \lambda\,(b_2 - a_2)).}$$

Definição

A multiplicação do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo número real λ é, por definição, o vetor $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\overrightarrow{AB}$ é um representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Pelo provado acima, $\lambda\overrightarrow{v}$ está bem definido, pois se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, então, num sistema de eixos ortogonais,

$$\overrightarrow{v} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2),$$

onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$.

Portanto,

$$\lambda\overrightarrow{CD} = (\lambda(d_1 - c_1), \lambda(d_2 - c_2)) = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2))$$
$$\Longrightarrow \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Além disso, fica provado também que:

$$\boxed{\text{se } \overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) \text{ então } \lambda\overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta).}$$

Então, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP'}$, temos que $P = (\alpha, \beta)$ e $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$

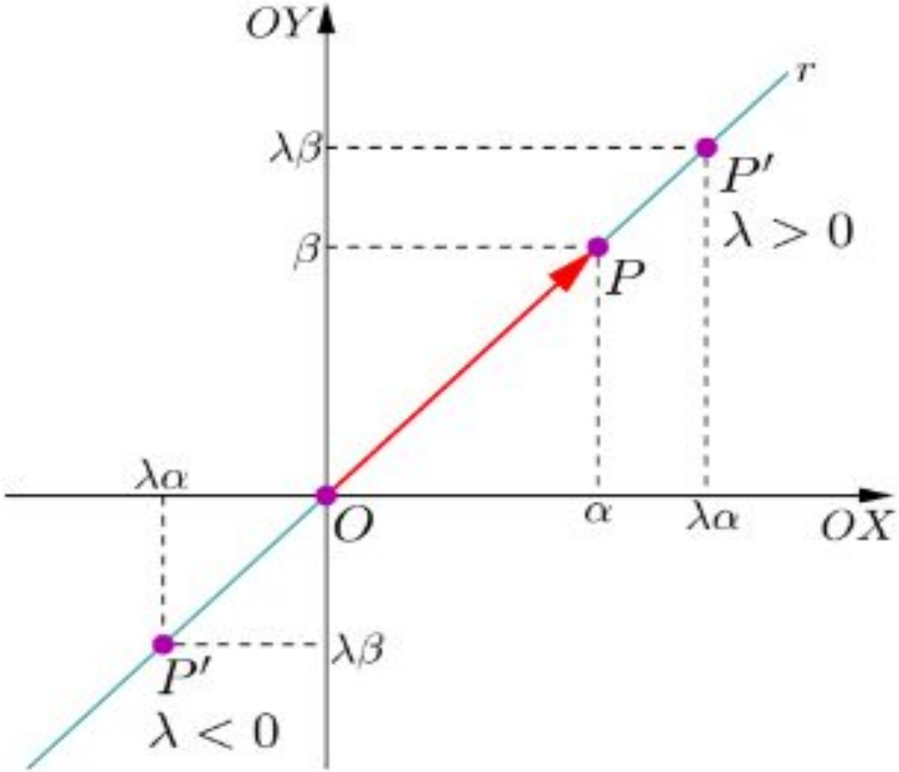


Figura 22: Coordenadas dos vetores $\vec{v} = \vec{OP}$ e $\lambda\vec{v} = \vec{OP'}$.

Observação

Note que,

- $\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$.

Proposição

Um ponto P pertence a reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Pela definição de multiplicação do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo número real λ, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence a reta r.

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente a reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$.

Se o sentido de percurso de A para P, ao longo de r, coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.

