

# Física Computacional

Henrique H. Vedoveli

06/2021

## 1 Introdução

Estes projetos foram realizados com a finalidade de estudar problemas físicos e matemáticos através da resolução por meio computacional, utilizando *Python* ou *Javascript* como linguagem de programação. Na primeira parte foram gerados alguns fractais, que a maioria estão relacionadas. A segunda parte é dedicada a simulação de problemas físicos, a última parte se preocupa em simular problemas fundamentais do *Machine Learning*.

## 2 Fractais

Fractais são figuras pertencentes a geometria não clássica, um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

O termo foi criado por Benoît Mandelbrot e é uma tentativa de se medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais da geometria euclidiana falham.

Os fractais podem ser agrupados em três categorias principais.

- Sistema de funções iteradas: São os fractais que possuem uma regra fixa de substituição geométrica, como o Fractal de Koch.
- Fractais definidos por uma relação de recorrência em cada ponto do espaço. Exemplos deste tipo são o conjunto de Mandelbrot. Estes também são chamados de fractais de fuga do tempo.
- Fractais aleatórios, gerados por processos estocásticos ao invés de determinísticos, por exemplo, terrenos fractais e o vôo de Lévy.

## 2.1 Árvore Fractal

As árvores podem ser um exemplo de fractal presente na natureza, elas são formadas pela repetição de um processo geométrico simples. Cada galho de árvore apresenta a mesma forma de uma parte maior da planta, como se fosse um nova árvore. O processo de formação das árvores consiste em sucessivas ramificações a partir do galho anterior. A cada ramificação, os novos ramos possuem comprimento e espessura menores em relação ao ramo do qual se originaram.

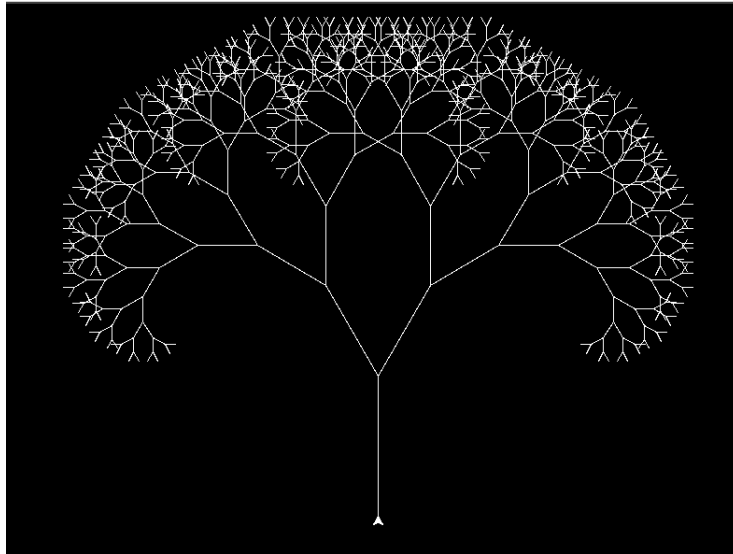


Figure 1: Árvores Fractais

## 2.2 Fractal de Koch

O fractal de Koch foi um dos primeiros fractais a serem descritos, podemos obter esse fractal através de um segmento de reta que será submetido a recorrentes iterações, como se descreve a seguir:

- Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.
- Desenha-se um triângulo equilátero, em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.
- Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo.

Utilizando as regras acima foi obtido as seguintes figuras:

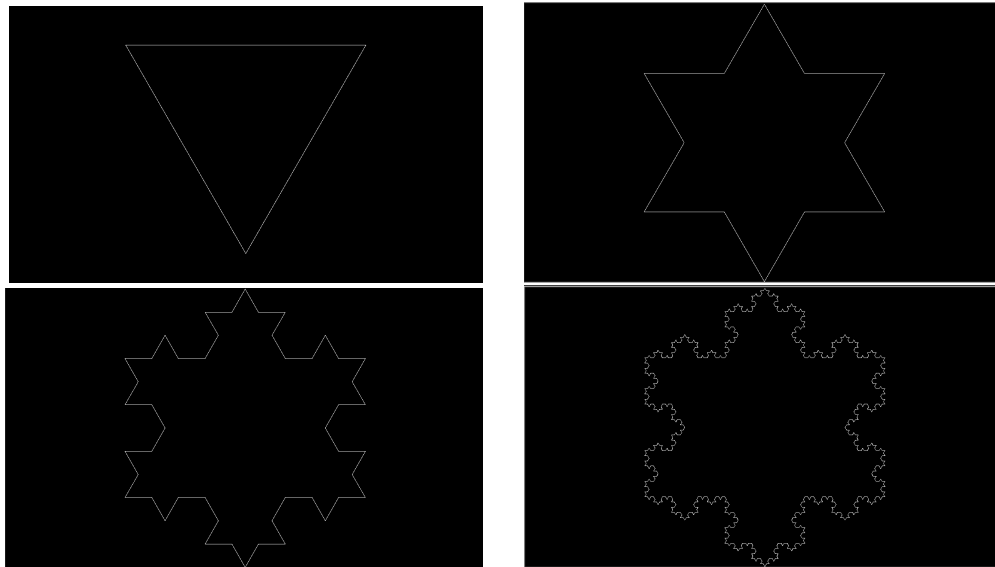


Figure 2: Fractais de Koch

### 2.3 Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot foi definido por Pierre Fatou que estudou processo recursivos do tipo  $z_n^2 + c$ , sendo  $z$  um número complexo. Começando com  $z_0$  gera-se uma sequência de pontos no plano complexo chamada órbita de  $z_0$ . Fatou tentou, sem sucesso, desenhar a mão a órbita de  $z_0$  para vários valores de  $c$ , mas provou que quando um ponto atinge uma distância da origem maior do que 2, a órbita tende para o infinito.

O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de valores de  $c$  no plano complexo para o qual a órbita do crítico  $z = 0$  sob iteração do mapa quadrático permanece limitado. Sendo assim, um número complexo,  $c$  é um membro do conjunto de Mandelbrot se, ao começar com  $z_0 = 0$  e aplicar a iteração repetidamente, o valor absoluto de  $z_n$  permanece limitado para todo  $n > 0$ . Portanto:

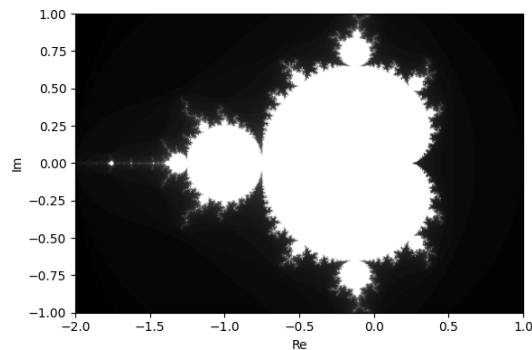


Figure 3: Conjunto de Mandelbrot

## 2.4 Conjunto de Julia

O Conjunto de Julia é um conjunto complementar definido por uma função e é definida por uma função  $f$  é usualmente denotado por  $J(f)$ . O conjunto consiste dos valores tais que uma perturbação arbitrariamente pequena pode causar mudanças drásticas na sequência de valores iterados da função. Assim, o comportamento da função do conjunto de Julia é caótica.

O Conjunto de Julia tem uma relação com o Conjunto de Mandelbrot, pois como consequência da definição do conjunto de Mandelbrot, há uma correspondência estreita entre a geometria do conjunto de Mandelbrot em um determinado ponto e a estrutura do conjunto de Julia correspondente. Por exemplo, um ponto está no conjunto Mandelbrot exatamente quando o conjunto Julia correspondente é conectado.

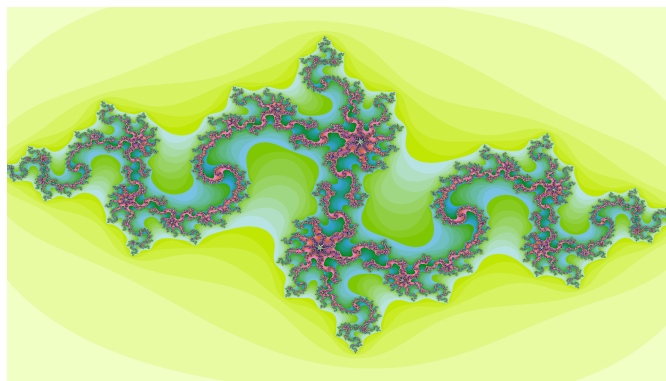


Figure 4: Conjunto de Julia

## 2.5 Mapa Logístico

O mapa logístico ou aplicação logística é uma regra matemática que associa a um dado número  $x_n$  um outro número  $x_{n+1}$ , através da equação:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

onde  $r$  é um parâmetro. Ele é um exemplo de mapa discreto, sendo comumente utilizado na introdução à teoria do caos. Além de funcionar como um modelo populacional, através do trabalho pioneiro de May, o estudo das dinâmicas deste mapa passaram a poder ser aplicadas em diversas áreas como biologia, ciclos econômicos, eletrônica, geração de números aleatórios, análises de espectro de energia, análise numérica, criptografia, entre outras áreas.

