

Exercícios sobre Verossimilhança - VI

Henrique Ap. Laureano

henriquelaureano@outlook.com \wedge <http://mynameislaure.github.io/>
/UFPR/DEST/LEG/



Junho de 2019

-
1. Seja X uma v.a. com distribuição uniforme $X \sim U(0, \theta)$.

Uma amostra aleatória forneceu os seguintes valores: 5,5; 3,2; 4,8; 5,3; 3,8 e 5,0. Obtenha a função de verossimilhança e um (ou mais) intervalo(s) adequado(s) especificando a forma de obtenção.

```
# <r code> -----  
data <- c(5.5, 3.2, 4.8, 5.3, 3.8, 5)  
# </r code> -----
```

Solution:

The likelihood of a $\text{Uniform}(0, \theta)$ is

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \theta^{-n}, & \text{for } x_i < \theta \text{ for all } i \\ &= \theta^{-n}, & \text{for } \theta > x_{(n)}, \end{aligned}$$

and equal to zero otherwise.

Given the data above, we get $x_{(n)} = 5.5$ and the likelihood is shown in Figure 1, together with some intervals.

```

# <r code> -----
lkl.unif <- function(theta, data) {
  n <- length(data) ; xn <- max(data)
  # this next step, in the way presented, isn't very efficient, since I'll
  # compute the likelihood for all theta's and then, if necessary, convert to
  # zero. however, since we have here a very simple likelihood (and this
  # notation is extremely clear, btw), I keep in this way
  lkl = theta**(-n)*{theta >= xn}
  return(lkl)
}
theta.seq <- seq(4, 12, length.out = 100)
lklseq.unif <- lkl.unif(theta.seq, data)

par(mfrow = c(1, 2), mar = c(4, 4, 2, 2) + .1) # cosmetics
# plotting the normalized likelihood function to have unit maximum
plot(theta.seq, lklseq.unif/max(lklseq.unif), type = "l",
      xlab = expression(theta), ylab = "Likelihood")

# probability-based interval -----
# cutoff's corresponding to a 95\% and 99\% confidence interval for the mean
cuts <- c(.15, .04) * lkl.unif(max(data), data) / max(lklseq.unif)
abline(h = cuts, lty = 2:3)

# uniroot.all finds the zeros, so we need to subtract the cutoff point from
# the likelihood to be able to find the points where the likelihood is cut
ic.lkl.unif <- function(theta, cut, ...) {
  lkl.unif(theta, ...)/max(lklseq.unif) - cut
}
ic.95.prob <- rootSolve::uniroot.all(ic.lkl.unif, range(theta.seq),
                                   data = data, cut = cuts[1])
ic.99.prob <- rootSolve::uniroot.all(ic.lkl.unif, range(theta.seq),
                                   data = data, cut = cuts[2])
abline(v = ic.95.prob, lty = 2) ; abline(v = ic.99.prob, lty = 3)

plot(theta.seq, lklseq.unif/max(lklseq.unif), type = "l",
      xlab = expression(theta), ylab = "Likelihood")
# pure likelihood interval -----
# cutoff's corresponding to a 95\% and 99\% confidence interval for the mean
cuts <- c(.05, .01) * lkl.unif(max(data), data) / max(lklseq.unif)
abline(h = cuts, lty = 2:3)

ic.95.pure <- rootSolve::uniroot.all(ic.lkl.unif, range(theta.seq),
                                   data = data, cut = cuts[1])
ic.99.pure <- rootSolve::uniroot.all(ic.lkl.unif, range(theta.seq),
                                   data = data, cut = cuts[2])
abline(v = ic.95.pure, lty = 2) ; abline(v = ic.99.pure, lty = 3)
# </r code> -----