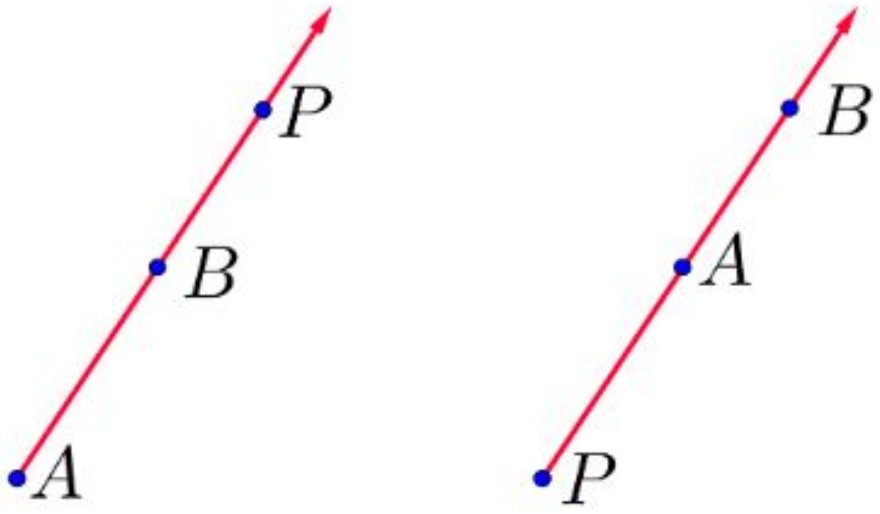


Figura 23: Sentido de percurso de A para B.

Se o sentido de percurso, ao longo de r, de A para P for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois, pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A oposta a semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A, P) = \mu(A, B)$. $\blacksquare$

Exemplo 3

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, determine

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\,.$$

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \\
&= 2(1,-1) + (3,1) \\
&= (2(1), 2(-1)) + (3,1) \\
&= (2,-2) + (3,1) \\
&= (2+3, -2+1) \\
&= (5,-1)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} \\
&= (1,-1) + 2(3,1) \\
&= (1,-1) + (2(3), 2(1)) \\
&= (1,-1) + (6,2) \\
&= (1+6, -1+2) \\
&= (7,1)\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{c} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \\
&= \frac{1}{2}(7,1) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5,-1) \\
&= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right) \\
&= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

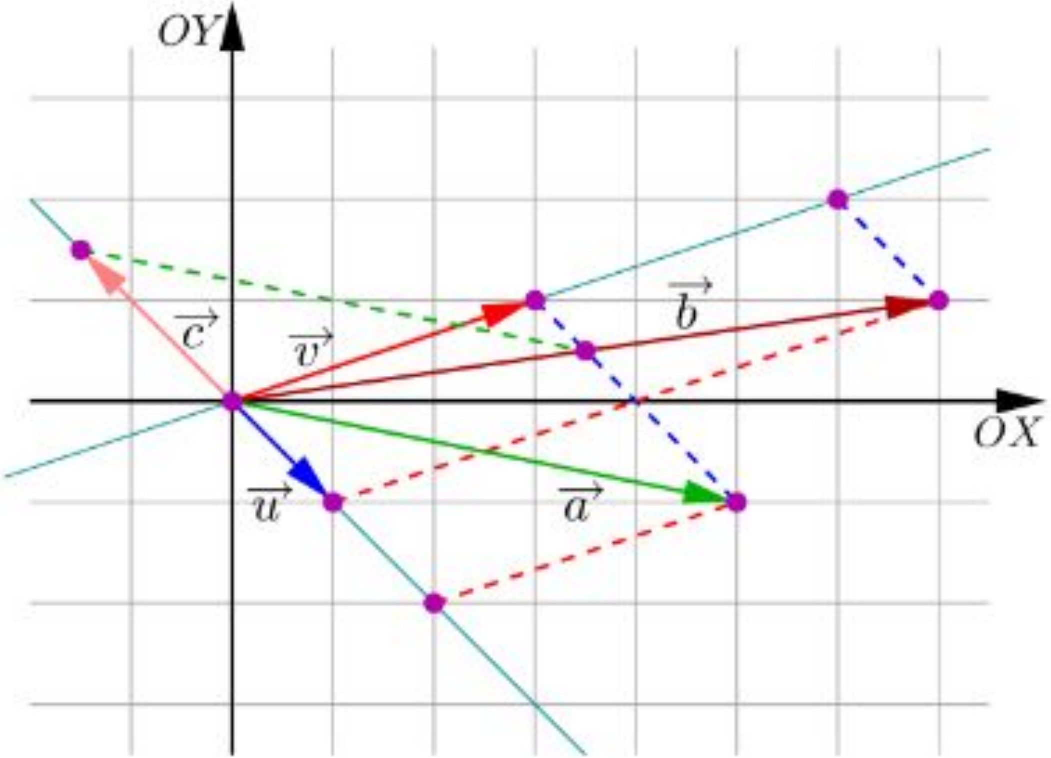


Figura 24: Exemplo 3.

