Vector Ngẫu Nhiên

Nguyễn Thị Hiên

Ngày 4 tháng 11 năm 2023

1. Giới thiệu
    - Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
    - Phân phối xác suất của véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều
2. Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
    - Phân phối đồng thời
    - Phân phối lề
    - Phân phối có điều kiện và sự độc lập
3. Véc-tơ ngẫu nhiên liên tục 2 chiều
    - Phân phối đồng thời
    - Phân phối lề
    - Kỳ vọng và phương sai
    - Phân phối có điều kiện và sự độc lập
4. Hiệp phương sai và hệ số tương quan
    - Hiệp phương sai
    - Hệ số tương quan

Véc- tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên liên tục thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.*

Véc- tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên liên tục thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.*

Ví dụ 1

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm.

- *Nếu kích thước của sản phẩm được đo bằng chiều dài X và chiều rộng Y thì ta có véc-tơ ngẫu nhiên hai chiều.*

Véc- tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.*
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên liên tục thì* $(X_1, \ldots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.*

Ví dụ 1

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm.

- *Nếu kích thước của sản phẩm được đo bằng chiều dài* X *và chiều rộng* Y *thì ta có véc-tơ ngẫu nhiên hai chiều.*
- *Nếu xét thêm cả chiều cao* Z *nữa thì ta có véc-tơ ngẫu nhiên ba chiều.*

Véc- tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.*
Nếu $X_1, \dots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì* $(X_1, \dots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.*
Nếu $X_1, \dots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên liên tục thì* $(X_1, \dots, X_n)$ *là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.*

Ví dụ 1

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm.

- *Nếu kích thước của sản phẩm được đo bằng chiều dài X và chiều rộng Y thì ta có véc-tơ ngẫu nhiên hai chiều.*
- *Nếu xét thêm cả chiều cao Z nữa thì ta có véc-tơ ngẫu nhiên ba chiều.*
- *Nếu ta chỉ quan tâm đến trọng lượng và thể tích của sản phẩm ta cũng được biến ngẫu nhiên hai chiều.*

Hàm phân phối của véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều

Định nghĩa 2 (Joint probability distribution function)

Hàm phân phối xác suất đồng thời của véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) là hàm $F(x, y)$ được định nghĩa

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \; \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Hàm phân phối của véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều

Định nghĩa 2 (Joint probability distribution function)

Hàm phân phối xác suất đồng thời của véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) là hàm $F(x, y)$ được định nghĩa

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Định nghĩa 3 (Marginal probability distribution function)

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên (x, Y) có hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x, y)$ thì hàm phân phối xác suất lề cho X và Y được định nghĩa

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = F(-\infty, x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) \tag{2}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = F(-\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) \tag{3}$$

Tính chất 1

1. $F(x, y)$ *là hàm không giảm theo từng biến số*

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \text{ khi } x_1 < x_2$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \text{ khi } y_1 < y_2$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$

Định nghĩa 4

Joint probability mass function Hàm xác suất đồng thời *của véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc* (X, Y), *ký hiệu là* $f_{XY}(x, y)$, *là hàm thỏa*

1. $f_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
2. $f_{XY}(x, y) \geq 0$
3. $\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$

Hàm xác suất đồng thời của (X, Y) *được biểu diễn bằng bảng phân phối xác suất đồng thời.*

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	Tổng dòng
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$\cdots$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, \bullet)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_2, y_j)$	$\cdots$	$f(x_2, y_n)$	$f(x_2, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i, y_1)$	$f(x_i, y_2)$	$\cdots$	$f(x_i, y_j)$	$\cdots$	$f(x_i, y_n)$	$f(x_i, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\cdots$	$f(x_m, y_j)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$	$f(x_m, \bullet)$
Tổng cột	$f(\bullet, y_1)$	$f(\bullet, y_2)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_j)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_n)$	1

Bảng: Phân phối xác suất đồng thời của X và Y

Hàm xác suất đồng thời

Ví dụ 2

(X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm xác suất đồng thời $f(x, y)$ cho bởi bảng sau:

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Tính:

a) $P(X + Y = 1)$

b) $P(X = 0)$

c) $P(X < Y)$

Hàm xác suất lề

Định nghĩa 5 (Marginal probability mass function)

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có hàm xác suất đồng thời là $f_{XY}(x, y)$ thì hàm xác suất lề *cho biến ngẫu nhiên X và Y được định như sau:*

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_y f_{XY}(x, y) \tag{4}$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y) \tag{5}$$

