Introdução às Probabilidades

EFT

índice

Idéia de probabilidade

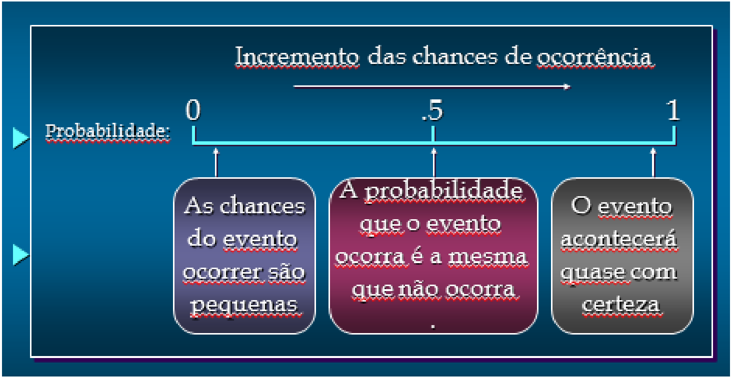

Figura: Probabilidade como uma medida numérica das chances de ocorrência

Espaço amostral

- Um experimento é qualquer processo que gera resultados bem definidos (sujeitos à incerteza)
- O espaço amostral de um experimento, denotado por Ω, é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.
- Um ponto amostral é qualquer resultado experimental.

Exemplo de espaço amostral

- lançar um dado de 6 faces
- os resultados possíveis do experimento são: $1, 2, 3, 4, 5, 6$
- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

eventos

- Um evento é qualquer subconjunto de resultados contenidos no espaço amostral (Ω).
- Um evento é chamado de evento simples se consiste de apenas um resultado.
- Um evento é chamado de evento composto se consiste de mais do que um resultado.

União

- a união de dois eventos A e B é o evento que consiste de todos os resultados que estão em A ou B.
- a notação é $A \cup B$
- se lê: A união B.

Interseção

- a interseção de dois eventos A e B é o evento que consiste de todos os resultados que estão em ambos A e B.
- a notação é $A \cap B$
- lê-se: A interseção B.

Complemento

- O complemento de um evento A é o conjunto de todos os resultados em Ω que não estão em A.
- a notação é A^c

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos

- Quando dois eventos A e B não tem resultados em comum, estes eventos são chamados de disjuntos ou mutuamente exclusivos
- por exemplo: No lançamento de um dado, sejam os eventos $A = \{1, 3, 5\}$ (resultados impares) e $B = \{2, 4, 6\}$ (resultados pares), os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

Diagramas de Venn

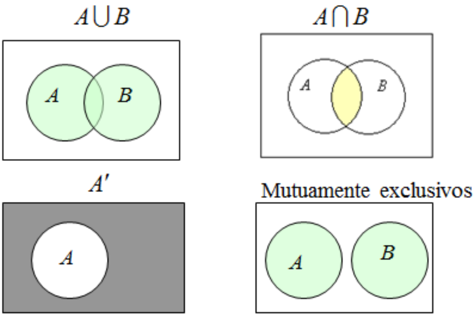

Figura: Diagramas de Venn

Leis de Morgan

as expressões a seguir são úteis e relacionam as três operações definidas anteriormente:

$$\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \cap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$\left(\cap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \cup_{i=1}^{n} E_i^c$$

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$,isto implica que x não está na $\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)$,

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$,isto implica que x não está na $\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)$, o que significa que x não está em nemhum dos E_i para $i = 1, ..., n$

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$,isto implica que x não está na $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$, o que significa que x não está em nemhum dos E_i para $i = 1, ..., n$ o que implica que $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$.

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$,isto implica que x não está na $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$, o que significa que x não está em nemhum dos E_i para $i = 1, ..., n$ o que implica que $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, x está contido na $\cap_{i=1}^{n} E_i^c$.

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$,isto implica que x não está na $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$, o que significa que x não está em nemhum dos E_i para $i = 1, ..., n$ o que implica que $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, x está contido na $\cap_{i=1}^{n} E_i^c$.
Pelo lado esquerdo, suponha que x está em $\cap_{i=1}^{n} E_i^c$, então $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$, o que significa que x não está contido em E_i para nenhum $i = 1, ..., n$ o que implica que x não está contido em $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$. Por sua vez, isso implica que x está contido em $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$

ideia da prova das leis de Morgan - primeira

Suponha que x seja um resultado de $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$,isto implica que x não está na $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$, o que significa que x não está em nemhum dos E_i para $i = 1, ..., n$ o que implica que $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, x está contido na $\cap_{i=1}^{n} E_i^c$.
Pelo lado esquerdo, suponha que x está em $\cap_{i=1}^{n} E_i^c$, então $x \subset E_i^c$ para todo $i = 1, ..., n$, o que significa que x não está contido em E_i para nenhum $i = 1, ..., n$ o que implica que x não está contido em $(\cup_{i=1}^{n} E_i)$. Por sua vez, isso implica que x está contido em $(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c$

ideia da prova das leis de Morgan - segunda

Utilizamos a primeira lei para demonstrar a segunda, já que

$$(\cup_{i=1}^{n} E_i^c)^c = \cap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$$

