Classificação Logística de uma Base de Dados Numérica com recurso a Pooling

Henrique José Carvalho Faria nº82200

[1] Departamento de Informática
[2] Departamento de Matemática, Universidade do Minho

Glossário

DVAP - Diagonal and Vertical Average Pooling
DVMCP - Diagonal and Vertical Max Centered Pooling
DVMP - Diagonal and Vertical Max Pooling
DVMAP - Diagonal and Vertical Min Average Pooling

1 Introdução

Neste trabalho será implementado um classificador logístico para classificar uma base de dados binária. Com recurso a este classificador logistico pretende-se verificar a separabilidade linear do dataset. Adicionalmente também se pretende avaliar a eficácia da técnica de pooling no reconhecimento de imagens. O pooling será analisado segundo duas vertentes, sendo a primeira a redução dimensional das imagens do dataset e a segunda a escolha de um filtro bem parametrizado que permita separar o ruido da informação útil presente na imagem. Em seguida explicar-se-á em que consiste a base de dados referida, o que é um classificador logístico, em que consiste o pooling e as metodologias utilizadas no mesmo.

1.1 Base de dados

Uma base de dados é uma sequência de eventos (e), a sua expressão genérica é a seguinte:

$D = (e^n)_{n=1}^N$, em que N é o número total de eventos em consideração.

Um evento (e) é composto por duas categorias, a primeira categoria refere-se aos dados de input ou seja aos atributos denominados X e a segunda catagoria, denominada y, trata-se da label dado que corresponde ao output. A expressão genérica de um evento é a seguinte:

$e = (X, y)$

Tratando-se um evento de um par (imagem, label) o número total de atributos da imagem de um evento corresponde ao produto do número de linhas pelo número de colunas da mesma. Note-se ainda que como X representa uma imagem cada um dos seus constituintes é um valor inteiro entre 0 e 255 que representa o nível de cinzento de um pixel.

1.2 Classificador logístico

A regressão logistica é um método de classificação simples e poderoso que pode ser utilizado na separação de dados binários. Um classificador logístico trata-se portanto de uma *"machine learning"* cuja arquitetura permite receber na entrada um vetor X^m, de tamanho I e devolve um valor $\hat{y}$ no domínio [0,1] representando a probabilidade dessa imagem pertencer á classe y, $y \in \{0, 1\}$[2,5]. Os seguintes passos mostram a construção da formula que corresponde a esta operação:

O primeiro passo passa por definir o vetor X^m como o vetor que possui os I pixeis da imagem m do dataset.

$X^m = X_i^m, i = 1, ..., I$

O segundo passo passa por definir θ (vetor de pesos) como:

$\theta = (\theta_i), i = 0, ..., I$

Assim, o produto de θ por X pode ser definido como[2,3]:

$\theta^T X = \sum_{i=1}^{I} (\theta_i X_i)$.

Desta forma a formula correspondente a esta operação fica totalmente definida como[2]:

$\hat{y} = f(X) = \sigma(\theta_0 + \theta^T X)$, em que θ representa o vetor de pesos e σ repesenta a função sigmoid.

Como a regressão logística prevê valores entre 0 e 1 é necessária uma função que mapeie o nosso dominio de input $\mathbb{R}$ para o dominio de output [0,1]. Esta operação é realizada recorrendo á função sigmoid que converte os valores recebidos para o dominio pretendido[2]:

$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$

As probabilidades das duas classes são portanto modeladas como

$Pr\{y = 1|z\} = \frac{1}{1+e^{-z}}$

e

$Pr\{y = 0|z\} = 1 - \sigma(z) = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}$

A representação gráfica desta função pode ser vista como:

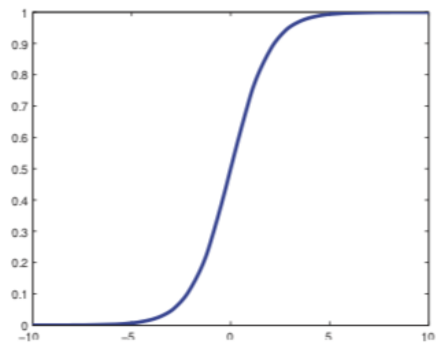


Figura 1: Gráfico da função sigmoid

1.2.1 Função Custo

A função custo tem como objetivo quantificar a diferença entre o valor real e a predição. Esta função utiliza um vetor de pesos θ, um vetor representativo da imagem X e o valor da label associada a essa imagem y. Esta função começa por invocar um classificador logistico para obter uma predição $\hat{y}$. De seguida fazendo uso dos valores de y e da probabilidade calculada da imagem pertencer a essa mesma classe $\hat{y}$ a diferença entre o valor real e o previsto é calculada da seguinte forma:

$E(\theta; e) = y * \log_{\epsilon}(\hat{y}) + (1 - y) * \log_{\epsilon}(1 - \hat{y})$, em que e é um evento composto por um par (X,y) respetivamente um vetor representativo de uma imagem e a label associada.

Como esta função é aplicada a toda a base de dados podemos generalizar a formula anterior para:

$E(\theta; BaseDeDados) = \frac{\sum_{n=0}^{N} y*\log_{\epsilon}(\hat{y})+(1-y)*\log_{\epsilon}(1-\hat{y})}{N}$

O vetor de pesos (θ) ótimo é obtido através da minimização de uma função de custos que quantifica o erro entre a classe real e a sua predicção. O θ ideal é aquele que maximiza a probabilidade dos dados observados e denomina-se $\overline{\theta}$.

1.2.2 Atualização dos pesos

Para realizar a atualização dos pesos em classificadores logisticos é comum utilizar o método do gradiente, também chamado de método do declive que é utilizado para otimização. Para encontrar um mínimo local de uma função utiliza-se um esquema iterativo onde em cada passo se escolhe a direção negativa do gradiente a qual corresponde á direção de declive máximo. As seguintes definições explicam o processo de update dos pesos.

Seja θ^0 o vetor de pesos inicial e τ o learning rate usado pelo classificador logistico. Adcionalmente definimos G como sendo a diferença entre o valor real y e o valor da predição $\hat{y}$.

$$G = |y - \hat{y}|$$

A atualização dos pesos de θ^k para θ^{k+1} é feita então em duas etapas. A primeira atualiza a primeira componente θ_0, e a segunda atualiza as restantes componentes de θ[2,4].
Relembrando as formulas anteriormente usadas para definir θ e o vetor de pixeis X^m temos:

$$X^m = X_i^m, i = 1, ..., I$$

$$\theta = (\theta_i), i = 0, ..., I$$

As formulas que mostram a atualização dos pesos definem-se como:

$$\theta_0(k+1) = \theta_0(k) + G\tau$$

$$\theta_i(k+1) = \theta_i(k) + G\tau X_i, i = 1, ..., I$$

Esta atualização de pesos é realizada k vezes e quando k tende para ∞, θ^k tende para $\overline{\theta}$ que corresponde ao array de pesos que minimizam o erro[2]. Em notação simplificada: $k \to \infty \Rightarrow \theta^k \to \overline{\theta}$.

