Vetores no Plano

Ex.1 Verifique se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação e justifique sua resposta:

a) (**V**) $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Descrevendo a expressão algébrica por partes temos:

- ❏ $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$ são seguimentos de reta orientados.
- ❏ O $\equiv$ indica que os seguimentos são equipolentes, ou seja possuem mesma direção, sentido e comprimento.
- ❏ $\iff$ indica que possuem uma relção onde a expressão da direita ocorre "se somente se" a expressão da esquerda também ocorrer.
- ❏ $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são vetores onde os pontos AB possuem origem A e destino B e os pontos CD possuem origem C e destino D
- ❏ $=$ indica igualdade entre os vetores, ou seja que possuem mesma medida ou comprimento.

Portanto podemos dizer que os seguimentos de reta orientados $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$ são equipolentes se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ são iguais.

b) (**F**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies A = C\ e\ B = D$.
Descrevendo a expressão algébrica por partes temos:

- ❏ $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam vetores. $\overrightarrow{AB}$ é o vetor que aponta do ponto A para o ponto B enquanto $\overrightarrow{CD}$ é o vetor que aponta do ponto C para o ponto D.
- ❏ $=$ indica igualdade entre vetores. Assim a expressão $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ indica que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equivalentes tendo a mesma direção, sentido e magnitude.
- ❏ $\implies$ é um símbolo utilizado para denotar um implicação. Nesse caso indica que se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então ocorre que $A = C\ e\ B = D$.

Portanto não é correto afirmar que a igualdade entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ inplica que o ponto A é igual ao ponto C ou que o ponto B é igual ao ponto D .

c) (**F**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overline{AB} = \overline{CD}$.
Descrevendo a expressão algébrica por partes temos:

- ❏ $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ representam vetores, onde $\overrightarrow{AB}$ é um vetor que aponta do ponto A para o ponto B e o vetor $\overrightarrow{CD}$ é um vetor que aponta do ponto C para o ponto D.

- $=$ indica igualdade entre vetores. Assim a expressão $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ indica que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equivalentes tendo a mesma direção, senido e magnitude.
- $\Longrightarrow$ é um símbolo utilizado para denotar um implicação. Nesse caso indica que se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então ocorre que os segmentos de reta orientados $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$ também são equivalentes.

Portanto a não é correto afirmar que a igualdade entre os vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ inplica na igualdade entre os seguimentos de reta orientados de $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$.

d) (**F**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow AC \cap BD = \varnothing$.
Descrevendo a expressão algébrica por partes temos:

- $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ representam vetores, onde $\overrightarrow{AB}$ é um vetor que aponta do ponto A para o ponto B e o vetor $\overrightarrow{CD}$ é um vetor que aponta do ponto C para o ponto D.
- $=$ indica igualdade entre vetores. Assim a expressão $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ indica que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equivalentes tendo a mesma direção, senido e magnitude.
- $\Longrightarrow$ é um símbolo utilizado para denotar um implicação.
- $AC \cap BD = \varnothing$ representa que a interseção entre AC e BD é um conjunto vazio.

Portanto a não é correto afirmar que a igualdade entre os vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ implica que não pode haver interseção entre os pontos $AC\ e\ BD$, pode haver casos em que esses segmentos de reta se cruzam, mesmo que os vetores sejam iguais.

e) (**F**) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Descrevendo a expressão algébreca por partes temos:

- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ representa a igualdade entre os modulos do vetor $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$, ou seja a igualdade entre as **magnitudes** dos dois vetores.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ indica que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equivalentes tendo a mesma direção, senido e **magnitude**.

Portanto não é correto afirmar que a igualdade entre as magnitudes dos vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$, representa a igualdade entre os mesmos, já que eles podem possuir ainda a direção e/ou sentido distintos.

f) (**V**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.
Decompondo a expressão algébrica temos:

- ❏ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ aqui temos igualdade entre os vetore os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.
- ❏ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ aqui temos representada a igualdade entre as magnitudes dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

Portanto é correto afirmar que a igualdade entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ indica que possuem mesma magnitude.

g) (**F**) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então existe um único plano contendo $A,\ B,\ C\ e\ D$.

- ❏ A afirmação diz que a igualdade entre dois vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$, é correto afirmar que existe um único plano entre os ponto $A,\ B,\ C\ e\ D$.

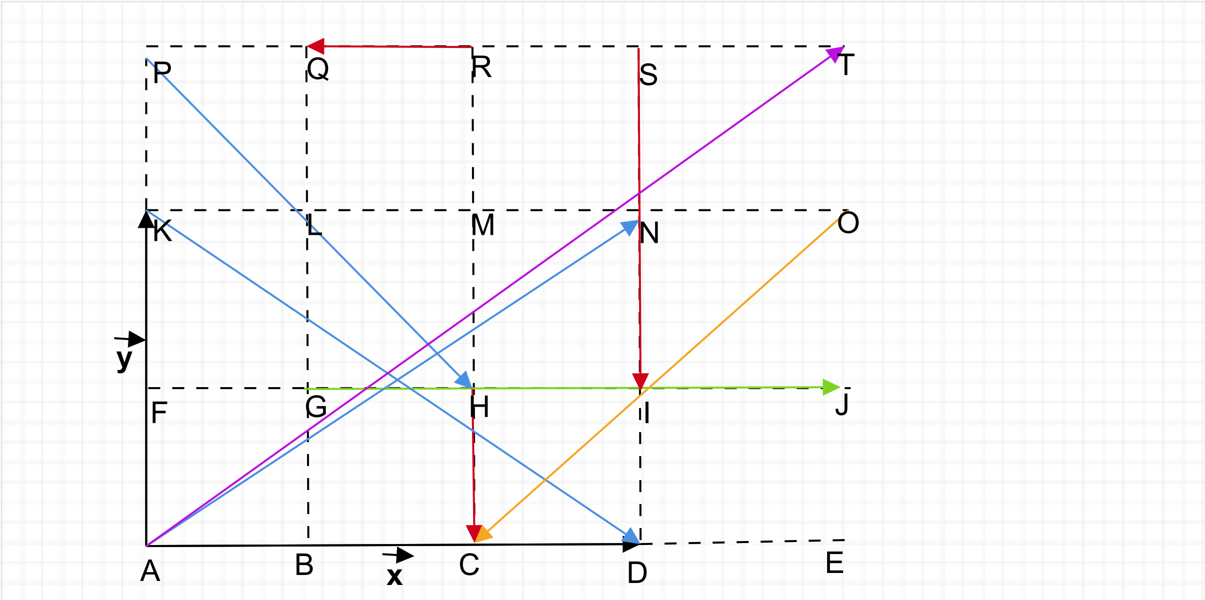
Essa afirmação só é correta se pontos forem coplanares.
Se os pontos são colineares (ou seja, todos estão em uma única linha reta), então há infinitos planos que podem conter esses pontos.
Quando os pontos estão em uma linha reta, qualquer plano que contenha essa linha reta será adequado para conter todos esses pontos. No entanto, há infinitos planos possíveis que podem ser construídos nessa situação. Isso ocorre porque um plano pode ser posicionado de várias maneiras ao longo da linha reta e ainda conter todos os pontos.
Portanto, se os pontos forem colineares, há mais de um plano possível que os contenha.
Cada um desses planos contém todos os pontos, mas eles podem ser diferentes em sua orientação ou localização relativa ao espaço tridimensional.

h) (**V**) $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \implies |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.
Decompondo essa expressão algébrica temos:

- ❏ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ aqui temos que o seguimento de reta orientado $\overline{AB}$ é equipolente ao seguimento de reta $\overline{CD}$.
- ❏ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ aqui temos que os modulos dos vetores $|\overrightarrow{AB}|$ e $|\overrightarrow{CD}|$ possuem mesma magnitude.

