Servidor Dependente de Carga e Decomposição Hierárquica

1 Servidores Dependentes da Carga (SDC)

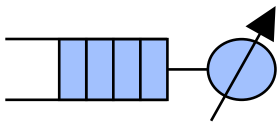
Os Servidores Dependentes de Carga (SDC) possuem taxa de serviço dependente do número de usuários no sistema. Por exemplo, um sistema m unidades de discos compartilhando uma única fila pode ser representado por uma estação de serviço com **m** servidores. A taxa de serviço para esta estação será **μ(n)**. Esta taxa varia com o número de usuários no sistema de disco. Esta variação pode ser expressa por:

$$\mu(n) = \frac{n}{S} \qquad n=1,2,\ldots,m-1 \text{ e}$$

$$\mu(n) = \frac{m}{S} \qquad n=m,m+1,\ldots,\infty$$

Neste caso, S é o tempo de serviço no caso de se ter um único usuário no sistema. Este caso é parecido com o sistema M/M/m, porém, a entrada não precisa necessariamente ser exponencial.

Uma fila com servidor dependente de carga é representada como:



2 AVM com Servidores Dependentes da Carga

O método da AVM pode ser generalizado para suportar o caso de se ter servidores dependentes da carga. Neste caso, devemos derivar a distribuição do número de usuários no sistema ao invés de somente o número médio de usuários.

Sejam

$p_i(j \mid n)$ **probabilidade** de se ter **j** usuários na estação **i** dado que o sistema possui **n** usuários;

$\mu_i(j)$ **taxa de serviço** na estação **i** quando o sistema possui **j** usuários.

O tempo de resposta de um usuário que encontra o dispositivo **i** com **j-1** usuários é dado por:

$j \,/\, \mu(j)$

A distribuição do tempo de resposta por visita à estação é dado por:

$$R_i(n) = \sum_{j=1}^{n} p_i(j-1 \mid n-1)\frac{j}{\mu_i(j)}$$

A distribuição do número de usuários na estação i quando o sistema possui **n** usuários é dada por:

$$p_i(j \mid n) = \frac{X(n)}{\mu_i(j)} p_i(j-1 \mid n-1) \qquad j=1,2,...,n \text{ e}$$

$$p_i(j \mid n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_i(k \mid n) \qquad j=0$$

O número médio de usuários neste caso é dado por:

$$Q_i(n) = \sum_{j=1}^{n} j p_i(j \mid n)$$

É fácil verificar, que neste caso, estas fórmulas se reduzem às dos sistemas com **servidores de capacidade fixa** se substituirmos $\boldsymbol{\mu_i(j)}$ por $\mathbf{1/S_i}$, onde $\mathbf{S_i}$ representa o tempo médio de serviço por visita à estação **i**.

Com estes dados pode-se reescrever o algoritmo AVM:

Entradas:

- Z: Tempo para pensar;
- S_i: Tempo de serviço por visita à estação i;
- V_i: Número de visitas à estação i;
- M: Número de estações no sistema (sem incluir os terminais);
- N: Número de usuários;
- $\mu_i(j)$: taxa de serviço da estação i quando existem j usuários em i.

Saídas:

- X: Vazão do sistema;
- Q_i: Número médio de usuários na estação i;
- R_i: Tempo médio de resposta na estação i;
- R: Tempo médio de resposta do sistema;
- U_i: Fator de utilização da estação i;
- $P_i(j)$: Probabilidade de se ter j usuários na estação i.

Inicialização:

```
Para i = 0 até M faça
{       Qi = 0          para servidor de capacidade fixa (CF) e
```

centros de atraso (SI);
$P_i(0|0) = 1$ para servidores dependentes de carga (SDC);
}

Iterações:

Para n = 1 até N faça
{
Para i = 1 até M faça
{ $R_i = S_i(1+Q_i)$ para CF
$R_i = S_i$ para SI
$$R_i = \sum_{j=1}^{n} p_i(j-1|n-1)\frac{j}{\mu_i(j)}$$ para SDC
}
$$R = \sum_{i=1}^{M} R_i V_i$$
$X = n/(Z+R)$
Para i = 1 até M faça
{ Se CF ou SI
$Q_i = XV_iR_i$
Se SDC
Para j = n até 1 faça
$P_i(j | n) = (X/\mu_i(j)) * P_i(j-1|n-1)$
$$p_i(0|n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_i(j|n)$$
}
}

