PCS-2039
Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais

Graça Bressan

gbressan@larc.usp.br

Modelos de Simulação de Eventos Discretos

Modelos de Simulação

- Simulador: algoritmo ou procedimento que representa o comportamento de um sistema em uma escala de tempo.
- Objetivos: projeto, dimensionamento, avaliação de desempenho ou reengenharia de sistemas.
- Várias categorias.

Categorias de Modelos

- Estáticos e dinâmicos;
- Determinísticos ou estocásticos;
- Contínuos ou discretos;
- Tempo real ou tempo simulado.
- Escopo do curso: modelos de sistemas *dinâmicos*, *estocásticos* e *discretos*.
- Mas antes... exemplos!

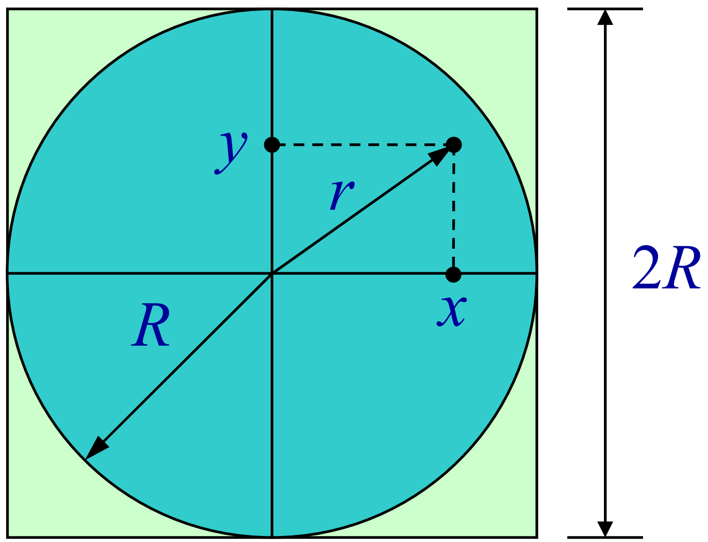
Simulação de Monte Carlo

- Método estático e estocástico.
- Proposto por Stanislaw Ulam para modelar a detonação de uma bomba de hidrogênio.
- Funcionalidade: integração aproximada.
- Exemplo: aproximação de π com aritmética inteira (e uma única operação em ponto flutuante no final).

Simulação de Monte Carlo

- Quadrado de lado $2R$ (área $4R^2$), onde R é um inteiro razoavelmente grande que caiba em meia palavra (por exemplo, $R \sim 10^4$ para palavras de 32 bits, ou $R \sim 10^9$ para palavras de 64 bits).
- Círculo de raio R (área πR^2) inscrito no quadrado.
- Escolher pontos (x, y) ao acaso, uniformemente distribuídos dentro do quadrado, e determinar se estão dentro ou fora do círculo.
- Como determinar se um ponto está dentro ou fora do círculo?

Simulação de Monte Carlo



- Dentro do círculo: $r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2$.
- Fora do círculo: $r^2 = x^2 + y^2 > R^2$.

Simulação de Monte Carlo

- Seja n_T o número total de pontos escolhidos.
- O número de pontos n_D que caem dentro do círculo (em relação ao número total n_T) é proporcional à área do círculo (em relação à área do quadrado):