A explicação para a tantas áreas apresentarem aplicações para o mapa logístico é a simplicidade de sua função, polinomial de grau 2, somada à enorme variedade de dinâmicas apresentadas, principalmente aquelas associadas à dinâmicas caóticas.

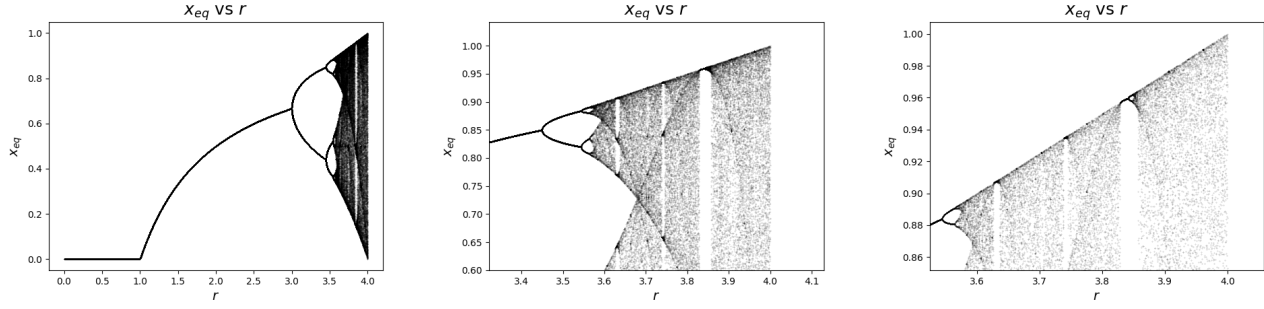


Figure 5: Mapa Logístico com zoom aplicado

### 3 Problemas Físicos

#### 3.1 Pendulo Simples e Duplo

Movimento periódico é o movimento de um corpo que retorna regularmente para uma posição após um intervalo de tempo fixo. Um pêndulo simples é um modelo idealizado consistindo de um objeto de massa  $m$  que pode oscilar em torno de um ponto de equilíbrio, suspenso por um fio de comprimento  $l$ .

A força restauradora  $F_r$  é a componente tangencial da força resultante, de forma que podemos calcular a frequência angular  $\omega$  para pequenas amplitudes, ou seja:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

A frequência e o período correspondentes serão:

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Em Física e Matemática, na área de sistemas dinâmicos, um duplo pêndulo é um sistema com dois pêndulos sendo um deles anexo no extremo do outro. Este é um sistema físico simples que apresentam um complexo comportamento dinâmico com alta sensibilidade em torno das condições iniciais. O movimento do pêndulo duplo é regido por um conjunto fechado de equações diferenciais ordinárias. Para sistemas com energia específica, seu comportamento é caótico.

Para o pendulo duplo, as coordenadas  $(x_1, y_1)$  do primeiro pendulo e  $(x_2, y_2)$  do segundo pendulo, as equações de movimento são dada por:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad y_1 = -l_1 \cos \theta_1$$

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2$$

As equações da energia cinética  $T$  e a energia potencial  $V$  são dadas pelo sistema:

$$T = \dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}$$

$$V = 2(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)$$

onde a constante da energia potencial foi escolhida de modo que ela seja nula quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

