

Noções de Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

1 Processo Estocástico

Definição: Processo Estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ (entendido como tempo).

$$X = \{X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$$

A variável aleatória $X(t)$ é definida em um espaço denominado de espaço de estados.

Classificação dos Processos Estocásticos:

- a) Em relação ao estado:
 - Estado discreto (cadeia) – se $X(t)$ é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
 - Estado contínuo (seqüência) - $X(t)$ caso contrário
- b) Em relação ao tempo:
 - Tempo discreto – se t é finito ou enumerável.
 - Tempo contínuo – caso contrário.

Exemplos 1:

1. Número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante: Espaço discreto e tempo contínuo.
2. Índice pluviométrico em cada dia do mês – estado contínuo e tempo discreto.
3. Número de dias que choveram em cada mês do ano – estado discreto e tempo discreto.

Processos Estocásticos Estacionários – mantém seu comportamento dinâmico invariante no tempo.

Processos Estocásticos Independentes – se os valores de $X(t)$ são independentes, isto é, o valor assumido por $X(t_j)$ não depende do valor assumido por $X(t_i)$ se $i \neq j$.

Processo de Markov, chamado de “memoryless”, é um processo estocástico em que o próximo estado depende apenas do estado atual. A definição formal é:

2 Processos de Markov

Processo de Markov: $\{X(t)\}$ é um processo Markoviano se

$$P[X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0] = P[X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k]$$

Para todo $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1}$

Cadeia de Markov: quando as variáveis aleatórias $\{X(t)\}$ estão definidas em um espaço de estados discreto e

$$P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0] = P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k]$$

Para todo $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1}$

Cadeia de Markov em Tempo Discreto: quando as transições ocorrem em instantes $0, 1, 2, \dots, k$. Neste caso,

$$P[X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0] = P[X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k]$$

Propriedade "Memoryless":

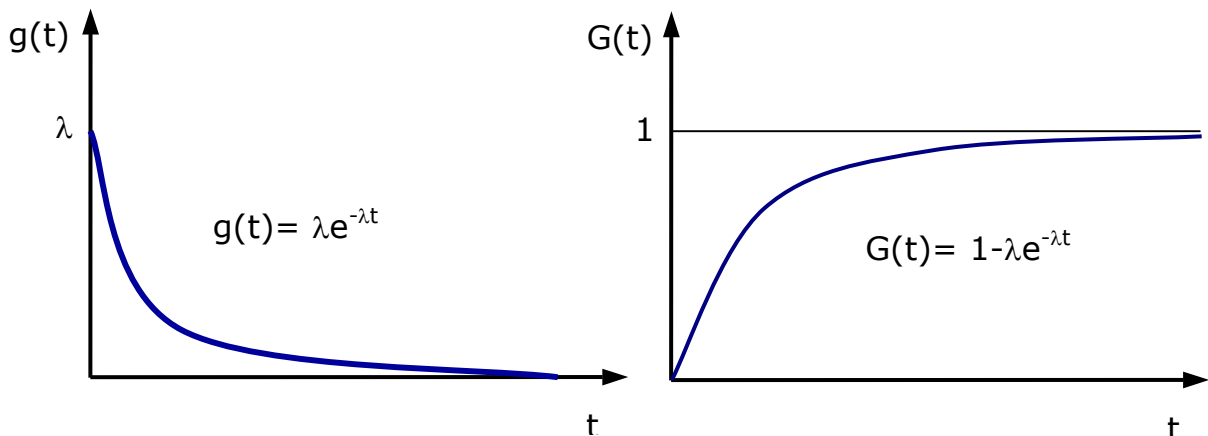
M1) As informações de estados passados são irrelevantes;

M2) O tempo que o processo está no estado atual é irrelevante.

A distribuição dos tempos entre eventos de uma cadeia de Markov tem distribuição exponencial.



Distribuição Exponencial



Processo de Poisson $\{N(t)\}$, define a contagem de um evento no intervalo $(0, t]$.

