PCS-2039
Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais

Graça Bressan

gbressan@larc.usp.br

Conceitos Básicos de Redes de Petri

Rede de Petri

- Modelo formal (abstração) de um sistema de eventos discretos.
- Captura todas as informações necessárias para representar a seqüência de eventos que ocorrem num sistema, as condições em que esses eventos ocorrem, e as mudanças de estado causadas pelos eventos.

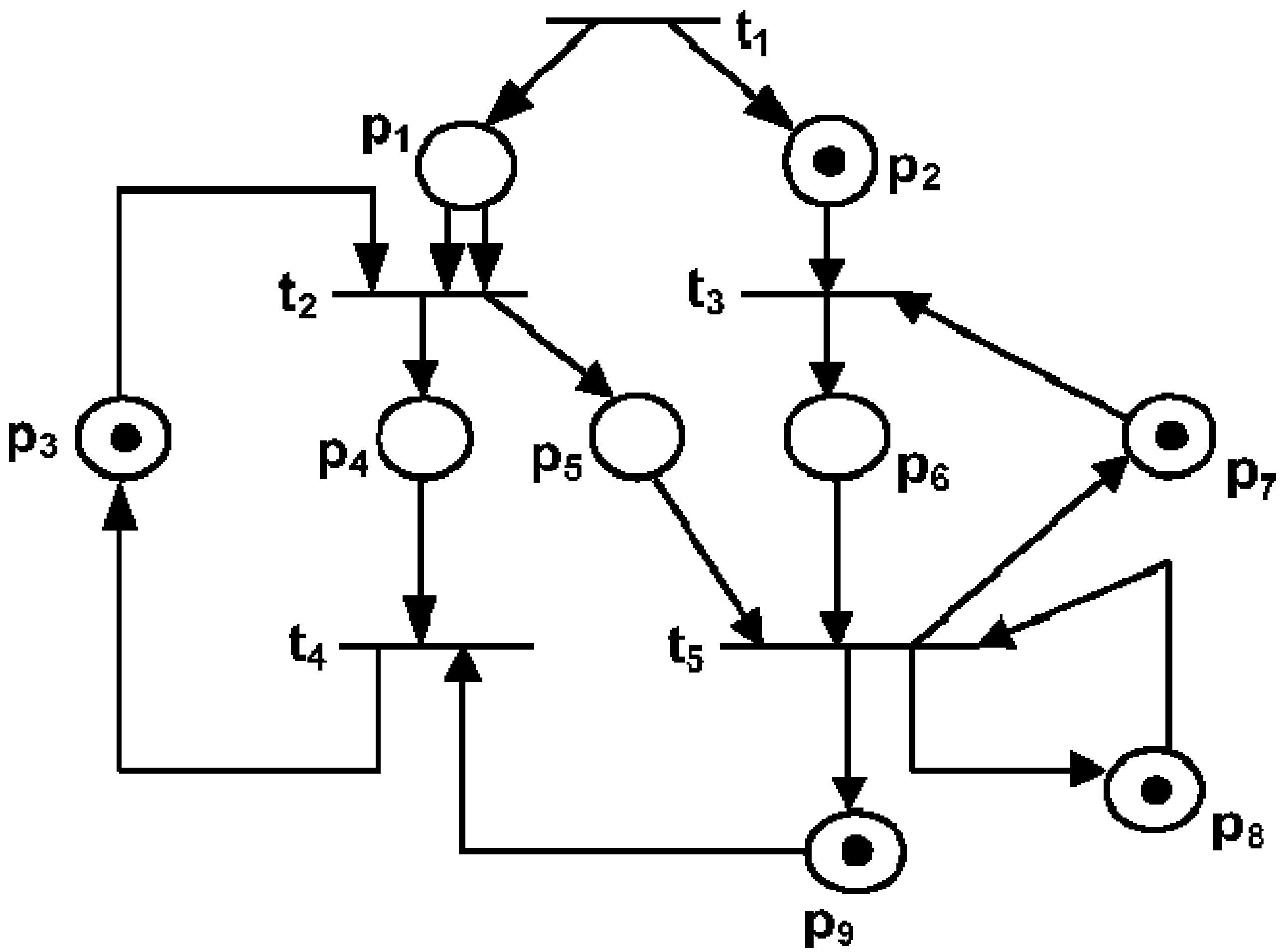
Definição

- Uma *rede de Petri* (atemporal) é uma quádrupla ordenada R = (P, T, I, O) onde:
  - $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ é um conjunto finito de $m > 0$ *lugares*;
  - $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um conjunto finito de $n > 0$ *transições*;
  - $I : T \to \wp(P)$ é a *função de entrada*, que identifica todos os lugares de entrada de uma transição,
  - $O: T \to \wp(P)$ é a *função de saída*, que identifica todos os lugares de saída de uma transição.
  - $P \cap T = \varnothing$.

Marcação

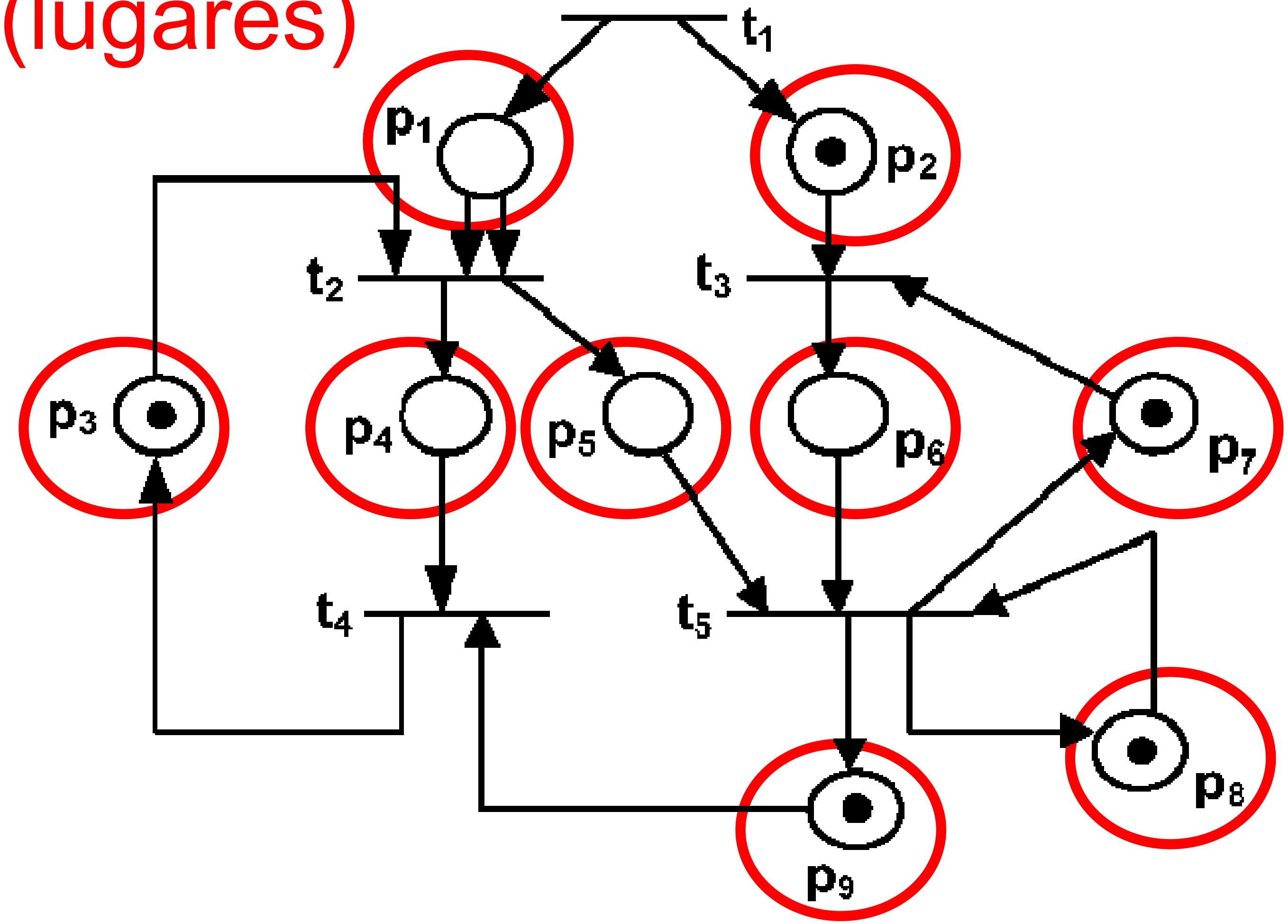
- Uma *marcação* de uma rede de Petri R = (P, T, I, O) é uma função M: P $\rightarrow$ $\mathbf{N}$. O valor M(p) é chamado número de marcas (ou *tokens*) no lugar p.
- Uma *rede de Petri marcada* é um par ordenado RM = (R, M) onde R é uma rede de Petri e M uma marcação.