Portanto é correto afirmar que sequimentos de reta orientados equipolentes entre si, possuem vetores de mesma magnitude.

Ex.2 Na figura abaixo, todos os paralelogramos menores são congruentes. Sendo $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{AK} = \vec{y}$, escreva os vetores $\overrightarrow{GJ},\ \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{SI},\ \overrightarrow{HC},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{KD},\ \overrightarrow{PH},\ \overrightarrow{AT}\ e\ \overrightarrow{OC}$ em função de $\vec{x}\ e\ \vec{y}$.

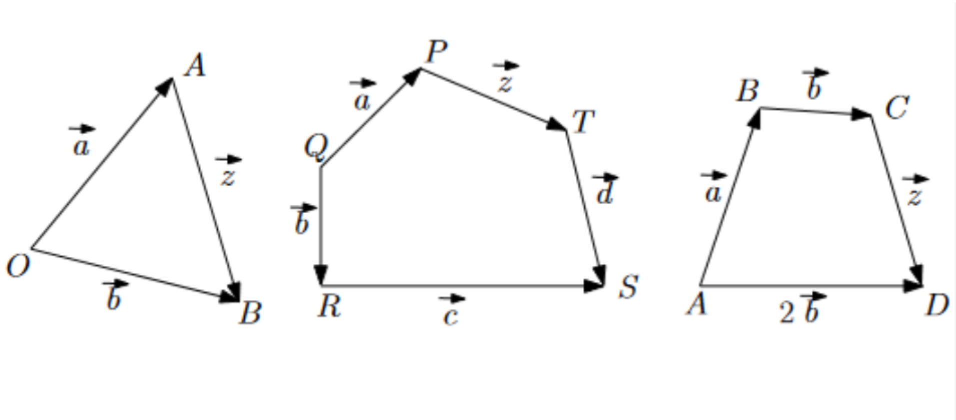


- ❑ Sendo todos os paralelogramos menores são congruentes, ou seja de mesma forma e tamanho.
- ❑ Temos que $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{AK} = \vec{y}$.

Podemos definir os vetores em função de $\vec{x}\ e\ \vec{y}$, da seguinte maneira:

1. $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AD} = \vec{x}$
2. $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{x}$
3. $\overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{AK} = -\vec{y}$
4. $\overrightarrow{HC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\vec{y}$
5. $\overrightarrow{AN} = \vec{x} + \vec{y}$
6. $\overrightarrow{KD} = \vec{x} - \vec{y}$
7. $\overrightarrow{PH} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$
8. $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$
9. $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{x} - \vec{y}$

Ex.3 Em cada uma das figuras abaixo, escreva o vetor $\vec{z}$ em função dos dema

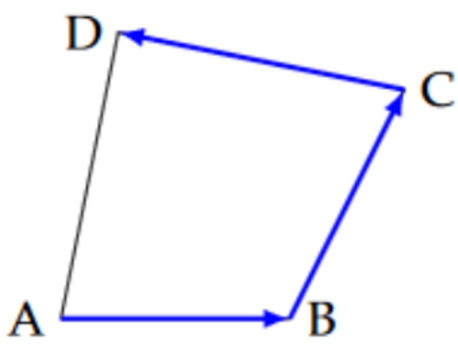


Primeira figura:
$\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b}$

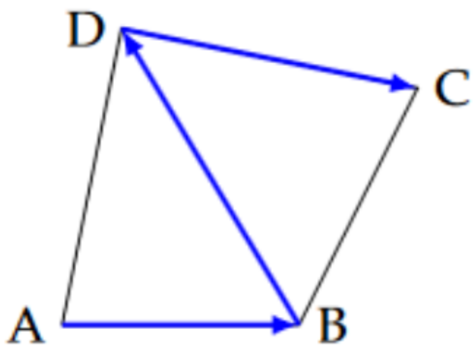
Segunda figura:
$\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$

Terceira figura:
$\vec{z} = -\vec{a} + \vec{b}$

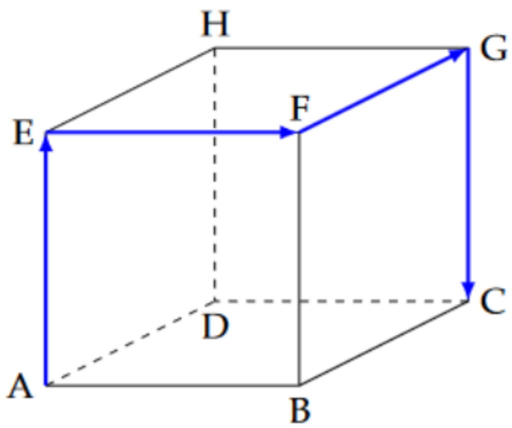
Ex.4 Ache a soma dos vetores indicados em cada uma das figuras abaixo:



A soma de $A\cancel{B} + \cancel{B}\cancel{C} + \cancel{C}D$ é AD

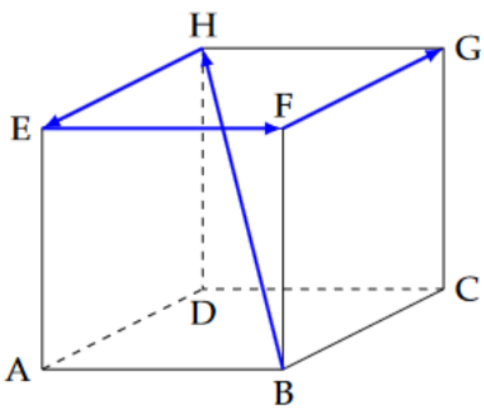


A soma de $A\cancel{B} + \cancel{B}\cancel{D} + \cancel{D}C$ é AC



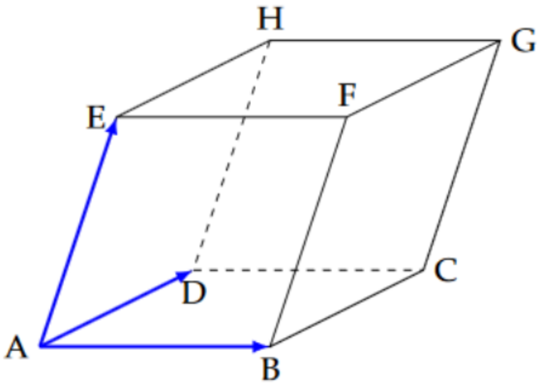
Cubo

A soma de $A\cancel{E} + \cancel{E}\cancel{F} + \cancel{F}\cancel{G} + \cancel{G}C$ é AC



