Trabalho Final de Mecânica dos Sólidos I-A

Hugo Matheus Vaz de Araújo e João Henrique Lima de Vasconcelos

Memorial de Cálculo de Tensões

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
4 DE MAIO DE 2021

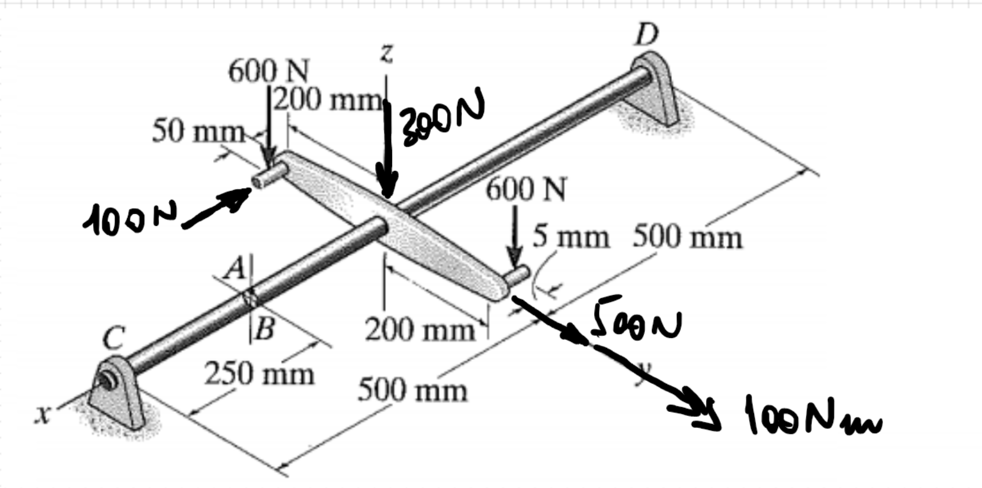
Índice

Resumo

O objetivo deste trabalho é demonstrar os conteúdos aprendidos na disciplina Mecânica dos Sólidos I-A analisando o estado de tensões e os coeficientes de segurança de uma estrutura.

1 O problema

O eixo CD é circular maciço e tem diâmetro de 10 mm. Determinar o estado de tensões nos pontos A e B e os coeficientes de segurança segundo a TMED, em ambos pontos, sabendo que o eixo é feito de aço ASTM A36 (σ_{esc}=250 MPa). O mancal em C restringe todas translações e o mancal em D apenas as translações em z e y.



2 Cálculo das reações de apoio

O primeiro passo para resolver o problema será calcular as reações de apoio. Para calculá-las foi montado o diagrama de corpo livre (DCL) da estrutura como mostra a figura 3.

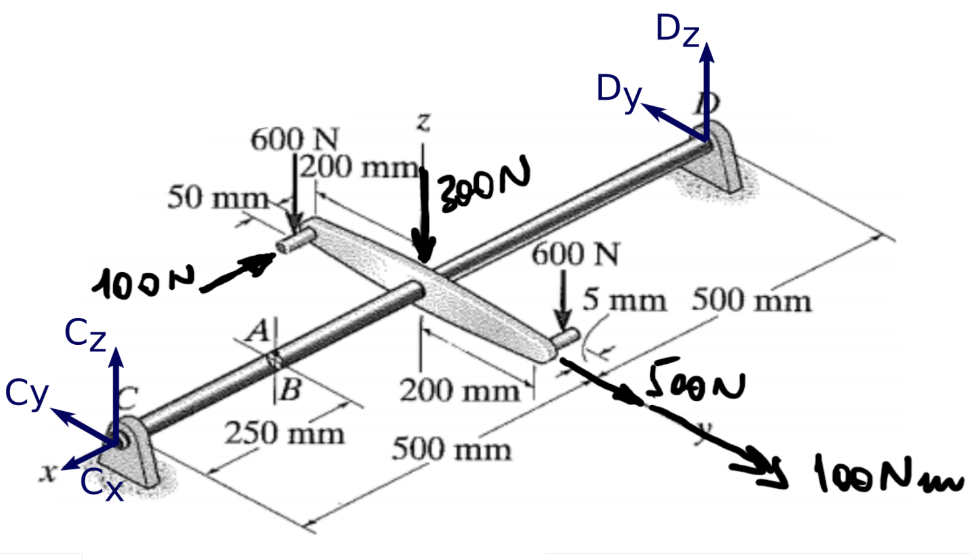


Figura 1: Diagrama de corpo livre das reações de apoio

A estrutura está estática logo, é possível equacionar seu equilíbrio como mostra a equação 1.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_x = 100 \\ C_y + D_y = 500 \\ C_z + D_z = 600 + 300 + 600 = 1500 \\ 600 \cdot 0,2 = 600 \cdot 0,2 \\ C_z \cdot 0,5 - D_z \cdot 0,5 = 600 \cdot 0,05 - 600 \cdot 0,005 + 100 = 127 \\ C_y \cdot 0,5 - D_y \cdot 0,5 = -100 \cdot 0,2 = -20 \end{cases} \tag{1}$$

