Árvores Balanceadas AVL

Prof: Sergio Souza Costa

Sobre mim

Sérgio Souza Costa
Professor - UFMA
Doutor em Computação Aplicada (INPE)

prof.sergio.costa@gmail.com
https://sites.google.com/site/profsergiocosta/home
http://www.slideshare.net/skosta/presentations?order=popular
https://twitter.com/profsergiocosta
http://gplus.to/sergiosouzacosta

Introdução

- As árvores binárias de busca permitem a organização da informação com o objetivo a otimizar as buscas.

Introdução

- As árvores binárias de busca permitem a organização da informação com o objetivo a otimizar as buscas.
- Ela permite o acesso mais rapido aos elementos dado que os elementos estão organizados na árvore, obedecendo uma certa propriedade.
  - Esquerda são os menores que a raiz
  - Direita são os maiores que a raiz

Introdução

- As Árvores binárias de busca (ABB) estudadas têm uma **séria desvantagem** que pode afetar o tempo necessário para recuperar um item armazenado.

Introdução

Insiram os seguintes valores em uma árvore binária de busca (ABB):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

4, 6, 2, 5, 1, 7, 3

O que vocês concluem com isso ?

Introdução

A desvantagem é que o desempenho da ABB **depende da ordem em que os elementos são inseridos**.

Introdução

A desvantagem é que o desempenho da ABB **depende da ordem em que os elementos são inseridos**.

Idealmente, deseja-se que a árvore esteja **balanceada**, para qualquer nó **p** da árvore.

Introdução

A desvantagem é que o desempenho da ABB **depende da ordem em que os elementos são inseridos**.

Idealmente, deseja-se que a árvore esteja **balanceada**, para qualquer nó **p** da árvore.

Como saber se a árvore está **balanceada** ?

Introdução

A desvantagem é que o desempenho d
da ordem em que os elementos são i

A **altura** dos **nós** é um importante dado.

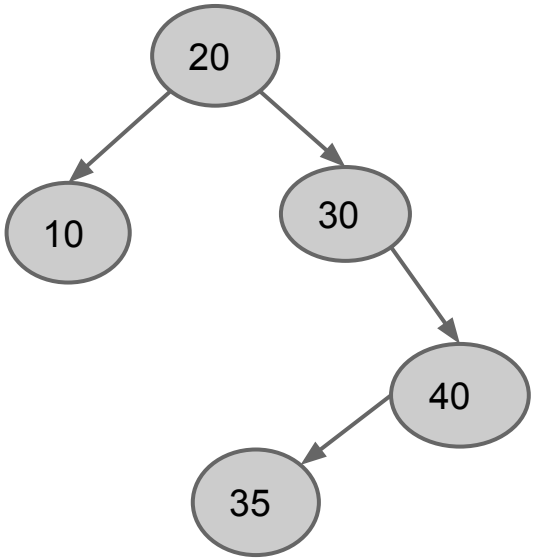
Idealmente, deseja-se que a árvore esteja **balanceada**, para qualquer nó **p** da árvore.

Como saber se a árvore está **balanceada** ?

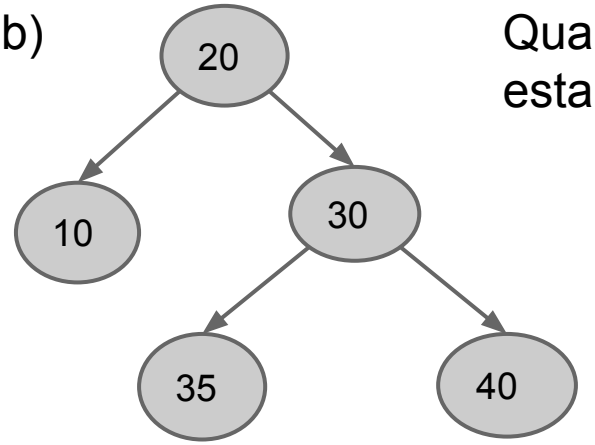
AVL

- O nome AVL vem de seus criadores Adelson Velsky e Landis (1962).
- Uma árvore binária de pesquisa **T** é denominada **AVL** se:
  - Para todos nós de **T**, as alturas de suas duas sub-árvores diferem **no máximo de uma unidade**.

a)



b)



Qual é AVL ? Que nó esta desbalanceado ?

AVL

- Como saber se a árvore está desbalanceada?

AVL

- Como saber se a árvore está desbalanceada?
  - Verificando se existe algum nodo “desregulado”.

AVL

- Como saber se a árvore está desbalanceada?
  - Verificando se existe algum nodo “desbalanceado”.

- Como saber se um nodo está desbalanceado ?

AVL

- Como saber se a árvore está desbalanceada?
  - Verificando se existe algum nodo “desbalanceado”.

- Como saber se um nodo está desbalanceado ?
  - Subtraindo-se as alturas das suas sub-árvores.

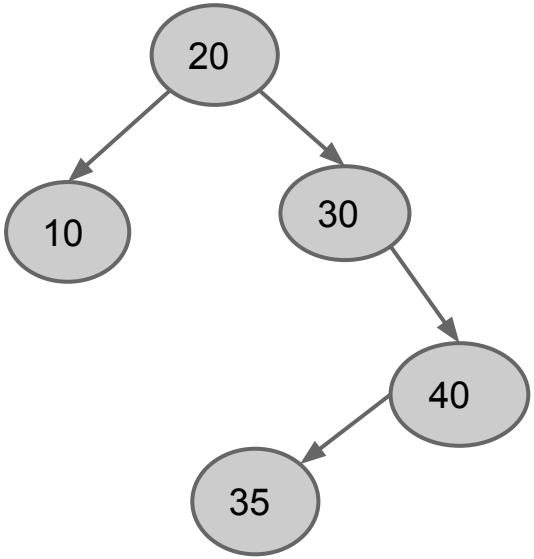
Fator de balanceamento

- O fator de balanceamento é dado por:
  - altura (SAE) – altura(SAD)
- Ou,
  - altura (SAD) – altura(SAE)

Fator de balanceamento

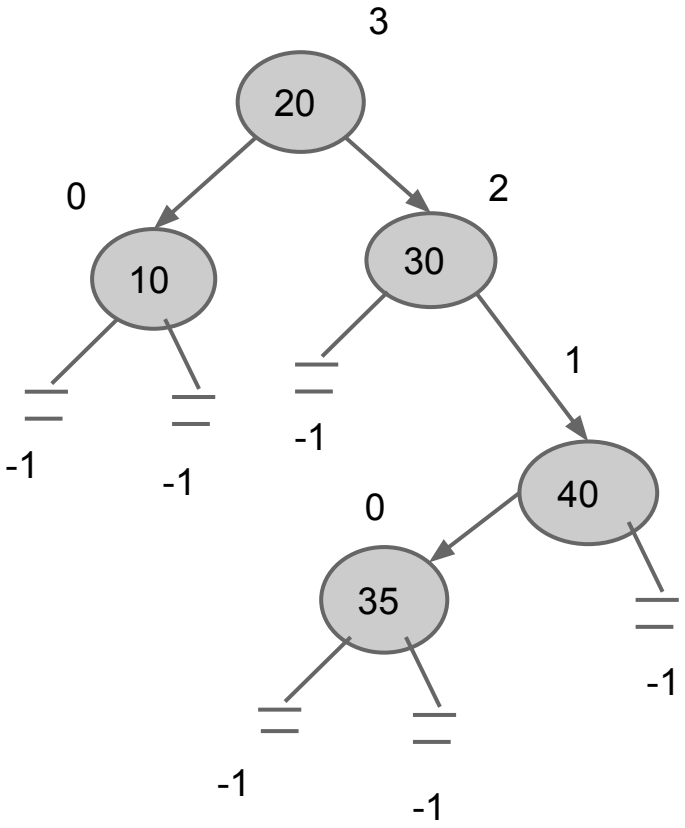
- O fator de balanceamento é dado por:
  - altura (SAE) – altura(SAD)
- Ou,
  - altura (SAD) – altura(SAE)
- O fator de balanceamento de um nodo é dado pelo seu peso em relação a sua sub-árvore.
  - Um nodo pode ter um fator balanceado de 1, 0, ou -1.
  - Um nodo com fator de balanceamento -2 ou 2 (diferença de 2 elementos) é considerado desbalanceado e **requer um balanceamento.**