Exemplo 4

Dados os pontos do plano $A = (1, 3)$ *e* $B = (6, 1)$.

(a) *Calcule o ponto médio* C *do segmento* AB *utilizando a multiplicação de um vetor por um número real.*

(b) *Determine os pontos* D *e* E *que dividem o segmento* AB *em três partes iguais.*

Solução.

(a) Para isto basta notar que

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.}$$

Assim, se $C = (x, y)$ temos:

$$(x - 1, y - 3) = \frac{1}{2}(5, -2) = \left(\frac{5}{2}, -1\right),$$

então:

$$\begin{cases} x - 1 & = & \dfrac{5}{2} \\ y - 3 & = & -1 \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ e } y = 2.$$

Portanto,

$$C = \left(\frac{7}{2}, 2\right).$$

(b) Note que:

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

Assim, se $D = (x, y)$ e $E = (z, w)$ temos:

$$(x-1, y-3) = \frac{1}{3}(5, -2) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$(z-1, w-3) = \frac{2}{3}(5, -2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

então:

$$\begin{cases} x - 1 &= \dfrac{5}{3} \\ y - 3 &= -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ e } y = \frac{7}{3}$$

e

$$\begin{cases} z - 1 &= \dfrac{10}{3} \\ w - 3 &= -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Longrightarrow z = \frac{13}{3} \text{ e } w = \frac{5}{3}$$

Portanto, $D = \left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$ e $E = \left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$. $\square$

Observação

O método utilizado para resolver o exemplo acima pode ser generalizado da seguinte maneira: dado um segmento AB, os pontos $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais são dados por:

$$\boxed{\overrightarrow{AP_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}, k = 1, \cdots, n-1.}$$

Propriedades das operações com vetores

Propriedades da adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

- **Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associatividade:** $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
- **Existência de elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\overrightarrow{0}$ é tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, que designamos $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

- De fato, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se D é o outro vértice do paralelogramo $ABCD$, então $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Logo,

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u}.$$

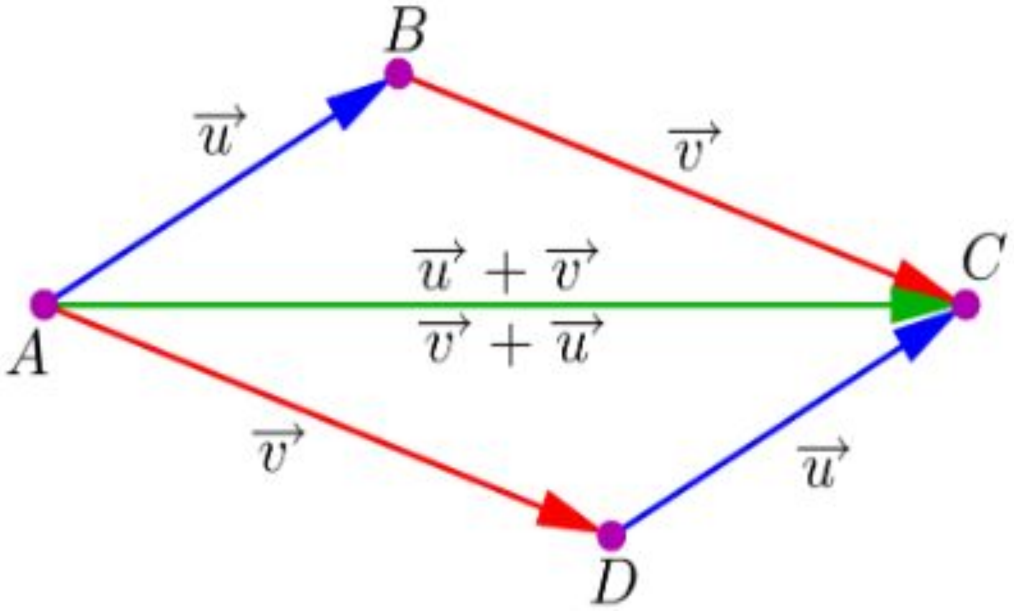


Figura 25: Comutatividade da adição de vetores.