1.3 Matriz de Confusão

A matriz de confusão é uma ferramenta muito utilizada em avaliações de modelos de previsão e é composta por quatro campos a saber[9]:

- Verdadeiro positivo (VP)

Ocorre quando no conjunto real, a classe que pretendemos prever foi prevista corretamente.

– Verdadeiro negativo (VN)

Ocorre quando no conjunto real, a classe que pretendemos prever foi prevista incorretamente.

– Falso positivo (FP)

Ocorre quando no conjunto real, a classe que não pretendemos prever foi prevista corretamente.

– Falso negativo (FN)

Ocorre quando no conjunto real, a classe que não pretendemos prever foi prevista incorretamente.

A partir desta matriz podem-se calcular alguns valores importantes para avaliar a qualidade de predição do nosso modelo, esses valores são[9]:

– Accuracy

Indica a taxa de sucesso das predições realizadas.

$Accuracy = \frac{VP+FP}{VP+VN+FP+FN}$

– Recall

Indica a proporção de valores positivos corretamente identificados. Trata-se de uma boa métrica a aplicar em casos em que os Falsos Negativos são considerados mais prejudiciais que os Falsos Positivos.

$Recall = \frac{VP}{VP+FN}$

– Precisão

Indica a percentagem de classificações positivas corretamente classificadas. Trata-se de uma boa métrica a aplicar em casos em que os Falsos Positivos são considerados mais prejudiciais do que os Falsos Negativos.

$Precisão = \frac{VP}{VP+FP}$

– F-score

Esta métrica é uma média balanceada entre as métricas Recall e Precisão.

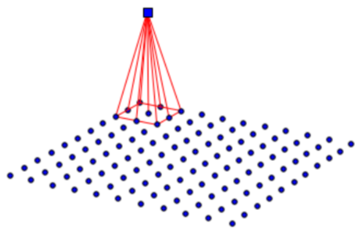
$Fscore = 2 * \frac{Precisão * Recall}{Precisão + Recall}$

Como exemplo de utilização desta matriz seja o array Y o array de labels com os valores reais e seja $\hat{Y}$ o array de labels obtidas usando o classificador logistico, tendo ambos tamanho N. Convêm referir que caso o resultado de $\hat{y}(X^m, \theta) < 0.5$ a label $\hat{Y}_m$, correspondente á imagem X^m, será 0 e caso contrário será 1, uma vez que este indica a probabilidade de ser uma label e não a label em si[2,3]. Assim a matriz de confusão será criada contabilizando em cada campo os valores que respeitarem as restrições apresentadas:

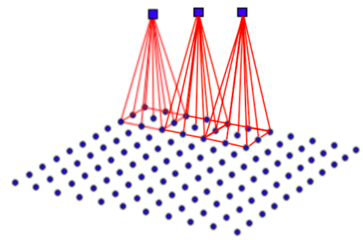
Real \ Previsto	Verdadeiro	Falso
Verdadeiro	$Y_n == 1 \wedge \hat{Y}_n == 1, \forall n \in [0, N]$	$Y_n == 1 \wedge \hat{Y}_n == 0, \forall n \in [0, N]$
Falso	$Y_n == 0 \wedge \hat{Y}_n == 1, \forall n \in [0, N]$	$Y_n == 0 \wedge \hat{Y}_n == 0, \forall n \in [0, N]$

2 Pooling

Muitas vezes uma base de dados de imagens com imagens muito grandes (com um elevado número pixeis a serem processados) torna o processo de previsão, análise de custos e update de pesos bastante demorado[8].
A técnica de pooling permite dividir uma imagem em várias mais pequenas através de uma janela deslizante e aplicar um filtro a cada uma de forma a remover o ruido, manter a informação útil e reduzir a dimensão da imagem a analisar[8].
Seja B uma imagem composta por pixeis a ser processada por pooling e A uma janela deslizante, com dimensões inferiores a B, a ser usada no processo, isto é o número de pixeis da janela A é inferior ao número de pixeis de B.
O deslize da janela A sobre a imagem original é determinado por um stride horizontal e um stride vertical. A cada sub-imagem obtida pela aplicação de A a B é posteriormente aplicado um filtro que permite obter um valor a partir dos pixeis existentes na sub-imagem, este processo denomina-se pooling. No final, juntando todos os resultados obtidos pelo filtro, obtemos uma imagem reduzida C que será utilizada para realizar a classificação pretendida.
Em baixo podemos visualizar, na imagem a), um exemplo da aplicação de um filtro a uma janela[8], já na segunda imagem apresentada é representado um exemplo da aplicação de um filtro á janela deslizante de tamanho 3x3 com um stride de 2 ao longo de uma das dimensões da imagem[8].



(a) Exemplo de aplicação de um filtro a uma janela sobre uma imagem representada por pixeis



(b) Exemplo de aplicação de pooling a uma imagem representada por pixeis

Num exemplo mais concreto, em baixo, podemos ver uma imagem cujas dimensões são 30 x 30, essa imagem foi tratada com uma janela deslizante de 3 x 3 e um stride de 3 nos eixos x e y resultando em 100 imagens a serem processadas pelo filtro escolhido.
Como já foi referido cada filtro recebe uma sub-imagem correspondente aos pixeis abrangidos pela janela deslizante e devolve um valor, cada valor devolvido será posteriormente recolhido pela ordem em que cada sub-imagem foi filtrada de forma a refazer a figura com as caracteristicas obtidas através dos filtros. Em baixo podemos observar um esquema resumido de todo o processo de pooling.

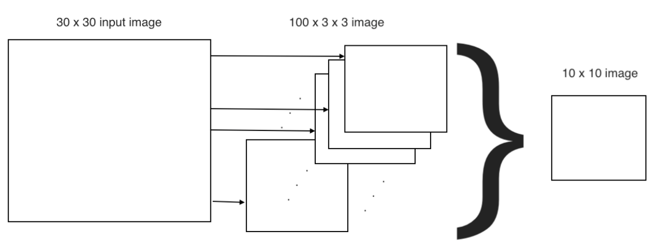


Figura 3: Esquema básico de pooling

2.1 Poolings Clássicos

Existem alguns pooling classicos que são comummente usados como o "max-pooling", "min-pooling", "average-pooling"e "maximum centered pooling", todos eles serão em seguida explicados.

2.1.1 Max-Pooling

O max pooling trata-se de um filtro aplicado a uma imagem que devolve o valor máximo dessa imagem, isto é, como cada imagem consiste num conjunto de pixeis cujos valores variam dentro do intervalo de números inteiros [0,255] o max-pooling vai devolver o valor mais alto contido na imagem[8]. Seja A uma janela de pixeis que representa uma parte de uma imagem, a formula deste filtro aplicado a A é a seguinte:

$max\_pooling(A) = max(A)$

Um exemplo deste tipo de filtro pode ser visualizado em baixo.