AVL - Calculando o fator



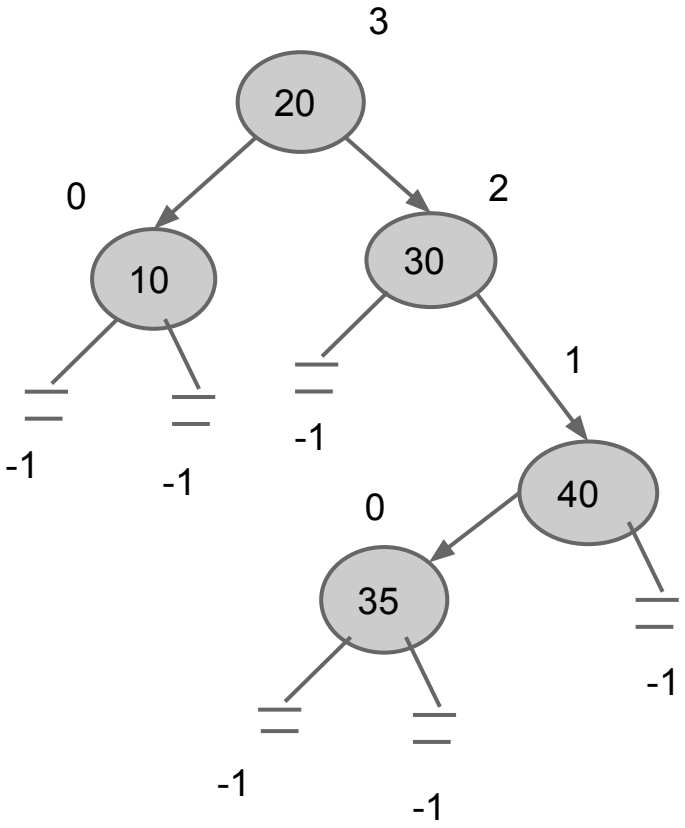
Coloque as alturas de cada nó

AVL - Calculando o fator



Coloque as alturas de cada nó

AVL - Calculando o fator

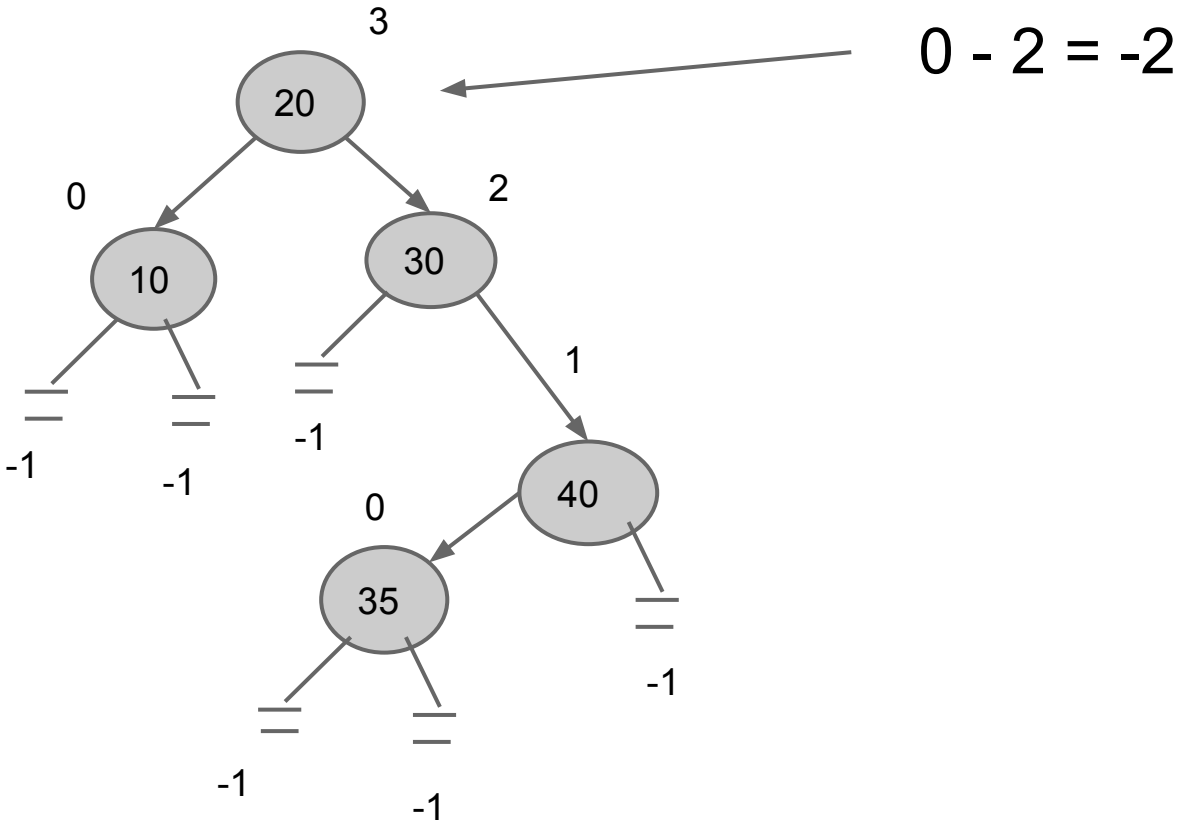


Coloque as alturas de cada nó

Calcule o fator de balanceamento

altura (SAE) - altura (SAD)

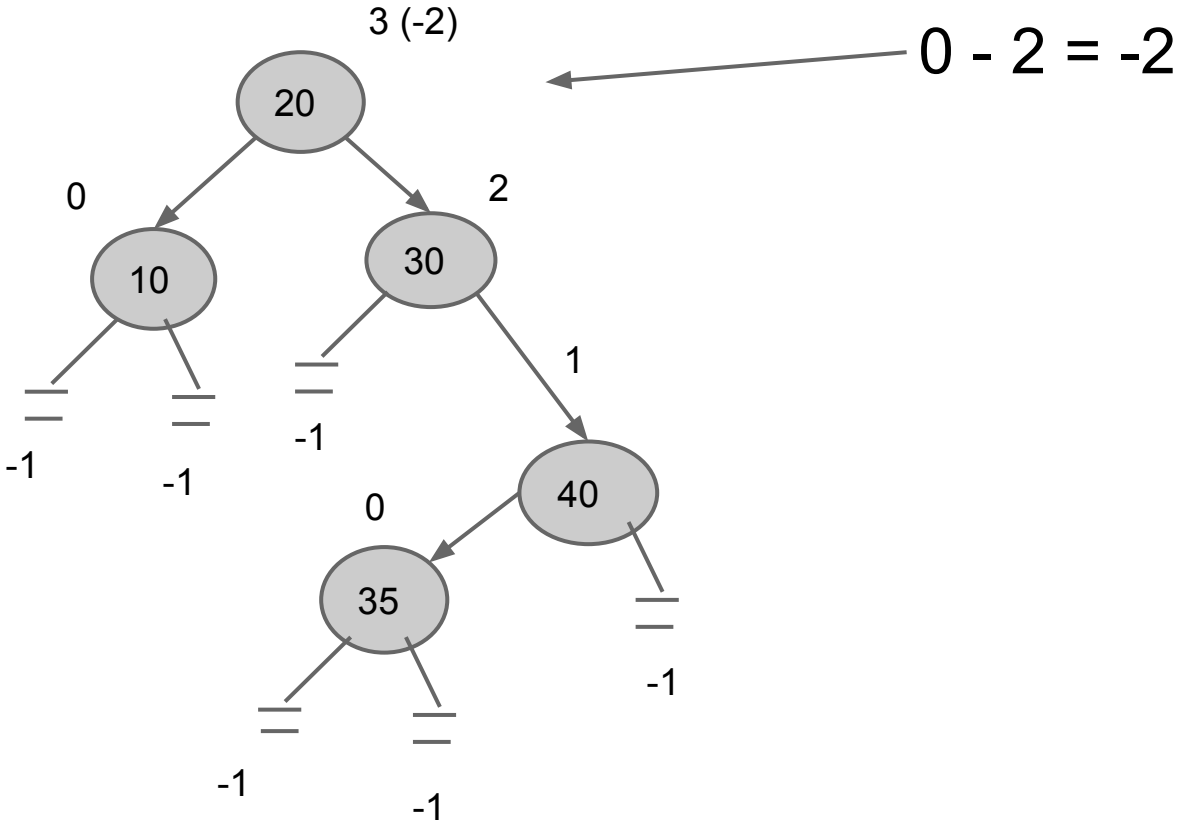
AVL - Calculando o fator



0 - 2 = -2

altura (SAE) - altura (SAD)

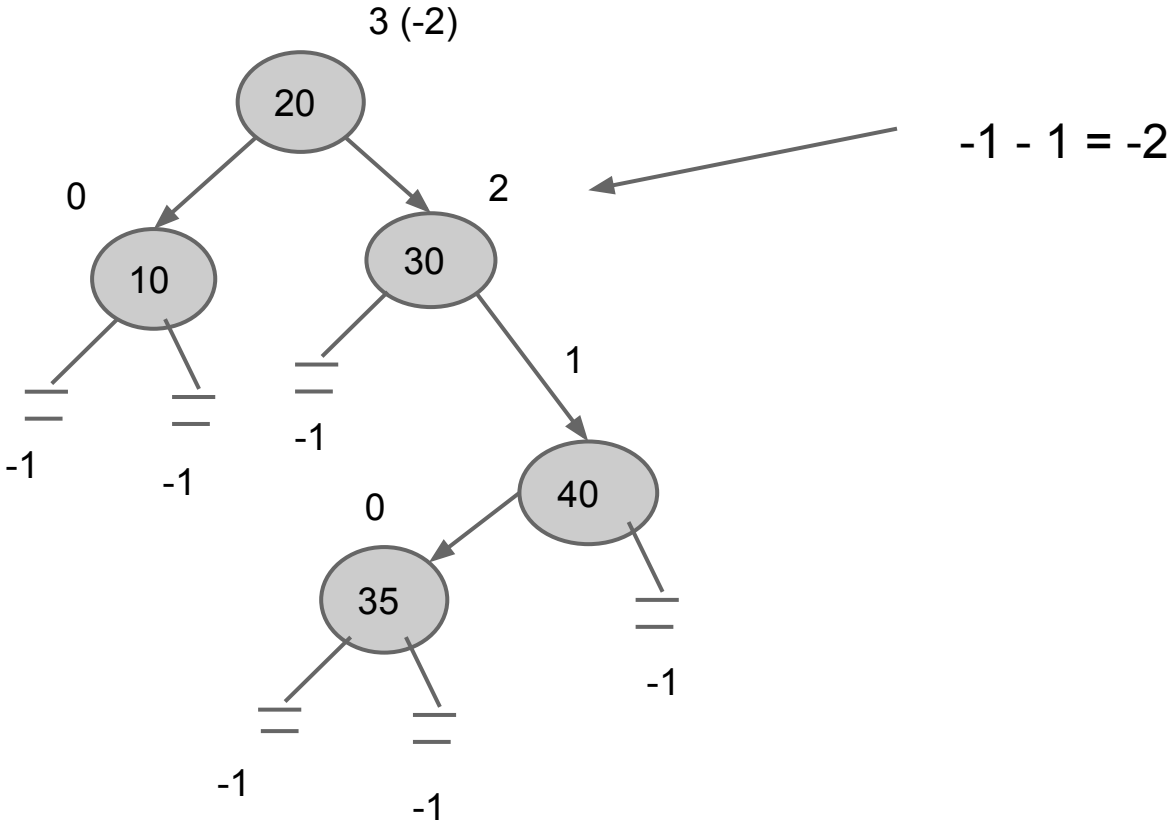
AVL - Calculando o fator



0 - 2 = -2

altura (SAE) - altura (SAD)

