PCS-2039
Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais

Graça Bressan

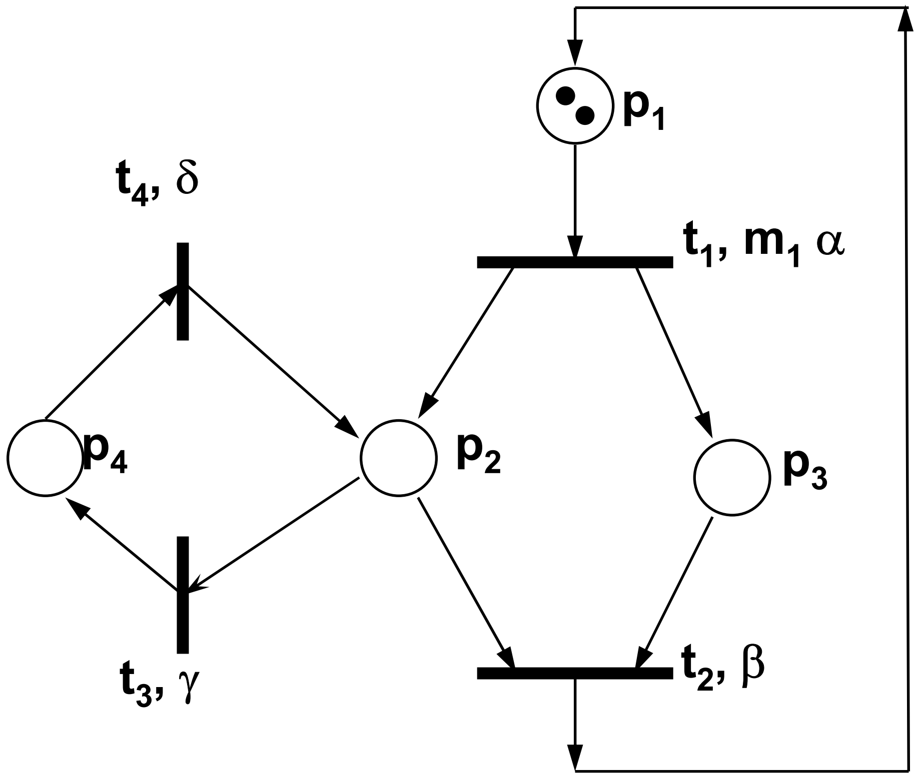
gbressan@larc.usp.br

Redes de Petri Temporizadas Estocásticas

Definição

- Uma *rede de Petri temporizada* é uma sêxtupla ordenada RT = (P, T, I, O, M_0, D), onde R = (P, T, I, O) é uma rede de Petri, RM = (R, M_0) é uma rede de Petri marcada e D = $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ é um conjunto de *atrasos* associados às transições em T.

Exemplo 1



Propriedades

- Vantagens:
  - A introdução da noção de tempo torna possível modelar não só a *lógica* dos sistemas como também o seu *comportamento dinâmico*;
- Desvantagens:
  - A definição de *estado* de uma rede de Petri inclui agora não só a marcação M, mas também se cada transição t_j está em disparo ou não (i.e. se o atraso d_j já está sendo contado ou não).

Processos Estocásticos

- Um *processo estocástico* é uma seqüência de variáveis aleatórias idênticas (discretas ou contínuas) dependentes de um mesmo parâmetro (por exemplo, do tempo).
- Exemplo: número de usuários na fila de um sistema em função do tempo, Q(t).

Processos e Cadeias de Markov

- Um *processo de Markov* é um processo estocástico em que os estados futuros dependem exclusivamente do estado atual (i.e. o sistema não tem "memória" de sua história passada), como no caso de variáveis aleatórias com distribuição exponencial.
- Uma *cadeia de Markov* é um processo de Markov com estados discretos.

Redes Temporizadas Estocásticas

- Uma rede de Petri temporizada estocástica é uma sêxtupla ordenada RTE = {P, T, I, O, M_0, L} onde R = (P, T, I, O) é uma rede de Petri, (R, M_0) é uma rede de Petri marcada, e L = $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ é um conjunto de *taxas de disparo* associadas às transições em T que obedecem a uma distribuição *exponencial*.
- As taxas de disparo podem ter o seu valor dependente do número de marcas nos lugares da rede, isto é, $l_j = l_j(M)$.

Cadeia de Markov Associada

- A natureza exponencial (sem memória) das taxas de disparo das transições permite associar uma cadeia de Markov (com tempo contínuo) a cada RTE.
- O espaço de estados da cadeia de Markov associada corresponde ao conjunto de alcançabilidade da RTE com marcação inicial M_0.

Cadeia de Markov Associada

- A probabilidade de uma transição t_j habilitada em M_i disparar é dada por $P[t_j \mid M_i] = l_j / q_i$, onde

$$q_i = \sum_{t_k \in H_i} l_k$$

e H_i é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i.

