

# Análise de Séries Temporais - Trabalho 2

Davi Guerra Alves - Henrique Oliveira Dumay

2023-07-02

## Apresentação

A série analisada consiste na série número 1686 pertencente ao banco de dados da competição de previsão M3, disponível no pacote *Mcomp* do software R. A série descreve o número de carregamentos com código *TD-AUTOUNITS*, mensalmente, de outubro de 1984 a setembro de 1993.

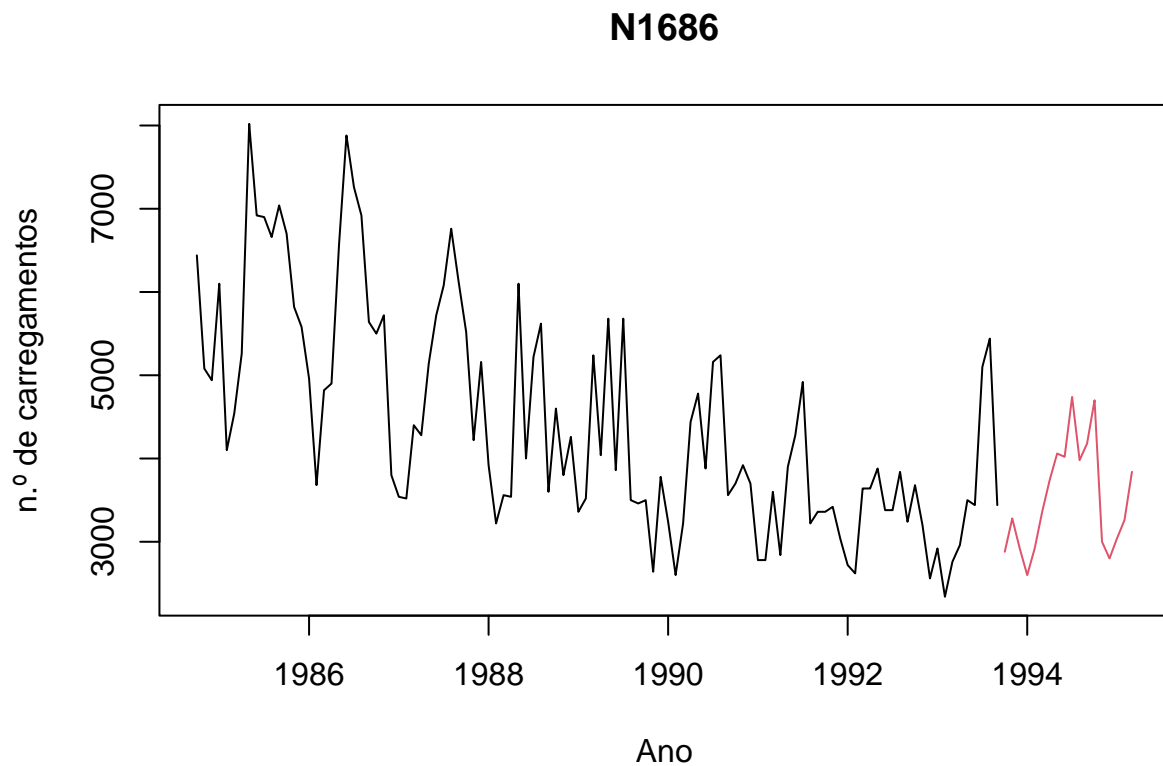


Figure 1: Comportamento da série ao longo do tempo

## Decomposição MSTL

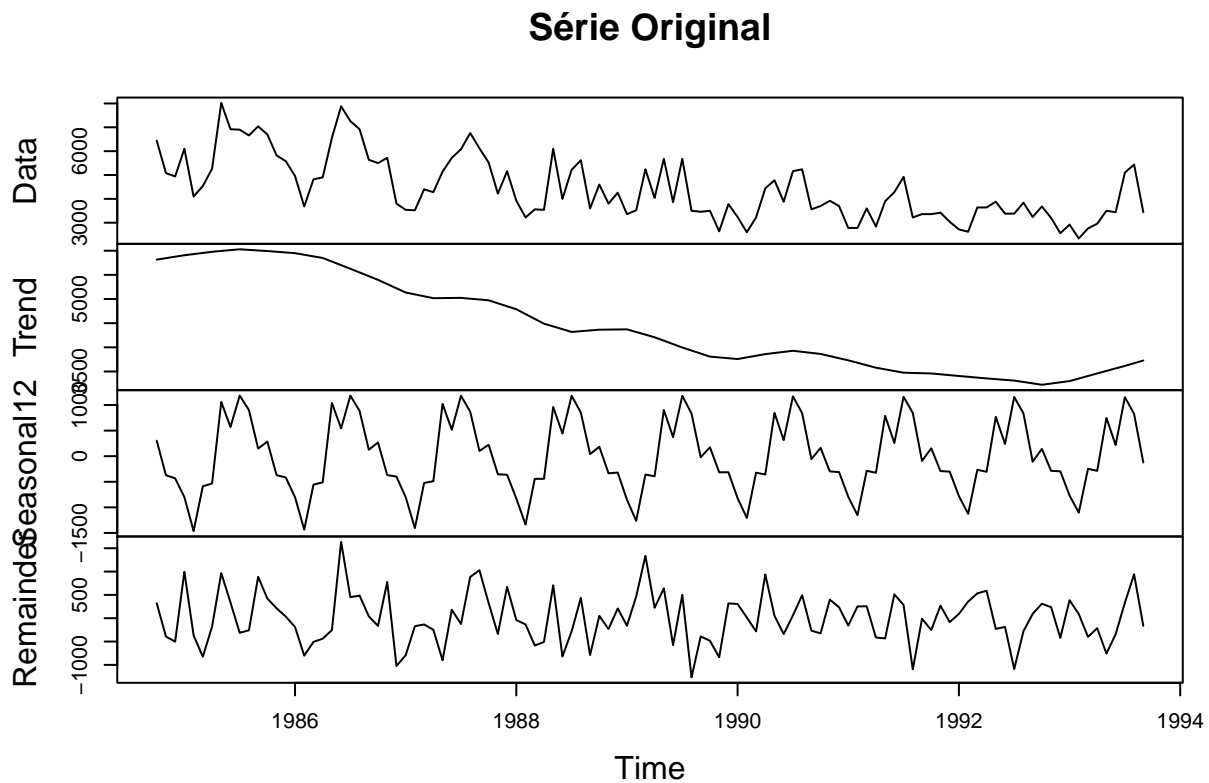


Figure 2: Decomposição MSTL

A decomposição MSTL mostra os componentes de tendência, sazonalidade e erro da série estudada. Percebe-se a presença de uma tendência crescente, com múltiplas sazonalidades que apresentam mudança do comportamento ao longo do tempo. É possível observar, graficamente, um alargamento da sazonalidade ao fim da série quando comparando ao início da série.

## Modelos ARIMA

A presença do componente de tendência explicita a não-estacionariedade da série original. A função `ndiffs()` é utilizada para estimar o número de diferenças exigidas para tornar a série estacionária por meio de um teste de raiz unitária, com a hipótese nula de que a série tem raízes estacionárias contra a hipótese alternativa de que a série tem raiz unitária. O teste retorna o menor número de diferenças exigidas para o teste em um nível de significância de 95%. Já a função `nsdiffs()` utiliza testes de raiz unitária para determinar o número de diferenças sazonais para tornar a série estacionária.

