Spectre d'un signal échantillonné

On considère le signal $x(t) = e^{-\sigma|t|}\cos(2\pi f_0 t)$. On prendra $f_0 = 30Hz$. On rappelle que la Transformée de Fourier (TF) de x est

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + 4\pi^2(f-f_0)^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + 4\pi^2(f+f_0)^2}\right).$$

1. Comment varie l'allure de $\hat{x}(f)$ lorsque σ augmente ? Tracer sur un même graphique $\hat{x}(f)$ pour $\sigma = 5$ et $\sigma = 15$. Quelle propriété générale ces courbes illustrent-elles ?

   Dans la suite, on prend $\sigma = 15$. On considère l'échantillonnage uniforme de $x(t)$ à une période T_e. On note $x_n = x(nT_e)$
2. Existe-t-il des valeurs de T_e assurant la reconstruction parfaite de $x(t)$ à partir de ses échantillons ? Soit

   $$\hat{\mathcal{X}}_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{x}(f - \frac{n}{T_e}) \tag{1}$$

   le spectre du signal échantillonné.
3. Pour les trois cas $\frac{1}{T_e^{(1)}} = 120$ Hz, $\frac{1}{T_e^{(2)}} = 70$ Hz et $\frac{1}{T_e^{(3)}} = 30$ Hz, représenter sur trois graphiques en regard (commande `subplot`) la fonction $\hat{\mathcal{X}}_e(f)$ dans la bande $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ (justifier grossièrement pourquoi ne prendre qu'une vingtaine de termes dans (1) constitue une approximation raisonnable). Conclure quant à la reconstruction de $x(t)$ à partir des échantillons.
4. On s'intéresse au cas "limite" $\frac{1}{T_e^{(2)}} = 70$ Hz. Comparer $\hat{x}(f)$ et $T_e\hat{\mathcal{X}}_e(f)$. Avant l'opération d'échantillonnage, on suppose qu'on utilise un filtre anti-repliement idéal (passe-bas de fréquence de coupure $\frac{1}{2T_e}$). Comparer maintenant $\hat{x}(f)$ et $T_e\hat{\mathcal{X}}_e(f)$.