Các phân phối xác suất thường dùng

Nguyễn Thị Hiên

Ngày 10 tháng 11 năm 2023

1. Các phân phối rời rạc
   - Phân phối nhị thức
   - Phân phối Poisson
2. Các phân phối liên tục
   - Phân phối đều
   - Phân phối Mũ
   - Phân phối Chuẩn

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 ($X = 1$), ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p, $0 < p < 1$

$$P(A) = P(X = 1) = p$$

và

$$P(\bar{A}) = P(X = 0) = 1 - p = q$$

Khi đó biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với tham số p, ký hiệu $X \sim B(1, p)$

Phân phối Bernoulli

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- Tung ngẫu nhiên một đồng xu: $X = 1$ nếu xuất hiện mặt sấp, $X = 0$ nếu xuất hiện mặt ngửa.

Phân phối Bernoulli

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- Tung ngẫu nhiên một đồng xu: $X = 1$ nếu xuất hiện mặt sấp, $X = 0$ nếu xuất hiện mặt ngửa.
- Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm trong lô hàng: $X = 1$ nếu gặp được sản phẩm tốt, $X = 0$ nếu gặp sản phẩm kém.

Phân phối Bernoulli

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- Tung ngẫu nhiên một đồng xu: $X = 1$ nếu xuất hiện mặt sấp, $X = 0$ nếu xuất hiện mặt ngửa.
- Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm trong lô hàng: $X = 1$ nếu gặp được sản phẩm tốt, $X = 0$ nếu gặp sản phẩm kém.
- Trả lời ngẫu nhiên 1 câu trắc nghiệm: $X = 0$ nếu trả lời đúng, $X = 1$ nếu trả lời sai.

Phân phối Bernoulli

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- Tung ngẫu nhiên một đồng xu: $X = 1$ nếu xuất hiện mặt sấp, $X = 0$ nếu xuất hiện mặt ngửa.
- Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm trong lô hàng: $X = 1$ nếu gặp được sản phẩm tốt, $X = 0$ nếu gặp sản phẩm kém.
- Trả lời ngẫu nhiên 1 câu trắc nghiệm: $X = 0$ nếu trả lời đúng, $X = 1$ nếu trả lời sai.
- Mua vé số: $X = 0$ nếu trúng số, $X = 1$ nếu không trúng số.

Phân phối Bernoulli

- Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1, p)$ có dạng

X	1	0
P	p	q

với $q = 1 - p$.

Phân phối Bernoulli

- Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1, p)$ có dạng

X	1	0
P	p	q

  với $q = 1 - p$.
- Dựa vào bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X ta dễ dàng tính được

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}ar(X) = pq.$$

Ví dụ

- Gieo 1 đồng xu 5 lần $\rightarrow$ đó là 5 phép thử Bernoulli.

Ví dụ

- Gieo 1 đồng xu 5 lần $\rightarrow$ đó là 5 phép thử Bernoulli.
- Một người bắn lần lượt 7 viên đạn vào 1 mục tiêu $\rightarrow$ đó là 7 phép thử Bernoulli.

Ví dụ

- Gieo 1 đồng xu 5 lần $\rightarrow$ đó là 5 phép thử Bernoulli.
- Một người bắn lần lượt 7 viên đạn vào 1 mục tiêu $\rightarrow$ đó là 7 phép thử Bernoulli.
- Nếu 7 người bắn, mỗi người bắn 1 viên đạn $\rightarrow$ phép thử Bernoulli. Tuy nhiên nếu biết rằng khả năng bắn trúng bia của 7 người là như nhau thì đó lại là 7 phép thử Bernoulli.

Phân phối Nhị thức

Thực hiện n phép tử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p.
Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

với X_i $(i = \overline{1, n})$ là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p.
Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, \ldots, n\}$ và xác suất

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k \in S$$

X được gọi là có luật phân phối Nhị thức với các tham số n, p. Kí hiệu $X \sim B(n, p)$

Ví dụ 1:

Tại 1 địa phương, theo số liệu thống kê có 20% dân số mắc bệnh A. Chọn ngẫu nhiên 8 người, tính khả năng để có 3 người mắc bệnh A.