(Em lugar de considerar apenas E_i , tomamos E_i^c).
Como $(E_i^c)^c = E_i$, é equivalente a:

$$(\cup_{i=1}^{n} E_i^c)^c = \cap_{i=1}^{n} E_i$$

tomando os complementos em ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$\cup_{i=1}^{n} E_i^c = (\cap_{i=1}^{n} E_i)^c$$

Axiomas

- 1. $P(A) \geq 0$ para qualquer evento A
- 2. $P(\Omega) = 1$
- 3. Se os eventos $A_1, A_2, ...$ são mutuamente exclusivos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propriedades das probabilidades

- 0. $P(\emptyset) = 0$

  Prova:

  Seja a sequência de eventos: $E_1, E_2, \ldots$ onde $E_1 = \Omega$ e $E_i = \emptyset$ para todo $i > 1$.

Propriedades das probabilidades

- 0. $P(\emptyset) = 0$
  Prova:
  Seja a sequência de eventos: $E_1, E_2, \ldots$ onde $E_1 = \Omega$ e $E_i = \emptyset$ para todo $i > 1$. Como os eventos E_i são mutuamente exclusivos, e $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, temos pelo axioma 3, que:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(E_i)$$

  o que implica que $P(\emptyset) = 0$

Propriedades das probabilidades

- 0. $P(\emptyset) = 0$
  Prova:
  Seja a sequência de eventos: $E_1, E_2, \ldots$ onde $E_1 = \Omega$ e $E_i = \emptyset$ para todo $i > 1$. Como os eventos E_i são mutuamente exclusivos, e $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, temos pelo axioma 3, que:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(E_i)$$

  o que implica que $P(\emptyset) = 0$

Propriedades das probabilidades

- 1. Se A e B são mutuamente exclusivos,

$$P(A \cap B) = 0$$

- 2. Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ são mutuamente exclusivos,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

- 3. Para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

prova: Note que A e A^c são sempre mutuamente exclusivos, além disso, $\Omega = A \cup A^c$.

Propriedades das probabilidades

- 1. Se A e B são mutuamente exclusivos,

$$P(A \cap B) = 0$$

- 2. Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ são mutuamente exclusivos,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

- 3. Para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

prova: Note que A e A^c são sempre mutuamente exclusivos, além disso, $\Omega = A \cup A^c$. pelos axiomas 2 e 3:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

portanto, segue o resultado.

Propriedades das probabilidades

- 1. Se A e B são mutuamente exclusivos,

$$P(A \cap B) = 0$$

- 2. Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ são mutuamente exclusivos,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

- 3. Para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

prova: Note que A e A^c são sempre mutuamente exclusivos, além disso, $\Omega = A \cup A^c$. pelos axiomas 2 e 3:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

portanto, segue o resultado.

Propriedades das probabilidades

- 4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$
  prova: como $A \subset B$, podemos expressar B como :

$$B = A \cup A^c B$$

Propriedades das probabilidades

- 4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$
  prova: como $A \subset B$, podemos expressar B como :

$$B = A \cup A^c B$$

como A e $A^c B$ são mutuamente exclusivos, temos que

Propriedades das probabilidades

- 4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$
  prova: como $A \subset B$, podemos expressar B como :

$$B = A \cup A^c B$$

como A e $A^c B$ são mutuamente exclusivos, temos que

$$P(B) = P(A) + P(A^c B)$$

e como $P(A^c B) \geq 0$ pelo axioma 1, segue o resultado.

Propriedades das probabilidades

- 4. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$
  prova: como $A \subset B$, podemos expressar B como :

$$B = A \cup A^c B$$

como A e $A^c B$ são mutuamente exclusivos, temos que

$$P(B) = P(A) + P(A^c B)$$

e como $P(A^c B) \geq 0$ pelo axioma 1, segue o resultado.