Cubo

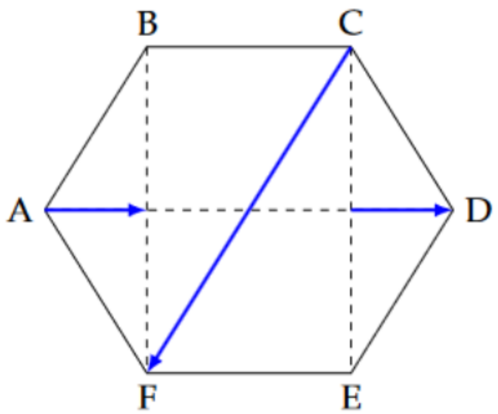
A soma de $B\cancel{H} + \cancel{H}\cancel{E} + \cancel{E}\cancel{F} + \cancel{F}G$ é BG



Paralelepípedo

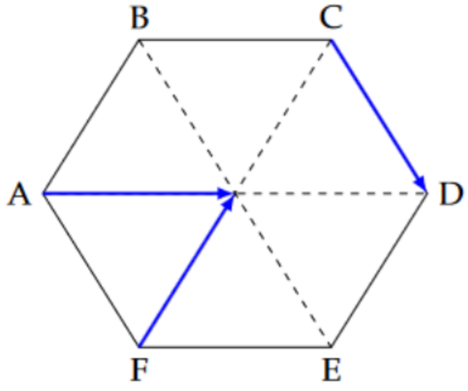
A soma de $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ é $\overrightarrow{AG}$ onde:

Isolando $\overrightarrow{AB}$ e correlacionamos os demais vetores temos que:
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}\ e\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$. Sendo assim temos que
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ é o mesmo que $\overrightarrow{\cancel{B}\cancel{F}} + \overrightarrow{\cancel{F}G} + \overrightarrow{A\cancel{B}}$ que é $\overrightarrow{AG}$



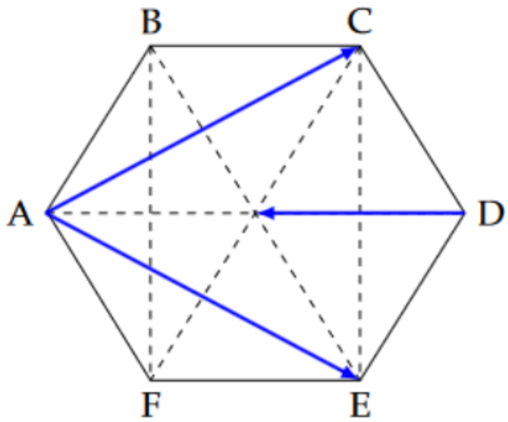
Hexágono regular

A soma de $\overrightarrow{\cancel{F}E} + \overrightarrow{C\cancel{F}}$ é $\overrightarrow{CE}$ onde a soma soma dos dois vetores menores possui o mesmo tamanho que $\overrightarrow{FE}$.



Hexágono regular

A soma de $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$ é AD onde $\overrightarrow{FO}$ tem o mesmo tamanho que $\overrightarrow{OC}$.



Hexágono regular

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DO}$

Temos que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OD}$

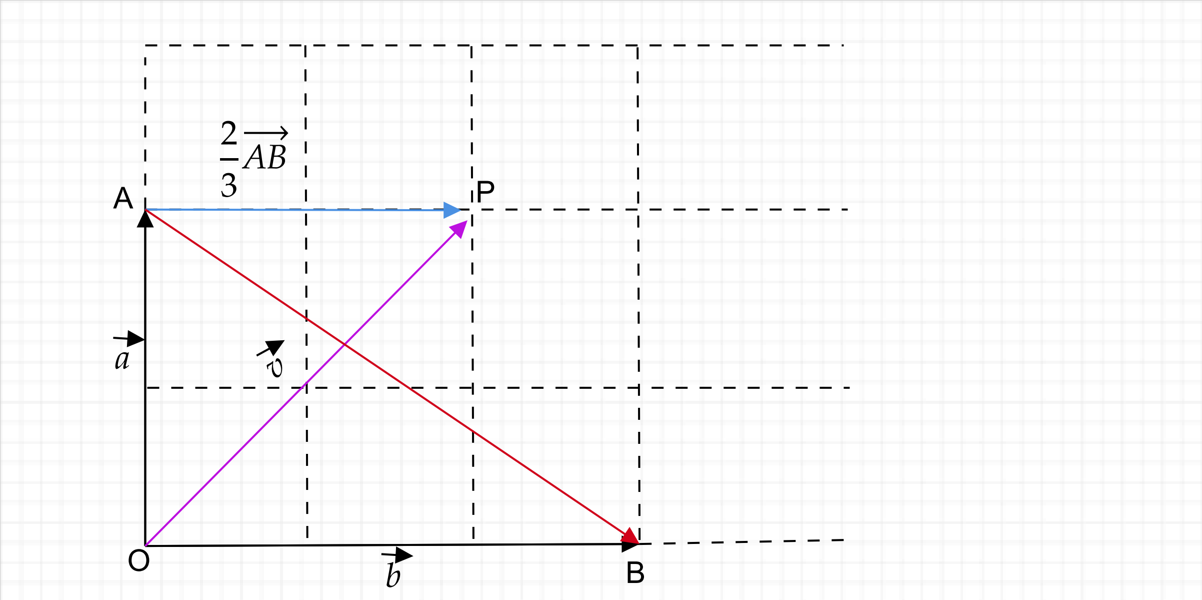
Ficando:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DO}$