Há 4 equações e 4 variáveis, assim é possível resolver o sistema de forma matricial como mostra a equação 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y \\ D_y \\ C_z \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1500 \\ 127 \\ -20 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Resolvendo o sistema tem-se os valores das reações de apoio como mostra a equação 3.

$$\begin{aligned} C_x &= 100 \text{ N} \\ C_y &= 270 \text{ N} \\ D_y &= 230 \text{ N} \\ C_z &= 877 \text{ N} \\ D_z &= 623 \text{ N} \end{aligned} \tag{3}$$

3 Cálculo dos esforços internos

O próximo passo para resolver o problema será calcular os esforços internos na seção que contem os pontos A e B, denominada seção G. No trabalho utilizaremos a convenção demonstrada na figura 2.

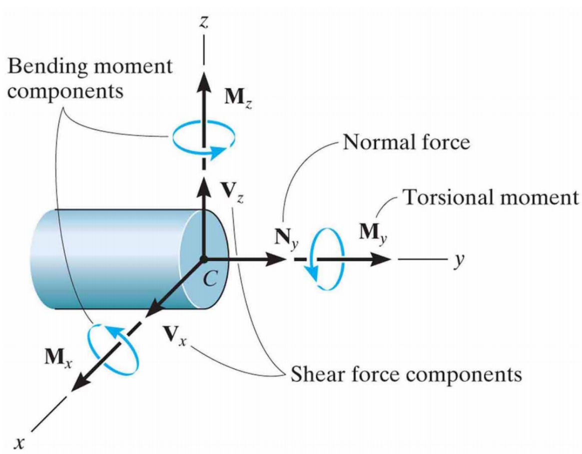


Figura 2: Convenção de esforços internos[3]

Para o cálculos dos esforços na seção G, montou-se o diagrama de corpo livre da estrutura como mostra a figura 3.

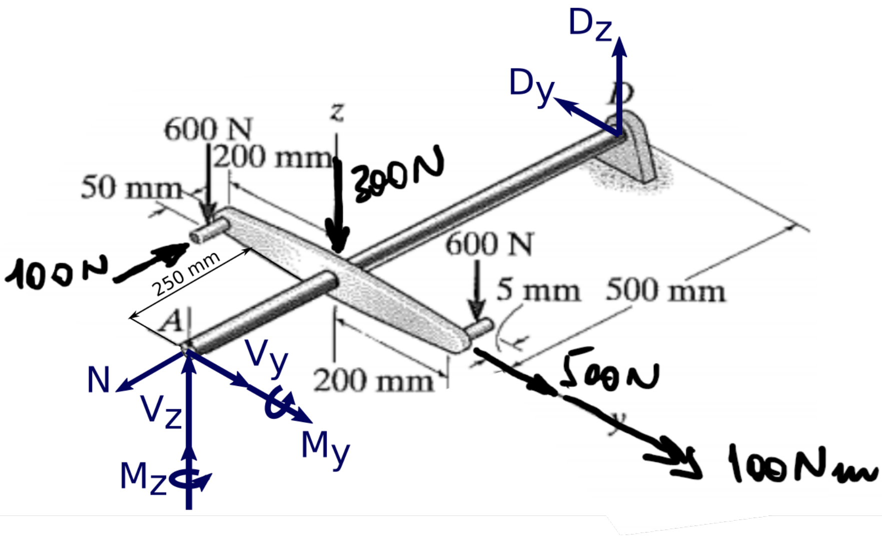


Figura 3: Diagrama de corpo livre dos esforços internos em G

A estrutura está estática logo, é possível equacionar seu equilíbrio como mostra 4.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} N = 100 \\ V_y = D_y - 500 \\ V_z = 600 + 300 + 600 - Dz \\ M_x = 600 \cdot 0,2 - 600 \cdot 0,2 \\ M_y = V_z \cdot 0,25 + 600(0,005 - 0,05) - D_z \cdot 0,5 - 100 \\ M_z = -V_y \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,2 - D_y \cdot 0,5 \end{cases} \tag{4}$$