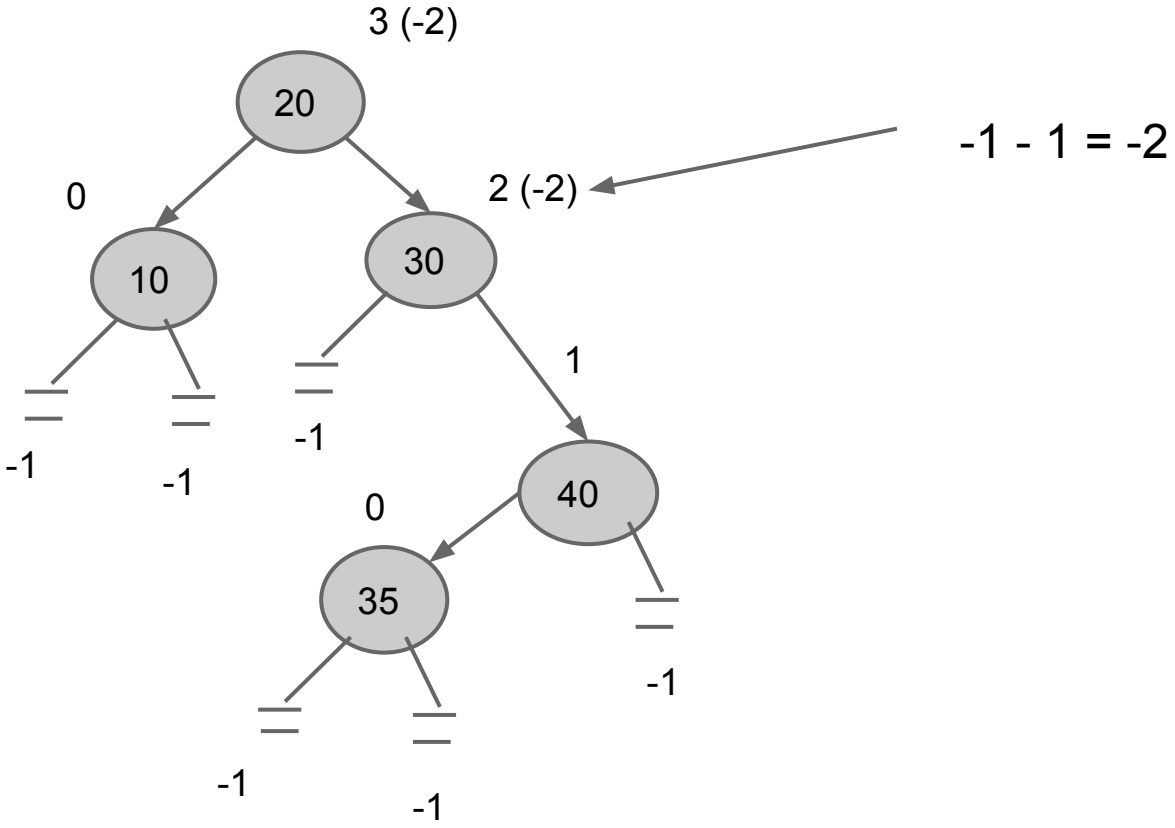
AVL - Calculando o fator



-1 - 1 = -2

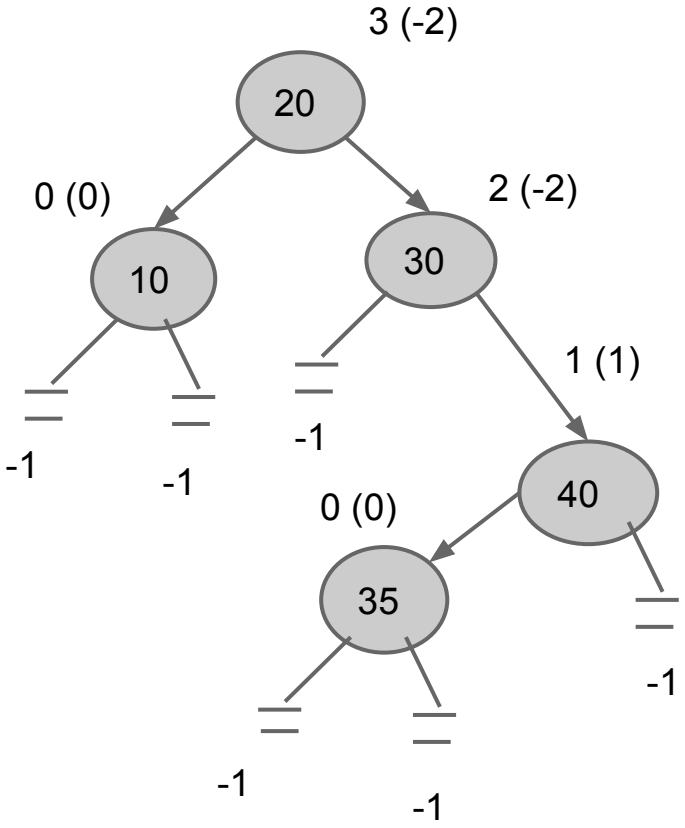
altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Calculando o fator



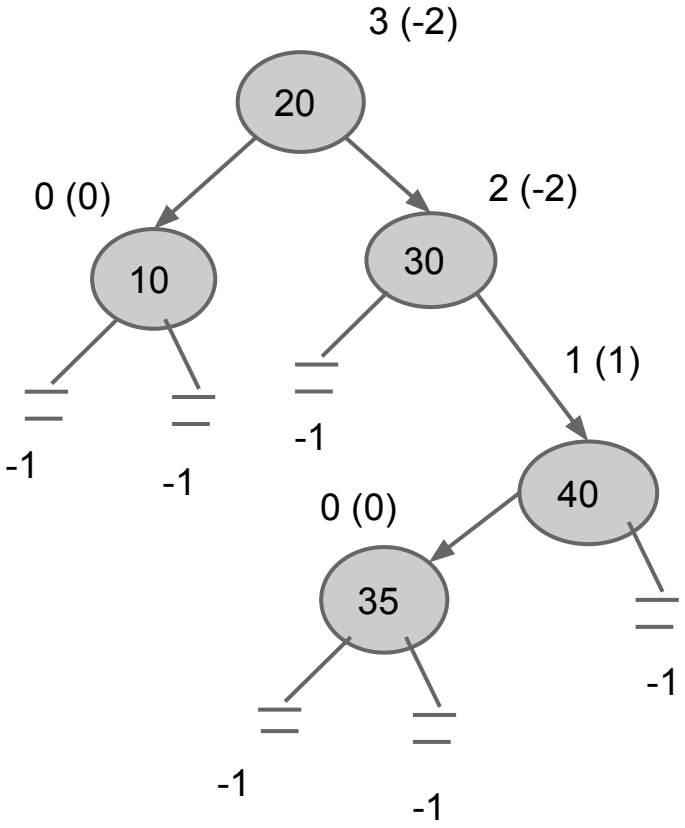
altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Calculando o fator



altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Calculando o fator

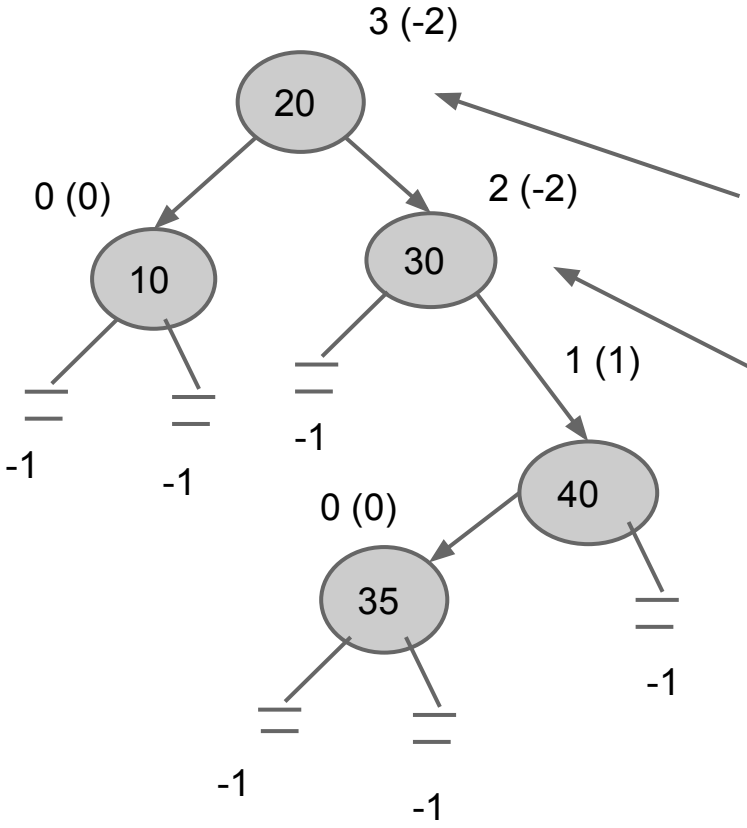


Uma árvore binária de pesquisa **T** é denominada **AVL** se:

- Para todos nós de **T**, as alturas de suas duas sub-árvores diferem **no máximo de uma unidade**.

altura (SAE) - altura (SAD)

AVL - Calculando o fator



Uma árvore binária de pesquisa **T** é denominada **AVL** se:

- Para todos nós de **T**, as alturas de suas duas sub-árvores diferem **no máximo de uma unidade**.

altura (SAE) - altura (SAD)

Atividades

Insira os seguintes valores em uma árvore binária, coloque os fatores de balanceamento e diga se é ou não uma AVL e qual nó esta desbalanceado:

a) [30,15, 50, 5,10, 20]

b) [80, 40, 100, 120, 90, 30]

c) [10, 50, 4, 90, 20, 8]

Como balancear ?

Como balancear ?

Através de operações de rotações!!!!

Rotações

Existem quatro operações de rotações:

Rotação simples à Esquerda

Rotação simples à Direita

Rotação Dupla à Esquerda

Rotação Dupla à Direita

Rotações

Existem quatro operações de ro

As duplas são derivadas das simples

Rotação simples à Esquerda

Rotação simples à Direita

Rotação Dupla à Esquerda

Rotação Dupla à Direita

Rotações

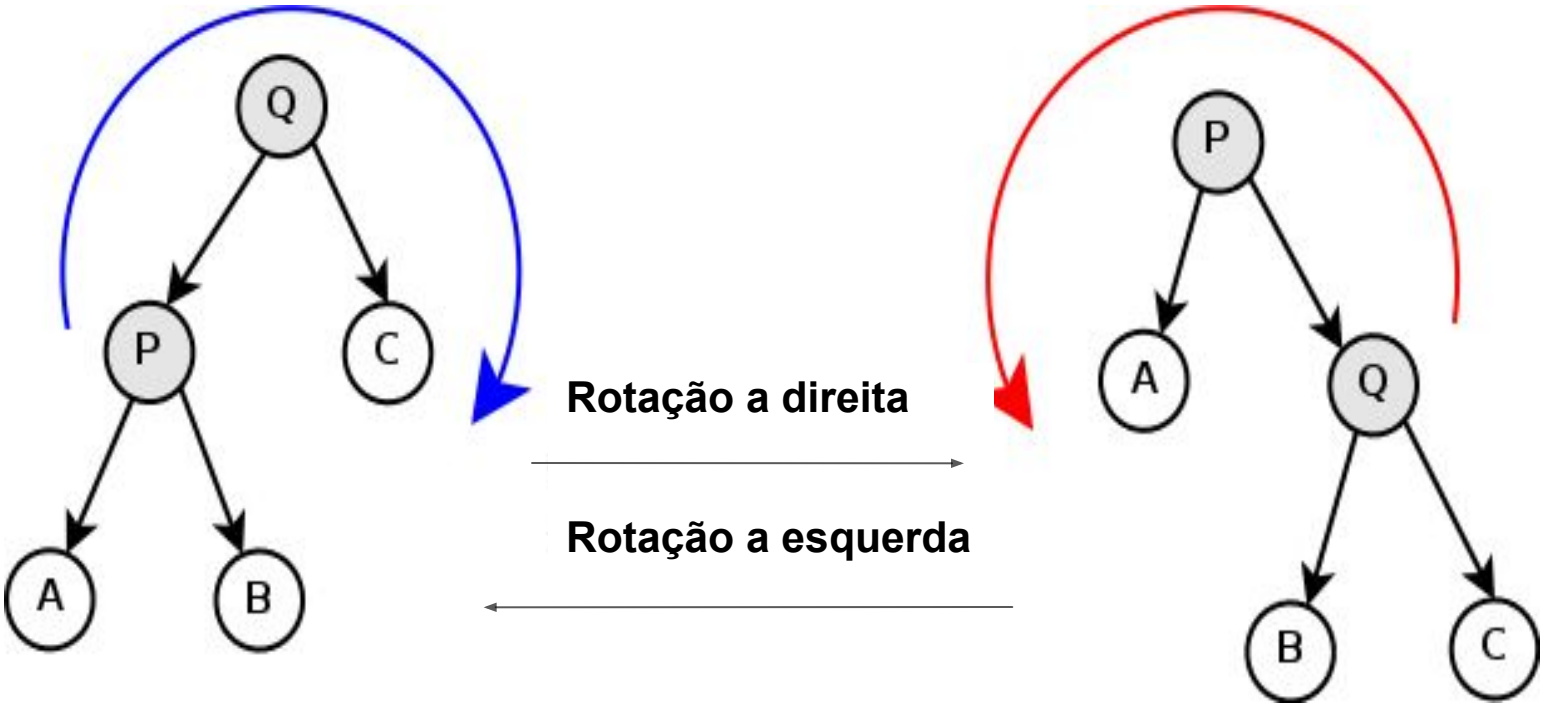
- Quando usar as Rotações ?
  - Na inserção de um elemento
  - e na remoção de um elemento