Cadeia de Markov Associada

- A taxa de mudança do estado i (associado à marcação M_i) para o estado j (M_j) é:

$$q_{ij} = \sum_{t_k \in H_{ij}} l_k \qquad \text{se } i \neq j$$

$$q_{ii} = -q_i$$

onde H_{ij} é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i, cujo disparo gera a marcação M_j.

Cadeia de Markov Associada

- A cadeia de Markov associada a uma rede de Petri temporizada estocástica diz-se *ergódica* se a marcação inicial M_0 for alcançável a partir de qualquer outra marcação em $A(R, M_0)$.
- Nesse caso, define-se o vetor de *probabilidades de equilíbrio*

  $\pi = (\pi_0 \; \pi_1 \; \ldots \; \pi_{s-1})$ da rede de Petri, onde s é o número de marcações em $A(R, M_0)$.

Probabilidades de Equilíbrio

- O vetor de probabilidades de equilíbrio

$$\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \ldots\ \pi_{s-1})$$

  de uma RTE é a solução do sistema linear

$$\pi Q = 0$$

  (isto é, após atingir o equilíbrio as probabilidades de mudança de estado caem para zero) com a restrição $\Sigma_i\, \pi_i = 1$, onde $Q = [q_{ij}]$.
- As probabilidades de equilíbrio também são chamadas de probabilidades de *estado estacionário* ou de *estado estável*.

Propriedades Derivadas de π

- *Probabilidade de uma condição particular*: A probabilidade de uma certa condição de equilíbrio ocorrer num subconjunto A' ⊆ A(R, M_0) é dada por $$P\{A'\} = \sum_{i \in A'} \pi_i$$
- Exemplo: probabilidade de o número marcas num lugar p_i da rede ser igual a *k*:

$$P\{M(p_i) = k\} = \sum_{M(p_i)=k} \pi_i$$

Propriedades Derivadas de π

- *Valor médio do número de marcas num lugar da rede*: Se A(i, *x*) é o sub-conjunto de A(R, M_0) onde o número de marcas no lugar i é $x \le k$, então

$$E[M(p_i)] = \sum_{x=0}^{k} x P\{A(i,x)\}$$

- Fórmula simplificada (matricial):

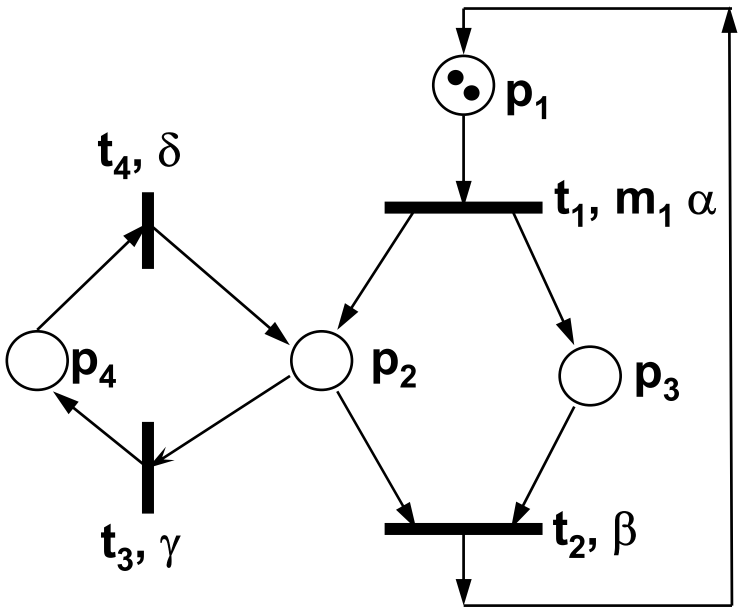
$$E[M(p_i)] = \sum_{j=0}^{s-1} \pi_j M_j(p_i)$$