```

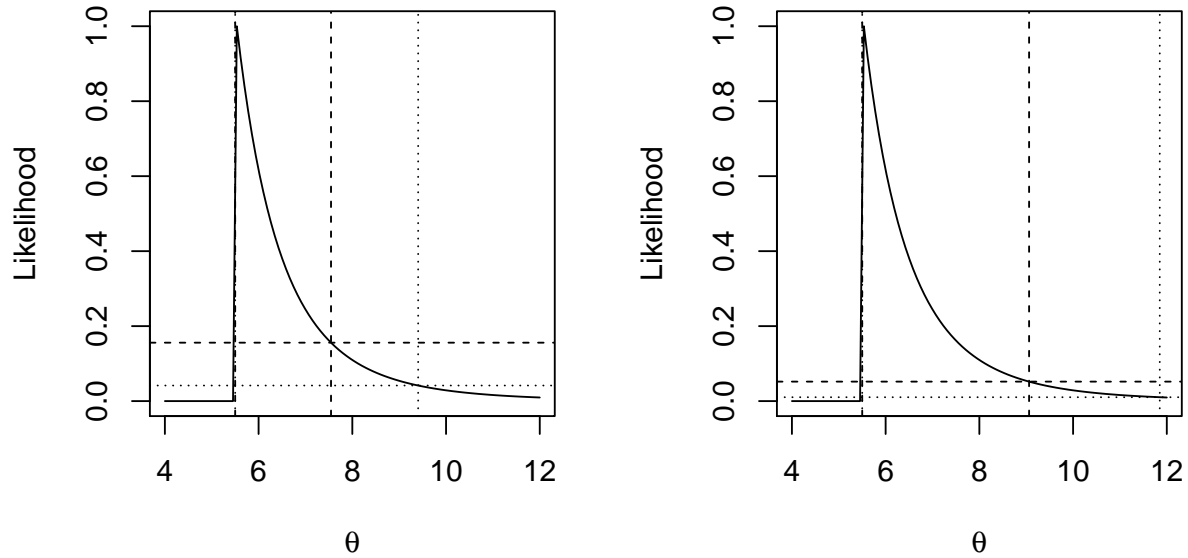


Figure 1: Likelihood function of θ in $\text{Uniform}(0, \theta)$ based on $x_{(6)} = 5.5$. In the left, likelihood intervals at 15% (dashed line) and 4% (dotted line) cutoff. In the right, likelihood intervals at 5% (dashed line) and 1% (dotted line) cutoff. These cutoffs correspond, in both sides, to a 95% and 99% confidence interval, respectively.

In both graphs of Figure 1 we have two confidence intervals for θ , one corresponding to a 95% confidence interval (dashed line) and one corresponding to a 99% confidence interval for the mean (dotted line). In the left we have a probability-based likelihood interval, in the right we have a pure likelihood interval.

The left ones are bad intervals, since they're based in a large-sample theory that results in an exact interval for the Gaussian case, in a good approximation for a reasonably regular case, and as we can see by the figure... here we doesn't have a regular likelihood (the likelihood isn't well approximated by a quadratic function), thus, here this interval should not be so good.

Explaining better how we arrived in these intervals:

For a normalized likelihood, $L(\theta)/L(\hat{\theta})$, we have the following Wilk's likelihood ratio statistic, defined as W

$$W \equiv 2 \log \frac{L(\hat{\theta})}{L(\theta)} \sim \chi_1^2.$$

Its χ^2 distribution is exact only in the normal mean model, and approximately true when the likelihood is reasonably regular.

Based in this Wilk's statistic we are able to find the probability that the likelihood interval covers θ ,

$$\Pr \left\{ \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} > c \right\} = \Pr \left\{ 2 \log \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} < -2 \log c \right\} = \Pr \{ \chi_1^2 < -2 \log c \}.$$

So, if for some $0 < \alpha < 1$ we choose a cutoff

$$c = e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,(1-\alpha)}^2},$$

where $\chi_{1,(1-\alpha)}^2$ is the $100(1 - \alpha)$ percentile of χ_1^2 .

For $\alpha = 0.05$ and 0.01 we have a cutoff $c = 0.15$ and 0.04 , that corresponds to a 95% and 99% confidence interval, respectively. \square

Having the cutoff values we need now to find the interval values, i.e., in which points the cutoff horizontal line cuts the likelihood. For this purpose we use the function `rootSolve::uniroot.all`.

A likelihood interval at 15% and 4% cutoff for θ are (5.5, 7.545) and (5.5, 9.405).

Already on the right side of Figure 1 we have a more coherent, let's say, confidence interval for the Uniform likelihood. While the likelihood isn't regular, it is still possible to provide an exact theoretical justification for a confidence interval interpretation. Now

$$\Pr \left\{ \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} > c \right\} = \Pr \left\{ \frac{X_{(n)}}{\theta} > c^{1/n} \right\} = 1 - \Pr \left\{ \frac{X_{(n)}}{\theta} < c^{1/n} \right\} = 1 - (c^{1/n})^n = 1 - c.$$

So the likelihood interval with cutoff c is a $100(1 - c)\%$ confidence interval.