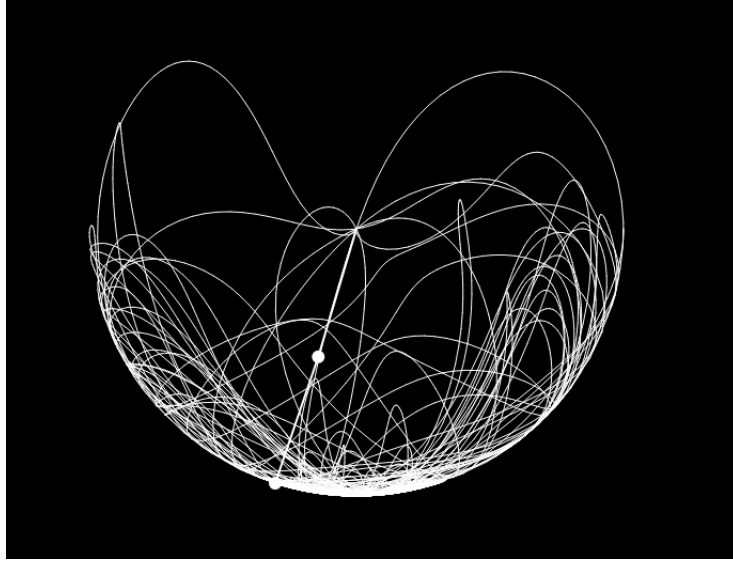


Figure 6: Desenho Caótico Realizado pelo Pendulo Duplo

### 3.2 Atrator de Lorenz

O Atrator de Lorenz foi introduzido por Edward Lorenz em 1963, que o derivou a partir das equações simplificadas de rolos de convecção que ocorrem nas equações da atmosfera. É um mapa caótico que mostra como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo e cuja forma é conhecida por se assemelhar a uma borboleta.

Trata-se de um sistema não-linear, tridimensional e determinístico que exibe comportamento caótico e demonstra aquilo a que hoje se chama um atrator estranho.

As equações que governam o Atrator de Lorenz são:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

em que  $\sigma$  se chama o número de Prandtl e  $\rho$  se chama o número de Rayleigh. Todos os  $\sigma, \rho, \beta > 0$ , mas usualmente  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ , enquanto  $\rho$  varia. O sistema exibe comportamento caótico para  $\rho = 28$  mas tem órbitas periódicas para outros valores de  $\rho$ .

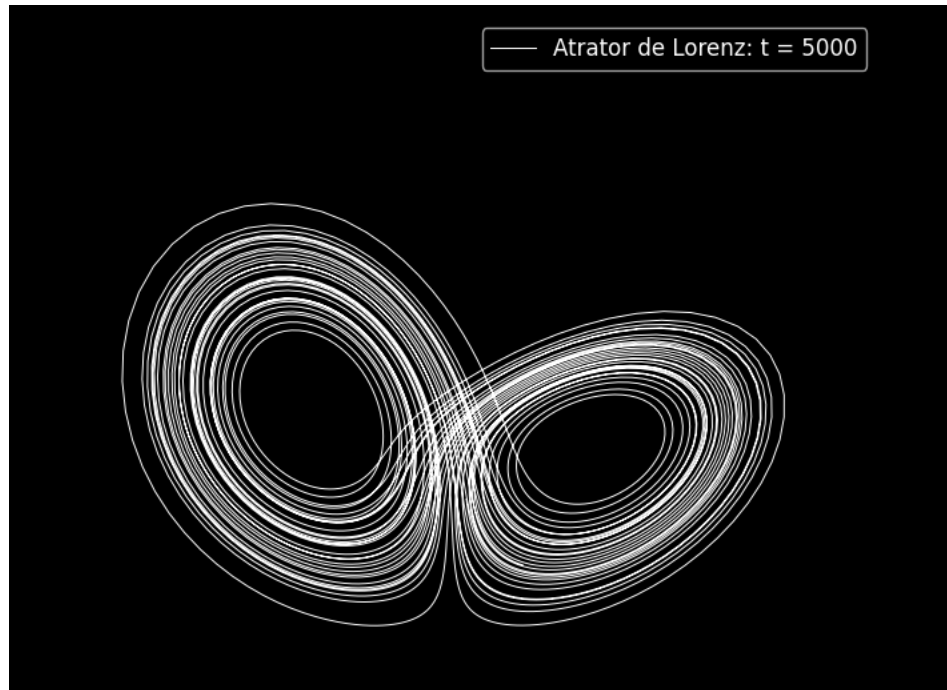


Figure 7: Desenho Gerado pelo Atrator de Lorenz para  $t = 5000$

### 3.3 Jogo da Vida de John Conway

O jogo da vida é um autômato celular desenvolvido pelo matemático britânico John Horton Conway em 1970. O jogo foi criado de modo a reproduzir, através de regras simples, as alterações e mudanças em grupos de seres vivos, tendo aplicações em diversas áreas da ciência.