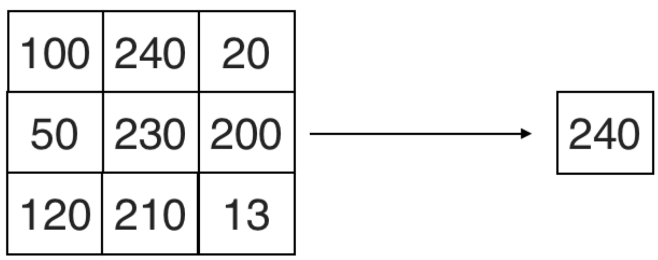


Figura 4: Exemplo de Max-Pooling

2.1.2 Min-Pooling

O min-pooling trata-se de um filtro aplicado a uma imagem que devolve o valor minimo contido nessa mesma imagem, isto é, dos valores dos pixeis da imagem é devolvido o menor. Seja A uma janela de pixeis que representa uma parte de uma imagem, a formula deste filtro aplicado a A é a seguinte:

$min\_pooling(L) = min(A)$

Em baixo pode-se observar um exemplo deste filtro.

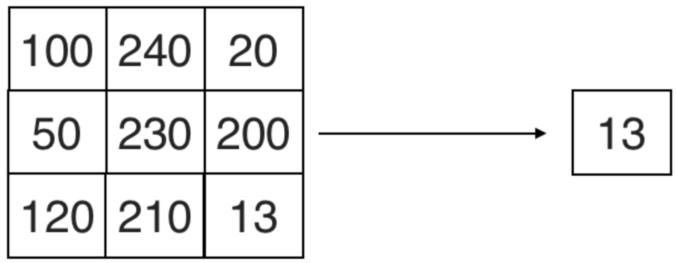


Figura 5: Exemplo de Min-Pooling

2.1.3 Average Pooling

O average pooling trata-se de um filtro aplicado a uma imagem que devolve o valor médio dos pixeis dessa imagem, isto é, os valores de todos os pixeis são somados e posteriormente são divididos pelo número de pixeis existentes na imagem para obter uma média por pixel[8]. Seja A uma janela de pixeis de uma parte de uma imagem com dimensões $L1$ e $L2$, a formula deste filtro aplicado a A é a seguinte:

$average\_pooling(A) = \frac{\sum_{i=0}^{L1}\sum_{j=0}^{L2} A_{ij}}{L1 * L2}$

Um exemplo deste filtro pode ser visualizado em baixo.

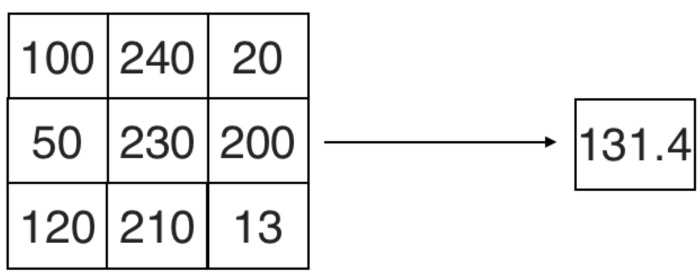


Figura 6: Exemplo de Average Pooling

2.1.4 Maximum Centered Pooling

O maximum minus average pooling trata-se de um filtro aplicado a uma imagem que devolve o valor médio dessa imagem subtraido ao valor máximo da mesma, isto é, primeiro acha-se a média dos pixeis da imagem e o valor máximo de todos esses pixeis e devolve-se a diferença entre o valor máximo encontrado e a média dos valores de todos os pixeis da imagem.Seja A uma janela de pixeis de uma parte de uma imagem com dimensões $L1$ e $L2$, a formula deste filtro aplicado a A é a seguinte:

$$max\_centered\_pooling(A) = max(A) - \frac{\sum_{i=0}^{L1}\sum_{j=0}^{L2} A_{ij}}{L1 * L2}$$

Em baixo é apresentado um exemplo simples da aplicação deste filtro.

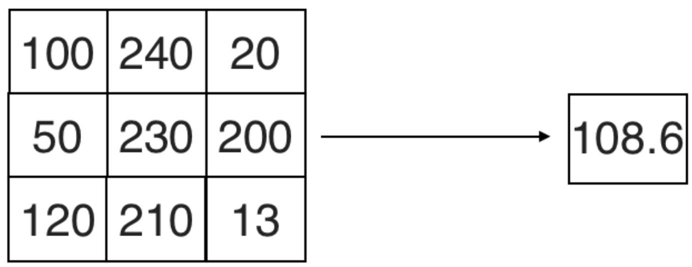


Figura 7: Exemplo de Maximum Centered Pooling

2.2 Poolings Exóticos

Existem também alguns poolings exóticos definidos especificamente para a base de dados que possuimos. Estes não funcionam da mesma maneira que os classicos uma vez que se baseiam em caracteristicas das imagens do dataset.
Como o dataset é constituido de imagens do número 3 e do número 8 e a diferença na representação dos mesmos, de forma simplista, pode ser entendida com se tratando de que no oito temos dois circulos fechados e no três temos dois circulos com cerca de um quarto dos mesmos por concluir, sendo a junção dos circulos sobreposta de igual forma com se pode ver nas figuras abaixo.

Figura 8: Representação dos números 3 e 8

Isto fornece-nos algumas ideias sobre os tipos de filtros que se podem criar tendo em conta esta simplificação das diferenças dos mesmos.

2.2.1 Diagonal and Vertical Average Pooling

Neste primeiro filtro a ideia subjacente passa por, tentar utilizar a diferença dos valores dos pixeis do oito e do 3 verticalmente e diagonalmente tal como se pode ver nas figuras abaixo que identificam o que esperamos encontrar.

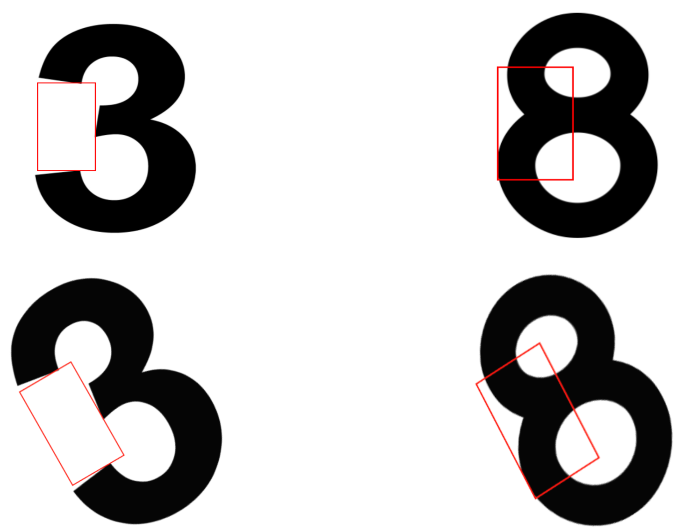


Figura 9: Representação do objetivo a identificar como o filtro sobre os números 3 e 8

A pensar neste tipo de abordagem este filtro soma os eixos diagonal (sentido descendente da esquerda para a direita) e vertical da janela recebida e divide os mesmos pelo número de elementos somados. Seja A a janela de dimensões $size\_x$ e $size\_y$. As seguintes formulas mostram os passos para a realização do processo.
Posição inicial da lista vertical:

$p\_vertical = size\_x : 2$, em que o valor p_vertical é arredondado ás unidades.

Posição inicial da lista diagonal:

$p\_diagonal = 0$

Deve existir um elemento que dite a linha da matriz a consultar começando inicializado a 0:

$linha = 0$

Deve ainda existir 1 lista para armazenar os pixeis verticais e diagonais, cujo comprimento é $L = 0$.