Exemplo 1



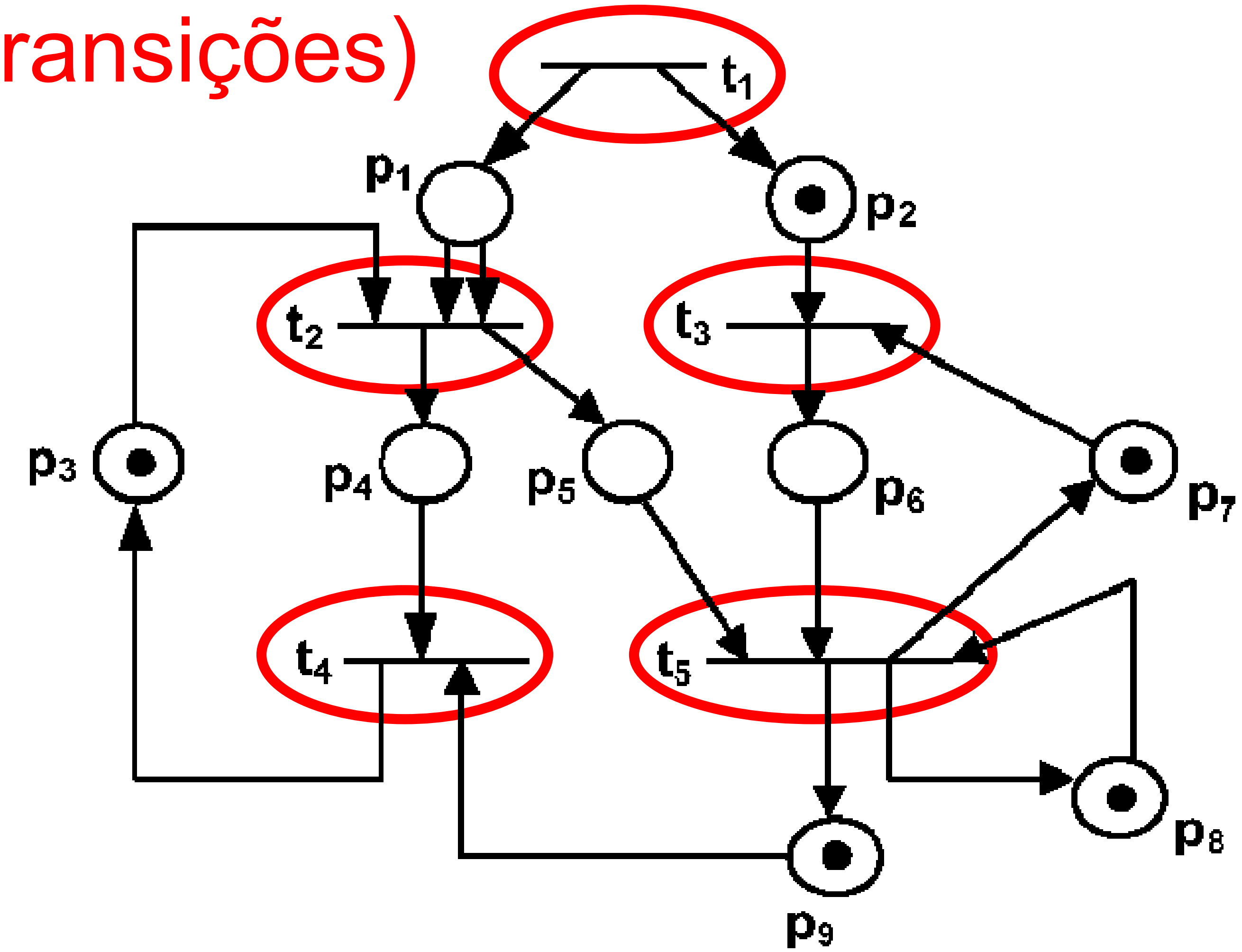
Exemplo 1

P (lugares)



Exemplo 1

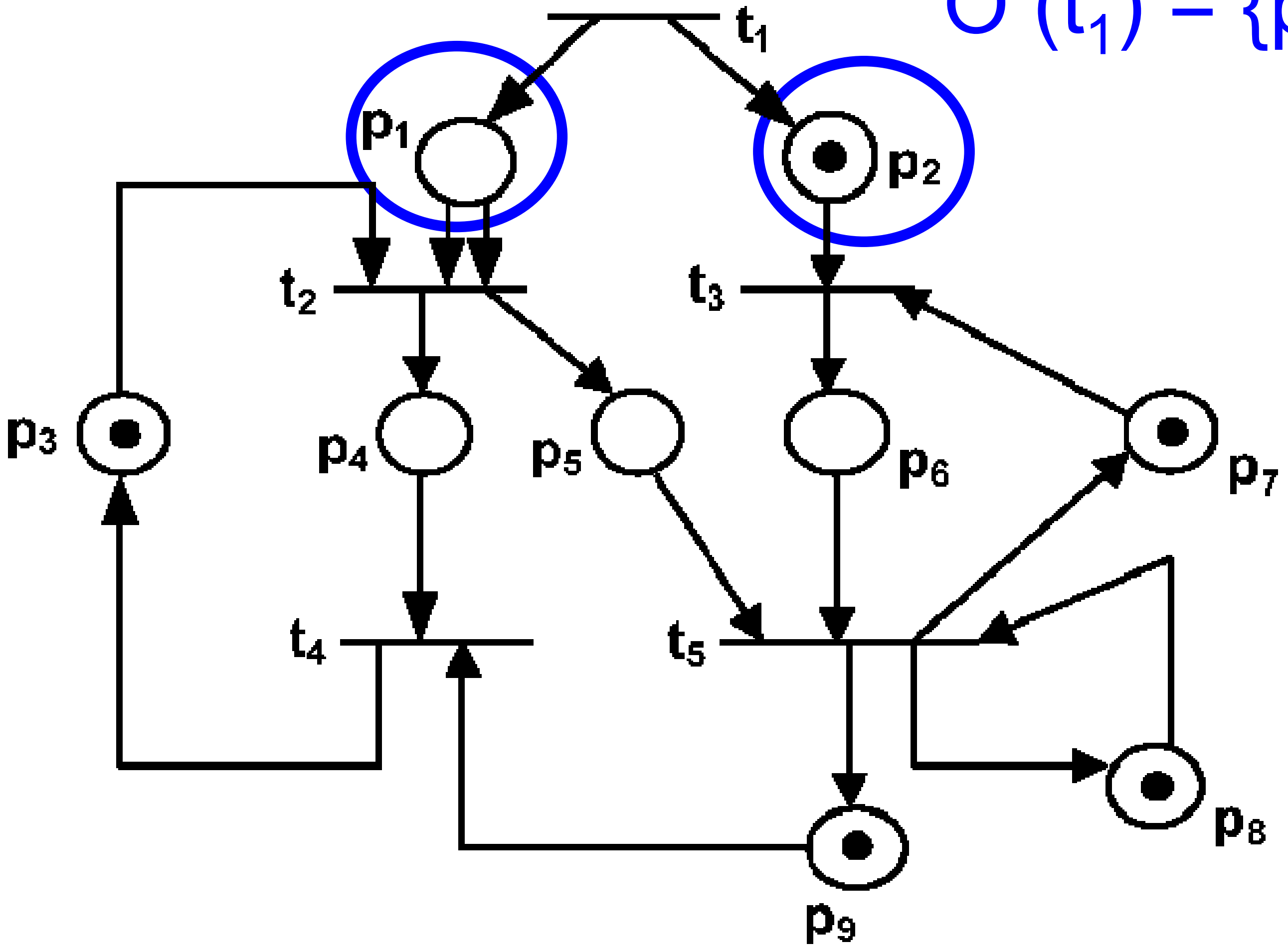
T (transições)