Onde: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$

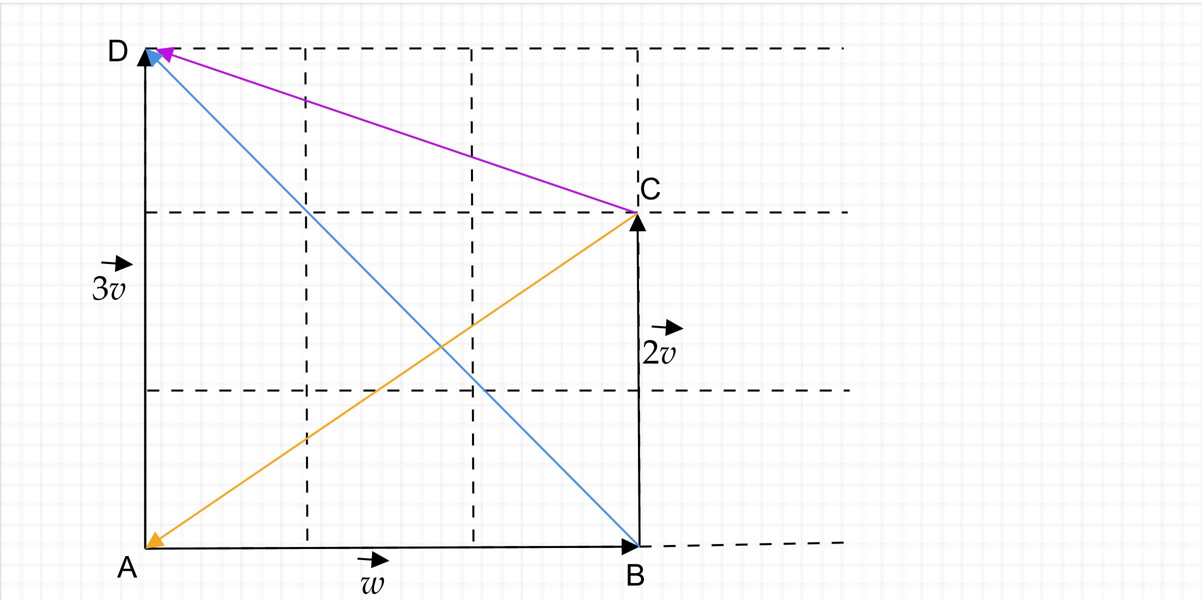
Ex. 5 Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ dois vetores não paralelos escreva $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

Ex.6 Considere um quadrilátero $ABCD$, onde $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$. Que tipo de

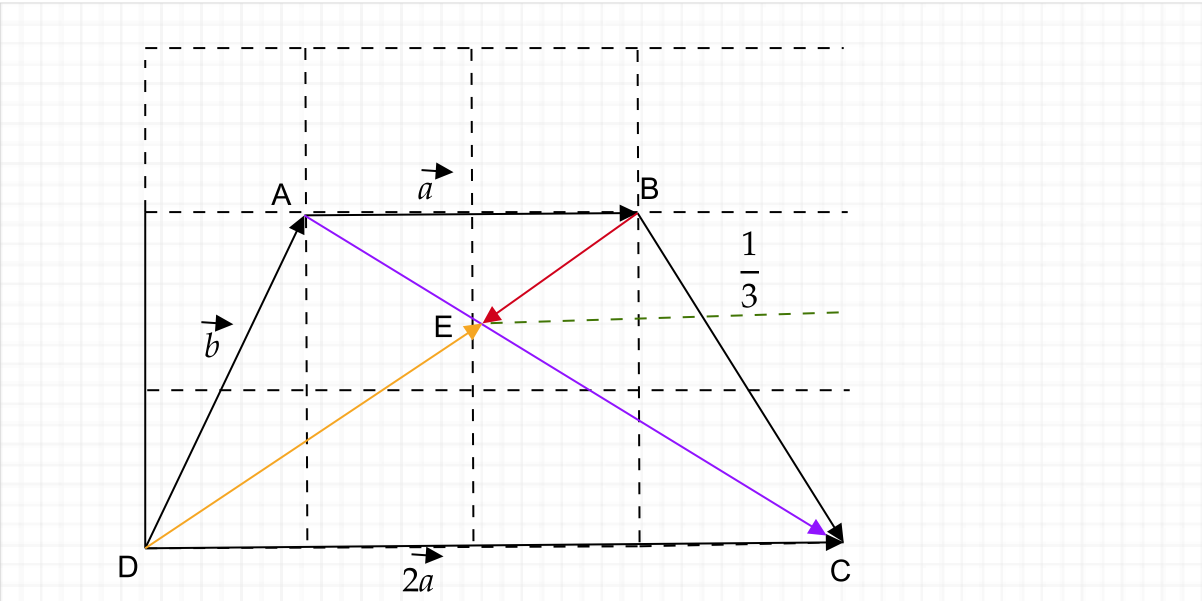
quadrilátero é $ABCD$? Determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Que tipo de quadrilátero é $ABCD$?
$ABCD$ forma um trapezio retangulo.

$\overrightarrow{CD} = \vec{v} - \vec{w}$
$\overrightarrow{BD} = 3\vec{v} - \overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{CA} = 2\vec{v} - \vec{w}$ *ver com o professor a divergência quanto a resolução da lista.

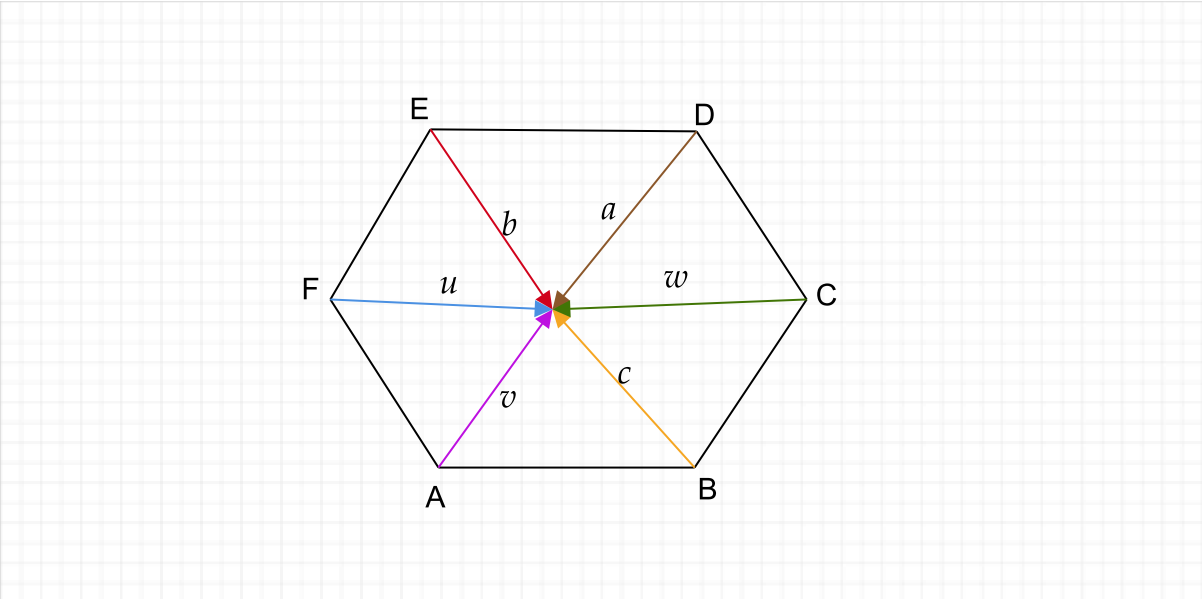
Ex.7 Considere um trapézio ABCD, onde $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{a}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$. O ponto E é tal que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Escreva $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DE}$ em função de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$$
$$= 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

Ex.8 Calcule a soma de seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.



