PROGRAMAÇÃO ESTATÍSTICA
Exercício 2

Leonardo de Salles Amaral
RA 770617

UFSCAR

São Carlos, 2022

Função e respectivo domínio:

$$f(x) = \cos(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Todo o código `R` [R Core Team, 2021] utlizado é apresentado.

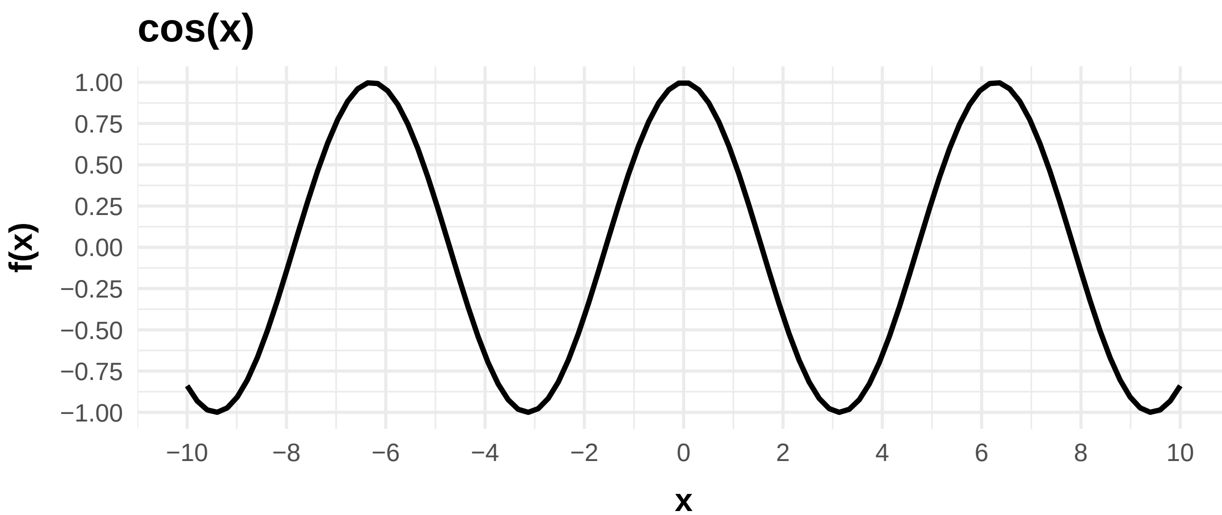
Pacotes utilizados:

```
library(tibble)
library(ggplot2)
library(tidyr)
```

Primeiro, geramos o gráfico da função num intervalo qualquer de x. Escolhemos o intervalo [-10, 10].

```
tibble::tibble(x =seq(-10, 10, length.out=100),
               fx=cos(x))|>
    ggplot(aes(x=x, y=fx))+
    geom_line(size=1)+
    labs(y    ='f(x)',
         title='cos(x)')+
    scale_x_continuous(breaks=seq(-10, 10, by=2))+
    scale_y_continuous(breaks=seq(-1, 1, by=0.25))+
    theme_minimal(base_size=13)+
    theme(axis.title.x=element_text(
              face='bold',
              margin=ggplot2::unit(c(t=3, r=0, b=0, l=0), 'mm')),
          axis.title.y=element_text(
```

```
        face='bold',
        margin=ggplot2::unit(c(t=0, r=3, b=0, l=0), 'mm')),
    plot.title=element_text(face='bold'))
```