Para i = 1 até M faça
{ $X_i = XV_i$
$U_i = XS_iV_i$ para CF ou SI
$U_i = 1 - P_i(0)$ para SDC
}

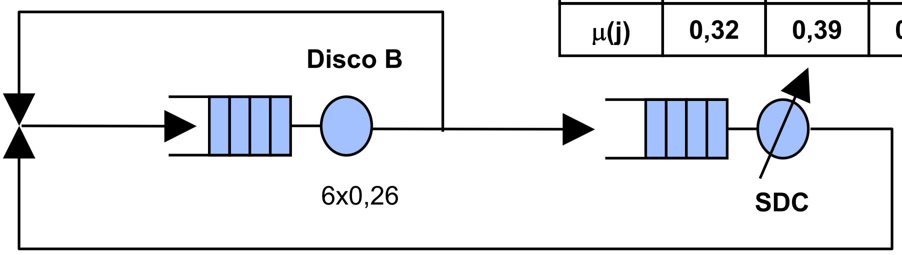
Exemplo 1: SDC

Considere uma rede com duas estações de serviço. A primeira é o Disco B e possui capacidade fixa. A segunda é um SDC. O tempo médio de serviço por visita ao Disco B é de 0,26 segundos. Para cada visita ao SDC um usuário visita 6 vezes o Disco B.

O tempo médio de serviço por visita ao SDC é dado pela seguinte função:

$\mu(1)$ = 0,32 segundos;
$\mu(2)$ = 0,39 segundos;
$\mu(3)$ = 0,42 segundos.

j	1	2	3
$\mu(j)$	0,32	0,39	0,42



Para analisar esta rede procede-se da seguinte maneira:

Inicialização:

$Q_B(0) = 0$ e $P(0|0) = 1$;

Iteração 1: n=1

Tempo de resposta dos dispositivos:

$R_B(1) = S_B[1+Q_B(0)] = 0{,}26$ seg.
$R_{SDC}(1) = P(0|0)*(1/\mu(1)) = 3{,}13$ seg.

Tempo de resposta do Sistema:

$R(1) = R_B(1)V_B + R_{SDC}V_{SDC} = 0{,}26x6 + 3{,}13x1 = 4{,}68$ seg.

Vazão do Sistema:

$X(1) = N/R(1) = 1/4{,}68 = 0{,}21$

Número de usuários e probabilidades:

$Q_B(1) = X(1)R_B(1)V_B = 0{,}21x0{,}26x6 = 0{,}33$
$P(1|1) = [X(1)/\mu(1)]P(0|0) = [0{,}21/0{,}32]x1 = 0{,}67$
$P(0|1) = 1 - P(1|1) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

Iteração 2: n=2

Tempo de resposta dos dispositivos:

$R_B(2) = S_B[1+Q_B(1)] = 0{,}26[1+0{,}33] = 0{,}35$ seg.
$R_{SDC}(2) = P(0|1)[1/\mu(1)] + P(1|1)[2/\mu(2)] = 0{,}33x1/0{,}332 + 0{,}7x2/0{,}39 = 4{,}46$ seg.

Tempo de resposta do sistema:

$R(2) = R_B(2)V_B + R_{SDC}(2)V_{SDC} = 0{,}35x6+4{,}46 = 6{,}54$ seg.

Vazão do Sistema:

$X(2) = N/R(2) = 2/6{,}54 = 0{,}31$

Número médio e probabilidades:

$Q_B(2) = X(2)R_B(2)V_B = 0{,}31x0{,}35x6 = 0{,}64$
$P(2|2) = [X(2)/\mu(2)]P(1|1) = [0{,}31/0{,}39]x0{,}67 = 0{,}52$
$P(1|2) = [X(2)/\mu(1)]P(0|1) = [0{,}31/0{,}32]x0{,}33 = 0{,}32$
$P(0|2) = 1 - P(1|2) - P(2|2) = 1 - 0{,}52 - 0{,}32 = 0{,}16$

Iteração 3: n=3

Tempo de resposta dos dispositivos:

$R_B(3) = S_B(1+Q_B(2)) = 0{,}26x(1+0{,}64) = 0{,}43$ seg.
$R_{SDC}(3) = P(0|2)[1/\mu(1)] + P(1|2)[2/\mu(2)] + P(2|2)[3/\mu(3)] = 5{,}86$ seg.

