Distribuições de Probabilidades

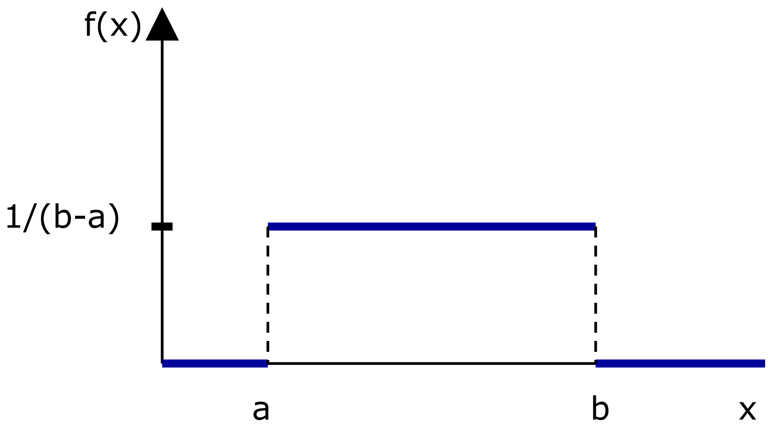
1 Distribuições Contínuas

1.1 Distribuição Uniforme - U(a,b)

Uso mais comum:

- Primeira tentativa em casos em que apenas os limites dos dados são conhecidos.

Função Densidade:



$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ (x-a)/(b-a) & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } b < x \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = (a+b)/2$$

Variância:

$$Var(x) = (b-a)^2/12$$

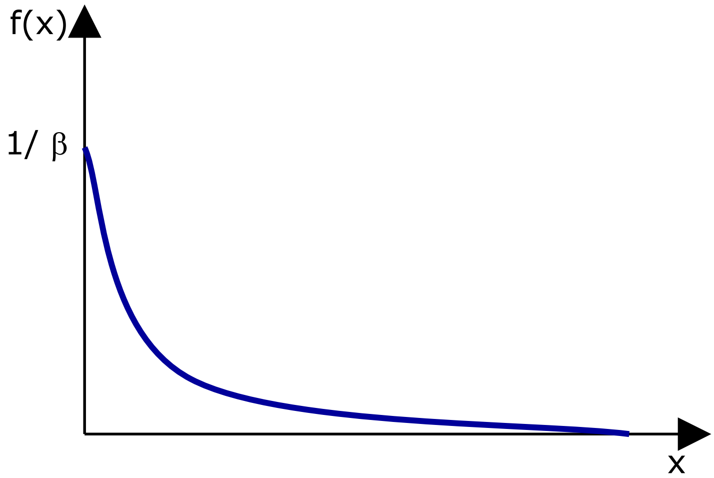
1.2 Distribuição Exponencial - EXPO(β)

Usos mais comuns:

- Intervalos de tempo de chegada de clientes a um sistema, cuja chegada ocorre com uma determinada taxa constante.
- Intervalo de tempo até a falha de uma peça de um equipamento.

Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Função Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = \beta$$

Variância:

$$Var(x) = \beta^2$$

Observar que β representa o intervalo médio de chegada. Também poderia ser indicado, em lugar de β , o parâmetro $\lambda = 1/\beta$ que representa a freqüência de chegada.

1.3 Distribuição Gama - Gama(α,β)

Usos mais comuns:

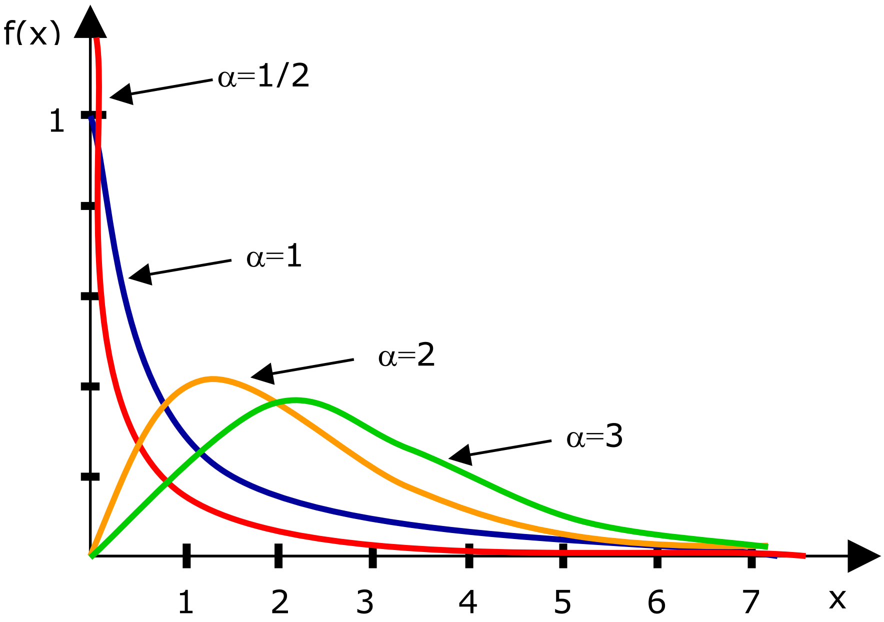
- Tempo para realizar alguma tarefa.

Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $\Gamma(\alpha)$ a função Gama definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad \text{para } z > 0$$



Gráficos da Distribuição Gama(α,1)

Função Distribuição:
Se α é um inteiro positivo então

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} \sum_{j=1}^{\alpha-1} \dfrac{(x/\beta)^j}{j!} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = \alpha\beta$$

Variância:

$$Var(x) = \alpha\beta^2$$

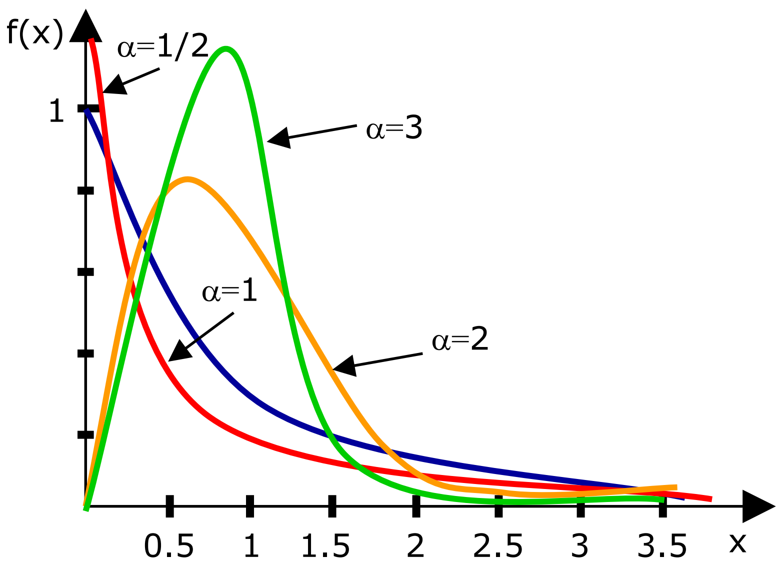
1.4 Distribuição Weibull - Weibull(α,β)

Usos mais comuns:

- Tempo para realizar alguma tarefa tal como o tempo de reparo de uma máquina.
- Intervalo de tempo até a falha de uma peça de um equipamento.

Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Gráficos de Distribuição Weibull(α,1)

Função Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Média:

$$E[x] = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$$

Variância:

$$Var[x] = \frac{\beta^2}{\alpha}\{2\Gamma(\frac{2}{\alpha}) - \frac{1}{\alpha}[\Gamma(\frac{2}{\alpha})]^2\}$$

1.5 Distribuição Normal - Normal(μ,σ^2)

Usos mais comuns:

- Erros de tipos diversos
- Valores que são a soma de grande número de outros valores.

Função Densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

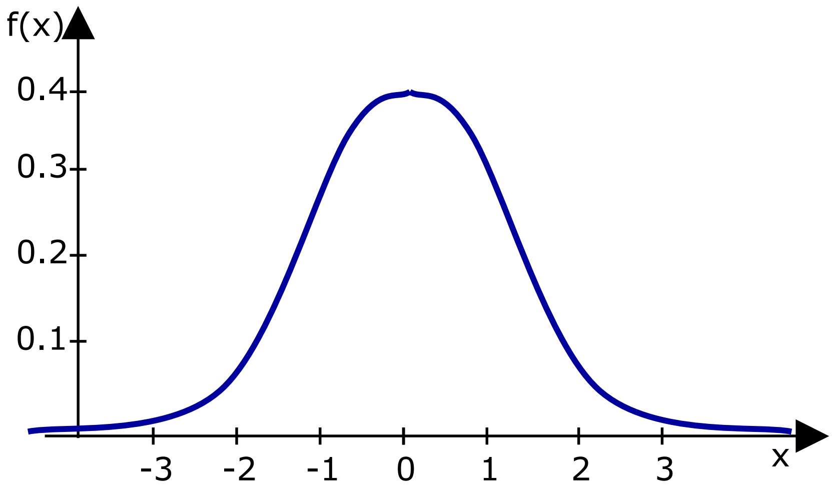


Gráfico da Distribuição Normal(0,1)