Exemplo 1

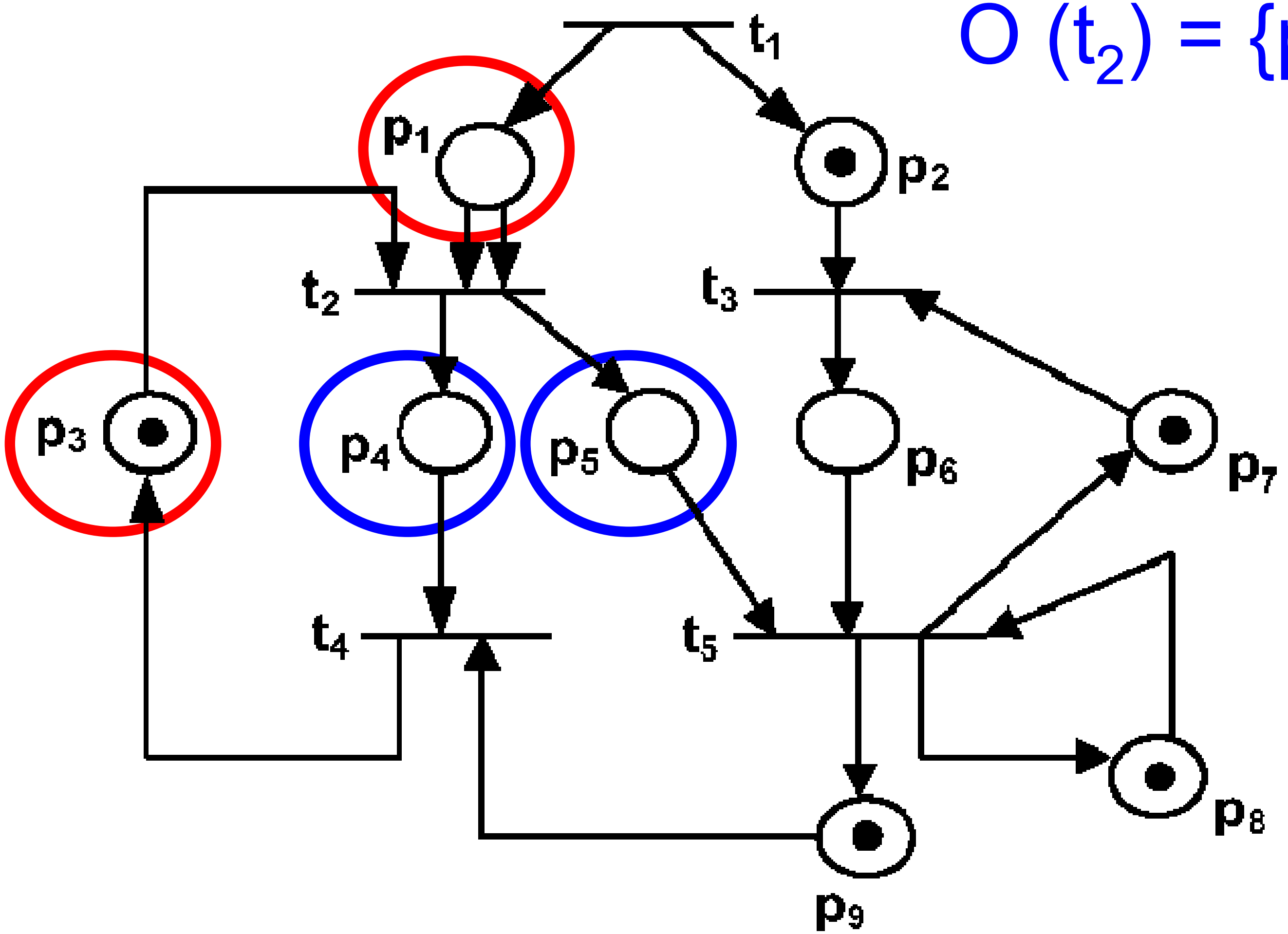
$I(t_1) = \varnothing$

$O(t_1) = \{p_1, p_2\}$



Exemplo 1

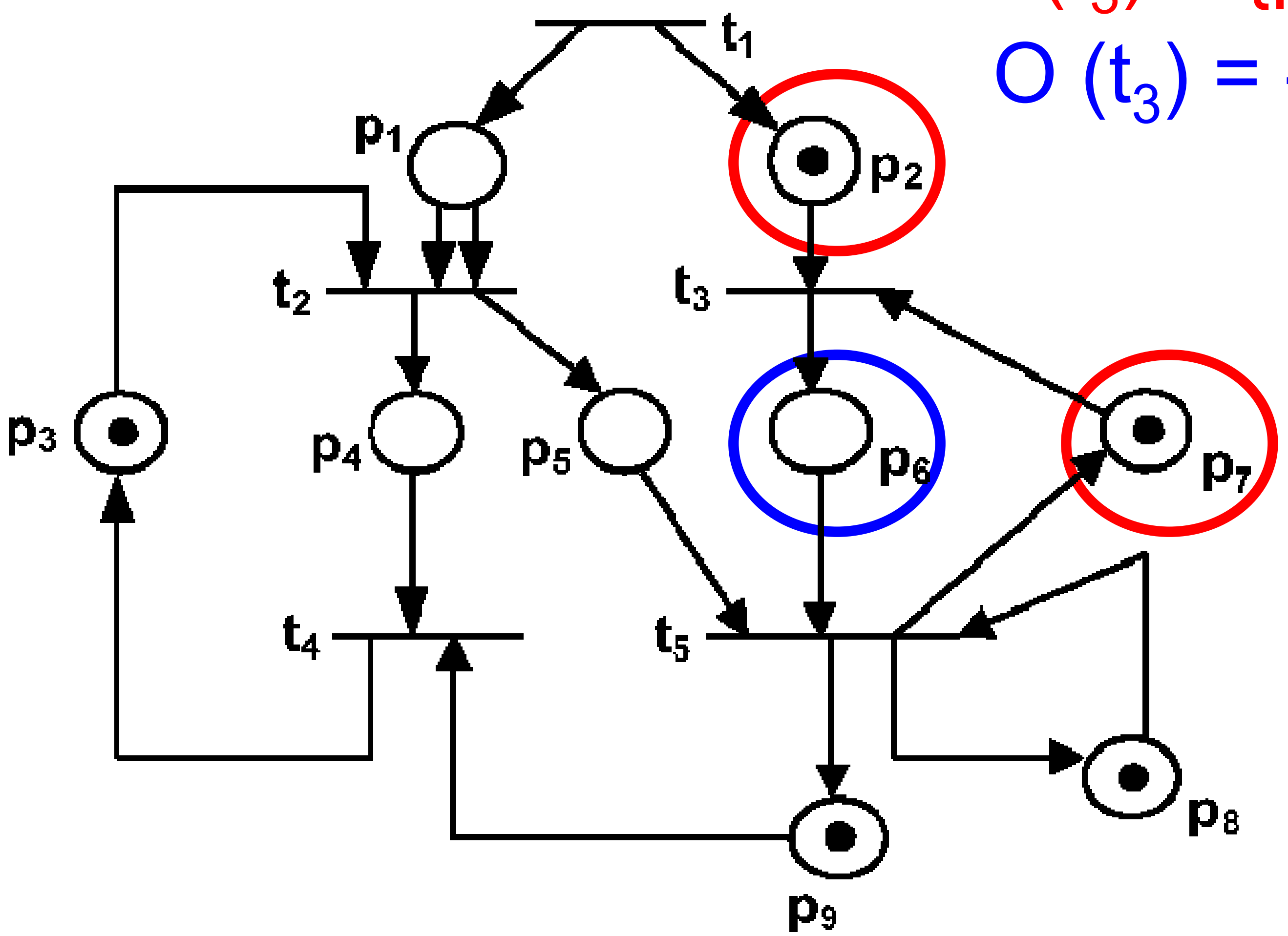
$I(t_2) = \{p_1, p_3\}$
$O(t_2) = \{p_4, p_5\}$