Tempo de resposta do Sistema:

$R(3) = R_B(3)V_B + R_{SDC}(3)V_{SDC} = 8{,}42$ seg.

Vazão do Sistema:

$X(3) = N/R(3) = 3/8{,}42 = 0{,}36$

Número de usuários e probabilidades:

$Q_B(3) = X(3)R_B(3)V_B = 0,91$
$P(3|3) = [X(3)/\mu(3)]P(2|2) = 0,44$
$P(2|3) = [X(3)/\mu(2)]P(1|2) = 0,29$
$P(1|3) = [X(3)/\mu(1)]P(0|2) = 0,18$
$P(0|3) = 1 - P(1|3) - P(2|3) - P(3|3) = 0,09$

Fim da terceira iteração;

Vazão dos dispositivos para N = 3:

$\mathbf{X_B = XV_B} = 0,36x6 = 2,16$ jobs/seg
$\mathbf{X_{SDC} = XV_{SDC}} = 0,36x1 = 0,36$ jobs/seg

Utilização dos dispositivos para N = 3:

$U_B = XS_BV_B = 0,36x0,26x6 = 0,562$
$U_{SDC} = 1 - P(0|3) = 1 -0,09 = 0,91$

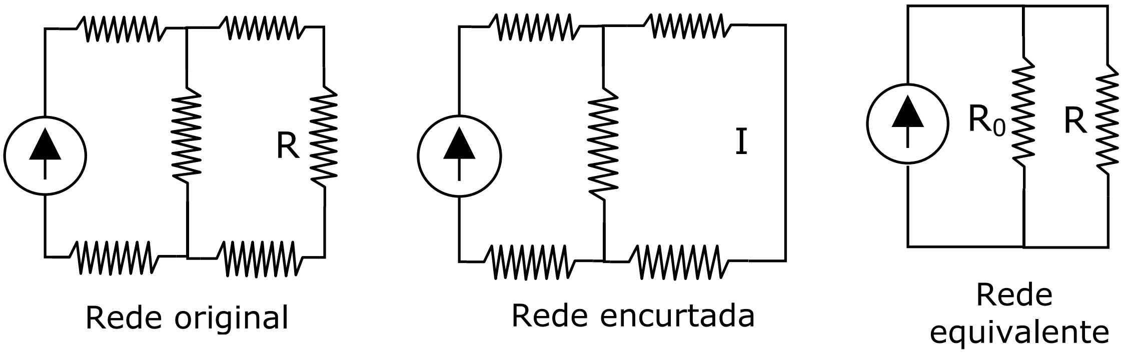
As seguintes conclusões podem ser tiradas sobre o sistema:

- A vazão do sistema é 0,21, 0,31 e 0,36 jobs/segundo com 1, 2 e 3 usuários no sistema respectivamente;
- O tempo de resposta do sistema é 4,68, 6,54 e 8,42 segundos com 1, 2 e 3 usuários no sistema;
- O número médio de usuários no Disco B é 0,91 com 3 usuários no sistema;
- O tempo de resposta do disco B é 0,43 segundos com 3 usuários no sistema;
- O fator de utilização do disco B é 0,562 com 3 usuários no sistema;
- As probabilidades de 0, 1, 2 e 3 usuários no SDC com 3 usuários no sistema são 0,09, 0,18, 0,29 e 0,44 respectivamente.