Phân phối Nhị thức

Ví dụ 1:

Tại 1 địa phương, theo số liệu thống kê có 20% dân số mắc bệnh A. Chọn ngẫu nhiên 8 người, tính khả năng để có 3 người mắc bệnh A.

Lời giải

Khi chọn ngẫu nhiên 1 người thì có 2 khả năng xảy ra: mắc bệnh hoặc không, với xác suất mắc bệnh là 0.2

Gọi X là số người bị bệnh A trong 8 người được chọn, ta có $X \sim B(8, 0.2)$

$$P(X = 3) = C_8^3 (0.2)^3 (0.8)^5 = 0.147$$

Phân phối Nhị thức

Ví dụ 2:

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a. Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng.

b. Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng.

Định lý (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n, p)$ thì

i) $\mathbb{E}(X) = np$,

ii) $\mathbb{V}ar(X) = npq$,

iii) Với x, h là hai số nguyên dương thì

$$P(x \leq X \leq x+h) = P(X=x) + P(X=x+1) + \\ + \ldots + P(X=x+h).$$

Ví dụ 3:

Một học sinh làm một bài thi trắc nghiệm có 60 câu hỏi, mỗi câu có 5 đáp án và chỉ có 1 đáp án đúng. Biết rằng học sinh không học bài và đánh ngẫu nhiên toàn bộ bài thi. Tính xác suất

a. Học sinh làm đúng ít nhất 1 câu;

b. Học sinh làm đúng 30 câu;

c. Số câu trả lời đúng trung bình mà học sinh làm được là bao nhiêu? Tính phương sai của số câu trả lời đúng.

Ví dụ 4:

Trong một nhà máy, hàng đóng thành từng kiện, mỗi kiện 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Khi kiện hàng được giao cho khách hàng, khách hàng sẽ lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm trong kiện để kiểm tra. Nếu cả 2 sản phẩm đều tốt, kiện hàng sẽ được nhận, ngược lại thì kiện hàng sẽ bị trả lại. Gọi X là số kiện hàng được nhận trong số 50 kiện hàng giao cho khách.

a. Tính xác suất có 40 kiện hàng được nhận.

b. Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}ar(X)$.

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Trên một tuyến đường cần được xem xét để mở rộng làn đường, ta thực hiện một khảo sát lượng xe tải qua một điểm trên tuyến đường qua mỗi phút trong giờ cao điểm.

X là biến ngẫu nhiên số lượng xe trên phút và dữ liệu thu được cho bởi bảng:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	7	34	84	140	176	176	146	104	65	36

X	10	11	12	13	14	≥ 15
Tần số	18	8	4	1	1	0

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhưng không biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức vì giá trị của X không giới hạn.

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhưng không biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức vì giá trị của X không giới hạn.
Từ bảng dữ liệu ta tính được giá trị trung bình (kỳ vọng của X)

$$\bar{x} = \frac{0 \times 7 + 1 \times 34 + \cdots 14 \times 1}{1000} \approx 4.997$$

và phương sai của X

$$s^2 = \frac{0^2 \times 7 + 1^2 \times 34 + \cdots + 14^2 \times 1}{1000} - 4.997^2 \approx 5.013$$

Phân phối Poisson

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Xem xét mối quan hệ các tần số liên tiếp của dữ liệu

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Xem xét mối quan hệ các tần số liên tiếp của dữ liệu

$$\frac{34}{7} \approx \frac{5}{1} \quad \frac{84}{34} \approx \frac{5}{2} \quad \frac{140}{84} = \frac{5}{3} \quad \frac{176}{140} \approx \frac{5}{4}$$
$$\frac{176}{176} \approx \frac{5}{5} \quad \frac{146}{176} \approx \frac{5}{6} \quad \frac{104}{146} \approx \frac{5}{7} \quad \frac{65}{104} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{36}{65} \approx \frac{5}{9} \quad \frac{18}{36} = \frac{5}{10}$$