3 Cadeias de Markov em Tempo Discreto

Para especificar uma Cadeia de Markov em tempo discreto, define-se:

1. Espaço de estados S finito ou enumerável.
2. Probabilidade do estado inicial $p_0(x) = P[X_0 = x]$ para $x \in S$.
3. Probabilidades de transições nos instantes $1, 2, \dots, k$.
 $P(x', x) = P[X_{k+1} = x' | X_k = x]$ onde x é o estado atual e x' é o próximo estado.

Sendo S o conjunto de estados finito ou enumerável, iremos substituir S por números inteiros, isto é, $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

3.1 Probabilidades de Transição

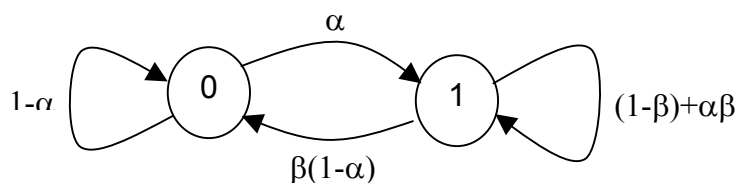
Matriz $P = (p_{ij})$ definida como

$p_{ij}(k) \equiv P[X_{k+1} = j | X_k = i]$ sendo que $\sum p_{ij}(k) = 1$ para todo $i, j \in S$, nos instantes $1, 2, \dots, k$.

Exemplo 2: Análise de chamadas telefônicas nos slots de tempo indexados por $k=0, 1, 2, \dots$

- a) Somente uma chamada pode ocorrer em um slot sendo α a probabilidade de ocorrência de uma chamada no slot.
- b) Se a linha está ocupada a chamada é perdida.
- c) A probabilidade de uma chamada ser completada em um slot é β .
- d) Se uma chamada chegar no mesmo slot em que uma chamada se completa, a nova chamada é processada.

Diagrama de estados:

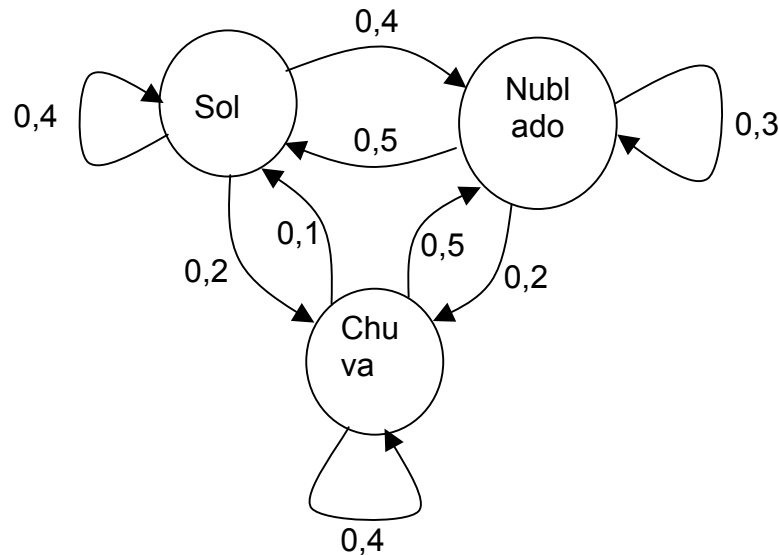


$P_{00} = 1-\alpha$	O telefone se mantém desocupado
$P_{01} = \alpha$	Telefone ocupado com probabilidade α
$P_{10} = \beta(1-\alpha)$	O telefone se torna livre se termina a chamada e não chega outra
$P_{11} = (1-\beta)+\alpha\beta$	O telefone continua ocupado com probabilidade $(1-\beta)$ ou se fica livre chega outra chamada no mesmo slot

Matriz P de probabilidade de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta(1-\alpha) & (1-\beta)+\alpha\beta \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: O tempo em uma área é classificado como “Sol”, “Nublado” ou “Chuva” em um determinado dia. X_k é o estado do tempo no dia k , $k=1, 2, \dots$



Matriz P de probabilidade de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

3.2 Probabilidade de Estados

Considerando-se os instantes $k=0, 1, 2, \dots$, as probabilidades dos estados $j = 0, 1, 2, \dots$ são definidas como

$$\pi_j(k) = P[X_k = j]$$

$\pi(k) = [\pi_0(k), \pi_1(k), \pi_2(k), \dots]$ é o vetor de probabilidades nos estados $0, 1, 2, \dots$ nos instantes $k=0, 1, 2, \dots$

Uma cadeia de Markov em tempo discreto é definida por:

a) P que é a matriz de probabilidades de transição e

b) $\pi(k) = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ que é o vetor de probabilidades dos estados $0, 1, 2, \dots$, no instante k .