Propriedades Derivadas de π

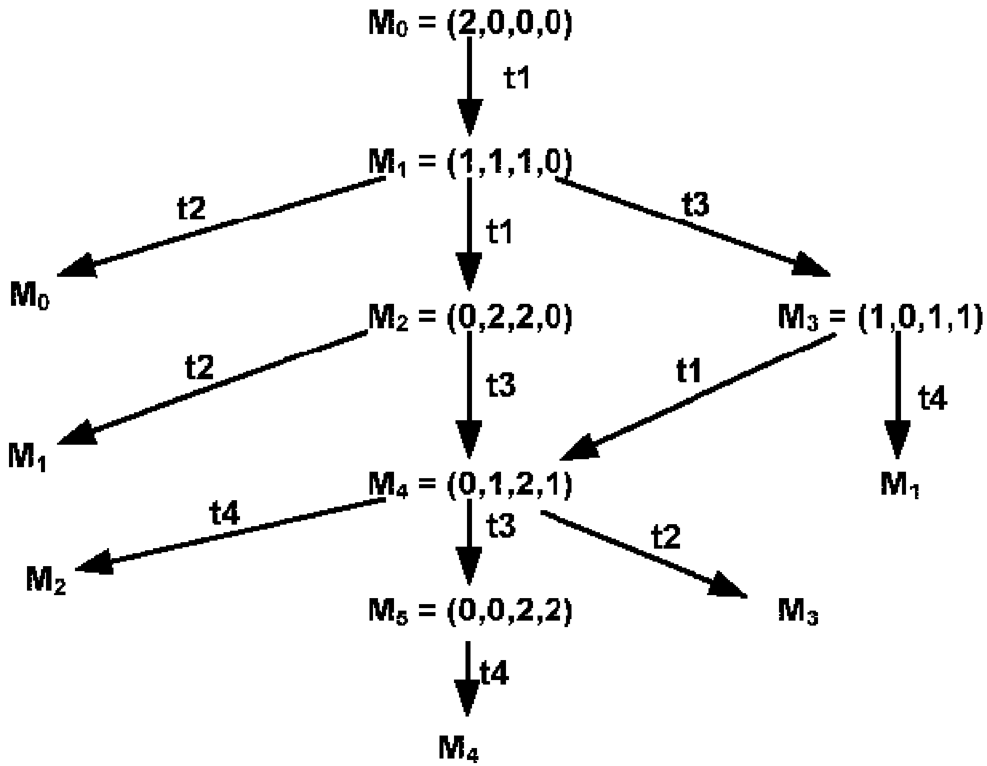
- *Número médio de disparos de uma transição por unidade de tempo*: Se num subconjunto $A_j \subseteq A(R, M_0)$ uma dada transição t_j está habilitada, então o número médio de disparos de t_j é dado por:

$$f_j = \sum_{M_i \in A_j} \pi_i \, l_j / q_i$$

Exemplo 1

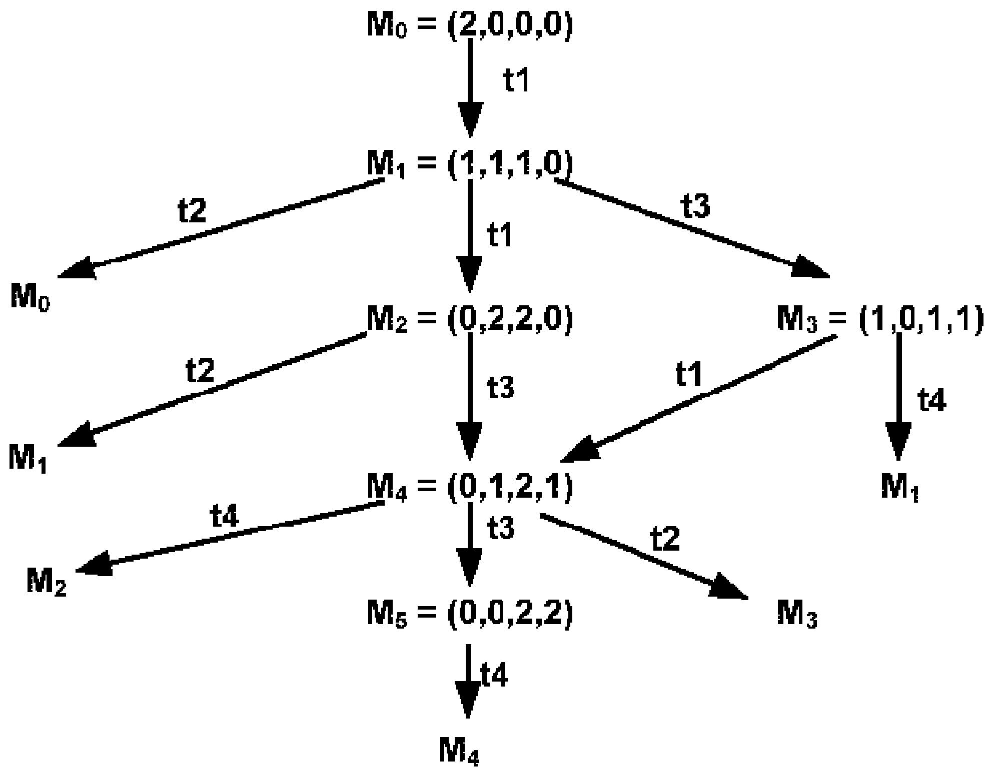


p_1
t_1, m_1 α
t_4, δ
p_4
p_2
p_3
t_3, γ
t_2, β

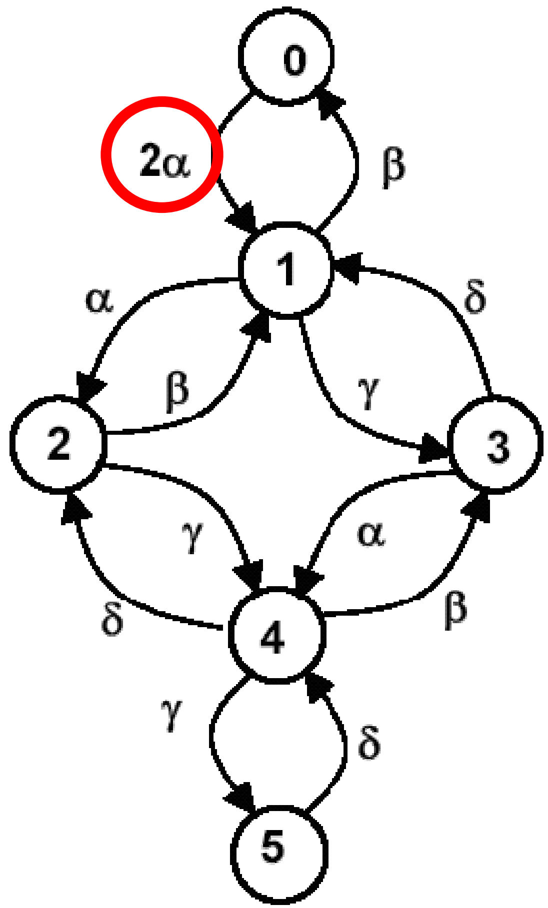


$M_0 = (2,0,0,0)$
t1
$M_1 = (1,1,1,0)$
t2
t1
t3
M_0
$M_2 = (0,2,2,0)$
$M_3 = (1,0,1,1)$
t2
t3
t1
t4
M_1
$M_4 = (0,1,2,1)$
M_1
t4
t3
t2
M_2
$M_5 = (0,0,2,2)$
M_3
t4
M_4

Exemplo 1



$M_0 = (2,0,0,0)$
t1
$M_1 = (1,1,1,0)$
t2
t1
t3
M_0
$M_2 = (0,2,2,0)$
$M_3 = (1,0,1,1)$
t2
t3
t1
t4
M_1
M_1
$M_4 = (0,1,2,1)$
t4
t3
t2
M_2
$M_5 = (0,0,2,2)$
M_3
t4
M_4



0
2α
β
1
α
δ
β
γ
2
3
γ
α
δ
β
4
γ
δ
5

Exemplo 1

- Cálculo do vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5)$: resolução do sistema linear $\pi Q = 0$ impondo $\Sigma_i\, \pi_i = 1$, onde

$$Q = \begin{pmatrix} -2\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta+\alpha+\gamma) & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\beta+\gamma) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -(\delta+\alpha) & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta & -(\delta+\beta+\gamma) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

Exemplo 1

- Considerando $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$ e resolvendo o sistema, obtemos $\pi_0 = 1/11$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 2/11$.
- Número médio de marcas em p_1: $E[M(p_1)] = 2\pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 6/11$.
- Taxa de disparo de t_2: $f_2 = (1/3)\,\pi_1 + (1/2)\,\pi_2 + (1/3)\,\pi_4 = 7/33$ (N.B. t_2 está habilitada somente nas marcações M_1, M_2 e M_4).

Exercício

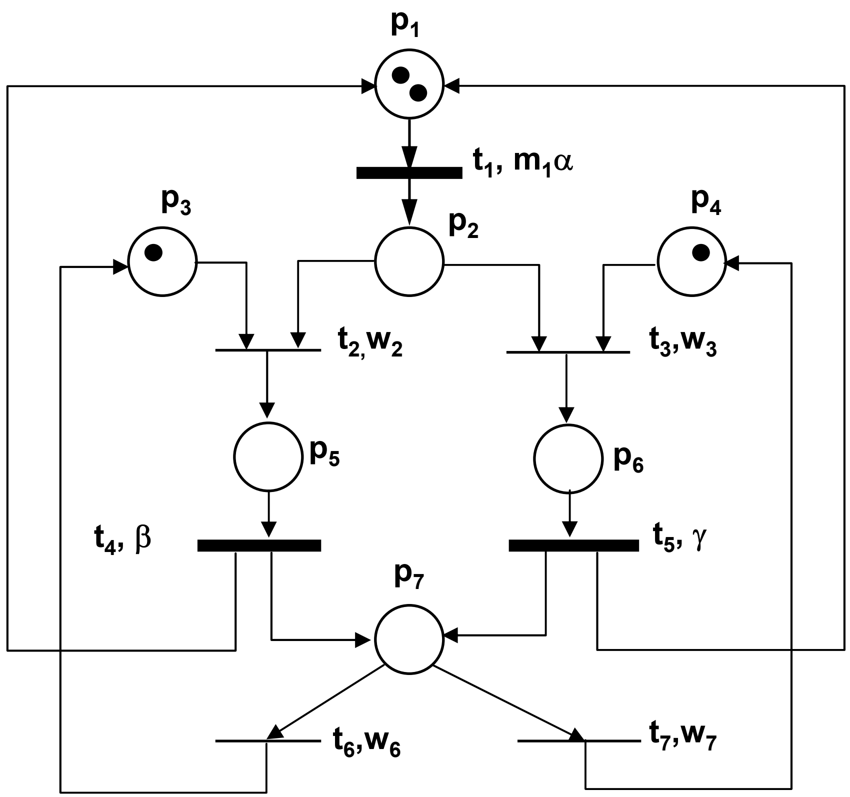
- Calcular o número médio de marcas em todos os estados, o valor médio do número de marcas em todos os lugares da rede e o número médio de disparos de todas as transições por unidade de tempo na mesma rede analisada para as freqüências de disparos $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$.