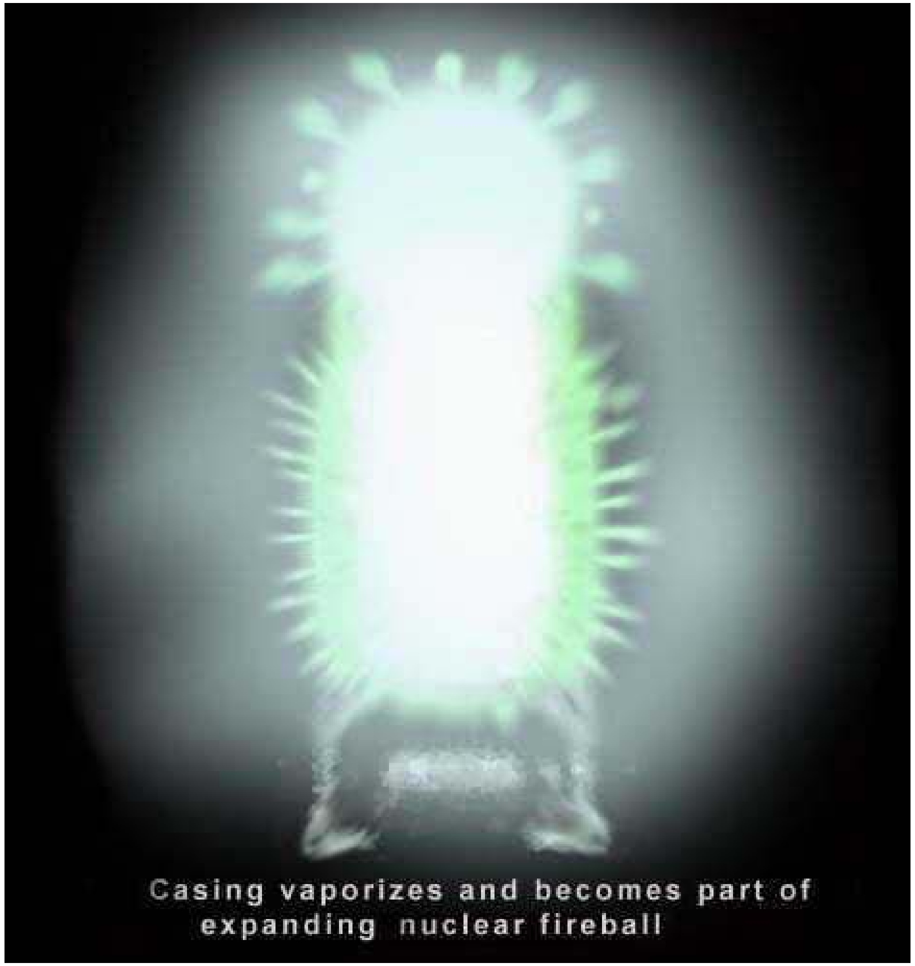
$$n_D/n_T \cong \pi R^2/4R^2 = \pi/4.$$

- A aproximação $\pi \cong 4n_D/n_T$ é tanto melhor quanto maior for o número total de pontos.

Vantagens da Simulação

- Modelos matemáticos precisos de sistemas estocásticos do mundo real podem ser analiticamente intratáveis.
- Simulações permitem maior controle sobre as condições dos experimentos que aquilo que é possível com sistemas reais.
- É possível estudar o comportamento de um sistema em intervalos de tempo longos ou curtos demais para experimentos diretos.

Exemplo


Casing vaporizes and becomes part of
expanding nuclear fireball

Desvantagens da Simulação

- Produz apenas estimativas dos fatores analisados.
- Modelos são caros e consomem tempo para desenvolver.
- Resultados apresentados pirotecnicamente podem levar a uma confiança maior que a justificável.

Depuração de Simulações

- Conhecimento de técnicas e metodologias de simulação?
- Objetivos bem definidos?
- Objetivos entendidos?
- Nível adequado de detalhes?
- Fatores significativos levados em consideração?
- Métricas adequadas?
- Distribuições corretas do workload?
- Ferramentas adequadas de simulação?
- Tratamento estatístico apropriado?
- Documentação e apresentação adequada dos resultados?
- Interpretação correta dos resultados?

Simulação de Sistemas de Eventos Discretos

- Sistemas discretos, dinâmicos e estocásticos.

Os **objetos** em um sistema de eventos discretos são chamados de **entidades**.

⇒

As **entidades** são caracterizadas pelos seus **atributos**.

⇓

O **estado do sistema** é definido pelos **valores** de seus atributos.

