Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Data:13/03/2020 Profa:Marina (sala 206 - IME/UFG)

1 Equações e Funções Quadráticas

Equação do Segundo Grau em $\mathbb{R}$: é uma igualdade do tipo

$$ax^2 + b.x + c = 0 \tag{1}$$

, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Note que $a \neq 0$ pois caso contrário não teríamos uma equação do segundo grau ou de segunda ordem.

1. Ao obtermos o valor de x para (1), queremos obter o(s) valor(es) de x para os quais a igualdade é satisfeita. Por exemplo, dada a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ é solução, pois $(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$;

2. Uma equação do segundo grau não necessariamente precisa ter $b \neq 0$ e $c \neq 0$, poderíamos ter um ou ambos iguais a zero. Mas se ambos forem zeros, a única solução possível é $x = 0$;

3. Para obtermos o valor de x podemos obtê-la utilizando a igualdade $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$;

4. Outra forma de obtê-la é utilizar a ideia de completamento de quadrados que tem um papel fundamental na resolução de vários exercícios de Geometria Analítica, Funções de Variáveis Reais e Complexas e em outras que podem ser além do nível de graduação;

   (a) Se $b = 0$ em (1) não é necessário a utilização desta técnica, pois neste caso temos $ax^2 + c = 0$ tal que se $c < 0$ e $a > 0$ ou $c > 0$ e $a < 0$ teremos uma solução real, pois $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a}, a \neq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. Por exemplo, $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{8}{2} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

   (b) Se $c = 0$, temos $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) = 0 \Rightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] = 0$. Note que primeiro colocamos o coeficiente a que multiplica x^2 em evidência. **Segundo:** escrevemos um quadrado e subtraimos uma quantidade que tem uma relação com o coeficiente de x de tal maneira que no quadrado surge a metade do valor, mas quando fazemos isto temos $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = x(x) + x\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b}{2a}\dfrac{b}{2a} = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$. Note que apareceu a quantidade $\dfrac{b^2}{4a^2}$ que não tinhamos anteriormente, então para voltarmos a equação inicial temos que subtrair a mesma quantidade, neste caso $\dfrac{b^2}{4a^2}$.

   (c) Exemplo do item anterior, $2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 + \dfrac{6}{2}x\right) = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 + 3x\right) = 0 \Rightarrow 2\left[\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}\right] = 0$, ou ainda, $2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\dfrac{9}{4} = 0 \Rightarrow 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2} = 0$;

   (d) Se $0 \neq b, c$ então a ideia é muito parecida com o caso anterior $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right] = 0$. Note que primeiro colocamos o coeficiente a que multiplica x^2 em evidência. **Segundo:** escrevemos um quadrado e subtraimos uma quantidade que tem uma relação com o coeficiente de x de tal maneira que no quadrado surge a metade do valor, mas quando fazemos isto temos $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = x(x) + x\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b}{2a}\dfrac{b}{2a} = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$. Note que apareceu a quantidade $\dfrac{b^2}{4a^2}$ que não tinhamos anteriormente, então para voltarmos a equação inicial temos que subtrair a mesma quantidade, neste caso $\dfrac{b^2}{4a^2}$.

(e) Exemplo do caso anterior, $-3x^2+9x+12=0 \Rightarrow -3\left(x^2+\dfrac{9}{-3}x+\dfrac{12}{-3}\right)=0 \Rightarrow -3(x^2-3x-4)=0 \Rightarrow -3\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}-4\right]=0$, ou ainda, $-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}+12=0$. Note que $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=x(x)-x\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=x^2-3x+\dfrac{9}{4}$.

5. Toda equação quadrática pode ser escrito como produto de fatores.
   (a) $a=1$ em (1), então $x^2+bx+c=0 \Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação (1). Se $x_2=x_1$, então $(x-x_1)^2=0$. Por exemplo, $x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0$ e $x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$.
   (b) $a \neq 1$ em (1), então $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)=0 \Rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$, onde primeiramente coloca-se o coeficiente de x^2 em evidência e x_1, x_2 são as raízes de (1).
   (c) Por exemplo, $2x^2-6x+4=0 \Rightarrow 2(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow 2(x-1)(x-2)=0$.
6. As ideias 5(a) e 5(b) podem ser generalizadas para equações de ordem maior que 2.

Exercícios:

1. Dada a equação do segundo grau, caso exista em $\mathbb{R}$, obtenha a solução para as mesmas.
   (a)$x^2-6x+9=0$; (b)$x^2+6x+9=0$; (c)$x^2-6x=0$; (d)$x^2-9=0$; (e)$x^2+9=0$.
2. Dada a equação escreva-o na forma $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ ou $(x-x_1)(x-x_2)=0$ caso seja possível. (a)$x^2-6x+9=0$; (b)$x^2+6x+9=0$; (c)$x^2-6x=0$; (d)$x^2-9=0$; (e)$x^2+9=0$. (f)$3x^2-18x+27=0$.
3. Dada a equação escreva-o na forma $(x-b/2a)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+c=0$ ou $(x+b/2a)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+c=0$ ou $a\left[(x-b/2a)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+c\right]=0$ ou $a\left[(x+b/2a)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+c\right]=0$. Note que podemos ter $c=0$. (a)$x^2-6x+9=0$; (b)$x^2+6x+9=0$; (c)$x^2-6x=0$; (d)$x^2-9=0$; (e)$x^2+9=0$. (f)$3x^2-18x+27=0$.
4. Desenvolva as expressões abaixo para escrevê-los na forma $ax^2+bx+c=0$
   a) $(x-3)(x-3)=0$; (b)$(x+3)(x+3)=0$; (c)$(x-3)(x-3)-9=0$; (d) $(x+3)(x+3)-9=0$; (e)$3(x-3)(x-3)=0$.

Caso notem alguma expressão ou resultado que não concordam me mandem e-mail, pois estou fazendo a conferência na tela e copiar e colar nos trazem algumas inconsistências.