Redes de Petri Estocásticas Generalizadas

Definição

- Uma *rede de Petri estocástica generalizada* (RPEG) é uma sêxtupla ordenada RT = (P, T, I, O, M_0, W), onde R = (P, T, I, O) é uma rede de Petri, RM = (R, M_0) é uma rede de Petri marcada e W = {w_1, w_2, ..., w_n} é um conjunto onde w_j é:
  - a *taxa de disparo* de t_j, se t_j é temporizada;
  - o *peso* de t_j, se t_j é imediata.
- Dois tipos de transições:
  - Imediatas (atraso nulo);
  - Temporizadas (atraso distribuído exponencialmente).

Exemplo 2



p_1
t_1, $m_1\alpha$
p_3
p_2
p_4
t_2,w_2
t_3,w_3
p_5
p_6
t_4, β
t_5, γ
p_7
t_6,w_6
t_7,w_7

Regras de Disparo para RPEG

- Seja H o conjunto das transições habilitadas na marcação M. Se todas as transições de H forem temporizadas, a probabilidade de disparo de $t_j \in H$ será:

$$P[t_j \mid M] = w_j \Big/ \sum_{t_k \in H} w_k$$

ou seja, dispara a transição com a maior taxa de disparo ou o menor tempo.

Regras de Disparo para RPEG

- Se o conjunto H possui uma única transição imediata, somente essa transição pode disparar com probabilidade 1.
- Se H contém um subconjunto HI com várias transições imediatas em conflito, uma delas deve disparar segundo a probabilidade de disparo (chamada de *função seletora*) dada por:

$$P[t_j \mid M] = w_j \Big/ \sum_{t_k \in HI} w_k$$

Cadeia de Markov Associada

- Regra de disparo dá prioridade às transições imediatas.
- Marcações resultantes do disparo de uma transição temporizada não ocorrem quando existem transições imediatas habilitadas.
- A árvore de alcançabilidade (e, portanto, a cadeia de Markov associada) será reduzida.

Categorias das Marcações

- Marcações *tangíveis*: possuem somente transições temporizadas habilitadas.
- Marcações *intangíveis*: possuem alguma transição imediata (ou nenhuma transição de nenhum tipo) habilitada.

Matriz de Probabilidade de Mudança de Estado

- Seja H_i o conjunto das transições habilitadas pela marcação M_i, e H_{ij} o conjunto das transições habilitadas pela marcação M_i cujo disparo gera a marcação M_j.
- A matriz de probabilidade de mudança de estado $U = [u_{ij}]$ é definida por:

$$u_{ij} = \sum_{t_k \in H_{ij}} w_k \bigg/ \sum_{t_k \in H_j} w_k$$

Construção da Cadeia de Markov

- Se a cadeia de Markov associada à rede de Petri for ergódica, a saber, se a marcação inicial M_0 for alcançável a partir de qualquer outra marcação em $A(R, M_0)$, o vetor de probabilidades de equilíbrio

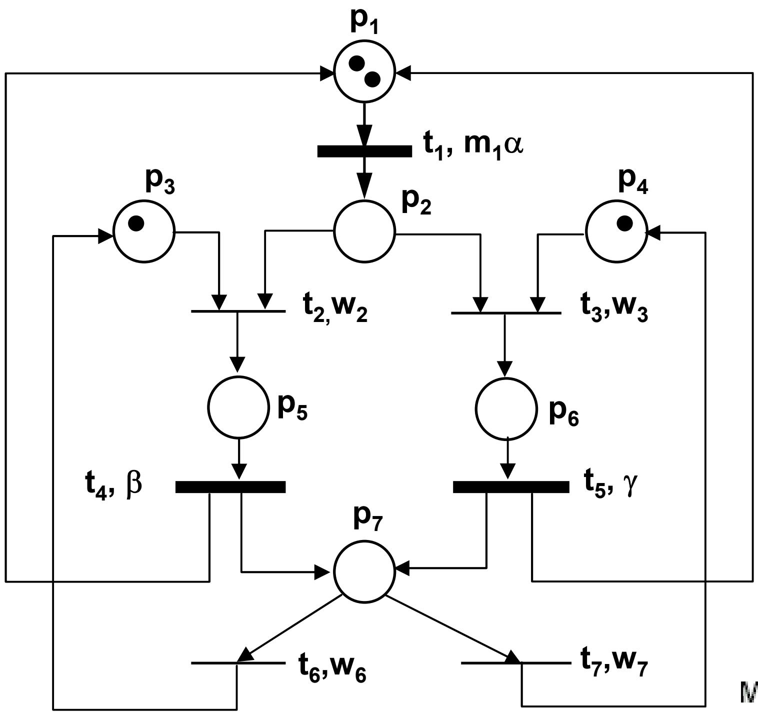
$$\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \ldots\ \pi_{s-1})$$