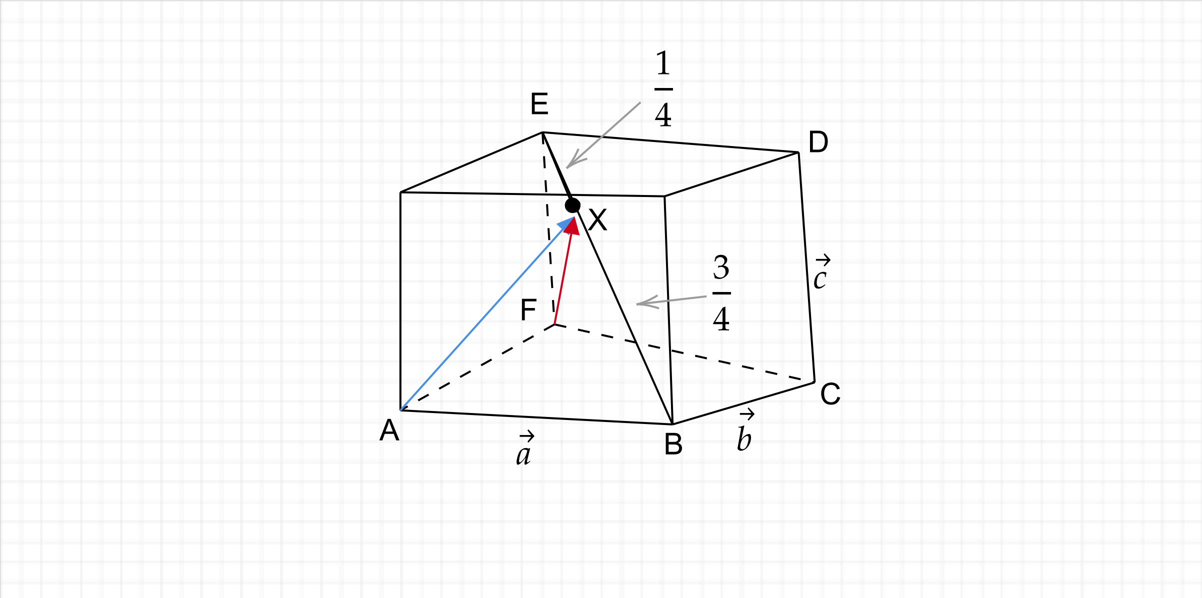
Soma dos vetores:
$\vec{v} + \vec{c} + \vec{w} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{u}$

Podemos realizar a soma dos vetores, podemos perceber que, todos os vetores possuem mesma magnitude e direção, porém temos pares de vetores com sentidos contrários, dessa forma podemos simplificar da seguinte maneira:

$\vec{v} + \vec{a} = \vec{0}$
$\vec{c} + \vec{b} = \vec{0}$
$\vec{w} + \vec{u} = \vec{0}$

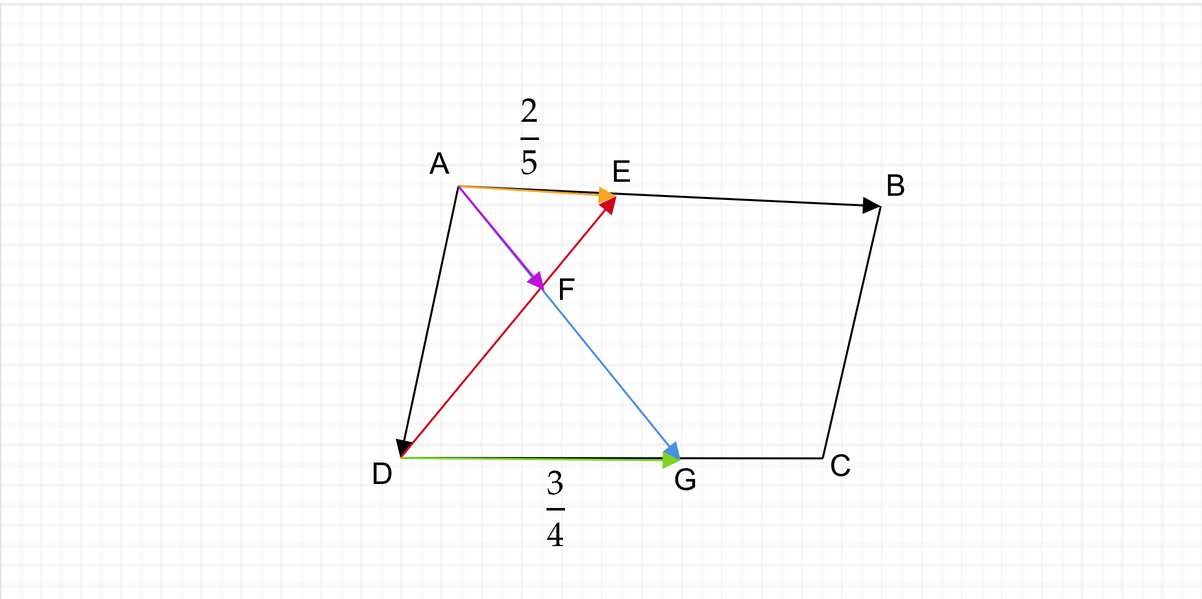
Logo:
$\vec{v} + \vec{c} + \vec{w} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{u} = (\vec{w} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{b}) + (\vec{v} + \vec{a}) = \vec{0}$

Ex.9 Dados $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}\ e\ \overrightarrow{CD} = \vec{c}$, seja X o ponto ilustrado na figura abaixo. Escreva os vetores $\overrightarrow{AX}\, e\, \overrightarrow{FX}$ em função de $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},$ sabendo que $\overrightarrow{EX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$.