- É provado que no máximo uma rotação é suficiente para realizar o balanceamento de uma árvore quando é inserido ou removido um elemento

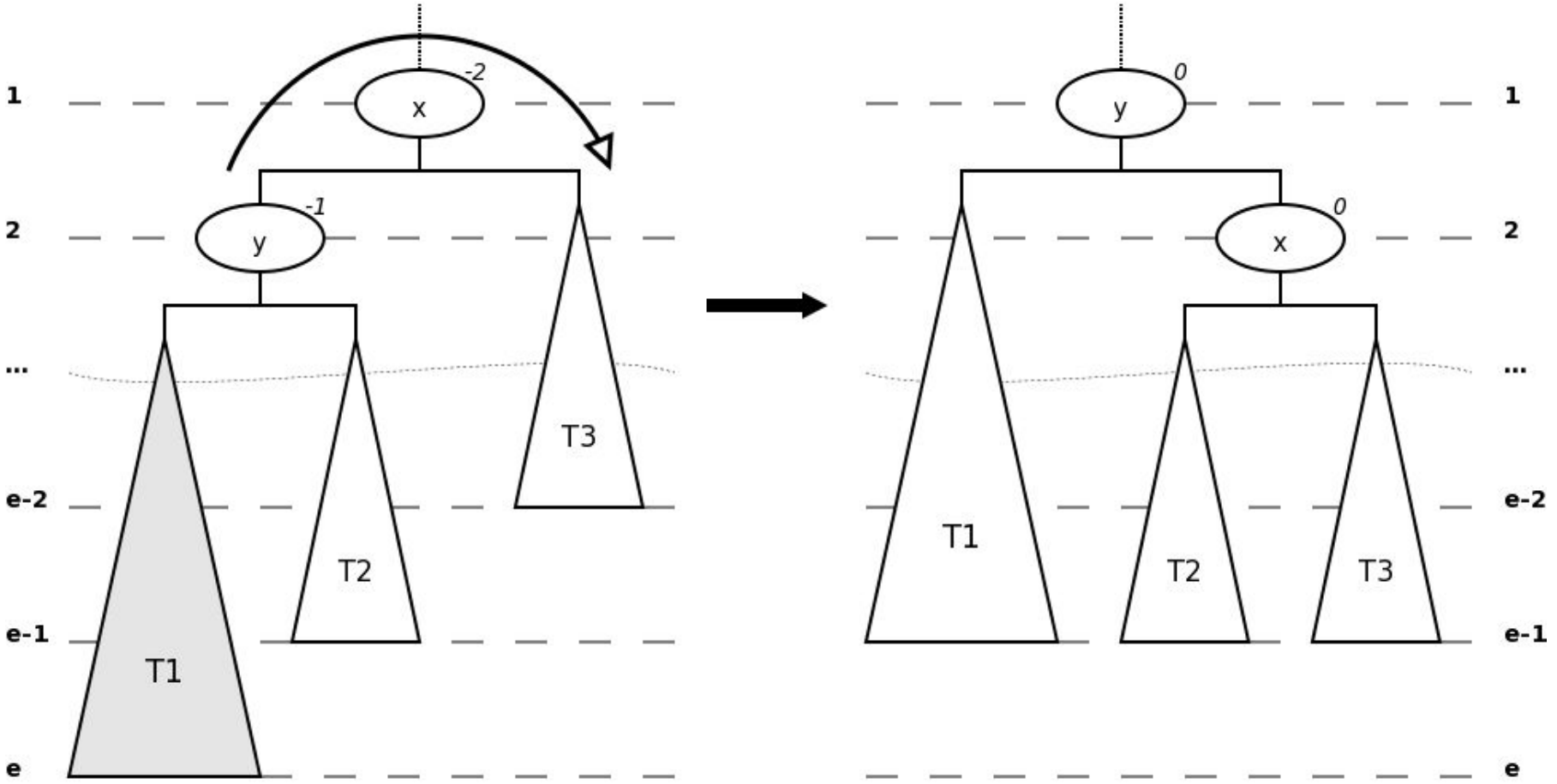
Rotações e balanceamento

Vamos ver primeiro as operações de rotação e depois usa-las para balanceamento.

Rotações

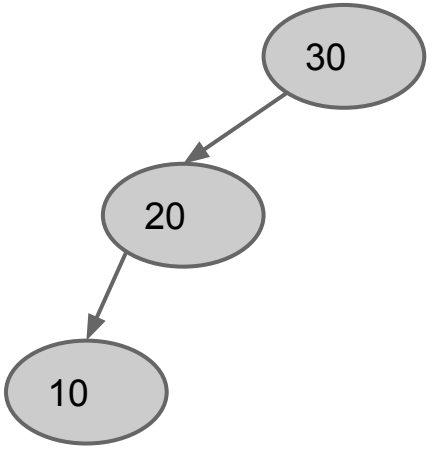


Rotação a direita

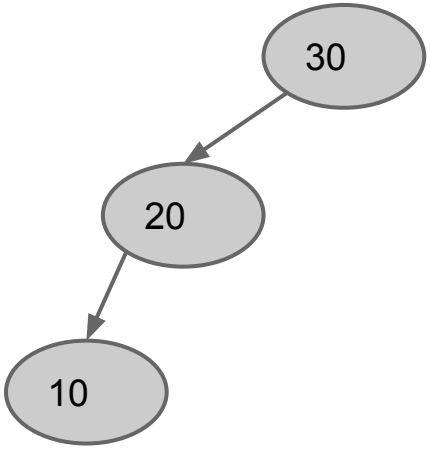


Rotação a direita

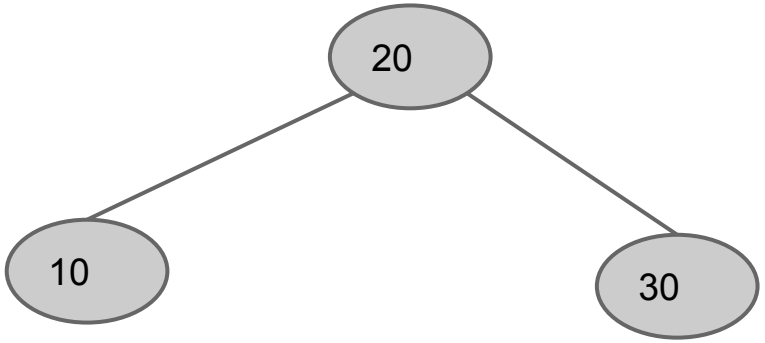
Imagine a seguinte árvore....



Rotação a direita

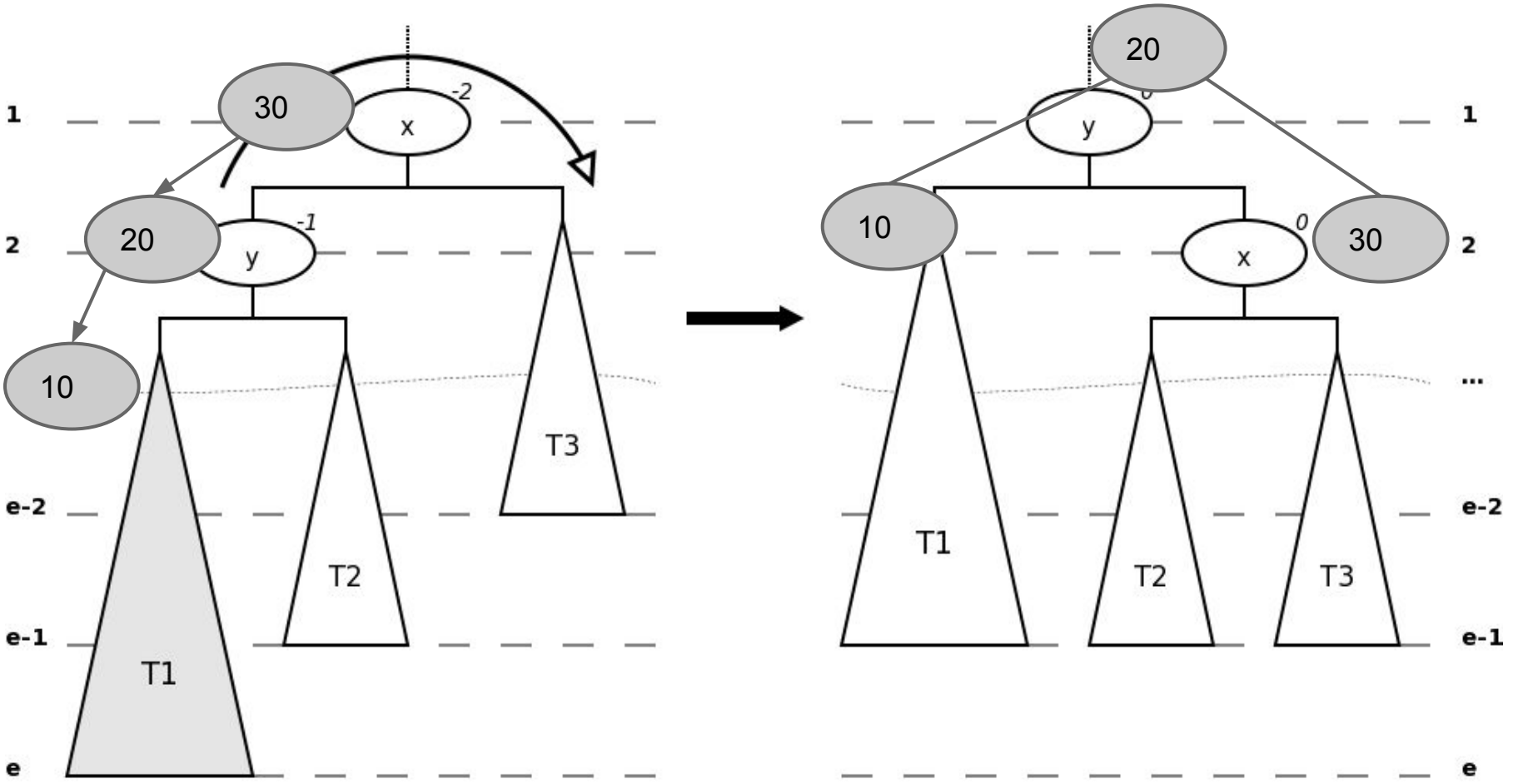


Imagine a seguinte árvore....