Deste modo, substituindo os valores já obtidos, tem-se os valores dos esforços internos em G como mostra a equação 5.

$$\begin{cases} N = 100 \\ V_y = 230 - 500 \\ V_z = 1500 - 623 \\ M_x = 0 \\ M_y = 219,25 - 27 - 311,5 - 100 \\ M_z = 57,5 + 20 - 135 \end{cases} \iff \begin{matrix} N = 100 \text{ N} \\ V_y = \text{-230 N} \\ V_z = 877 \text{ N} \\ M_x = 0 \text{ N} \\ M_y = \text{-219,25 N} \\ M_z = \text{-57,5 N} \end{matrix} \tag{5}$$

4 Cálculo das Tensões

Segundo a Teoria da Máxima Energia de Distorção (TMED) é possível reduzir as tensões nos pontos A e B a uma única tensão equivalente dada pela equação 6.[2]

$$\sigma_\text{v} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + 3\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)} \tag{6}$$

Para obter as tensões demandadas pela equação 6 o problema será dividido em obtenção das tensões normais e obtenção das tensões cisalhantes.

4.1 Cálculo dos momentos de inércia

Para o cálculo das tensões na seção circular, faz-se necessário o cálculo do seu momento de inércia como mostra a equação 7.[1]

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (10 \cdot 10^{-3})^4}{64} = 4,9087385 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4 \tag{7}$$

É também necessário o cálculo do momento polar de inércia (J) como exposto na equação 8.[1]

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 2I = 9,817477 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4 \tag{8}$$

4.2 Tensão Normal

A tensão normal (σ_{11} ou σ_{xx}) terá componentes fruto de N, M_y e M_z como mostra a figura 4.

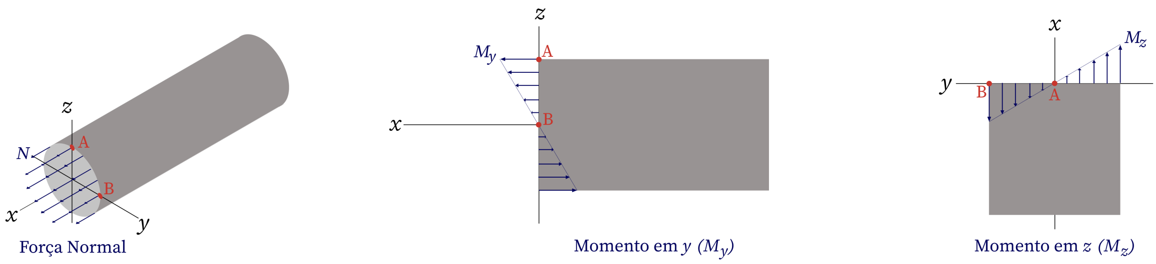


Figura 4: Diagrama das componentes das tensão normal

4.2.1 Tensão normal devido a N

A componente da tensão normal devido a N pode ser dada pela equação 9,[1] sendo A a área da seção transversal. Neste caso, a tensão em A será igual a tensão em B.

$$\sigma_{xx_N} = \frac{N}{A} \tag{9}$$

Deste modo, pode ser obtido os componentes da tensão normal devido a N nos dois pontos como mostra a equação 10.

$$\sigma_{xx_{N_\mathrm{A}}} = \sigma_{xx_{N_\mathrm{B}}} = \frac{100}{\pi \cdot (5)^2} = 1,273240\ \mathrm{MPa} \tag{10}$$

4.2.2 Tensão normal devido a M_y

A componente da tensão normal devido a M_y pode ser dada pela equação 11,[1] sendo z a distância do ponto em z a linha neutra.

$$\sigma_{xx_{M_y}} = \frac{-M_y \cdot z}{I} \tag{11}$$

Neste caso, a tensão em B será zero, pois este se encontra na linha neutra. Assim, pode se obter os componentes da tensão normal devido a M_y nos dois pontos como mostra a equação 12.

$$\sigma_{xx_{M_{y\,\mathrm{A}}}} = \frac{-(-219,25)\cdot(5\cdot 10^{-3})}{4,9087385\cdot 10^{-10}} = 2233,262161 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{xx_{M_{y\,\mathrm{B}}}} = 0 \text{ MPa} \tag{12}$$

4.2.3 Tensão normal devido a M_z

A componente da tensão normal devido a M_z pode ser dada pela equação 13,[1] sendo y a distância do ponto em y até a linha neutra.