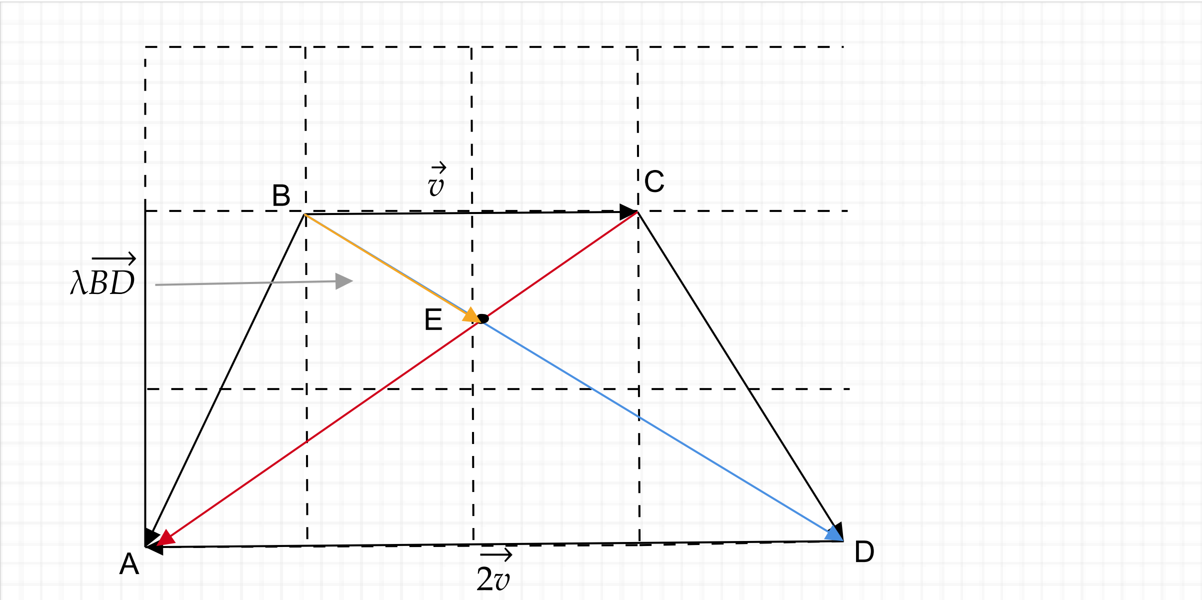
FALTA RESPONDER

Ex.10 Seja $ABCD$ um paralelogramo como na figura abaixo. Os pontos E e G são tais que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. F é o ponto de encontro de $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{DE}$. Escreva $\overrightarrow{AF}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



FALTA RESPONDER

Ex.11 No trapézio $ABCD$ com $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$, seja E o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Sendo $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$, determine λ.



Se $\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$ então AE = $\Upsilon\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$ = $\lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \lambda(-\overrightarrow{AB} + 2v)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{BA} + \Upsilon\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \Upsilon(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\\ &= (\Upsilon - 1)\overrightarrow{AB} + \Upsilon\overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{BE} = (\Upsilon - 1).\overrightarrow{AB} + \Upsilon\vec{v}\end{aligned}$$

BE = $\lambda(-\overrightarrow{AB} + 2v)$ = $(\Upsilon - 1).\overrightarrow{AB} + \Upsilon\vec{v} \implies (2\lambda + \Upsilon)\vec{v} = (\Upsilon - 1 + \lambda)\overrightarrow{AB}$
Sendo AB e v paralelos, a igualdade só será verdadeira se os lados forem nulos.
Logo:

$(2\lambda + \Upsilon)\cancel{\vec{v}} = (\Upsilon - 1 + \lambda)\cancel{\overrightarrow{AB}}$

$2\lambda + \Upsilon = 0 \implies \Upsilon = 2\lambda$

$\implies 2\lambda - 1 + \lambda = 3\lambda = 1 \implies \lambda = \dfrac{1}{3}$

Ex.12 Num triângulo ABC, faça uma figura, temos $3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PC}$ e $3\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{QA}$.

FALTA RESPONDER

Ex.13 Seja $ABCD$ um paralelogramo de diagonais $\overrightarrow{AC}\ e\ \overrightarrow{BD}$. Faça uma figura. O ponto R é tal que $3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD}$ e S é tal que $2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$.

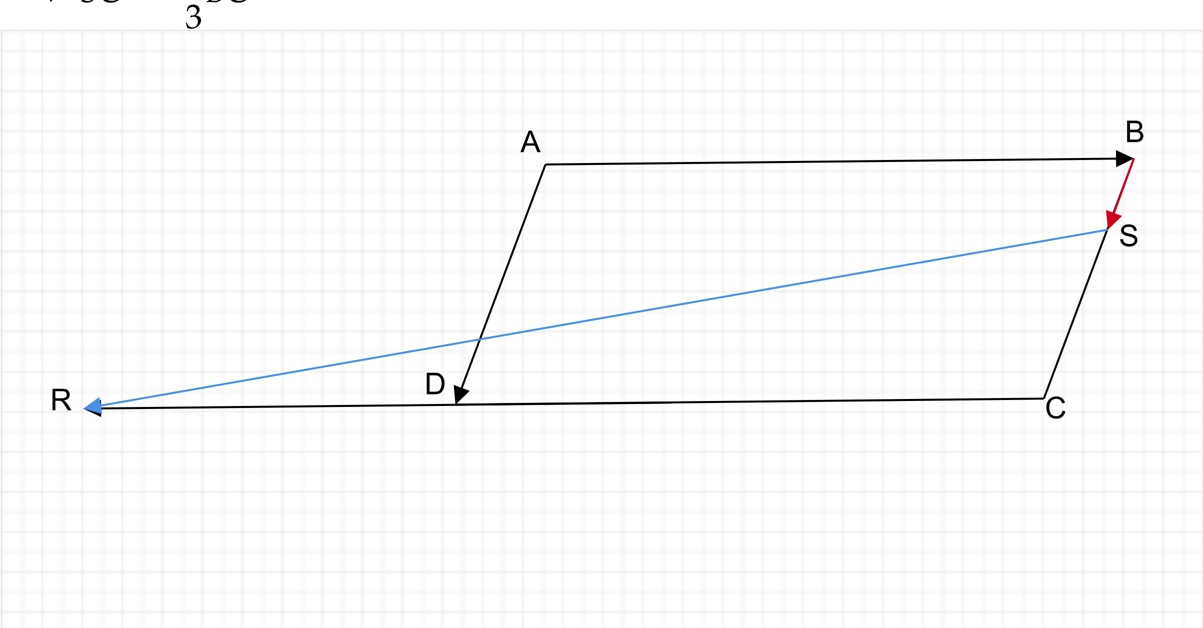
Temos então:

1. $3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD}$ isso significa que os vetores $\overrightarrow{DR}\ e\ \overrightarrow{CD}$ são colineares. Onde $\overrightarrow{CD}$ começa em C e termina em D e $\overrightarrow{DR}$ começa em D e termina em R. Sendo assim R está fora do paralelogramo.
2. $2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$ onde indica que S esta entre $\overrightarrow{BC}$, já que $\overrightarrow{BS}$ termina em $S\ e\ \overrightarrow{SC}$ começa em S.

$$3\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{DR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

$$2\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC} \implies \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BS} + 2\overrightarrow{BS} = 3\overrightarrow{BS} \implies \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\implies \overrightarrow{SC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$



a) Marque R e S na figura. OK

b) Escreva $\overrightarrow{RS}$ em função de $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{AD}$.