Os vetores de probabilidades de estado $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(k)$ são calculados como:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \pi(0) P \\ \pi(2) &= \pi(0) P^2 \\ \pi(3) &= \pi(0) P^3 \\ &\dots\end{aligned}$$

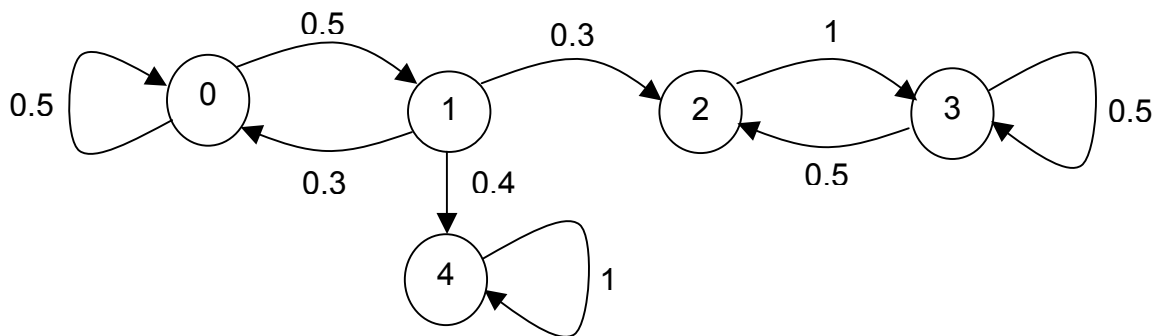
$$\pi(k) = \pi(0) P^k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Notar que os estados podem ser infinitos.

3.3 Classificação dos Estados

1. Um estado j é alcançável de um estado i se $p_{ij}^n > 0$ para algum $n = 1, 2, \dots$
2. Um subconjunto S' de estados de S é fechado se $p_{ij} = 0$ para $i \in S'$ e $j \notin S'$.
3. Um estado i é absorvente se $S' = \{i\}$ é fechado.
4. Um conjunto fechado S' é irredutível se j é alcançável a partir de i para todo $i, j \in S'$.

Exemplo 4:



Os estados 2 e 3 formam um conjunto fechado e irredutível; o estado 4 é absorvente e a cadeia é redutível.

5. Um estado i é recorrente se $\rho_i = 1$ dadas as definições a seguir:

$$T_{ij} \equiv \min \{ k > 0 \mid X_0 = i \text{ e } X_k = j \}$$

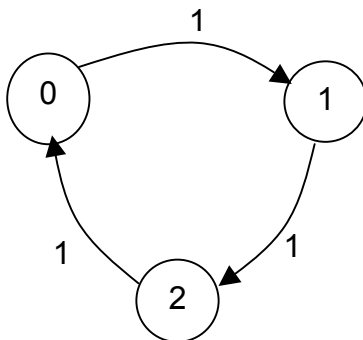
$$\rho_i^k = P[T_{ii} = k]$$

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^k \quad \text{probabilidade de voltar ao estado } i$$

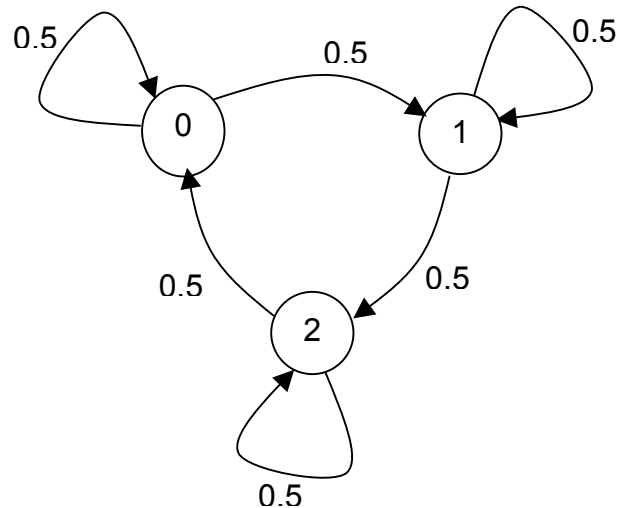
$$\rho_i = P[T_{ii} = \infty]$$

6. Um estado é transiente se $\rho_i < 1$.
7. Um estado é periódico se, sendo d o máximo divisor comum do conjunto $\{ n > 0: p_{ii}^n > 0 \}$ então $d \geq 2$. Se $d = 1$ então o estado é não periódico.

