Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Data:22/05/2020 Profa:Marina (sala 206 - IME/UFG)

1 As Funções do tipo $ax + b$

Equação do primeiro grau: $ax + b = 0, a \neq 0$ cujo gráfico é uma reta.

Retas Paralelas e Perpendiculares:

1. Dadas as equações das retas $r : ax_1 + by_1 = c_1$ e $s : ax_2 + by_2 = c_2$, dizemos que as retas são paralelas se os seus coeficientes angulares forem iguais. Neste caso, os coeficientes são obtidos de $ax_1 + by_1 = c$ e $ax_2 + by_2 = c_2$ tal que $y_1 = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x_1$ e $y_2 = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2}x_2$. Logo, o coeficiente angular é o coeficiente que multiplica a variável x_1 para a primeira equação e x_2 para a segunda de maneira que as retas r e s serão paralelas se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Por exemplo, as retas $r : y_1 = 2x_1 + 3$ e $s : -2x_2 + y_2 = 5$ são paralelas, pois temos $y_1 = 2x_1 + 3$ e $y_2 = 2x_2 + 5$ de maneira que os coeficientes angulares s!ão iguais. Agora, se $r : y_1 = 2x_1 + 3$ e $s : 2x_2 + y_2 = 5$ então as retas não são paralelas, pois $y_1 = 2x_1 + 3$ e $y_2 = -2x_2 + 5$ tendo coeficientes angulares 2 e -2.

2. Dadas as equações das retas $r : ax_1 + by_1 = c_1$ e $s : ax_2 + by_2 = c_2$, dizemos que as retas são perpendiculares se o produto dos seus coeficientes angulares for igual a -1(veja video em `https://www.youtube.com/watch?v=qFTUaR1x7kQ`. As retas r e s são perpendiculares se $\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} = -1$. Por exemplo, as retas $r : y_1 = 2x_1 + 3$ e $s : -2x_2 + y_2 = 5$ não são perpendiculares, pois temos $y_1 = 2x_1 + 3$ e $y_2 = 2x_2 + 5$ de maneira que o produto dos coeficientes angulares é $2(2) = 4 \neq -1$. Mas, Por exemplo, as retas $r : y_1 = 2x_1 + 3$ e $s : x_2 + 2y_2 = 5$ são paralelas, pois temos $y_1 = 2x_1 + 3$ e $y_2 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}$ de maneira que o produto dos coeficientes angulares é $2\frac{-1}{2} = -1$.

Função $ax + b$ ou função polinomial de primeira ordem: De uma maneira informal, podemos dizer que uma função é uma regra(que se repete conforme ela é definida). Neste caso, temos "dado um valor$x$ multiplique-o por a e some uma quantidade c". Por exemplo, o valor do sitpass é de $R\$4,80$, se são necessários 40 passagens por mês para ir as aulas na UFG, qual é o custo mensal em transporte público? Neste caso, podemos considerar a função $f(x) = ax$, onde $a = R\$4,80$ o valor fixo e neste caso $x = 40$, então $f(40) = 4,80 \times 20 = 96$. O nome (a letra que utilizamos) que damos a regra pode variar. Em geral, substituimos $f(x)$ por y por causa do gráfico que queremos esboçar. Neste caso, temos que observar dois conjuntos importantes:

1. Domínio: "o conjunto dos valores que podemos utilizar na regra que foi definida". Neste caso, o valor que varia em nossa regra, por exemplo, se $f(x) = ax + c$, quer dizer que x é o único valor que irá se modificar quando você está efetuando os seus cálculos, aqui $f(2) = 2a + c$. Se a lei é escrita como $y(x) = ax + b$, o valor que varia é ainda x e $y(2) = 2a + c$. O valor que pode variar nas regras é chamado de variável independente, determinando um conjunto, chamado domínio da função, em que podemos utilizar a regra. A pergunta é: quais são os números reais em que podemos multiplicar por a e somar c? Todos. Então neste caso escrevemos $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Em geral quando está claro, qual é a variável independente, costumamos escrever f em vez de $f(x)$ e y em vez de $y(x)$.

2. Imagem: "o conjunto de valores obtidos após aplicarmos todos os valores do domínio". Aqui, é importante calcular somente nos valores do domínio. Então, o conjunto imagem cuja regra nós chamamos de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | x \in Dom(f(x))\}$. A pergun ta é por que, escrevemos $Im(f)$ e depois, escrevemos os números reais y ?? O que você acha?

3. O gráfico de uma função real é quando consideramos um par (x, y), onde a primeira coordenada é um elemento do domínio e o segundo o valor da imagem obtida através do valor do domínio aplicado na regra, isto é, o gráfico é $Gr(f) = \{(x, y) | x \in Dom(f)\}$. Aqui, $y = f$.