Sendo a figura um paralelogramo, podemos dizer que $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{CD}$ são equipolentes.
Então temos :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

onde

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CS} = -\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{SC}$$

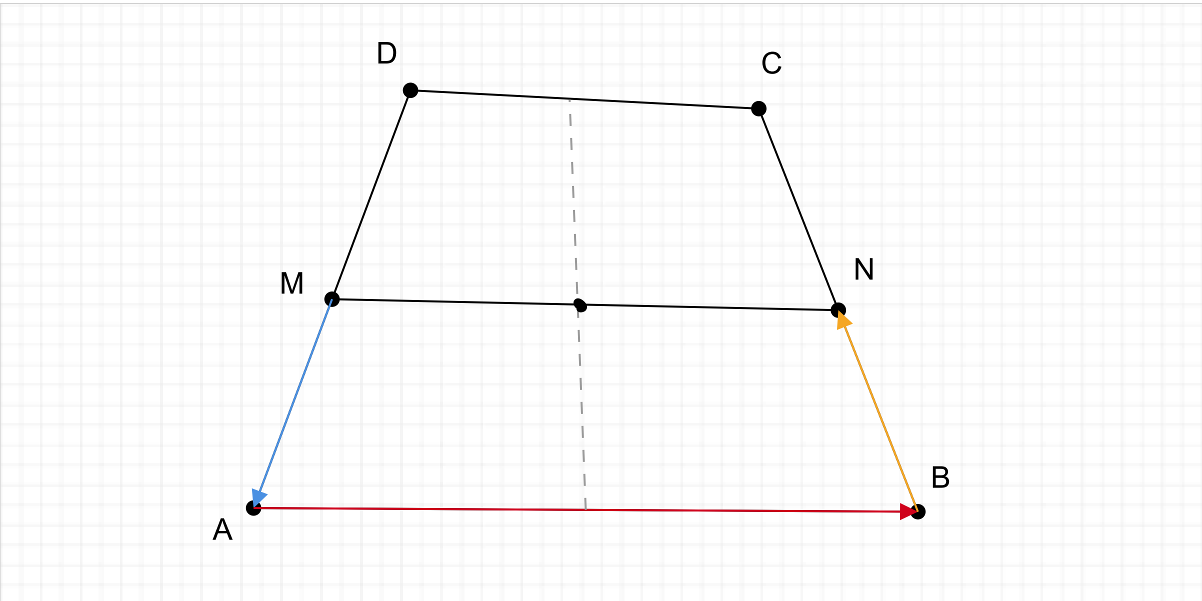
$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{SC} =$

$-\frac{5}{3}\overrightarrow{CD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Podemos definir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, sendo assim temos:

$\overrightarrow{RS} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Ex.14 Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semissoma das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

Onde:

$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

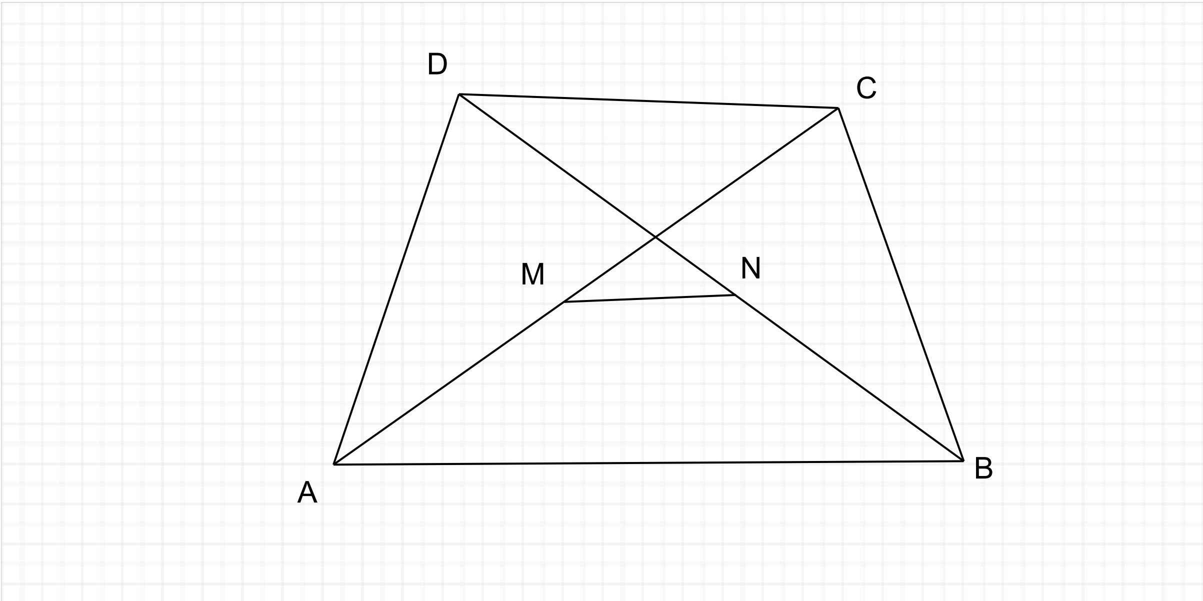
Sendo assim:

$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\cancel{\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

De modo que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos do trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semissoma das medidas das bases.

Ex.15 Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semidiferença das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante).



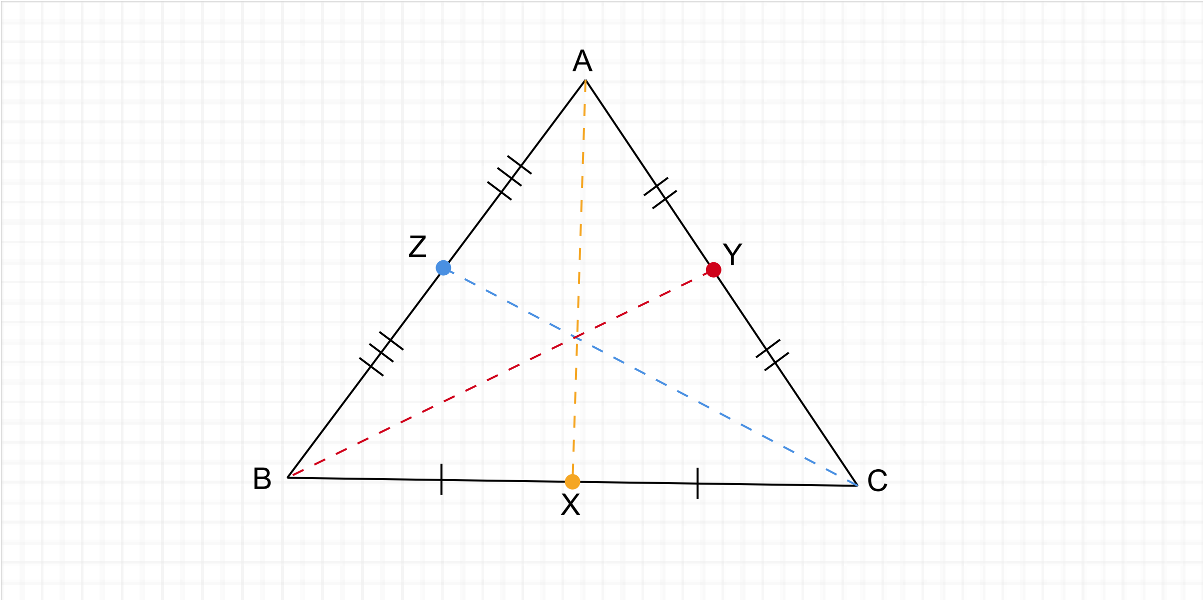
Temos que $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{DC}$ são paralelos, sendo assim o modulo da sua diferença é igual a diferença de seus modulos:

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}|$$

O modulo de $\overrightarrow{MN}$ é a semidiferença das medidas das bases do trapézio, podendo ser escrito:

$\overrightarrow{MN} = \theta\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$ sendo paralelo em ambas as bases.