Exemplo 1

$I\ (t_3) = \{p_2, p_7\}$

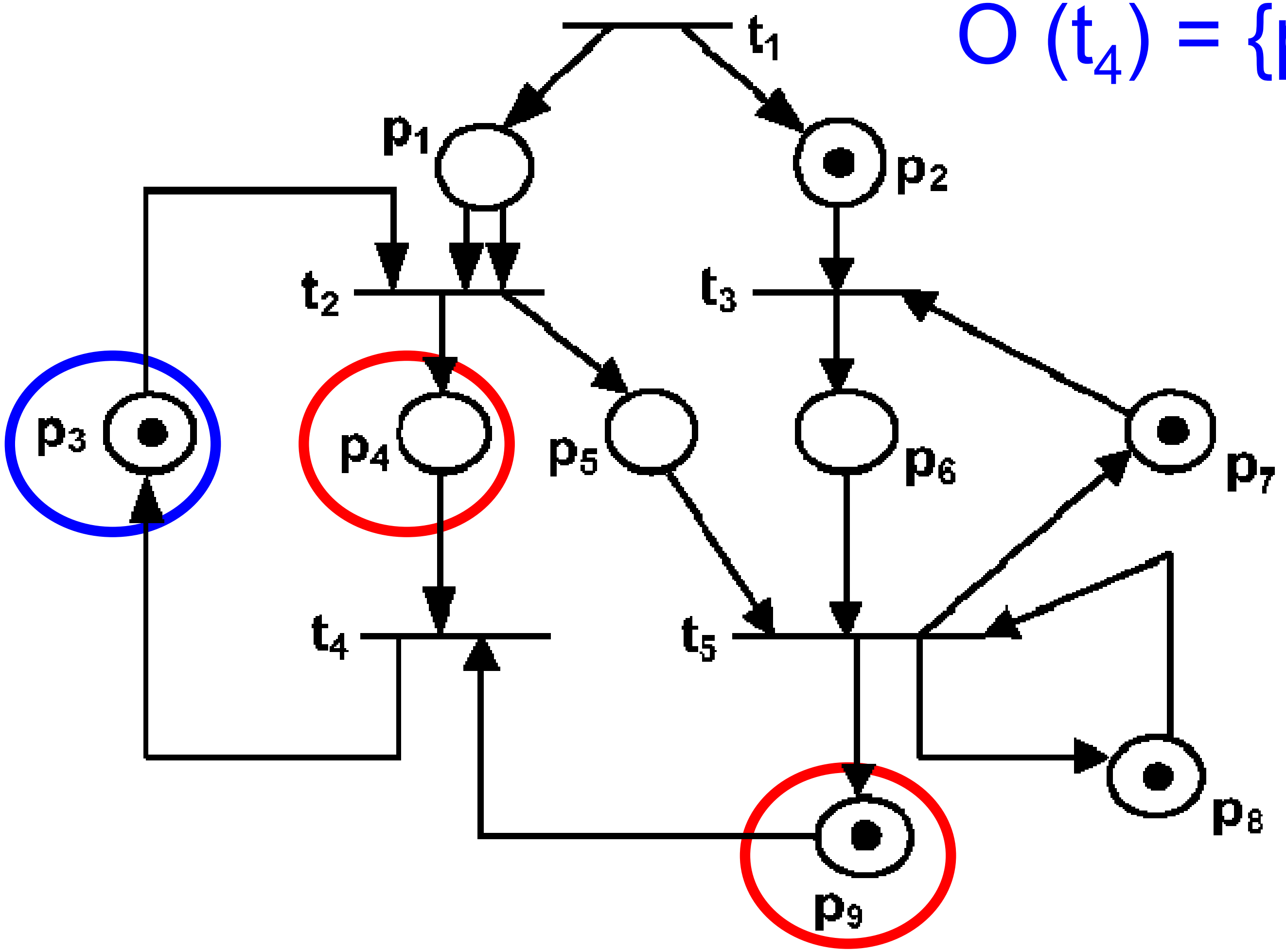
$O\ (t_3) = \{p_6\}$



Exemplo 1

$I\ (t_4) = \{p_4, p_9\}$

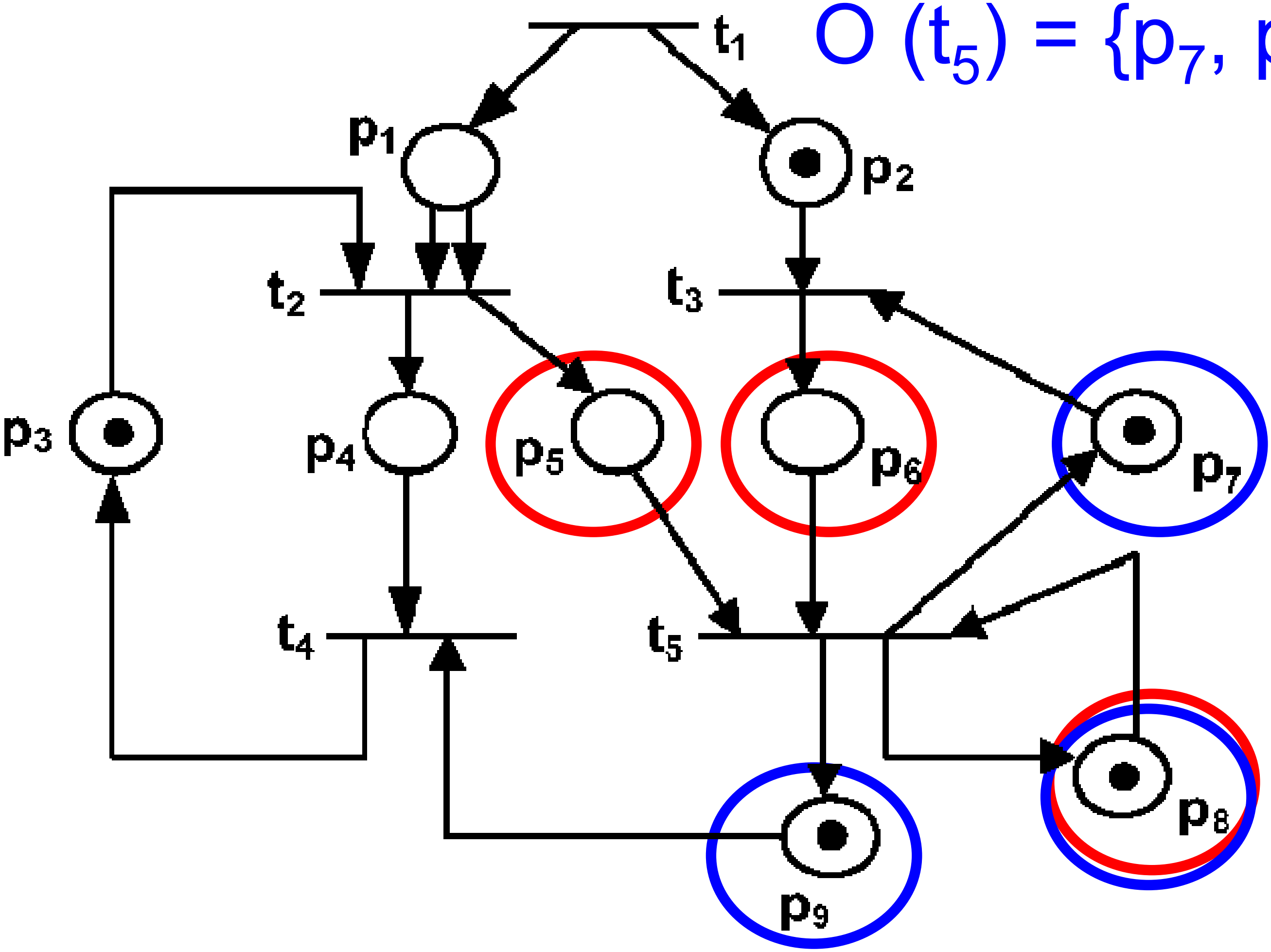
$O\ (t_4) = \{p_3\}$



Exemplo 1

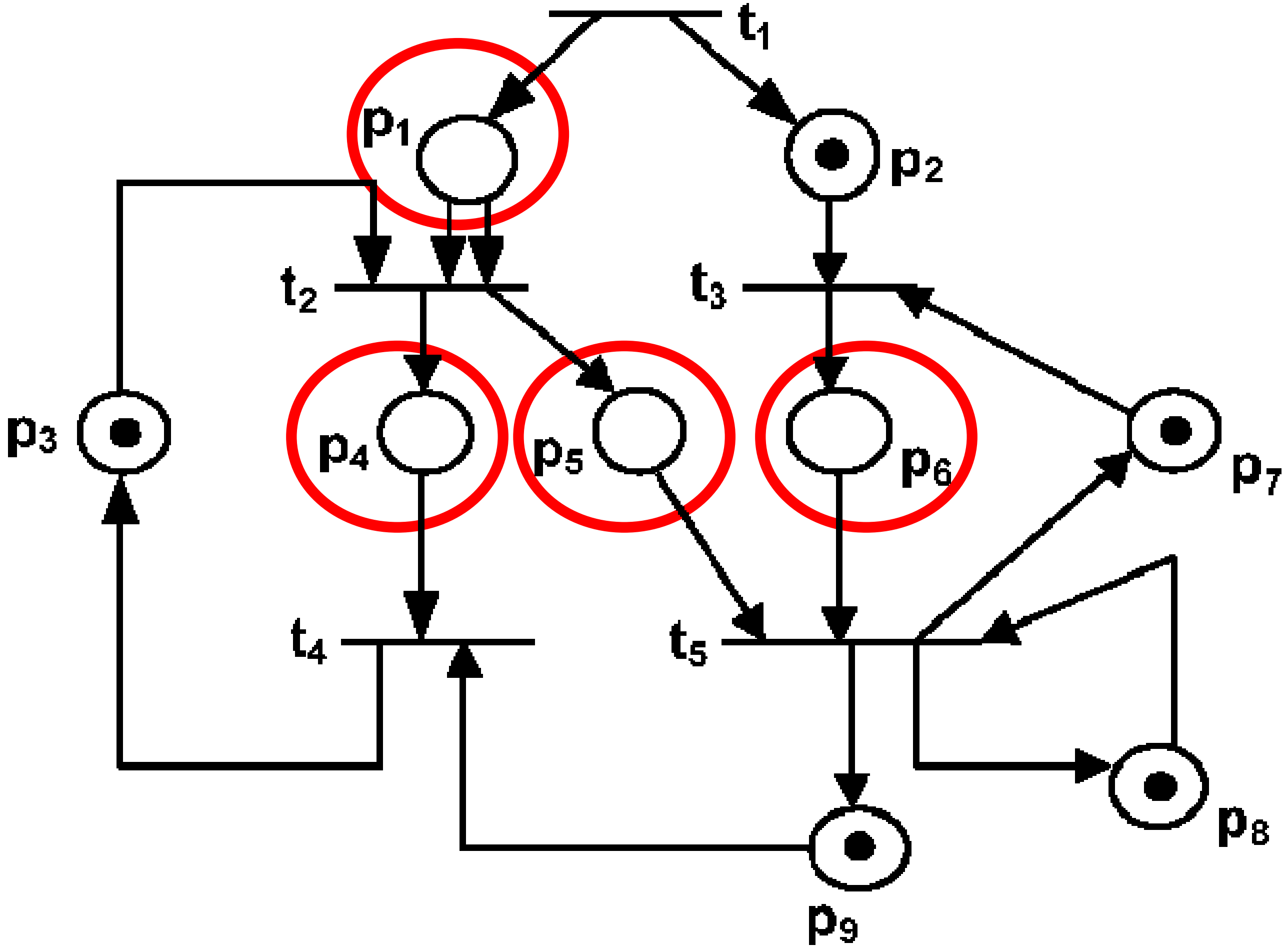
$I(t_5) = \{p_5, p_6, p_8\}$

$O(t_5) = \{p_7, p_8, p_9\}$



Exemplo 1

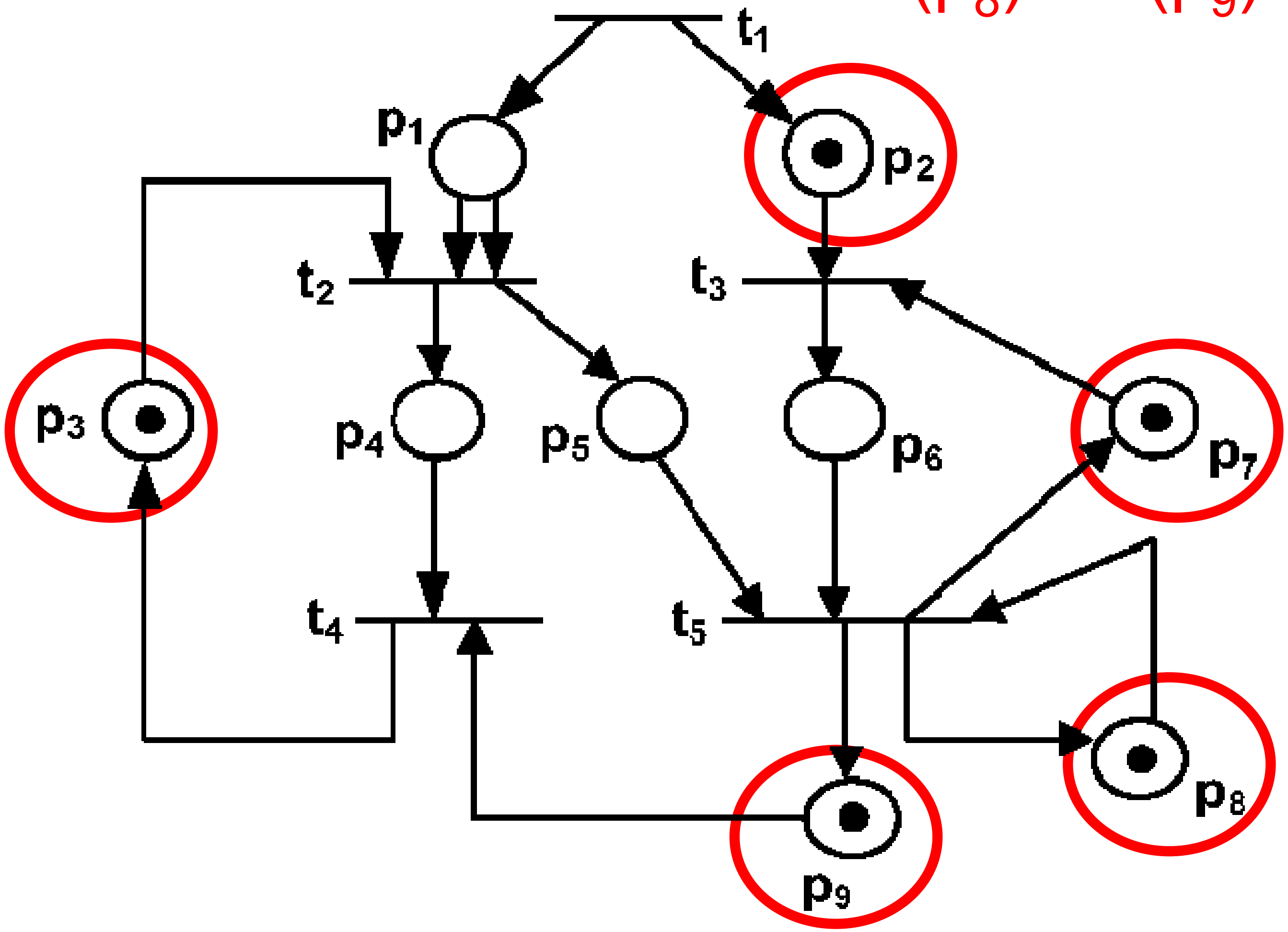
$M(p_1) = M(p_4) = M(p_5) = M(p_6) = 0$



Exemplo 1

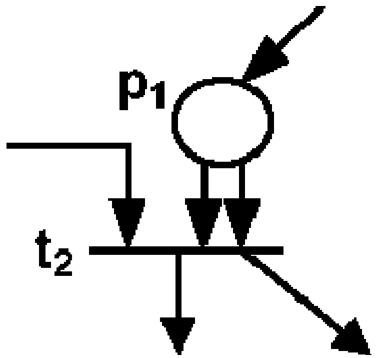
$M(p_2) = M(p_3) = M(p_7) =$

$M(p_8) = M(p_9) = 1$



Multiplicidade

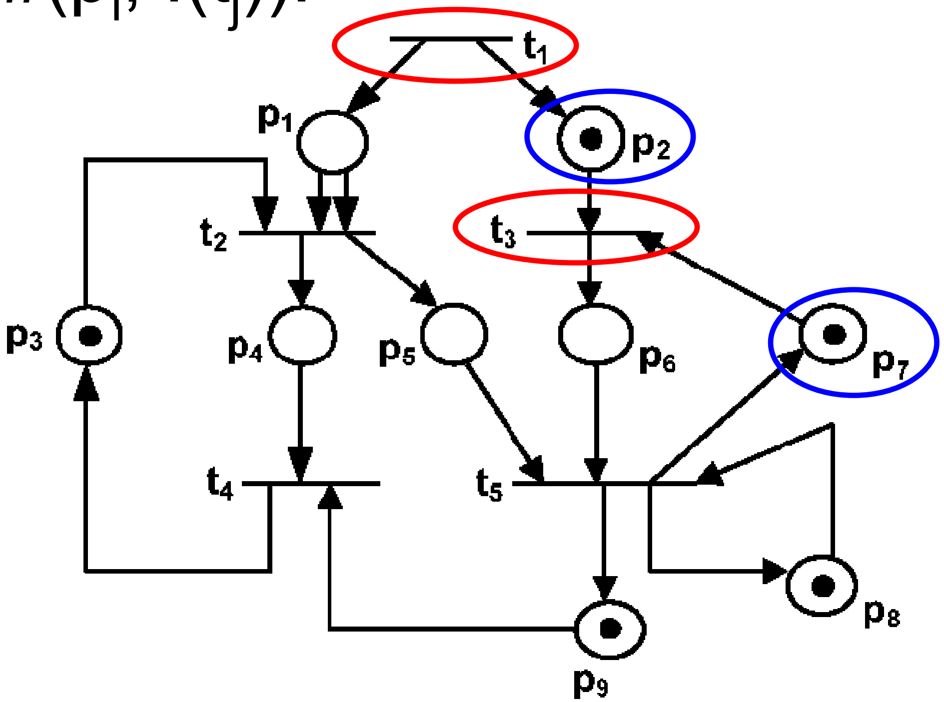