$lista = []$

A cada iteração a lista com os pixeis diagonais e verticais, que no inicio do processo se encontra vazia é atualizada acrescentando dois elementos da matriz A, fazendo com que o seu comprimento L aumente também em 2 unidades.Adicionalmente a variável linha também aumenta em 1 unidade.

$lista(k+1) = lista(k) + [A_{p\_diagonal,linha}] + [A_{p\_vertical,linha}]$
$L(k+1) = L(k) + 2$
$linha(k+1) = linha(k) + 1$

No final é realizada a soma dos elementos da lista e a divisão desta soma pelo número de elementos da mesma.

$media = \frac{\sum_{i=0}^{L} lista_i}{L}$

A variável media é devolvido pelo filtro como o resultado do processamento da janela.

2.2.2 Diagonal and Vertical Max Centered Pooling

Á semelhança do filtro anterior este filtro também pretende usar a diagonal e a vertical do vetor representativo da janela deslizante, a diferença é que este subtrai a média, que é calculada da mesma forma que na função anterior, ao valor máximo encontrado na diagonal e vertical da janela representada pelo vetor. Assim, reaproveitando todas as definições anteriormente apresentadas o resultado devolvido por este filtro é:

$max\_centered = max(lista) - media$

2.2.3 Diagonal and Vertical Max Pooling

Este filtro parte do principio que as imagens representativas dos números 3 e 8 podem ser dadas rotacionadas em qualquer direção e para tentar mitigar esse problema são calculas ambas as diagonais e a vertical colecionando-as em arrays distintos, verifica qual o valor mínimo de cada um dos arrays colecionados e posteriormente devolve o maximo valor dos 3 anteriormente obtidos. As definições das seguintes formulas são dadas pela ordem de implementação:

Posição inicial da lista vertical $V1$:

$p\_vertical = size\_x : 2$, em que o valor p_vertical é arredondado ás unidades.

Valor a ser usado para calcular as posições dos pixeis de ambas as listas diagonais $D1$ e $D2$:

$p\_diagonal = 0$

Deve existir um elemento que dite a linha da matriz a consultar começando inicializado a 0:

$linha = 0$

Devem ainda existir 3 listas para armazenar os pixeis verticais e diagonais, cujos comprimentos são 0 aquando da sua criação.

$V1 = []$
$D1 = []$
$D2 = []$

A cada iteração as listas são incrementadas em 1 elemento. Adicionalmente a variável linha também aumenta em 1 unidade.

$V1(k+1) = V1(k) + [A_{p\_vertical,linha}]$
$D1(k+1) = D1(k) + [A_{p\_diagonal,linha}]$
$D2(k+1) = D2(k) + [A_{size\_x-(p\_diagonal+1),linha}]$[3]
$linha(k+1) = linha(k) + 1$

No final é devolvido o pixel com valor máximo das 3 listas criadas.

$maximum = max(max(max(V1), max(D1)), max(D2))$

[3] Note-se que é necessário somar uma unidade a $p\_diagonal$ uma vez que o primeiro elemento de A se encontra na posição 0 fazendo com que o último elemento de uma linha da matriz se encontre numa posição múltipla de $size\_x - 1$ e não de $size\_x$

2.2.4 Diagonal and Vertical Min Average Pooling

Á semelhança do filtro anterior, este filtro calcula 3 arrays correspondentes ás diagonais e á vertical. Em seguida realiza a média de cada um dos arrays e devolve a menor média. Assim, reaproveitando as definições anteriormente feitas sobre os arrays $V1$, $D1$ e $D2$ e sobre as respetivas atualizações a cada iteração temos as seguintes definições:
Para cada lista é necessário calcular a média. Note-se que cada lista possui o mesmo comprimento pois foi recolhido 1 pixel por linha para cada uma. Seja $Dim1$ a dimensão da lista $V1$ assim:

$M1 = \frac{\sum_{i=0}^{Dim1} V1_i}{Dim1}$
$M2 = \frac{\sum_{i=0}^{Dim1} D1_i}{Dim1}$
$M3 = \frac{\sum_{i=0}^{Dim1} D2_i}{Dim1}$

Por fim é realizada a escolha da menor média obtida.

$menor\_media = min(min(M1, M2), M3)$

3 Implementação

Nesta secção mostrar-se-á a implementação em python da preparação da base de dados, do classificador logistico, das funções de pooling e das funções de avaliação da performance dos modelos.

3.1 Base de Dados

A base de dados utilizada neste trabalho possui 2000 imagens das quais 1000 representam o número 3 e as restantes 1000 repreentam o número 8. A cada imagem que representa o número 3 foi atribuida a label 0 e ás restantes atribuiu-se a label 1 fazendo desta uma base de dados binária.
Cada imagem do dataset é composta por 36 colunas e 31 linhas totalizando 1116 pixeis cujos valores variam entre 0 e 255.

3.2 Prepare data

Foi criada uma função que permitisse separar as imagens e respetivas labels em datasets de treino e teste, um procedimento necessário para criar um dataset de validação que nos permita escolher o melhor modelo[2,6]. Esta função recebe um vetor com as imagens[4], um vetor com as labels correpondentes ás imagens, o número de imagens no vetor, as dimensões das imagens e a percentagem das imagens a serem usadas para treino.
Esta função calcula o número de imagens a serem utilizadas para treino com base na percentagem recebida, separando assim as imagens e respetivas labels em dataset de treino e teste. Neste caso foram utilizadas 85% das imagens para treino e os restantes 15% foram utilizados para teste[6].
É criado um array de pesos *ew* com o mesmo número de elementos que uma imagem a partir das dimensões recebidas pela função e é avaliado um erro para o array de pesos iniciais.
Esta função devolve os datasets de treino e teste bem como os respetivos tamanhos o array de pesos e o erro inicial.

[4] Note-se que as imagens já estão baralhadas no dataset antes de serem passadas á função em questão.

```
def prep_data_train(N,imagens,labels,n_cols=n_cols,n_rows=n_rows,percentage=0.85):
    Nt= int(N*percentage)
    Ne= int(N*(1-percentage))
    I = int(n_rows*n_cols)

    Xt = imagens[:int(N*percentage)]
    Yt = labels[:int(N*percentage)]
    Xe = imagens[int(N*percentage):]
    Ye = labels[int(N*percentage):]

    ew=[x/N for x in np.ones([I+1])]
    err=[]
    err.append(cost(Xt,Yt,Nt,ew))
    print("Initial error! => ",err)
    return Xt,Yt,Nt,Ne,Xe,Ye,ew,err
```

Figura 10: Função de preparação dos datasets de treino e teste

3.3 Classificador Logistico

A implementação do classificador logistico foi dividida em 5 funções, nomeadamente: *run_stocastic*, *predictor*, *sigmoid*, *cost* e *update* . Estas funções e respetivos funcionamentos serão apresentados em seguida pela ordem em que foram referidos.