Ex.16 Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que as divide na razão de 2 para 1. (O ponto de encontro das medianas chama-se baricentro do triângulo.)

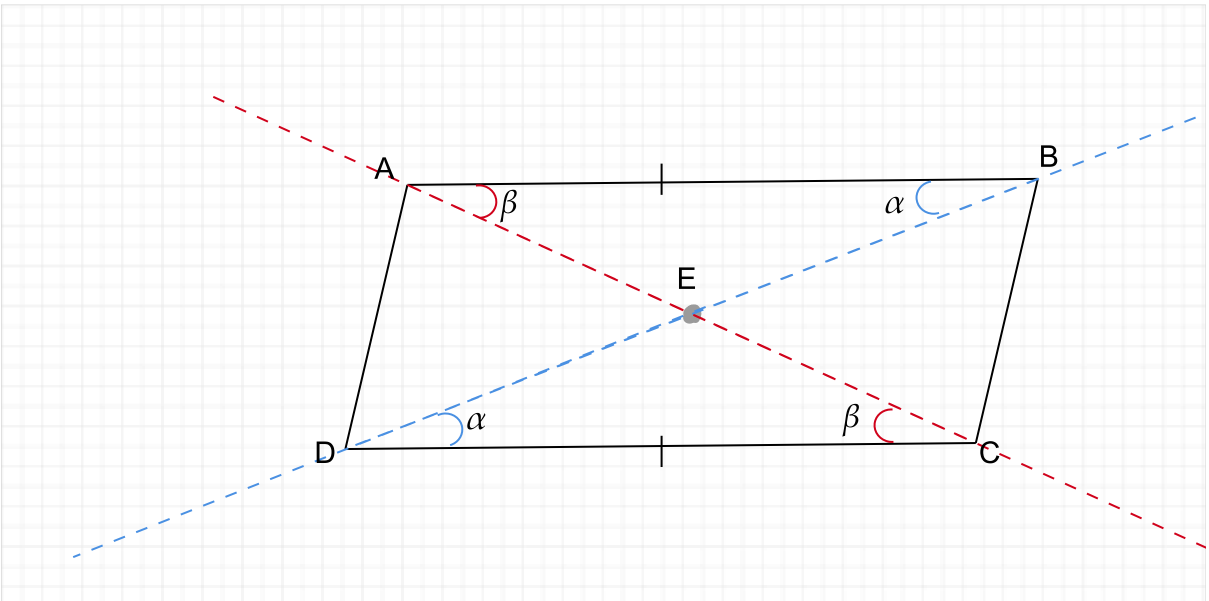


Teorema de Ceva
Se três cevianas $AX,\ BY\ e\ CZ$ satisfazem

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

então elas são concorrentes.

Ex.17 Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se cortam ao meio.

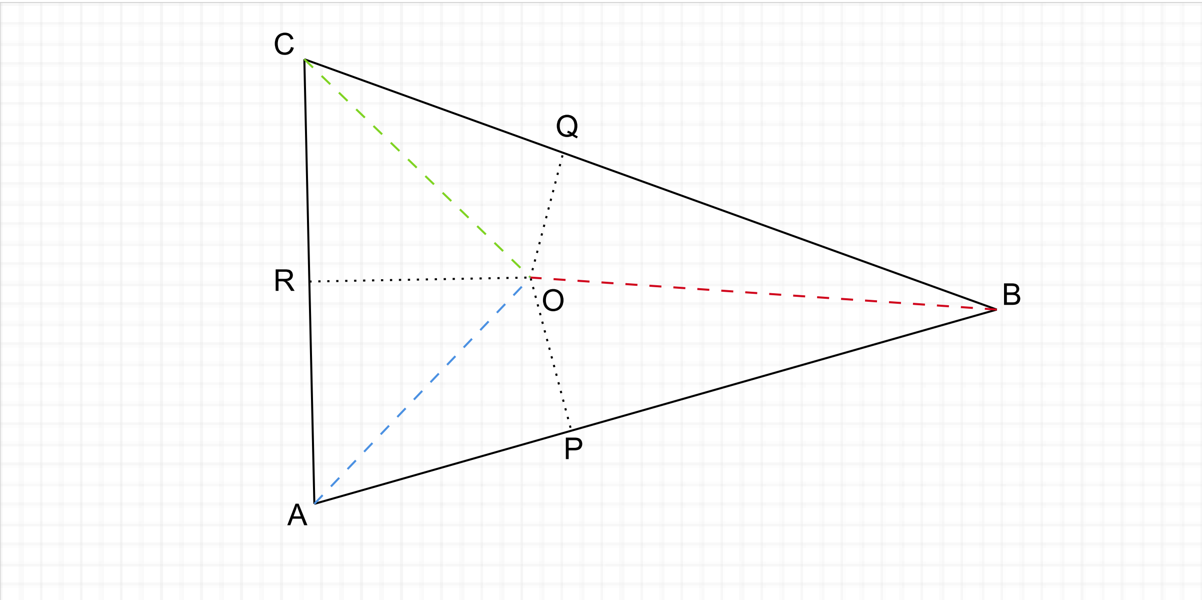


Sabendo que os lados $AB\ e\ CD$ são congruentes, que $\alpha\ e\ \beta$ são iguais temos um caso de ALA de congruência de triângulos.
Assim podemos afirmar que $BE\ e\ DE$ são congruentes. Portanto o ponto E é o ponto

medio do segmento BD. Onde podemos afirmar tembém que $AE\ e\ CE$ são congruentes. Portanto o ponto E é o ponto medio do segmento AC.
Sendo assim se o ponto E é o ponto médio de AC e BD que são as duas diagonais do paralelogramo, então podemos dizer que as duas diagonais se cortam mutuamente no meio.

Ex.18 No triângulo $ABC,\ P,\ Q\ e\ R$ são os pontos médios, respectivamente, de $AB,\ BC\ e\ AC$. O ponto O é um ponto qualquer do espaço. Demonstre que:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.
(Sugestão: escreva $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}\ e\ \overrightarrow{OR}$ em função de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\ e\ \overrightarrow{OC}$.)

Vamos primeiro desenhar o triangulo de um ponto qualquer O.



Vamos seguir a sugestão e escrever $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}\ e\ \overrightarrow{OR}$ em função de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\ e\ \overrightarrow{OC}$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Onde temos :
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Longrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = 0$$