- A *multiplicidade* de um lugar p_i como entrada da transição t_j é o número de ocorrências de p_i no multiconjunto $I(t_j)$, denotada $\#(p_i, I(t_j))$.
- No exemplo, $\#(p_1, I(t_2)) = 2$.



- Nos demais casos, $\#(p_i, I(t_j)) = 1$.

Habilitação

- Uma transição t_j em uma rede de Petri marcada está *habilitada* $\Leftrightarrow \forall\ p_i \in I(t_j)$: $M(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$.



$I(t_1) = \emptyset \Rightarrow$
$\nexists\ p_i \in I(t_1)$:
$M(p_i) < \#(p_i, I(t_1))$
$\Rightarrow t_1$ habilitada

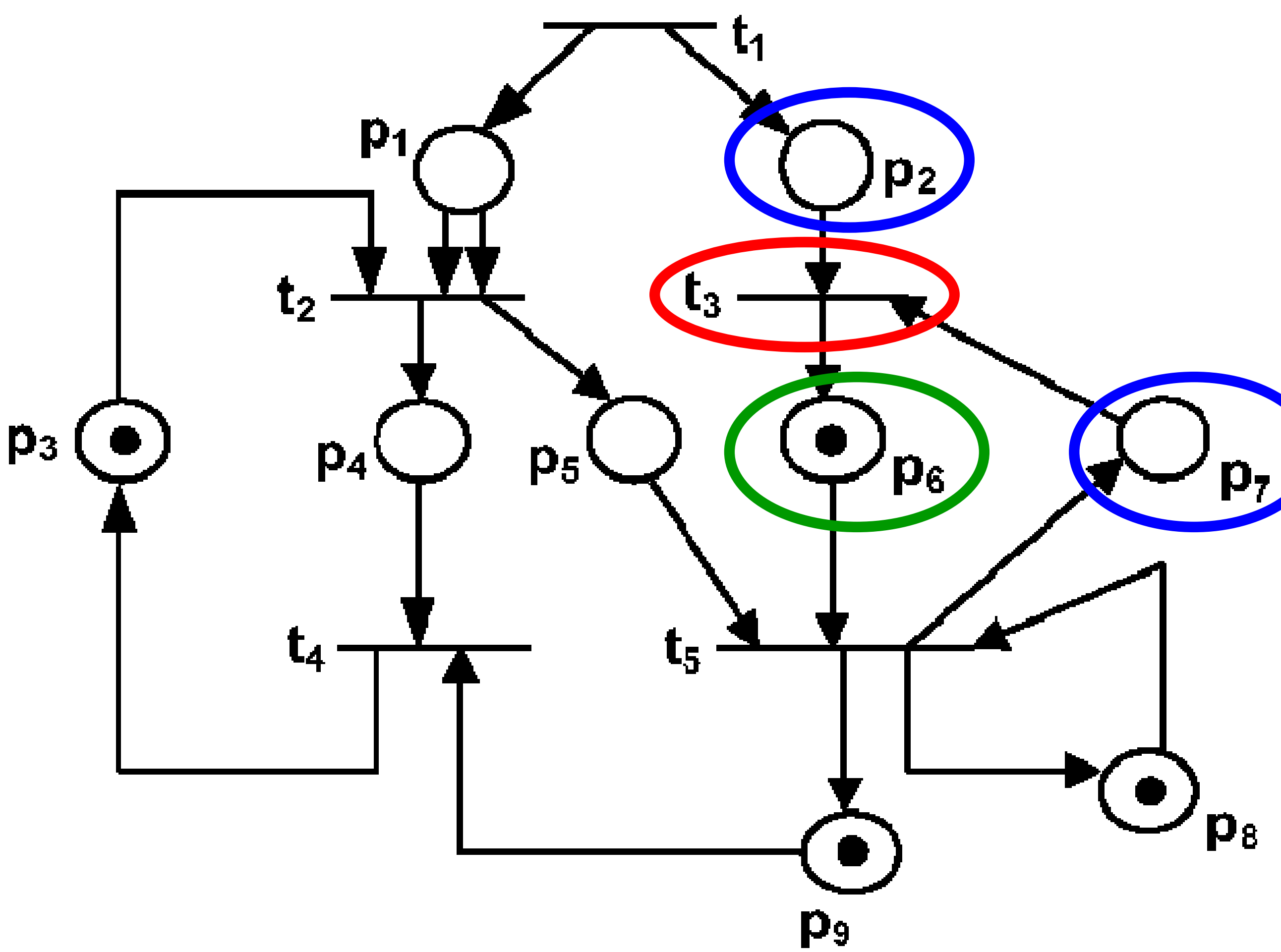
$I(t_3) = \{p_2, p_7\}$
$\forall\ p_i \in I(t_3)$: $M(p_i) \geq \#(p_i, I(t_3))$.
$\Rightarrow t_3$ habilitada