3 Modelo Equivalente

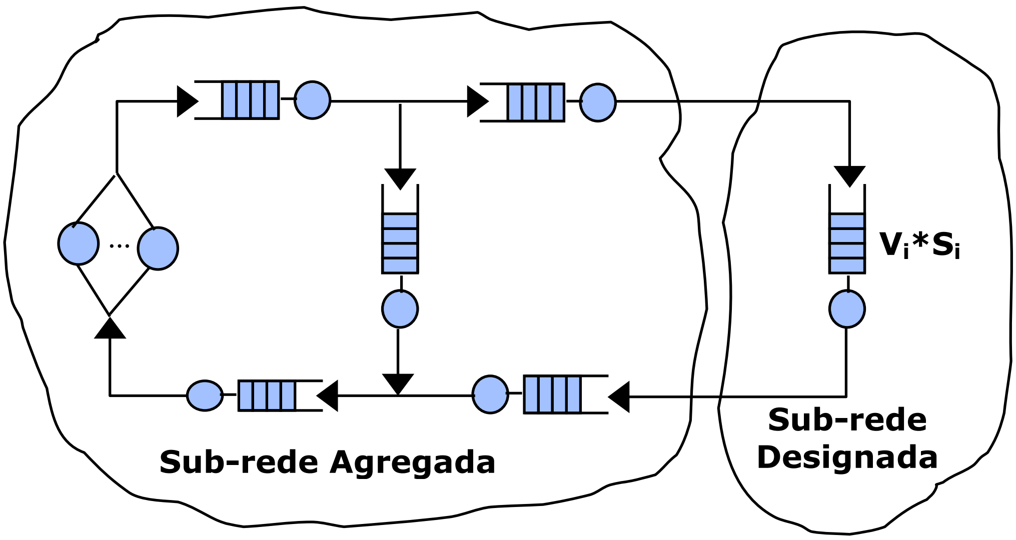
Chandy,Herzog e Woo descobriram um método para a determinação do servidor equivalente de uma sub-rede de filas que produz resultados exatos para as redes de filas que obedecem à condições BCMP. O servidor equivalente é um servidor com capacidade dependente da carga (SDC). O método é inspirado no teorema de Norton de cirucuitos elétricos.

Teorema de Norton de circuitos elétricos:

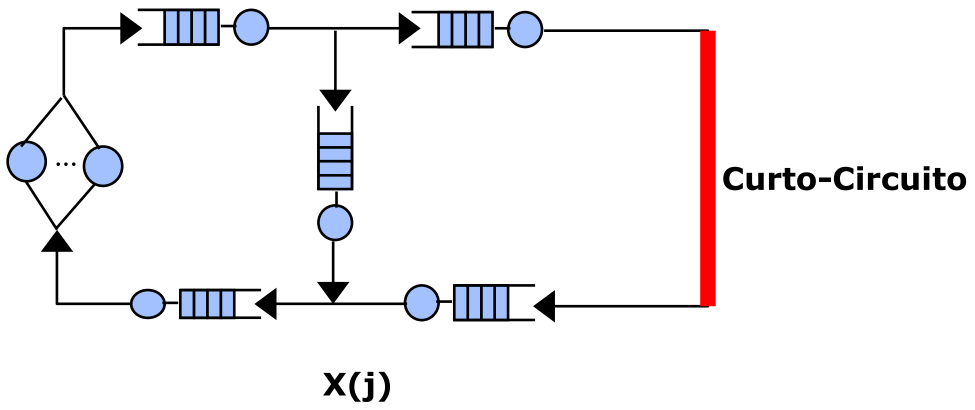


Dada uma rede de filas, esta rede será dividida em uma sub-rede da qual se deseja calcular o servidor equivalente, chamada de "rede agregada", e uma sub-rede que permanecerá intocável chamada de "rede designada".

Rede original e sub-redes

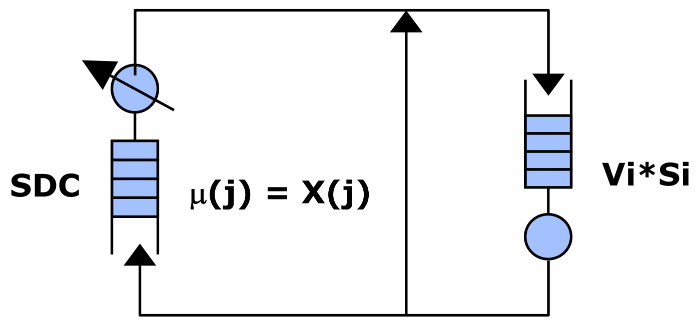


Rede Curto-Circuitada



A Vazão desta rede é X(j), calculada pelo método tradicional de redes fechadas.

