Redes de Petri

1 Definições

1.1 Rede de Petri

Uma *Rede de Petri* é uma quádrupla R = (P,T, I, O) onde:
P = {p_1, p_2,..., p_m} é um conjunto finito de m lugares, com m> 0,
T = {t_1, t_2,..., t_n} é um conjunto de n transições, com n > 0,
O conjunto P ∩ T é vazio,
I : T -> P é a função de entrada, identifica todos os lugares de entrada de uma transição,
O: T -> P é a função saída, identifica todos os lugares de saída de uma transição.

Observações:

- Um lugar p_i é *lugar de entrada* de t_j se p_i pertence ao conjunto I (t_j),
- Um lugar p_i é *lugar de saída* de t_j se pi pertence ao conjunto O (t_j).
- O ponto escuro dentro de alguns lugares é chamado de *marca*.

1.2 Marcação

Uma *marcação* M de uma rede de Petri R = (P,T, I, O) é uma função definida em P e com valores inteiros não negativos, sendo M(p) o número de marcas no lugar p e M: P -> N onde N é o conjunto dos inteiros incluindo o zero;

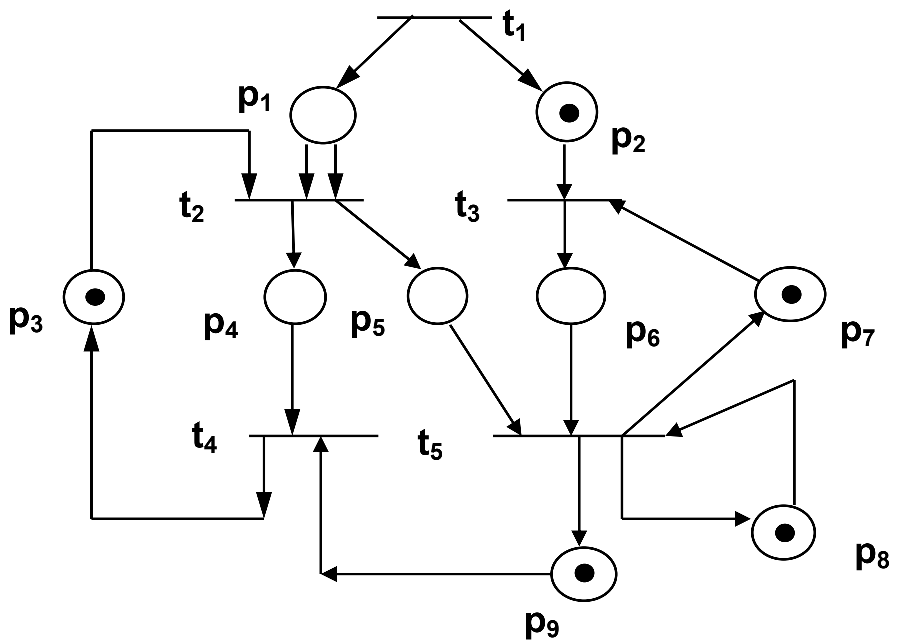
Uma *Rede de Petri Marcada* é uma dupla RM = (R,M) onde R é uma rede de Petri e M é uma marcação;
No exemplo 1 a marcação da rede é a seguinte:
$M(p_1) = M(p_4) = M(p_5) = M(p_6) = 0$,
$M(p_2) = M(p_3) = M(p_7) = M(p_8) = M(p_9) = 1$.

Exemplo 1:

R = (P,T, I, O),
P = {p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9},
T = {t_1, t_2, t_3, t_4, t_5},

I (t_1) = vazio	O (t_1) = {p_1, p_2}
I (t_2) ={p_1, p_1, p_3}	O (t_2) = {p_4, p_5}
I (t_3) = {p_2, p_7}	O (t_3) = {p_6}
I (t_4) = {p4, p_9}	O (t_4) = {p_3}
I (t_5) = {p_5, p_6, p_8}	O (t_5) = {p_7, p_8, p_9}

RM(R, M) é a Rede de Petri Marcada onde M=(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)
Esta rede de Petri pode ser representada graficamente pela figura a seguir:



1.3 Multiplicidade

A *multiplicidade* de um lugar p_i como entrada da transição t_j é o número de ocorrências de p_i no multiconjunto $I(t_j)$, sendo representado por $\#(p_i,I(t_j))$.

1.4 Transição Habilitada

Uma transição t_j pertencente a T em uma rede de Petri R = (P,T, I, O) com a marcação M está *habilitada,* se para todo pi pertencente $I(t_j)$ tem-se $M(p_i) >= \#(p_i, I(t_j))$.

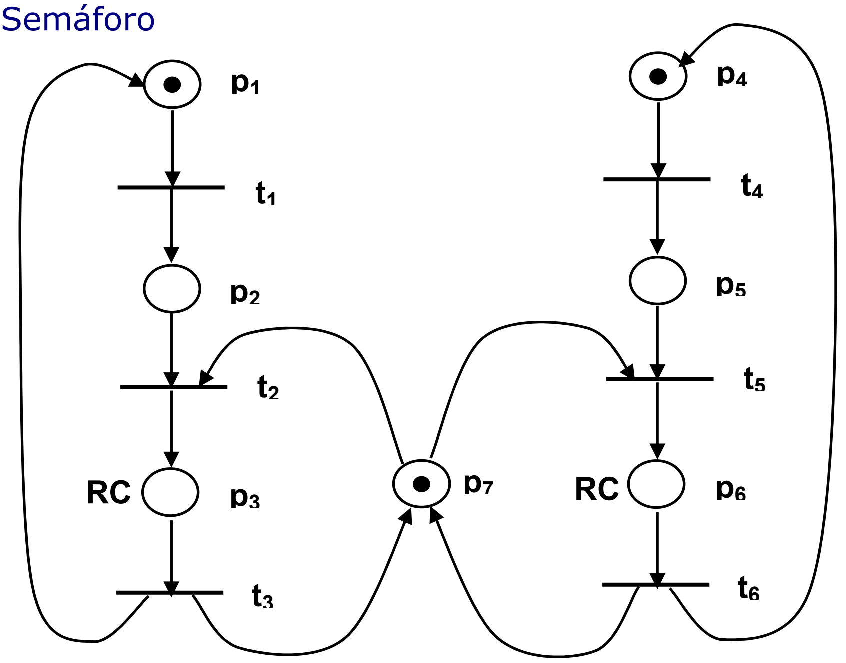
1.5 Disparo de Transição

Uma transição t_j de uma rede de Petri com a marcação M pode *disparar* somente se estiver habilitada. O disparo de uma transição habilitada resulta em uma nova marcação M' definida por

$$M'(p) = M(p) - \#(p,I(t_j)) + \#(p,O(t_j))$$

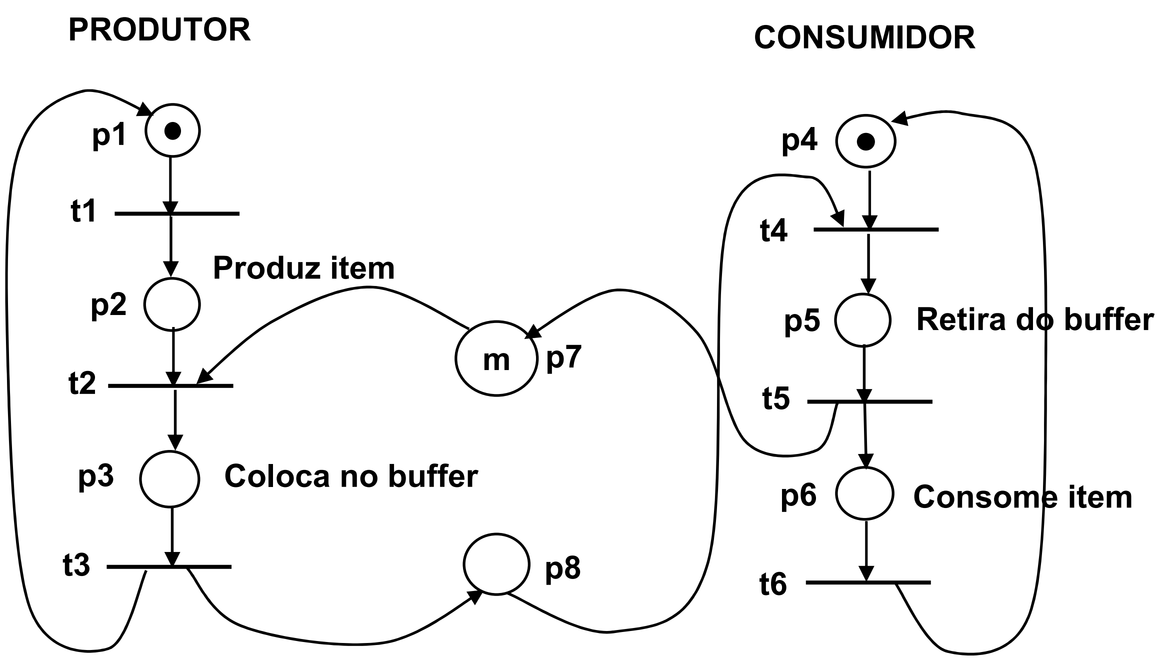
para todo p pertencente a P.