Exemplos 5:



(a) Cadeia de Markov periódica



(b) Cadeia de Markov não periódica

3.4 Análise de Estado Estável ("Steady State")

Se existir $\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_j(k)$ onde $\pi_j = P[X_k=j]$, para um dado estado j , então j é estado estável (ou de equilíbrio estacionário).

Se π_j existe para todos os j , então $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots]$ é o vetor de probabilidade de estados estacionários.

Quando a cadeia de Markov for irredutível e não periódica então o valor de π é obtido resolvendo-se o sistema de equações lineares:

$$\pi = \pi P$$

onde $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ satisfaz a equação $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, e $\pi_j \geq 0$.

Neste caso diz que o sistema é ergódico.

4 Cadeia de Markov em Tempo Contínuo

4.1 Função de Probabilidade de Transição

$$p_{ij}(s,t) \equiv P[X(t)=j \mid X(s)=i] \quad s \leq t \text{ são instantes}$$

Considerando-se $t=s+\tau$ tem-se:

$$p_{ij}(s,s+\tau) \equiv P[X(s+\tau)=j \mid X(s)=i]$$

Uma cadeia de Markov homogênea é aquela em que as probabilidades $p_{ij}(s,s+\tau)$ dependem apenas de τ e não do instante em que ocorreu s . Neste caso, podemos indicar:

$$p_{ij}(\tau) \equiv P[X(s+\tau)=j \mid X(s)=i] \quad \text{para qualquer } s$$

A matriz P é definida como $P(\tau) \equiv [p_{ij}(\tau)]$

Define-se $Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t) - I}{\Delta t}$ como a matriz de taxa de transição.

Sendo a cadeia de Markov Homogênea, então $Q(t)$ independe de t , sendo constante, isto é,

$$Q(t) = Q$$

Define-se a equação de Chapman-Kolmogorov como:

$$\frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} = P(\tau)Q$$

Sendo e_{ij} o evento que causa a transição do estado i para o estado j e sendo que os eventos ocorrem com distribuição de Poisson com taxa λ_{ij} , então define-se a matriz $Q=[q_{ij}]$ de taxa de transição como:

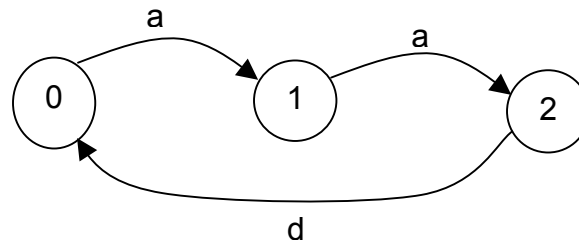
$$Q = \begin{cases} q_{ij} = \lambda_{ij} \\ q_{ii} = -\Lambda(i) \end{cases} \quad \text{onde} \quad \Lambda(i) = \sum_{\text{para todo } j \neq i} \lambda_{ij}$$

Dada Q então,

$$1. \quad p_{ij} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} \quad \text{para todo } i \neq j$$

$$2. -p_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Exemplo 6:



a e d são eventos que ocorrem com taxas λ e μ respectivamente.
A matriz Q da cadeia de Markov em tempo contínuo é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$q_{00} = -\Lambda(0) = -\lambda$$

$$q_{11} = -\Lambda(1) = -\lambda$$

$$q_{22} = -\Lambda(2) = -\mu$$

Neste caso $p_{01} = p_{12} = p_{20} = 1$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2 Probabilidades de Estados

Seja $\pi_j(t) = P[X_k(t)=j]$

$$\pi(t) = [\pi_0(t), \pi_1(t), \dots]$$

$$\pi(0) = [\pi_0(0), \pi_1(0), \dots]$$

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial t} = \pi(t)Q$$

4.3 Análise de Estado Estável ("Steady State")

Se existir o limite

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t)$$

então $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots]$ é o vetor de probabilidade de estados estacionários.

