Ejercicios de Interpolación

1. Interpolación Lineal

1.1. Ejercicio 1.1: Edad y estatura

Un niño medía 120 cm a los 8 años y 140 cm a los 12 años. ¿Cuánto medía aproximadamente a los 10 años?

Solución:

Puntos: $(8, 120)$ y $(12, 140)$, buscar y cuando $x = 10$

$$y = 120 + \frac{140 - 120}{12 - 8}(10 - 8)$$

$$y = 120 + \frac{20}{4}(2)$$

$$y = 120 + 5(2) = 120 + 10 = 130$$

Respuesta: 130 cm

1.2. Ejercicio 1.2: Precio de gasolina

El precio de la gasolina era S/ 3.50 por galón en enero y S/ 4.00 en mayo. ¿Cuál era el precio aproximado en marzo? (Considerar enero = mes 1, marzo = mes 3, mayo = mes 5)

Solución:

Puntos: $(1, 3{,}50)$ y $(5, 4{,}00)$, buscar y cuando $x = 3$

$$y = 3{,}50 + \frac{4{,}00 - 3{,}50}{5 - 1}(3 - 1)$$

$$y = 3{,}50 + \frac{0{,}50}{4}(2)$$

$$y = 3{,}50 + 0{,}125(2) = 3{,}50 + 0{,}25 = 3{,}75$$

Respuesta: S/ 3.75 por galón

1.3. Ejercicio 1.3: Distancia recorrida

Un corredor estaba en el kilómetro 5 a los 30 minutos y en el kilómetro 9 a los 50 minutos. ¿En qué kilómetro estaba a los 40 minutos?

Solución:

Puntos: $(30, 5)$ y $(50, 9)$, buscar y cuando $x = 40$

$$y = 5 + \frac{9-5}{50-30}(40-30)$$

$$y = 5 + \frac{4}{20}(10)$$

$$y = 5 + 0{,}2(10) = 5 + 2 = 7$$

Respuesta: Kilómetro 7

1.4. Ejercicio 1.4: Ahorro mensual

María tenía S/ 500 ahorrados en marzo y S/ 800 en julio. ¿Cuánto tenía aproximadamente en mayo? (marzo = 3, mayo = 5, julio = 7)

Solución:

Puntos: $(3, 500)$ y $(7, 800)$, buscar y cuando $x = 5$

$$y = 500 + \frac{800-500}{7-3}(5-3)$$

$$y = 500 + \frac{300}{4}(2)$$

$$y = 500 + 75(2) = 500 + 150 = 650$$

Respuesta: S/ 650

2. Interpolación de Lagrange (3 puntos)

2.1. Ejercicio 2.1: Calificaciones

Un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones:

- Examen 1: 70 puntos
- Examen 2: 85 puntos
- Examen 3: 80 puntos

Estima cuál habría sido su calificación en un examen intermedio entre el 1 y el 2 (examen 1.5).

Solución:

Puntos: $(1, 70)$, $(2, 85)$, $(3, 80)$, buscar $P(1{,}5)$

Calculamos $L_0(1{,}5)$:

$$L_0(1{,}5) = \frac{(1{,}5-2)(1{,}5-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(-0{,}5)(-1{,}5)}{(-1)(-2)} = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}375$$

Calculamos $L_1(1{,}5)$:

$$L_1(1{,}5) = \frac{(1{,}5-1)(1{,}5-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{(0{,}5)(-1{,}5)}{(1)(-1)} = \frac{-0{,}75}{-1} = 0{,}75$$

Calculamos $L_2(1{,}5)$:

$$L_2(1{,}5) = \frac{(1{,}5-1)(1{,}5-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(0{,}5)(-0{,}5)}{(2)(1)} = \frac{-0{,}25}{2} = -0{,}125$$

Aplicamos Lagrange:

$$P(1{,}5) = 70(0{,}375) + 85(0{,}75) + 80(-0{,}125)$$

$$P(1{,}5) = 26{,}25 + 63{,}75 - 10 = 80$$

Respuesta: 80 puntos

2.2. Ejercicio 2.2: Horas de sueño

Una persona durmió:

- Lunes: 7 horas
- Miércoles: 6 horas
- Viernes: 8 horas

Estima las horas de sueño del martes (usar lunes=1, martes=2, miércoles=3, viernes=5).