As regras definidas são aplicadas a cada nova "geração"; assim, a partir de uma imagem em um tabuleiro bi-dimensional definida pelo jogador, percebem-se mudanças muitas vezes inesperadas e belas a cada nova geração, variando de padrões fixos a caóticos. As regras do jogo são as seguintes:

- Qualquer célula viva com menos de dois vizinhos vivos morre de solidão.
- Qualquer célula viva com mais de três vizinhos vivos morre de superpopulação.
- Qualquer célula com exatamente três vizinhos vivos se torna uma célula viva.
- Qualquer célula com dois vizinhos vivos continua no mesmo estado para a próxima geração.

### 3.4 Sistema Solar

A gravidade é uma força fundamental de atração que age entre todos os objetos por causa de suas massas, isto é, a quantidade de matéria de que são constituídos. A gravidade mantém os objetos celestes unidos e ligados, como os gases quentes contidos pelo Sol e os planetas, confinados às suas órbitas. A gravidade da Lua causa as marés oceânicas na Terra. Por causa da gravitação, os objetos sobre a Terra são atraídos para seu centro.

Para simular a relação gravitacional entre um astro e outros astros menores, simulando algo parecido com o Sistema Solar, foi construído um sistema que não leva em conta a massa dos corpos, e a velocidade de translação é dada aleatoriamente.

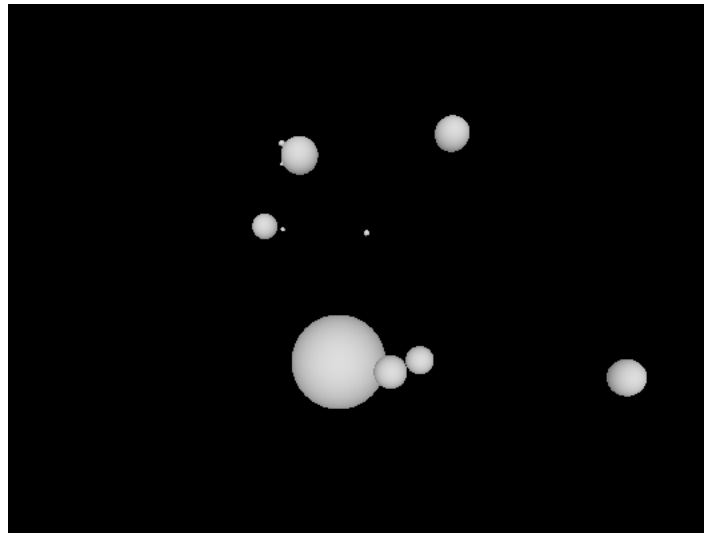


Figure 8: Simulação para Sistema Solar

## 4 Problemas de Machine Learning

### 4.1 Perceptron

O perceptron é um tipo de rede neural artificial inventada em 1958 por Frank Rosenblatt no Cornell Aeronautical Laboratory. Ele pode ser visto como o tipo mais simples de rede neural feedforward: um classificador linear. O perceptron é um classificador binário que mapeia sua entrada  $x$  (um vetor de valor real) para um valor de saída  $f(x)$  (um valor binário simples) através da matriz.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } w \cdot x + b \geq 0 \\ 0, & \text{se } w \cdot x + b < 0 \end{cases}$$

Onde  $w$  é um vetor de peso real e  $w \cdot x$  é o produto escalar (que computa uma soma com pesos) e  $b$  é o viés (do inglês "bias"), um termo constante que não depende de qualquer valor de entrada.



Ele pode ser usado porque resulta em algumas funções lógicas, como os operadores booleanos AND, OR e NOT, que são linearmente separáveis, isto é, eles podem ser realizadas usando um único Perceptron.

1	0	1
0	0	0
AND	0	1

1	1	1
0	0	1
OR	0	1

1	1	0
0	1	0
NOT	0	1

Figure 9: Operadores Lógicos linearmente separáveis

## 4.2 Problema XOR

Apesar do Perceptron ser utilizado com operadores lógicos AND, OR e NOT, quando o operador lógico não é linearmente separável como o XOR não pode ser alcançado por um único Perceptron. No entanto, esse problema poderia ser superado usando mais de um Perceptron organizado em redes neurais feed-forward. Uma vez que é impossível desenhar uma linha para dividir as regiões contendo 1 ou 0, a função XOR não é linearmente separável.

1	1	0
0	0	1
XOR	0	1

Figure 10: Operador XOR