é obtido como solução do sistema linear

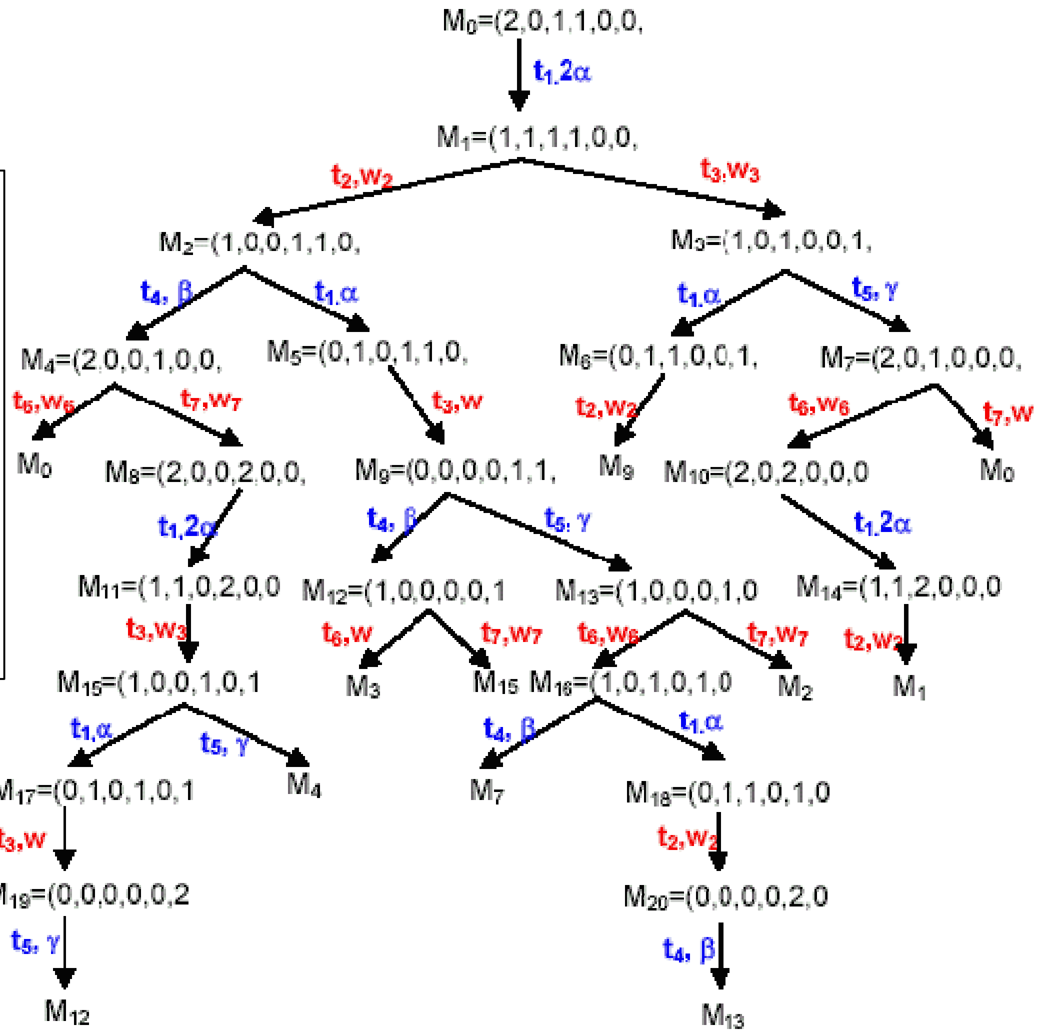
$$\pi U = \pi$$

(isto é, o estado de equilíbrio π um *ponto fixo* de U, pois não é afetado por transições subseqüentes) com a restrição $\Sigma_i\, \pi_i = 1$, onde $s = \#A(R, M_0)$.