Função Distribuição:

Não tem forma fechada

Média:

$$E[x] = \mu$$

Variância:

$$Var[x] = \sigma^2$$

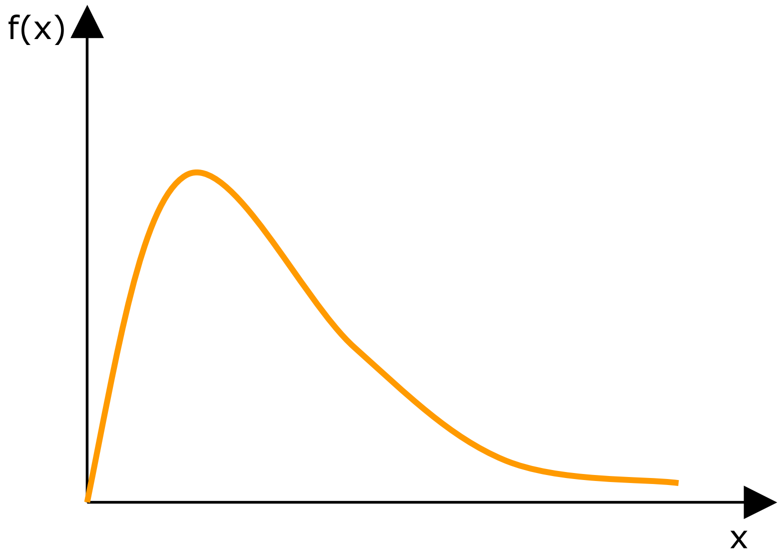
1.6 Distribuição Lognormal - Lognormal(μ,σ^2)

Usos mais comuns:

- Tempo para realizar alguma tarefa.

- Valores que são o produto de grande número de outros valores.

Tem formato semelhante à Gama e à Weibull.



Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função Distribuição:

Não tem forma fechada

Média:

$$E[x] = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

Variância:

$$Var[x] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

1.7 Distribuição Beta – Beta(β,α)

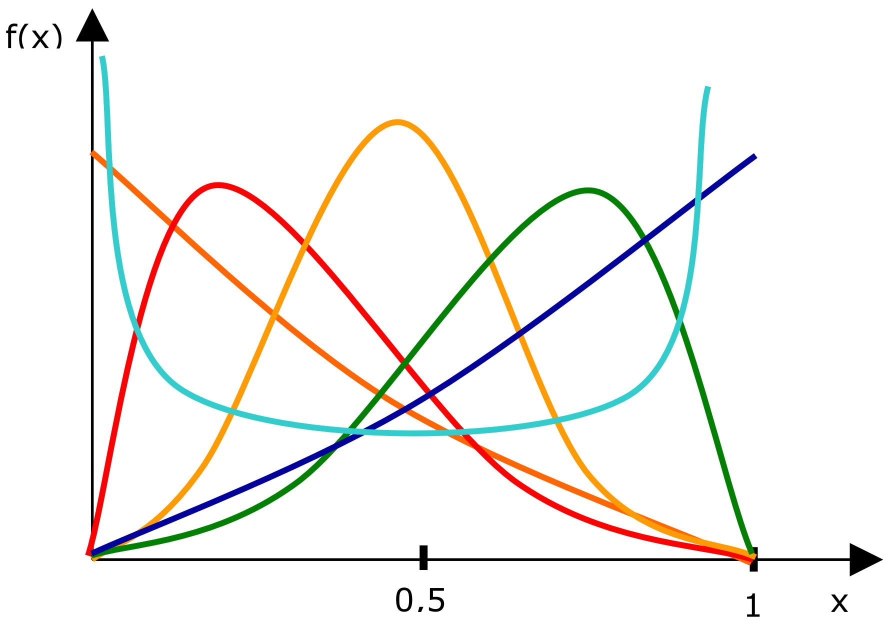
Usos mais comuns:

- Aproximação na ausência de dados que permitam obter uma distribuição mais adequada.
- Distribuição de proporções aleatórias tais como a proporção de peças defeituosas em uma partida de peças.

Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}}{B(\beta,\alpha)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $B(\beta,\alpha)$ a função Beta definida como $B(\beta,\alpha) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt$



Gráficos da Distribuição Beta(β,α)

Função Distribuição:

Em geral não tem forma fechada.

Média:

$$E[x] = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

Variância:

$$Var[x] = \frac{\beta\alpha}{(\beta+\alpha)^2(\beta+\alpha+1)}$$

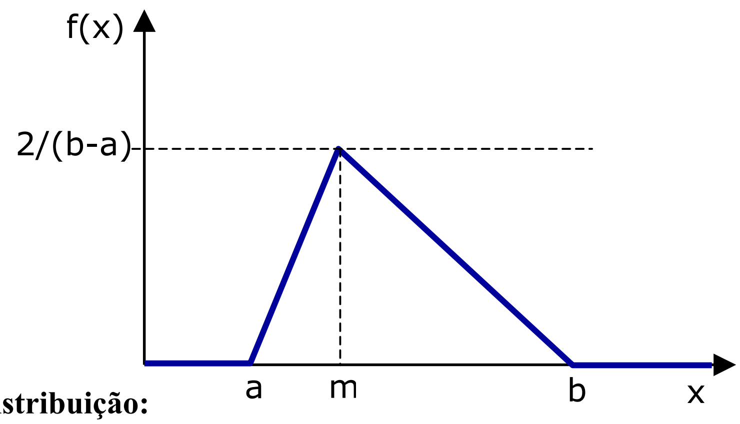
1.8 Distribuição Triangular – Triang(Max, Moda, Min)

Usos mais comuns:

- Aproximação na ausência de dados que permitam obter uma distribuição mais adequada.

Função Densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)} & \text{se } a \le x \le m \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)} & \text{se } m < x \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Função Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(m-a)(b-a)} & \text{se } a \le x \le m \\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-m)(b-a)} & \text{se } m < x \le b \\ 1 & \text{se } b \le x \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = (a + m + b) / 3$$

Variância:

$$Var(x) = (a^2 + m^2 + b^2 - ma - ab - mb) / 18$$

2 Distribuições Discretas

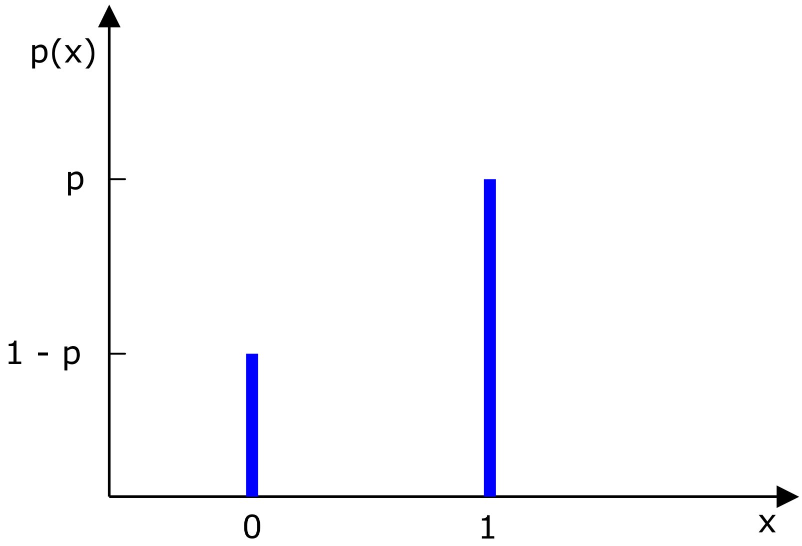
2.1 Distribuição de Bernoulli – Bernoulli(p)

Usos mais comuns:

- Ocorrência aleatória onde são possíveis apenas dois resultados.