Exemplo 2: Semáforo



P7 - semáforo
RC- região crítica

Exemplo 3: Produtor/Consumidor



m - posições no buffer

1.6 Estado de uma Rede de Petri

O *estado de uma rede de Petri* é definido por sua marcação atual M.

A mudança de estado causado pelo disparo de uma transição é definida pela função próximo estado.

1.7 Função Próximo Estado

A *função próximo estado* δ : N X T -> N para uma rede de Petri R = (P,T,I,O) com marcação M e uma transição t_j pertencente a T é definida, se e somente se t_j estiver habilitada. Neste caso seu valor é definido como $\delta(M,t_j)$ = M' onde M'é a marcação resultante do disparo de t_j, isto é :

$$M'(p) = M(p) - \#(p, I(t_j)) + \#(p, O(t_j)) \qquad \text{para todo } p \text{ pertencente a } P.$$

Esta definição pode ser estendida para uma seqüência de disparos, aplicando a função δ recursivamente.

1.8 Execução de uma Rede de Petri

A execução de uma rede de Petri a partir de uma marcação inicial M_0 é definida pela seqüência de marcações (M_0,M_1,M_2,...) obtida através do disparo das transições (t_{j0},t_{j1},t_{j2},...) tendo seus valores definidos pela função δ.

1.9 Conjunto de Alcançabilidade

O *conjunto de alcançabilidade* A = (R, M) para uma rede de Petri R = (P, T, I, O) com marcação M é o menor conjunto de marcações definido por:

a) M pertence a A = (R,M)
b) Se M' pertence a A(R,M) e M" = δ(M',t_j) para algum t_j pertencente a T, então M" pertence a A(R,M).

Este conjunto pode não ser finito!

1.10 Marcação Imediatamente Alcançável

Dada uma rede de Petri R = (P, T, I, O) com uma marcação M, diz-se que a marcação M' é *imediatamente alcançável* a partir de M se existe uma transição t_j pertencente a T tal que δ(M,tj) = M'.

1.11 Marcação Alcançável

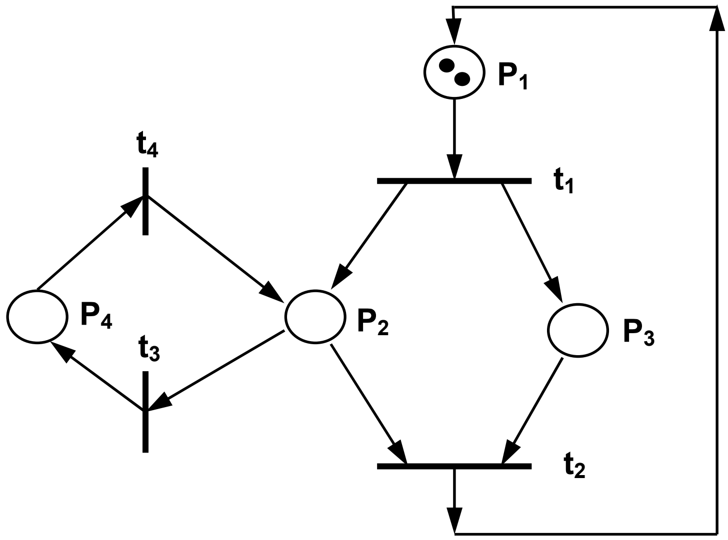
Dada uma rede de Petri R = (P,T, I, O) com uma marcação M, diz-se que a marcação M' é *alcançável* a partir de M se M' pertence a A(R,M).

1.12 Árvore de Alcançabilidade

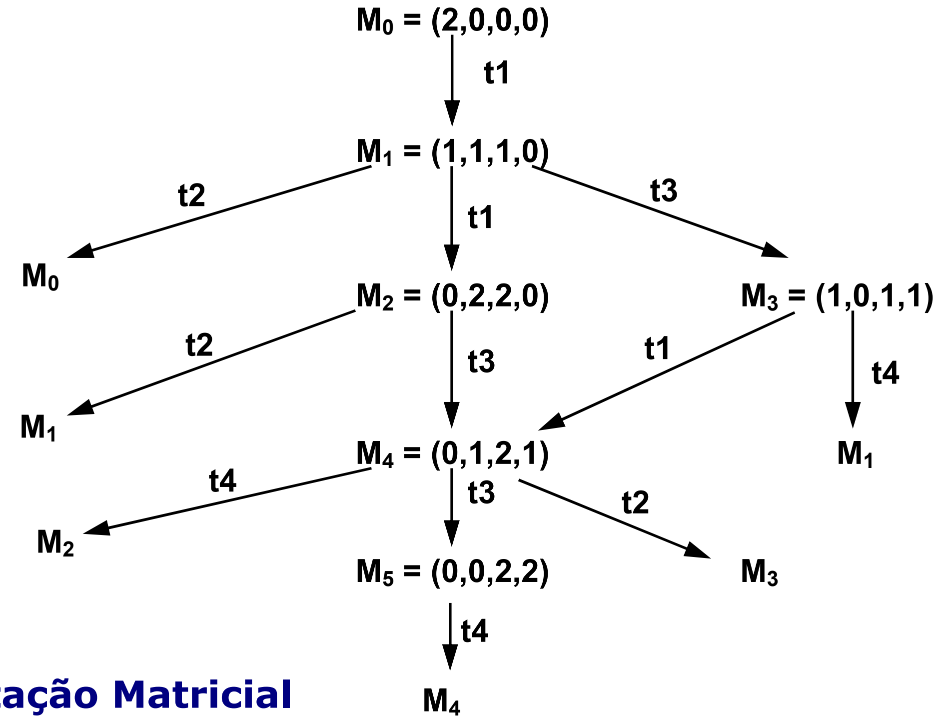
A *árvore de alcançabilidade* é construída tendo a marcação inicial como raiz e acrescentando todas as marcações alcançáveis a partir da raiz pelo disparo das transições.

Exemplo 4:

Dada a seguinte rede de Petri R = (P,T, I, O) com uma marcação M_0=(2,0,0,0):



A árvore de alcançabilidade correspondente é



2 Notação Matricial

A notação matricial de Redes de Petri favorece a análise de suas propriedades através de resultados algébricos.

As funções I e O são substituídas pelas matrizes E e S, ambas com n linhas e m colunas:

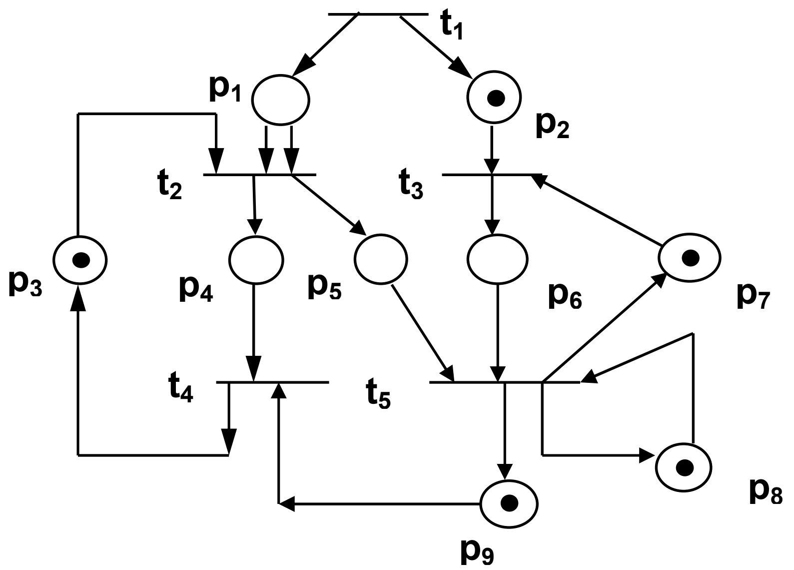
$E[j,i] = \#(p_i, I(t_j))$ para i= 1,2,3,...,m e

$S[j,i] = \#(p_i, O(t_j))$ para $j = 1,2,3,...,n;$

A rede de Petri é então definida por $R = (P,T,E,S)$.

Exemplo 5: Notação Matricial

Considerando a Rede de Petri do exemplo 1



A notação matricial da Rede de Petri é:

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sendo

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E: Matriz de Entrada
S: Matriz de Saída
C=S-E: Matriz de Incidência

Nos tópicos a seguir serão apresentados os conceitos já vistos anteriormente na notação matricial.

2.1 Marcação e Transição

Uma marcação M é representada por um vetor de m componentes, onde cada elemento corresponde ao número de marcas num determinado lugar.

Uma transição t_j é representada por um vetor e_j de n componentes no qual o j-ésimo componente é igual a 1 e os demais componentes são iguais a zero:

e_j = [0 0 0 ...1 ...0] vetor que representa uma transição.