Disparo

- Uma transição t_j numa rede de Petri com marcação M só pode *disparar* se estiver habilitada.
- O disparo de uma transição habilitada resulta em uma nova marcação M' definida por:

  $M'(p) = M(p) – \#(p, I(t_j)) + \#(p, O(t_j)), \forall p \in P.$
- Em outras palavras, tokens em número adequado são consumidos das entradas e depositados nas saídas de t_j.

Exemplo 1



Estados e Transições

- O estado de uma rede de Petri é definido por sua marcação atual M.
- A mudança de estado causado pelo disparo de uma transição é definida pela função "próximo estado" $\delta: N \times T \rightarrow N$, onde N é o conjunto de todas as marcações possíveis.
- O valor $\delta(M, t_j)$ só está definido se t_j está habilitada. Neste caso, $\delta(M, t_j) = M'$.

Execução de uma Rede de Petri

- A *execução* de uma rede de Petri a partir de uma marcação inicial M_0 é a seqüência de marcações (M_0, M_1, M_2, ...) obtida através do disparo das transições (t_{j0}, t_{j1}, t_{j2}, ...) com os valores definidos pela função δ.
- Lembrar que a transição t_1 está sempre habilitada!

Alcançabilidade

- O *conjunto de alcançabilidade* A = (R, M) de uma rede de Petri R = (P, T, I, O) com marcação M é o menor conjunto de marcações definido por:
  - $M \in A = (R, M)$.
  - Se $M' \in A(R, M)$ e $M'' = \delta(M', t_j)$ para alguma $t_j \in T$, então $M'' \in A(R, M)$.
- Este conjunto pode ser *infinito*: tokens podem ser consumidos, mas também podem ser criados!

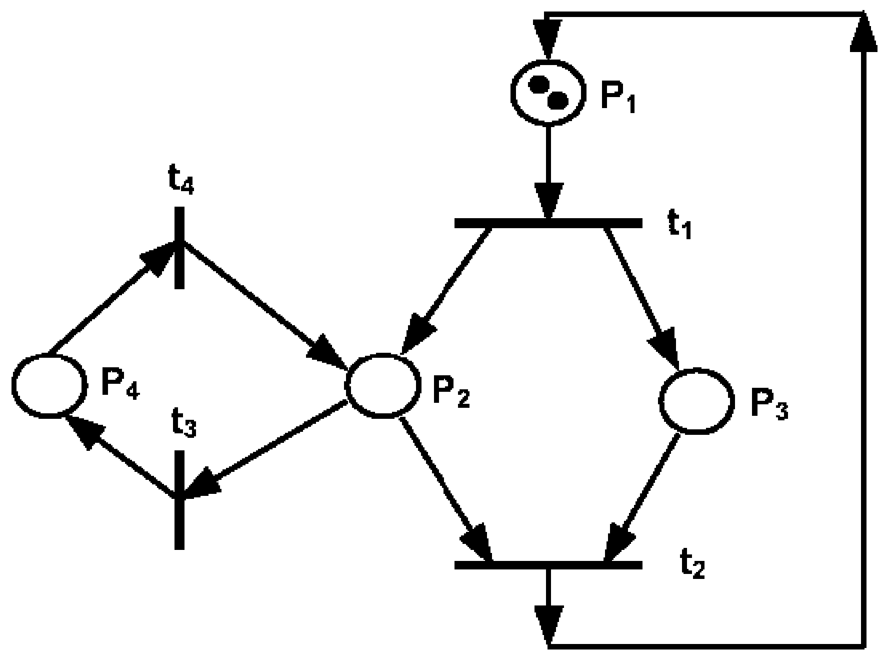
Transitividade da Alcançabilidade

- Dada uma rede de Petri R = (P, T, I, O) com marcação M, diz-se que a marcação M' é *imediatamente alcançável* a partir de M se existe uma transição $t_j \in T$: $\delta(M, t_j) = M'$.
- Dada uma rede de Petri R = (P, T, I, O) com marcação M, diz-se que a marcação M' é *alcançável* a partir de M se $M' \in A(R, M)$.

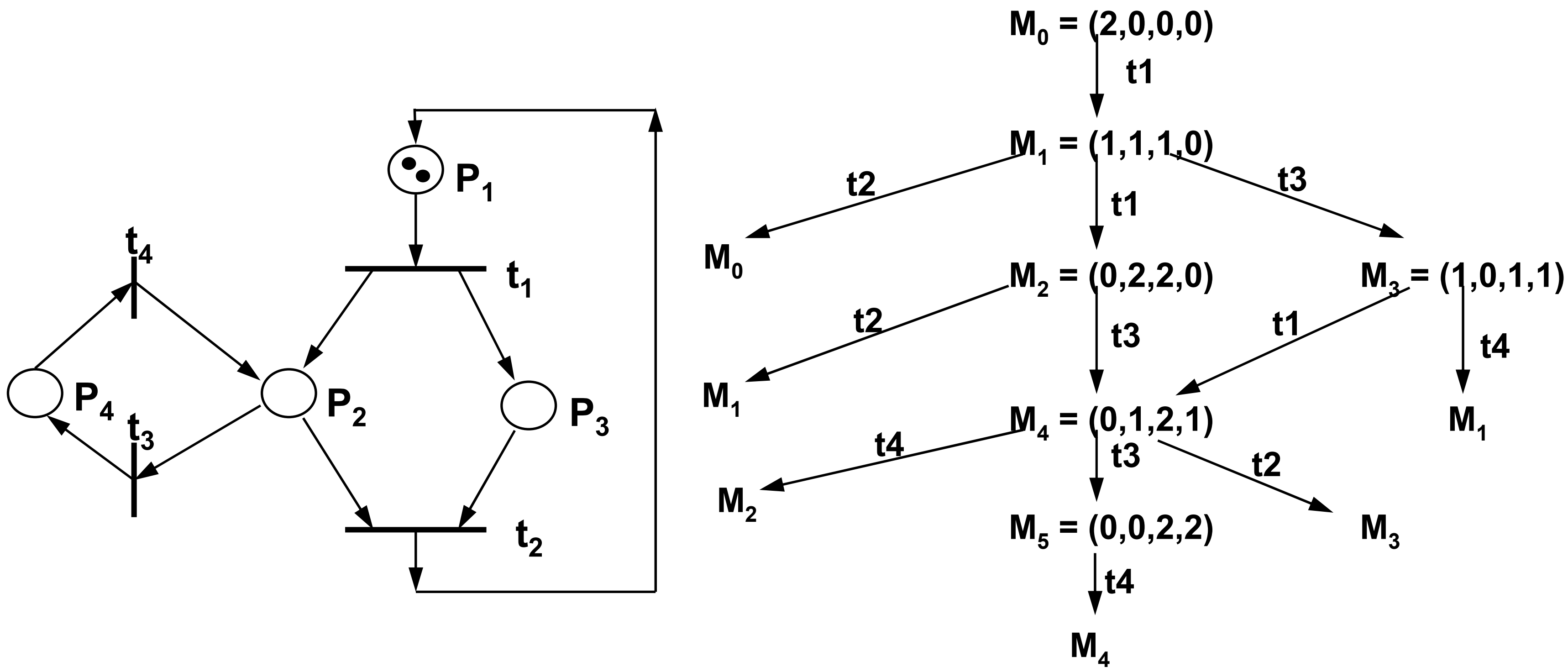
Árvore de Alcançabilidade

- A *árvore de alcançabilidade* de uma rede de Petri é construída tendo a marcação inicial M_0 como raiz e acrescentando todas as marcações alcançáveis a partir de M_0 pelo disparo das transições habilitadas.