Propriedades das probabilidades

- 5. Para dois eventos A e B qualquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

prova: escrevemos $A \cup B$ como a união de dois eventos disjuntos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup A^c B) \\ &= P(A) + P(A^c B) \end{aligned}$$

Propriedades das probabilidades

- 5. Para dois eventos A e B qualquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

prova: escrevemos $A \cup B$ como a união de dois eventos disjuntos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup A^c B) \\ &= P(A) + P(A^c B) \end{aligned}$$

como $B = AB \cup A^c B$, temos pelo axioma 3 que

$$P(B) = P(AB) + P(A^c B)$$

Propriedades das probabilidades

- 5. Para dois eventos A e B qualquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

prova: escrevemos $A \cup B$ como a união de dois eventos disjuntos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup A^c B) \\ &= P(A) + P(A^c B) \end{aligned}$$

como $B = AB \cup A^c B$, temos pelo axioma 3 que

$$P(B) = P(AB) + P(A^c B)$$

ou de maneira equivalente:

$$P(A^c B) = P(B) - P(AB)$$

segue disso o resultado

Propriedades das probabilidades

- 5. Para dois eventos A e B qualquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

prova: escrevemos $A \cup B$ como a união de dois eventos disjuntos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup A^c B) \\ &= P(A) + P(A^c B) \end{aligned}$$

como $B = AB \cup A^c B$, temos pelo axioma 3 que

$$P(B) = P(AB) + P(A^c B)$$

ou de maneira equivalente:

$$P(A^c B) = P(B) - P(AB)$$

segue disso o resultado

Propriedades das probabilidades

- 6. Para 3 eventos A, B e C,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & \; P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ & + P(ABC) \end{aligned}$$

Propriedades das probabilidades

- 7. Para os eventos $E_1, ...E_n$

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup ... \cup E_n) = & \sum_{i_1}^{n} P(E_i) + ... \\
& + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} ... E_{i_r}) + ... \\
& + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 ... E_n)
\end{aligned}
$$

exemplo

Se n pessoas estão no interior de uma sala, qual é a probabilidade de que duas pessoas não celebrem aniversário no mesmo dia do ano? Quão grande precisa ser n para que essa probabilidade seja menor que $1/2$?

solução: Cada pessoa pode celebrar seu aniversário em qualquer um dos 365 dias (sem contar 29 de fevereiro). Há no total 365^n resultados possíveis.

exemplo

Se n pessoas estão no interior de uma sala, qual é a probabilidade de que duas pessoas não celebrem aniversário no mesmo dia do ano? Quão grande precisa ser n para que essa probabilidade seja menor que $1/2$?
solução: Cada pessoa pode celebrar seu aniversário em qualquer um dos 365 dias (sem contar 29 de fevereiro). Há no total 365^n resultados possíveis.
supondo que cada resultado tenha a mesma probabilidade, a probabilidade desejada será:

$$\frac{(365)(364)(363)...(365-n+1)}{(365)^n}$$

é surprendente que para $n \geq 23$ esta probabilidade é menor do que $1/2$.

exemplo

Se n pessoas estão no interior de uma sala, qual é a probabilidade de que duas pessoas não celebrem aniversário no mesmo dia do ano? Quão grande precisa ser n para que essa probabilidade seja menor que $1/2$?
solução: Cada pessoa pode celebrar seu aniversário em qualquer um dos 365 dias (sem contar 29 de fevereiro). Há no total 365^n resultados possíveis.
supondo que cada resultado tenha a mesma probabilidade, a probabilidade desejada será:

$$\frac{(365)(364)(363)\ldots(365-n+1)}{(365)^n}$$

é surprendente que para $n \geq 23$ esta probabilidade é menor do que $1/2$.

A regra do produto

- Se o primeiro elemento ou objeto de um par ordenado pode ser usado de n_1 maneiras, e para cada uma destas n_1 maneiras o segundo objeto pode ser selecionado de n_2 formas, então o número de pares é $n_1 \times n_2$
- esta técnica pode ser generalizada para k-uplas

Arranjos

- Qualquer sequência ordenada de k objetos tomados de um conjunto de n $(n \geq k)$ objetos distintos, é chamada uma permutação de tamanho k desses objetos.
- Notação: $P_{k,n} = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$

Fatorial

- para qualquer inteiro positivo n, $n!$ é lido n fatorial e é definido como

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 1$$

- também $0! = 1$
- é possível escrever um arranjo como

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo

- Uma criança possui 4 canicas de cores vermelha, branca, azul e amarelo, de quantas formas diferentes 3 das 4 canicas podem ser alinhadas?
- Esta é uma permutação, desde que as canicas estarão alinhadas (em ordem), assim:

$$P_{3,4} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$$

- as canicas podem ser alinhadas de 24 formas distintas.

