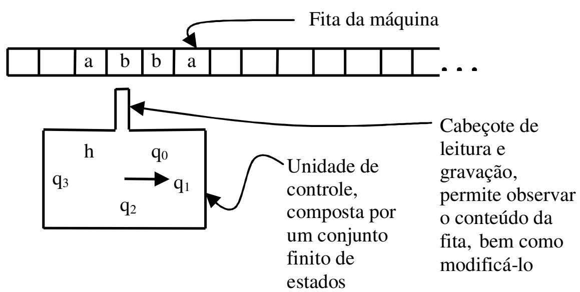
Máquina de Turing

A máquina de Turing possui um dispositivo de entrada, que é representado por uma fita de capacidade infinita à direita e limitada à esquerda, dividida em células enumeráveis e endereçáveis. Possui ainda um cabeçote de leitura e gravação, que permite à máquina ler e escrever na fita. O controle das funções da máquina é realizado através de uma unidade especial, que opera como um autômato. Esquematicamente tem-se a seguinte figura:



Os valores encontrados na fita são definidos pelo alfabeto da máquina de Turing, este alfabeto inclui um símbolo especial ("#"), para marcar uma célula sem símbolos (espaço em branco). Uma cadeia que se encontre na fita de uma máquina de Turing antes do início de sua execução é chamada de cadeia de entrada, e a cadeia produzida pela máquina ao fim de sua execução, cadeia de saída.

O cabeçote de leitura e gravação pode mover-se para a esquerda ou para a direita, de acordo com o estado da máquina, apenas uma célula por vez.

A unidade de controle é composta de um conjunto de estados (em que há dois estados especiais, o estado inicial e o estado final), e uma função de transferência.

Neste modelo o próximo estado é uma função somente do estado corrente e do símbolo encontrado em sua fita de entrada. Na troca de estado, caso a função de transferência mapeie a partir do estado atual, e do símbolo na fita, o estado especial final (h - "halt", parada), a máquina termina sua execução e fica parada.

As ações possíveis para uma máquina de Turing são: escrita de um símbolo na posição corrente da fita, movimentação da cabeça de leitura e gravação uma posição para a direita, movimentação da cabeça de leitura e gravação uma posição para a esquerda. Somente estas ações são permitidas.

Definição Formal da Máquina de Turing

Uma máquina de Turing M é uma quádrupla M=(K, Σ, δ, s), na qual:
K é um conjunto finito de estados, que não contém o estado final <u>h</u>;
Σ é um alfabeto, incluindo o símbolo branco (#), mas excluindo os símbolos <u>L</u> e <u>R</u>;
$s \in K$, é o estado inicial;
δ é a função de $K \times \Sigma$ para $(K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$.

Ações possíveis:
R - Movimenta a cabeça de leitura e gravação uma posição para a direita;
L - Movimenta a cabeça de leitura e gravação uma posição para a esquerda;
σ - Escreve o símbolo σ na posição corrente da cabeça de leitura e gravação na fita;

Se q e $p \in K$, $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$, $a \in \Sigma$, e $\delta(q, a) = (p, b)$, então a máquina de Turing quando estiver no estado <u>q</u> e encontrar o símbolo <u>a</u>, mover-se-á para o estado p, e tomará a ação designada por b. Se b for um símbolo, então a máquina escreve esse símbolo na fita (sobre o símbolo a anterior), se b representa o símbolo L ou R, a máquina move a cabeça de leitura e gravação uma posição na direção de b. Como δ é uma função, a operação da máquina de Turing é determinística, e parará somente quando a máquina entrar no estado final (h), ou tentar mover o cabeçote de leitura e gravação à esquerda da última posição da fita (limite da esquerda). Caso a máquina atinja esse limite, e continue tentando ir à esquerda diz-se que ela está presa ou travada, ("hanging").

Configuração de uma Máquina de Turing

Uma configuração de uma máquina de Turing M = (K, Σ, δ, s) é membro do conjunto: $(K \cup \{h\}) \times \Sigma^* \times \Sigma \times ((\Sigma^*(\Sigma - \{\#\})) \cup \{\varepsilon\})$.

Uma configuração de uma máquina de Turing pode também ser representada de forma reduzida ou abreviada, como $(q, w\underline{a}u)$ sem os separadores, em vez de (q, w, a, u) e o elemento sublinhado indica a posição da cabeça de leitura e gravação da máquina em questão.

Pode-se definir passo de uma máquina de Turing como uma seqüência de duas configurações, uma anterior a uma ação, e outra posterior. Define-se sobre o conjunto das configurações a relação $\vdash_M$, que indica um par de configurações sucessivas durante o processo computacional.

