Disciplina: Geometria Analítica (IME0345)

2^a Lista de Exercícios - 08/04/2024

Exercícios

Ex.1 Esboce $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ genérico (que não seja de mesmo tamanho ou paralelos) a sua escolha. Encontre graficamente $3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Ex.2 Mostre que os diagonais do paralelogramo cruzam no meio. Admitindo o abuso de notação, obtenha a fórmula para encontrar tal cruzamento. Discuta, porque é um abuso de notação.

Ex.3 Esboce graficamente

a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(2,1)(1,-1)}$

b) $P + \overrightarrow{v}$, onde $P = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (-1,2)$

Ex.4 Seja $A = (1,2), B = (-1,1), C = (-1,-2)$. Encontre o vetor que seja bissetriz do ângulo $\measuredangle BAC$ (vértice está em A), fazendo esboço ilustrativo.

Ex.5 Considere o triângulo com vértices A, B e C. Mostre que a mediana encontra em um único ponto (denominado de baricentro). Admitindo o abuso de notação, obtenha sua expressão em termos de A, B e C. Discuta, porque é um abuso de notação.

Ex.6 Sejam $P = (1,1,0), Q = (0,1,1), \overrightarrow{u} = (1,-1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (-1,-3,1)$. Calcule, se a operação for válida. Justifique, caso contrário.

a) $P + \overrightarrow{v}$

b) $P + Q - \overrightarrow{u}$

c) $\overrightarrow{u} - P - Q$

d) $\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{QP}$

e) $2\overrightarrow{u} + \frac{\overrightarrow{v}}{2}$

f) $\sqrt[3]{||\overrightarrow{u}||}\frac{\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}}$

g) $\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{PQ}||}$

Ex.7 Sabendo que$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ é um produto (distributivo) comutativo (ab = ba) tal que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{v}||^2$ onde $||\overrightarrow{v}||$ é a norma euclidiana ("distância").

a) Mostre que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| cos\theta$ onde θ é o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

b) Encontre a expressão de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$em termos da norma.

Ex.8 Sejam $\overrightarrow{u} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,1)$. Caso exista, encontre os ângulos (caso não exista, justifique) entre

a) $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$

b) $3\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$

c) $\overrightarrow{0} e \overrightarrow{v}$

d) $P = (1,-1)$ e $\overrightarrow{u}$

e) $\overrightarrow{w} = (-1,5)$ e $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$

Ex.9 Verifique se o par dos vetores é ortogonal e indique o ângulo entre eles caso possível.

a) $(3,-2,1)$ e $(2,1,-4)$

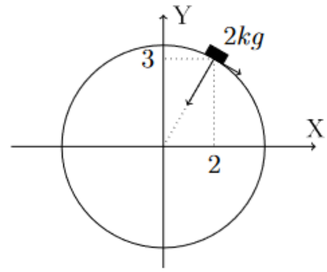
b) $\overrightarrow{0}$ e $(1,3)$

c) $\overrightarrow{(1,1,-1)(2,-1,1)}$ e $(3,1)$

d) $(2,4)$ e $(1,2)$

e) $(1, 2, 1)$e$(1, -1, 2)$.

Ex.10 Obtenha o vetor força escalar da direção tangencial (que faz mover) e normal (que pressiona contra a superfície) da força peso, considerando $g = 10m/s^2$.



Ex.11 Obtenha a fórmula de Lagrange para área do paralelogramo com lados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$:$(área)^2 = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2$.

Soluções e dicas

Ex.2 Dica: No paralelogramo ABCD, mostre que $A + 12\overrightarrow{AC} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Note que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$. O ponto de intersecção é $\frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$.

Ex.4 Dica: No triângulo isósceles, mediana relativa a base é a bissetriz do ângulo oposto. Mediatriz é $(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$.

Ex.5 Dica: Mostre que uma mediana encontra a outra mediana num ponto $\frac{2}{3}$ da sua vertice. O baricentro é dado por $\frac{1}{3}(A + B + C)$.

Ex.6

(a) $(0, -2, 1)$

(b) não existe

(c) não existe

(d) (1, 0, -1)

(e) $(\frac{3}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{9}{2})$

(f) não existe

(g) $2\sqrt{2}$

Ex.7

(a) Use a lei dos cossenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ onde θ é ângulos entre b e c.

(b) $||\rightarrow u + \overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ torna $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2)$ e $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ torna $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2)$

Ex.8

(a) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{5}\sqrt{10}}{10}$

(b) $\theta = 0$

(c) não existe

(d) não existe

(e) $\theta = \arccos \frac{-7\sqrt{2}\sqrt{5}}{10}$

Ex.9

(a) ortogonal, $\theta = 90^o$

(b) apenas ortogonal

(c) não tem relação

(d) não é ortogonal

(e) não é ortogonal.

Ex.10 Note que ortogonal a (a, b) pode ser dado por $\pm(-b, a)$. Um dos ortogonais a normal será o tangente. Normal é $\overrightarrow{N} = \frac{60}{13}(-2, -3)$ e tangente é $\overrightarrow{T} = \frac{40}{13}(3, -2)$ em newton.

Ex.11 Use o quadrado da área: $[área]^2 = ([base] \times [altura])^2$ onde $[altura]$ pode ser obtida usando a função seno.