Com o uso das funções acima, obteve-se o valor para  $d = 1$  e  $D = 0$ . Os modelos candidatos terão a forma:

$$SARIMA(p, 1, q) \times (P, 0, Q)_{12}$$

A estacionariedade da série pode ser testada utilizando o teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), com a hipótese nula de que a série é estacionária. O teste resulta em um valor de 0.0221285, com p-valor de 0.1, que não nos permite rejeitar a hipótese nula a um nível de significância  $\alpha = 0,05$ .

Consideramos que a série é, agora, estacionária, observamos os gráficos da função de autocorrelação (ACF) e da função de autocorrelação parcial (PACF) em busca de possíveis autocorrelações entre os diferentes atrasos da série. Os gráficos a seguir ilustram a série diferenciada, assim como os gráficos das funções de ACF e PACF.

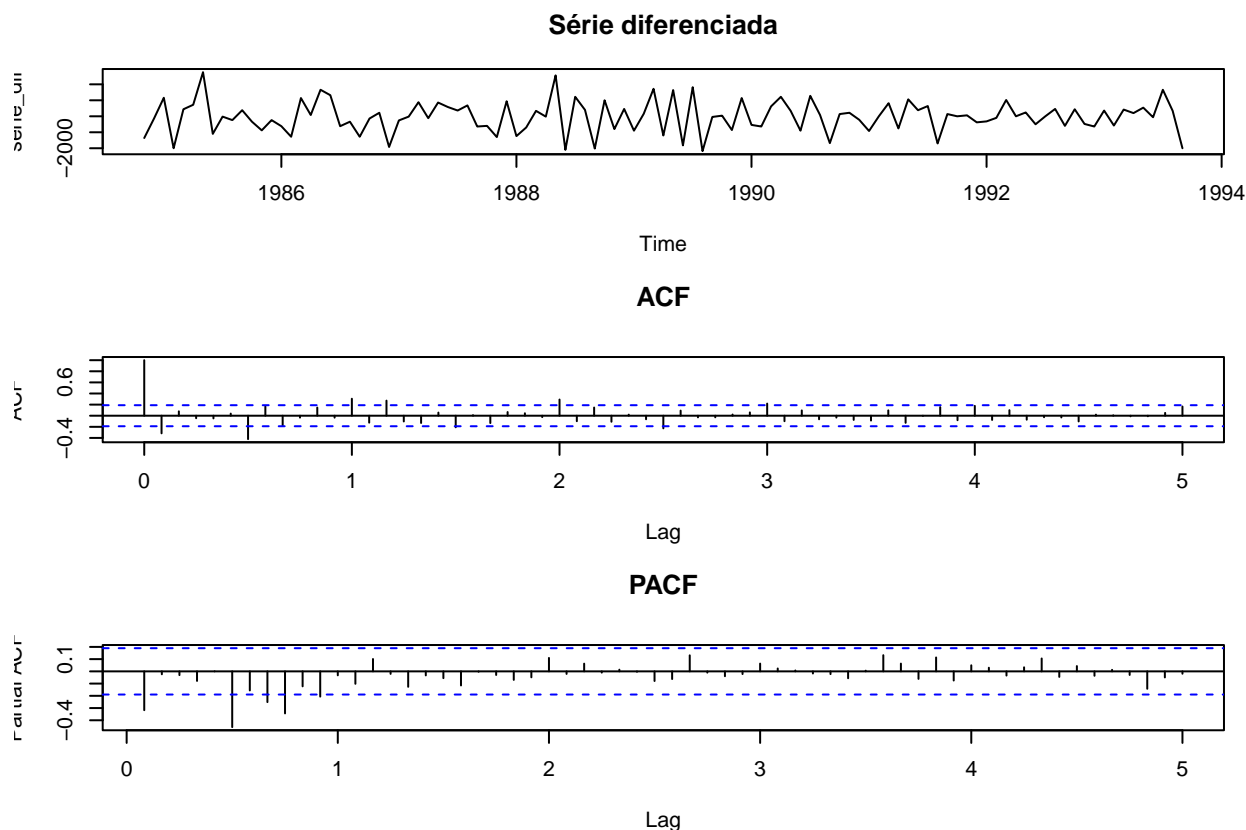


Figure 3: Gráficos ACF e PACF

Dos gráficos apresentados, pode-se afirmar que a série diferenciada não apresenta um padrão claro de autocorrelações simples e sazonais que permita inferir diretamente a modelagem. Neste sentido, serão testados valores diferentes para  $p$ ,  $P$ ,  $q$  e  $Q$  e os diferentes modelos serão comparados por meio do critério AIC.