<u>Def</u>.: Seja uma máquina de Turing M = (K, Σ, δ, s), e sejam (q_1, w_1, a_1, u_1) e (q_2, w_2, a_2, u_2) configurações de M, então um passo de M é definido como:
$(q_1, w_1, a_1, u_1) \vdash_M (q_2, w_2, a_2, u_2)$
se e somente se, para algum elemento $b \in (\Sigma \cup \{L, R\})$, $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ e uma das opções para b ocorre:
1) $b \in \Sigma$, $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$, $a_2 = b$; ou
2) $b = L$, $w_1 = w_2a_2$, e uma das opções abaixo ocorre:
   a) $u_2 = a_1u_1$, se $a_1 \neq \#$ ou $u_1 \neq \varepsilon$;
   b) $u_2 = \varepsilon$, se $a_1 = \#$ e $u_1 = \varepsilon$; ou
3) $b = R$, $w_2 = w_1a_1$, e uma das opções abaixo ocorre:
   a) $u_1 = a_2u_2$;
   b) $u_2 = \varepsilon$, $u_1 = \varepsilon$ e $a_2 = \#$;

Definição de Computação

Uma vez que se tenha definida a função de passo da máquina de Turing, é possível então definir a forma de se atingir uma determinada configuração final, partindo de uma configuração inicial, após alguns passos. O que é importante aqui é que está se generalizando o conceito de passo, transformando a computação em uma seqüência finita de passos.

<u>Def</u>.: Computação. Para uma máquina de Turing qualquer <u>M</u>, o símbolo $\vdash_M^*$ representa o fechamento transitivo e reflexivo de $\vdash_M$; diz-se que uma configuração c_1 leva a uma configuração c_2 se $c_1 \vdash_M^* c_2$. Uma computação por M é representada por uma seqüência de configurações $c_0c_1c_2...c_n$, para algum $n \geq 0$, que indicam a seqüência de passos da máquina para executar a tarefa, de forma que: $c_0 \vdash_M c_1 \vdash_M c_2 \vdash_M ... \vdash_M c_n$. Neste caso diz-se que a computação tem comprimento <u>n</u>, ou tem <u>n</u> passos.

Computando com Máquinas de Turing

Adota-se a seguinte política para apresentação de entradas às máquinas de Turing: A cadeia de entrada deverá estar entre dois brancos, e é escrita nas células mais à esquerda da fita; o cabeçote deverá estar posicionado na célula contendo o primeiro branco após a cadeia de entrada; a máquina deverá estar em seu estado inicial.

Def.: Funções de cadeias computáveis em máquina de Turing. Sejam Σ_0 e Σ_1 alfabetos que não contêm o símbolo #. Seja f uma função de Σ_0^* para Σ_1^*. Uma máquina de Turing M = (K, Σ, δ, s), é dita capaz de computar f se $\Sigma_0, \Sigma_1 \subseteq \Sigma$ e para qualquer $\omega \in \Sigma_0^*$, se $f(\omega) = \upsilon \in \Sigma_1^*$, então $(s,\#\omega\underline{\#}) \vdash_M^* (h,\#\upsilon\underline{\#})$. Se existe tal máquina de Turing então a função f é dita Turing-computável.

A definição estabelece também uma regra de convenção para apresentação da saída da computação. Esta convenção exige que o cabeçote de leitura e gravação esteja, após a computação, à direita da cadeia de saída da máquina, e que haja sempre um símbolo "#" (branco) à esquerda da cadeia.

Caso a função a ser computada em uma máquina de Turing possua mais de um parâmetro a ser passado como argumento, procede-se então de forma similar à anterior, ou seja, trata-se o conjunto de n parâmetros como se fosse um único parâmetro, porém, dentro do conjunto, cada parâmetro individual é separado dos demais através de um espaço em branco. Assim:

se, $f(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \upsilon \ \therefore$

$(s, \#\omega_1\#\omega_2\#...\#\omega_n\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#\upsilon\underline{\#})$

Funções Numéricas Computáveis em MT

Caso a função a ser computada em uma máquina de Turing possua um ou mais parâmetros numéricos (números Naturais) a serem passados como argumento, procede-se então de forma similar à anterior.

Seja f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e admita-se que os números serão representados em uma máquina de Turing em unário, o que faz com que o alfabeto de símbolos que pode representar um valor numérico restrinja-se a um único símbolo, "I" (o nº "2" é representado por II, um nº "n" por I^n).

Uma máquina de Turing M = (K, Σ, δ, s), é dita capaz de computar f se e somente se M computa a função f': $\{I\}^* \to \{I\}^*$ e $f'(I^n) = I^{f(n)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se existe tal máquina de Turing então a função f é dita Turing-computável.

Linguagens Decidíveis em Máquinas de Turing

Um conceito derivado de computabilidade e igualmente importante diz respeito às chamadas linguagens "Turing-decidíveis", isto é, linguagens para as quais existe uma máquina de Turing que é capaz de decidir se as cadeias entradas pertencem ou não à linguagem em questão.