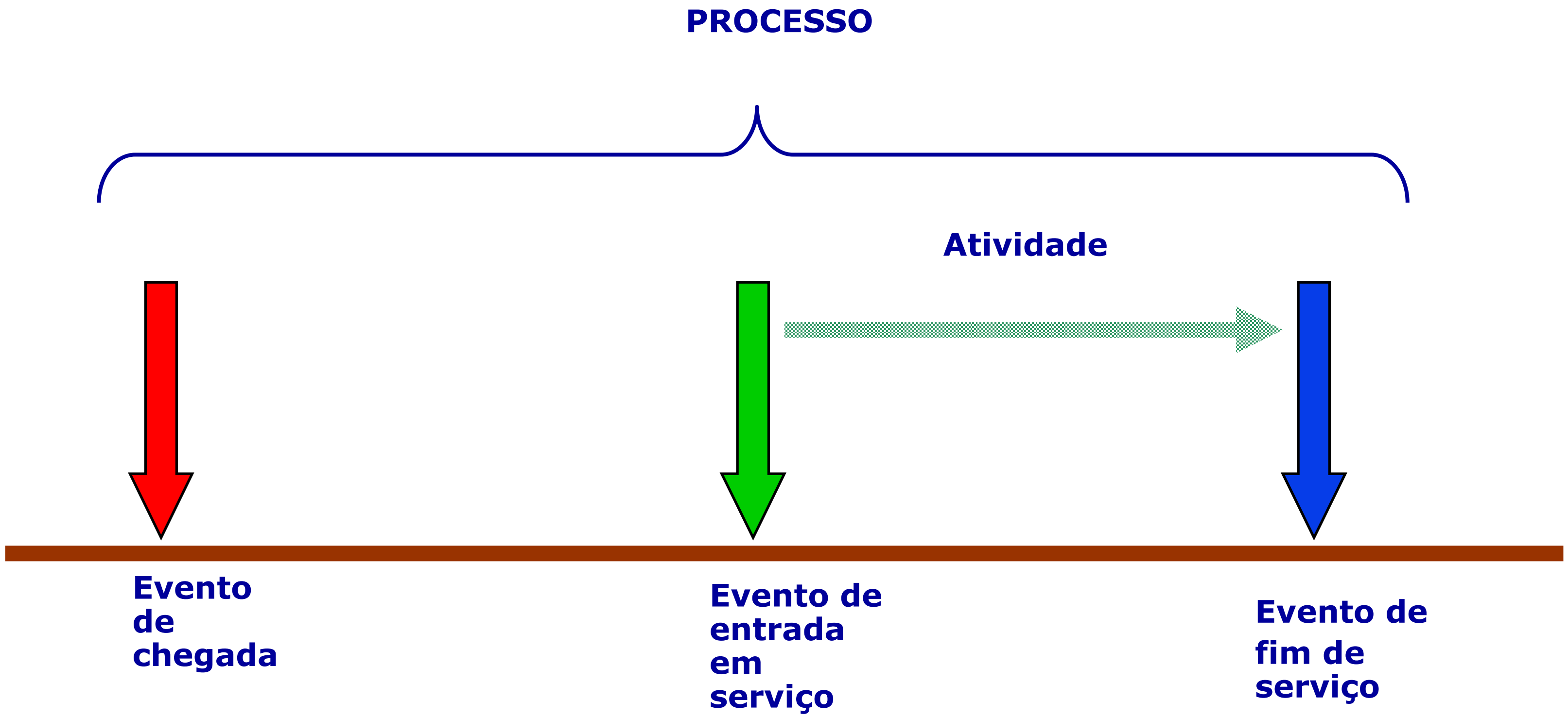
⇐

A **mudança de estado** é determinada pela ocorrência de um **evento** em um **tempo** estocástico ou determinístico.