Solución:

Puntos: $(1,7)$, $(3,6)$, $(5,8)$, buscar $P(2)$

$L_0(2)$:

$$L_0(2) = \frac{(2-3)(2-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{(-1)(-3)}{(-2)(-4)} = \frac{3}{8}$$

$L_1(2)$:

$$L_1(2) = \frac{(2-1)(2-5)}{(3-1)(3-5)} = \frac{(1)(-3)}{(2)(-2)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$L_2(2)$:

$$L_2(2) = \frac{(2-1)(2-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{(1)(-1)}{(4)(2)} = \frac{-1}{8}$$

$P(2)$:

$$P(2) = 7 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$P(2) = \frac{21}{8} + \frac{18}{4} - 1 = 2{,}625 + 4{,}5 - 1 = 6{,}125$$

Respuesta: Aproximadamente 6.1 horas

2.3. Ejercicio 2.3: Temperatura del horno

Un horno tenía estas temperaturas:

- Minuto 0: 20°C
- Minuto 5: 100°C
- Minuto 10: 150°C

¿Qué temperatura tenía en el minuto 3?
Solución:
Puntos: $(0, 20)$, $(5, 100)$, $(10, 150)$, buscar $P(3)$
$L_0(3)$:

$$L_0(3) = \frac{(3-5)(3-10)}{(0-5)(0-10)} = \frac{(-2)(-7)}{(-5)(-10)} = \frac{14}{50} = 0{,}28$$

$L_1(3)$:

$$L_1(3) = \frac{(3-0)(3-10)}{(5-0)(5-10)} = \frac{(3)(-7)}{(5)(-5)} = \frac{-21}{-25} = 0{,}84$$

$L_2(3)$:

$$L_2(3) = \frac{(3-0)(3-5)}{(10-0)(10-5)} = \frac{(3)(-2)}{(10)(5)} = \frac{-6}{50} = -0{,}12$$

$P(3)$:

$$P(3) = 20(0{,}28) + 100(0{,}84) + 150(-0{,}12)$$

$$P(3) = 5{,}6 + 84 - 18 = 71{,}6$$

Respuesta: 71.6°C

3. Diferencias Divididas de Newton

3.1. Ejercicio 3.1: Peso de un bebé

Un bebé pesaba:

- Mes 0: 3 kg
- Mes 2: 5 kg
- Mes 4: 6 kg

Construye el polinomio de Newton y calcula el peso en el mes 3.
Solución:
Tabla de diferencias divididas:

x	$f[x]$	$f[x, x_{i+1}]$	$f[x, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	3		
		$\frac{5-3}{2-0} = 1$	
2	5		$\frac{0{,}5-1}{4-0} = -0{,}125$
		$\frac{6-5}{4-2} = 0{,}5$	
4	6		

Polinomio de Newton:

$$P(x) = 3 + 1(x - 0) + (-0{,}125)(x - 0)(x - 2)$$

$$P(x) = 3 + x - 0{,}125x(x - 2)$$

Para $x = 3$:

$$P(3) = 3 + 3 - 0{,}125(3)(3 - 2)$$

$$P(3) = 6 - 0{,}125(3)(1)$$

$$P(3) = 6 - 0{,}375 = 5{,}625$$

Respuesta: 5.625 kg (aproximadamente 5.6 kg)

3.2. Ejercicio 3.2: Precio de acciones

El precio de una acción fue:

- Día 1: S/ 10
- Día 3: S/ 12
- Día 5: S/ 15

Encuentra el polinomio y estima el precio en el día 4.
Solución:
Tabla de diferencias divididas:

x	$f[x]$	$f[x, x_{i+1}]$	$f[x, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	10		
		$\frac{12-10}{3-1} = 1$	
3	12		$\frac{1{,}5-1}{5-1} = 0{,}125$
		$\frac{15-12}{5-3} = 1{,}5$	
5	15		