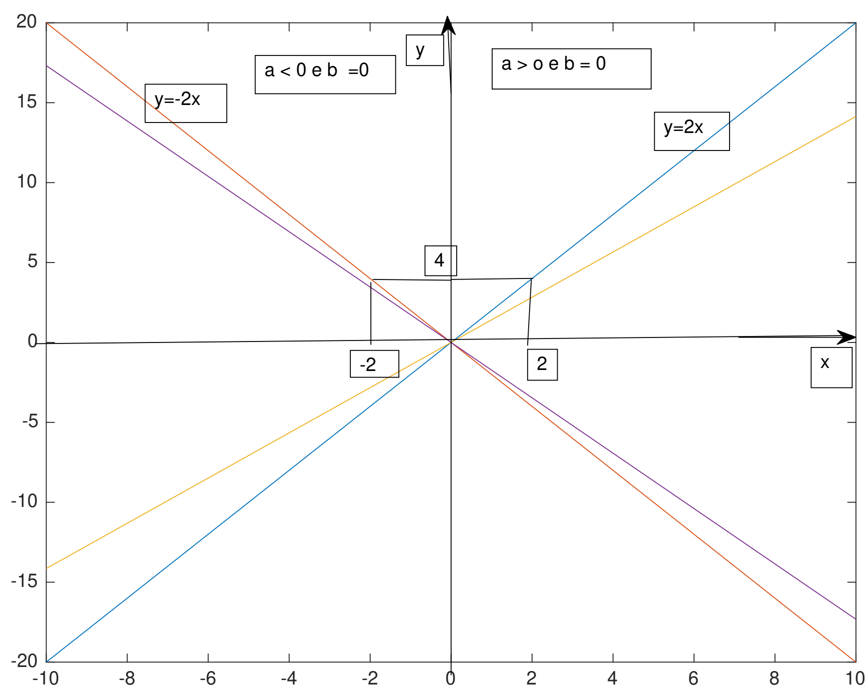
Definição: Uma função $f(x)$ é uma regra que associa a cada elemento do conjunto domínio um único elemento do conjunto denominado contradomínio. Então, dado $x \in Dom(f)$ existe um único $y = f(x)$ que podemos associar através da função f.

observação: Neste caso, matematicamente escrevemos $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$, onde $A = Dom(f)$ e B o contradomínio. Se conseguirmos descrever com exatidão todos os elementos de B podemos trocar o conjunto B pelo da imagem. Em geral, dado $x \in Dom(f)$ existe um único $y = f(x)$ na imagem, isto é, se $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$ então $x_1 \neq x_2$. Por exemplo, $f(x) = c$ onde c é um número real é função pois dado qualquer número real, o valor da imagem é único, isto é, $Im(f) = \{c\}$. Mas, $x = c$ não é pois para um único valor do domínio temos infinitos valores diferentes para a imagem, isto é, $y_1 \neq y_2$ para o mesmo valor de x e aqui temos que $x = c$ é uma equação cujo gráfico é uma reta.

Considerando, os conceitos anteriores, para $f(x) = ax + b$, temos:

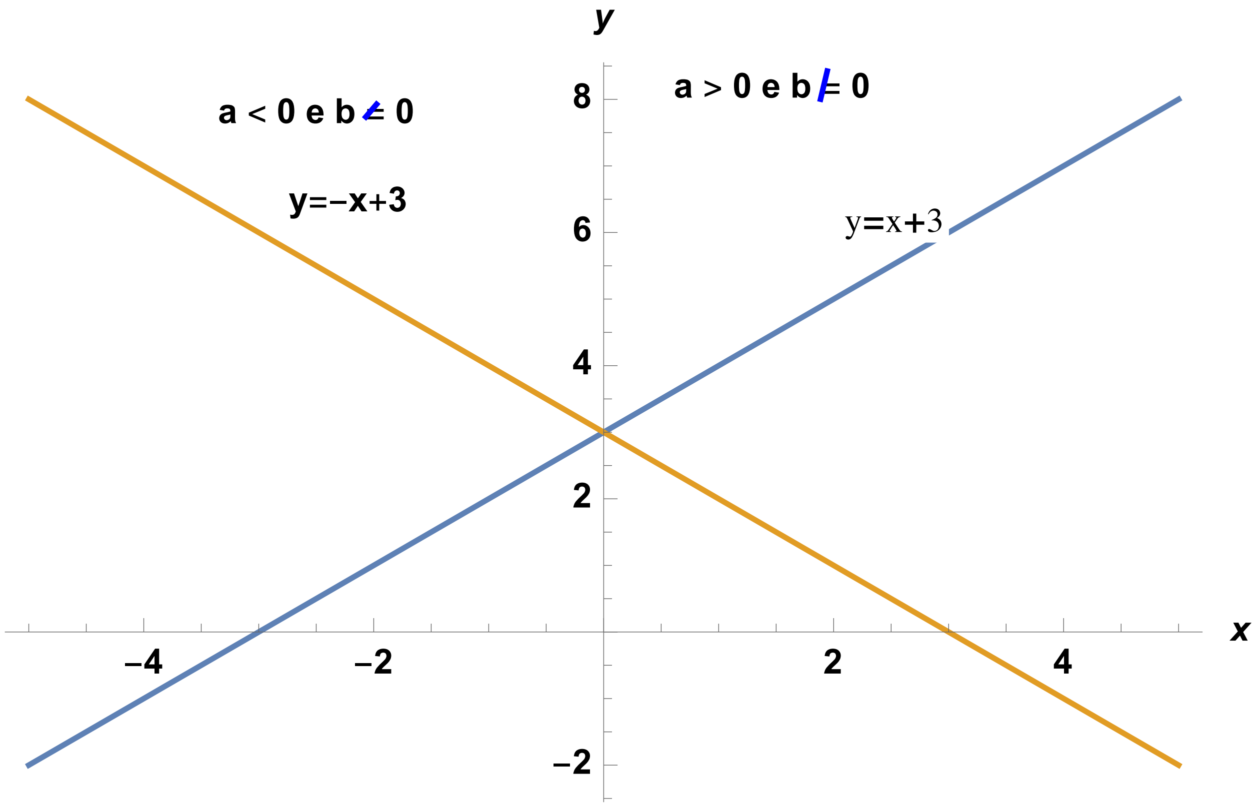
1. se $b = 0$ e $f(x)$ for trocado por uma constante, temos somente uma equação cujo gráfico é uma reta e não uma função;