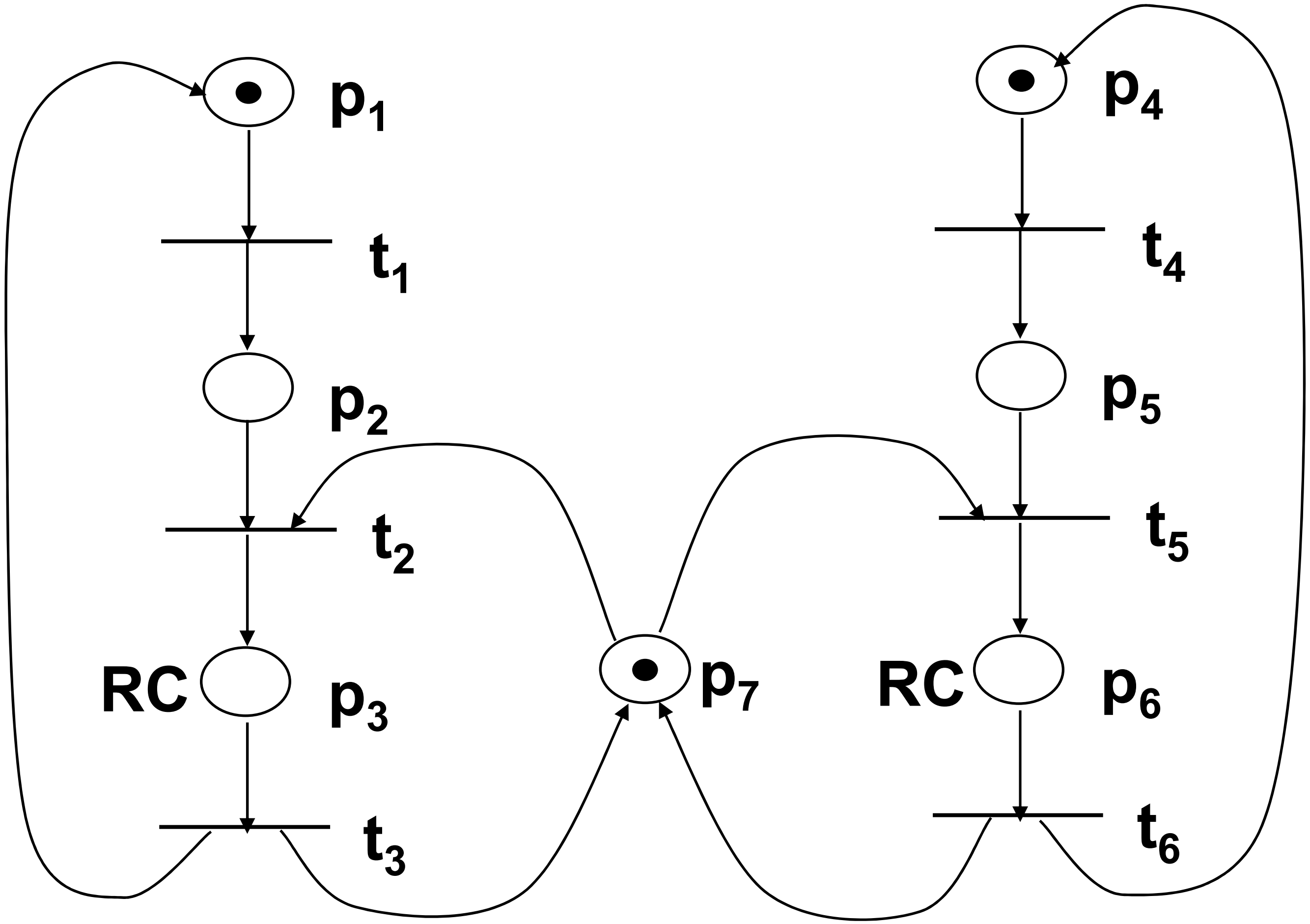
- $M_0 = (2, 0, 0, 0)$



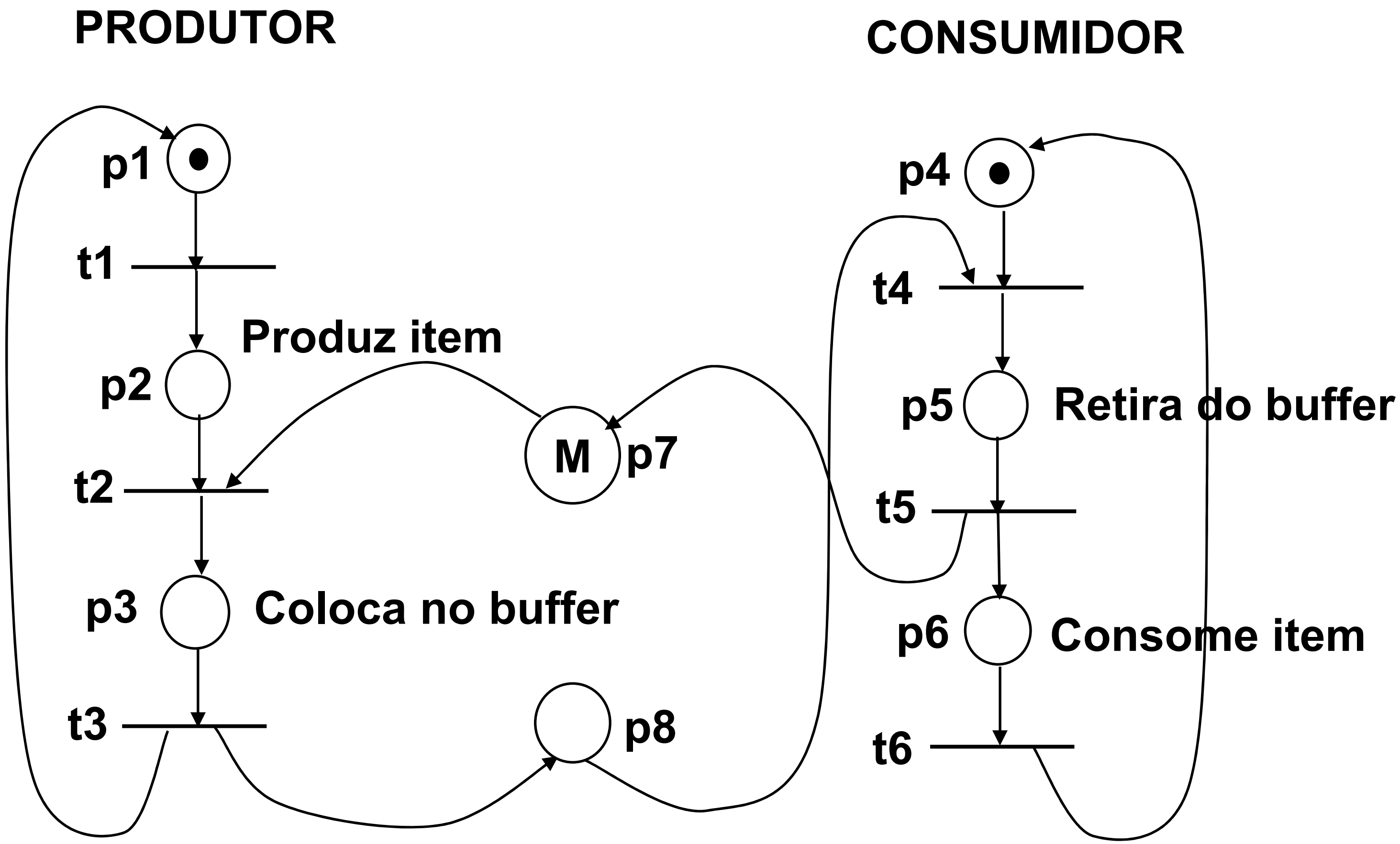
Ex4:Árvore de Alcançabilidade



Exemplo 2 : Semáforos



Ex3:Produtor e Consumidor

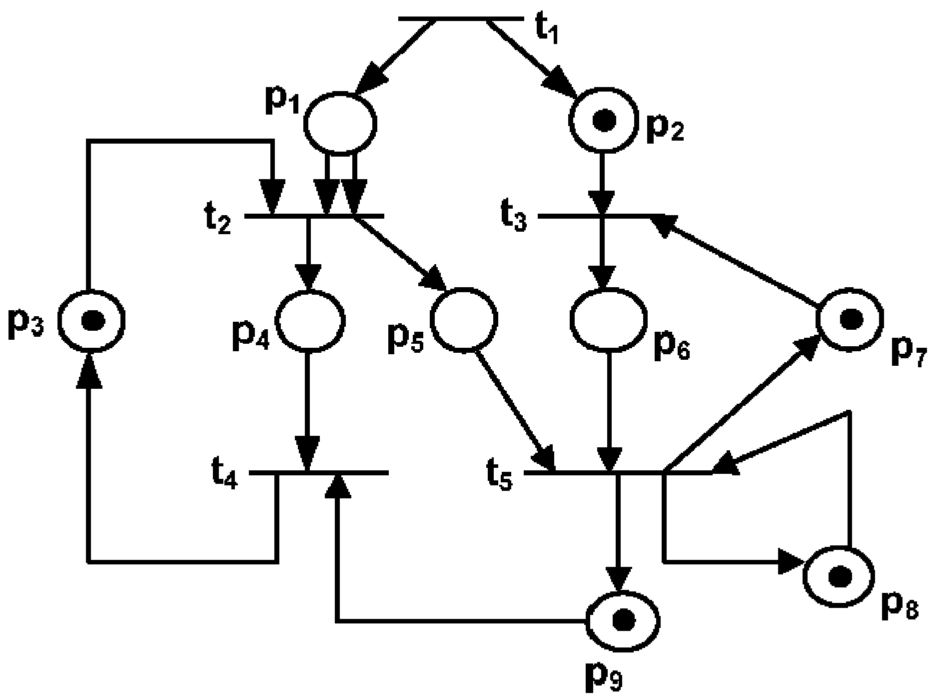


Notação Matricial

- As funções I e O são substituídas pelas matrizes E e S, ambas de tamanho $n \times m$:
  - $E[j, i] = \#(p_i, I(t_j))$;
  - $S[j, i] = \#(p_i, O(t_j))$;

  para $i = 1...m$ e $j = 1...n$.
- A rede de Petri é então definida por $R = (P,T,E,S)$.
- Define-se também a *matriz de incidência* como $C[j, i] = S[j, i] – E[j, i]$, para $i = 1...m$ e $j = 1...n$.