Combinações

- Dado um conjunto de n objetos distintos, qualquer subconjunto não ordenado de tamanho k destes objetos é chamado de combinação
- Notação:

$$C_{k,n} = \binom{n}{k}$$

- a fórmula do cálculo é:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo

Uma criança possui 4 canicas de cores vermelha, branca, azul e amarela, de quantas formas 3 das canicas podem ser extraídas?

- Esta é uma combinação, desde que as canicas são extraídas sem considerar a ordem:

$$C_{3,4} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

- as canicas podem ser extraídas de 4 formas diferentes.

Exemplo

Figura: Urna

três bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição de uma urna como da figura acima. Calcule a probabilidade que uma das bolas selecionadas é vermelha e as duas outras são pretas.

- $= \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}$

Exemplo

Figura: Urna

três bolas são selecionadas aleatoriamente sem reposição de uma urna como da figura acima. Calcule a probabilidade que uma das bolas selecionadas é vermelha e as duas outras são pretas.

- $= \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}$

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

para $1 \leq r \leq n$.

prova analítica: Dentro de um conjunto de n objetos, preste atenção num deles.

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

para $1 \leq r \leq n$.
prova analítica: Dentro de um conjunto de n objetos, preste atenção num deles.
como há um total de $\binom{n}{r}$ grupos de tamanho r, e a solução consiste em verificar quantos destes grupos contém ou não o objeto ao qual estamos observando.

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

para $1 \leq r \leq n$.
prova analítica: Dentro de um conjunto de n objetos, preste atenção num deles.
como há um total de $\binom{n}{r}$ grupos de tamanho r, e a solução consiste em verificar quantos destes grupos contém ou não o objeto ao qual estamos observando.
Há $\binom{n-1}{r-1}$ grupos de tamanho r que contém o objeto (pois cada grupo é formado selecionando $r-1$ dentre $n-1$ objetos restantes)

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

para $1 \leq r \leq n$.

prova analítica: Dentro de um conjunto de n objetos, preste atenção num deles.

como há um total de $\binom{n}{r}$ grupos de tamanho r, e a solução consiste em verificar quantos destes grupos contém ou não o objeto ao qual estamos observando.

Há $\binom{n-1}{r-1}$ grupos de tamanho r que contém o objeto (pois cada grupo é formado selecionando $r-1$ dentre $n-1$ objetos restantes)

Há $\binom{n-1}{r}$ grupos de tamanho r que não contém o objeto observado (pois seleciona-se r objetos dentre os $n-1$ restantes).

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

para $1 \leq r \leq n$.
prova analítica: Dentro de um conjunto de n objetos, preste atenção num deles.
como há um total de $\binom{n}{r}$ grupos de tamanho r, e a solução consiste em verificar quantos destes grupos contém ou não o objeto ao qual estamos observando.
Há $\binom{n-1}{r-1}$ grupos de tamanho r que contém o objeto (pois cada grupo é formado selecionando $r-1$ dentre $n-1$ objetos restantes)
Há $\binom{n-1}{r}$ grupos de tamanho r que não contém o objeto observado (pois seleciona-se r objetos dentre os $n-1$ restantes).

Propriedade da análise combinatória

A identidade a seguir, também é útil na análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

para $1 \leq r \leq n$.

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Existem r^n resultados possíveis quando n bolas diferentes são distribuidas em r urnas distintas.

Suponhamos que as bolas são indistinguiveis. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis?

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Existem r^n resultados possíveis quando n bolas diferentes são distribuidas em r urnas distintas.

Suponhamos que as bolas são indistinguiveis. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis?

O resultado do experimento que envolve distribuir n bolas indistinguiveis em r urnas pode ser descrito como um vetor:

$$(x_1, x_2, ..., x_r)$$

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Existem r^n resultados possíveis quando n bolas diferentes são distribuidas em r urnas distintas.
Suponhamos que as bolas são indistinguiveis. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis?
O resultado do experimento que envolve distribuir n bolas indistinguiveis em r urnas pode ser descrito como um vetor:

$$(x_1, x_2, ..., x_r)$$

onde x_i indica o número de bolas depositadas na i-ésima urna.