Rotação a direita

Imagine a seguinte árvore....



Rotação a direita

Atividades

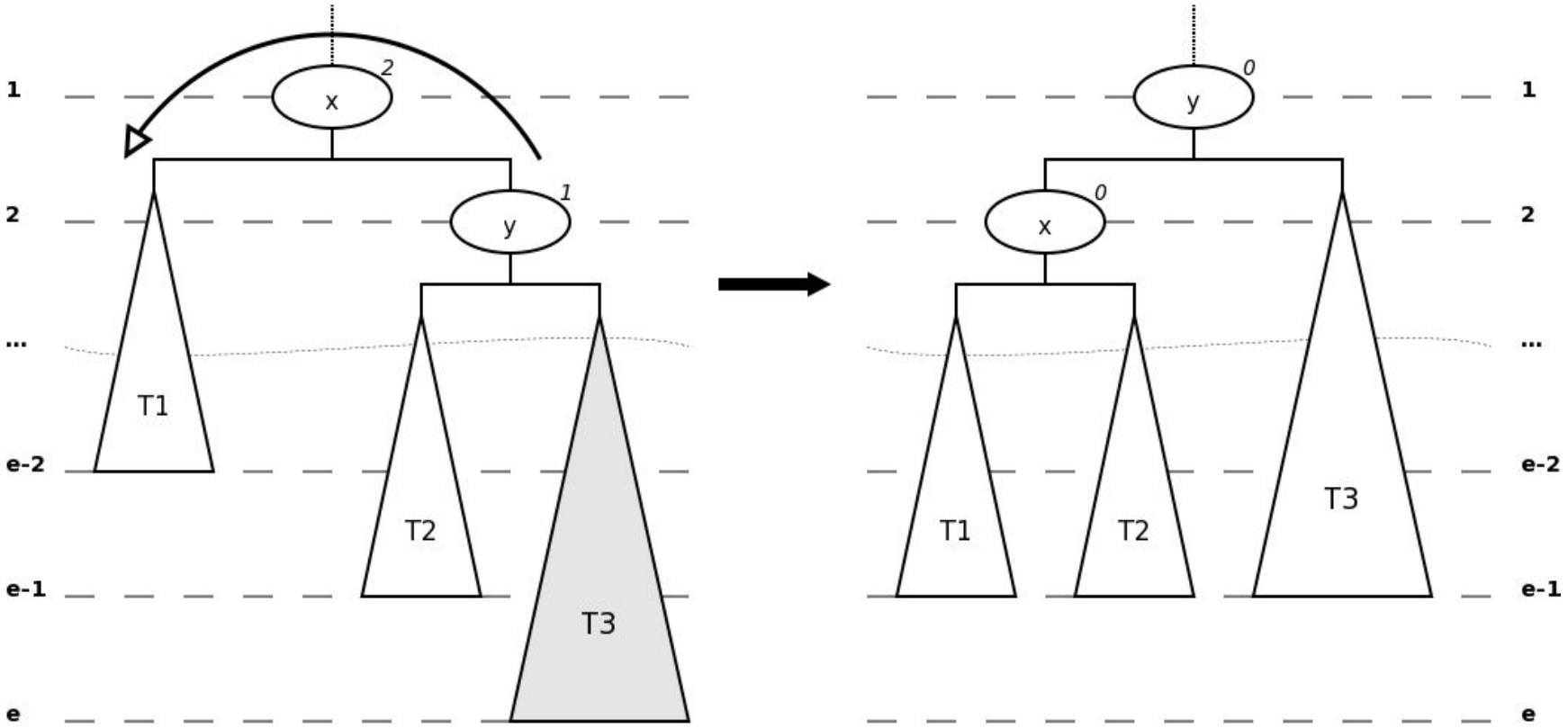
Insiram os seguintes valores e depois rotacione para a direita a partir da raiz:

a) [40,30, 20]

b) [40, 30, 20, 35]

c) [40, 50, 30, 20, 35]

Rotação a esquerda



Rotação a esquerda

Atividades

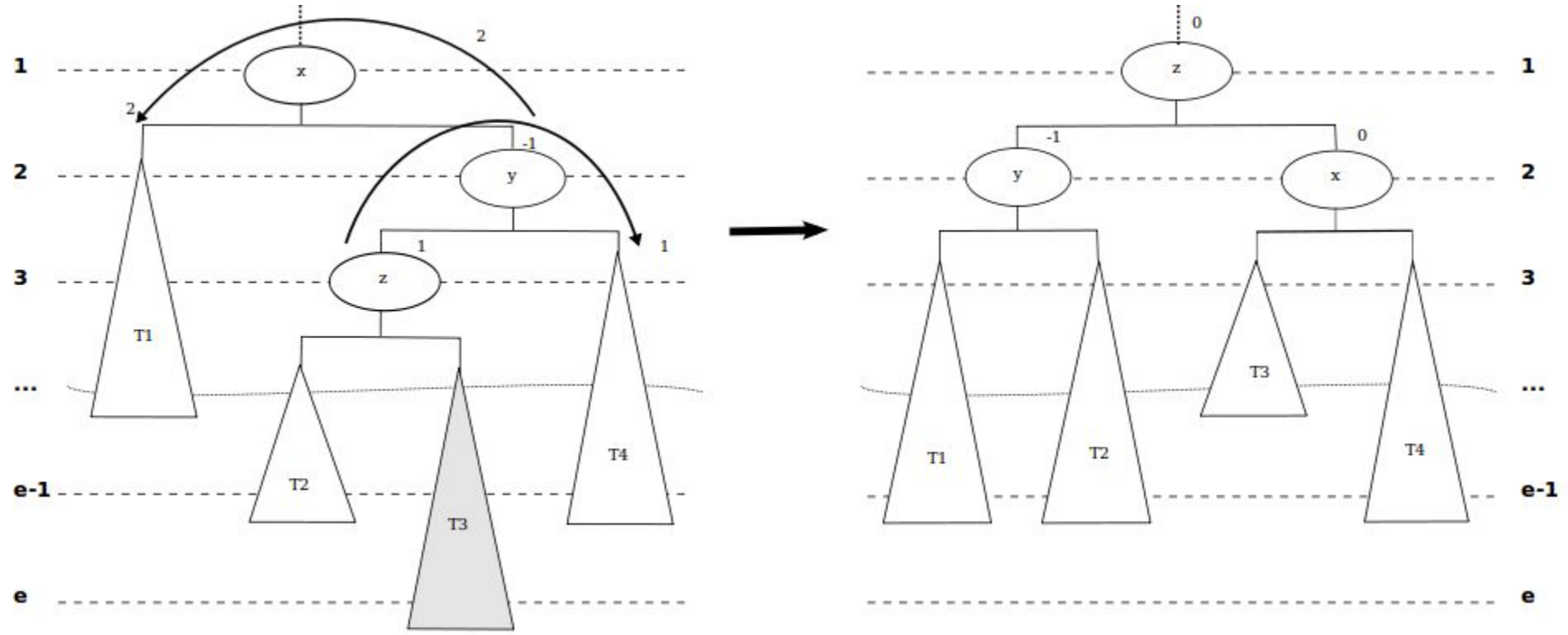
Insiram os seguintes valores e depois rotacione para a esquerda a partir da raiz:

a)[40, 50, 60]

b) [40, 50, 10, 60]

c) [40, 20, 10, 50, 60, 70]

Rotação dupla a esquerda



Rotação dupla a esquerda

Atividades

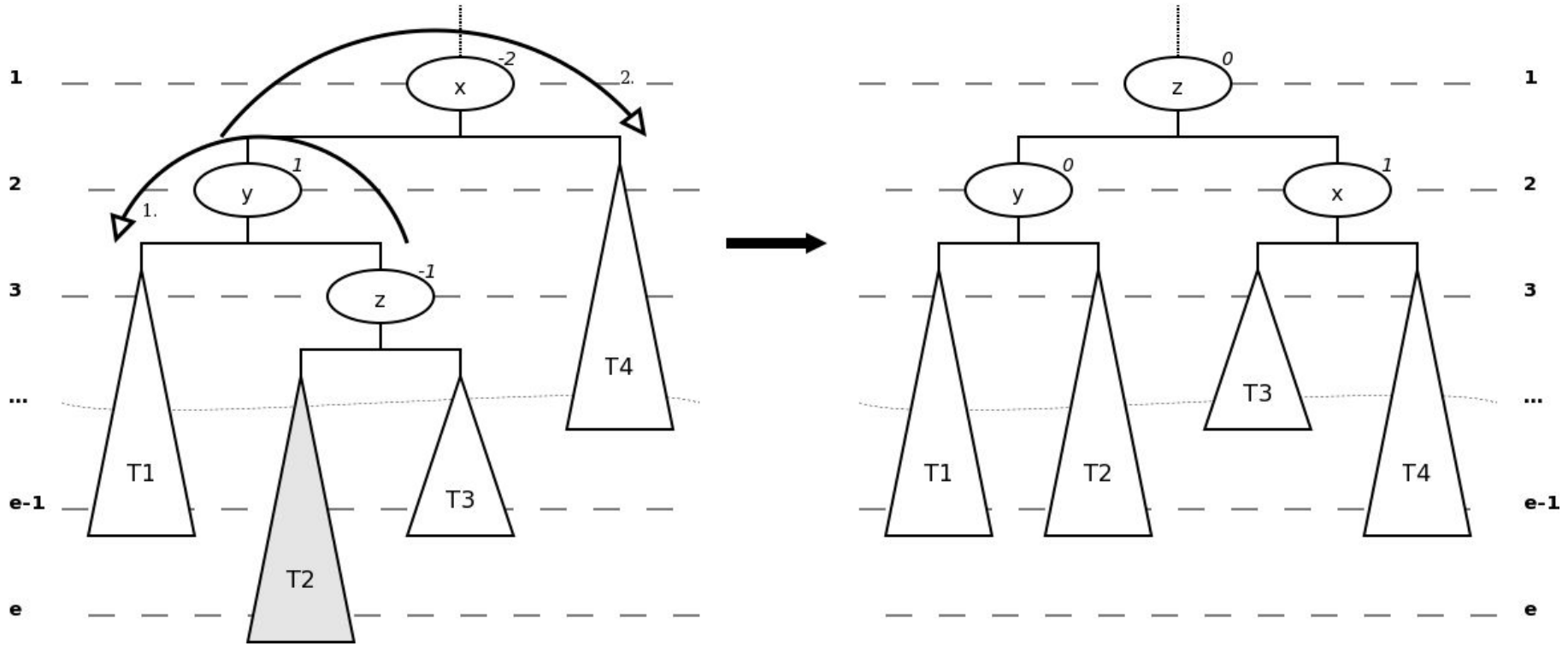
Insiram os seguintes valores e depois rotacione dupla a esquerda a partir da raiz:

a)[20, 40, 30]

b) [20, 40, 30, 50]

c) [20, 10, 40, 30, 50, 12]

Rotação dupla a direita



Rotação dupla a direita

Atividades

Insiram os seguintes valores e depois rotacione dupla a direita a partir da raiz:

a) [40, 20, 30]

b) [40, 20, 30, 50]

c) [40, 20, 30, 10,50, 80]

Como usar as rotações para manter uma árvore balanceada, ou seja, uma AVL ?