2. se $f(x) \neq$ constante, então para $b = 0$ temos que o gráfico ou é uma reta passando na origem (para $x = 0$, o valor da imagem é $y = f(0) = 0$) com **inclinação para a direita** (a constante que multiplica o valor da variável x, neste caso a, é positiva) ou uma reta passando na origem com inclinação para a esquerda (a constante que multiplica o valor da variável x, neste caso a**, é negativa**) . Por exemplo, $f(x) = 2x$ o gráfico é uma reta com inclinação para a direita enquanto $f(x) = -2x$ é uma reta com inclinação para a



esquerda.

3. se $f(x) \neq$ constante, então para $b \neq 0$ temos que o gráfico ou é uma reta que não passa na origem, pois $f(0) = b \neq 0$, com inclinação para a direita (a constante que multiplica o valor da variável x, neste caso a, é positiva) ou uma reta não passando na origem com inclinação para a esquerda (a constante que multiplica o valor da variável x, neste caso a, é negativa) . Por exemplo, $f(x) = x + 1$ o gráfico é uma reta com inclinação para a direita enquanto $f(x) = -x + 1$ é uma reta com inclinação para a esquerda.



Exercícios

1. Dada os pontos A e B, obtenha uma equação da reta que passa por esses dois pontos.
   (a) $A(1,2)$ e $B(3,2)$. Resposta:$y = 2$;
   (b) $A(-3,-4)$ e $B(1,2)$. Resposta:$y = \dfrac{3}{2}(x+3) - 4$.
   (c)$A(0,-2)$ e $B(-5,1)$. Resposta:$y = -\dfrac{3}{5}x - 2$.

2. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $A(1,5)$ e seja paralela a reta $r : 2x + 4y = -1$. Resposta: $y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + 5$..

3. Obtenha a equação da reta perpendicular a reta $s : y = 7x - 13$.

4. Dada as funções da forma $ax + b$ obtenha o conjunto domínio, o conjunto imagem e esboce o gráfico.
   (a)$f(x) = 3x - 1$ (b) $y = -\sqrt{2}x - 7$; (c)$y = \pi$; (d) $f(x) = \dfrac{4}{3}x$.

Observemos que:

1. Quando estamos calculando os valores na regra da função $ax + b$ onde $a > 0$, se aumentarmos o valor da variável x aumentamos também o valor da imagem, neste caso, escrevemos: dados dois valores no domínio $x_1 < x_2$ temos $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$, então a função f é crescente.

2. Quando estamos calculando os valores na regra da função $ax + b$ onde $a < 0$, se aumentarmos o valor da variável x diminuímos o valor da imagem, neste caso, escrevemos: dados dois valores no domínio $x_1 < x_2$ temos $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, então a função f é decrescente.

3. Se para todo $x_1 \neq x_2$ no domínio da função temos $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$, então dizemos que a função injetora. Note que se $x_1 \neq x_2$, então $ax_1 \neq ax_2$ e $ax_1 + b \neq ax_2 + b$, isto é, $f(x) = ax + b$ é uma função injetora. Mas $y = 3$ não é pois para qualquer valor de x, y não muda de valor.

4. a função $f : A \to B$ é sobrejetora se para todo $y \in Im(f)$, existe $x \in A = Dom(f)$ tal que $y = f(x)$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é sobrejetora, pois $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

5. Se a função for injetora e sobrejetora, dizemos que a função admite invresa, ou ainda, que é inversível.