- A associatividade da adição de vetores se verifica de maneira análoga.

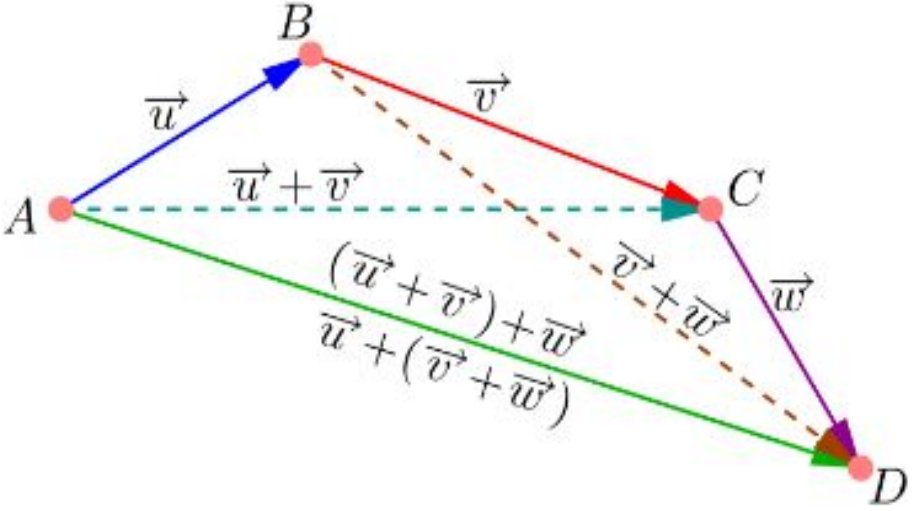


Figura 26: Associatividade da adição de vetores.

Quanto às outras duas propriedades, observe que:

- se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, sendo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u},$$
$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

- o **simétrico** ou **inverso aditivo** do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$, pois

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0},$$
$$-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}.$$

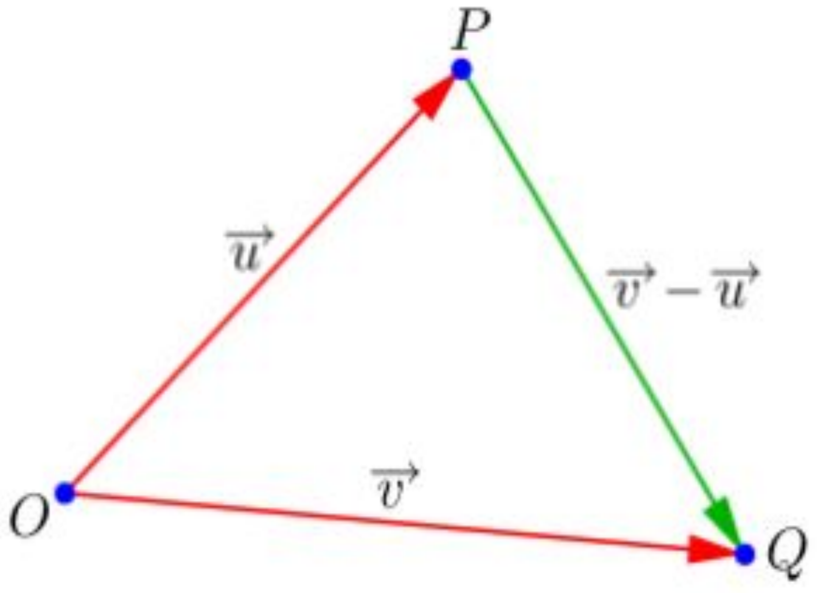
Observação

O **vetor simétrico** $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $(-1)\overrightarrow{u}$, pois se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ é o vetor $\overrightarrow{u}$ dado em coordenadas, então:

$$\overrightarrow{BA} = (-\alpha, -\beta) = (-1)(\alpha, \beta) = (-1)\overrightarrow{AB}.$$

Definição (

O vetor $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, escrito $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, é chamado **diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$**.