A likelihood interval at 15% and 4% cutoff for θ are (5.5, 9.062) and (5.5, 11.849).

Comparing the obtained intervals we see a broader range with the pure likelihood intervals. In other words, with the pure likelihood intervals we see a higher uncertainty than with the (not so recommended here) probability-based likelihood intervals.

For doing this exercise I read and used it Pawitan's book:

```
@book{pawitan,
  author    = {Yudi Pawitan},
  title     = {In All Likelihood:
              Statistical Modelling and Inference Using Likelihood},
  year      = {1991},
  publisher = {Oxford University Press},
  address   = {Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP},
}
```

2. Seja X uma v.a. de uma distribuição de Poisson ($X \sim P(\lambda)$) para a qual foi obtida a seguinte amostra aleatória: (3, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0).

```
# <r code> -----  
data <- c(3, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 0)  
# </r code> -----
```

- Obtenha a função de verossimilhança, sua aproximação quadrática e intervalos para λ .
 - Repita a questão anterior para a reparametrização $\theta = \log(\lambda)$.
 - Obtenha ainda (por pelo menos dois métodos diferentes) intervalos de confiança para o parâmetro λ a partir da função de verossimilhança (aproximada ou não) de θ .
3. A fim de se obter uma estimativa do público de um jogo sem utilizar dados de venda de ingressos ou registros das roletas do estádio, foram distribuídas camisas especiais para 300 torcedores sob condição que estes a utilizassem durante um jogo. Durante o jogo foram selecionados ao acaso 250 torcedores verificando-se 12 destes possuíam a camisa.
- Obtenha a função de verossimilhança para o número total de torcedores.
 - Obtenha a estimativa pontual e a intervalar, esta última por pelo menos dois métodos diferentes.
 - Repita e compare os resultados caso fossem 500 camisas e 20 com camisas dentre os 250.
4. Foram tomadas as seguintes observações independentes de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- [1] 56.4 54.2 65.3 49.2 50.1 56.9 58.9 62.5 70.0 61.0

- sabe-se que outras 5 observações são menores que 50.
 - sabe-se que outras 3 observações são maiores que 65.
- Escrever a função de verossimilhança.
 - Obter as estimativas de máxima verossimilhança.
 - Obter as verossimilhanças perfilhadas.
 - Obter os erro-padrão das estimativas.
5. Considere os dados da tabela a seguir (adaptados/modificados de Montgomery & Runger, 1994) aos quais deseja-se ajustar um modelo de regressão linear simples relacionando a variável resposta Y (pureza em %) a uma variável explicativa X (nível de hidrocarbonetos).

X	0.99	1.02	1.15	1.29	1.46	1.36	0.87	1.23	1.55	1.40
Y	99.01	89.05	91.43	93.74	96.73	94.45	87.59	91.77	99.42	93.65
X	1.19	1.15	0.98	1.01	1.11	1.20	1.26	1.32	1.43	0.95
Y	93.54	92.52	90.56	89.54	89.85	90.39	93.25	93.41	94.98	87.33

- Encontre a função de verossimilhança.
 - Encontre as estimativas de máxima verossimilhança.
 - Obtenha a verossimilhança conjunta para os parâmetros β_0 e β_1 :
 - considerando σ fixo com valor igual à sua estimativa.
 - obtendo a verossimilhança (conjunta - 2D) perfilhada em relação a σ .
 - Obtenha a verossimilhança perfilhada para os parâmetros β_0 e β_1 individualmente.
6. Considere uma amostra de uma v.a. Y em que assume-se que $Y_i \sim P(\lambda_i)$ em que o parâmetro λ_i é descrito por uma função de uma variável explicativa $\log(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ com valores conhecidos de x_i .
 Dados simulados com $(\beta_0 = 2, \beta_1 = 0.5)$ são mostrados a seguir.

Y	10	15	11	37	70	19	12	12	13	88
X	1.7	1.5	0.5	2.8	4.4	1.8	0.4	0.7	1.3	5.1

- Obtenha o gráfico da função de verossimilhança indicando a posição dos valores verdadeiros dos parâmetros.
- Obtenha os perfis de verossimilhança dos parâmetros.
- Obtenha estimativas.
- Obtenha intervalos (use diferentes métodos).
- Compare os resultados anteriores com os fornecidos pela função `glm()` e discuta os achados.

last modification on ...