Para os diferentes valores de  $(p, q, P, Q)$  teremos:

```
## p = 0 , q = 0 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 1782.086
## p = 0 , q = 1 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 1772.446
## p = 0 , q = 3 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 1765.736
## p = 2 , q = 3 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 1745.548
## p = 0 , q = 2 , P = 1 , Q = 0 , AICc = 1745.396
## p = 1 , q = 1 , P = 1 , Q = 0 , AICc = 1744.079
## p = 2 , q = 2 , P = 1 , Q = 0 , AICc = 1743.72
## p = 3 , q = 3 , P = 1 , Q = 0 , AICc = 1741.292
## p = 0 , q = 1 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 1739.715
```

```
## p = 0 , q = 2 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 1735.097
## p = 1 , q = 1 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 1733.713
```

O modelo com menor AICc foi o  $SARIMA(1,1,1) \times (1,0,1)_{12}$ .

Os coeficientes do modelo proposto, portanto, serão obtidos do cálculo da função Arima com o modelo acima proposto. Os coeficientes do modelo terão a seguinte forma:

$$\phi_1 = 0,3152; \theta_1 = -0,9218; \varphi = 0,9606; \vartheta = -0,7359$$

Para o modelo ARIMA utilizando transformação Box-Cox, os valores para  $d$  e  $D$  utilizando as funções  $ndiffs()$  e  $nsdiffs()$  são, respectivamente, 1 e 0. De acordo com o teste KPSS, não se pode rejeitar a hipótese nula da série transformada ser estacionária (KPSS = 0.021624 e p-valor = 0.1). O valor do parâmetro  $\lambda$  da transformação de Box-Cox é 0.09559902.

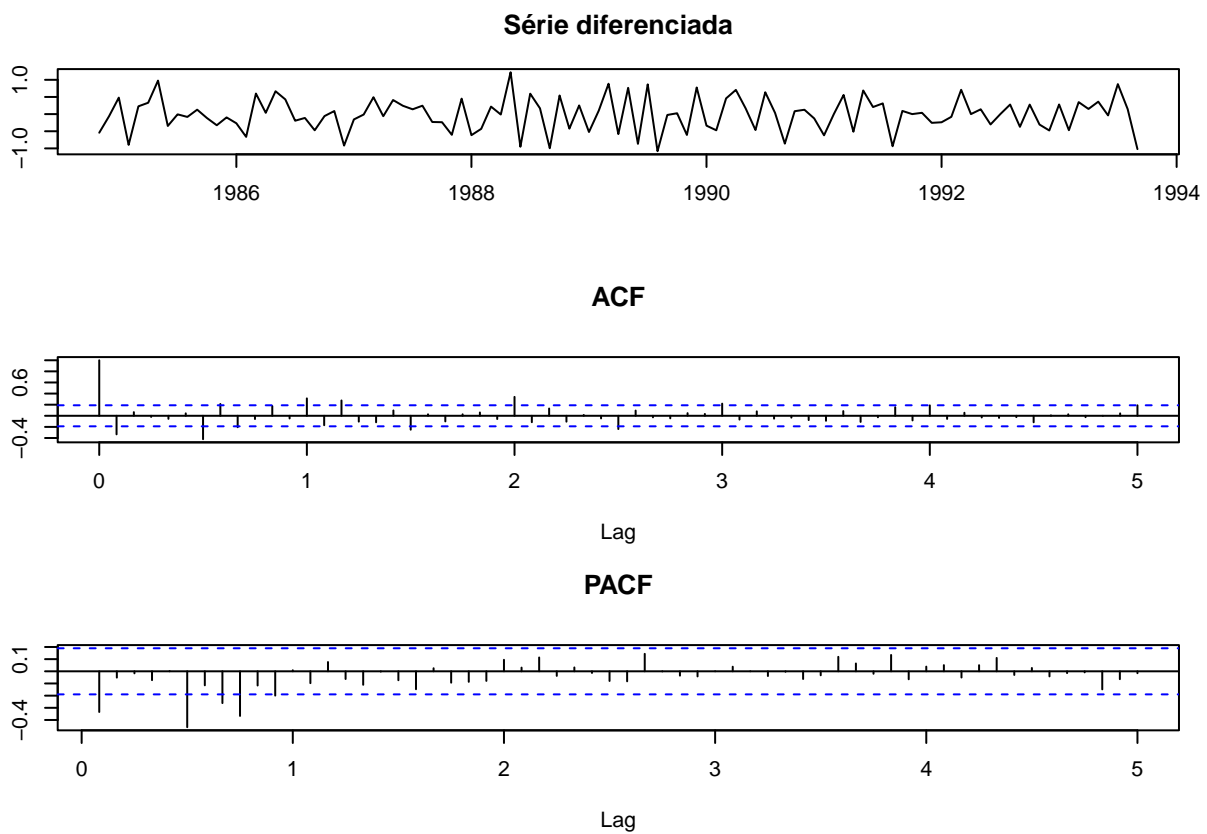


Figure 4: Gráficos ACF e PACF da série transformada (BoxCox)