$$\sigma_{xx_{M_z}} = \frac{-M_z\cdot y}{I} \tag{13}$$

Neste caso, a tensão em A será zero, pois este se encontra na linha neutra. Assim, pode se obter os componentes da tensão normal devido a M_y nos dois pontos como mostra a equação 14.

$$\sigma_{xx_{M_{z\,\mathrm{A}}}} = 0 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{xx_{M_{z\,\mathrm{B}}}} = \frac{-(-57,5)\cdot(5\cdot 10^{-3})}{4,9087385\cdot 10^{-10}} = 585,690191 \text{ MPa} \tag{14}$$

4.2.4 Tensão normal equivalente

Com todos os componentes é possível calcular a tensão normal equivalente dada pela equação 15.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{xx_N} + \sigma_{xx_{M_y}} + \sigma_{xx_{M_y}}\\ \sigma_{xx_A} &= 1,2732395 + 2233,262161 + 0 = 2234,535401 \text{ MPa}\\ \sigma_{xx_B} &= 1,273240 + 0 + 585,690191 = 586,963430 \text{ MPa}\end{aligned} \tag{15}$$

4.3 Cálculo das tensões cisalhantes

As tensões cisalhantes não nulas (σ_{12} e σ_{31}, ou ainda, τ_{xy} e τ_{xz}) terão componentes fruto de M_x, V_y e V_z como mostra a figura 5.

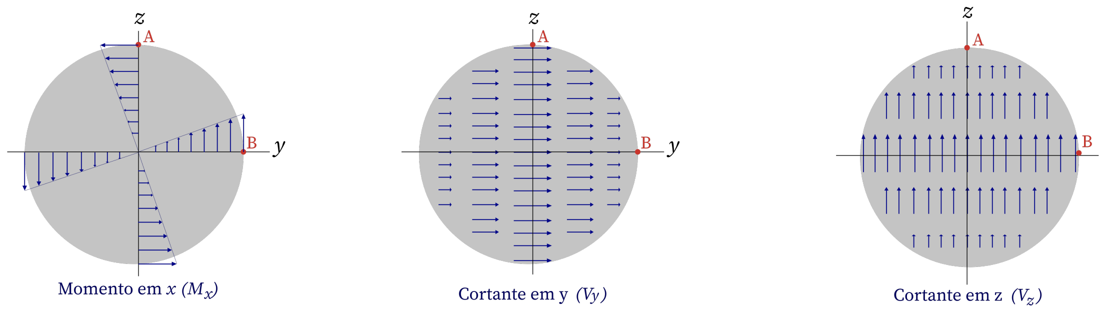


Figura 5: Diagrama das componentes das tensões cisalhantes

4.3.1 Tensão cisalhante devido a M_x

A tensão torsora devido a M_x pode ser obtida via a equação 16,[1] sendo R o raio da seção.

$$\tau_{\text{torção}} = \frac{M_x \cdot R}{J} \tag{16}$$

M_x é nulo, logo, sua componente cisalhante também o será.

4.3.2 Tensão cisalhante devido a V_y

A tensão cisalhante devido a V_y (τ_{xy}) pode ser dada pela equação 17.[1] Sendo Q o momento estático de área, e t a espessura da seção transversal. Os valores de A' e $\bar{y}$ estão explicitados na figura 6.

$$\begin{gathered} \tau_{xy} = \frac{V_y \cdot Q}{I \cdot t} \\ Q = A' \cdot \bar{y} \end{gathered} \tag{17}$$