2.2 Habilitação de uma transição

A transição t_j está habilitada na marcação M se $M \geq ej*E$

Considera-se que $M' \leq M''$ se $M'[i] \leq M''[i]$ para i = 1,2,3,...,m.

2.3 Função Próximo Estado

A função próximo estado passa a ter a seguinte formulação:

$\delta(M,t_j) = M + e_j*S - e_j*E$ ou

$\delta(M,t_j) = M + e_j*C$ sendo C = S - E;

A matriz C = S - E, é conhecida como matriz de incidência de uma Rede de Petri.

2.4 Sequência de disparos

Dada uma seqüência de disparos de transições $s = t_{j1},t_{j2},...,t_{jk}$, define-se o valor de $\delta(M,s)$ como:

$\delta(M,s)=\delta(M_,t_{j1}t_{je}...t_{jk})$

$\delta(M,s)=M+[e_{j1}+e_{j2}+...+e_{jk}]*C$

ou

$\delta(M,s) = M + f_s*C$

O vetor $f_s = [e_{j1} + e_{j2} + ... + e_{jk}]$ é denominado vetor de disparos sendo que a j-ésima componente de f_s indica o número de vezes que a transição t_j foi disparada.

3 Propriedades de Redes de Petri

3.1 Segurança

Um *lugar* p_i pertencente a P de uma rede de Petri R = (P,T, I, O) com marcação M é *seguro* se para todo M' pertencente a A(R,M), $M'[p_i] \leq 1$.

Uma *rede de Petri* é *segura* se todos os seus lugares forem seguros.

Um lugar p_i pertencente a P de uma rede de Petri R =(P,T,I,O) com marcação inicial M é *K-seguro* se para todo M' pertencente a A(R,M), $M'[p_i] \leq K$.

3.2 Limitação

Um *lugar é limitado* se é K-seguro para algum K.

Uma *rede de Petri é limitada* se todos os seus lugares são limitados.

Observação:

A viabilidade de implementação (em "hardware" ou em "software") de uma rede de Petri está relacionada à ocorrência das propriedades de segurança e limitação.

3.3 Conservação

Uma rede de Petri R = (P,T,I,O) e com marcação inicial M é *conservativa* se para todo M' pertencente a A(R,M)

$$\Sigma M[p_i] = \Sigma M'[p_i] \quad , \text{ para todo } p_i \text{ pertencente a } P;$$

Esta propriendade indica que o número total de marcas na rede de Petri permanece constante em todas as marcações alcançáveis a partir da marcação inicial.

3.4 Vivacidade

Dada uma rede de Petri R = (P,T,I,O) e uma marcação M:

v0) A transição t_j pertencente a T está *viva em nível 0* se nunca pode ser disparada, isto é, não existe M' tal que M pertence a A(R,M) e t_j esta habilitada em M'. Neste caso diz-se que a transição está morta;

v1) A transição t_j esta *viva em nível 1*, ou simplesmente *viva*, se é potencialmente disparável, isto é, se existe M' pertencente a A(R,M) tal que t_j está habilitada em M'.

v2) A transição t_j está *viva em nível 2* se para cada inteiro $v \geq 0$ existe uma seqüência de transições s ($s = t_{j1}\ t_{j2}\ ....t_{jk}$) tal que $\delta(M,s)$ é definida e $f_s(t_j) \geq v$, isto é, t_j é disparada no mínimo v vezes.

v3) A transição t_j está viva em nível 3 se existe uma seqüência infinita s de disparos de transições tal que δ (M,s) está definida e t_j aparece com freqüência infinita em s.

3.5 Impasses (Deadlocks)

Dada uma rede de Petri R = (P,T, I, O) e uma marcação M' e seja T' um subconjunto de T, a rede R está em uma situação de *Impasse* na marcação M' em relação às transições de T', se qualquer t_j pertencente a T', t_j está morta.

Se T' = T então a situação da rede é de *impasse total* e nenhuma transição poderá ser disparada.

Uma rede de Petri R é *livre de impasses* se, qualquer M' pertencente a A(R,M), existe uma transição t_j viva.

4 Análise de Redes de Petri

É feita através da determinação de:

- Árvore de alcançabilidade
- Conjuntos invariantes

4.1 Condição necessária para Alcançabilidade

Seja uma rede de Petri R = (P,T, E, S), sendo M_k a marcação atual, o disparo para se atingir a marcação M_{k+1} é representado pela equação:

$$M_{k+1} = M_k + e_j * C$$

sendo que C = S - E.

O disparo da seqüência de transições $s = t_{j1}\ t_{j2} \ldots t_{jk}$ a partir da marcação M resulta na marcação M' definida como:

$$M' = M + (e_{j1} + e_{j2} + \ldots + e_{jk}) * C$$

ou $$M' = M + f_s * C$$

sendo que f_s é o vetor de contagem de disparos onde a j-ésima componente indica o número de vezes que a transição t_j disparou.

Esta última equação pode ser transformada em:

$$f_s * C = M' - M$$

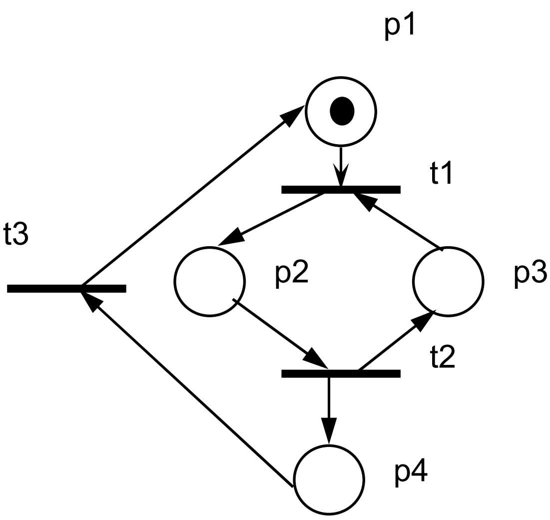
ou $f_s * C = \Delta M$ onde $\Delta M = M' - M$

ou $$C^t * f_s = \Delta M$$

A solução deste sistema de equações fornece o número de vezes que cada transição deve ser disparada para transformar a marcação M em M'. A existência de uma solução desta equação é uma condição *necessária mas não suficiente* para que a marcação M'seja alcançável a partir de M.

A *condição necessária mas não suficiente* para que uma marcação M' seja *alcançável* a partir de M é que $C^t * f_s = \Delta M$ onde $\Delta M = M' - M$.

Exemplo 6: Contra-exemplo



$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Delta M = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Solução } f_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Embora o sistema admita uma solução inteira positiva f_s, M' não é alcançável, pois nenhuma transição pode ser disparada a partir de M.

4.2 Invariantes

Dada uma rede de Petri R = (P,T,E,S) chama-se *invariante* de R a um vetor z com elementos pertencentes ao conjunto {0,1} que satisfaz ao sistema de equações

$$C * Z = 0$$

O conjunto invariante Z é definido como:

$$Z = \{p_j \mid Z[j] = 1,\ j = 1,2,...,m\}$$

A partir das equações anteriores conclui-se que quaisquer que sejam M e M' pertencentes a A(R,M)

$$M * Z = M' * Z$$

significando que a soma das marcas existentes nos lugares pertencentes à *invariante* Z é constante para qualquer M pertencente a A(R,M).

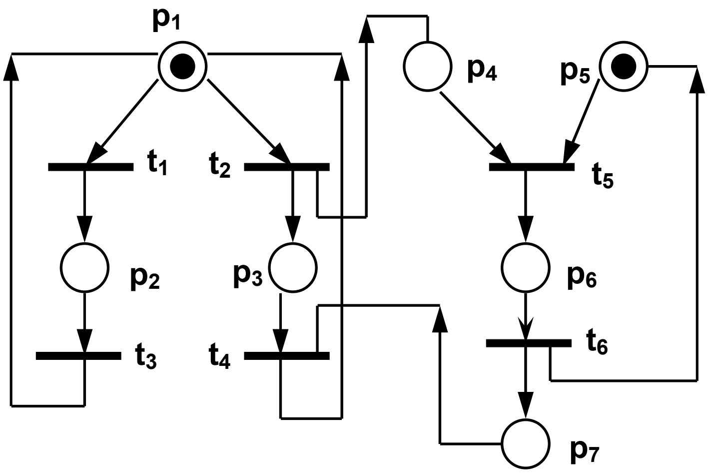
O conjunto de *Invariantes básicos* é constituído de invariantes inteiros e positivos linearmente independentes.

Seja p a característica da matriz C. Se p = m, isto é, coincide com o número de lugares da rede, então o sistema C * Z = 0 admite o vetor nulo como única solução indicando que não existe nenhum conjunto invariante.

Se $p < m$, então existirá um conjunto de $(m-p)$ soluções linearmente independentes.

Exemplo 7: Invariantes

Seja a seguinte Rede de Petri:



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores z a seguir são soluções do sistema $C * Z = 0$.