Seja Σ_0 um alfabeto que não contém #, faça-se Y e N dois símbolos não presentes em Σ_0. Então a linguagem $L \subseteq \Sigma_0^*$ é Turing-decidível se e somente se a função $\chi_L : \Sigma_0^* \to \{Y, N\}$ é Turing-computável, em que para cada $\omega \in \Sigma_0^*$:

$$\chi_L(\omega) = \begin{cases} Y \ se\ \omega \in L \\ N \ se\ \omega \notin L \end{cases}$$

Se χ_L é computada por uma máquina de Turing M, então se diz que M decide L, ou é um procedimento de decisão para L.

Outra forma de se utilizar a máquina de Turing é na construção de aceitadores. Diz-se que uma máquina de Turing M aceita uma cadeia $\omega \in L$ (Linguagem especifíca), se M pára ("halt") com a entrada ω. Então, seja Σ_0 o alfabeto gerador de L, e $L \subseteq \Sigma_0^*$, M aceita L se e somente se $L = \{\omega \in \Sigma_0^* : M \text{ aceita } \omega\}$, e uma linguagem é dita Turing-aceitável se há uma máquina de Turing que a aceita. Qualquer linguagem Turing-decidível é também Turing-aceitável, porém o oposto não é verdade.

Lema: Seja M uma máquina de Turing e $(q_i, \omega_i\underline{a_i}u_i)$, para i = 1, 2, 3, configurações de M.

Se $(q_1, \omega_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M^* (q_2, \omega\omega_2\underline{a_2}u_2)$, e

$(q_2, \omega_2\underline{a_2}u_2) \vdash_M^* (q_3, \omega_3\underline{a_3}u_3)$,

logo: $(q_1, \omega_1\underline{a_1}u_1) \vdash_M^* (q_3, \omega\omega_3\underline{a_3}u_3)$.

Combinando Máquinas de Turing

Def.: Um esquema de máquina de Turing é uma tripla $(\mathcal{M}, \eta, M_0)$, no qual $\mathcal{M}$ é um conjunto finito de máquinas de Turing com um alfabeto comum Σ e conjuntos distintos de estados.

$M_0 \in \mathcal{M}$ é a máquina inicial;

η é uma função parcial de um subconjunto de $\mathcal{M} \times \Sigma$ para $\mathcal{M}$.

Def.: Seja $\mathcal{M} = (M_0, ..., M_n)$, com $n \geq 0$, no qual para i = (0, ..., n), tem-se $M_i = (K_i, \Sigma, \delta_i, s_i)$. Sejam $q_0, ..., q_m$ novos estados $\notin K_i$. Então se $(\mathcal{M}, \eta, M_0)$ é um esquema de máquina de Turing, diz-se que este é representativo da máquina de Turing M = (K, Σ, δ, s), na qual:

$K = K_0 \cup K_1 \cup ... K_n \cup \{q_0, ..., q_m\}$;

$s = s_0$;

δ é definido como:

1) Se $0 \leq i \leq m$, $q \in K_i$, $a \in \Sigma$, e $\delta_i(q, a) = (p, b)$, em que $p \neq h$, então $\delta(q, a) = \delta_i(q, a) = (p, b)$;

2) Se $0 \leq i \leq m$, $q \in K_i$, $a \in \Sigma$, e $\delta_i(q, a) = (h, b)$, então $\delta(q, a) = (q_i, b)$;

3) Se $0 \leq i \leq m$, $q \in K_i$, $a \in \Sigma$, e $\eta(M_i, a)$ não é definida, então $\delta(q_i, a) = (h, a)$;

4) Se $0 \leq i \leq m$, $q \in K_i$, $a \in \Sigma$, e $\eta(M_i, a) = M_j$, e seja $\delta_j(s_j, a) = (p, b)$, então:

$$\delta(q_i, a) = \begin{cases} (p,b)\ se\ p \neq h \\ (q_j, b)\ se\ p = h \end{cases}$$

Máquinas mais importantes:

$R_\#$, $L_\#$, σ, etc.

Extensões Possíveis para Máquinas de Turing

Algumas extensões para a máquina de Turing foram propostas no sentido de ampliar sua capacidade computacional, entretanto pouco ou nenhum resultado considerável foi obtido neste campo, assim tem-se:

1) Fita infinita à esquerda e à direita.

2) Múltiplas fitas.

3) Múltiplas fitas e cabeças de leitura e gravação independentes.

Teorema: Qualquer uma das máquinas anteriores pode ser reduzida ao caso clássico estudado.

4) Máquina de Turing não determinística.

Teorema: Qualquer problema resolvido por uma máquina de Turing não determinística também o é por uma máquina de Turing determinística.