Simulação de Sistemas de Eventos Discretos

- Finalidade: reproduzir as atividades das entidades que compõe o sistema e, a partir daí, conhecer o comportamento e desempenho do sistema.
- Necessário definir o estado do sistema e as atividades que conduzem o sistema de um estado a outro.
- Na simulação discreta, a mudança de estado é determinada pela ocorrência de um evento em um tempo determinístico ou estocástico.
- Um processo é uma seqüência de tais eventos.

Simulação de Sistemas de Eventos Discretos



Simuladores de Eventos Discretos

- Orientado a **eventos**:
  - Definido pelas *mudanças de estado* que podem ocorrer em cada evento.
  - Elementos: eventos, variáveis de estado, temporizador, lógica de simulação, métodos estatísticos.
- Orientado a **processos**:
  - Definido pela *interação entre os processos* através dos quais as entidades são conduzidas.
  - Elementos: entidades, atributos, processos, recursos, filas.

Simulador Orientado a Eventos

- Procedimento associado a cada tipo de evento no sistema.
- Lógica de simulação:
  - agendar eventos,
  - atualizar o relógio para o próximo evento,
  - executar o procedimento associado ao evento agendado, atualizando o estado do sistema (variáveis de estado e contadores estatísticos).

Simulador Orientado a Processos

- Mecanismos para manipular processos paralelos que compartilham certos recursos: colocar um processo em espera (segundo uma política de prioridades), escalar um processo, terminar um processo.
- Gerenciamento de eventos implícito a cada processo.
- Estatísticas referentes à ocupação dos recursos e a dinâmica das filas.

Simulador de Eventos

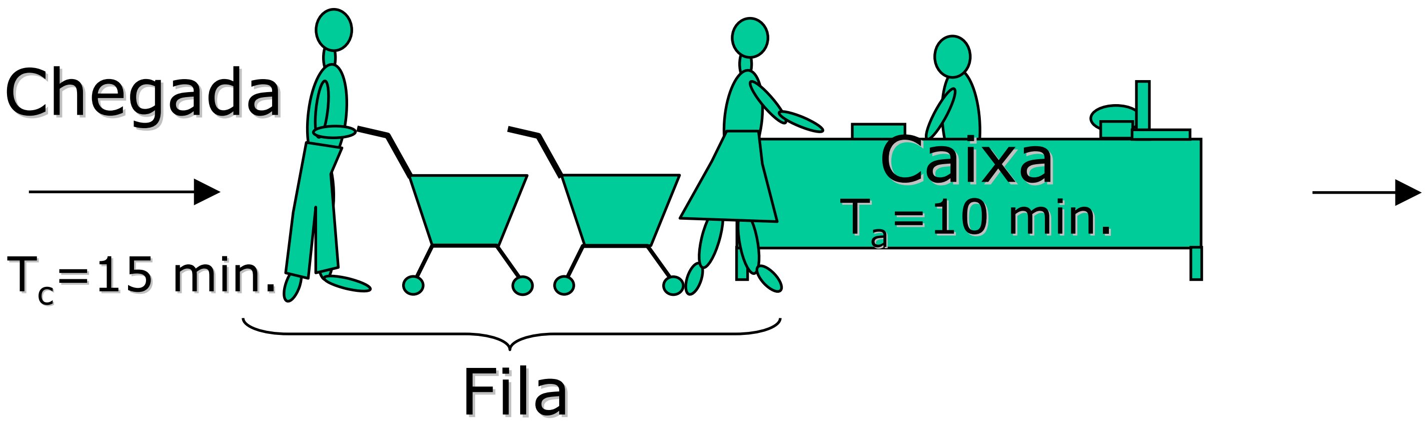
- Passo 0: No inicio da simulação, define-se o estado inicial $x = x_0$, o relógio de simulação T=0 e a lista L é inicializada com todos os eventos viáveis no estado x_0.
- Passo 1: Retirar uma entrada (e_i,t_i) de L com menor tempo t_i.
- Passo 2: Atualizar o tempo de simulação para o valor $T= t_i$ e atualizar o estado da simulação de acordo com uma função de transição de estado f. Sendo x o estado atual, o novo estado $x' = f(x,e_i)$. Retirar da lista L todos os eventos que não são viáveis no estado x'.