Exemplo 2

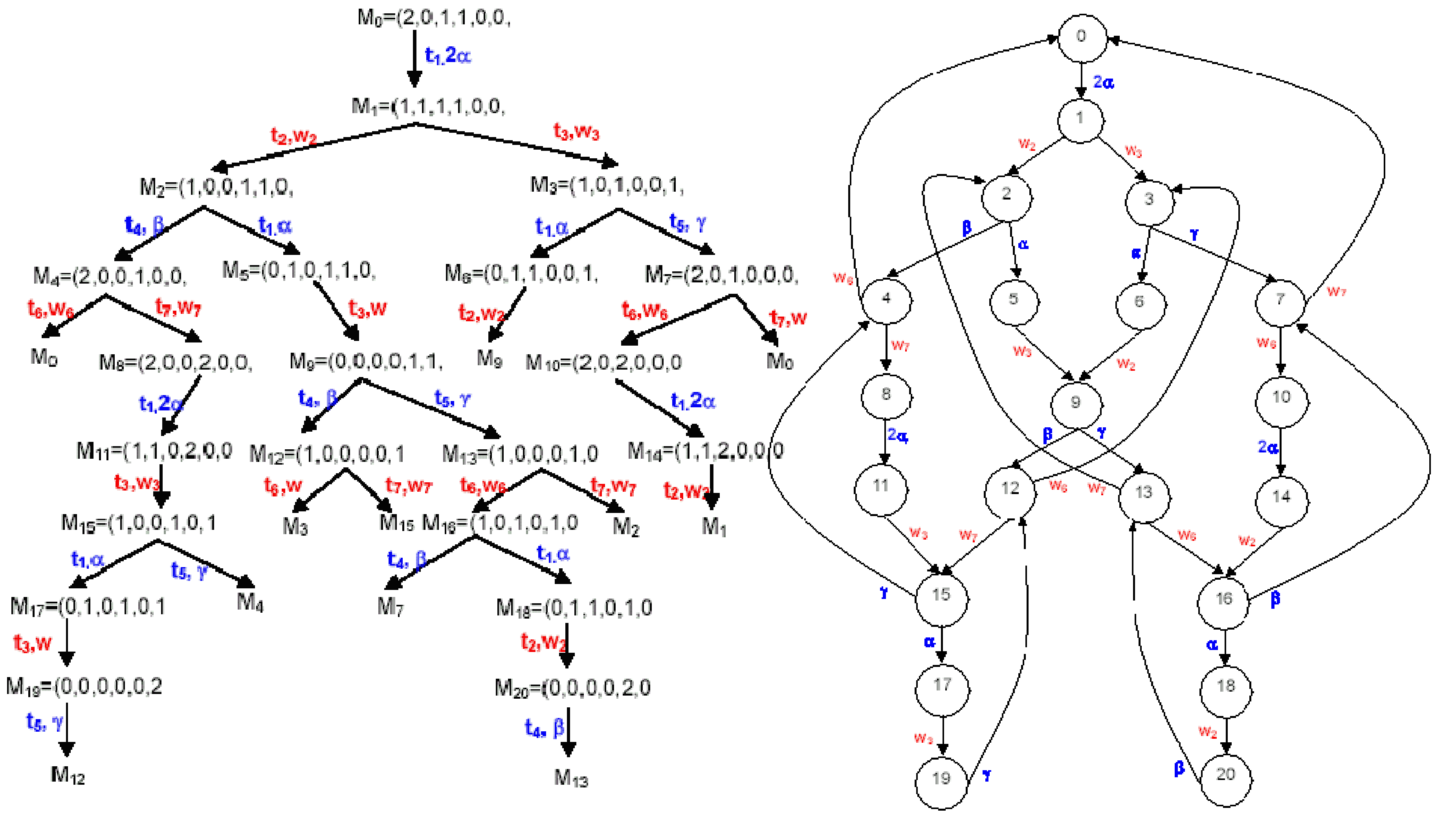


p_1
t_1, $m_1\alpha$
p_2
p_3
p_4
t_2, w_2
t_3, w_3
p_5
p_6
t_4, β
t_5, γ
p_7
t_6, w_6
t_7, w_7

