função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x, temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 15, e seus domínios estão ali indicados. Observe que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.

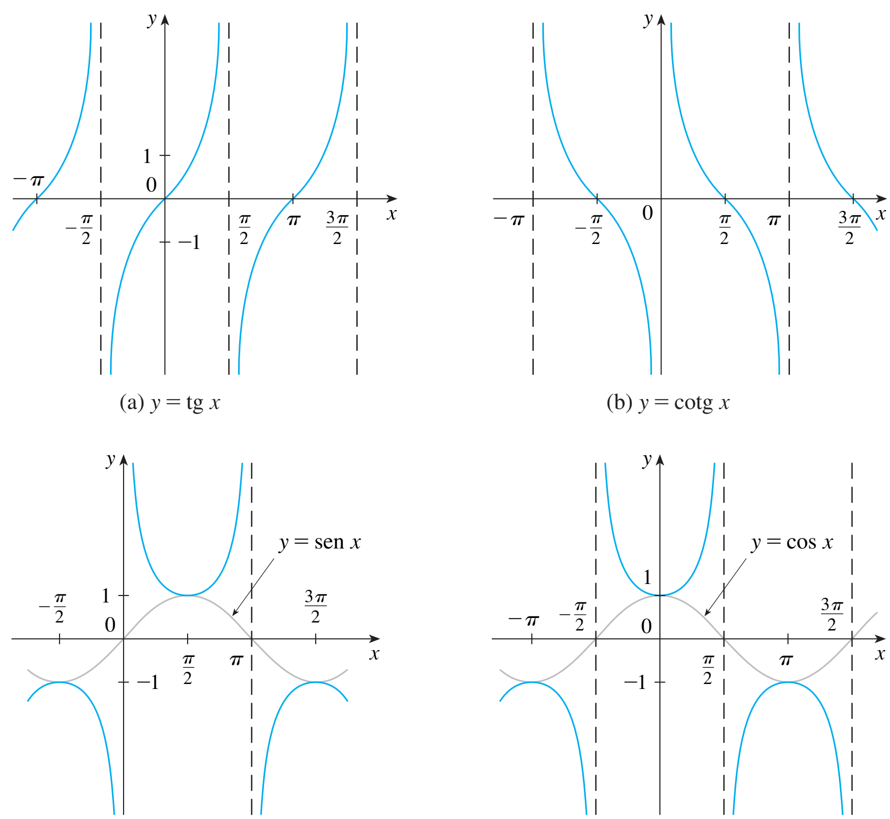


FIGURA 15

(a) $y = \operatorname{tg} x$ (b) $y = \operatorname{cotg} x$ (c) $y = \operatorname{cossec} x$ (d) $y = \sec x$

D Exercícios

1–6 Converta de graus para radianos.

1. $210°$ **2.** $300°$ **3.** $9°$

4. $-315°$ **5.** $900°$ **6.** $36°$

7–12 Converta de radianos para graus.

7. 4π **8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$ **9.** $\dfrac{5\pi}{12}$

10. $\dfrac{8\pi}{3}$ **11.** $-\dfrac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17–22 Desenhe, na posição padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. $315°$ **18.** $-150°$ **19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23–28 Determine as razões trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29–34 Determine as demais razões trigonométricas.

29. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

30. $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1{,}5, \quad \dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$

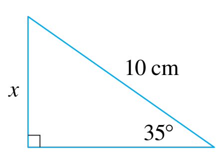
32. $\cos x = -\dfrac{1}{3}, \quad \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

33. $\operatorname{cotg}\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

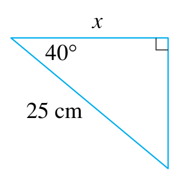
34. $\operatorname{cossec}\theta = -\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35–38 Determine, com precisão de cinco casas decimais, o comprimento do lado chamado de x.

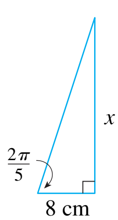
35.



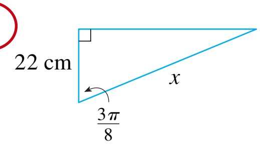
36.



37.



38.



39–41 Demonstre cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42–58 Demonstre a identidade.

42. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \ \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta$

46. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \operatorname{tg} y \operatorname{sen} y$

48. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\operatorname{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cossec}^2\theta$

50. $2 \operatorname{cossec} 2t = \sec t \operatorname{cossec} t$

51. $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \operatorname{cossec}\phi + \operatorname{cotg}\phi$

56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen} 2\theta \cos\theta$

58. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

59–64 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule a expressão.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$ **64.** $\cos 2y$

65–72 Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2\cos x - 1 = 0$ **66.** $3\operatorname{cotg}^2 x = 1$

67. $2\operatorname{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$ **70.** $2\cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3\cos x$

73–76 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$ **74.** $2\cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **76.** $\operatorname{sen} x > \cos x$

77–82 Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 14 e 15 e aplicando as transformações da Seção 1.3 quando apropriado.

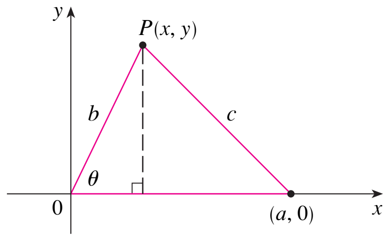
77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \operatorname{tg} 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **80.** $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$ **82.** $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Demonstre a **Lei dos Cossenos**: se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b, c e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

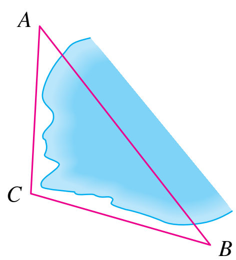


[*Dica:* Introduza um sistema de coordenadas de modo que θ esteja na posição padrão como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula de distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$$\angle C = 103° \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

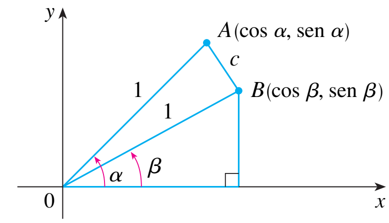
Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância pedida.



85. Use a figura para demonstrar a fórmula da subtração

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \ \text{sen}\,\beta$$

[*Dica:* Calcule c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]



86. Use a fórmula do Exercício 85 para demonstrar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

87. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta \qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demonstrar a fórmula da subtração (13a) para a função seno.

88. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo entre eles sendo θ é

$$A = \tfrac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$$

89. Determine a área do triângulo ABC, correta até cinco casas decimais, se

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107°$$

E Notação de Somatória (ou Notação Sigma)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega Σ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação de somatória (ou notação sigma)**.

Isso nos diz para terminar com $i = n$.
Isso nos diz para somar.
Isso nos diz para começar com $i = m$.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

1 Definição Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n inteiros tais que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação de função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, $m, m+1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$