Simulador de Eventos

- *Passo 3:* Acrescentar à lista L em ordem crescente de tempo, todos os eventos viáveis no estado x’ que ainda não estejam na lista. Ao acrescentar um evento (e_k,t_k) à lista, o instante, t_k de ocorrência do evento e_k deve ser gerado a partir de um gerador de números aleatórios de acordo com a distribuição de ocorrência do evento e_k .
- *Passo 4:* Voltar ao passo 1 da simulação.

Exemplo: Supermercado

- Um pequeno supermercado possui uma única caixa sendo que os clientes chegam à fila do caixa em intervalos de tempo cuja média é 15 minutos. O tempo médio de atendimento de um cliente pelo caixa é de 10 minutos.



Exemplo: Supermercado

1. Qual é o *tempo médio* que um cliente gasta na fila?
2. Qual é o *tempo médio* que um cliente gasta desde que chega à fila até terminar de pagar a compra (não considerando o tempo para colocar no carrinho)?
3. Qual é o *tamanho médio* da fila de clientes?
4. *Quantos caixas* devem ser colocados para melhorar o atendimento?

Exemplo: Supermercado

- t_i: instante de chegada de um cliente à fila.
- A_i: instante de início de atendimento do cliente i
- S_i: tempo de serviço do cliente i, (tempo para o caixa processar a compra e para o cliente pagar).
- f_i: instante de finalização da compra do cliente i :

  $f_i = A_i + S_i$
- r_i: tempo de resposta do cliente i, entre a chegada à fila e o término do pagamento da compra.

  $r_i = f_i - t_i$

Exemplo: Supermercado

- L - lista dos próximos eventos que irão ocorrer. Cada evento será indicado como (e_i,ti) correspondendo à ocorrência do evento e_i no instante T_i.
- Os eventos possíveis são:

  Ci - chegada do cliente i. O cliente i entra na fila. Este evento não depende do estado atual do sistema ocorrendo a intervalos definidos por uma função de distribuição de probabilidade.

  Ai - início do atendimento do cliente i. Este evento ocorre quando o caixa está livre e a fila não está vazia.

  Fi – fim do atendimento do cliente i. Ocorre após Ai de acordo com um tempo aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidade.

Exemplo 1: Supermercado

- O estado do sistema é definido por:
  - F - fila de clientes.
  - Estado do Caixa. Variável que assume os valores {livre, ocupado} e indica se o caixa está livre ou está atendendo um cliente.
  - Considera-se que o cliente que está sendo atendido é o primeiro da fila.

Exemplo 1: Supermercado

- Passo 0:
  - T=0;
  - Fila={ }; Estado do caixa = livre
  - O único evento viável é chegada de clientes. Sorteia-se um intervalo de tempo para a chegada do primeiro cliente C1=5. L={(C1,5)}
- Passo 1:
  - Retirar o evento (C1,5) da lista L.
- Passo 2:
  - Fazer T=5 e atualizar o estado do sistema de acordo com evento (C1,5):
    - Fila={C1} (o primeiro cliente entrou na fila);

Exemplo 1: Supermercado

- Passo 3:
  - Sortear eventos viáveis:
    - Chegada de clientes: podem ser gerados quantos quiser pois são independentes.

      (C2, 7), (C3, 8), (C4, 12)
    - Atendimento de clientes: Como o caixa está livre e o cliente C1 é o primeiro da fila pode ser gerado o evento A1 de início de atendimento.

      (A1=5)
    - L={(A1=5), (C2, 7), (C3, 8), (C4, 12)}
- Passo 4: Voltar ao Passo 1

Exemplo 1: Supermercado

- Passo 1:
  - Retirar o evento (A1,5) da lista L
  - L= {(C2, 7), (C3, 8), (C4, 12)}
- Passo 2:
  - Fazer T=5 e atualizar o estado do sistema de acordo com evento (A1,5):
    - Estado do caixa = ocupado. A fila não se altera.
    - Fila={C1} (o primeiro cliente começou a ser atendido na fila);
- Passo 3:
  - Sortear eventos viáveis:
    - Chegada de clientes: podem ser gerados quantos quiser pois são independentes.