Hàm xác suất lề

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
P_X	$f_X(x_1)$	$f_X(x_3)$	$\cdots$	$f_X(x_m)$

với $f_X(x_i) = f(x_i, \bullet) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_i) \quad (j = 1, \ldots, n).$

Hàm xác suất lề

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
P_X	$f_X(x_1)$	$f_X(x_3)$	$\cdots$	$f_X(x_m)$

với $f_X(x_i) = f(x_i, \bullet) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_i) \quad (j = 1, \ldots, n)$. Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên Y

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
P_Y	$f_Y(y_1)$	$f_Y(y_3)$	$\cdots$	$f_Y(y_m)$

với $f_Y(y_i) = f(\bullet, y_j) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i) \quad (i = 1, \ldots, m)$.

Ví dụ 3

(X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm xác suất đồng thời $f(x, y)$ cho bởi bảng sau:

X \ Y	-1	0	1
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Tìm hàm xác suất lề cho X và Y.

Kỳ vọng và phương sai từ phân phối đồng thời

Định nghĩa 6

Xét véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), nếu X có hàm xác suất lề $f_X(x)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x \sum_x x f_{XY}(x, y) \tag{6}$$

và

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x, y) \tag{7}$$

Ta cũng có định nghĩa tương tự cho Y.

Hàm xác suất có điều kiện

Xét véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), khi biết trước $X = x$ thì hàm xác suất có điều kiện của Y cho bởi:

$$f_{Y|X}(y|X = x) = f_{Y|x}(y|x) = P(Y = y|X = x)$$

Xét véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), khi biết trước $X = x$ thì hàm xác suất có điều kiện của Y cho bởi:

$$f_{Y|X}(y|X = x) = f_{Y|x}(y|x) = P(Y = y|X = x)$$

Áp dụng công thức xác suất có điều kiện ta có:

$$f_{Y|x}(y|x) = P(Y = y|X = x) \quad = \quad \frac{P[(X = x) \cap (Y = y)]}{P(X = x)}$$

Hàm xác suất có điều kiện

Xét véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), khi biết trước $X = x$ thì hàm xác suất có điều kiện của Y cho bởi:

$$f_{Y|X}(y|X = x) = f_{Y|x}(y|x) = P(Y = y|X = x)$$

Áp dụng công thức xác suất có điều kiện ta có:

$$\begin{aligned} f_{Y|x}(y|x) = P(Y = y|X = x) &= \frac{P[(X = x) \cap (Y = y)]}{P(X = x)} \\ &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} \end{aligned}$$

trong đó $P(X = x, Y = y) = f_{XY}(x, y)$ và $P(X = x) = f_X(x)$.

Hàm xác suất có điều kiện

Định nghĩa 7 (Conditional probability mass function)

Xét véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), hàm xác suất có điều kiện của Y cho trước X nhận giá trị x được định nghĩa

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{với } f_X(x) > 0. \tag{8}$$

Hàm xác suất có điều kiện

Định nghĩa 7 (Conditional probability mass function)

Xét véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), *hàm xác suất có điều kiện của* Y *cho trước* X *nhận giá trị* x *được định nghĩa*

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{với } f_X(x) > 0. \tag{8}$$

Tương tự, hàm xác suất có điều kiện của X *cho trước* $Y = y$ *được định nghĩa*

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{với } f_Y(y) > 0. \tag{9}$$

Hệ quả 1

Hàm xác suất đồng thời $f_{XY}(x,y)$ của véc-tơ ngẫu nhiên (X,Y) có thể được viết dưới dạng sau

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|x}(y|x).f_X(x) = f_{X|y}(x|y).f_Y(y). \quad (10)$$

Hàm phân phối có điều kiện

Định nghĩa 8 (Conditional probability distribution function)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X khi biết Y nhận giá trị y được định nghĩa:

$$F_{X|y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|y}(x_i). \tag{11}$$

Định nghĩa 8 (Conditional probability distribution function)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X khi biết Y nhận giá trị y được định nghĩa:

$$F_{X|y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|y}(x_i). \tag{11}$$

Tương tự, hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y khi biết $X = x$

$$F_{Y|x}(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \sum_{y_i \leq y} f_{Y|x}(y_j). \tag{12}$$

Kỳ vọng có điều kiện

Định nghĩa 9 (Conditional mean)

Kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên Y cho trước $X = x$, ký hiệu $E(Y|x)$ hay $\mu_{Y|x}$ được định nghĩa

$$E(Y|x) = \sum_{y} y f_{Y|x}(y). \tag{13}$$

Tương tự, kỳ vọng có điều kiện của X cho trước $Y = y$

$$E(X|y) = \sum_{x} x f_{X|y}(x). \tag{14}$$

Kỳ vọng có điều kiện

Tính chất của kỳ vọng có điều kiện

Nếu X và Y có phân phối đồng thời, ta có:

- ♣ $E[E(X|Y)] = E(X)$
- ♣ $Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$

Ví dụ 4

(X, Y) *là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm xác suất đồng thời* $f(x, y)$ *cho bởi bảng như ví dụ 3.*

1. *Lập bảng phân phối có điều kiện của* X *cho trước* $Y = 1$ *và tính* $f_{X|Y}(-1|Y = 1)$.
2. *Tính* $E(X|Y = 1)$ *và* $Var(X|Y = 1)$.
3. *Lập bảng phân phối có điều kiện của* Y *cho trước* $X = -1$ *và tính* $f_{Y|X}(1|X = -1)$.
4. *Tính* $E(Y|X = -1)$ *và* $Var(Y|X = -1)$.

Sự độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y gọi là độc lập với nhau nếu thoả một trong các tính chất sau

- $f_{XY}(x, y) = f_X(x).f_Y(y), \forall x, y.$
- $f_{Y|x}(y|x) = f_Y(y) \forall x, y$ và $f_X(x) > 0.$
- $f_{X|y}(x|y) = f_X(x) \forall x, y$ và $f_Y(y) > 0.$
- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)$ với tập A, B bất kì trên miền xác định tương ứng của X và Y.

Sự độc lập

Sự độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y gọi là độc lập với nhau nếu thoả một trong các tính chất sau

- ♣ $f_{XY}(x, y) = f_X(x).f_Y(y), \forall x, y.$
- ♣ $f_{Y|x}(y|x) = f_Y(y) \forall x, y$ và $f_X(x) > 0.$
- ♣ $f_{X|y}(x|y) = f_X(x) \forall x, y$ và $f_Y(y) > 0.$
- ♣ $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)$ với tập A, B bất kì trên miền xác định tương ứng của X và Y.

Ví dụ 5

Kiểm tra tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên trong ví dụ 3.

Ví dụ 6

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm xác suất đồng thời

$$f(x,y) = c(x+y) \quad x = 1,2,3 \text{ và } y = 1,2,3$$

a) *Tìm c.*
b) *Tính $P(X = 1, Y < 4), P(X = 1), P(Y = 2), P(X < 2, Y < 2)$.*
c) *Tìm phân phối lề cho X, phân phối lề cho Y.*
d) *Tìm phân phối của Y cho biết $X = 1$; phân phối của X cho biết $Y = 2$.*
e) *Tính $E(Y|X = 1)$ và $E(X|Y = 2)$.*
f) *X và Y có độc lập?*

Định nghĩa 10 (Joint probability density function)

Hàm mật độ xác suất đồng thời của véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), kí hiệu $f_{XY}(x, y)$, là hàm hai biến thoả các điều kiện sau:

1. $f_{XY}(x, y) \geq 0$ với mọi $-\infty < x, y < \infty$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dxdy = 1$;
3. Với mọi tập $I \subset \mathbb{R}^2$

$$P((X < Y) \in I) = \iint_I f(x, y) dxdy. \tag{15}$$

Hàm phân phối đồng thời

Định nghĩa 11 (Joint probability cumulative function)

Khi biết $f_{XY}(x,y)$, *hàm phân phối xác suất đồng thời được xác định như sau:*

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \qquad (16)$$

và khi $F(x,y)$ *khả vi theo* x *và* y, *hàm mật độ đồng thời*

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y). \qquad (17)$$

Ví dụ 7

Giả sử $f(x, y) = K(x^2 + y^2)$ *là hàm mật độ đồng thời của* (X, Y) *xác định trên hình vuông đơn vị bị chặn bởi các điểm* $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$, *và* $(0, 1)$.

- *Tìm* K.
- *Tính* $P[X + Y \geq 1]$.
- *Tìm* $F(x, y)$.

Cho véc-tơ ngẫu nhiên liên tục (X, Y) có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{75}(2x^2y + xy^2) & \text{với } 0 \le x \le 3, 1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- Tính $P\left(1 \le X \le 2, \dfrac{4}{3} \le Y \le \dfrac{5}{3}\right)$.
- Tìm $F(x,y)$.