Rede Equivalente



Método de Decomposição

1. Selecione a sub-rede designada. O resto da rede é a sub-rede a ser agregada;
2. Crie o modelo curto-circuitado fazendo o tempo de serviço de todas as filas na sub-rede designada iguais a zero;
3. Resolva o modelo curto-circuitado pelo método AVM ou convolução;
4. Substitua a sub-rede agregada por um servidor dependente da carga. Este servidor possui taxa de serviço $\mu(j)$, igual à vazão da rede curto-circuitada X(j) quando esta possui j usuários;
5. Resolva o modelo equivalente usando o procedimento de cálculo para servidores dependente da carga.
6. Aplique os resultados obtidos no modelo equivalente para a sub-rede designada;
7. Os valores dos parâmetros de performance da sub-rede designada são obtidos dos resultados da rede equivalente.
8. Os valores dos parâmetros de performance dos centros de serviço da sub-rede agregada podem ser obtidos através de probabilidades condicionais.

4 Desempenho da sub-rede agregada

Distribuição do número de usuários

A probabilidade de se ter **j** usuários na estação **i** da rede agregada, existindo N usuários no sistema, é dada por:

$$P[n_i = j \mid N(\text{sistema})] = \sum_{n=j}^{N} P[n_i = j \mid n(\text{agregado})] * P[n(\text{agregado}) \mid N(\text{sistema})]$$

ou

$$P[n_i = j \mid N(\text{sistema})] = \sum_{n=j}^{N} \{P[n_i = j \mid n(\text{agregado})] * P[n(\text{SDC}) \mid N(\text{sistema})]\}$$

Número médio de usuários na i-ésima estação

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} jP[n_i = j \mid n(\text{sistema})]$$

Vazão

As vazões dos diversos centros de serviço são proporcionais às suas taxas de visitas:

$$X_i/V_i = X = X_j/V_j$$

onde

X	é a vazão do sistema combinado
V_i e V_j	representam o número de visitas de cada usuário aos centros de serviço i e j.

Tempo de Resposta

Pode ser calculado usando o resultado de Little's:

$R_i = Q_i * X_i$

Fator de utilização

Pode ser calculado usando a lei da utilização:

$U_i = X_i * S_i = X * D_i$

Exemplo 2: Decomposição Hierárquica

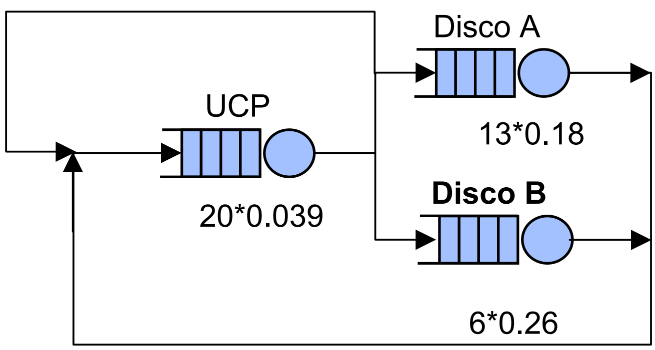
Considere o modelo do servidor central: 1 UCP e 2 discos com um grau de multiprogramação igual a 3.

Os tempos médio de serviço são:

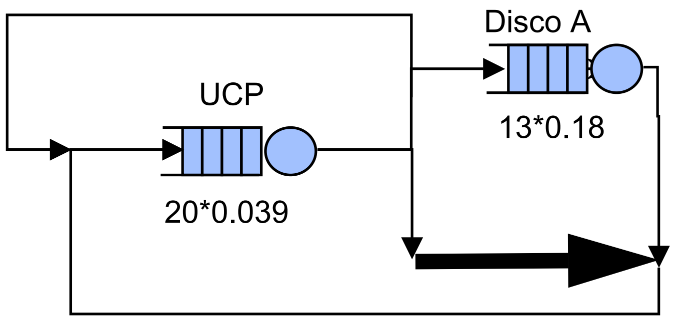
$S_{ucp} = 0.039$, $S_A = 0.18$, $S_B = 0.26$

As taxas de visitas são:

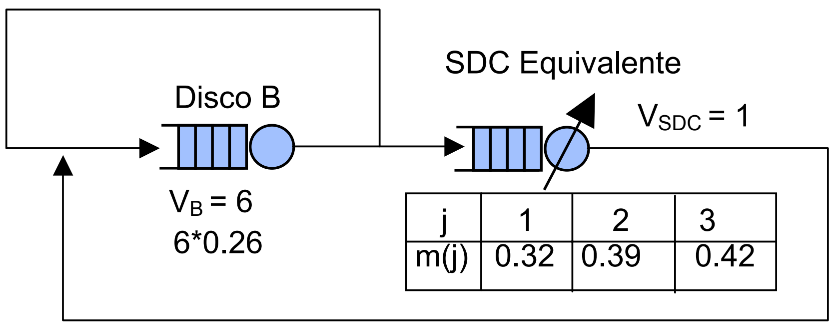
$V_{ucp} = 20$, $V_A = 13$ e $V_B = 6$



Sistema original: Modelo do servidor central



Modelo curto-circuitado
Sub-rede agregada composta pela UCP e Disco A
Sub-rede designada é composta pelo Disco B



Modelo equivalente para análise do disco B
SDC substitui a UCP e o Disco A

Cálculo da demanda total de serviço em cada centro de serviço no modelo original:

D_{UCP} = 20*0.039 = 0.78
D_A = 13*0.18 = 2.34
D_B = 6*0.26 = 1.56

Vamos resolver o modelo curto-circuitado usando o método de convolução para calcularmos a distribuição do número de usuários no sistema. Escolhemos, como anteriormente o fator de escala α = 1/ 0.78 que resulta nos seguintes valores:

$y_{ucp} = 1$ $\qquad$ $y_A = 3$

O cálculo da constante de normalização G(N) é mostrado a seguir:

n	y_{ucp}= 1	y_A= 3

0	1	1	G(0) = 1
1	1	4	G(1) = 4
2	1	13	G(2) = 13
3	1	40	G(3) = 40

A vazão do sistema para grau de multiprogramação 3 é:

$X(1) = \alpha*[G(0)/G(1)] = 0.321$
$X(2) = \alpha*[G(1)/G(2)] = 0.394$
$X(3) = \alpha*[G(2)/G(3)] = 0.417$

Desta forma, o servidor equivalente será um centro de serviço com capacidade dependente da carga e com uma taxa de serviço variável igual à:

$\mu(1) = X(1) = 0.321$
$\mu(2) = X(2) = 0.394$
$\mu(3) = X(3) = 0.417$

Probabilidade de j usuários no disco A quando existem n usuários no sistema, no modelo curto-circuitado calculado pelo método de convolução:

$$P(n_A = j \mid n) = \frac{y_A^{\,j}}{G(n)} * [G(n-j) - y_A * G(n-j-1)]$$

n	P(n_A= j | n)			
	j=0	j=1	j=2	j=3
0	1			
1	0.250	0.750		
2	0.077	0.321	0.692	
3	0.025	0.075	0.225	0.675

O modelo equivalente é composto pelo disco B e o servidor de capacidade variável SDC. Este modelo já foi resolvido anteriormente e produziu os seguintes resultados:

1. A vazão do sistema é 0.21, 0.31 e 0.36 usuários/seg. com 1, 2 e 3 usuários no sistema;
2. O tempo de resposta é: 4.68, 6.54 e 8.42 para N=1, 2 e 3 usuários respectivamente;
3. O tamanho médio da fila para o disco B com N = 3 é 0.91;
4. O tempo médio de resposta para o disco B com N = 3 é 0.43 segundos;
5. O fator de utilização do disco B com N = 3 é 0.562

Para se obter os parâmetros de desempenho da sub-rede agregada deve-se proceder ao cálculo das probabilidades condicionais, como mostrado a seguir:

- Da solução do exemplo anterior (exemplo SDC) já foi calculado que a probabilidade de se ter 0, 1, 2 ou 3 usuários no SDC quando se tem 3 usuários no sistema é respectivamente: 0.09, 0.18, 0.29 e 0.44;
- Estes valores juntamente com os valores da tabela de probabilidades do número de usuários no disco A calculada pelo modelo curto-circuitado, são suficientes para se determinar os parâmetros da sub-rede agregada.