      Gerar (C5, 15),
    - Final de atendimento do cliente 1 (F1,8)
    - L={(C2, 7), (F1,8), (C3, 8), (C4, 12), (C5, 15)}
- Passo 4: Voltar ao Passo 1

Exemplo 1: Supermercado

- Passo 1:
  - Retirar o evento (C2,7) da lista L
  - L={(F1,8), (C3, 8), (C4, 12), (C5, 15)}
- Passo 2:
  - Fazer T=7 e atualizar o estado do sistema de acordo com evento (C2,7):
    - Fila={C1,C2} (o cliente C2 entrou na fila);
- Passo 3:
  - Sortear eventos viáveis:
    - Chegada de clientes: podem ser gerados quantos quiser pois são independentes. (C6, 16)
    - Nenhum novo evento é viável.
    - L={(F1,8), (C3, 8), (C4, 12), (C5, 15), (C6, 16)}
- Passo 4: Voltar ao Passo 1

Exemplo 1: Supermercado

- Passo 1:
  - Retirar o evento (F1,8) da lista L
    - L={(C3, 8), (C4, 12), (C5, 15), (C6, 16)}
- Passo 2:
  - Fazer T=8 e atualizar o estado do sistema de acordo com evento (F1,8).
    - Estado do caixa = livre
    - Fila={C2} (o primeiro cliente finalizou a compra);
- Passo 3:
  - Sortear eventos viáveis:
    - Chegada de clientes: podem ser gerados quantos quiser pois são independentes. Não será gerado nenhum
    - Nenhum novo evento é viável.
    - L={(C3, 8), (C4, 12), (C2, 15), (C6, 16)}
- Passo 4: Voltar ao Passo 1

