Naive Bayes & Regressão Logística

Henrique Laureano
http://leg.ufpr.br/~henrique

CiDWeek I, 03-07/02/2020

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CiDAMO

Naive Bayes

Primeiro, precisamos falar sobre o que é um classificador de Bayes.

Classificador de Bayes

Um classificador probabilístico baseado no teorema de Bayes.

Exemplo,

- Meningite causa torcicolo 50% das vezes, $\mathbb{P}[T|M]$
- Prob. *a priori* de um paciente estar com meningite é $1/50.000$, $\mathbb{P}[M]$
- Probabilidade *a priori* de um paciente estar com torcicolo é $1/20$, $\mathbb{P}[T]$

Se um paciente está com torcicolo, qual a probabilidade dele estar com meningite?

$$\mathbb{P}[M|T] = \frac{\mathbb{P}[T|M]\ \mathbb{P}[M]}{\mathbb{P}[T]} = \frac{1/2 \times 1/50.000}{1/20} = 0.0002.$$

Classificadores Bayesianos

Considere atributos $A_1, A_2, \dots A_n$ e uma classe C com rótulos $c_1, c_2, \dots c_k$.

O que queremos?

$$\text{Predição :} \quad C = c_1 \text{ ou } C = c_2 \text{ ou } \dots,$$

i.e., queremos o valor de C que maximiza $\mathbb{P}[C|A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Como fazemos? Teorema de Bayes.

Calculamos a probabilidade *a posteriori* $\mathbb{P}[C|A_1, A_2, \dots, A_n]$ para todos os valores de C,

$$\mathbb{P}[C_k|A_1, A_2, \dots, A_n] = \frac{\mathbb{P}[A_1, A_2, \dots, A_n|C_k]\ \mathbb{P}[C_k]}{\mathbb{P}[A_1, A_2, \dots, A_n]}.$$

E como calculamos $\mathbb{P}[A_1, A_2, \dots, A_n|C_k]$? Naive Bayes.

Classificador Naive Bayes

Por que *naive*?

Porque se assume independência entre os atributos A_i dado uma classe, i.e.,

$$\mathbb{P}[A_1, A_2, \ldots, A_n | C_k] = \mathbb{P}[A_1|C_k]\ \mathbb{P}[A_2|C_k]\ \ldots\ \mathbb{P}[A_n|C_k].$$

Vantagem: Grande redução do custo computational.

Um novo ponto é classificado como C_k se $\mathbb{P}[C_k] \times \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|C_k]$ é máximo.

i.e.,

$$C_k = \underset{k \in \{1,\ldots,K\}}{\text{argmax}}\ \mathbb{P}[C_k] \times \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|C_k]$$

CiDAMO

Exemplo: Estimando probabilidades a partir dos dados

Tid	Refund	Marital Status	Taxable Income	Evade
1	Yes	Single	125K	No
2	No	Married	100K	No
3	No	Single	70K	No
4	Yes	Married	120K	No
5	No	Divorced	95K	Yes
6	No	Married	60K	No
7	Yes	Divorced	220K	No
8	No	Single	85K	Yes
9	No	Married	75K	No
10	No	Single	90K	Yes

- $\mathbb{P}[C] = N_k/N$
  - $\mathbb{P}[C = \text{No}] = 7/10$
  - $\mathbb{P}[C = \text{Yes}] = 3/10$

Atributos discretos,

- $\mathbb{P}[A_i|C_k] = A_{ik}/N_k$
  - $\mathbb{P}[\text{Status} = \text{Married}|\text{No}] = 4/7$
  - $\mathbb{P}[\text{Refund} = \text{Yes}|\text{Yes}] = 0$
  - $\dots$

CiDAMO

E com atributos contínuos?

Tid	**Refund**	**Marital Status**	**Taxable Income**	**Evade**
1	Yes	Single	125K	**No**
2	No	Married	100K	**No**
3	No	Single	70K	**No**
4	Yes	Married	120K	**No**
5	No	Divorced	95K	**Yes**
6	No	Married	60K	**No**
7	Yes	Divorced	220K	**No**
8	No	Single	85K	**Yes**
9	No	Married	75K	**No**
10	No	Single	90K	**Yes**

Estimação da densidade de probabilidade

- Se assume distribuição Normal
- Se estima a média μ e o desvio padrão σ
- Se estima a probabilidade condicional

$$\mathbb{P}[A_i|C_k] = \frac{\exp\left\{-\frac{(A_i - \mu_{ik})^2}{2\sigma_{ik}^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_{ik}^2}}$$