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial t} = \pi(t)Q \quad \text{se reduz a} \quad \pi Q = 0$$

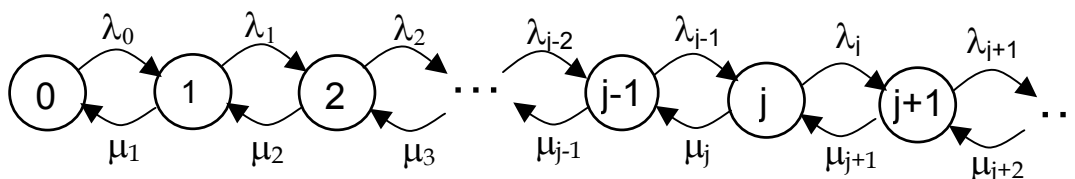
Teorema: Em uma cadeia de Markov irredutível e contínua no tempo, com estados recorrentes positivos, existe um único vetor de probabilidades $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots]$ (tal que $\pi_j > 0$) de estados estacionários e $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t)$.

Além disso,

$$e \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi Q = 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{array} \right.$$

4.4 Cadeia de Nascimento e Morte

Cadeia de Nascimento e Morte é uma cadeia de Markov em tempo contínuo na qual as transições são possíveis apenas para estados vizinhos como ilustra a figura a seguir:



Neste caso $q_{ij} = 0$ para todos $j > i+1$ e $j < i-1$ e

$$Q_{j,j+1} = \lambda_j > 0 \quad \text{para } j = 0, 1, \dots$$

$$Q_{j,j-1} = \mu_j > 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

No caso da diagonal de Q tem-se:

$$Q_{j,j} = -(\lambda_j + \mu_j) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

e

$$Q_{00} = -\lambda_0$$

A matriz Q resultante é:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Na situação de estados estacionários tem-se que

$$e \quad \begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases}$$

Que resulta no sistema de equações:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 &= 0 \\ \lambda_0 \pi_0 - (\lambda_0 + \mu_1) \pi_1 + \mu_2 \pi_2 &= 0 \\ \lambda_1 \pi_1 - (\lambda_1 + \mu_1) \pi_2 + \mu_3 \pi_3 &= 0 \\ &\dots \\ \lambda_{i-1} \pi_{j-1} - (\lambda_{j-1} + \mu_{j-1}) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

A resolução deste sistema resulta em:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}$$

e

$$\pi_j = \pi_0 * \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \quad \text{onde } j=1, 2, \dots$$

5 Bibliografia

- [1] Cassandras, C. G., "Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis", Aksen Associates Incorporated Publishers, 1993, ISBN: 0-256-11212-6, 790p.
- [2] Marsan, M. A., Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., Franceschinis, G., "Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets", John Wiley & Sons, ISBN: 0-471-93059-8, 1995, 301p.

6 Exercícios

- 1) Um sistema de computação consiste de dois processadores idênticos trabalhando em paralelo. O tempo consiste de intervalos indexados por $k=1, 2, 3, \dots$. A operação deste sistema é definida pelas seguintes regras:
 - a) Ao menos um programa pode ser submetido ao sistema em cada intervalo de tempo e este evento ocorre com probabilidade α .
 - b) Quando um programa é submetido ao sistema ele é atendido pelo processador disponível.
 - c) Se ambos processadores são disponíveis, o programa é atendido pelo primeiro processador.
 - d) Se ambos processadores estão ocupados, o programa é perdido.
 - e) Quando um processador está ocupado, a probabilidade de terminar a execução do programa em cada intervalo é β .
 - f) Se um programa é submetido ao processador em um intervalo em que os dois processadores estão ocupados e um dos processadores completa a execução neste intervalo, então o programa que chegou é processado.