Balanceamento

Ao inserir um novo elemento em uma árvore, pode ser que um dos seus nós ascendentes se torne desbalanceado, avô, bisavô ...

Balanceamento

Algoritmo:

A cada inserção, checa-se os nós ascedentes.

Balanceamento

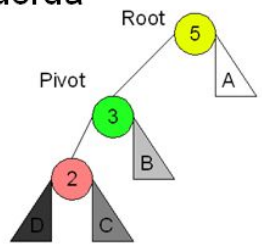
Algoritmo:

- Aplica-se, o mesmo algoritmo de inserção da árvore binária de busca.
- A cada inserção, checa-se os nós ascedentes.
- Caso o nó esteja desbalanceado, existem quatro diferentes configurações, como veremos a seguir.
  - Para cada configração, existe uma rotação indicada.

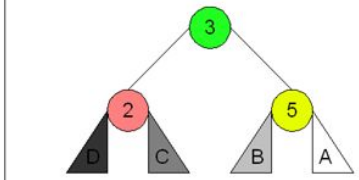
There are 4 cases in all, choosing which one is made by seeing the direction of the first 2 nodes from the unbalanced node to the newly inserted node and matching them to the top most row.

Root is the initial parent before a rotation and **Pivot** is the child to take t root's place.

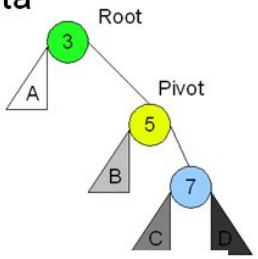
Desbalanceado a esquerda



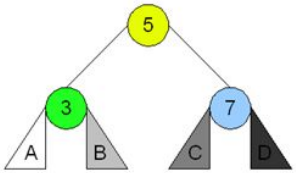
Rotação direita



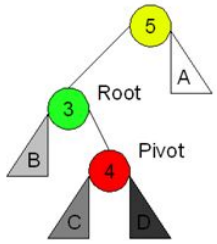
Desbalanceado a direita



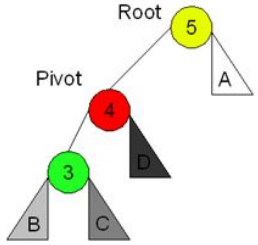
Rotação esquerda



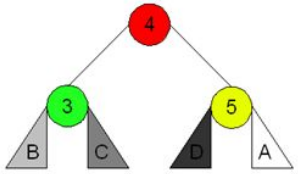
Desbalanceado a esquerda direita



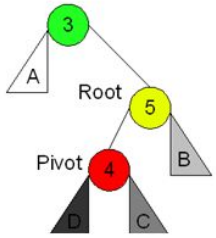
Rotação esquerda



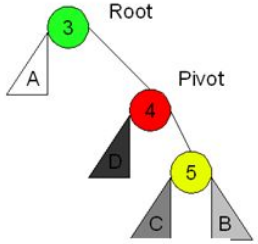
Rotação direita



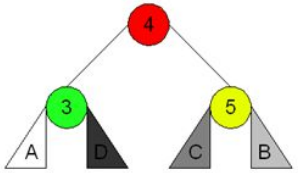
Desbalanceado a direita esquerda



Rotação direita

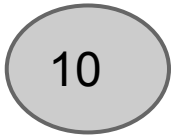


Rotação esquerda



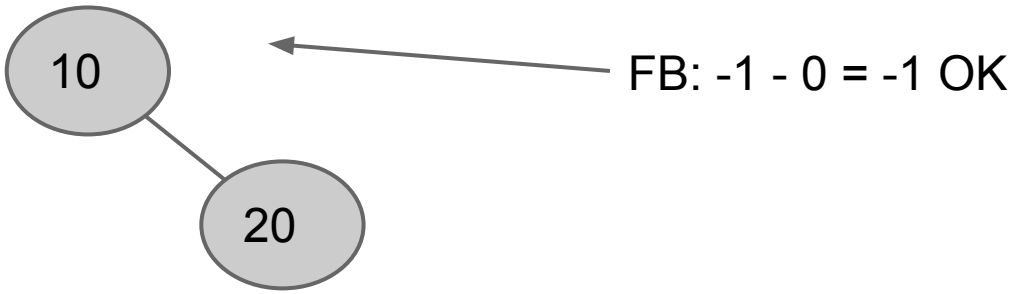
Exemplo

[10, 20, 30]



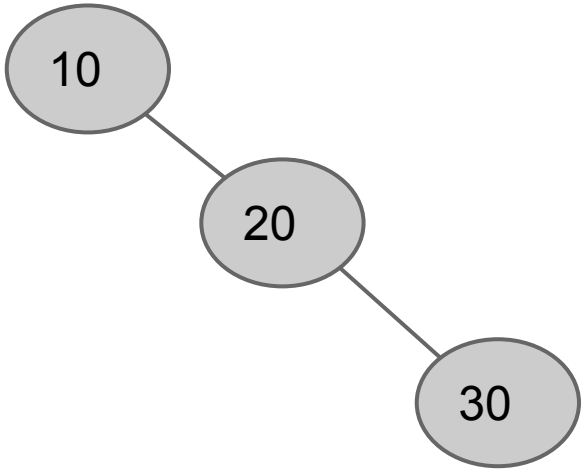
Exemplo

[10, 20, 30]



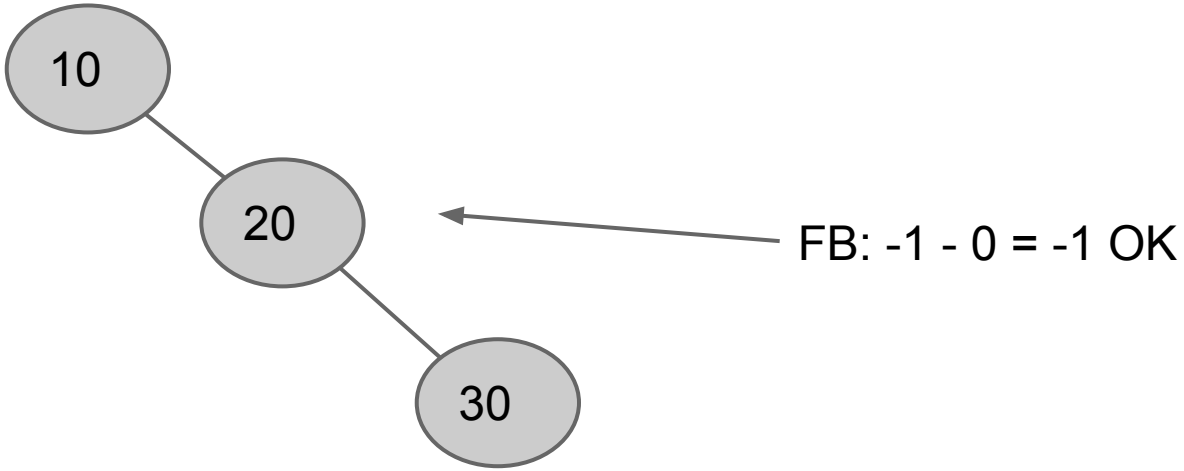
Exemplo

[10, 20, 30]



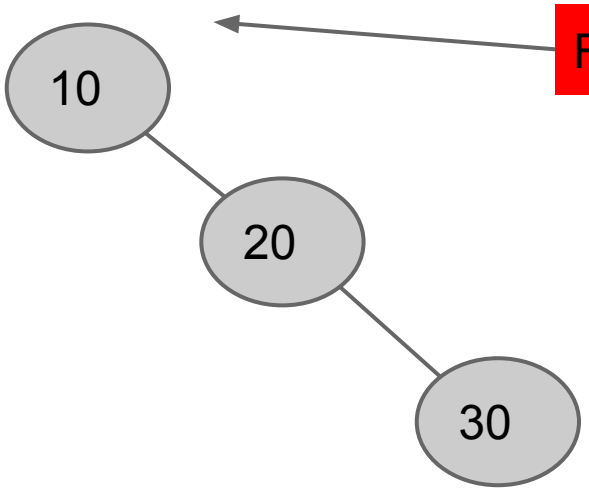
Exemplo

[10, 20, 30]



Exemplo

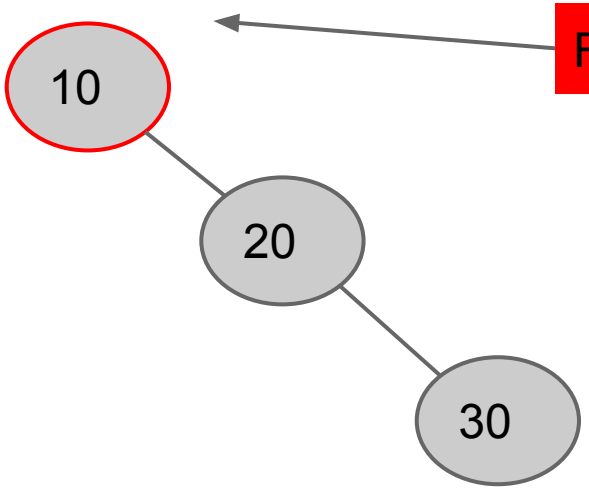
[10, 20, 30]



FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado

Exemplo

[10, 20, 30]

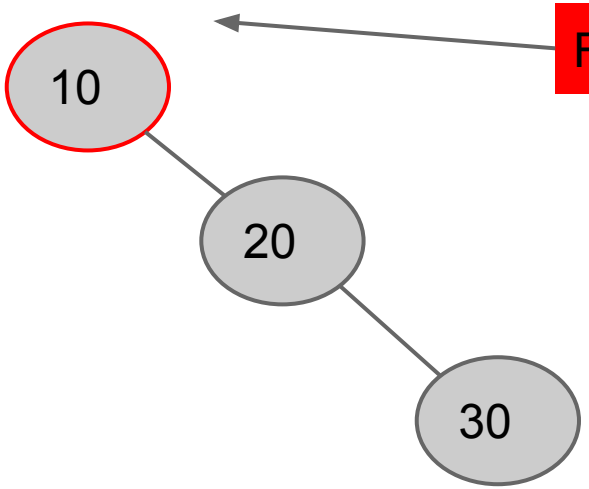


FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado

Qual a rotação indicada neste caso ?