Exemplo,

$$\mathbb{P}[\text{Income} = 120|\text{No}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2975}} \exp\left\{-\frac{(120-110)^2}{2 \times 2975}\right\}$$
$$= 0.0072.$$

CiDAMO

Classificador Naive Bayes: Exemplo

Dado o perfil: $X = (\text{Refund} = \text{No}, \text{Married}, \text{Income} = 120\text{k})$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X|\text{Class} = \text{No}] = \;& \mathbb{P}[\text{Refund} = \text{No}|\text{Class} = \text{No}] \times \\
& \mathbb{P}[\text{Married}|\text{Class} = \text{No}] \times \\
& \mathbb{P}[\text{Income} = 120k|\text{Class} = \text{No}] \\
= \;& 4/7 \times 4/7 \times 0.0072 = 0.0024.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X|\text{Class} = \text{Yes}] = \;& \mathbb{P}[\text{Refund} = \text{No}|\text{Class} = \text{Yes}] \times \\
& \mathbb{P}[\text{Married}|\text{Class} = \text{Yes}] \times \\
& \mathbb{P}[\text{Income} = 120k|\text{Class} = \text{Yes}] \\
= \;& 1 \times 0 \times 10^{-9} = 0.
\end{aligned}
$$

Já que $\mathbb{P}[X|\text{No}]\ \mathbb{P}[\text{No}] > \mathbb{P}[X|\text{Yes}]\ \mathbb{P}[\text{Yes}]$,

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[X|\text{No}] > \mathbb{P}[X|\text{Yes}] \Rightarrow \text{Class} = \text{No}.$$

Problema de probabilidade zero

Se uma das probabilidades condicionais é zero, então toda a expressão

$$\mathbb{P}[A_1, A_2, \ldots, A_n | C_k] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i | C_k], \text{ se torna zero.}$$

Como evitamos isso?

Abordagens:

$$\text{Original}: \quad \mathbb{P}[A_i|C_k] = \frac{N_{ik}}{N_k}, \qquad \text{Laplace}: \quad \mathbb{P}[A_i|C_k] = \frac{N_{ik}+1}{N_k+k},$$

$$\text{Estimativa-M}: \quad \mathbb{P}[A_i|C_k] = \frac{N_{ik}+mp}{N_k+m},$$

em que p é uma probabilidade *a priori* e m é um parâmetro.

Qual a abordagem é mais utilizada?
Correção de Laplace (ou estimador de Laplace).

CiDAMO

Classificador Naive Bayes: Comentários

Vantagens,

- Fácil de implementar
- Apresenta bons resultados na maioria dos cenários
- Robusto com *outliers* e atributos irrelevantes
- Ignora dados faltantes durante o cálculo das probabilidades

Desvantagens,

- Suposição de independência
- Perda de acurácia

Como lidar com essa dependência?

Redes Bayesianas: Um modelo gráfico baseado em variáveis condicionalmente independentes.

CiDAMO

Regressão Logística

Contexto

$$\text{Regressão}: \quad Y = X\beta + \epsilon.$$

Logística? Quando? Quando Y é qualitativa.

Ideia! E se nós codificarmos Y?

Assim podemos continuar usando a regressão linear usual, e.g.,
Queremos saber o que ocorreu com um paciente com base em seus sintomas

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se overdose de drogas} \\ 2 & \text{se ataque epilético} \end{cases}$$

Problema!
Este tipo de codificação implica num ordenamento das respostas.

Por que usar Regressão Logística?

Ok, mas e se Y tiver uma ordenação natural?
e.g., leve, moderado e severo.

Se Y for binária a regressão linear até que funciona.

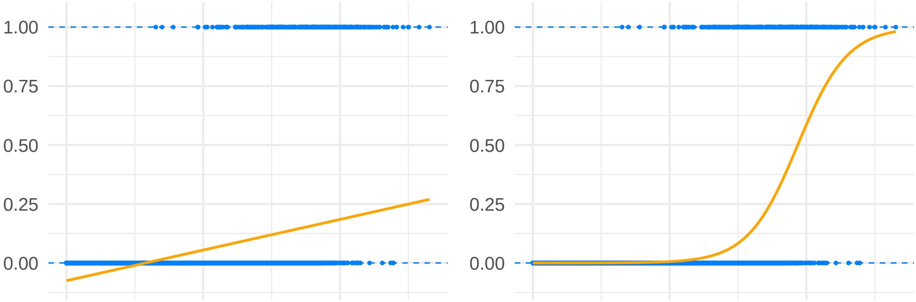
» Contudo, as predições podem ficar fora do intervalo $[0, 1]$.