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Existem r^n resultados possíveis quando n bolas diferentes são distribuidas em r urnas distintas.
Suponhamos que as bolas são indistinguiveis. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis?
O resultado do experimento que envolve distribuir n bolas indistinguiveis em r urnas pode ser descrito como um vetor:

$$(x_1, x_2, ..., x_r)$$

onde x_i indica o número de bolas depositadas na i-ésima urna.
portanto, o problema se reduz a encontrar o número de vetores com valores inteiros não negativos $(x_1, ..., x_r)$ tais que

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = n$$

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Existem r^n resultados possíveis quando n bolas diferentes são distribuidas em r urnas distintas.
Suponhamos que as bolas são indistinguiveis. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis?
O resultado do experimento que envolve distribuir n bolas indistinguiveis em r urnas pode ser descrito como um vetor:

$$(x_1, x_2, ..., x_r)$$

onde x_i indica o número de bolas depositadas na i-ésima urna.
portanto, o problema se reduz a encontrar o número de vetores com valores inteiros não negativos $(x_1, ..., x_r)$ tais que

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = n$$

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Considere apenas as soluções inteiras positivas, i.e, temos n objetos idênticos alinhados e queremos dividi-los em r grupos não vazios.

para fazer isto, selecionamos $r-1$ dos $n-1$ espaços entre objetos adjacentes como nossos pontos divisórios:

$$ooo|ooo|oo$$

se tivermos $n=8$ e $r=3$ escolhemos dois divisores de forma a obter: (no exemplo: $x_1=3$, $x_2=3$ e $x_3=2$)

como há

$$\binom{n-1}{r-1}$$

seleções possíveis, temos a proposição:

exemplo de número de soluções inteiras de equações

Considere apenas as soluções inteiras positivas, i.e, temos n objetos idênticos alinhados e queremos dividi-los em r grupos não vazios.
para fazer isto, selecionamos $r-1$ dos $n-1$ espaços entre objetos adjacentes como nossos pontos divisórios:

$$ooo|ooo|oo$$

se tivermos $n=8$ e $r=3$ escolhemos dois divisores de forma a obter: (no exemplo: $x_1=3$, $x_2=3$ e $x_3=2$)
como há

$$\binom{n-1}{r-1}$$

seleções possíveis, temos a proposição:

proposição

Existem

$$\binom{n-1}{r-1}$$

vetores distintos com valores inteiros positivos $(x_1, ..., x_n)$ satisfazendo a equação:

$$x_1 + ... + x_r = n$$

com $x_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., r$

proposição completa

Existem

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

vetores distintos com valores inteiros não negativos $(x_1, ..., x_n)$ satisfazendo a equação:

$$x_1 + ... + x_r = n$$

com $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., r$
Para as soluções não negativas de $x_1 + ... + x_r = n$, considere as soluções positivas de $y_1 + ... + y_r = n + r$
o que resulta de fazer $y_i = x_i + 1$

proposição completa

Existem

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

vetores distintos com valores inteiros não negativos $(x_1, ..., x_n)$ satisfazendo a equação:

$$x_1 + ... + x_r = n$$

com $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., r$
Para as soluções não negativas de $x_1 + ... + x_r = n$, considere as soluções positivas de $y_1 + ... + y_r = n + r$
o que resulta de fazer $y_i = x_i + 1$

exemplo

Suponha que são lançados dois dados (bem equilibrados), suponha que o primeiro dado seja um 3. Dada essa informação, qual a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8?

como os resultados são igualmente prováveis, temos que a probabilidade de qualquer par (a, b) é $1/36$.

exemplo

Suponha que são lançados dois dados (bem equilibrados), suponha que o primeiro dado seja um 3. Dada essa informação, qual a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8?
como os resultados são igualmente prováveis, temos que a probabilidade de qualquer par (a, b) é $1/36$.
sabendo que o primeiro resultado é 3, existirão 6 resultados possíveis para o experimento: $(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)$. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade, os resultados deveriam continuar a ter probabilidades iguais.

exemplo

Suponha que são lançados dois dados (bem equilibrados), suponha que o primeiro dado seja um 3. Dada essa informação, qual a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8?
como os resultados são igualmente prováveis, temos que a probabilidade de qualquer par (a, b) é $1/36$.
sabendo que o primeiro resultado é 3, existirão 6 resultados possíveis para o experimento: $(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)$. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade, os resultados deveriam continuar a ter probabilidades iguais.
Isto é, dado que o primeiro dado é 3, a probabilidade (condicional) de cada um dos resultados $(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)$ é $1/6$, enquanto a probabilidade condicional dos outros 30 pontos é 0.

exemplo

Suponha que são lançados dois dados (bem equilibrados), suponha que o primeiro dado seja um 3. Dada essa informação, qual a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8?
como os resultados são igualmente prováveis, temos que a probabilidade de qualquer par (a, b) é $1/36$.
sabendo que o primeiro resultado é 3, existirão 6 resultados possíveis para o experimento: $(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)$. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade, os resultados deveriam continuar a ter probabilidades iguais.
Isto é, dado que o primeiro dado é 3, a probabilidade (condicional) de cada um dos resultados $(3, 1), (3, 2), ..., (3, 6)$ é $1/6$, enquanto a probabilidade condicional dos outros 30 pontos é 0.