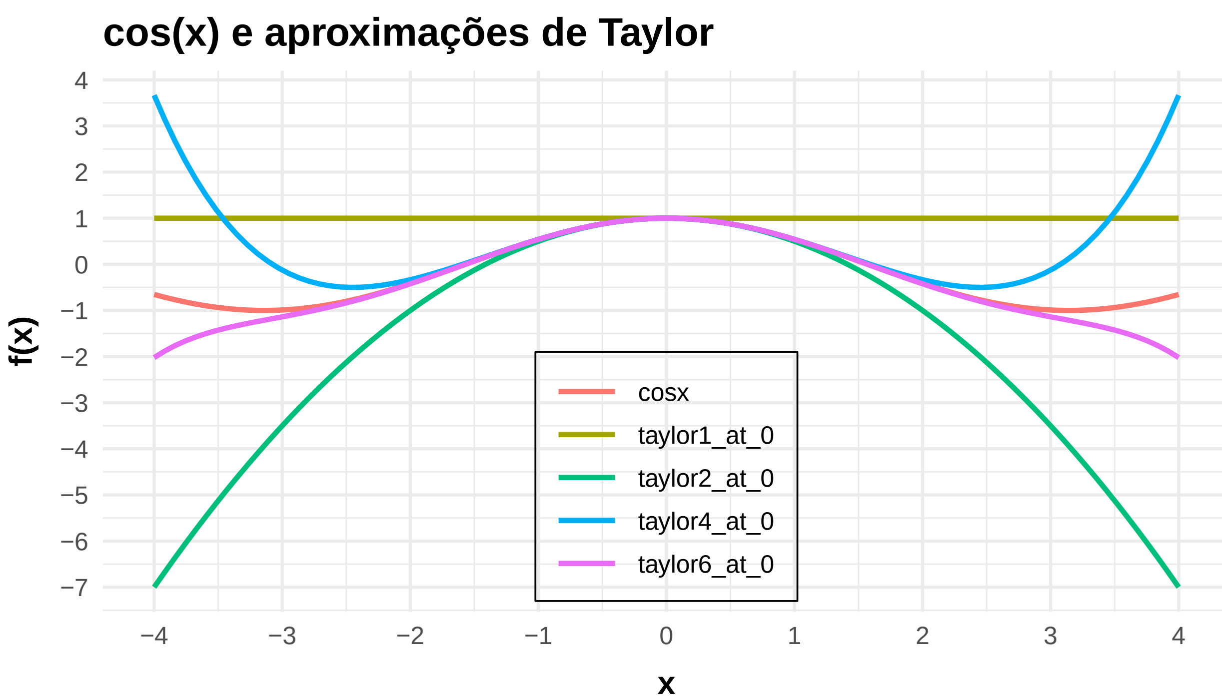
Agora, acrescentamos aproximações de Taylor, $\tilde{f}(x)^{(\cdot)}$, de ordem 1, 2, 4 e 6, avaliadas no ponto $x = 0$, como apresentadas abaixo

- **Ordem 1**:
$$\tilde{f}(x)^{(1)} = 1 + O(x^2);$$
- **Ordem 2**:
$$\tilde{f}(x)^{(2)} = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4);$$
- **Ordem 4**:
$$\tilde{f}(x)^{(3)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6);$$
- **Ordem 6**:
$$\tilde{f}(x)^{(4)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8).$$

Negligenciamos o termo de erro/resíduo, $O(\cdot)$, das aproximações.

```
tibble::tibble(x           =seq(-4, 4, length.out=100),
               cosx        =cos(x),
               taylor1_at_0=1,
               taylor2_at_0=taylor1_at_0 - x**2/2,
               taylor4_at_0=taylor2_at_0 + x**4/24,
               taylor6_at_0=taylor4_at_0 - x**6/720)|>
    tidyr::pivot_longer(!x, names_to='Curva')|>
    ggplot(aes(x=x, y=value, color=Curva))+
```

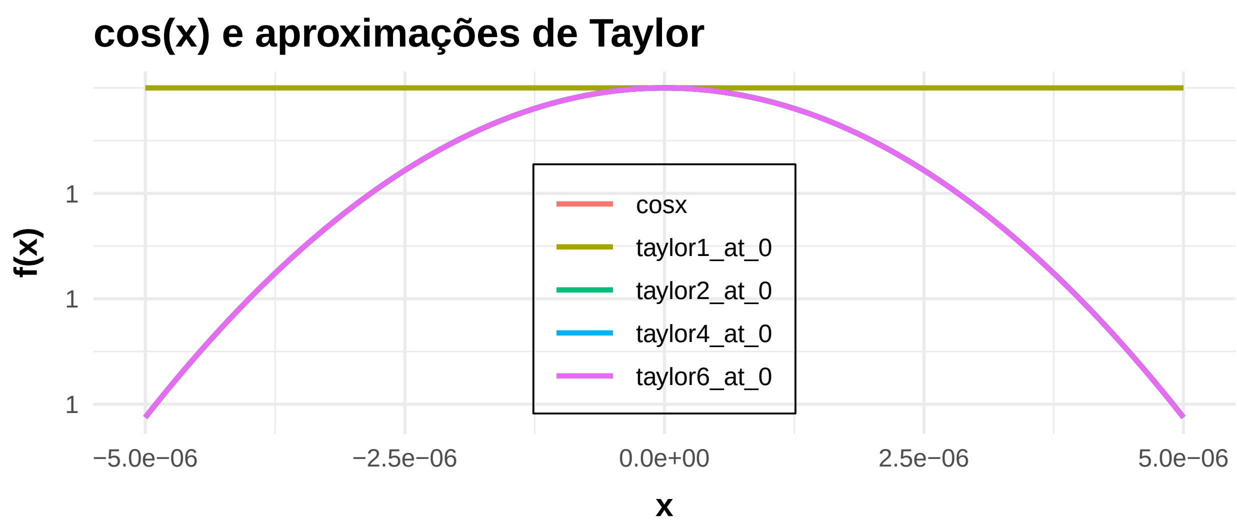
```r
geom_line(size=1)+
labs(y    ='f(x)',
     title='cos(x) e aproximações de Taylor',
     color=NULL)+
scale_x_continuous(breaks=seq(-4, 4, by=1))+
scale_y_continuous(breaks=seq(-10, 10, by=1))+
theme_minimal(base_size=13)+
theme(axis.title.x=element_text(
          face='bold',
          margin=ggplot2::unit(c(t=3, r=0, b=0, l=0), 'mm')),
      axis.title.y=element_text(
          face='bold',
          margin=ggplot2::unit(c(t=0, r=3, b=0, l=0), 'mm')),
      plot.title=element_text(face='bold'),
      legend.position=c(0.5, 0.25),
      legend.box.background=element_rect(),
      legend.key.width=ggplot2::unit(1, 'cm'),
      legend.box.margin=ggplot2::unit(c(t=-2, r=1, b=0, l=0), 'mm'))
```