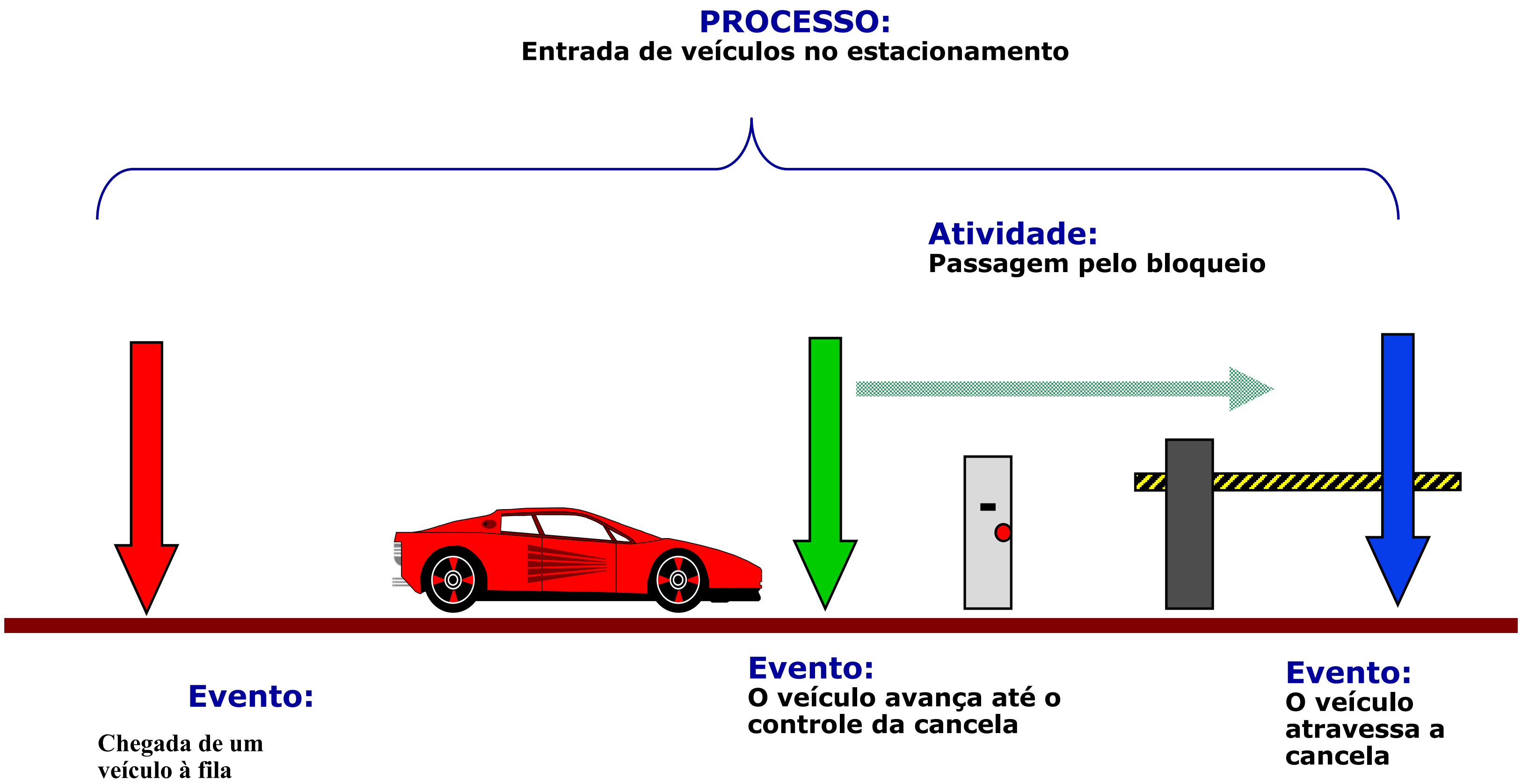
Exemplo 1: Supermercado

- Voltando às perguntas iniciais, como se calcula:
  - Tempo médio total do cliente entre a entrada na fila e conclusão da compra?
  - Como se calcula do tempo médio de espera na fila excluindo o tempo de atendimento?
  - Como se calcula o tamanho médio da fila do cliente?

Exemplo 2: Estacionamento

- Em um Shopping Center, em horário de almoço, chegam ao estacionamento em média 5 veículos por minuto.
- Existe um único bloqueio de entrada e os veículos que chegam entram em uma única fila.
- Cada motorista, ao chegar sua vez, gasta em média 10 segundos entre avançar o veículo até o controle do bloqueio, pressionar o botão, retirar o ticket de entrada, esperar a cancela ser aberta e seguir em frente com o veículo.

Exemplo

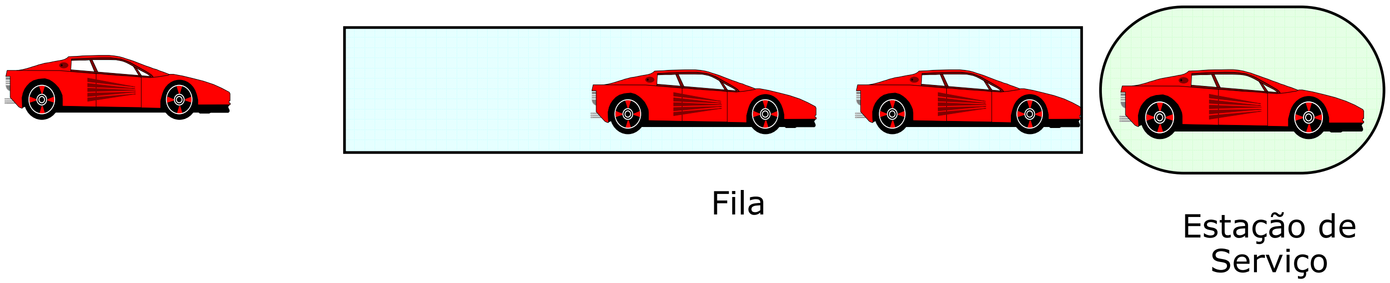

PROCESSO:
Entrada de veículos no estacionamento
Atividade:
Passagem pelo bloqueio
Evento:
Chegada de um veículo à fila
Evento:
O veículo avança até o controle da cancela
Evento:
O veículo atravessa a cancela

