Solución de Ejercicios - Eigenvalores y Eigenvectores

Nombre: Henrry Higinio Quispe Ramos
Docente: Ing. Fred Torres Cruz
Código: 194926

Ejercicio 1

Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución

Como A es una matriz diagonal, los eigenvalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 7$$

Los eigenvectores correspondientes son los vectores canónicos:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v}_1$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\mathbf{v}_2$$

Ejercicio 2

Calcula eigenvalores y eigenvectores de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Paso 1: Calcular el determinante de $B - \lambda I$:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

Igualando a cero:

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 2$$

$$\lambda_1 = 1+2 = 3, \quad \lambda_2 = 1-2 = -1$$

Paso 2: Eigenvector para $\lambda_1 = 3$:

$$(B-3I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

De la primera fila: $-2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$. Tomamos $v_1 = 1$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Eigenvector para $\lambda_2 = -1$:

$$(B+I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$. Tomamos $v_1 = 1$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resultados

Eigenvalores: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$
Eigenvectores: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3

Para $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$:

a) Matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Eigenvalores

$$\det(H - \lambda I) = (4-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\lambda_1 \approx 5.236, \quad \lambda_2 \approx 0.764$$

c) Clasificación del punto crítico (0,0)

Ambos eigenvalores son positivos, por lo tanto, $(0,0)$ es un **mínimo local**.

Ejercicio 4

Determina si $(0,0)$ es máximo o mínimo para $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$.

Solución

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Eigenvalores (diagonal): $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -4$.
Ambos negativos $\Rightarrow$ **máximo local**.

Ejercicio 5

Verifica que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es eigenvector de:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y encuentra su eigenvalor.

Solución

$$C\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, pero para ser eigenvector debe ser múltiplo escalar exacto. Probemos con el cálculo del eigenvalor:

$$C\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la primera componente: $8 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 4$.
Verificamos segunda componente: $6 \neq 4 \cdot 1 = 4$.
Por lo tanto, $\mathbf{v}$ **no es eigenvector** de C, porque $C\mathbf{v}$ no es proporcional a $\mathbf{v}$.