3.3.1 Run Stocastic

A função run_stocastic trata-se da função principal da implementação do classificador logistico e tal como o nome indica aplica o método estocástico ao mesmo. O método estocástico foi escolhido porque se trata do método que apresenta o menor custo em termos de performance face ás restantes tecnologias[6,7]. Esta função começa por definir que o erro almejado tem valor 0, indicando assim uma das condições de paragem do ciclo. Começa também por criar um contador *it* para contabilizar as iterações realizadas inicializando este a 0.
A cada iteração é escolhido um elemento aleatório da nossa base de dados de treino e é calculado um novo vetor de pesos recorrendo á função *update*. Este novo vetor é posteriormente utilizado para calcular um erro através da função custo que indica a diferença entre os valores das labels calculados com recurso aos novos pesos e os valores reais das labels, sendo este erro armazenado para posterior visualização. A variável *it* é então incrementada em 1 unidade e caso tenha atingido o número máximo de iterações que pretendemos sai do ciclo. No final é devolvido o array de pesos juntamente com o array que contêm a progressão dos erros ao longo das iterações realizadas.

```python
def run_stocastic(X,Y,N,eta,MAX_ITER,ew,err):
    epsi=0
    it=0
    while(err[-1]>epsi):
        n=int(np.random.rand()*N) # indice aleatório (0-N)
        new_eta=eta
        ew=update(X[n],Y[n],new_eta,ew)
        erro = cost(X,Y,N,ew)
        err.append(erro)
        print('iter %d, cost=%f, eta=%e     \r' %(it,err[-1],new_eta),end='')
        it=it+1
        if(it>MAX_ITER): break
    return ew, err
```

Figura 11: Função Estocástica implementada

3.3.2 Predictor

A função predictor é responsável por calcular o valor em $\mathbb{R}$ a ser passado á função sigma. Este valor em $\mathbb{R}$ é calculado fazendo a soma do primeiro elemento do vetor de pesos pelo produto vetorial dos restantes elementos desse vetor com o array de pixeis representativo da imagem. No fim é devolvido o resultado de sigma.

```python
def predictor(x,ew):
    s=ew[0];
    s=s+np.dot(x,ew[1:])
    sigma=sigmoid(s)
    return sigma
```

Figura 12: Função Predictor implementada

3.3.3 Sigmoid

Para a sua implementação recorreu-se á biblioteca python *numpy* que possui uma função *numpy.exp*() que recebe um expoente s e calcula e^s, no entanto foi necessário ter atenção á capacidade de precisão do computador[5] e por esse motivo criaram-se limites de expoente de forma a que este não excedesse os números 30 e -30.

Nesta função o valor de s é arredondado mediante a necessidade, como referido no parágrafo anterior, e é usado como expoente de ϵ na função σ devolvendo o resultado da mesma.

[5] A capacidade de precisão do computador refere-se ao número máximo de bits disponíveis para a representação de um número, exceder esta capacidade leva a erros de *Overflow*.

```python
def sigmoid(s):
    large=30
    if s<-large: s=-large
    if s>large: s=large
    return (1 / (1 + np.exp(-s)))
```

Figura 13: Função Sigmoid implementada

3.3.4 Cost

Esta função começa por criar um acumulador para os erros de predição das labels das imagens face ás labels reais chamado En que é inicializado a 0 e pelos mesmos motivos de precisão computacional da função sigmoid establece um limite mínimo e máximo para o valor previsto.
Em seguida é iterado todo o dataset de treino imagem a imagem e sobre cada uma é calculada a probabilidade de esta imagem pertencer á label 1 e é utilizada a formula $Y_n * \log_\epsilon(\hat{(y)}) + (1 - Y_n) * \log_\epsilon 1 - \hat{(y)}$ para calcular o desvio da predição somando-o á variável En.
No fim é devolvida a média dos erros dividindo os erros acumulados pelos número de imagem iteradas.

```python
def cost(X,Y,N,ew):
    En=0
    epsi=1.e-12
    for n in range(N):
        y=predictor(X[n],ew);
        if y<epsi: y=epsi;
        if y>1-epsi: y=1-epsi;
        En=En+Y[n]*np.log(y)+(1-Y[n])*np.log(1-y)
    En=-En/N
    return En
```

Figura 14: Função Cost implementada

3.3.5 Update

A função update começa por obter uma predição sobre uma imagem e calcula a diferença entre o valor real da label da imagem e o valor previsto guardando-o na variável s. A variável eta representa o learning rate a ser usado na atualização dos pesos.
Posteriormente o primeiro elemento do array de pesos é atualizando somando-se ao produto de s por eta e os restantes elementos do array de pesos são atualizados individualmente somando-se ao produto de s com eta com o elemento da imagem x que se encontra na mesma posição do array - 1.
No final é devolvido um array com os pesos atualizados.

```
def update(x,y,eta,ew):
    r=predictor(x,ew)
    s=(y-r);
    new_eta=eta
    ew[0]=ew[0]+s*eta
    ew[1:]=ew[1:]+s*eta*x
    return ew
```

Figura 15: Função Update implementada

3.4 Poolings Clássicos

Nesta subsecção explicar-se-á a implementação das técnicas de pooling clássicas referidas na secção anterior. É de notar que a matriz a que cada pooling é aplicado foi transformada numa lista para uma mais facil implementação.

3.4.1 Max Pooling

Este filtro aplica a função *max* do python á lista recebida.

```
def max_func(data):
    return max(data)
```

Figura 16: Função Max implementada

3.4.2 Min Pooling

Este filtro aplica a função *min* do python á lista recebida.

```
def min_func(data):
    return min(data)
```

Figura 17: Função Min implementada

3.4.3 Average Pooling

Este filtor realiza uma divisão entre a soma dos elementos do vetor recebido e o tamanho do vetor recebido.

```
def average_func(data):
    return sum(data)/len(data)
```

Figura 18: Função Average implementada

3.4.4 Max Centered Pooling

Neste filtro utilizaram-se dois filtros préviamente definidos, subtraindo o resultado do filtro de average pooling ao resultado do filtro de max pooling.

```
def max_centered_func(data):
    return max_func(data)-average_func(data)
```

Figura 19: Função Max centered implementada

3.5 Poolings Exóticos

Tal como já se referiu anteriormente foram criados alguns filtros de pooling exóticos baseados nas características do dataset de imagens. A sua implementação é decrita a seguir.

3.5.1 Diagonal and Vertical Average Pooling

A implemetação deste filtro passou por criar uma lista vazia denominada *lista*, uma variável *pos*[6] a utilizar para iterar a posição do pixel a adicionar pertencente á diagonal da janela e uma variável *center* que indica a posição do pixel de cada linha pertencente á vertical que se encontra no centro da janela.
Posteriormente é realizado um ciclo enquanto a posição do pixel diagonal for inferior a ambas as dimensões da janela. Em cada iteração, começa-se por adicionar á lista o pixel diagonal calculado como a posição do pixel diagonal na linha *pos* somado com o número de pixeis por linha já percorrida. Em seguida acrescenta-se á lista o pixel pertencente á vertical calculado como a posição na linha correspondente á vertical dada pela variável *center* somada ao número de pixeis percorridos nas linhas anteriores. Note-se que existe sempre um ponto em

[6] note-se que foi tirado partido do facto de a posição da diagonal ter as mesmas coordenadas em x e y, logo a variavel *pos* representa tanto a linha da matriz em que estamos como a posição na linha em que o pixel se encontra.

que a diagonal e a vertical se intersetam, o problema da dupla contabilização deste ponto foi resolvido com um if que impede que tal aconteça.