Cálculo da probabilidade de se ter 0,1,2 e 3 usuários no disco A quando se tem 3 usuários no sistema:

$$P(n_A=0|N=3) = P(n_A=0|n=0)*P(n=0|N=3)+ P(n_A=0|n=1)*P(n=1|N=3)+ P(n_A=0|n=2)*P(n=2|N=3)+ P(n_A=0|n=3)*P(n=3|N=3)$$

$$= 1x0.09 + 0.250*0.18 + 0.077*0.29 + 0.025*0.44 = 0.166$$

De forma similar podemos calcular:

$P(n_A=1|N=3) = 0.750*0.18+0.231*0.29+0.075*0.44 = 0.233$
$P(n_A=2|N=3) = 0.692*0.29+0.225*0.44 = 0.\ 3$
$P(n_A=3|N=3) = 675*0.44 = 0.\ 3$

O número médio de usuários no disco A pode ser calculado como:

$$Q_A = \sum_{j=1}^{N} jP[n_A = j \,|\, N(sistema)] = 1*0.233 + 2*0.3 + 3*0.3$$

Similarmente, o número médio de usuários na UCP é calculado, e o seu valor é 0.36 usuários.

A vazão da UCP e do disco A é calculada pela lei de fluxo forçado:

$X_{ucp} = X*V_{ucp} = 0.36*20 = 7.2$ usuários/seg.
$X_A = X*V_A = 0.36*13 = 4.68$ usuários/seg.

Os fatores de utilização da UCP e do disco A são:

$U_{ucp} = X*D_{ucp} = 0.36*0.78 = 0.281$
$U_A = X*D_A = 0.36*2.34 = 0.843$

O tempo médio de resposta é calculado usando-se o resultado de Little:

$R_{ucp} = Q_{ucp}/X_{ucp} = 0.36/7.2 = 0.05$ seg.
$R_A = Q_A/X_A = 0.36/4.68 = 0.37$ seg.

É importante lembrar que para o modelo equivalente a taxa de visitas usada deve ser $V_B = 6$ e $V_{SDC} = 1$. Se isto não for feito não teremos os resultados corretos.

5 Conclusão

O método de decomposição hierárquica produz resultados exatos para redes com probabilidade de estados em forma de produto, isto é, que obedecem a regra BCMP.

Este método é muito bom para ser aplicado quando se tem uma rede que não possui todos os seus centros de serviço obedecendo a regra BCMP. Neste caso, define-se a sub-rede agregada com sendo aquele sub-conjunto que contenha somente os centros de serviço que obedecem a regra BCMP. O modelo equivalente, que possui menos centros de serviço que a rede original, então é resolvido por algum método para redes que não obedecem a regra BMCP, ou então por simulação. Este fato, reduz significativamente o tempo de solução pois a rede possui menos elementos.

6 Bibliografia

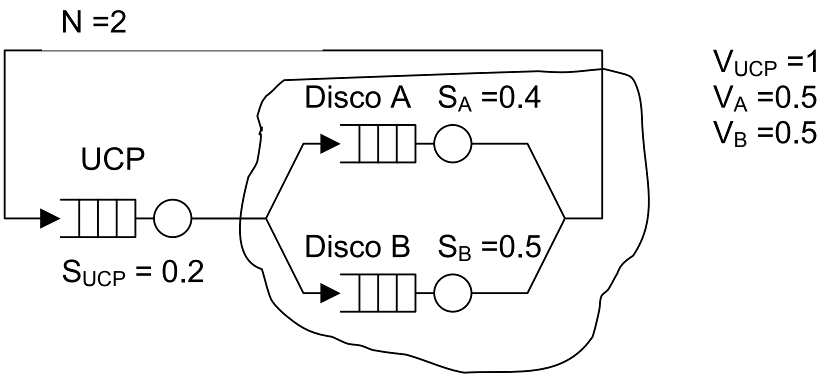
[1] Jain, R., "The Art of Computer Systems Performance Analysis", John Wiley & Sons Inc, ISBN: 0-471-50336-3, 1991, 685 p.

[2] Cassandras, C. G., "Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis", Aksen Associates Incorporated Publishers, 1993 , ISBN: 0-256-11212-6, 790p.