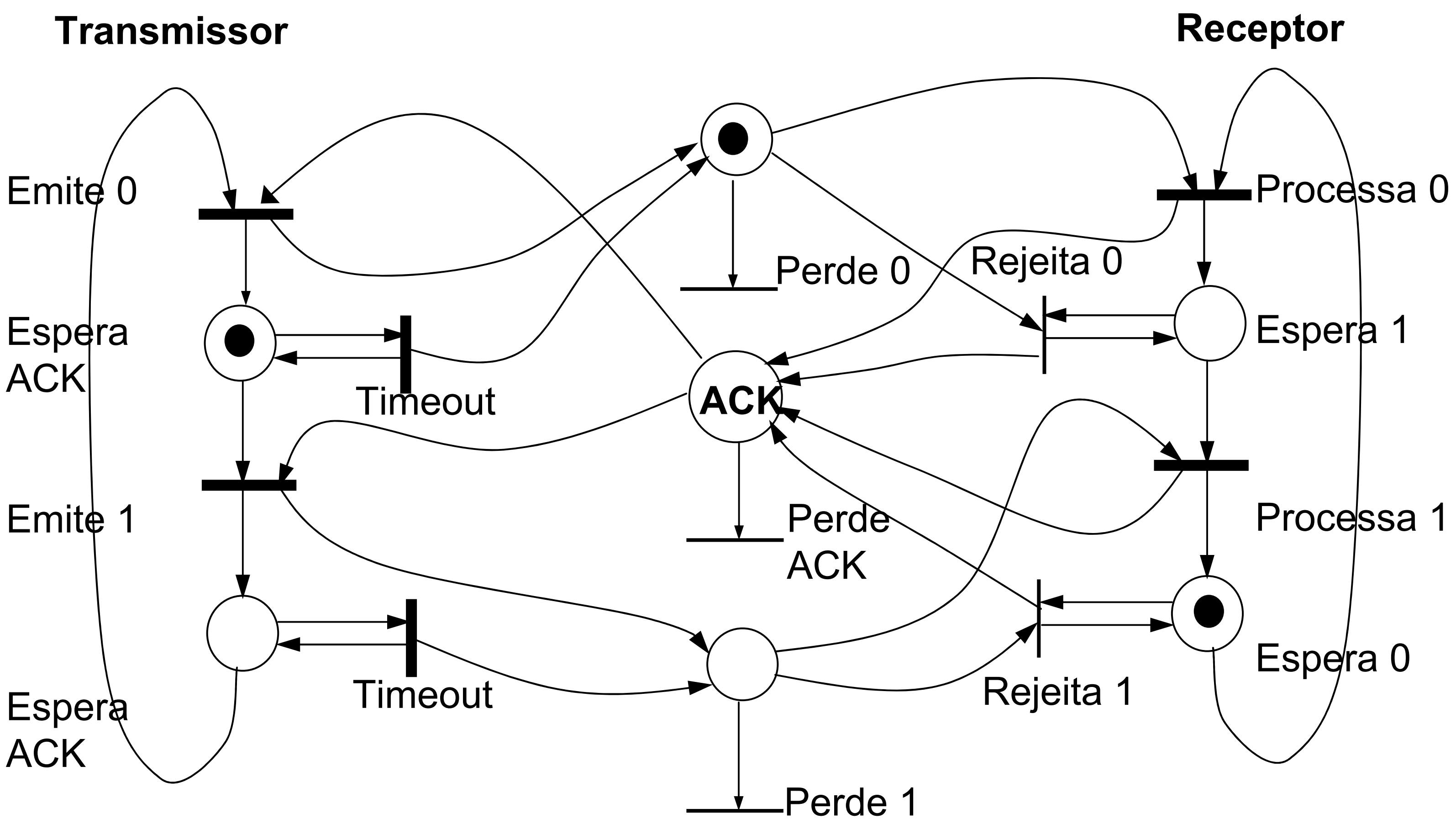


M_0=(2,0,1,1,0,0,
t_1,2α
M_1=(1,1,1,1,0,0,
t_2,w_2
t_3,w_3
M_2=(1,0,0,1,1,0,
M_3=(1,0,1,0,0,1,
t_4, β
t_1,α
t_1,α
t_5, γ
M_4=(2,0,0,1,0,0,
M_5=(0,1,0,1,1,0,
M_6=(0,1,1,0,0,1,
M_7=(2,0,1,0,0,0,
t_6,w_6
t_7,w_7
t_3,w
t_2,w_2
t_6,w_6
t_7,w
M_0
M_8=(2,0,0,2,0,0,
M_9=(0,0,0,0,1,1,
M_9
M_{10}=(2,0,2,0,0,0
M_0
t_1,2α
t_4, β
t_5, γ
t_1,2α
M_{11}=(1,1,0,2,0,0
M_{12}=(1,0,0,0,0,1
M_{13}=(1,0,0,0,1,0
M_{14}=(1,1,2,0,0,0
t_3,w_3
t_6,w
t_7,w_7
t_6,w_6
t_7,w_7
t_2,w_2
M_{15}=(1,0,0,1,0,1
M_3
M_{15}
M_{16}=(1,0,1,0,1,0
M_2
M_1
t_1,α
t_5, γ
t_4, β
t_1,α
M_{17}=(0,1,0,1,0,1
M_4
M_7
M_{18}=(0,1,1,0,1,0
t_3,w
t_2,w_2
M_{19}=(0,0,0,0,0,2
M_{20}=(0,0,0,0,2,0
t_5, γ
t_4, β
M_{12}
M_{13}

Exemplo 2


M0=(2,0,1,1,0,0,
t1,2α
M1=(1,1,1,1,0,0,
t2,w2
t3,w3
M2=(1,0,0,1,1,0,
M3=(1,0,1,0,0,1,
t4, β
t1,α
t1,α
t5, γ
M4=(2,0,0,1,0,0,
M5=(0,1,0,1,1,0,
M6=(0,1,1,0,0,1,
M7=(2,0,1,0,0,0,
t6,w6
t7,w7
t3,w
t2,w2
t6,w6
t7,w
M0
M8=(2,0,0,2,0,0,
M9=(0,0,0,0,1,1,
M9
M10=(2,0,2,0,0,0
M0
t1,2α
t4, β
t5, γ
t1,2α
M11=(1,1,0,2,0,0
M12=(1,0,0,0,0,1
M13=(1,0,0,0,1,0
M14=(1,1,2,0,0,0
t3,w3
t6,w
t7,w7
t6,w6
t7,w7
t2,w2
M15=(1,0,0,1,0,1
M3
M15
M16=(1,0,1,0,1,0
M2
M1
t1,α
t5, γ
t4, β
t1,α
M17=(0,1,0,1,0,1
M4
M7
M18=(0,1,1,0,1,0
t3,w
t2,w2
M19=(0,0,0,0,0,2
M20=(0,0,0,0,2,0
t5, γ
t4, β
M12
M13

Exemplo 3: Protocolo Stop and Wait



Fim do módulo
Redes de Petri Estocásticas Temporizadas