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Từ $P(X = 0) = 0.007 = p$, ta tính

$$P(X = 1) = \frac{5}{1} P(X = 0)$$

Phân phối Poisson

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Từ $P(X = 0) = 0.007 = p$, ta tính

$$P(X = 1) = \frac{5}{1} P(X = 0)$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{2} P(X = 1) = \frac{5^2}{2 \times 1} P(X = 0)$$

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Từ $P(X=0)=0.007=p$, ta tính

$$P(X=1)=\frac{5}{1}P(X=0)$$

$$P(X=2)=\frac{5}{2}P(X=1)=\frac{5^2}{2\times 1}P(X=0)$$

$$P(X=3)=\frac{5}{3}P(X=2)=\frac{5^3}{3\times 2\times 1}P(X=0)$$

Phân phối Poisson

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Từ $P(X=0) = 0.007 = p$, ta tính

$$P(X=1) = \frac{5}{1}P(X=0)$$

$$P(X=2) = \frac{5}{2}P(X=1) = \frac{5^2}{2\times 1}P(X=0)$$

$$P(X=3) = \frac{5}{3}P(X=2) = \frac{5^3}{3\times 2\times 1}P(X=0)$$

$$P(X=4) = \frac{5^4}{4\times 3\times 2\times 1}P(X=0)$$

Ví dụ 5: Khảo sát phương tiện giao thông

Từ $P(X=0)=0.007=p$, ta tính

$$P(X=1)=\frac{5}{1}P(X=0)$$

$$P(X=2)=\frac{5}{2}P(X=1)=\frac{5^2}{2\times 1}P(X=0)$$

$$P(X=3)=\frac{5}{3}P(X=2)=\frac{5^3}{3\times 2\times 1}P(X=0)$$

$$P(X=4)=\frac{5^4}{4\times 3\times 2\times 1}P(X=0)$$

Tổng quát ta có

$$P(X=n)=\frac{5^n}{n(n-1)\dots 2.1}P(X=0)=\frac{5^n}{n!}P(X=0)$$

Ví dụ 5:

Do tổng xác suất bằng 1, ta có

$$\begin{aligned}
1 &= p + 5p + \frac{5^2 p}{2!} + \frac{5^3 p}{3!} + \frac{5^4 p}{4!} + \cdots \\
&= p\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots\right) \\
&= pe^5
\end{aligned}$$

Ví dụ 5:

Do tổng xác suất bằng 1, ta có

$$\begin{aligned} 1 &= p + 5p + \frac{5^2 p}{2!} + \frac{5^3 p}{3!} + \frac{5^4 p}{4!} + \cdots \\ &= p\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= pe^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad p = e^{-5}$$

Phân phối Poisson

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị từ $0, 1, 2, \ldots$ gọi là có phân phối Poisson với tham số λ, ký hiệu $X \sim P(\lambda)$ nếu

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Kỳ vọng và phương sai của X lần lượt là

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}ar(X) = \lambda$$

Định nghĩa

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.

Phân phối Poisson

Định nghĩa

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
- Số người sống lâu trên 100 tuổi.

Phân phối Poisson

Định nghĩa

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
- Số người sống lâu trên 100 tuổi.
- Số người đến bưu điện nào đó trong một ngày.

Phân phối Poisson

Định nghĩa

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
- Số người sống lâu trên 100 tuổi.
- Số người đến bưu điện nào đó trong một ngày.
- Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày ...

Định nghĩa

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
- Số người sống lâu trên 100 tuổi.
- Số người đến bưu điện nào đó trong một ngày.
- Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày ...