Exemplo

[10, 20, 30]



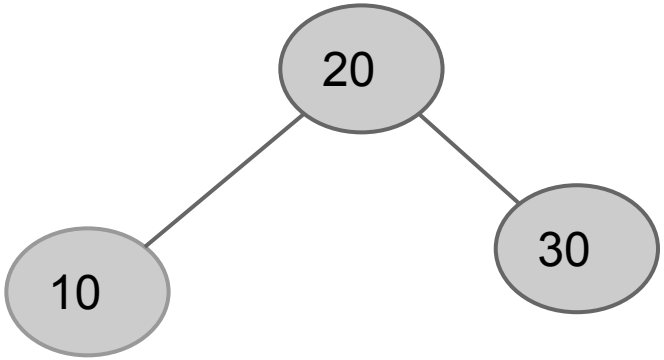
FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado

Qual a rotação indicada neste caso ?

Rotação simples a esquerda.

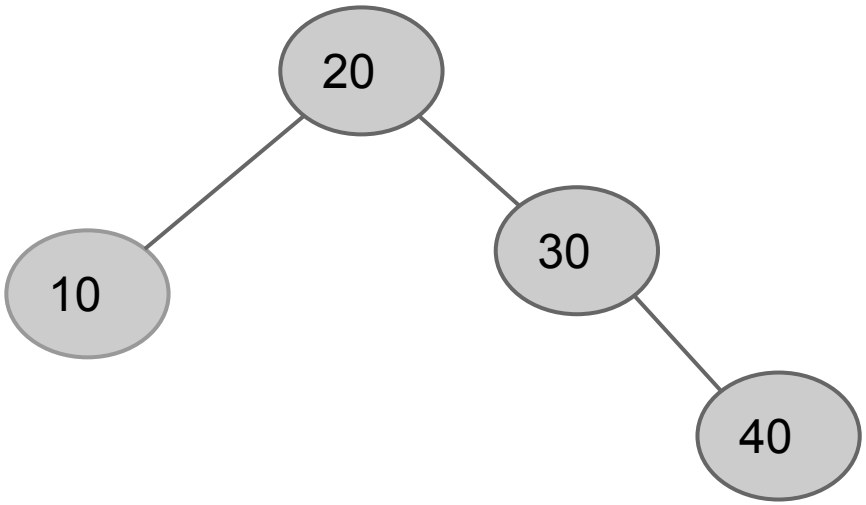
Exemplo

[10, 20, 30]



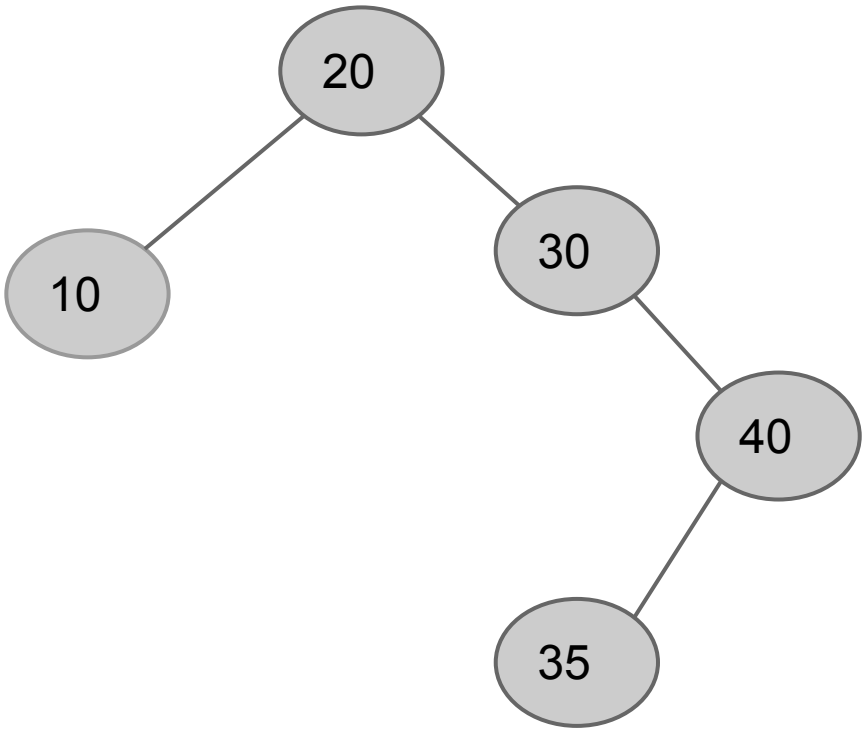
Exemplo

[10, 20, 30, 40]



Exemplo

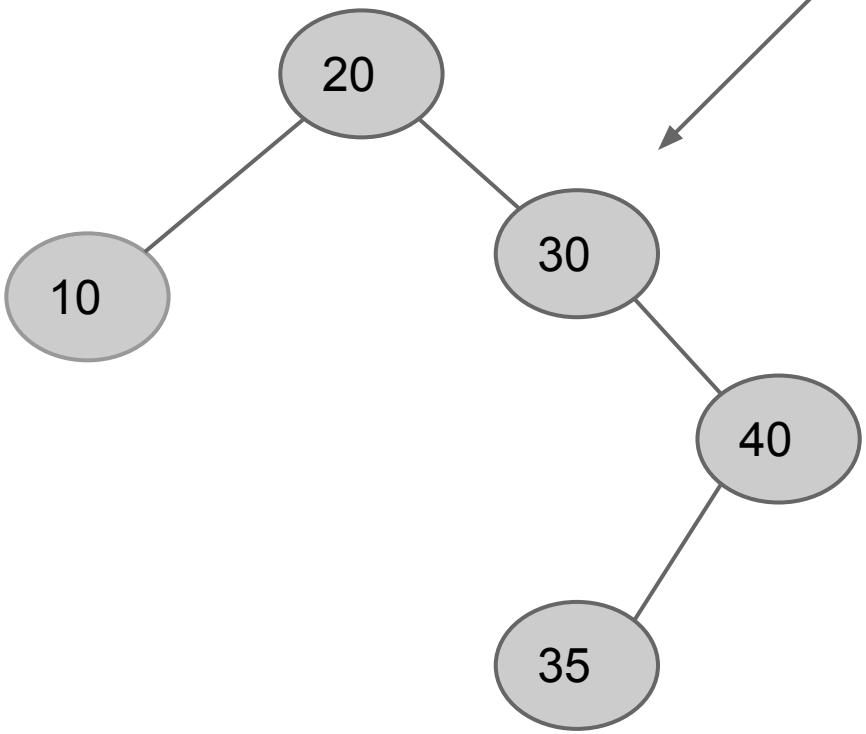
[10, 20, 30, 40, 35]



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

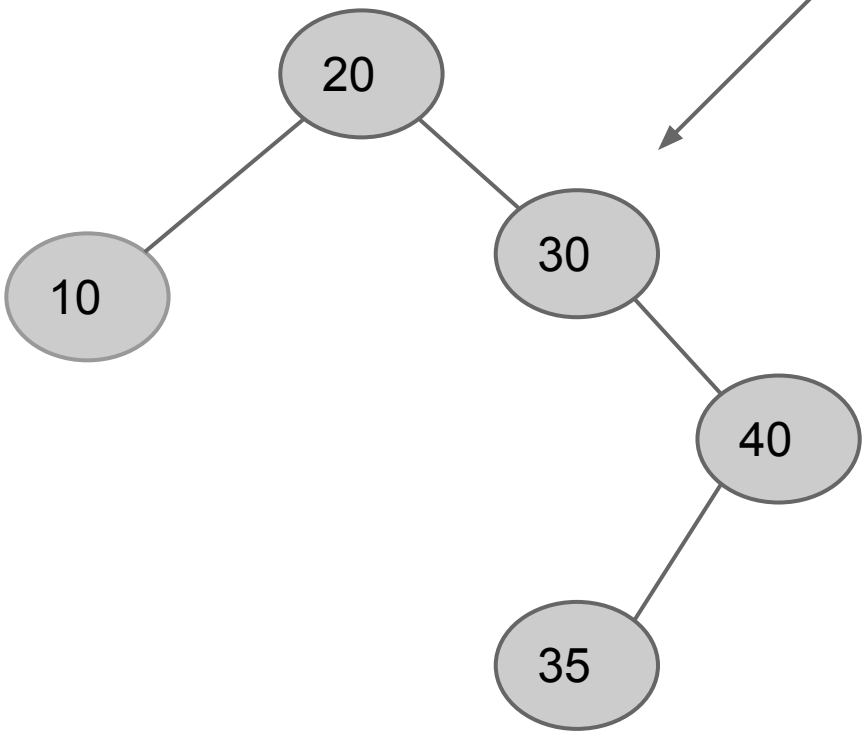
FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado

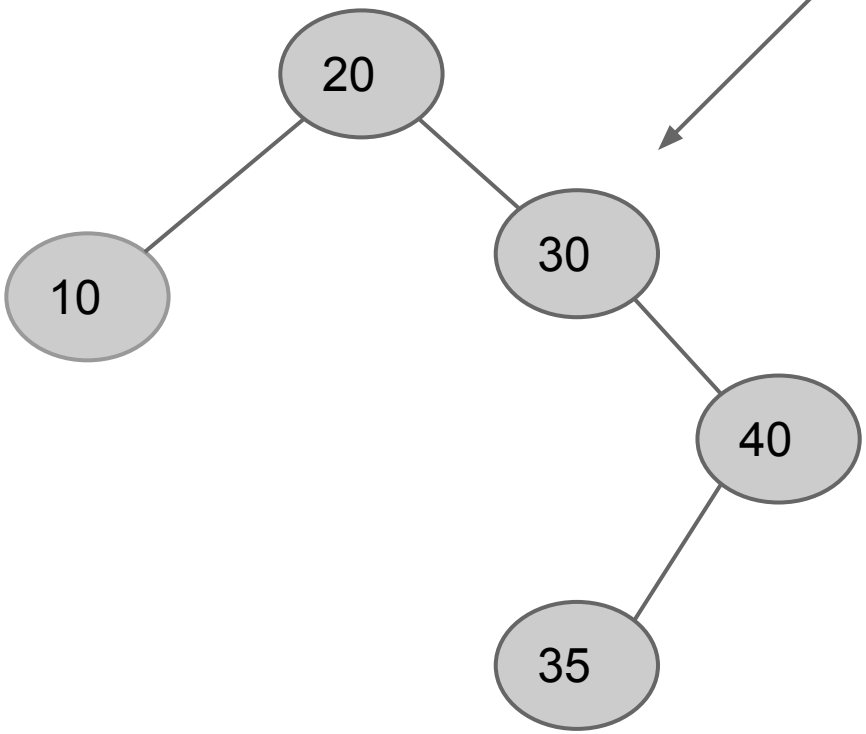


Qual a rotação indicada neste caso ?

Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]

FB: -1 - 1 = -2 Perigo: desbalanceado

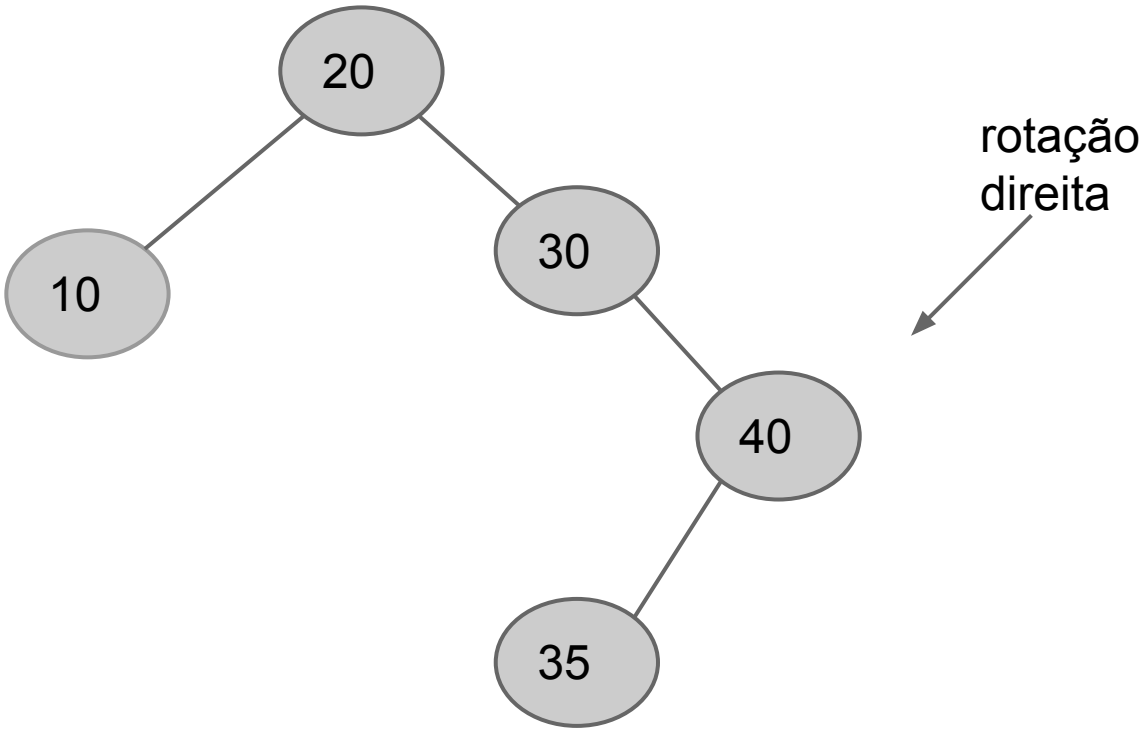


Qual a rotação indicada neste caso ?

Rotação dupla a esquerda.

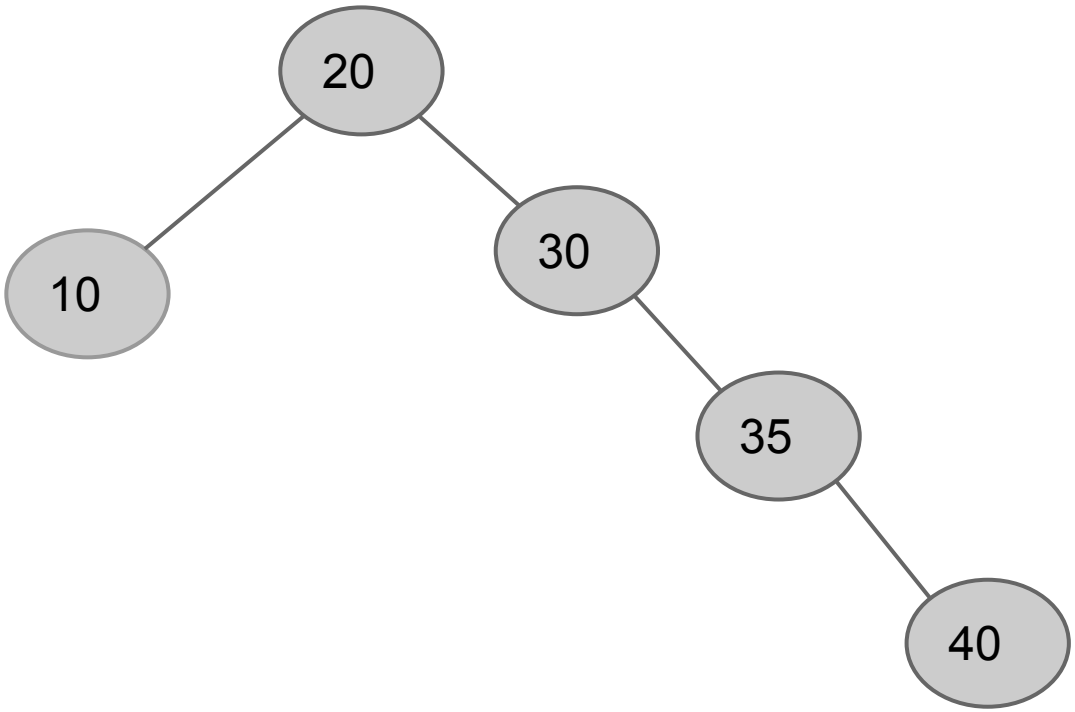
Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



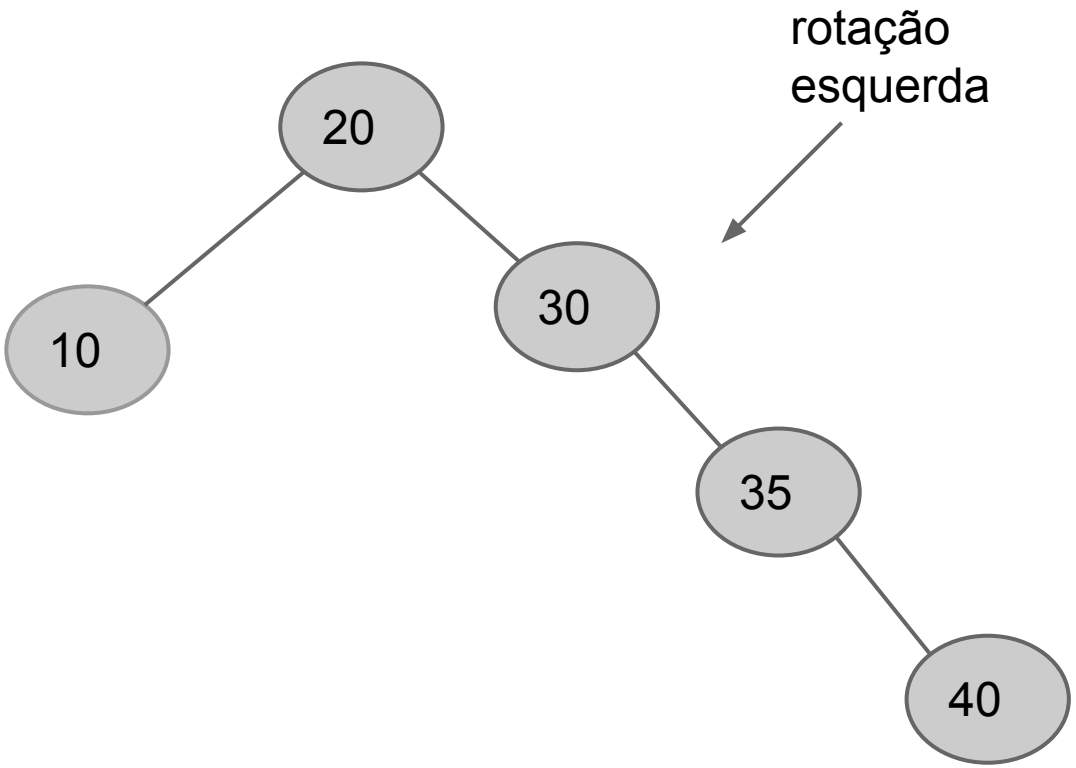
Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



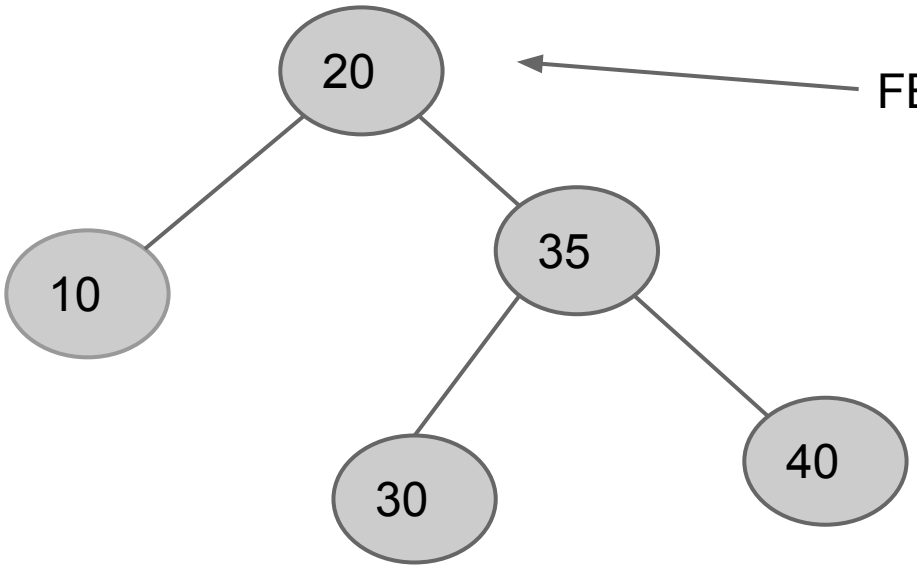
Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



Exemplo

[10, 20, 30, 40, 35]



FB: 0 - 1 = -1 OK

continua a checagem com o no ascendente.

Atividades

A partir de uma árvore AVL, insiram os seguintes valores:

a) [10, 20,15,45,67,81,91,10]
b) [1, 5,80,20,67,91,8,10]
c) [10,20,30, 50, 5, 15, 30]