Sejam A, B, C pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.
\end{aligned}
$$

Propriedades da multiplicação de números reais por vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

- **Propriedades distributivas:** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ e $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

As propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e a propriedade distributiva que já conhecemos nos números reais.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, então, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= \lambda\left[(a, b) + (a', b')\right] = \lambda(a + a', b + b') \\ &= (\lambda(a + a'), \lambda(b + b')) = (\lambda a + \lambda a', \lambda b + \lambda b') \\ &= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a, b) + \lambda(a', b') \\ &= \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}\,. \end{aligned}$$

A outra propriedade distributiva se verifica da mesma forma (faça-o!).

Combinação linear de vetores

Definição

(a) Dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é **múltiplo** do vetor $\overrightarrow{u}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$.

(b) Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ quando existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tais que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n.$$

Em relação a esta definição, observe que:

- O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\overrightarrow{u}$.

De fato, $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

- Nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor nulo.

De fato, se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$, pois $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, então $\overrightarrow{u}$ é também múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Logo $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

• Note que dizer que $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ significa que $\overrightarrow{v}$ é soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$.

A seguinte proposição fornece uma maneira para determinar quando dois vetores são, ou não, múltiplo um do outro.

Proposição

Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0\,.$$

Prova.

$(\Longrightarrow)$ Suponha que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, temos:

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \Longrightarrow a' = \lambda a$$

e

$$b' = \lambda b \Longrightarrow ab' - ba' = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos agora que $ab' - ba' = 0$.

Caso $a = 0$: Se $a = 0$, então $ba' = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $a' = 0$. Logo:

$$\begin{cases} \bullet \quad b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v}. \\ \\ \bullet \quad a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \Longrightarrow (0, b') = \dfrac{b'}{b}(0, b) \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u}. \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$: Se $a \neq 0$, temos $ab' - ba' = 0 \Longrightarrow b' = b\dfrac{a'}{a}$. Logo:

$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a, b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a', b') = \overrightarrow{v}.$$

Portanto, em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro. ■

Exemplo

Determine se os vetores $\overrightarrow{u} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,6)$ são múltiplos um do outro.

Solução.

Temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Portanto, um vetor é múltiplo do outro.