Função densidade:

$$p(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Função densidade:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$$

Média:

$$p$$

Variância:

$$p(1 - p)$$

2.2 Distribuição Binomial - Bin(p)

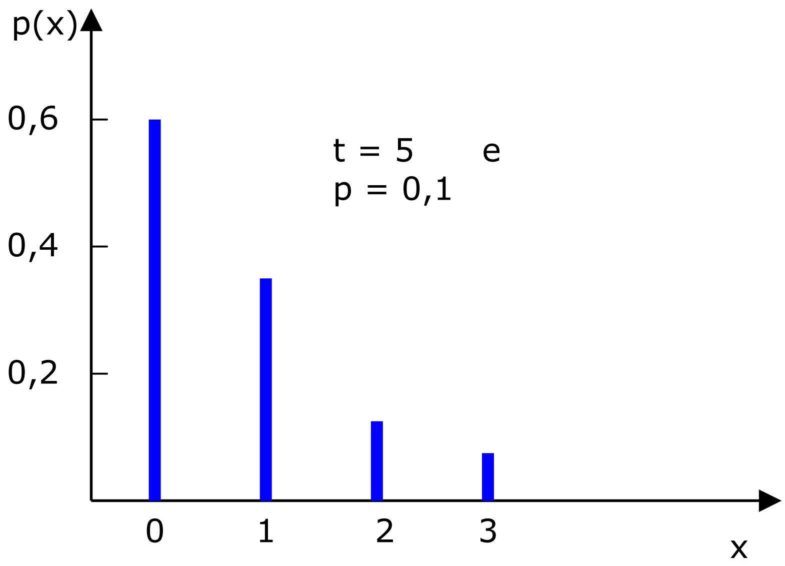
Usos mais comuns:

- Número de sucessos em t tentativas independentes.
- Número de itens defeituosos em um lote de tamanho t.

Função densidade:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{t}{x} p^x (1-p)^{t-x} & \text{se } x \in \{0,1,2,\ldots,t\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\binom{t}{x} = \dfrac{t!}{x!(t-x)!}$



Função Distribuição:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i} & \text{se } 0 \le x \le t \\ 1 & \text{se } t < x \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = t\,p$$

Variância:

$$Var(x) = t\,p\,(1 - p)$$

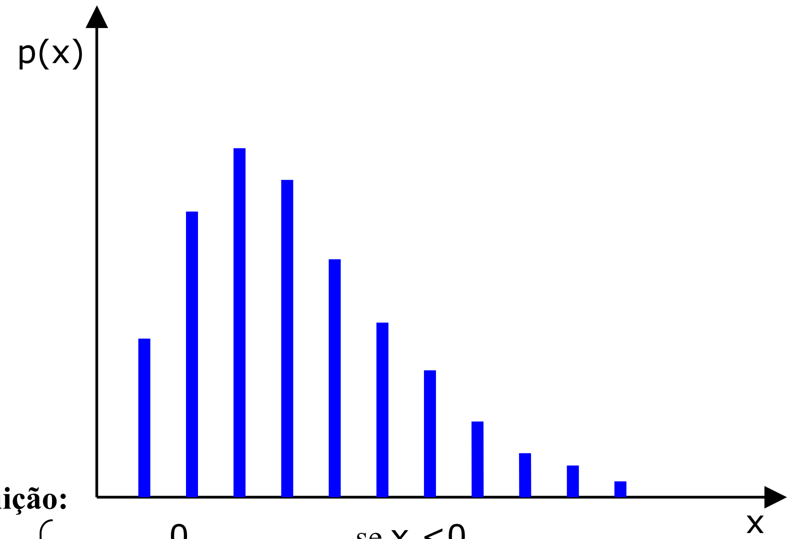
2.3 Distribuição Poisson - Poisson(λ)

Usos mais comuns:

- Modelar eventos aleatórios que ocorrem com uma freqüência média λ conhecida. O intervalo entre os eventos possuirá distribuição exponencial com média $1/\lambda$.

Função densidade:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & \text{se } x \in \{0,1,2,\dots\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Função Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^{i}}{i!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Média:

$$E(x) = \lambda$$

Variância:

Var(x) = λ

3 Bibliografia

[1] Law, A. M., Kelton, W. D., "Simulation Modeling and Analysis", 3rd ed., McGraw-Hill Companies Inc, 2000,ISBN 0-07-059292-6, 760p.
[2] Jain, R., "The Art of Computer Systems Performance Analysis", John Wiley & Sons Inc, ISBN: 0-471-50336-3, 1991, 685 p.
[3] Magalhães, M. N., Lima, A. C. P., "Noções de Probabilidade e Estatística", 3 ed,. IME-USP, São Paulo, 2001, 375p.
[4] Soares, L.F.G., "Modelagem e Simulação Discreta de Sistemas", Editora Campus, 1992, ISBN 85-7001-703-0, 250p.
[5] Kelton, W. D., Sadowski, R. P., Sadowski, D. A., "Simulation with Arena", McGraw-Hill Companies Inc, 1998. [Prad 99]