$z_1 = [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ == > Invariante $Z_1 = \{p_1,p_2,p_3\}$
$z_2 = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1]$ ==> Invariante $Z_2 = \{p_1,p_2,p_4,p_6,p_7\}$
$z_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]$ ==> Invariante $Z_3 = \{ p_5,p_6\}$
$z_4 = [1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$ ==> Invariante $Z_4 = \{ p_1,p_2,p_3,p_5,p_6\}$

4.3 Propriedades dos invariantes

Se um lugar p_j pertence a um invariante z então o número de marcas em p_j será limitado pois

$$M' * z = M * z$$

qualquer que seja a marcação M' alcançável a partir de M.

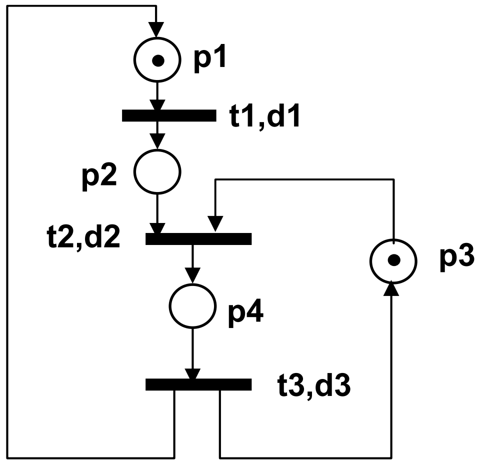
Se existe um conjunto de invariantes onde todos os lugares da rede estão envolvidos, então o número de marcas na rede permanece constante e igual a somatória de $M[j]$ para $j = 1, \ldots, m$.

5 Redes de Petri Temporizadas

Uma rede de Petri temporizada é definida como RT=(P,T,I,O,M_0,D) onde P,T,I,O e M_0 possuem a definição usual e D = {d1,d2,...,dn} é um conjunto de atrasos associados às transições da rede de Petri.

Exemplo 7: Rede de Petri temporizada

Considere um processo que para fazer uma determinada ação necessita a posse de um recurso.



d1: tempo em que não necessita do recurso;
d2: tempo de aquisição do recurso;
d3: tempo de utilização do recurso.

Neste exemplo, uma marca no lugar p3 significa que o recurso está disponível, e uma marca em p1 significa que a unidade de processamento não necessita dele.

A marcação M0 = {1,0,1,0} habilita somente t1 cujo atraso associado representa o intervalo de tempo em que o processo não necessita deste recurso.

O atraso d2 representa o tempo necessário para adquirir a posse do recurso, e o atraso d3 representa o tempo que o processo retém o recurso alocado.

Vantagens:
Além das vantagens naturais das redes de Petri, com a introdução da noção de tempo é possível modelar não só a lógica dos sistemas como também as suas relações de tempo;

Desvantagens:
Com a introdução de tempo associado às transições de uma rede de Petri, altera-se a definição de estado de uma rede de Petri, pois se deve agora considerar como parte do estado também a informação se uma determinada transição está em disparo ou não. Ou seja, se o atraso associado a ela já está sendo contado ou não.

5.1 Redes Temporizadas e Estocásticas

Uma rede de Petri temporizada e estocástica é definida como

RTE = {P,T,I,O,M0,L} onde P,T,I,O e M_0 possuem as definições habituais e $L=\{l_1,l_2,\ldots,l_n\}$ é um conjunto de taxas de disparo associadas às transições da rede de Petri que obedecem a uma distribuição exponencial.

Tais taxas de disparo podem ter o seu valor dependente do número de marcas nos lugares da rede.

Cadeia de Markov associada

Devido à natureza exponencial das taxas de disparo das transições pode-se demonstrar que associada a cada rede de Petri Temporizada e Estocástica existe uma cadeia de Markov isomórfica e com tempo contínuo.

Pode-se obter a cadeia de Markov isomórfica à rede de Petri Temporizada e Estocástica seguindo os seguintes passos:

1. O espaço de estado da cadeia de Markov associada corresponde ao conjunto de alcançabilidade da rede com marcação inicial M_0;

2. A taxa de mudança do estado i (associado à marcação M_i) para o estado j (M_j) é

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in H_{ij}} l_k & \text{sendo } H_{ij} \text{ é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação } M_i\text{, cujo disparo gera a marcação } M_j. \\ -q_i & \text{Quando } i=j \end{cases}$$

onde $q_i = \sum_{k \in H_i} l_k$ sendo H_i é o conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i.

Supondo que a cadeia seja ergódica, ou seja, a marcação inicial seja alcançável a partir de todas as outras marcações pertencentes a $A(R,M_0)$, então pode-se calcular o vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi=(\pi_1\ \pi_2\ \ldots\ \pi_s)$ da rede de Petri, onde s é o número de marcações em $A(R,M_0)$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\pi * Q = 0$$

com a restrição $\sum_i \pi_i = 1$

onde $Q = [q_{ij}]$

π é o vetor das *probabilidades de equilíbrio* do sistema.

As probabilidades de equilíbrio também são chamadas de *probabilidades de estado estacionário* ou de *estado estável*.

A probabilidade de uma transição t_i habilitada em M disparar pode ser calculada como

$$P[t_i\,|M] = l_i / \sum_{t_k \in H} l_k$$

Sendo H o conjunto das transições habilitadas em M.

Propriedades derivadas de π

a) Probabilidade de uma condição particular:

Se no sub-conjunto A de $A(R,M_0)$ a condição é verificada então esta probabilidade pode ser calculada por:

$$P\{A\} = \Sigma_{i\,\varepsilon A}\ \pi_i$$

b) Valor médio do número de marcas num determinado lugar da rede:

Se A(i,x) é o sub-conjunto de $A(R,M_0)$ para os quais o número de marcas no lugar i seja igual a x e este lugar é limitado por k, então:

$$E[m_i] = \sum_{n=1}^{k} [\, n*P\{A(i,n)\}]$$

c) Número médio de disparos de uma transição na unidade de tempo:

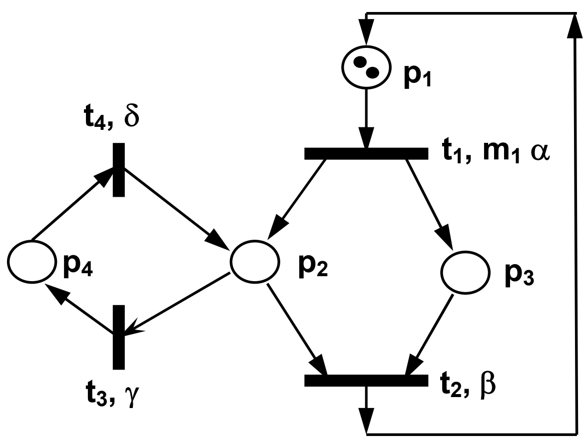
Se A_j é o sub-conjunto de $A(R,M_0)$ no qual uma dada transição t_j está habilitada, então o número médio de disparos de t_j é dado por:

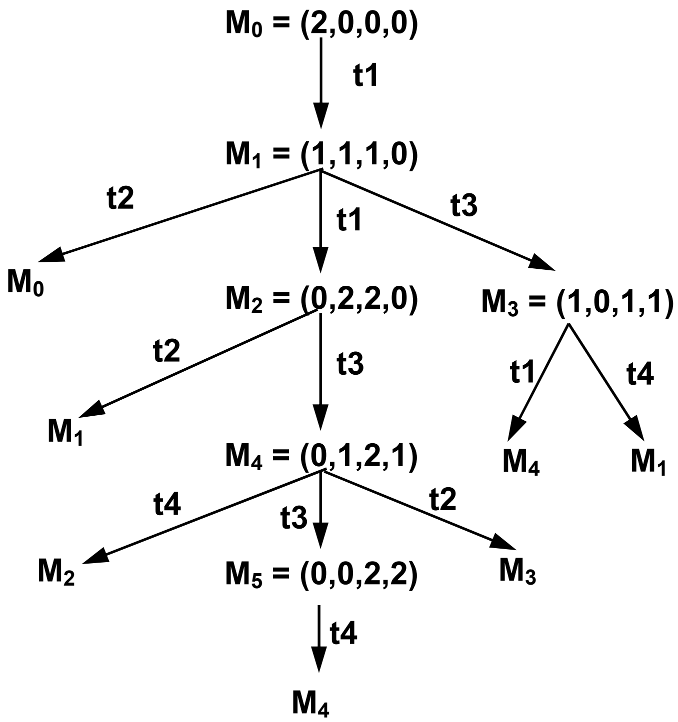
$$f_j = \sum_{M_i \in A_j} \pi_i * \left(l_j / \sum_{t_k \in H_i} l_k \right)$$

sendo H_i o conjunto de transições habilitadas na marcação M_i.