Các biến ngẫu nhiên được sử dụng để mô tả, "đếm" số lần xảy ra của một biến cố, sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian và thỏa một số điều kiện (các điều kiện này thường thỏa mãn trong thực tế) thường được mô tả bằng phân phối Poisson.

Phân phối Poisson

Ví dụ 7:

Giả sử số lỗi in trong một trang nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 0.5$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này?

Ví dụ 7:

Giả sử số lỗi in trong một trang nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 0.5$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này?

Ví dụ 8:

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. Tính xác suất

a. Có 5 cuộc gọi điện thoại đến trong 1 giờ.

b. Có nhiều nhất 3 cuộc gọi điện thoại đến trong 1 giờ.

Ví dụ 6:

Giả sử ta cần truyền đi n bit qua một kênh truyền hình tín hiệu số. Gọi X là số bit lỗi trong n bit được truyền. Khi xác suất một bit bị lỗi là hằng số và việc truyền tín hiệu độc lập, X có phân phối nhị thức.

Phân phối Poisson

Gọi p là xác suất một bit truyền đi bị lỗi. Đặt $\lambda = np$ thì $\mathbb{E}(X) = np = \lambda$ và

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Giả sử số bit truyền đi tăng lên và xác suất một bit bị lỗi giảm xuống sao cho np không đổi. Nghĩa là, n và p đồng thời tăng và giảm sao cho $\mathbb{E}(X)$ là hằng số. Ta có thể chỉ ra

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Phân phối Poisson

Xấp xỉ phân phối Nhị thức bằng phân phối Poisson

Định lý: Cho $X \sim B(n, p)$, nếu $n \to \infty$ và $p \to 0$ sao cho $np \to \lambda$ thì

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Trong thực tế, phân phối Poisson sẽ xấp xỉ tốt cho phân phối Nhị thức khi $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ và $np \leq 20$.

Ví dụ 9:

Trong 1 lô thuốc, tỷ lệ thuốc hỏng là $p = 0.002$. Kiểm tra 1000 ống. Tính xác suất để gặp 3 ống bị hỏng?

Ví dụ 9:

Trong 1 lô thuốc, tỷ lệ thuốc hỏng là $p = 0.002$. Kiểm tra 1000 ống. Tính xác suất để gặp 3 ống bị hỏng?

Ta có mô hình Bernoulli với $p = 0.002$ rất nhỏ, $n = 1000$ lớn. Gọi X là số lọ thuốc bị hỏng trong 1000 lọ. Khi đó $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np = 2$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

Phân phối Poisson

Ví dụ 10:

Trong một đợt tiêm chủng cho trẻ em ở một khu vực, biết xác suất một trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm là 0.001. Thực hiện tiêm cho 2000 trẻ, tính xác suất có nhiều nhất 2 trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm.

Phân phối đều

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U[a, b]$, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Phân phối đều

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U[a, b]$, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Phân phối đều

Từ định nghĩa trên, ta có được hàm phân phối xác suất của $X \sim U[a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi x<a} \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 1 & \text{khi x>b} \end{cases}$$

Ta có: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $\mathbb{V}ar(X) = \dfrac{(a-b)^2}{12}$

Ví dụ 11:

Tỷ lệ mắc bệnh A tại khu dân cư B là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{khi } x \in [5, 25] \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

Tính $\mathbb{P}\{|X - 10| > 2.5\}$?

Phân phối đều

Lời giải

Ta có: |X-10|>2.5 $\Rightarrow X < 7.5 \bigvee X > 12.5$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi x<5} \\ \dfrac{x-5}{20} & \text{khi } x \in [5, 25] \\ 1 & \text{khi x>25} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|X - 10| > 2.5\} &= \mathbb{P}(X < 7.5) + \mathbb{P}(X > 12.5) \\ &= F(7.5) + 1 - F(12.5) = 0.75 \end{aligned}$$

Ví dụ 12:

Lịch xuất bến của một trạm xe bus như sau: chiếc xe đầu tiên trong ngày sẽ khởi hành vào lúc 7h, sau 15 phút sẽ có một xe khác đến trạm. Giả sử một hành khách đến trạm trong khoảng thời gian từ 7h-7h30. Tìm xác suất để hành khách này chờ

a. Ít hơn 5 phút.

b. Ít nhất 12 phút.