Por razões como esta que é preferível o uso de métodos de classificação próprios para variáveis qualitativas.

Métodos de classificação próprios? Regressão Logística.

CiDAMO

Regressão Linear × Regressão Logística



De onde vem esta forma em S? função logística : $\dfrac{e^{X\beta}}{1+e^{X\beta}}$.

Ok, mas onde e como se usa essa função logística?

Num modelo de regressão temos $Y = g(X\beta) + \epsilon$.

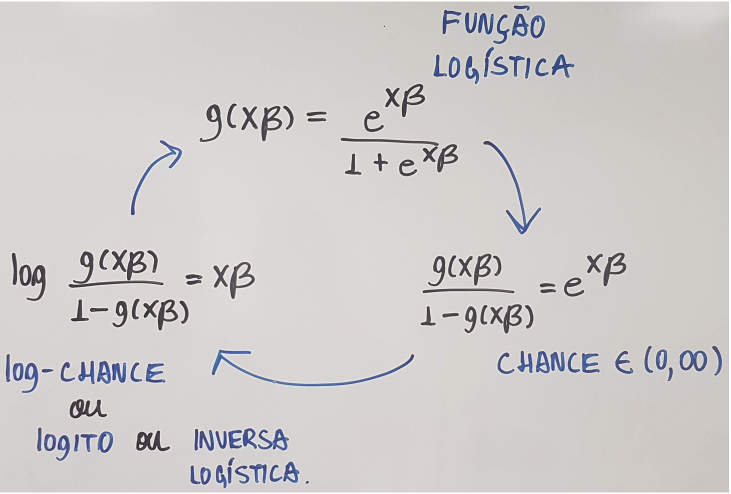
- No caso Normal, g é uma função identidade.
  O que configura a regressão linear que todos conhecemos, $Y = X\beta + \epsilon$.
- Se assumida uma distribuição diferente da Normal para $Y|X$, g será diferente da função identidade e assim teremos o que configura os chamados GLMs.

Regressão Logística

Se Y for dicotômica e g for a função logística, então temos uma regressão logística.

CiDAMO

Interpretação?



CiDAMO

Interpretação? Razão de chances

Chances,

$$\text{chance}(X) = e^{X\beta} = \frac{g(X\beta)}{1 - g(X\beta)}.$$

e.g.,

$$g(X\beta) = 0.2 \Rightarrow \frac{0.2}{1 - 0.2} = \frac{1}{4}, \quad g(X\beta) = 0.9 \Rightarrow \frac{0.9}{1 - 0.9} = 9.$$

Razão de chances,

Para uma variável contínua:

$$\frac{\text{chance}(x+1)}{\text{chance}(x)} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 (x+1)}}{e^{\beta_0 + \beta_1 x}} = e^{\beta_1}.$$

CiDAMO

Máxima verossimilhança

O quê?

Função de verossimilhança é o nome dado a função que precisamos maximizar.

Verossimilhança

$$L(\beta) = \prod_{i:Y_i=1} g(X_i\beta) \prod_{i':Y_{i'}=0} (1 - g(X_i\beta))$$

Por quê?

Queremos estimativas para β, e tais estimativas são obtidas via a maximização de $L(\beta)$.

Como?

$L(\beta)$ é uma função "qualquer" que queremos otimizar. Dependendo da função uma solução analítica pode não existir, e aí métodos numéricos se fazem necessário.

Software: R

Naive Bayes,

```
library(e1071)

modelo <- naiveBayes(Y ~ x1 + x2 + x3, data = dados)
## ou
modelo <- naiveBayes(Y ~ ., data = dados)
## se Y, x1, x2 e x3 forem todas as colunas de "dados"
```

Regressão Logística,

```
modelo <- glm(Y ~ x1 + x2 + x3,
              family = binomial(link = "logit"), data = dados)
## ou
modelo <- glm(Y ~ ., family = binomial(link = "logit"), data = dados)
## se Y, x1, x2 e x3 forem todas as colunas de "dados"
```

CiDAMO

CiDAMO