No final de cada iteração a linha, representada pela variável *pos*, é atualizada sendo incrementada em 1 unidade.
No fim da função retorna-se a média dos elementos da lista.

```
def diag_plus_vert_avg(data,size_x,size_y):
    lista  = []
    pos    = 0
    center = int(size_x/2)
    while(size_y > pos and size_x > pos):
        if (pos + pos * size_x) == (center + pos * size_x):
            lista.append(data[pos + pos * size_x])
        else:
            lista.append(data[pos + pos * size_x])
            lista.append(data[center + pos*size_x])
        pos = pos + 1
    return sum(lista)/len(lista)
```

Figura 20: Função que realiza a média sobre o filtro diagonal e vertical

3.5.2 Diagonal and vertical Max Centered Pooling

Esta função começa, tal como a anterior, por definir uma lista vazia, uma variável *pos* e uma variável *center* seguindo-se a coleta dos elementos da diagonal superior e da vertical da janela durante o ciclo que se segue. No final é devolvida a diferença entre o valor máximo da lista e a média dos valores da mesma.

```
def diag_plus_vert_max_centered(data,size_x,size_y):
    lista  = []
    pos    = 0
    center = int(size_x/2)
    while(size_y > pos and size_x > pos):
        if (pos + pos * size_x) == (center + pos * size_x):
            lista.append(data[pos + pos * size_x])
        else:
            lista.append(data[pos + pos * size_x])
            lista.append(data[center + pos*size_x])
        pos = pos + 1
    return max(lista) - sum(lista)/len(lista)
```

Figura 21: Função que realiza o "Max centered"sobre filtro diagonal e vertical

3.5.3 Diagonal and Vertical Max Pooling

Nesta função são declaradas 3 listas, sendo que cada uma vai conter os elementos de uma das diagonais ou os elementos da reta vertical que se encontra no centro da janela. É também declarada uma variável *pos* e uma variável *center* á semelhança dos restantes filtros exóticos.

Durante o ciclo os elementos da diagonal decrescente são colecionados no array *diag*1, os elementos da diagonal crescente no array *diag*2 sendo os elementos da vertical armazenados no array *vert*.
Após o ciclo é encontrado o valor mínimo de cada um dos 3 arrays e desses é devolvido o maior.

```
def diag_vert_max(data,size_x,size_y):
    diag1 = []
    diag2 = []
    vert  = []
    pos = 0
    center = int(size_x/2)
    while(size_y > pos and size_x > pos):
        diag1.append(data[pos*size_x + pos])
        diag2.append(data[(pos+1)*size_x - (pos+1)])
        vert.append(data[center+pos*size_x])
        pos = pos + 1
    return max(min(diag1),max(min(diag2),min(vert)))
```

Figura 22: Função que obtem o maximo valor dos 3 valores mínimos encontrados nas diagonais e vertical do vetor

3.5.4 Diagonal and Vertical Min Average Pooling

Nesta função á semelhança da anterior declararam-se 3 listas, uma variavel *pos* e uma variável *center* que desempenham o mesmo papel que na função anterior. A coleta e armazenamento dos elementos das diagonais e da coluna central da janela também foram realizadas da mesma forma que na função anterior.
Após o ciclo foi calculada a média de cada lista e foi devolvida a menor média das três.

```
def diag_vert_min_avg(data,size_x,size_y):
    diag1 = []
    diag2 = []
    vert  = []
    pos = 0
    center = int(size_x/2)
    while(size_y > pos and size_x > pos):
        diag1.append(data[pos*size_x + pos])
        diag2.append(data[(pos+1)*size_x - (pos+1)])
        vert.append(data[center+pos*size_x])
        pos = pos + 1
    return min(sum(diag1)/size_y,min(sum(diag2)/size_y,sum(vert)/size_y))
```

Figura 23: Função que obtem o minimo valor das 3 médias calculadas sobre as diagonais e vertical do vetor

Foi ainda definida uma função que permite simplificar a escolha do filtro a ser usado, ou seja, dada uma opção numérica, aplica o filtro associado ao vetor representativo da janela deslizante.

```python
def window_func(data,option,size_x,size_y):
    if option == 0:
        return max_func(data)
    elif option == 1:
        return min_func(data)
    elif option == 2:
        return average_func(data)
    elif option == 3:
        return max_centered_func(data)
    elif option == 4:
        return diag_plus_vert_avg(data,size_x,size_y)
    elif option == 5:
        return diag_plus_vert_max_centered(data,size_x,size_y)
    elif option == 6:
        return diag_vert_max(data,size_x,size_y)
    else:
        return diag_vert_min_avg(data,size_x,size_y)

    print('FAILED!!')
    exit(2)
```

Figura 24: Função responsável por fazer a correspondência opção-filtro

3.5.5 Janela Deslizante

Foi implementada uma função responsável por aplicar a janela deslizante a cada imagem do dataset de forma genérica.
Esta função começa por definir as dimensões da imagem pós-filtro calculando quantas vezes tem de somar o $stride\_x$ á dimensão x da janela deslizante para atingir o mesmo número de colunas que a imagem original e o mesmo processo é aplicado para calcular as dimensões em y da imagem pós-filtro, fazendo uso da dimensão y da janela, da variavel $stride\_y$ e da dimesão em y da imagem pré-filtro[8].
Posteriormente os vetores representativos das imagens originais são iterados um a um e para cada são calculadas as posições abrangidas pela janela a cada iteração começando no ponto inicial (0,0) até a janela ter percorrido a totalidade da imagem. A cada uma das referidas iterações, nas quais se movimenta a janela, os pixeis abrangidos pela janela são armazenados num vetor ao qual se aplica um filtro para obter o valor de um pixel que passará a integrar a imagem pós-filtro. O novo dataset constituido pelas imagens pós-filtro é então devolvido pela função.

```python
def slide_window(data,labels,col,rows,stride_x,stride_y,size_x,size_y,option):
    print("\nStarted to use a window of size ",size_x,"x",size_y," with strides ",stride_x," and ",stride_y,"!\n")
    new_data = []
    new_img_size_x = int((col-size_x)/stride_x +1)
    new_img_size_y = int((rows-size_y)/stride_y +1)
    i=1
    for image in data: # para cada imagem dos dados
        print('Images shrinked: %d \r'%(i),end='');i += 1
        new_img = np.zeros([(new_img_size_y)*(new_img_size_x)])
        for y in range(new_img_size_y):
            for x in range(new_img_size_x):
                placement_x = x*stride_x
                reconstructed_image = np.array([])
                for line in range(size_y):
                    placement_y = (y*stride_y)*36 + line * 36
                    reconstructed_image = np.concatenate((reconstructed_image,image[placement_y+placement_x:placement_y+placement_x+size_x]),axis=0)
                new_img[y*(new_img_size_x-1) + x] = window_func(reconstructed_image,option,size_x,size_y)
        new_data.append(new_img)

    # gravar com 85% para casos relevantes!!

    print('\nAll images shrinked!')
    new_data = np.array(new_data)
    return new_data
```

Figura 25: Função responsável por executar a janela deslizante

3.6 Avaliação de Resultados

Para avaliar os modelos criados foi implementada uma função que calcula a matriz de confusão. Uma vez que no dataset utilizado classificar mal um 3 e classificar mal um 8 tem o mesmo peso a métrica Accuracy é a ideal para avaliar a qualidade das previsões do modelo, as métrica de Recall, Precisão e F-Score não são as melhores a aplicar uma vez que atribuem inportancias diferentes á classificação errónea de um 3 ou um 8.