Probabilidade Condicional

- Para dois eventos A e B, com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A ocorrer dado que B ocorreu é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Isto permite escrever:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

exemplo

Um estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade dele concluir o teste em menos de x horas é $x/2$ $\forall 0 \leq x \leq 1$. Dado que o estudante continúa a trabalhar após $0,75$ horas, qual a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?

Seja L_x o evento: O estudante finaliza o teste em menos que x horas $0 \leq x \leq 1$.

Seja F o evento : o estudante usa a hora completa (isto é, não finalizou o teste em menos que 1 hora)

$$P(F) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0,5$$

exemplo

Um estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade dele concluir o teste em menos de x horas é $x/2$ $\forall 0 \leq x \leq 1$. Dado que o estudante continúa a trabalhar após $0,75$ horas, qual a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?
Seja L_x o evento: O estudante finaliza o teste em menos que x horas $0 \leq x \leq 1$.
Seja F o evento : o estudante usa a hora completa (isto é, não finalizou o teste em menos que 1 hora)

$$P(F) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0,5$$

o evento em que o estudante ainda está trabalhando em $0,75$ é o complemento do evento $L_{0,75}$, então a probabilidade desejada é:

exemplo

Um estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade dele concluir o teste em menos de x horas é $x/2$ $\forall 0 \leq x \leq 1$. Dado que o estudante continúa a trabalhar após $0,75$ horas, qual a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?
Seja L_x o evento: O estudante finaliza o teste em menos que x horas $0 \leq x \leq 1$.
Seja F o evento : o estudante usa a hora completa (isto é, não finalizou o teste em menos que 1 hora)

$$P(F) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0,5$$

o evento em que o estudante ainda está trabalhando em $0,75$ é o complemento do evento $L_{0,75}$, então a probabilidade desejada é:

exemplo

$$
\begin{aligned}
P(F/L^c_{0,75}) &= \frac{P(FL^c_{0,75})}{P(L^c_{0,75})} \\
&= \frac{P(F)}{1 - P(L_{0,75})} \\
&= \frac{0,5}{0,625} = 0,8
\end{aligned}
$$

Probabilidade total

- Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ são mutuamente exclusivos e exaustivos, para qualquer outro evento B,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

Bayes

- Sejam $A_1, A_2, ..., A_k$ uma coleção de eventos mutuamente exclusivos e exaustivos com $P(A_i) > 0$, para $i = 1, 2, ..., k$. Então, para qualquer outro evento B,

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \times P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B|A_i)}$$

$j = 1, 2, ..., k$

Exemplo

Uma loja de lâmpadas é abastecida por três fornecedores A, B e C com $10\%, 20\%$ e 70% de lâmpadas respectivamente. Tem sido determinado que 1% das lâmpadas vindas de A são defeituosas, assim como 3% das de B e 4% das lâmpadas de C. Se uma lâmpada é selecionada ao acaso (aleatoriamente) e se encontra que é defeituosa, qual é a probabilidade que esta lâmpada tenha vindo do fornecedor B?.

- Sejam os eventos D: a lâmpada é defeituosa, A: a lâmpada é do fornecedor A, B: é do fornecedor B, e C: é de C.

$$P(B|D) = \frac{P(B) \times P(D|B)}{P(A) \times P(D|A) + P(B) \times P(D|B) + P(C) \times P(D|C)}$$

$$P(B|D) = \frac{0,2 \times 0,03}{0,1 \times 0,01 + 0,2 \times 0,03 + 0,7 \times 0,04} \approx 0,1714$$

Independência

- Dois eventos A e B são eventos independentes se

$$P(A|B) = P(A)$$

- de outra maneira, A e B são dependentes.