A análise gráfica das funções de autocorrelação e autocorrelação da série transformada não permite a inferência a respeito de seus parâmetros de maneira clara. Procedeu-se a pesquisa de valores de  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$  de forma manual de acordo com o critério de AICc.

```
## p = 0 , q = 0 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 153.6586
## p = 0 , q = 1 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 142.2782
## p = 0 , q = 3 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 136.6817
## p = 1 , q = 3 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 136.3155
```

```

## p = 2 , q = 3 , P = 0 , Q = 0 , AICc = 107.1571
## p = 0 , q = 1 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 103.1689
## p = 0 , q = 2 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 99.51568
## p = 1 , q = 1 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 98.80396
## p = 3 , q = 3 , P = 1 , Q = 1 , AICc = 95.4485

```

Para a série transformada, temos que o menor nível de AICc foi encontrado com os parâmetros  $p = 3$ ,  $q = 3$ ,  $P = 1$  e  $Q = 1$ , cujo modelo pode ser descrito por  $SARIMA(3, 1, 3) \times (1, 0, 1)_{12}$ , com coeficientes iguais a:

$\phi_1 = 1,2866$ ;  $\phi_2 = -1,0479$ ;  $\phi_3 = 0,2771$ ;  $\theta_1 = -2,0555$ ;  $\theta_2 = 2,0480$ ;  $\theta_3 = -0,9371$ ;  $\varphi = 0,9995$ ;  $\vartheta = -0,9649$

## Análise de Resíduos

Os resíduos do modelo ARIMA sem transformação apresentam o seguinte comportamento gráfico:

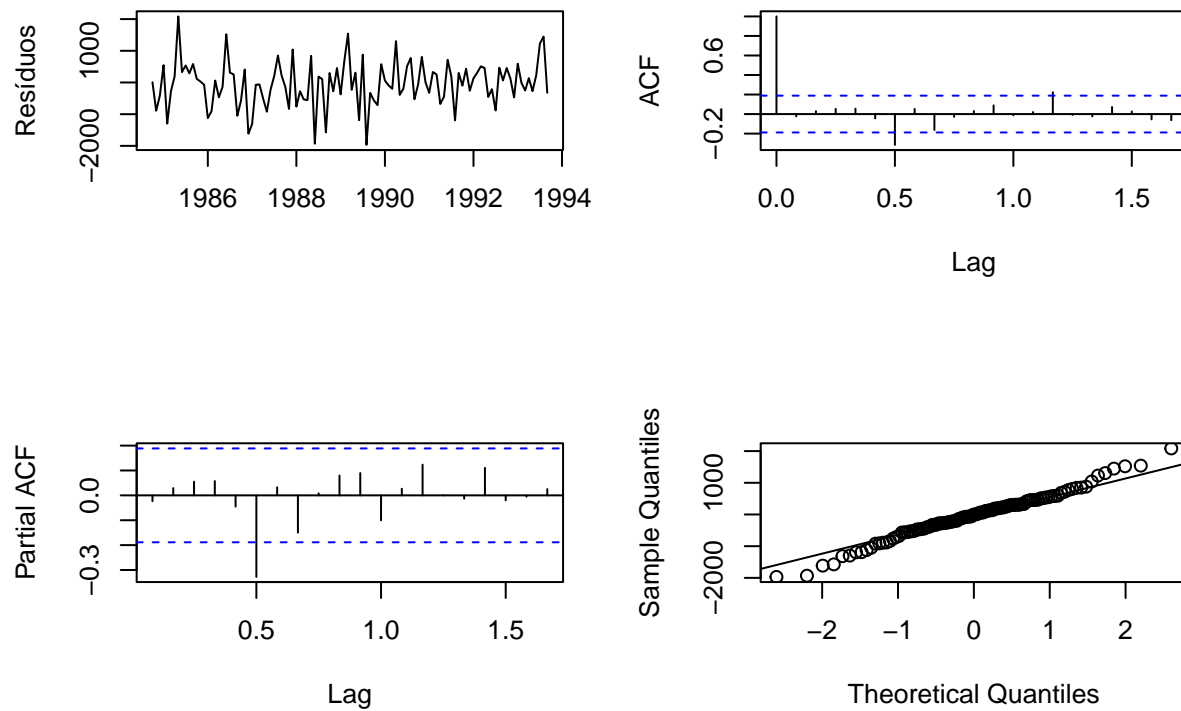


Figure 5: Resíduos ARIMA sem transformação

Já os resíduos do modelo ARIMA com transformação Box-Cox apresentam o seguinte comportamento gráfico:

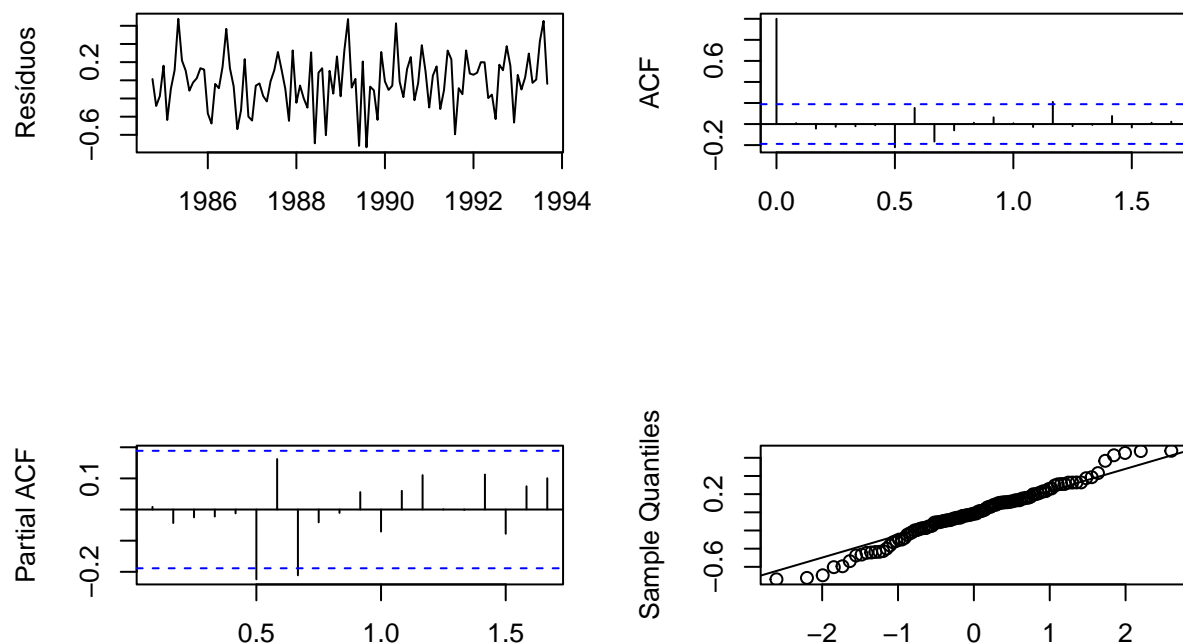


Figure 6: Resíduos ARIMA com transformação boxcox

Graficamente, observa-se que os resíduos de ambos os modelos parecem distribuir-se simetricamente ao redor da origem e não apresentam autocorrelações bem definidas. Precisa-se, entretanto, testá-los para estacionariedade, independência e distribuição normal. Essas hipóteses serão testadas conforme se segue, todas assumindo nível de significância  $\alpha = 0.05$ .

A estacionariedade será testada a partir do teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS), com a hipótese nula de que a série é estacionária. O teste para o modelo  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 0, 1)_{12}$  e para o mesmo modelo, utilizando a transformação de Box-Cox:

Modelo	KPSS	P-valor
SARIMA sem Box-Cox	0.2133231	0.1
SARIMA com Box-Cox	0.2498156	0.1

De acordo com o teste KPSS, não se pode rejeitar a hipótese de estacionariedade dos resíduos de ambos os modelos.

O teste de independência dos resíduos é realizado a partir do teste Ljung-Box, com a hipótese  $H_0$  de que os resíduos são idenpendentemente distribuídos. O teste apresenta os seguintes valores para os dois modelos:

Modelo	Chi-Quadrado	Graus de liberdade	P-valor
SARIMA sem Box-Cox	23.72163	15	0.069974

Modelo	Chi-Quadrado	Graus de liberdade	P-valor
SARIMA com Box-Cox	18.7538527	15	0.2251056

Os resultados acima mostram que a independência dos resíduos não pode ser rejeitada ao nível de significância de 5% em ambos os modelos.

A normalidade dos resíduos é testada com o teste Shapiro-Wilk de Normalidade, com  $H_0$  de que os resíduos apresentam distribuição normal. O valor do teste estatístico para os dois modelos trabalhados é:

Modelo	W	P-valor
SARIMA sem Box-Cox	0.986694	0.3620588
SARIMA com Box-Cox	0.9846901	0.2528724

Do resultado acima, não se pode rejeitar a hipótese de normalidade dos resíduos de ambos os modelos, com nível de significância de 5%.

## Modelos ETS

O modelo ETS (Error, trend and seasonal) permite descrever os modelos de alisamento exponencial em função dos tipos de suas componentes: tendência, sazonalidade e erro. O modelo utiliza três caracteres como identificação de acordo com a terminologia adotada por Hyndman et al. (2002) e Hyndman et al. (2008). A primeira letra se refere ao componente do erro; a segunda, ao componente da tendência e a terceira, da sazonalidade. A série anteriormente descrita apresenta tendência e sazonalidade claras à decomposição realizada e, portanto, trabalharemos com componentes de modelagem que contenham essas características.

Os modelos que apresentam as características observadas na decomposição e seus respectivos AICcs, considerando um modelo não transformado e um modelo com transformação de Box-Cox, estão representados na tabela abaixo:

Parâmetros	AICc Modelo sem Box-Cox	AICc Modelo com Box-Cox
AAA	1950.568	290.3203
AAA Dumped	1953.429	295.7952
MAA	1947.757	288.9366
MAA Dumped	1942.956	297.1602
MAM	1925.053	292.4207
MAM Dumped	1928.537	291.7428
MMM	1923.268	300.8768
MMM Dumped	1928.128	293.2297

O modelo com menor AICc e, portanto, o modelo com melhor desempenho comparativo, para o modelo não transformado é o “MMM”, em que apresenta componentes multiplicativos para previsões de erros, tendência e sazonalidade. Já para o modelo com transformação de Box-Cox, o modelo com menor AICc é o “MAM” com *dumped*.

O modelo selecionado sem transformação apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}\mu_t &= l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m} \\ l_t &= l_{t-1}b_{t-1} + \frac{\alpha\epsilon_t}{s_{t-m}} \\ b_t &= b_{t-1} + \frac{\beta\epsilon_t}{s_{t-m}l_{t-1}} \\ s_t &= s_{t-m} + \frac{\gamma\epsilon_t}{l_{t-1}b_{t-1}}\end{aligned}$$

Enquanto o modelo selecionado para o conjunto de dados transformados por Box-Cox tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}\mu_t &= (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m} \\ l_t &= (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\epsilon_t) \\ b_t &= \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1})\epsilon_t \\ s_t &= s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)\end{aligned}$$

A decomposição do modelo ETS “MMM” e do modelo ETS “MAM com Dumped” e transformação de Box-Cox são ilustrados abaixo.