Định nghĩa 12 (Marginal probability density function)

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f(x, y)$ thì hàm mật độ xác suất lề của X và Y được xác định bởi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy \tag{18}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx \tag{19}$$

Định nghĩa 12 (Marginal probability density function)

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f(x, y)$ thì hàm mật độ xác suất lề của X và Y được xác định bởi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy \tag{18}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx \tag{19}$$

Từ các hàm mật độ lề $f_X(x)$ và $f_Y(y)$ ta có thể tìm được hàm phân phối lề cho X và Y là $F_X(x)$ và $F_Y(y)$.

Kỳ vọng và phương sai từ phân phối đồng thời

Định nghĩa 13

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$, khi đó

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \right] dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}} x f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \tag{20}$$

$$Var(X) = \iint_{\mathbb{R}} x^2 f_{XY}(x, y) dx dy - \mu_X^2 \tag{21}$$

Ta có định nghĩa tương tự cho kỳ vọng và phương sai cho Y.

Kỳ vọng và phương sai từ phân phối đồng thời

Nếu $h(x, y)$ là hàm hai biến và véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có phân phối đồng thời kỳ vọng của $h(X, Y)$ được xác định bởi

$$E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dydx. \tag{22}$$

Ví dụ 8

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \ \text{với}\ 0 \le x, y \le 1$$

a) *Tìm hàm mật độ lề $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.*
b) *Tìm các hàm phân phối lề $F_X(x)$ và $F_Y(y)$.*
c) *Tính $E(X^2 + Y^2)$.*

Định nghĩa 14 (Conditional probability density function)

Xét véc-tơ ngẫu nhiên liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{XY}(x, y)$, hàm mật độ xác suất có điều kiện của Y cho trước giá trị $X = x$ được xác định bởi

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{với } f_X(x) > 0. \tag{23}$$

Tương tự, mật độ có điều kiện của X cho trước giá trị $Y = y$ là

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{với } f_Y(y) > 0. \tag{24}$$

Định nghĩa 15 (Conditional mean)

Xét véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), *kỳ vọng của biến ngẫu nhiên* Y *cho trước* $X = x$, *kí hiệu* $E(Y|X = x) = \mu Y|x$ *là hàm số của biến ngẫu nhiên* X *và*

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y) dy. \tag{25}$$

Định nghĩa 15 (Conditional mean)

Xét véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), *kỳ vọng của biến ngẫu nhiên* Y *cho trước* $X = x$, *kí hiệu* $E(Y|X = x) = \mu Y|x$ *là hàm số của biến ngẫu nhiên* X *và*

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y)dy. \tag{25}$$

Tương tự, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X *cho trước* $Y = y$, *ký hiệu* $E(X|Y = y) = \mu_{X|y}$, *xác định bởi*

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x)dx. \tag{26}$$

Sự độc lập

Sự độc lập của hai biến ngẫu nhiên liên tục

Hai biến ngẫu nhiên liên tục X và Y gọi là độc lập với nhau nếu thoả một trong các tính chất sau

- $f_{XY}(x, y) = f_X.f_Y(y)\ \forall x, y.$
- $f_{Y|x}(y|x) = f_Y(y)\ \forall x, y$ và $f_X(x) > 0.$
- $f_{X|y}(x|y) = f_X(x)\ \forall x, y$ và $f_Y(y) > 0.$
- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)$ với tập A, B bất kỳ trên miền xác định tương ứng của X và Y.

Ví dụ 9

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \text{ với } 0 \leq x, y \leq y$$

a) *Tìm hàm mật độ có điều kiện* $f_{X|y}(x|Y = 0.3)$.

b) *Tính* $E(X|Y = 0.3)$ *và* $Var(X|Y = 0.3)$.

Ví dụ 10

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) *có hàm mật độ xác suất đồng thời*

$$f(x,y) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)e^{-x} \quad \text{với } 0 < x < \infty \text{ và } 0 < y < 1.$$

a) *Tính* $P\left(X > 1 \middle| Y = \frac{1}{2}\right)$.

b) *Tìm* $f_X(x)$ *và* $f_Y(y)$.

c) X *và* Y *có độc lập?*

Định nghĩa 16 (Covariance)

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên, hiệp phương sai giữa X và Y, kí hiệu $\mathbb{C}ove(X, Y)$ (hay σ_{XY}) được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X, Y) &= E(X - E(X))(Y - E(Y)) \quad (27) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