Phân phối Mũ

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên liên tục T được gọi là có phân phối mũ với tham số λ nếu hàm mật độ xác suất có dạng

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

trong đó

- λ: số biến cố trung bình xảy ra trong một đơn vị thời gian
- t : số đơn vị thời gian cho đến biến cố kế tiếp

Các đặc trưng của phân phối mũ

Ta suy ra hàm phân phối xác suất có dạng:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Phân phối Mũ

Các đặc trưng của phân phối mũ

Ta suy ra hàm phân phối xác suất có dạng:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Định lý

Nếu $T \sim exp(\lambda)$ thì kỳ vọng và phương sai của T lần lượt bằng

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}; \quad \mathbb{V}ar(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ví dụ 13:

Trong một mạng máy tính ở một công ty, biết rằng số người dùng đăng nhập vào mạng trong một giờ có phân phối Poisson với trung bình bằng 25.

a. Tính xác suất không có người dùng nào đăng nhập trong khoảng thời gian 6 phút.
b. Tính xác suất lần đăng nhập kế tiếp cách lần đăng nhập đầu từ 2 đến 3 phút.

Ví dụ 14:

Số khách hàng đến làm thủ tục tại một quầy dịch vụ ở ngân hàng với tỷ lệ là 15 người một giờ. Hỏi xác suất thời gian giữa 2 khách hàng liên tiếp đến quầy dịch vụ ít hơn 3 phút là bao nhiêu?

Phân phối mũ

Ví dụ 14:

Số khách hàng đến làm thủ tục tại một quầy dịch vụ ở ngân hàng với tỷ lệ là 15 người một giờ. Hỏi xác suất thời gian giữa 2 khách hàng liên tiếp đến quầy dịch vụ ít hơn 3 phút là bao nhiêu?

Ví dụ 15:

Trong một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử, biết tuổi thọ của một mạch điện là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tuổi thọ trung bình 6.25 năm. Nếu thời gian bảo hành của sản phẩm là 5 năm. Hỏi tỷ lệ sản phẩm bảo hành của nhà máy là bao nhiêu?

Phân phối Chuẩn

Định nghĩa

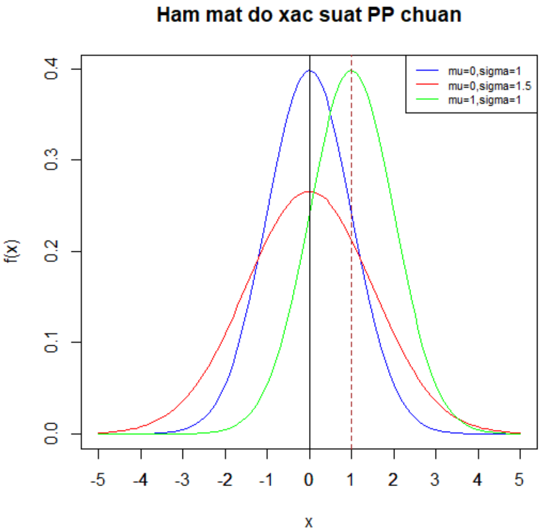
Biến ngẫu nhiên liên tục X nhận giá trị trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ được gọi là có phân phối chuẩn tham số μ, σ nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad -\infty < x < +\infty$$

trong đó μ, σ là hằng số và $\sigma > 0, -\infty < \mu < +\infty$, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ta có: $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$

Phân phối Chuẩn



Phân phối Chuẩn

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông.