Perguntas

1. Qual é o *tempo médio* que um motorista perde na fila?
2. Qual é o *tempo médio* que um motorista gasta desde que chega à fila até entrar no estacionamento?
3. Qual é o *tamanho médio* da fila de veículos?
4. *Quantos bloqueios* devem ser colocados para melhorar o atendimento?

Modelagem

- t_i: instante de chegada de um veículo à fila.
- A_i: intervalo de tempo entre chegadas: $A_i = t_i - t_{i-1}$.
- S_i: tempo de serviço do usuário i, (tempo para obter o ticket e passar pela cancela).
- D_i: espera do usuário i na fila de veículos.
- r_i: tempo de resposta do usuário i, entre a chegada do veículo à fila e a passagem pela cancela: $r_i = D_i + S_i$.
- f_i: instante de passagem do veículo i pela cancela: $f_i = t_i + r_i$.



Simulação

- Gerar N instantes t_i, $i = 1, ..., N$ (supor $t_0 = 0$), de modo que o intervalo médio entre chegadas seja igual a 12 segundos: $(\Sigma_i A_i)/N = 12$.
- Gerar N tempos de serviço S_i cuja média seja igual a 10 segundos: $(\Sigma_i S_i)/N = 10$.
- Notar que a espera D_i começa em t_i e termina em f_{i-1} (isto é, quando o usuário anterior passa pela cancela), exceto se $t_i \geq f_{i-1}$, em que $D_i = 0$ (supor $f_0 = 0$).

Simulação

- Seja q_j um instante em que o número de veículos na fila muda de valor, e seja Q_j o número de veículos na fila a partir dessa mudança (supor $j = 0$ em t_0, com $q_0 = 0$, $Q_0 = 0$).
- No instante t_i, ocorre um evento de incremento do número de veículos na fila: $j = j + 1$, $q_j = t_i$, $Q_j = Q_{j-1} + 1$.
- No instante f_i, ocorre um evento de decremento do número de veículos na fila: $j = j + 1$, $q_j = f_i$, $Q_j = Q_{j-1} - 1$.
- O número de veículos na fila permanece o mesmo, isto é, Q_j, entre q_j e q_{j+1}. O último valor de j corresponde ao instante f_N.

Geração de números aleatórios

- Como obter números aleatórios com uma determinada distribuição de probabilidade, considerando que existe disponível uma função de geração de números aleatórios com distribuição uniforme?

Métodos de Implementação

- *Transformada Inversa*: inverter a função de distribuição de probabilidade.
- *Aceitação/Rejeição*: Gerar uma amostra de números aleatórios no intervalo desejado e aceitar o subconjunto que atende à função de distribuição de probabilidades.
- *Convolução* (ou *Composição*): Obter a distribuição através de soma simples (ou soma ponderada) de outras distribuições.
- *Redução*: transformar uma distribuição em outra por meio de uma fórmula dedicada.

Solução por Transformada Inversa

- Ferramentas de simulação possuem, no mínimo, um gerador de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo [0, 1[.
- Os valores das *probabilidades* P(x) estão uniformemente distribuídos no intervalo [0, 1[.
- Exemplo para distribuição cumulativa: Gera-se um valor y_i uniformemente distribuído no intervalo [0, 1[, e calcula-se o valor de x_i tal que
  $P(x_i)=1 - e^{-x_i/\mu} = y_i$, isto é, $x_i = -\mu \ln(1 - y_i)$.

Fim do módulo Simulação de Eventos Discretos