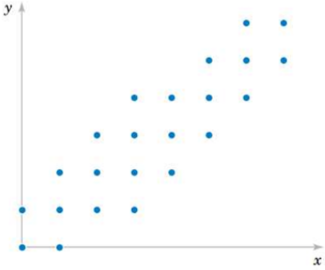
Định nghĩa 16 (Covariance)

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên, hiệp phương sai giữa X và Y, kí hiệu $\mathbb{C}ove(X, Y)$ (hay σ_{XY}) được định nghĩa như sau:

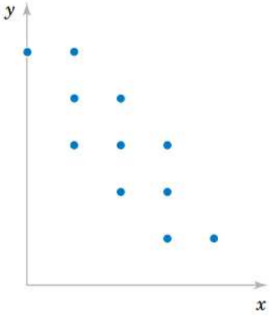
$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X, Y) &= E(X - E(X))(Y - E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned} \tag{27}$$

Chú ý 1

Hiệp phương sai là đại lượng dùng để đo mối liên hệ tuyến tính giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y.

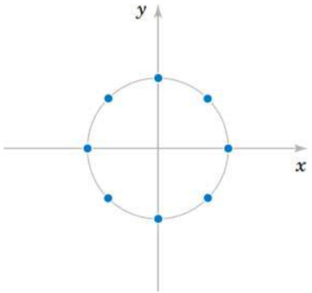


Tương quan dương



Tương quan âm

Không tương quan



Không tương quan

Tính chất 2

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập và có phương sai hữu hạn thì

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = 0, \tag{28}$$

và phương sai của $X + Y$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y). \tag{29}$$

Tính chất 2

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập và có phương sai hữu hạn thì

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = 0, \tag{28}$$

và phương sai của $X + Y$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y). \tag{29}$$

Chú ý 2

Neeis hai biến ngẫu nhiên X và Y có $\mathbb{C}ov(X, Y) = 0$ thì ta nói X và Y không tương quan, nhưng không thể suy ra được X và Y là độc lập.

Hiệp phương sai

Định lý 1

Phương sai của tổng n biến ngẫu nhiên Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là biến ngẫu nhiên soa cho* $Var(X_i) < \infty$ *với mọi* $i = 1, \ldots, n$ *thì*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum\nolimits_{i<j} \mathbb{C}ov(X_i, X_j). \qquad (30)$$

Định lý 1

Phương sai của tổng n biến ngẫu nhiên Nếu $X_1, \ldots, X_n$ *là biến ngẫu nhiên soa cho* $Var(X_i) < \infty$ *với mọi* $i = 1, \ldots, n$ *thì*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} \mathbb{C}ov(X_i, X_j). \qquad (30)$$

Trường hợp hai biến

Với a, b và c là hằng số, ta có

$$Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\mathbb{C}ov(X, Y).$$

Định nghĩa 17 (Coefficient of Correlation)

Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y, kí hiệu ρ_{XY}, được định nghĩa:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{31}$$

Định nghĩa 17 (Coefficient of Correlation)

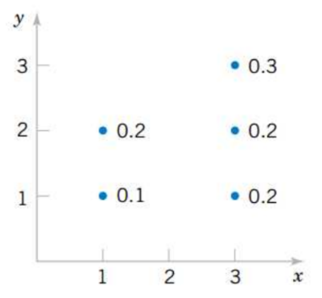
Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y, kí hiệu ρ_{XY}, được định nghĩa:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{31}$$

Tính chất 3

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$$

Ví dụ 11



Cho véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có phân phối xác suất đồng thời như hình bên.
Tính $\mathbb{C}ov(X, Y)$ và ρ_{XY}.

Hệ số tương quan

Ví dụ 12

Cho véc-tơ ngẫu nhiên nhiên liên tục (X, Y) *có hàm mật độ xác suất đồng thời*

$$f(x, y) = \frac{1}{16}xy \ \ \textit{với } 0 \leq x \leq 2 \textit{ và } 0 \leq y \leq 4.$$

Chứng tỏ rằng $\sigma_{XY} = 0$.

Ví dụ 12

Cho véc-tơ ngẫu nhiên nhiên liên tục (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \frac{1}{16}xy \quad \text{với } 0 \leq x \leq 2 \text{ và } 0 \leq y \leq 4.$$

Chứng tỏ rằng $\sigma_{XY} = 0$.

Ví dụ 13

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có $\rho_{XY} = \frac{1}{3}$, và $\sigma_X^2 = a$, $\sigma_Y^2 = 4a$. Biến ngẫu nhiên $Z = 3X - 4Y$ có $\sigma_Z^2 = 11$. Tìm a.