Notação Matricial



$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação Matricial

- Uma marcação M é representada por um vetor de *m* componentes, onde cada elemento corresponde ao número de marcas num determinado lugar:

  M = [0 1 1 0 0 0 1 1 1]

- Uma transição t_j é representada por um vetor e_j de *n* colunas no qual o j-ésimo componente é igual a 1 e os demais são iguais a zero:

  e_j = [0 0 0 ... 1 ... 0] vetor que representa uma transição.

  ↑ *j-ésima coluna*

Notação Matricial

- A transição t_j está habilitada na marcação M se $M \geq e_j E$.
- Considera-se que $M' \leq M''$ se $M'[i] \leq M''[i]$ para todo i = 1...*m*.
- A função próximo estado é dada por:
  - $\delta\ (M, t_j) = M + e_j S - e_j E$, ou simplesmente
  - $\delta\ (M, t_j) = M + e_j C$;

Notação Matricial

- Dada uma seqüência de disparos de transições $s = t_{j1}, t_{j2}, ..., t_{jk}$, define-se o valor de $\delta(M, s)$ como:

  $\delta(M, s) = \delta(M, t_{j1}\ t_{j2}...t_{jk}) =$

  $M+(e_{j1}+e_{j2}+...+e_{jk})C \ = M + f_sC$

- O vetor $f_s = e_{j1} + e_{j2} + ... + e_{jk}$ é denominado *vetor de contagem de disparos*: o j-ésimo componente de f_s indica quantas vezes a transição t_j foi disparada.

Propriedades

- Segurança
- Limitação
- Conservação
- Vivacidade
- Impasses (Deadlocks)

Segurança

- Um lugar $p_i \in P$ de uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação inicial M é *K-seguro* se, para todo $M' \in A(R, M)$, $M'[p_i] \leq K$.
- Um lugar $p_i \in P$ de uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ com marcação M é *seguro* se, para todo $M' \in A(R, M)$, $M'[p_i] \leq 1$.
- Uma rede de Petri é segura se todos os seus lugares forem seguros.

Limitação

- Um lugar é *limitado* se é K-seguro para algum K.
- Uma rede de Petri é *limitada* se todos os seus lugares são limitados.
- Uma rede de Petri é viavelmente implementável em hardware ou software se for segura e limitada.

Conservação

- Uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ e com marcação inicial M é *conservativa* se, $\forall M' \in A(R, M)$ e $\forall p_i \in P$, $\Sigma M[p_i] = \Sigma M'[p_i]$.
- Em outras palavras, o número total de marcas (tokens) na rede de Petri permanece constante em todas as marcações alcançáveis a partir da marcação inicial.
- Caso contrário, trata-se de uma rede não conservativa.

Vivacidade

- Dada uma rede de Petri R = (P, T, I, O) e uma marcação M:
  1. Uma transição $t_j \in T$ está *viva em nível 0*, ou *morta*, se nunca pode ser disparada, isto é, não existe M' tal que $M \in A(R, M)$ e t_j está habilitada em M'.
  2. Uma transição t_j está *viva em nível 1*, ou *viva*, se é potencialmente disparável, isto é, se existe $M' \in A(R, M)$ tal que t_j está habilitada em M'.

Vivacidade

- Dada uma rede de Petri $R = (P, T, I, O)$ e uma marcação M:

3. A transição t_j está *viva em nível 2* se $\forall\ v \geq 0$ existe uma seqüência de transições $s = t_{j1}\ t_{j2}\ ...\ t_{jk}$ tal que $\delta(M, s)$ é definida e $f_s(t_j) \geq v$, isto é, t_j é disparada no mínimo *v* vezes.
4. A transição t_j está *viva em nível 3* se existe uma seqüência infinita s de disparos de transições tal que $\delta\ (M, s)$ está definida e t_j aparece com freqüência infinita em s.

Impasses (Deadlocks)

- Dada uma rede de Petri R = (P, T, I, O), uma marcação M’ e um subconjunto $T' \subseteq T$, a rede R está em *impasse* na marcação M’ em relação às transições de T’, se $\forall\, t_j \in T'$, t_j está morta.
- Se T’ = T então a situação da rede é de *impasse total* e nenhuma transição poderá ser disparada.
- Uma rede de Petri R é *livre de impasses* se, $\forall\, M' \in A(R, M)$, existe uma transição t_j viva.

Análise de Redes de Petri

- A análise de uma rede de Petri constitui-se da determinação de dois itens :
  - Árvore de alcançabilidade;
  - Conjuntos invariantes.

Condição de Alcançabilidade

- Se R = (P, T, E, S) é uma rede de Petri e M_k sua marcação atual, o disparo para atingir a marcação M_{k+1} é representado pela equação:

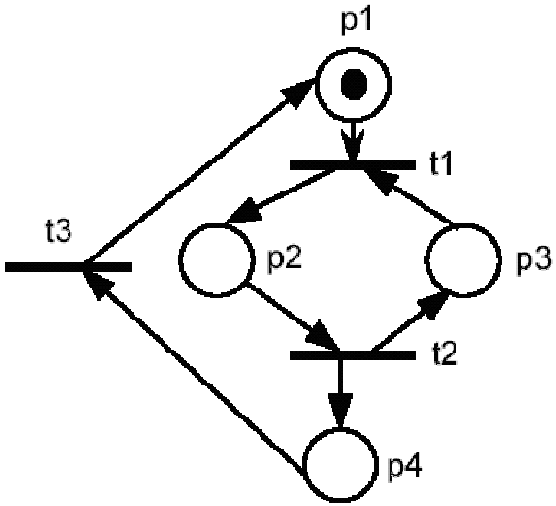
  $M_{k+1} = M_k + e_j C$ (onde C = S – E)

- O disparo da seqüência de transições $s = t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_{jk}$ a partir da marcação M resulta na marcação
  $M' = M + (e_{j1}+e_{j2}+\ldots+e_{jk})\, C = M + f_s C$.
- Esta equação pode ser escrita na forma do sistema linear $\Delta M = M' - M = f_s C$ ou $C^T f_s^{\,T} = \Delta M^T$.

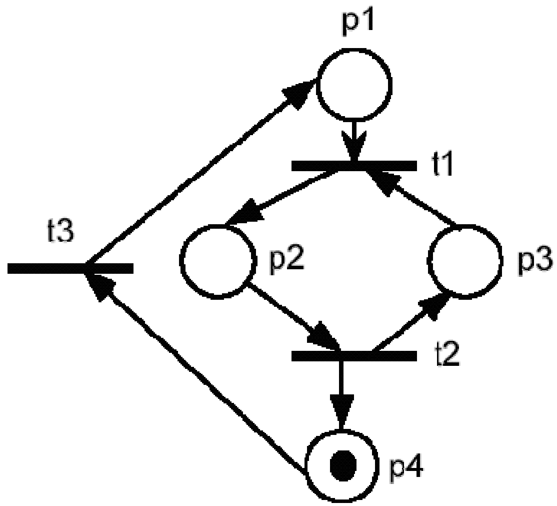
Condição de Alcançabilidade

- A solução do sistema linear $C^T f_s^T = \Delta M^T$ indica quantas vezes cada transição deve ser disparada para transformar M em M'.
- A existência de uma solução desta equação é condição *necessária* mas *insuficiente* para que a marcação M' seja alcançável a partir de M!

Ex5: Contra-Exemplo



$$M^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{?}$$



$$M'^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta M^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f_s^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mas M’ *não* é alcançável, pois *nenhuma* transição pode ser disparada a partir de M.

Conjuntos Invariantes

- Dada uma rede de Petri R = (P, T, E, S), chama-se *invariante* de R um vetor z com *m* elementos *binários* (i.e. uma seleção de lugares da rede) que satisfaz o sistema de equações Cz = 0.
- O *conjunto invariante* Z é definido como:

$$Z = \{p_j \mid z[j] = 1, j = 1...m\}$$

Conjuntos Invariantes

- A partir da definição $\Delta M = f_s C$, conclui-se que, $\forall$ M e M' $\in$ A(R, M),

  $\Delta Mz = f_s Cz = 0 \Rightarrow Mz = M'z$ (independentemente de f_s), significando que a soma das marcas nos lugares pertencentes ao invariante Z é *constante*, $\forall$ M $\in$ A(R, M).

Conjuntos Invariantes

- Seja p o posto da matriz C (número de linhas não nulas após o escalonamento). Se $p = m$, isto é, coincide com o número de lugares da rede, então a única solução do sistema $Cz = 0$ é o vetor nulo, indicando que não existe nenhum conjunto invariante em R.
- Se $p < m$, existe um conjunto de $(m - p)$ soluções linearmente independentes.

Conjuntos Invariantes

- Se um lugar p_j pertence a um invariante Z então o número de marcas em p_j será limitado (pois é uma fração de um valor constante).
- Se existe um conjunto de invariantes envolvendo *todos* os lugares da rede, o número de marcas na rede *inteira* permanece constante, igual a $\Sigma_{j=1...m}$ M[j].

Fim do módulo Conceitos Básicos de Redes de Petri