Note que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$. $\square$

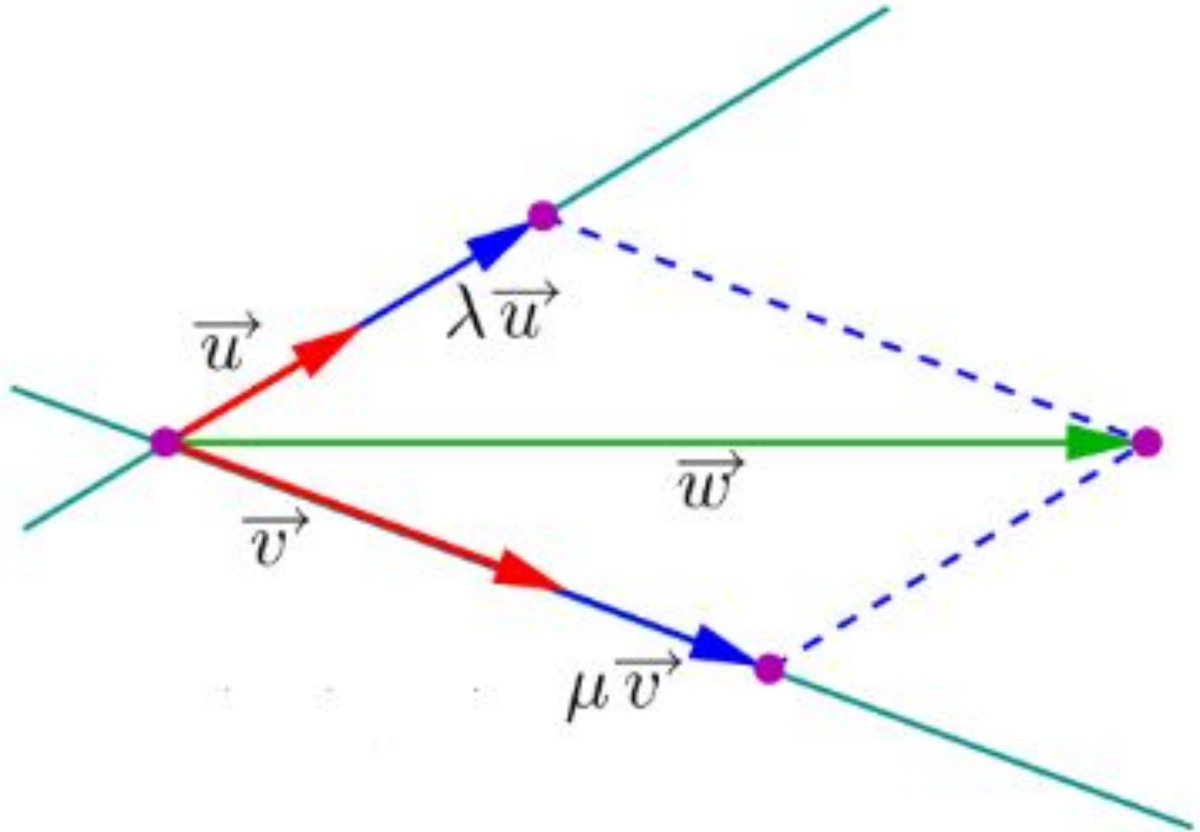
Proposição

Se nenhum dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor $\overrightarrow{w}$ do plano se escreve de modo único como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto é, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinados de forma única por $\overrightarrow{w}$, tais que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (a', b')$ e $\overrightarrow{w} = (a'', b'')$ temos, pela proposição 7, que $ab' - ba' \neq 0$.

Vamos determinar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de modo que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.


$\overrightarrow{u}$
$\lambda\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{v}$
$\mu\overrightarrow{v}$

Em coordenadas, esta condição equivale a

$$\begin{aligned}(a'', b'') &= \lambda(a, b) + \mu(a', b') \\ &= (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b').\end{aligned}$$

Ou seja, os números λ e μ devem ser soluções do sistema:

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = a'' \\ \lambda b + \mu b' = b''. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Ou seja, os números λ e μ existem e são determinados de forma única. ■

Observação

O plano é bidimensional (de dimensão 2).Isso significa que basta conhecer **dois** vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, que não sejam múltiplos um do outro, para conhecer todos os outros vetores do plano. De fato, pela proposição anterior, qualquer outro vetor se expressa de forma única como combinação linear destes dois vetores.

Exemplo

Verifique que qualquer vetor do plano se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (-3,2)$, e escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (1,1)$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Solução.

- Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos um do outro. Pela proposição anterior, qualquer outro vetor se escreve de maneira única como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

- Dado o vetor $\overrightarrow{w} = (1,1)$, devemos achar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, vemos que:

$$(1,1) = \lambda(2,-1) + \mu(-3,2) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1\,. \end{cases}$$

Os números λ e μ que resolvem este sistema são:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 - (-3) \times 1}{1} = 2 + 3 = 5$$

e

$$\mu = \frac{2 \times 1 - 1 \times (-1)}{1} = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. □

Produto interno de dois vetores

Vamos agora definir um novo tipo de multiplicação. Os fatores desta nova operação são vetores e o produto é um número real.

Começamos com a seguinte definição:

Definição

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o número real não negativo:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B).}$$

Observe que a norma de um vetor é um número bem definido, isto é, depende apenas do vetor e não do segmento orientado escolhido para representá-lo.

De fato, se

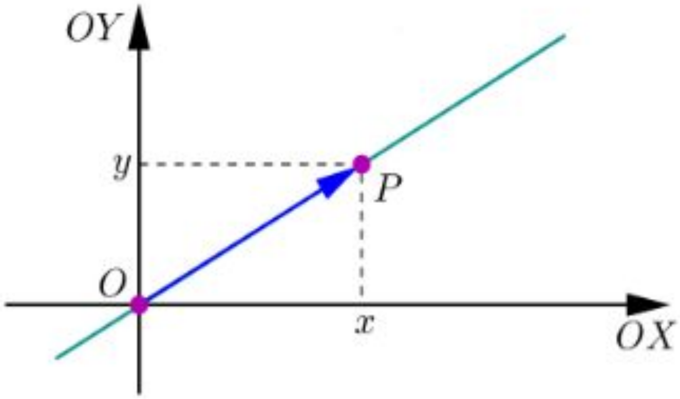
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow AB \equiv CD \Longrightarrow d(A, B) = d(C, D).$$

Ou seja, a norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ se calcula usando qualquer segmento representante.