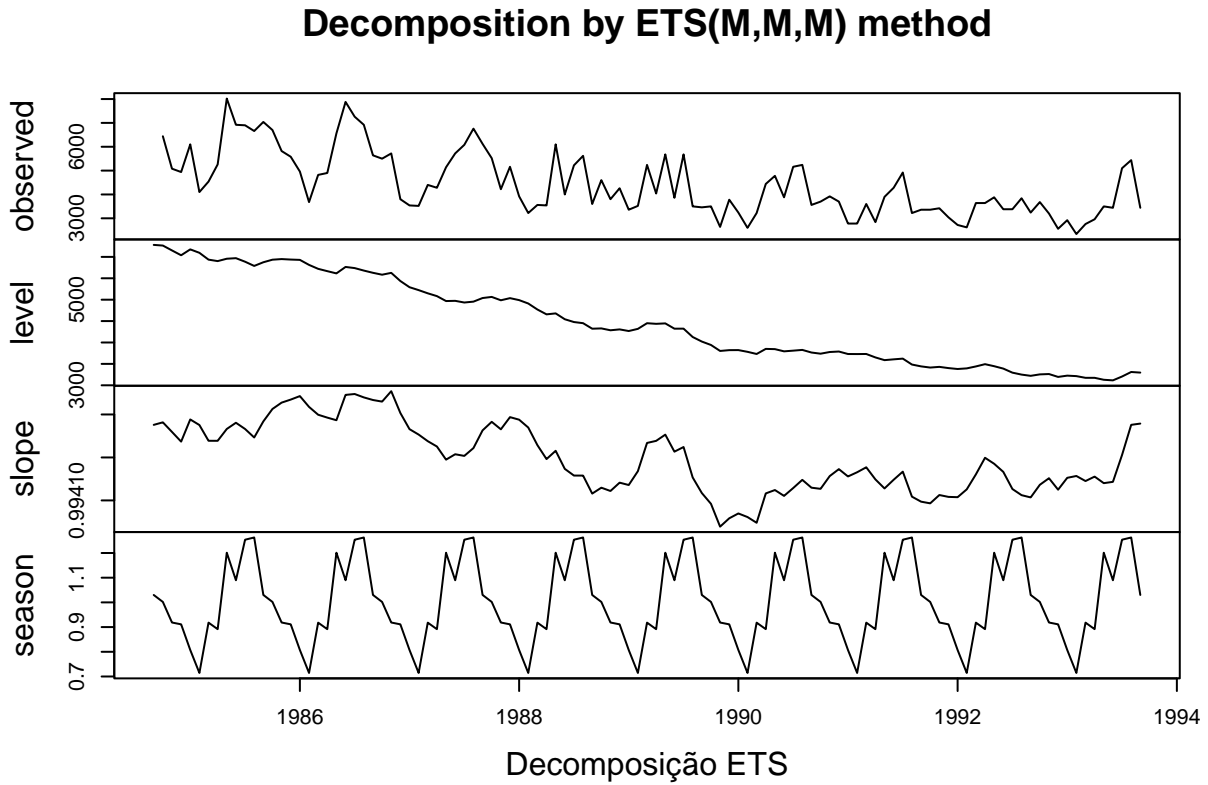


Figure 7: Decomposição ETS



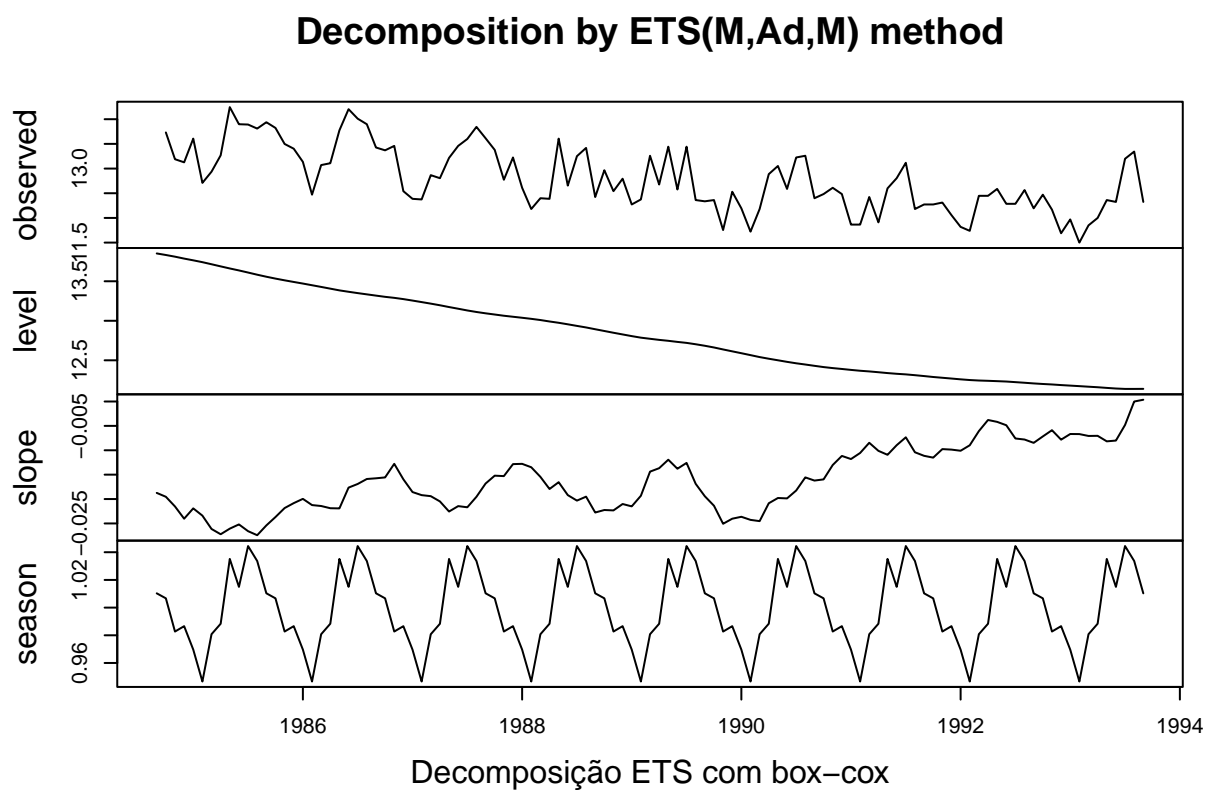


Figure 8: Decomposição ETS

## Resíduos

Os resíduos do modelo ETS sem transformação selecionado são ilustrados na figura a seguir:

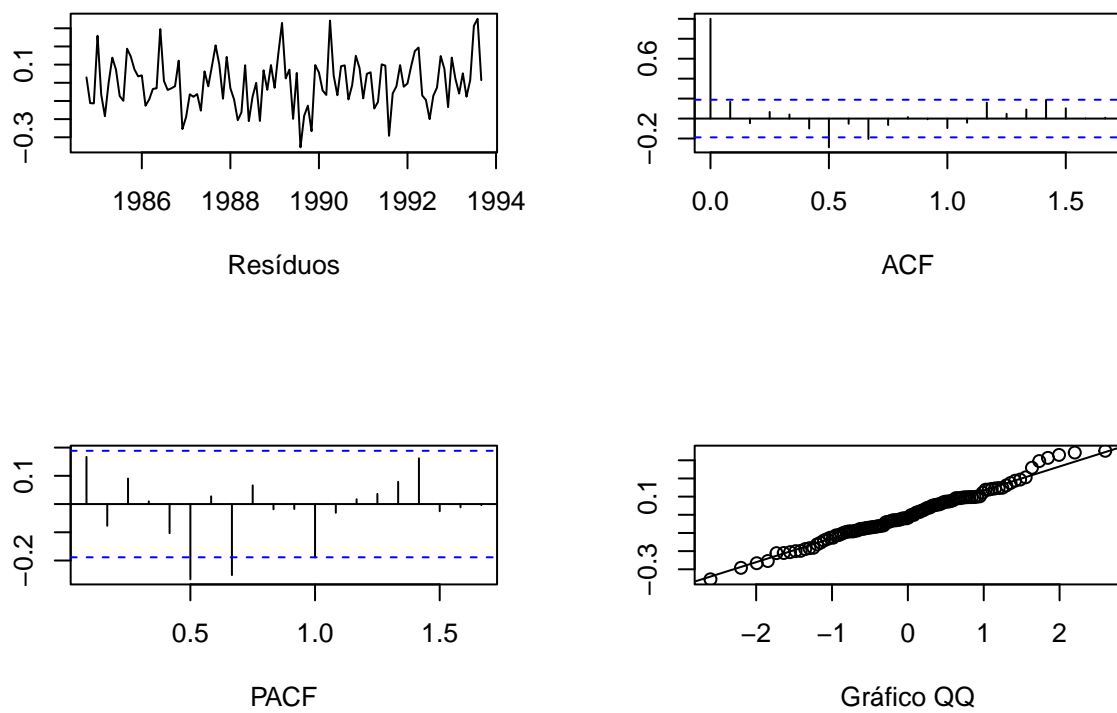


Figure 9: Análise de Resíduos do ETS

Enquanto os gráficos para o modelo ETS selecionado usando transformação de Box-Cox são ilustrados abaixo:

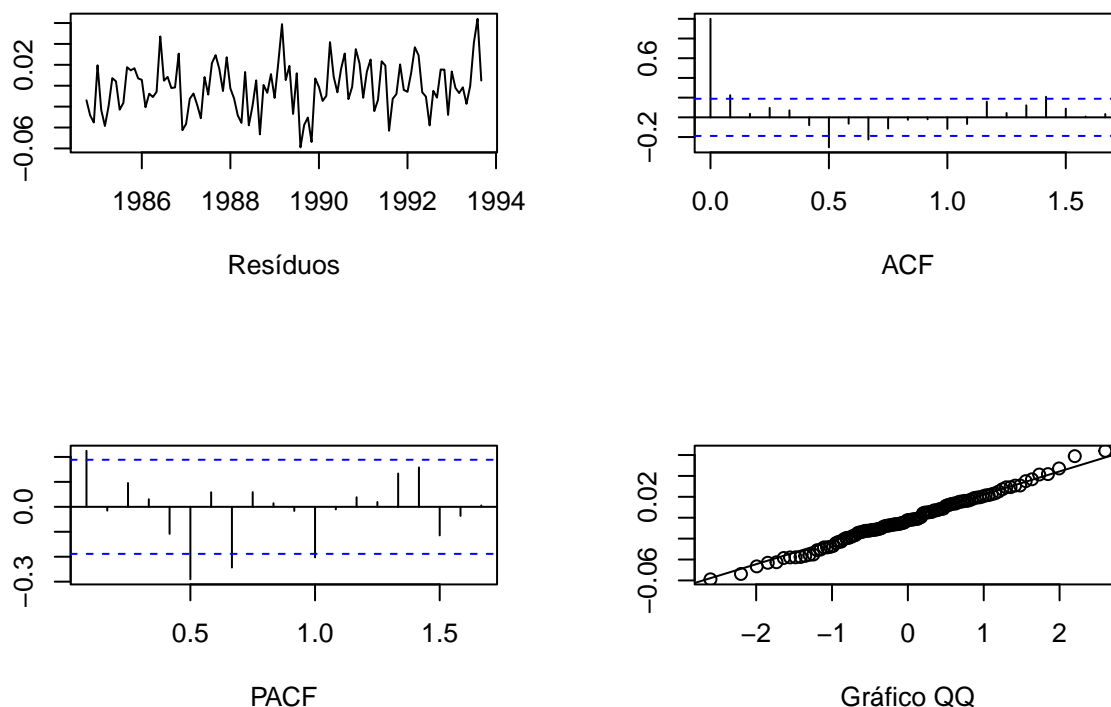


Figure 10: Análise de Resíduos do ETS do modelo com Box-Cox

Observa-se que os resíduos parecem comportar-se de maneira aleatória, com distribuição normal e sem autocorrelações importantes entre diferentes intervalos. Os testes formais encontram-se na tabela abaixo, a exemplo do anteriormente realizado:

Teste	MMM sem dumped	p-valor	MAM com dumped Box-Cox	p-valor
KPSS	0.12301	0.1	0.2145	0.1
Ljung-Box	25.522	0.038	41.505	0.003
Shapiro-Wilk	0.98751	0.416	0.99443	0.944

Os resultados acima apresentados sugerem que os resíduos do modelo são estacionários, apresentam distribuição normal, entretanto, é possível a rejeição da hipótese nula de independência em ambos os casos.

## Estudo de desempenho preditivo por janela deslizante

Considerante os dois modelos ARIMA e os dois modelos ETS anteriormente escolhidos, será realizado um estudo de desempenho preditivo por janela deslizante para a série M3 com ID 1686 com conjunto de treino consistindo nos últimos 14 períodos e considerando um horizonte preditivo de até 5 meses a frente. Para tal será utilizado a função `tsCV`, que calcula os erros de previsão obtidos aplicando a função de previsão a subconjuntos da série temporal, conforme ilustrado na figura abaixo. Os modelos utilizados para previsão são aqueles apresentados anteriormente: ARIMA, ARIMA com `boxcox`, ETS e ETS com `box-cox`.

Passo 1		n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2	3	4	5		
Passo 2			n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2	3	4	5	
Passo 3				n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2	3	4	5
...					n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2	3	4
...						n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2	3
...							n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1	2
...								n-14	n-13	n-12	n-11	...	n-2	n-1	n	1

Figure 11: Janelas deslizantes

Para comparação dos resultados, foi calculado o erro absoluto médio (MAE) para horizonte de previsão.

Table 6: Erro absoluto médio

	ARIMA	ARIMA Box-Cox	ETS	ETS Box-Cox
h=1	618.7394	650.2503	607.9737	607.6476
h=2	682.1576	655.0000	689.5125	735.5779
h=3	721.7444	676.1780	694.9449	701.0805
h=4	897.2101	852.5248	906.0159	869.5573
h=5	1269.6113	1336.3204	1257.1669	1213.1535

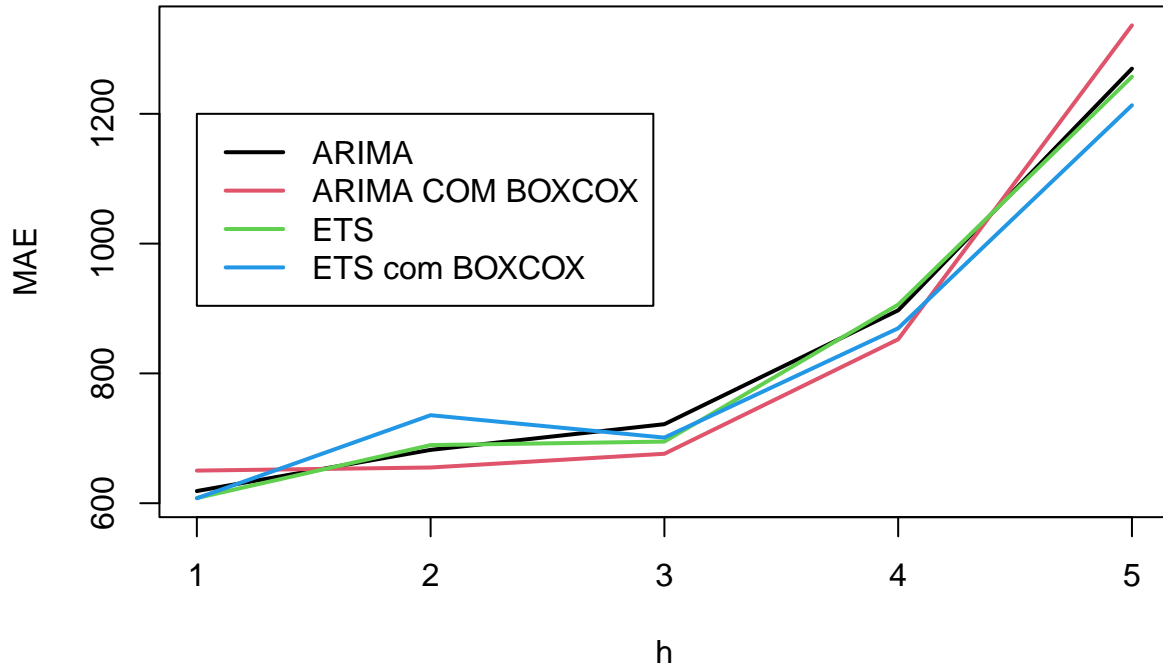


Figure 12: Erros absolutos médios a cada horizonte de previsão

## Resultados

Comparando os 4 modelos estimados anteriormente com os seguintes modelos: Auto Arima, SES, Holt, Auto ETS, STLTF, Bats, Tbats, temos os seguintes da métrica MAE, no conjunto de testes:

Table 7: Comparação do Erro absoluto médio com todos os modelos

Modelos	MAE
Arima	297.242
Arima com boxcox	337.326
ETS	271.07
ETS com boxcox	294.545
Auto Arima	692.388
SES	1096.291
Holt	1051.287
Auto ETS	444.531
STLTF	429.104
Bats	397.695
Tbats	418.812

O modelo ETS(M,M,M) foi o que obteve o menor MAE no conjunto de teste, apresentando um valor igual: 271.07.