Independência

- Dois eventos A e B são eventos independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Este resultado é generalizável para mais de 2

Propriedades

Se dois eventos A e B são independentes,

- 1.
$$A \ e B^c \text{são também independentes}$$
- 2.
$$A^c \ e \ B \text{são também independentes}$$
- 3.
$$A^c \ e \ B^c \text{são também independentes}$$

propriedades

é sempre verdade que:

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

Como A e B são independentes,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

segue que:

propriedades

é sempre verdade que:

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

Como A e B são independentes,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

segue que:

$$\begin{aligned} P(AB^c) &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)\left[1 - P(B)\right] \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

propriedades

é sempre verdade que:

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

Como A e B são independentes,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

segue que:

$$\begin{aligned} P(AB^c) &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)\left[1 - P(B)\right] \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

Independência de vários eventos

k eventos $A_1, ..., A_k$ são independentes se, para cada subconjunto $A_{i_1}, ..., A_{i_j}$ de estes eventos, $(j = 2, 3, ..., k)$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} ... \cap A_{i_j}) = P(A_{i_1}) ... P(A_{i_j})$$

Exemplo

Considere um experimento no qual o espaço amostral Ω contém 4 resultados $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, suponha que a probabilidade de cada resultado é $1/4$

Sejam 3 eventos definidos como segue: $A = \{s_1, s_2\}$, $B = \{s_1, s_3\}$ e $C = \{s_1, s_4\}$

Exemplo

Considere um experimento no qual o espaço amostral Ω contém 4 resultados $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, suponha que a probabilidade de cada resultado é $1/4$

Sejam 3 eventos definidos como segue: $A = \{s_1, s_2\}$, $B = \{s_1, s_3\}$ e $C = \{s_1, s_4\}$

temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ e

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 1/4$$

como a última igualdade não é satisfeita, diremos que os eventos AB , AC e BC são independentes par a par, mas os três não são independentes

Exemplo

Considere um experimento no qual o espaço amostral Ω contém 4 resultados $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, suponha que a probabilidade de cada resultado é $1/4$
Sejam 3 eventos definidos como segue: $A = \{s_1, s_2\}$, $B = \{s_1, s_3\}$ e $C = \{s_1, s_4\}$
temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ e

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 1/4$$

como a última igualdade não é satisfeita, diremos que os eventos AB , AC e BC são independentes par a par, mas os três não são independentes

exemplo

Suponha que uma moeda honesta é lançada até que apareça uma cara pela primeira vez, assuma que os resultados dos lançamentos são independentes. Determine a probabilidade p_n que são requeridos exatamente n lançamentos.

A probabilidade requerida é igual a obter $n-1$ coroas consecutivamente e depois uma coroa no seguinte lançamento.

exemplo

Suponha que uma moeda honesta é lançada até que apareça uma cara pela primeira vez, assuma que os resultados dos lançamentos são independentes. Determine a probabilidade p_n que são requeridos exatamente n lançamentos.

A probabilidade requerida é igual a obter $n-1$ coroas consecutivamente e depois uma coroa no seguinte lançamento.

Como os resultados são independentes, teremos:

$$p_n = (1/2)^{n-1} * 1/2$$

exemplo

Suponha que uma moeda honesta é lançada até que apareça uma cara pela primeira vez, assuma que os resultados dos lançamentos são independentes. Determine a probabilidade p_n que são requeridos exatamente n lançamentos.
A probabilidade requerida é igual a obter $n-1$ coroas consecutivamente e depois uma coroa no seguinte lançamento.
Como os resultados são independentes, teremos:

$$p_n = (1/2)^{n-1} * 1/2$$

a probabilidade de obter uma cara será então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$$

exemplo

Suponha que uma moeda honesta é lançada até que apareça uma cara pela primeira vez, assuma que os resultados dos lançamentos são independentes. Determine a probabilidade p_n que são requeridos exatamente n lançamentos.
A probabilidade requerida é igual a obter $n-1$ coroas consecutivamente e depois uma coroa no seguinte lançamento.
Como os resultados são independentes, teremos:

$$p_n = (1/2)^{n-1} * 1/2$$

a probabilidade de obter uma cara será então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$$

exemplo: O problema do colecionador

Um time de futebol, decide lançar um álbum com as fotos dos seus r jogadores mais emblemáticos de todos os tempos. Assuma que cada figura é vendida separadamente e a probabilidade de obter a foto de qualquer jogador é a mesma e independente das anteriores já obtidas. Determinar a probabilidade p que um indivíduo que compra n figuras $(n \geq r)$ completará o álbum. (terá o conjunto completo de fotos).

exemplo: O problema do colecionador

Um time de futebol, decide lançar um álbum com as fotos dos seus r jogadores mais emblemáticos de todos os tempos. Assuma que cada figura é vendida separadamente e a probabilidade de obter a foto de qualquer jogador é a mesma e independente das anteriores já obtidas. Determinar a probabilidade p que um indivíduo que compra n figuras $(n \geq r)$ completará o álbum. (terá o conjunto completo de fotos).

exemplo

Para $i = 1, ..., r$, seja A_i o evento: a foto do jogador i não está entre todas as n figuras compradas.