3.6.1 Matriz de Confusão

Esta função começa por criar a matriz 2x2 onde serão contabilizados os resultados da previsão das diversas imagens consoante se enquadrem nas definições dadas para o preenchimento de cada campo da matriz. Note-se que cada camp é inicializada a 0.
As imagens da dataset são iteradas uma a uma e para cada é realizada um previsão. Posteriormente é contabilizado na tabela de confusão um dos quatro resultados:

- Caso a previsão seja inferior a 0.5 e a label também a posição (0,0) da matriz é incrementada em um unidade.
- Caso a previsão seja superior a 0.5 e a label também a posição (1,1) da matriz é incrementada em um unidade.
- Caso a previsão seja inferior a 0.5 e a label seja superior a 0.5 a posição (0,1) da matriz é incrementada em um unidade.
- Caso a previsão seja superior a 0.5 e a label não a posição (1,0) da matriz é incrementada em um unidade.

```python
def confusion(Xeval,Yeval,N,ew):
    C=np.zeros([2,2]);
    for n in range(N):
        y=predictor(Xeval[n],ew)
        if(y<0.5 and Yeval[n]<0.5): C[0,0]=C[0,0]+1;
        if(y>0.5 and Yeval[n]>0.5): C[1,1]=C[1,1]+1;
        if(y<0.5 and Yeval[n]>0.5): C[1,0]=C[0,1]+1;
        if(y>0.5 and Yeval[n]<0.5): C[0,1]=C[1,0]+1;
    return C
```

Figura 26: Função que calcula a matriz de confusão

3.6.2 Accuracy

A implementação da accuracy passou por calcular usando a matriz de confusão quais as amostras corretamente classificadas e incorretamente classificadas pela ordem referida. e em seguida devolver o resultado da divisão do número de amostras bem classificadas pela totalidade das amostras classificadas (amostras bem classificadas + amostras mal classificadas).

```python
def accuracy(matrix):
    right_samples = matrix[0,0]+matrix[1,1]
    wrong_samples = matrix[1,0]+matrix[0,1]
    return right_samples/(right_samples+wrong_samples)
```

Figura 27: Função que calcula a accuracy

4 Benchmarkting

Nesta secção falar-se-á dos resultados obtidos e analisar-se-ão os mesmos. Vamos começar por apresentar a validação do classificador onde não se utilizaram janelas para remover o ruido e posteriormente serão apresentadas todas as janelas testadas com os respetivos filtros.
É de sublinhar que cada uma das implementações testada foi corrida 9 vezes após a sua otimização, este processo é essencial uma vez que ao utilizarmos o método do gradiente estocástico inserimos um componente aleatório na convergência, ou seja é necessário realizar vários testes para garantir que este método não prejudica os resultados obtidos calibrando mal os pesos ou não permitindo a melhor calibração dos mesmos que se obteria por outros métodos mais precisos embora mais demorados. Quanto á otimização levada a cabo em cada uma das versões do logistic classifier convêm referir algumas regras básicas que foram seguidas neste trabalho.

- Devemos observar a variação do erro pós refinamento dos pesos para garantir que este não é errático o que indica que o learning rate é muito grande[4].
- É necessário verificar se o erro se torna estático durante algumas dezenas de epochs, este estaticismo revela que o número de epochs é demasiado elevado ou que o learning rate é demasiado baixo, no entanto caso este learning rate após dezenas de epochs em que a variação do erro tende a diminuir se tornar errático devemos truncar as epochs até ao momento em que o erro se torna errático e repetir o refinamento dos pesos a partir dese ponto com um learning rate mais baixo[4].

- Convêm saber que, por norma, o decréscimo do learning rate tende a situar-se algures entre 1/4 e 3/4 do valor anterior, verificando-se mais comummente o valor de 1/2, sendo este depois ajustado baseado nos resultados da progressão dos erros[7].

4.1 Validação do Classificador

Esta implementação trata-se do classificador genérico, este não faz uso nem de janelas deslizantes nem de filtros, em vez disso processa todas as imagens na sua totalidade. A progressão dos valores de erro e a tabela de confusão obtida após a otimização dos pesos do mesmo pode ser vista em baixo.

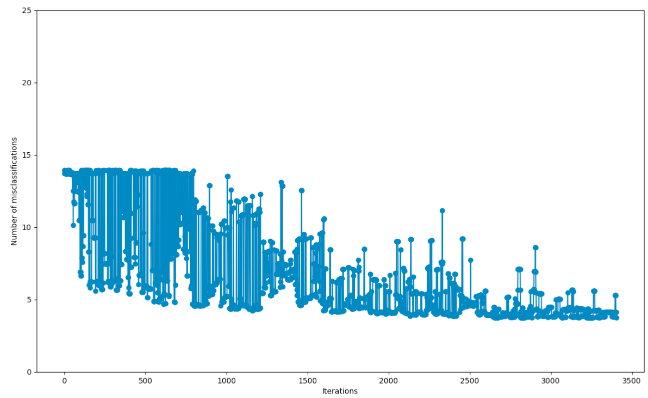


Figura 28: Progressão dos erros da versão de validação

```
Iitial error! =>  [13.701746735026397]
iter 800, cost=4.567247, eta=5.000000e-02

iter 800, cost=4.290938, eta=2.000000e-02

iter 1000, cost=3.938908, eta=8.000000e-03

iter 800, cost=3.770824, eta=3.000000e-03

in-samples error=3.770824
[[705. 138.]
 [ 94. 763.]]
0.8635294117647059


out-samples error=3.039414
[[140.  17.]
 [ 16. 127.]]
0.89
```

Figura 29: Tabelas de confusão da versão de validação

Como podemos ver na tabela de confusão do out-sample temos 300 imagens das quais 46 foram mal classificadas o que nos deixa com uma taxa de sucesso de 89%. Através da representação dos erros no gráfico podemos verificar que a os erros tendem a estabilizar perto do valor 3,7 uma vez que a curva de otimização se comporta de tal forma que tende a estabilizar e a minimizar os ganhos em termos de taxa de sucesso face ao treino empregue após atingir este valor. Esta versão demora cerca de 23 minutos e 48 segundos a executar.
Note-se também que existe underfitting dos dados de treino face aos dados de

teste, indicando que caso o vetor de pesos seja usado para classificar um dataset de 3 e 8 maior os resultados não deverão desviar-se muito dos obtidos em cima embora possam piorar uma vez que o underfitting mostra que o modelo não se adaptou muito bem aos dados de treino.
No presente momento podemos dizer que o dataset não é linearmente separável na sua totalidade uma vez que não conseguimos separar 11% das imagens do out-sample.