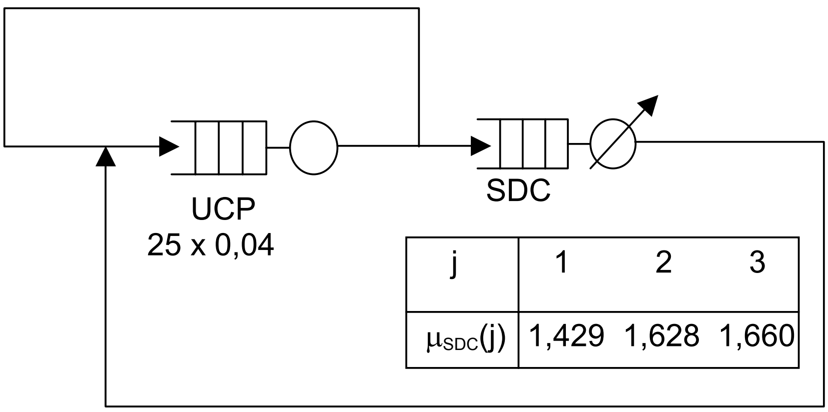
[3] Menascé, D. A., Almeida, V. A. F., "Scaling E-Business: Technologies, Models, Performance and Capacity Planning", Prentice-Hall, ISBN: 0-13-086328-9, 2000, 449p.

7 Exercícios

1) Seja o seguinte sistema de filas onde a UCP, o disco A e o disco B possuem tempos médios de serviço respectivamente iguais a 0.2, 0.4 e 0.5 seg, taxa de visitas à UCP do disco A e disco B respectivamente 1, 0.5 e 0.5 e grau de multiprogramação 2. Na solução pelo método hierárquico, determine o SDC equivalente aos discos A e B do sistema pelo método de Análise do Valor Médio (MVA).



2) Determine a vazão do sistema e o tempo de resposta para o sistema da figura a seguir utilizando MVA dependente de carga. As taxas de serviço μ(j) do centro de serviço dependente de carga como função do número de programas j no centro de serviço são 1,429, 1,628 e 1,660, respectivamente para j=1, 2, 3.



j	1	2	3
$\mu_{SDC}(j)$	1,429	1,628	1,660

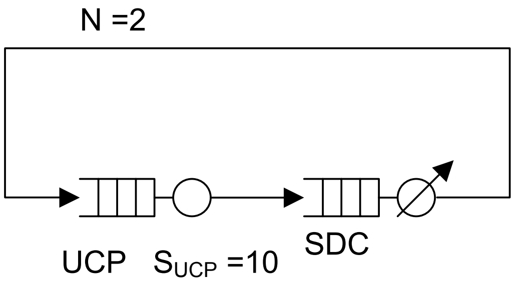
Resp.: X para n=1,2,3 são: 0.588, 0.796 e 0.892
R para n=1,2,3 são: 1.700, 2.506 e 3.365.

3) Use a técnica hierárquica para analisar o sistema do exercício 31. Use a UCP como o sub-sistema designado. Determine a vazão do sistema para n = 1, 2, 3 programas no

sistema. Use, então o MVA dependente de carga para analisar o sistema equivalente. Verifique que o resultado final é o mesmo já obtido no exercício 31.

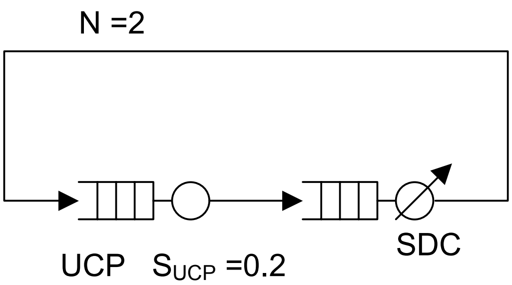
Resp.: $\mu(n)$ para n=1,2,3 são: 1.429, 1.628 e 1.660.

4) Dado o sistema abaixo onde uma das estações é um SDC , determine a vazão do sistema e o tempo de resposta utilizando AVM com grau de multiprogramação N=2.



j	1	2	3
$\mu_{SDC}(j)$	7.27	9.46	10.40

5) Dado o sistema abaixo onde uma das estações é um SDC , determine a vazão do sistema e o tempo de resposta utilizando AVM com grau de multiprogramação N=2.A taxa de visita à UCP é 1.



j	1	2
$\mu_{SDC}(j)$	2.5	4