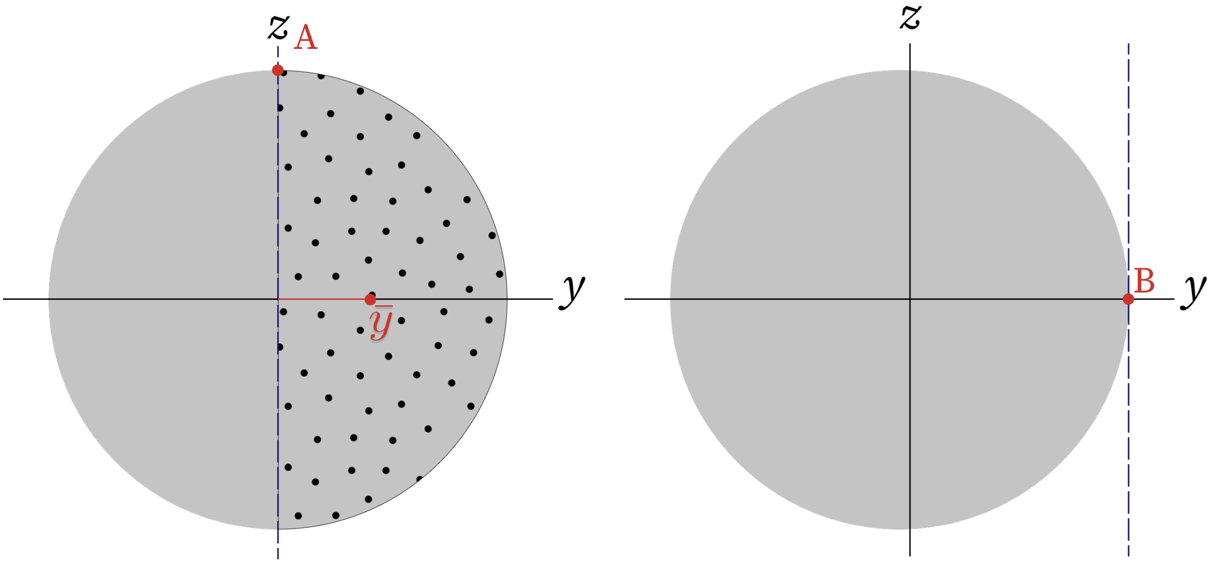


Figura 6: Diagrama de Q para os pontos A e B

A tensão em B será zero, pois seu A' será zero como mostra a figura 6. Já a área do semi-círculo de A e a distância $\bar{y}$ podem ser obtidas via a equação 18.[1]

$$A'_A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{4 \cdot r}{3\pi} \tag{18}$$

Assim, pode se obter os componentes da tensão normal devido a V_y nos dois pontos como mostra a equação 19.

$$\begin{gathered} \tau_{xy_{\text{A}}} = \frac{(-230) \cdot ((\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi}{2}) \cdot (\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3\pi}))}{(4,9087385 \cdot 10^{-10}) \cdot (10 \cdot 10^{-3})} = -3,904601 \text{ MPa} \\ \\ \tau_{xy_{\text{B}}} = 0 \text{ MPa} \end{gathered} \tag{19}$$

4.3.3 Tensão cisalhante devido a V_z

De modo análogo, a tensão cisalhante devido a V_z (τ_{xz}) pode ser dada pela equação 20.[1] Sendo novamente Q o momento estático de área, e t a espessura da seção transversal. Os valores de A' e $\bar{z}$ estão explicitados na figura 7.

$$\tau_{xy} = \frac{V_z \cdot Q}{I \cdot t} \qquad Q = A' \cdot \bar{z} \tag{20}$$

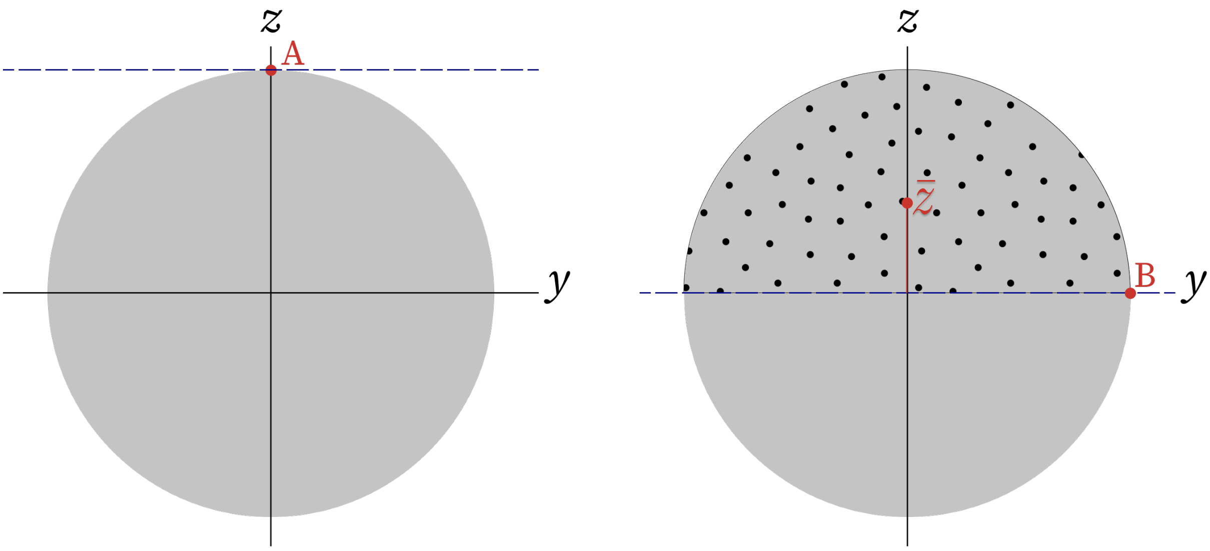


Figura 7: Diagrama de Q para os pontos A e B

A tensão em A será zero, pois seu A' será zero como mostra a figura 7. Já a área do semi-círculo de B e a distância $\bar{z}$ podem ser obtidas via a equação 21.[1]