4.2 Análise dos Poolings Clássicos

Nesta secção será abordada a utilização dos poolings denominados clássicos para avaliar os benefícios que estes fornecem á taxa de sucesso de previsão e aos tempos de execução do treino e teste do modelo. Estes serão apresentados na tabela abaixo pela mesma ordem em que foram implementados juntamente com os respetivos resultados[7]. Note-se que, para cada combinação de janela e filtro de pooling, se realizaram 9 execuções do código e que o resultado apresentado é o melhor valor obtido dessas 9 execuções. Note-se também que as in-samples e out-samples serão referenciadas como *in* e *out* e que os seus valores estão em percentagem, e que os valores no campo time se encontram em minutos e segundos.

Janela / Filtro	2x2			2x3			3x2			3x3		
	in(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**
Max	75,00	75,00	17:00	67,40	69,00	11:38	66,94	69,00	8:48	88,00	88,67	6:32
Min	86,00	89,30	16:09	88,18	90,00	9:11	87,71	90,00	11:40	89,88	90,33	6:34
Average	85,70	85,67	17:46	84,18	86,67	9:52	78,65	83,33	12:52	83,06	82,33	3:04
Max Centered	88,60	88,30	21:02	88,06	90,00	13:58	88,00	90,00	8:32	86,29	89,00	6:51

Validação do Classificador	in-sample(%)	out-sample(%)	time
	86,35	89,00	23:48

Nesta tabela temos vários resultados que se mostram melhores que os obtidos aquando da validação do classificador, sendo que esses resultados são fruto da conjugação dos filtros "Min"e "Max Centered"com as várias janelas utilizadas. Por outro lado o filtro "Max"teve maus resultados conjugado com todas as janelas exceto a 3x3.
No caso do filtro Min podemos observar que á medida que aumentamos as dimensões da janela os resultados tendem a melhorar e o underfitting do modelo tende a diminuir, sendo o seu menor valor 0.45% no caso da janela 3x3. O modelo resultante da conjugação do fitro Min com a janela 3x3 e stride 2 nas dimensões x e y foi aquele que produziu o melhor resultado uma vez que apresenta juntamente com a melhor taxa de sucesso nas previsões, a menor taxa de underfitting

[7] Para cada um dos poolings procedeu-se também a uma otimização dos parâmetros de learning rate e número de epochs.

e o melhor tempo demorando apenas 6 minutos e 34 segundos a executar.
É também importante realçar que comparando os resultados obtidos das conjugações dos diferentes filtros empregues com as janelas 2x3 e 3x2 se verifica que a janela 2x3 é em geral melhor para prever os dados por possuir menor underfitting, isto é as imagens do dataset são melhor classificadas caso se use uma janela que possua dimensões em y maiores do que em x.

4.3 Análise dos Poolings Exóticos

Nesta secção será analisada a utilização dos poolings exóticos implementados e explicados na secção anterior. Mais uma vez executaram-se 9 vezes cada combinação de janela e filtro e apenas o melhor resultado de cada combinação é apresentado. Adicionalmente sublinha-se que as in-samples e out-samples encontram-se na tabela referenciadas como *in* e *out* e os seus valores encontram-se em percentagem. Uma vez que os nomes dos filtros exóticos são extensos utilizar-se-ão as iniciais de cada um e estes serão apresentados na tabela pela ordem de apresentação dos mesmos na subsecção 2.2.

Janela / Filtro	2x2			2x3			3x2			3x3		
	in(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**	**in**(%)	**out**(%)	**time**
DVAP	83,65	87,00	13:03	84,18	87,00	6:24	84,18	87,00	6:35	81,06	82,00	5:33
DVMCP	89,24	87,67	15:43	84,29	86,67	6:40	88,76	90,00	6:57	86,59	90,33	6:54
DVMP	86,35	90,33	20:33	88,67	83,41	8:37	85,82	89,33	8:58	87,53	89,00	4:26
DVMAP	86,12	89,67	21:33	86,12	87,67	10:07	85,76	88,33	8:30	83,88	85,00	4:42

	in-sample(%)	out-sample(%)	time
Validação do Classificador	86,35	89,00	23:48

No geral os resultados obtidos com a aplicação dos poolings exóticos são inferiores aos obtidos com poolings clássicos. No entanto, existem 2 resultados que superam os anteriormente vistos, nomeadamente a conjugação do filtro Diagonal and Vertical Max Pooling com a janela 2x2 e do filtro Diagonal and Vertical Max Centered Pooling com a janela 3x3. Embora ambos tenham um resultado de out-sample igual, o segundo pooling referido oferece 2 vantagens face ao primeiro. Além de possuir um underfitting ligeiramente inferior é pelo menos três vezes mais rápido a executar fazendo deste a escolha obvia como o melhor modelo dos dois.

Comparando todos os resultados obtidos durante os testes podemos concluir que o melhor modelo se trata daquele resultante da aplicação do filtro "Min"á janela 3x3 por se tratar do mais rápido com menor underfitting e melhor valor preditivo. Adicionalmente podemos concluir que cerca de 9-10% desta base de dados não é linearmente separável, totalizando cerca de 27-30 imagens do dataset de treino as quais o nosso melhor modelo não consegue separar.

Adicionalmente procurou-se saber qual a janela minima a utilizar para se verificar uma perda total de informação útil para além de ruido. Verificou-se que a perda de informação útil se começa a dar a partir da janela de dimensões 6x5 com strides 5 em x e 4 em y.
O cenário onde se verificou a perda total de informação útil deu-se quando se utilizou uma janela de tamanho 10x9 com strides 9 em x e 8 em y, resultando em imagens de 9 pixeis quase impossiveis de se distinguirem como se pode verificar na matriz de confusão obtida.

```
in-samples error=5.786265
[[505. 338.]
 [ 18. 839.]]
Acc:  0.7905882352941176


out-samples error=5.157794
[[107.  50.]
 [  6. 137.]]
Acc:  0.8133333333333334
```

(a) Tabelas de confusão da janela 6x5

```
in-samples error=13.084102
[[765.  78.]
 [727. 130.]]
Acc:  0.5264705882352941


out-samples error=12.526064
[[140.  17.]
 [119.  24.]]
Acc:  0.5466666666666666
```

(b) Tabelas de confusão da janela 10x9

Referências

1. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
2. Kevin P. Murphy. *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. MIT Press, 2012.
3. Trevor Hastie, Robert Tibshirani and Jerome Friedman. *The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer, Janeiro 13 de 2017.
4. John D. Keller, Brian Mac Namee and Aoife D'Arcy. *Fundamentals of Machine Learning For Predictive Data Analytics*. MIT Press, 2015.
5. Mehryar Mohri, Afshin Rostamizadeh and Ameet Talwalkar. *Foundations of Machine Learning*. MIT Press, 2018.
6. Josh Hugh Learning. *Python Machine Learning*. JHL.
7. Charu C. Aggarwal. *Linear Algebra and Optimization for Machine Learning*. Springer, 2020.
8. Ivan Vasilev, Daniel Slater, Gianmario Spacagna, Peter Roelants and Valentino Zocca. *Python Deep Learning*. Packt, 2019.
9. Nathalie Japkowicz. *Evaluating Learning Algorithms: A Classification Perspective*. cambridge university press, 2011.