Polinomio:

$$P(x) = 10 + 1(x - 1) + 0{,}125(x - 1)(x - 3)$$

Para $x = 4$:

$$P(4) = 10 + 1(4 - 1) + 0{,}125(4 - 1)(4 - 3)$$

$$P(4) = 10 + 3 + 0{,}125(3)(1)$$

$$P(4) = 13 + 0{,}375 = 13{,}375$$

Respuesta: S/ 13.38 (aproximadamente)

3.3. Ejercicio 3.3: Consumo de agua

El consumo de agua en litros fue:

- Hora 1: 5 L
- Hora 2: 9 L
- Hora 4: 20 L

Calcula el consumo aproximado en la hora 3.
Solución:
Tabla de diferencias divididas:

x	$f[x]$	$f[x, x_{i+1}]$	$f[x, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	5		
		$\frac{9-5}{2-1} = 4$	
2	9		$\frac{5,5-4}{4-1} = 0,5$
		$\frac{20-9}{4-2} = 5,5$	
4	20		

Polinomio:

$$P(x) = 5 + 4(x - 1) + 0,5(x - 1)(x - 2)$$

Para $x = 3$:

$$P(3) = 5 + 4(3 - 1) + 0,5(3 - 1)(3 - 2)$$

$$P(3) = 5 + 4(2) + 0,5(2)(1)$$

$$P(3) = 5 + 8 + 1 = 14$$

Respuesta: 14 litros

4. Interpolación Cuadrática

4.1. Ejercicio 4.1: Lanzamiento de pelota

Una pelota tiene alturas:

- $t = 0$s: $h = 0$m
- $t = 1$s: $h = 5$m
- $t = 2$s: $h = 0$m

Encuentra $h(t) = at^2 + bt + c$ y calcula la altura máxima (en $t = 1$).
Solución:
Sistema de ecuaciones:

- Para $t = 0$: $c = 0$
- Para $t = 1$: $a + b + c = 5$
- Para $t = 2$: $4a + 2b + c = 0$

Con $c = 0$:

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ 4a + 2b &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 0 \end{aligned}$$

Restando: $a = -5$, entonces $b = 10$
Ecuación: $h(t) = -5t^2 + 10t$
Verificación en $t = 1$:

$$h(1) = -5(1)^2 + 10(1) = -5 + 10 = 5$$

Respuesta: La ecuación es $h(t) = -5t^2 + 10t$, altura máxima = 5m en $t = 1$s

4.2. Ejercicio 4.2: Parábola simple

Encuentra la parábola que pasa por los puntos: $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$
Solución:
Sistema:

- Para $x = 0$: $c = 2$
- Para $x = 1$: $a + b + c = 3$
- Para $x = 2$: $4a + 2b + c = 6$

Con $c = 2$:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 4a + 2b &= 4 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 2 \end{aligned}$$

Restando: $a = 1$, entonces $b = 0$
Ecuación: $y = x^2 + 2$
Verificación:

- $y(0) = 0 + 2 = 2$ ✓
- $y(1) = 1 + 2 = 3$ ✓
- $y(2) = 4 + 2 = 6$ ✓

Respuesta: $y = x^2 + 2$

4.3. Ejercicio 4.3: Trayectoria simétrica

Un objeto sigue la trayectoria:

- $x = -1$: $y = 4$
- $x = 0$: $y = 1$
- $x = 1$: $y = 4$

Encuentra $y(x)$ y calcula $y(0{,}5)$.
Solución:
Sistema:

- Para $x = 0$: $c = 1$
- Para $x = -1$: $a - b + 1 = 4 \Rightarrow a - b = 3$
- Para $x = 1$: $a + b + 1 = 4 \Rightarrow a + b = 3$

Sumando las dos últimas: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$, entonces $b = 0$
Ecuación: $y = 3x^2 + 1$
Para $x = 0{,}5$:

$$y(0{,}5) = 3(0{,}5)^2 + 1 = 3(0{,}25) + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75$$

Respuesta: $y = 3x^2 + 1$**,** $y(0{,}5) = 1{,}75$

5. Splines Cúbicos

5.1. Ejercicio 5.1: Diseño de una rampa

Se desea construir una rampa suave que pase por los puntos:

- $x = 0$: $y = 0$
- $x = 1$: $y = 2$
- $x = 2$: $y = 3$

Construye el spline cúbico natural para el primer intervalo $[0, 1]$ con las condiciones $S''(0) = 0$ y $S''(2) = 0$.
Solución:
Para el spline cúbico en el intervalo $[x_0, x_1]$:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$

Con condiciones de frontera natural: $S''(0) = 0$ y $S''(2) = 0$
Condiciones:

- $S_0(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
- $S_0(1) = 2 \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 2$
- $S''(0) = 0 \Rightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

Para spline natural simple con estos tres puntos, asumiendo simetría:

$$S_0(x) = 2x + 0{,}5x^2(2 - x) = 2x + x^2 - 0{,}5x^3$$

Simplificado para este caso:

$$S_0(x) = 1{,}5x + 0{,}5x^3$$

Respuesta: $S_0(x) = 1{,}5x + 0{,}5x^3$ **para** $x \in [0, 1]$

5.2. Ejercicio 5.2: Trayectoria de animación

Para animar un objeto, se tienen posiciones en:

- $t = 0$s: posición $= 0$m
- $t = 1$s: posición $= 3$m
- $t = 2$s: posición $= 4$m

Plantea las ecuaciones del spline cúbico para el intervalo $[0, 1]$.
Solución:
Forma general:

$$S_0(t) = a_0 + b_0 t + c_0 t^2 + d_0 t^3$$

Condiciones que debe cumplir:

$$\begin{aligned} S_0(0) &= 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ S_0(1) &= 3 \Rightarrow b_0 + c_0 + d_0 = 3 \\ S_0'(1) &= S_1'(1) \text{ (continuidad de primera derivada)} \\ S_0''(1) &= S_1''(1) \text{ (continuidad de segunda derivada)} \end{aligned}$$

Con condición natural $S''(0) = 0$:

$$2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

Sistema simplificado:

$$\begin{aligned} b_0 + d_0 &= 3 \\ b_0 + 3d_0 &= S_1'(1) \end{aligned}$$

Para spline natural completo, se requiere resolver el sistema con todos los intervalos.
Respuesta: Sistema de ecuaciones planteado para spline cúbico

5.3. Ejercicio 5.3: Perfil de velocidad

Un vehículo tiene velocidades registradas:

- $t = 0$s: $v = 10$ m/s
- $t = 2$s: $v = 20$ m/s
- $t = 4$s: $v = 15$ m/s

Determina las condiciones que debe cumplir el spline cúbico en $t = 2$.
Solución:
En el punto interior $t = 2$, el spline debe cumplir:
Continuidad del valor:

$$S_0(2) = S_1(2) = 20$$

Continuidad de primera derivada:

$$S_0'(2) = S_1'(2)$$

$$b_0 + 2c_0(2) + 3d_0(2)^2 = b_1$$

Continuidad de segunda derivada:

$$S_0''(2) = S_1''(2)$$

$$2c_0 + 6d_0(2) = 2c_1$$

Estas condiciones garantizan que la función sea suave (clase C^2).
Respuesta: Tres condiciones de continuidad establecidas en $t = 2$

5.4. Ejercicio 5.4: Cable colgante simplificado

Un cable pasa por los puntos:

- $(0, 5)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$

Plantea la forma del spline cúbico para $[0, 1]$ sabiendo que $S''(0) = 0$.
Solución:
Para el intervalo $[0, 1]$:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - 0) + c_0(x - 0)^2 + d_0(x - 0)^3$$

Condiciones:

- $S_0(0) = 5 \Rightarrow a_0 = 5$
- $S_0(1) = 3 \Rightarrow 5 + b_0 + c_0 + d_0 = 3$
- $S''(0) = 0 \Rightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

Por lo tanto:

$$b_0 + d_0 = -2$$

Con la condición adicional de continuidad en $x = 1$ con el segundo segmento, y usando simetría (el cable tiene forma parabólica):

$$S_0(x) = 5 - 2x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

Para un spline cúbico completo se necesitaría resolver con el segundo intervalo.
Respuesta: Forma general $S_0(x) = 5 + b_0x + d_0x^3$ con $b_0 + d_0 = -2$