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais OXY.

Se $\overrightarrow{v} = (x, y) = \overrightarrow{OP}$, então $P = (x, y)$ e

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$



Quando $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é um **vetor unitário.**

Observação

Se $\overrightarrow{v} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$. De fato, como $\lambda\,\overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y)$,

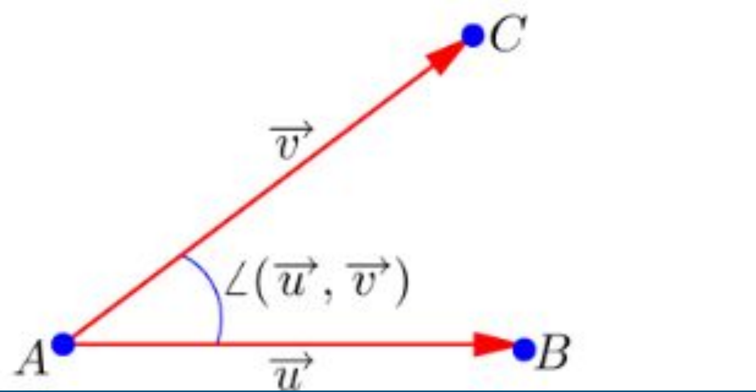
então:

$$\begin{aligned} \|\lambda\,\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{\lambda^2x^2 + \lambda^2 + y^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|. \end{aligned}$$

Definição

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *vetores no plano.*

O **ângulo** *entre* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, *designado* $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *é o menor ângulo formado pelos segmentos* AB *e* AC.



Observação

Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo, então $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$. Com efeito,

$$\left\|\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right| \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \|\overrightarrow{v}\| = 1.$$

Além disso, como

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\| \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

e $\|\overrightarrow{v}\| > 0$, temos que $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Assim, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos,

$$\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Definição

O **produto interno** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real, que designamos por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{c} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0\,, \quad \text{se} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = 0 \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta\,, \quad \text{se} \quad \overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0 \quad \text{e} \quad \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}}$$

Proposição

Sejam $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ dois vetores no plano. Então,

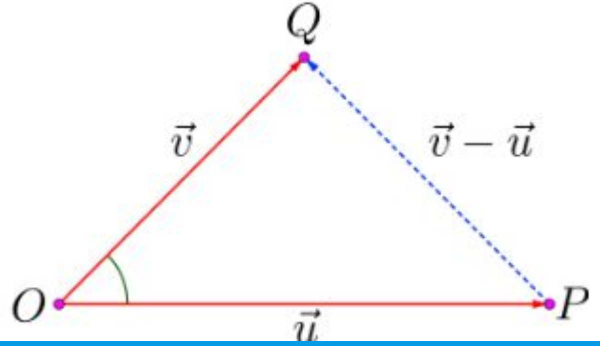
$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'}$$

Prova.

Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ são vetores nulos, a identidade acima verifica-se, pois, neste caso, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, então $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ e

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \\
&= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\
&= \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \\
&= (\alpha' - \alpha, \beta' - \beta).
\end{aligned}$$



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔOPQ, temos:

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta\,,$$

onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Desta identidade, obtemos:

$$\begin{aligned}
2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \\
&= (\alpha^2 + \beta^2) + ((\alpha')^2 + (\beta')^2) - ((\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2) \\
&= \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - ((\alpha')^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 \\
&+ (\beta')^2 - 2\beta'\beta + \beta^2) \\
&= \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha')^2 + (\beta')^2 - (\alpha')^2 + 2\alpha'\alpha - \alpha^2 \\
&- (\beta')^2 + 2\beta'\beta - \beta^2 \\
&= 2\alpha'\alpha + 2\beta'\beta \\
&= 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, como queríamos demonstrar. $\blacksquare$

Com a expressão do produto interno em coordenadas, fica fácil provar as seguintes propriedades.

Proposição

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$

(2) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(4) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(6) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

(7) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

Definição

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** a $\overrightarrow{v}$ se $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^o$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Se $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

Muito obrigado!