$$A'_B = \frac{\pi \cdot r^2}{2}; \quad \bar{z} = \frac{4 \cdot r}{3\pi} \tag{21}$$

Assim, pode se obter os componentes da tensão normal devido a V_z nos dois pontos como mostra a equação 22.

$$\tau_{xz_\text{A}} = 0 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xz_\text{B}} = \frac{(877) \cdot ((\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi}{2}) \cdot (\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3\pi}))}{(4,9087385 \cdot 10^{-10}) \cdot (10 \cdot 10^{-3})} = 14,888414 \text{ MPa} \tag{22}$$

4.4 Cálculo das tensões equivalentes

Iniciar-se-á o cálculo das tensões equivalentes sumariando os valores até então em A e B como mostram as equações 23 e 24 respectivamente.

$$A : \begin{cases} \sigma_A = 2234{,}535401 \text{ MPa} \\ \tau_{xy_A} = \text{-}3{,}904601 \text{ MPa} \\ \tau_{xz_A} = 0{,}0 \text{ MPa} \end{cases} \tag{23}$$

$$B : \begin{cases} \sigma_B = 586{,}963430 \text{ MPa} \\ \tau_{xy_A} = 0{,}0 \text{ MPa} \\ \tau_{xz_A} = 14{,}888414 \text{ MPa} \end{cases} \tag{24}$$

Retornando a equação 6, neste caso em particular, é possível reescrevê-la removendo os termos iguais a zero como mostra 25. Assim, é possível calcular as tensões equivalentes em A e B como mostra a equação 26.

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eq}_A} &= \sqrt{2234,535401^2 + 3((-3,904601)^2 + 0^2)} \\ \sigma_{\text{eq}_B} &= \sqrt{586,963430^2 + 3(0^2 + 14,888414^2)} \end{aligned} \tag{26}$$

Por fim obtém-se as tensões equivalentes nos pontos A e B como mostra 27.

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{\text{eq}_A} &= 2234,545635 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{eq}_B} &= 587,529627 \text{ MPa} \end{aligned}} \tag{27}$$

5 Cálculo dos coeficientes de segurança

É possível calcular os coeficientes de segurança usando a equação 28.[1]

$$n = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{adm}} \tag{28}$$

Calculando-se os coeficientes para os pontos A e B obtém-se os resultados expostos na equação 29.[1]

$$\boxed{\begin{aligned} n_A &= \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{eq_A}} = \frac{250}{2234,545635} = 0,111880 \\ n_B &= \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{eq_B}} = \frac{250}{587,529627} = 0,425510 \end{aligned}} \tag{29}$$

6 Conclusão

O trabalho foi realizado com o uso de um caderno Jupyter disponível no GitHub,[4] agradecemos ao Professor Stumpf pela disponibilidade em sanar dúvidas. Em suma, considerando os valores obtidos na seção 5, concluiu-se que a estrutura não resiste aos esforços aplicados nos pontos A e B. Sugere-se um aumento da espessura da seção ou o uso de um outro material com um maior σ_{esc}.

Referências

[1] R. C. Hibbeler. *Resistência dos Materiais*. Sao Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2010. ISBN: 9788576053736.

[2] Robert Jones. "Deformation theory of plasticity". Em: Blacksburg, Virginia, USA: Bull Ridge Pub, 2009, p. 153. ISBN: 9780978722319.

[3] Chen-Ching Ting. *Internal Forces*. 12 de abr. de 2012. URL: `https://cct.me.ntut.edu.tw/ccteducation/chchting/aiahtm/statics/lecture2011-2/internal.pdf`.

[4] João Henrique Lima de Vasconcelos e Hugo Matheus Vaz de Araújo. *Trabalho Final de Mecânica dos Sólidos I-A*. 4 de mai. de 2021. URL: `https://github.com/henriquevasconcelos/trabalho_final_solidos_1`.