$\cup_{i=1}^{r} A_i$ é o evento: A figura de pelo menos um jogador está faltando (o álbum não está completo)

exemplo

Para $i = 1, ..., r$, seja A_i o evento: a foto do jogador i não está entre todas as n figuras compradas.

$\cup_{i=1}^{r} A_i$ é o evento: A figura de pelo menos um jogador está faltando (o álbum não está completo)

Devemos encontrar então:

$$P(\cup_{i=1}^{r} A_i)$$

exemplo

Para $i = 1, ..., r$, seja A_i o evento: a foto do jogador i não está entre todas as n figuras compradas.

$\cup_{i=1}^{r} A_i$ é o evento: A figura de pelo menos um jogador está faltando (o álbum não está completo)

Devemos encontrar então:

$$P(\cup_{i=1}^{r} A_i)$$

A probabilidade de que a figura do jogador i não seja encontrada em alguma compra é $(r-1)/r$.

exemplo

Para $i = 1, ..., r$, seja A_i o evento: a foto do jogador i não está entre todas as n figuras compradas.
$\cup_{i=1}^{r} A_i$ é o evento: A figura de pelo menos um jogador está faltando (o álbum não está completo)
Devemos encontrar então:

$$P(\cup_{i=1}^{r} A_i)$$

A probabilidade de que a figura do jogador i não seja encontrada em alguma compra é $(r-1)/r$.
como as figuras são vendidas separadamente, a probabilidade que a figura do jogador i não seja alguma das figuras compradas é $[(r-1)/r]^n$, desta maneira,

$$P(A_i) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n \qquad para\ i = 1, 2, ..., r$$

exemplo

Para $i = 1, ..., r$, seja A_i o evento: a foto do jogador i não está entre todas as n figuras compradas.
$\cup_{i=1}^{r} A_i$ é o evento: A figura de pelo menos um jogador está faltando (o álbum não está completo)
Devemos encontrar então:

$$P(\cup_{i=1}^{r} A_i)$$

A probabilidade de que a figura do jogador i não seja encontrada em alguma compra é $(r-1)/r$.
como as figuras são vendidas separadamente, a probabilidade que a figura do jogador i não seja alguma das figuras compradas é $[(r-1)/r]^n$, desta maneira,

$$P(A_i) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n \quad para\ i = 1, 2, ..., r$$

exemplo

Considere agora dois jogadores i e j. A probabilidade de que nenhum dos dois seja obtido em qualquer compra é: $(r-2)/r$.

a probabilidade que estes dois jogadores não tenham aparecido em nenhuma das n figuras compradas é então:

$$P(A_iA_j) = \left(\frac{r-2}{r}\right)^n \quad para\ i,j = 1,2,...,r;\ i \neq j$$

exemplo

Considere agora dois jogadores i e j. A probabilidade de que nenhum dos dois seja obtido em qualquer compra é: $(r-2)/r$.
a probabilidade que estes dois jogadores não tenham aparecido em nenhuma das n figuras compradas é então:

$$P(A_iA_j) = \left(\frac{r-2}{r}\right)^n \quad para\ i, j = 1, 2, ..., r;\ \ i \neq j$$

exemplo

para 3 jogadores teriamos:

$$P(A_iA_jA_k) = \left(\frac{r-3}{r}\right)^n \quad para\ i,j,k = 1,2,...,r;\ i \neq j \neq k$$

observe que :

$$P(A_1A_2...A_r) = 0$$

exemplo

para 3 jogadores teriamos:

$$P(A_i A_j A_k) = \left(\frac{r-3}{r}\right)^n \quad para\ i, j, k = 1, 2, ..., r;\ \ i \neq j \neq k$$

observe que :

$$P(A_1 A_2 ... A_r) = 0$$

Chegamos então a solução :

exemplo

para 3 jogadores teriamos:

$$P(A_iA_jA_k) = \left(\frac{r-3}{r}\right)^n \quad para\ i,j,k = 1,2,...,r;\ \ i \neq j \neq k$$

observe que :

$$P(A_1A_2...A_r) = 0$$

Chegamos então a solução :

exemplo

$$P(\cup_{i=1}^{r} A_i) = r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n - \binom{r}{2}\left(\frac{r-2}{r}\right)^n + \ldots$$

$$+ (-1)^r \binom{r}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j+1} \binom{r}{j}\left(1 - \frac{j}{r}\right)^n$$

$$p = 1 - P(\cup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{j}^{r-1} (-1)^{j+1} \binom{r}{j}\left(1 - \frac{j}{r}\right)^n$$