Com exceção da aproximação de primeira ordem, todas as demais aproximam muito bem a função ao redor do ponto zero. Em termos de extensão da qualidade da aproximação, quanto maior o grau, maior a extensão da qualidade da aproximação.

Abaixo, temos o gráfico da função e das aproximações, ainda ao redor de 0, no intervalo $[-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$.

```
tibble::tibble(x           =seq(-5e-6, 5e-6, length.out=100),
               cosx        =cos(x),
               taylor1_at_0=1,
               taylor2_at_0=taylor1_at_0 - x**2/2,
               taylor4_at_0=taylor2_at_0 + x**4/24,
               taylor6_at_0=taylor4_at_0 - x**6/720)|>
    tidyr::pivot_longer(!x, names_to='Curva')|>
    ggplot(aes(x=x, y=value, color=Curva))+
    geom_line(size=1)+
    labs(y    ='f(x)',
         title='cos(x) e aproximações de Taylor',
         color=NULL)+
    theme_minimal(base_size=13)+
    theme(axis.title.x=element_text(
              face='bold',
              margin=ggplot2::unit(c(t=3, r=0, b=0, l=0), 'mm')),
          axis.title.y=element_text(
              face='bold',
              margin=ggplot2::unit(c(t=0, r=3, b=0, l=0), 'mm')),
          plot.title=element_text(face='bold'),
          legend.position=c(0.5, 0.4),
          legend.box.background=element_rect(),
          legend.key.width=ggplot2::unit(1, 'cm'),
          legend.box.margin=ggplot2::unit(c(t=-2, r=1, b=0, l=0), 'mm'))
```



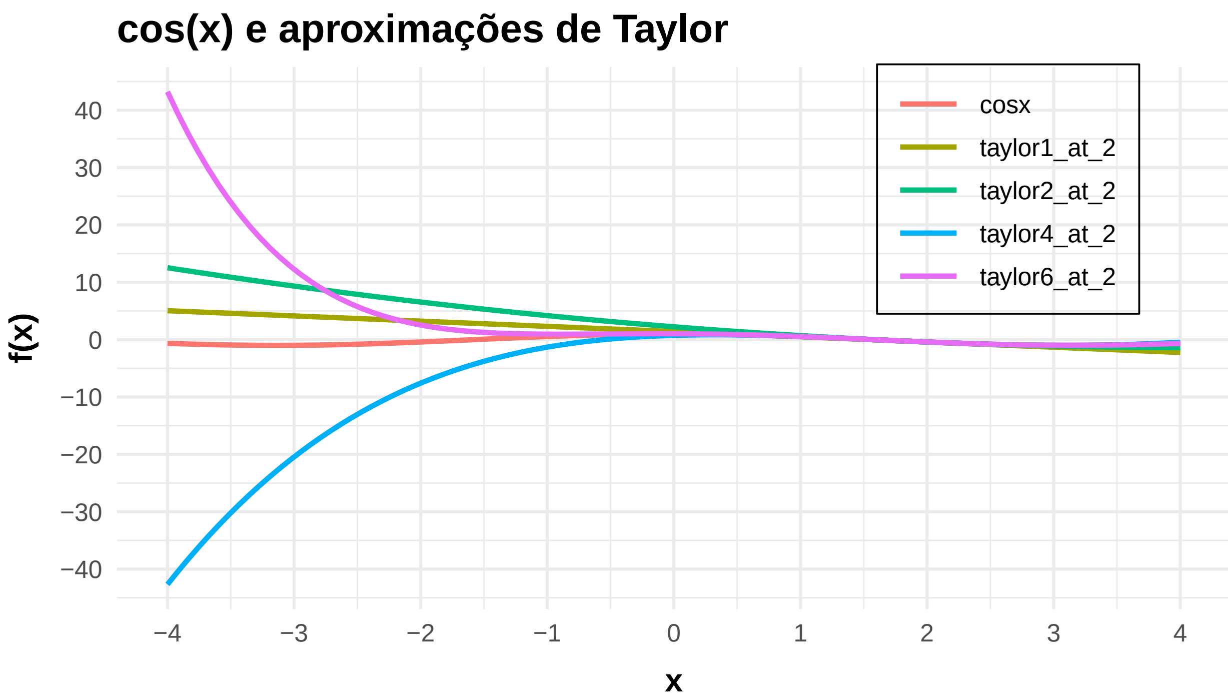
Num intervalo pequeno como esse, vemos que com exceção da aproximação de Taylor de primeira ordem, todas as demais ordens aproximam perfeitamente a função, no intervalo considerado. Por isso a sobreposição de curvas no gráfico.