Phân phối Chuẩn

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông.
- Phân phối đối xứng.

Phân phối Chuẩn

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông.
- Phân phối đối xứng.
- Vị trí của phân phối được xác định bởi kỳ vọng μ.

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông.
- Phân phối đối xứng.
- Vị trí của phân phối được xác định bởi kỳ vọng μ.
- Vị trí của phân phối được xác định bởi độ lệch tiêu chuẩn σ.

Phân phối Chuẩn

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông.
- Phân phối đối xứng.
- Vị trí của phân phối được xác định bởi kỳ vọng μ.
- Vị trí của phân phối được xác định bởi độ lệch tiêu chuẩn σ.
- Xác định trên $\mathbb{R}$.

Phân phối Chuẩn

Nhờ vào định lý sau, nên nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn thì biến đổi tuyến tính của X cũng có phân phối chuẩn.

Định lý (Tính "tuyến tính" của phân phối chuẩn)

Nếu các biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn kỳ vọng μ, phương sai σ^2 và nếu $Y = aX + b$, (a, b là hằng số và $a \neq 0$), thì Y có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a\mu + b$ và phương sai $a^2\sigma^2$.

Phân phối Chuẩn

Nhờ vào định lý sau, nên nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn thì biến đổi tuyến tính của X cũng có phân phối chuẩn.

Định lý (Tính "tuyến tính" của phân phối chuẩn)

Nếu các biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn kỳ vọng μ, phương sai σ^2 và nếu $Y = aX + b$, (a, b là hằng số và $a \neq 0$), thì Y có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a\mu + b$ và phương sai $a^2\sigma^2$.

Định lý

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ là độc lập và nếu X_i có phân phối chuẩn kỳ vọng μ_i và phương sai σ_i^2 $(i = \overline{1, n})$ thì tổng $X_1 + \ldots + X_n$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng $\mu_1 + \ldots + \mu_n$ và phương sai $\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$

Mệnh đề

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ là độc lập và nếu X_i có phân phối chuẩn kỳ vọng μ_i và phương sai σ_i^2 $(i = \overline{1, n})$. $a_1, \ldots, a_n$ và b là các hằng số sao cho có ít nhất một $a_i \neq 0$, thì biến ngẫu nhiên $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n + b$ và phương sai $a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$

Mệnh đề

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ là độc lập và nếu X_i có phân phối chuẩn kỳ vọng μ_i và phương sai σ_i^2 $(i = \overline{1, n})$. $a_1, \ldots, a_n$ và b là các hằng số sao cho có ít nhất một $a_i \neq 0$, thì biến ngẫu nhiên $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n + b$ và phương sai $a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$

Phân phối Chuẩn hóa

Phân phối Chuẩn hóa

Biến ngẫu nhiên Z được gọi là có phân phối chuẩn hóa nếu nó có phân phối chuẩn với tham số $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ và ta ký hiệu $Z \sim N(0, 1)$

Phân phối Chuẩn hóa

Phân phối Chuẩn hóa

Biến ngẫu nhiên Z được gọi là có phân phối chuẩn hóa nếu nó có phân phối chuẩn với tham số $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ và ta ký hiệu $Z \sim N(0, 1)$

Theo qui ước, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên chuẩn tắc được ký hiệu là $\Phi(z)$, có dạng

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Phân phối Chuẩn hóa

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ có phân phối chuẩn tắc:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Dựa vào tính chất này, ta có thể tính xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} P(X \le b) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Phân phối Chuẩn hóa

Tương tự:

$$\begin{aligned} P(a < X \le b) &= P(X \le b) - P(X \le a) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Phân phối Chuẩn hóa

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \le k\sigma) &= P\left(-k \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le k\right) \\ &= 2\Phi(k) - 1 \end{aligned}$$

người ta hay gọi đẳng thức trên là "Quy tắc k-sigma ($k\sigma$)". Với $k = 3$ ta có quy tắc 3-sigma:

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \le 3\sigma) &= P\left(-3 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 3\right) \\ &= 2\Phi(3) - 1 \approx 0.9973 \end{aligned}$$

Phân vị Chuẩn hóa

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, phân vị chuẩn hóa mức α, ký hiệu x_α, là giá trị của biến ngẫu nhiên X thỏa mãn điều kiện $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

Ví dụ 16:

Cho $X \sim N(10, 4)$, tính các xác suất sau:

a) $P(X < 13)$

b) $P(X > 9)$

c) $P(6 < X < 14)$

d) $P(2 < X < 4)$

e) $P(-2 < X < 8)$

Ví dụ 17:

Cho $X \sim N(10, 4)$, tìm x sao cho:

a) $P(X > x) = 0.5$

b) $P(X < x) = 0.95$

c) $P(x < X < 10) = 0.2$

d) $P(-x < X - 10 < x) = 0.95$

e) $P(-x < X - 10 < x) = 0.99$

Định lý giới hạn trung tâm

Định lý

Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 hữu hạn. Ta đặt $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, S_n có kỳ vọng là $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ và phương sai $\mathbb{V}ar(S_n) = n\sigma^2$. Khi $n \to \infty$ thì biến ngẫu nhiên

$$S_n \to_F X, \quad X \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Hay biến ngẫu nhiên

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to_F Z, \quad Z \sim N(0, 1)$$

Áp dụng: Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Xét $X \sim B(n,p)$, ta có $\mathbb{E}(X) = np$ và $\mathbb{V}ar(X) = npq$. Khi n lớn, theo định lý giới hạn trung tâm thì phân phối của biến ngẫu nhiên X được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn $N(np, npq)$. Công thức tính xác suất sai số của liên tục:

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P(X \leq b + 0.5) \\ &\approx P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng: Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Xét $X \sim B(n, p)$, ta có $\mathbb{E}(X) = np$ và $\mathbb{V}ar(X) = npq$. Khi n lớn, theo định lý giới hạn trung tâm thì phân phối của biến ngẫu nhiên X được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn $N(np, npq)$.
Công thức tính xác suất sai số của liên tục:

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= P(X \leq b + 0.5) \\ &\approx P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng: Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Công thức tính xác suất sai số của liên tục:

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P(X \geq a - 0.5) \\ &\approx P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng: Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Công thức tính xác suất sai số của liên tục:

$$\begin{aligned}
P(X \geq a) &= P(X \geq a - 0.5) \\
&\approx P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)
\end{aligned}$$

Điều kiện xấp xỉ: $np \geq 5$ và $n(1 - p) \geq 5$.

Ví dụ 18:

Trong một kênh truyền hình tín hiệu số, biết rằng xác suất một bit bị lỗi khi truyền là 1×10^{-5}. Nếu 16 triệu bit được truyền đi, hỏi xác suất có nhiều nhất 150 lỗi là bao nhiêu?

Ví dụ 18:

Trong một kênh truyền hình tín hiệu số, biết rằng xác suất một bit bị lỗi khi truyền là 1×10^{-5}. Nếu 16 triệu bit được truyền đi, hỏi xác suất có nhiều nhất 150 lỗi là bao nhiêu?

Ví dụ 19:

Tiếp theo ví dụ 18, giả sử truyền đi $n = 50$ bit và xác suất một biết bị lỗi $p = 0.1$. Tính các xác suất sau:

- Có nhiều nhất hai lỗi bị sai?
- Có nhiều hơn 8 lỗi bị sai?
- Có 5 lỗi bị sai?

Ví dụ 20:

Trong một cuộc bầu cử ở một thành phố, biết rằng 40% người dân ủng hộ ứng cử viên A. Chọn ngẫu nhiên 200 người, hỏi xác suất gặp được từ 76 đến 120 người ủng hộ ứng cử viên A là bao nhiêu?