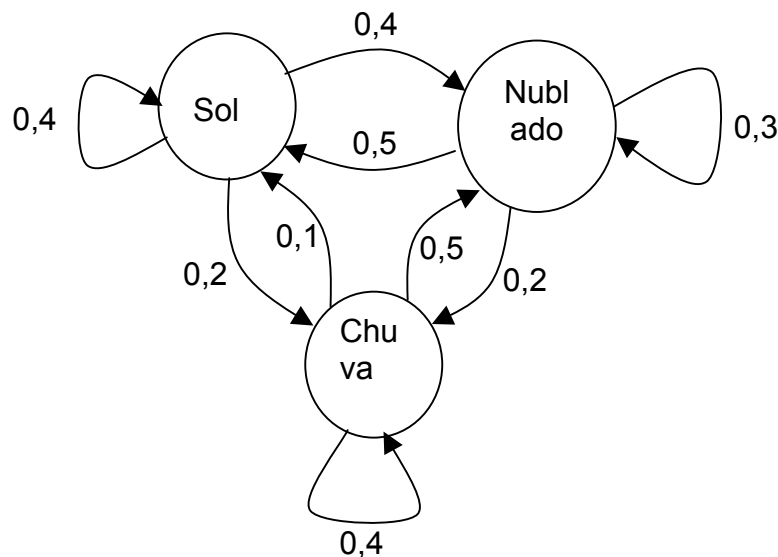
Considerando estas regras e que o sistema está vazio no instante inicial:

- i. Determine a matriz P de probabilidades de transição de estado
 - ii. Calcule o vetor π de probabilidade de estado.
 - iii. Qual a probabilidade do sistema estar vazio no terceiro intervalo?
 - iv. Qual a probabilidade de um programa completar no terceiro intervalo?
 - v. Qual a probabilidade do sistema permanecer vazio no primeiro e segundo intervalo?
- 2) Considere a cadeia de Markov em tempo contínuo e espaço de estado $S=\{0,1,2,3,4\}$ e a seguinte matriz de taxa de transição:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

- a) Desenhe o diagrama de transição de estados.
- b) Determine as probabilidades de estados estacionários, se existirem, para $\lambda=1$, $\mu_1=3/2$ e $\mu_2=7/4$.

- 3) O tempo em uma área é classificado como “Sol”, “Nublado” ou “Chuva” em um determinado dia, conforme o exemplo 3. X_k é o estado do tempo no dia k , $k=1, 2, \dots$



Matriz P de probabilidade de transição é:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

- Assumindo que hoje o tempo está nublado, preveja o tempo nos próximos dois dias.
 - Determine as probabilidades de estados estacionários desta cadeia (se existirem). Se não existirem, explique porque.
 - Se hoje está ensolarado, determine o número médio de dias que temos que esperar até o próximo dia ensolarado, quando o sistema está com os estados estáveis.
- 4) Uma empresa que possui sistema de processamentos de transações on-line consiste da matriz e uma filial e ambas possuem um computador para processamento de transações. Um terço de todas as transações que chegam ao computador da filial também exigem processamento pelo computador da matriz enquanto que as demais transações submetidas ao computador da filial são processadas apenas por este computador. As transações da filial são geradas segundo o processo de Poisson com taxa λ . O computador central realiza o processamento de outras transações que chegam a este computador de acordo com processo de Poisson, independente do primeiro, e com taxa ν . Os computadores da matriz e da filial são independentes e possuem infinitos buffers para transações, e processam uma transação de cada vez com tempos de processamento de transações com distribuição exponencial com taxas μ_1 e μ_2 respectivamente. Considerando $\lambda=10$ transações por minuto, $\nu = 30$ transações por minuto, $\mu_1= 50$ transações por minuto, $\mu_2=15$ transações por minuto, e sendo $X_1(t)$ e $X_2(t)$ o número de transações residindo no computador central e no computador da filial, respectivamente, responda:

- a) Desenhe o diagrama de transição de estados deste processo.
- b) Existem probabilidades estacionárias para este processo? Justifique. Se existirem responda às questões seguintes:
- c) Calcule a probabilidade do computador da filial estar ocioso.
- d) Calcule a probabilidade de existirem mais de três transações esperando para serem processadas pelo computador central.
- e) Calcule a probabilidade de ambos computadores possuírem uma única transação em execução em cada um.