As aproximações de Taylor ao redor do ponto $x = 2$ são dadas abaixo.

- **Ordem 1**:
$$\tilde{f}(x)^{(1)} = \cos(2) - (x-2)\sin(2) + O((x-2)^2);$$
- **Ordem 2**:
$$\tilde{f}(x)^{(2)} = \cos(2) - (x-2)\sin(2) - \frac{1}{2}(x-2)^2\cos(2) + O((x-2)^3);$$
- **Ordem 4**:
$$\tilde{f}(x)^{(3)} = \cos(2) - (x-2)\sin(2) - \frac{1}{2}(x-2)^2\cos(2) + \frac{1}{6}(x-2)^3\sin(2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\cos(2) + O((x-2)^5);$$
- **Ordem 6**:
$$\tilde{f}(x)^{(4)} = \cos(2) - (x-2)\sin(2) - \frac{1}{2}(x-2)^2\cos(2) + \frac{1}{6}(x-2)^3\sin(2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\cos(2) - \frac{1}{120}(x-2)^5\sin(2) - \frac{1}{720}(x-2)^6\cos(2) + O((x-2)^7).$$

E a seguir temos o gráfico das curvas.

```
tibble::tibble(x           =seq(-4, 4, length.out=100),
               cosx        =cos(x),
               taylor1_at_2=cos(2) - (x - 2)*sin(2),
               taylor2_at_2=taylor1_at_2 - 0.5*(x - 2)**2*cos(2),
               taylor4_at_2=taylor2_at_2 +
                   1/6*(x - 2)**3*sin(2) + 1/24*(x - 2)**4*cos(2),
               taylor6_at_2=taylor4_at_2 -
                   1/120*(x - 2)**5*sin(2) - 1/720*(x - 2)**6*cos(2))|>
    tidyr::pivot_longer(!x, names_to='Curva')|>
    ggplot(aes(x=x, y=value, color=Curva))+
    geom_line(size=1)+
    labs(y    ='f(x)',
         title='cos(x) e aproximações de Taylor',
         color=NULL)+
    scale_x_continuous(breaks=seq(-4, 4, by=1))+
    scale_y_continuous(breaks=seq(-50, 50, by=10))+
    theme_minimal(base_size=13)+
    theme(axis.title.x=element_text(
              face='bold',
              margin=ggplot2::unit(c(t=3, r=0, b=0, l=0), 'mm')),
          axis.title.y=element_text(
              face='bold',
              margin=ggplot2::unit(c(t=0, r=3, b=0, l=0), 'mm')),
          plot.title=element_text(face='bold'),
          legend.position=c(0.8, 0.775),
          legend.box.background=element_rect(),
          legend.key.width=ggplot2::unit(1, 'cm'),
          legend.box.margin=ggplot2::unit(c(t=-2, r=1, b=0, l=0), 'mm'))
```



Vemos que ao redor do ponto $x = 2$ todas as aproximações de Taylor aproximam bem a função. Conforme aumentamos a ordem da aproximação, pior é a aproximação longe do ponto em questão. O contrário do que observamos quando aproximamos ao redor do ponto $x = 0$.

Os seguintes pacotes `R` [R Core Team, 2021] foram utilizados: {`tibble`} [Müller and Wickham, 2021], {`ggplot2`} [Wickham, 2016], e {`tidyr`} [Wickham, 2021].

Referências

[Müller and Wickham, 2021] Müller, K. and Wickham, H. (2021). *tibble: Simple Data Frames*. R package version 3.1.2, https://CRAN.R-project.org/package=tibble.

[R Core Team, 2021] R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. https://www.R-project.org/.

[Wickham, 2016] Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. https://ggplot2.tidyverse.org.

[Wickham, 2021] Wickham, H. (2021). *tidyr: Tidy Messy Data*. R package version 1.1.3, https://CRAN.R-project.org/package=tidyr.