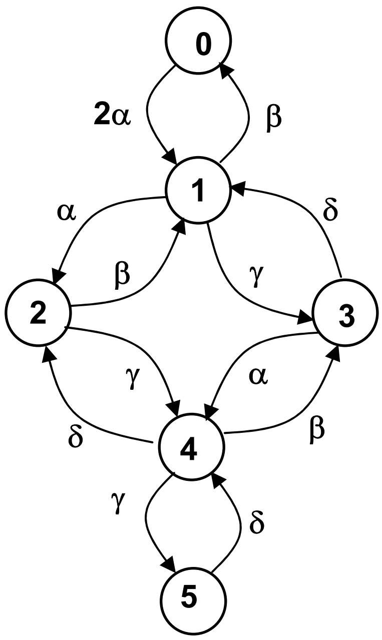
Exemplo 9: Rede de Petri Estocástica

Este é o mesmo exemplo já apresentado como exemplo 4 sendo que as transições foram substituídas por transições temporizadas e foram acrescentadas as freqüências de disparos.





A árvore de alcançabilidade é a mesma apresentada anteriormente. A árvore de alcançabilidade pode ser associada á seguinte cadeia de Markov onde os nós da árvore correspondem aos estados da cadeia de Markov.



O cálculo do vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi=(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5)$ é feito através de resolução do sistema de equações lineares $\pi * Q=0$ sendo que $\sum_{i=1}^{5}\pi_i = 1$ e a matriz Q é:

$$
Q=\begin{pmatrix}
-2\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta & -(\beta+\alpha+\gamma) & \alpha & \gamma & 0 & 0 \\
0 & \beta & -(\beta+\gamma) & 0 & \gamma & 0 \\
0 & \delta & 0 & -(\delta+\alpha) & \alpha & 0 \\
0 & 0 & \delta & \beta & -(\delta+\beta+\gamma) & \gamma \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -\delta
\end{pmatrix}
$$

Considerando $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ tem-se:

$$\pi * \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$$

Resolvendo o sistema de equações acima se obtém:
$\pi_0 = 1/11$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 2/11$

Como exemplo, calcula-se o número médio de marcas em p_1:
$E[m_1] = 2.\pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 6/11$

A taxa de disparo da transição t_2 é:
$f_2 = (1/3)\,\pi_1 + (1/2)\,\pi_2 + (1/3)\,\pi_4 = 7/33$

pois t_2 está habilitada somente nas marcações M_1, M_2 e M_4.

5.2 Redes de Petri Estocásticas Generalizadas(RPEG)

As redes estocásticas e generalizadas são obtidas permitindo-se que as transições possam ter um atraso associado a elas de valor nulo. Ou seja, são definidos dois tipos de transições as *imediatas,* que possuem atraso nulo e as *temporizadas* que possuem um atraso exponencialmente distribuído associado a elas.

Uma rede de Petri Temporizada Estocástica Generalizada é definida como
RTEG = {P,T,I,O,M0,W} onde P,T,I,O e M_0 possuem as definições habituais e $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ é um conjunto onde
w_i é a taxa de disparo de t_i se t_i é temporizada
w_i é o peso da transição t_i se t_i é imediata.

Regras de disparo para RPEG

Seja H o conjunto das transições habilitadas em uma determinada marcação M.

1. Se todas as transições de H forem temporizadas, então a probabilidade de disparo da transição t_i pertencente a H será

$$P[t_i\,|M] = w_i \Big/ \sum_{t_k \in H} w_k$$

ou seja, dispara a transição com a maior taxa de disparo ou o menor tempo;

2. Se o conjunto H possui uma única transição imediata, então somente esta transição é que pode disparar com probabilidade 1.

3. Se o conjunto H possui uma ou mais transições imediatas, uma delas deve disparar. Neste caso deve ser definida uma probabilidade de disparo associado a cada uma das transições imediatas em conflito (habilitadas na mesma marcação). Estas probabilidades são chamadas de funções seletoras e são calculadas como:

$$P[t_i \mid M] = w_i / \sum_{t_k \in HI} w_k$$

onde HI é o conjunto das transições imediatas habilitadas em M.

A solução utilizando resultados de Cadeias de Markov deve ser adaptada considerando-se a existência de transições imediatas. Considerando a regra de disparo que dá prioridade às transições imediatas, aquelas marcações resultantes de disparo de uma transição temporizada quando existem transições imediatas habilitadas, não ocorrerão. Desta forma, a árvore de alcançabilidade será reduzida.

As marcações podem ser divididas em dois grupos:

1. Marcações tangíveis que são aquelas que possuem somente transições temporizadas habilitadas.
2. Marcações não tangíveis, as demais.

Constrói-se a matriz de probabilidades U como:

$$u_{ij} = \frac{\sum_{k \in H_{ij}} w_k}{\sum_{k \in H_i} w_k}$$

Sendo

H_{ij} conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i, cujo disparo gera a marcação M_j.

H_i conjunto de todas as transições habilitadas pela marcação M_i.

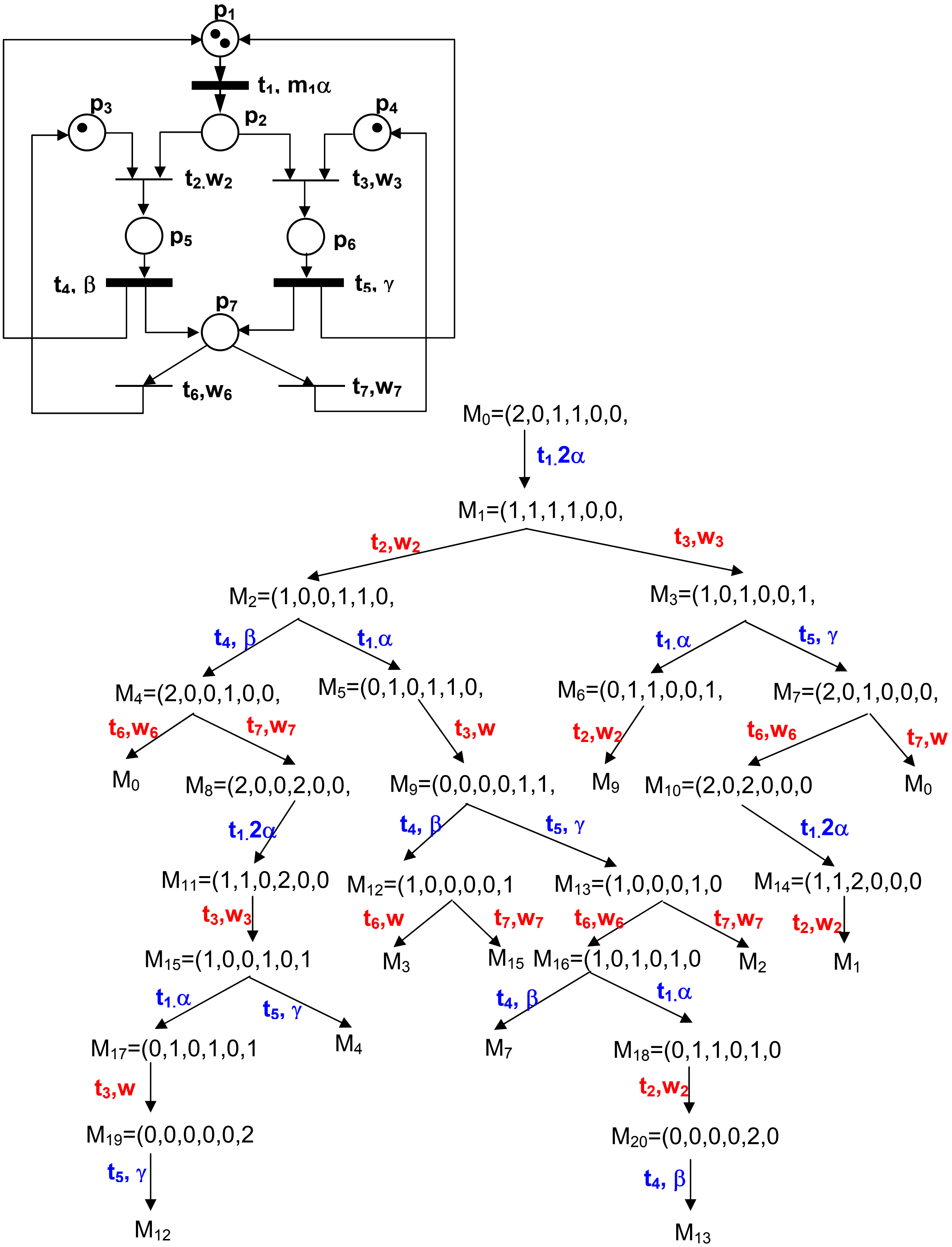
Supondo que a cadeia seja ergódiga, ou seja, a marcação inicial seja alcançável a partir de todas as outras marcações pertencentes a $A(R,M_0)$, então pode-se calcular o vetor de probabilidades de equilíbrio $\pi = (\pi_1\ \pi_2 \dots \pi_s)$ da rede de Petri, onde s é o número de marcações em $A(R,M_0)$, através da resolução do seguinte sistema de equações:

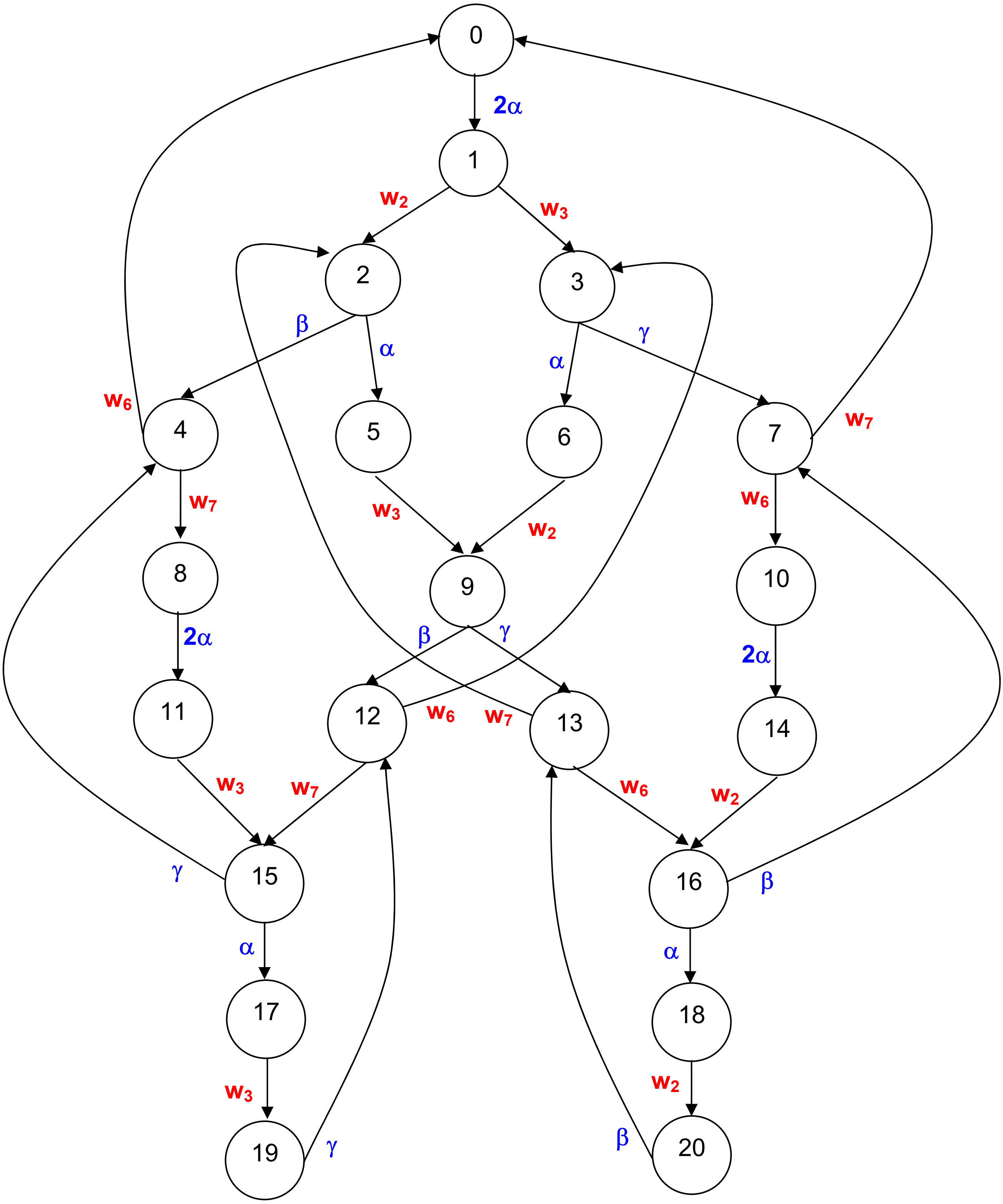
$$\pi = \pi * U$$

com a restrição $\sum_i \pi_i = 1$

onde π é o vetor das *probabilidades de equilíbrio* do sistema.

Exemplo 9: Rede de Petri Estocástica e Generalizada:




0
2α
1
w2
w3
2
3
β
α
α
γ
w6
4
5
6
7
w7
w7
w3
w2
w6
8
9
10
2α
β
γ
2α
11
12
13
14
w6
w7
w3
w7
w6
w2
γ
15
16
β
α
α
17
18
w3
w2
19
γ
β
20

Matriz U (considerando-se α, β, γ, w_2, w_3, w_6, w_7 iguais a 1):

$U_{0\,1} = 2\alpha/2\alpha = 1$

$U_{1\,2} = w_2/(w_2+w_3) = 0{,}5$ $\quad U_{1\,3} = w_3/(w_2+w_3) = 0{,}5$

$U_{2\,4} = \beta/(\beta+\alpha) = 0{,}5$ $\quad U_{2\,5} = \alpha/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{3\,6} = \alpha/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$ $\quad U_{3\,7} = \gamma/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{5\,9} = w_3/w_3 = 1$ $\quad U_{6\,9} = w_2/w_2 = 1$

$U_{7\,0} = w_7/(w_7+w_6) = 0{,}5$ $\quad U_{7\,10} = w_6/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{8\,11} = 2\alpha/2\alpha = 1$

$U_{9\,12} = \beta/(\beta+\gamma)$ $\quad U_{9\,13} = \gamma/(\beta+\gamma) = 0{,}5$

$U_{10\,14} = 2\alpha/2\alpha = 1$ $\quad U_{11\,15} = w_3/w_3 = 1$

$U_{12\,3} = w_6/(w_6+w_7) = 0{,}5$ $\quad U_{12\,15} = w_7/(w_6+w_7) = 0{,}5$

$U_{13\,2} = w_7/(w_7+w_6) = 0{,}5$ $\quad U_{7\,16} = w_6/(w_7+w_6) = 0{,}5$

$U_{14\,16} = w_2/w_2 = 1$

$U_{15\,4} = \gamma/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$ $\quad U_{15\,17} = \alpha/(\alpha+\gamma) = 0{,}5$

$U_{16\,7} = \beta/(\beta+\alpha) = 0{,}5$ $\quad U_{16\,18} = \alpha/(\beta+\alpha) = 0{,}5$

$U_{17\,19} = w_3/w_3 = 1$ $\quad U_{18\,20} = w_2/w_2 = 1$

$U_{19\,12} = \gamma/\gamma = 1$ $\quad U_{20\,13} = \beta/\beta = 1$

Matriz U resultante:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0		1																			
1			0,5	0,5																	
2					0,5	0,5															
3							0,5	0,5													
4	0,5								0,5												
5										1											
6										1											
7	0,5										0,5										
8												1									
9													0,5	0,5							
10															1						
11																1					
12				0,5												0,5					
13			0,5														0,5				
14																	1				
15					0,5													0,5			
16								0,5											0,5		
17																				1	
18																					1
19													1								
20														1							

A equação $\pi = \pi * U$ resulta em:

$\pi_0=0{,}5\pi_4+0{,}5\pi_7$

$\pi_1=\pi_0$

$\pi_2=0{,}5\pi_1+0{,}5\pi_{13}$

$\pi_3=0{,}5\pi_1+0{,}5\pi_{12}$

$\pi_4=0{,}5\pi_2+0{,}5\pi_{15}$

$\pi_5=0{,}5\pi_2$

$\pi_6=0{,}5\pi_3$

$\pi_7=0{,}5\pi_3+0{,}5\pi_{16}$

$\pi_8=0{,}5\pi_2+0{,}5\pi_{15}$

$\pi_9=\pi_5+\pi_6$

$\pi_{10}=\pi_7$

$\pi_{11}=\pi_8$

$\pi_{12}=0{,}5\pi_9+\pi_{19}$

$\pi_{13}=0{,}5\pi_9+\pi_{20}$

$\pi_{14}=\pi_{10}$

$\pi_{15}=\pi_{11}+0{,}5\pi_{12}$

$\pi_{16}=0{,}5\pi_{13}+\pi_{14}$

$\pi_{17}=0{,}5\pi_{15}$

$\pi_{18}=0{,}5\pi_{16}$

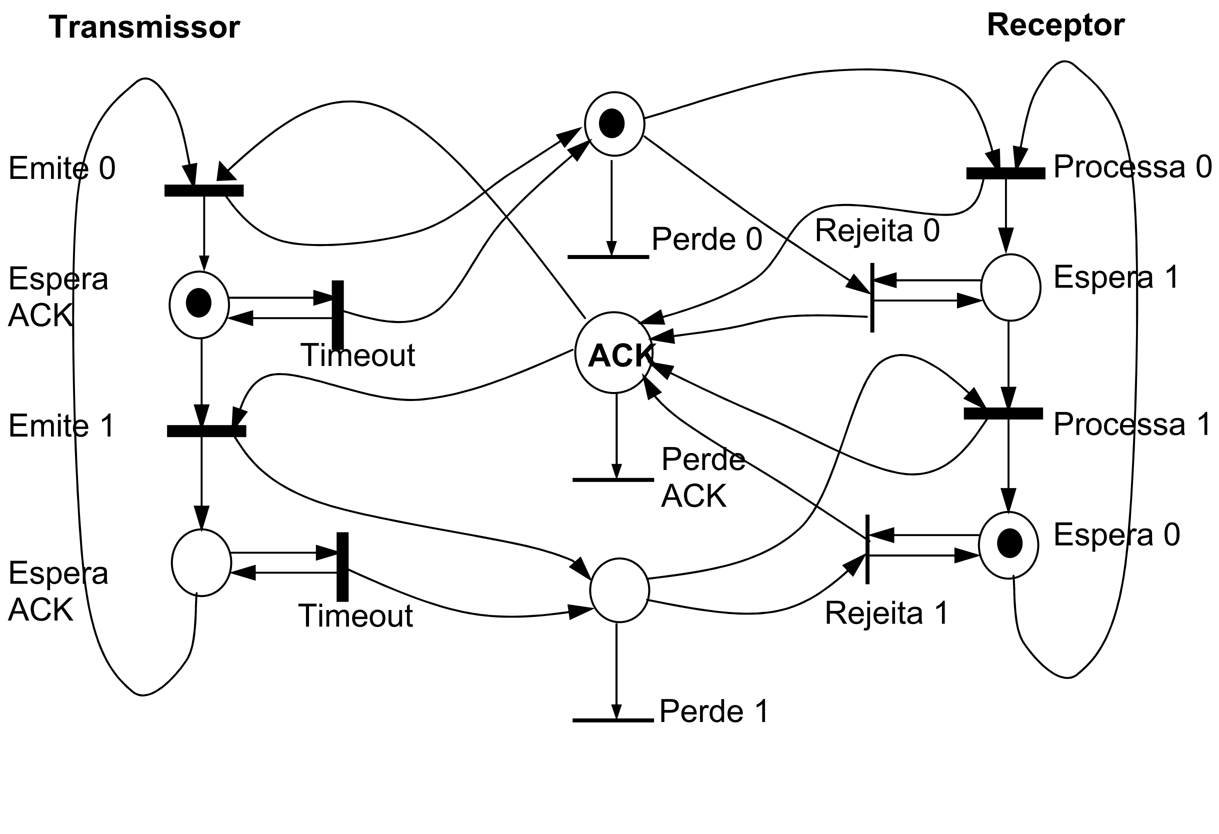
$\pi_{19}=\pi_{17}$

$\pi_{20}=\pi_{18}$

$\sum\pi_i=1$

Estas equações permitem determinar os valores de $\pi_{i,}$ $i=0, 1,..., 20$.

Exemplo 10: Protocolo Stop and Wait



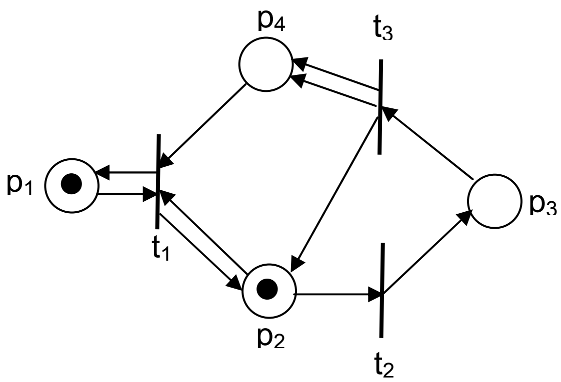
6 Bibliografia

[1] Cassandras, C. G., ”Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis”, Aksen Associates Incorporated Publishers, 1993 , ISBN: 0-256-11212-6, 790p.

[2] Marsan, M. A., Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., Franceschinis, G., “Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets”, John Wiley & Sons, ISBN: 0-471-93059-8, 1995, 301p.

7 Exercícios

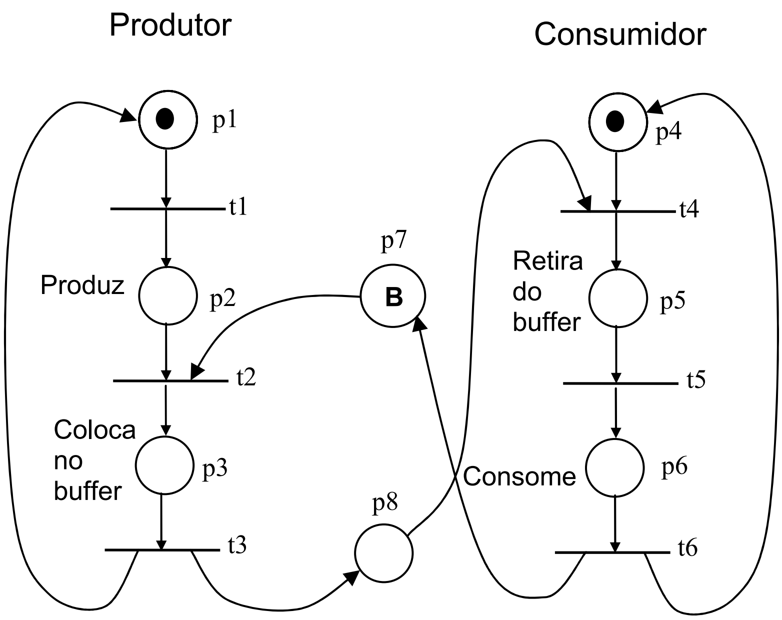
1) Dada a seguinte rede de Petri:



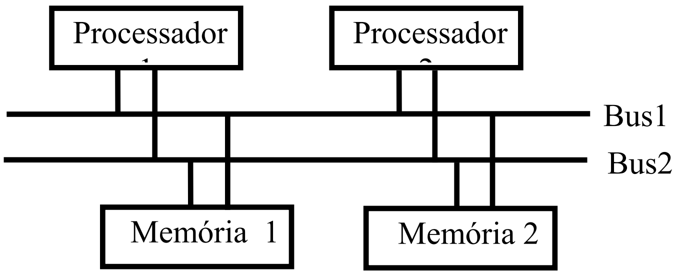
a) Construa a árvore de alcançabilidade da rede de Petri.
b) Verifique pela árvore de alcançabilidade se a marcação (1,1,0,1) é alcançável a partir de (1,1,0,0).
c) Obtenha através de cálculo de matrizes, os invariantes da rede de Petri.
d) Verifique se a marcação (1,1,0,1) é alcançável a partir (1,1,0,0) através da matriz B de invariantes.
e) Verifique as propriedades de limitação e de conservação da rede de Petri.
f) Existe alguma marcação que seja um deadlock alcançável nesta rede?

2) A rede de Petri a seguir apresenta a solução ao problema de um produtor e de um consumidor.

a) Construa a árvore de alcançabilidade desta rede de Petri considerando B=1
b) Verifique quais propriedades esta rede satisfaz
c) Determine os invariantes da rede de Petri
d) Mostre que não ocorre “overflow” de buffer e “underflow” de buffer, isto é, em p_7 e p_8 nunca existem mais que B marcas.
e) Mostre que não existe “deadlock” (impasse) nesta rede de Petri.

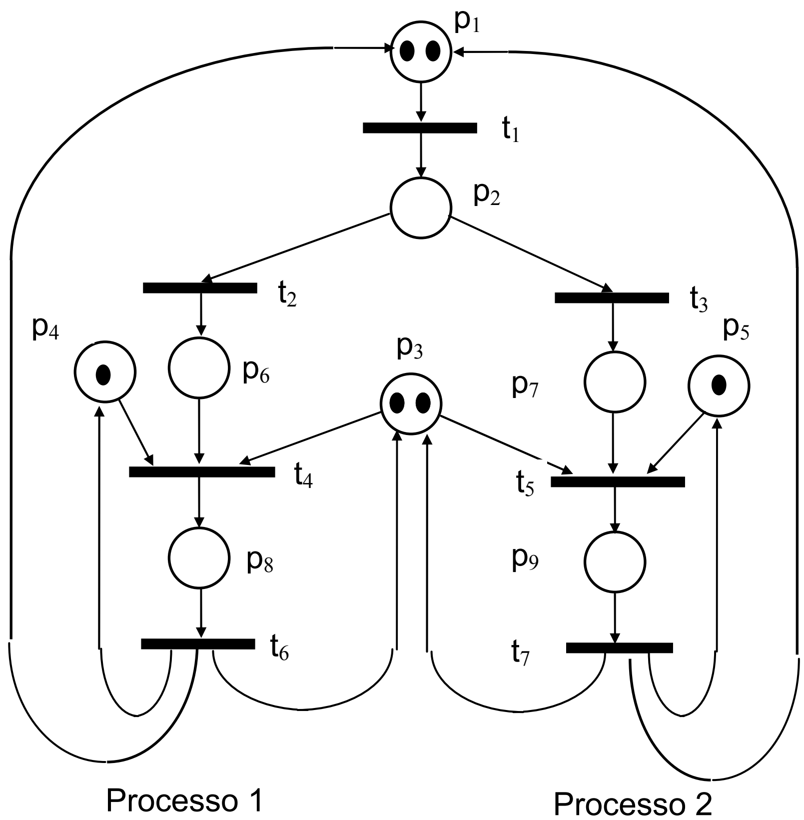


3) Seja o seguinte sistema com 2 processadores, 2 bus e 2 módulos de memória:



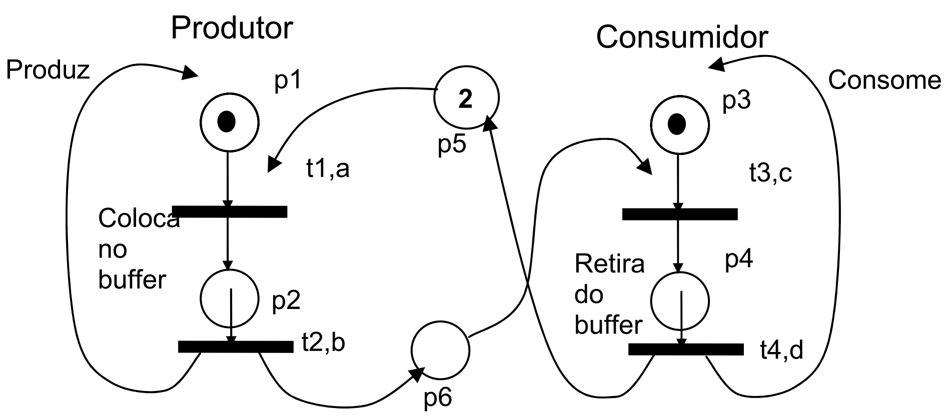
O sistema pode ser modelado pela Rede de Petri a seguir, onde as marcas em P_1 indicam os processadores, as marcas em P_3 indicam os bus e as marcas em p_4 e p_5 controlam o acesso às memórias.

a) Determine os invariantes desta rede.
b) Mostre que não existe situação de travamento (Deadlock) em que nenhuma transição pode ser disparada.



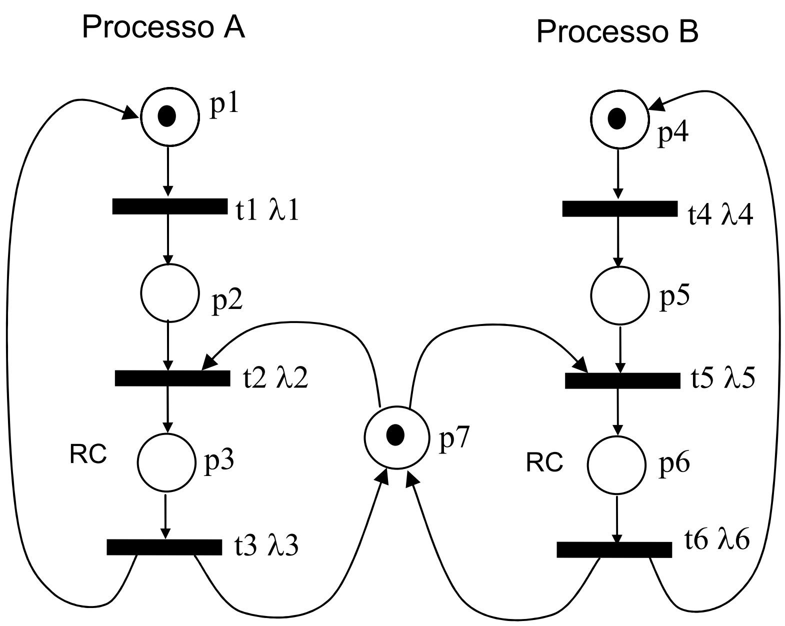
4) Um sistema possui dois processos produtores de mensagens, um processo consumidor e um buffer intermediário entre eles com tamanho de B mensagens. O acesso ao buffer é exclusivo, ou seja, quando um processo estiver acessando o buffer nenhum outro pode faze-lo. O tempo de produção de uma mensagem é exponencialmente distribuído com média Tp. O tempo de inserção ou remoção de uma mensagem no buffer também é exponencialmente distribuído com média Tb. O tempo de arbitração para uso do buffer é instantâneo.
   a) Modele o sistema utilizando redes de Petri temporizadas estocásticas.
   b) Calcule os invariantes deste sistema.
   c) Demonstre que não existe "Overflow" do buffer, "Underflow" do buffer e impasses no sistema.

5) A rede de Petri a seguir apresenta a solução simplificada ao problema de um produtor e de um consumidor.



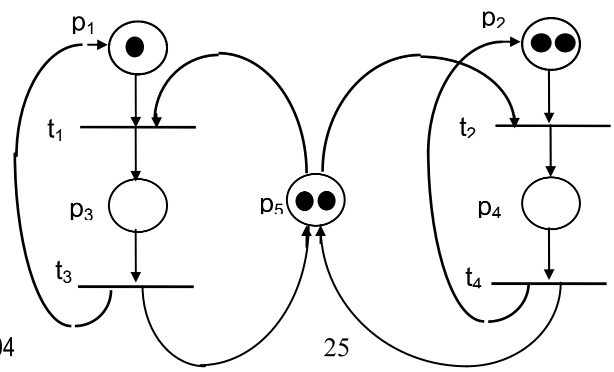
a) Construa a Cadeia de Markov correspondente.
b) Construa o sistema de equações para cálculo das probabilidades π_0, π_1, π_2,... de cada estado.
c) Quais as propriedades da rede de Petri que permitem a resolução através de Cadeia de Markov.

6) A rede de Petri a seguir é a versão estocástica ao problema de acesso a um recurso compartilhado por dois processos. Nesta rede λ1, λ2, λ3, λ4, λ5 e λ6 são as taxas de disparo das transições t1, t2, t3, t4, t5 e t6 respectivamente. Considere λ1 = 1, λ2 = 100, λ3 = 5, λ4 = 2, λ5 = 100 e λ6 = 10.



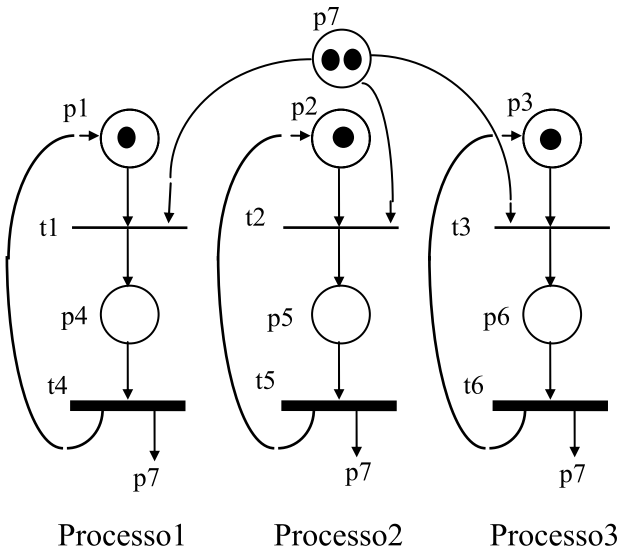
a) Construa a árvore de alcançabilidade desta rede de Petri.
b) Construa a Cadeia de Markov correspondente à árvore de alcançabilidade.
c) Calcule as probabilidades π_1, π_2, π_3, ... das marcações M_0, M_1, M_2, ...
d) Calcule $E(m_7)$ que é a média de marcas em p_7 (é a porcentagem de tempo que o recurso fica livre).
e) Calcule U que é a taxa de utilização do recurso.
f) Calcule a freqüência de disparo de t_2 e t_3.

7) Seja a seguinte rede de Petri:



a) Construa a árvore de alcançabilidade desta rede considerando a marcação inicial M_0=(1,2,0,0,2)
b) Determine os conjuntos invariantes através do cálculo de C.z=0.
c) O que pode ser dito em relação à alcançabilidade da marcação M=(0,1,2,0,1) a partir de M_0, os invariantes.
d) Prove que não existe *deadlock* nesta rede.

8) Seja a seguinte rede de Petri Temporizada Estocástica



Esta rede de Petri modela um sistema em que 3 processos compartilham dois recursos de mesmo tipo. O tempo que cada processo mantém os recursos tem distribuição exponencial com taxas λ_4=30, λ_5=20 e λ_6=10.

a) Especifique as probabilidades de escolha de t_1, t_2 e t_3 de forma que t_2 e t_3 tenham a mesma probabilidade e t_1 tenha o dobro da probabilidade de t_2 e t_3.
b) Determine a árvore de alcançabilidade da rede de Petri.
c) Determine a Cadeia de Markov correspondente.
d) Construa a matriz $U=(q_{ij})$ que define as taxas de transição do estado i para o estado j.
e) Calcule o vetor $\pi=(\pi_i)$ que define a probabilidade de estar no estado i.
f) Determine a média do número de marcas em um lugar.
g) Determine o número médio de disparo de cada transição por unidade de tempo,
h) Determine a probabilidade de disparo de cada transição habilitada para cada marcação alcançável da rede de Petri.