Chương 5. SỰ CHÉO HÓA

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Quá trình chéo hóa toán tử f được thực hiện thông qua ma trận biểu diễn của f. Do đó để minh họa việc chéo hóa bằng Maple chúng tôi chỉ cần trình bày việc chéo hóa trên ma trận.

Cho ma trận vuông A, để thực hiện chéo hóa A ta có các lệnh liên quan sau:

- **charmat(A, x)**: Xác định ma trận đặc trưng của ma trận A theo **x**, đó là ma trận dạng $(xI - A)$.
- **charpoly(A,x)**: Xác định đa thức đặc trưng của ma trận A theo **x**, đó là đa thức $f(x) = \det(xI - A)$.
- **eigenvalues(A)**: Xác định các trị riêng của ma trận A.
- **eigenvectors(A)**: Xác định các véctơ riêng tương ứng với từng trị riêng của ma trận A.

Ví dụ. Tìm dạng chéo hóa của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

> **with(linalg):**
> **A := matrix([[3,1,1],[2,4,2],[1,1,3]]);**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

> **charmat(A,x)**; # Ma trận đặc trưng

$$\begin{bmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -2 & x-4 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{bmatrix}$$

> **f := charpoly(A,x);** #Đa thức đặc trưng

$$f := x^3 - 10\,x^2 + 28\,x - 24$$

> **factor(f);** #Phân tích đa thức f thành nhân tử

$$(x-6)\,(-2+x)^2$$

> **eigenvectors(A);** #Các trị riêng và các véctơ riêng

$$[6, 1, \{[1\ 2\ 1]\}], [2, 2, \{[-1\ 0\ 1], [-1\ 1\ 0]\}]$$

Lưu ý: Đối với lệnh **eigenvectors(A)** thì kết quả trả là một danh các dạng $[e_i, m_i, \{v_{1i}, \dots v_{n_i i}\}]$. Trong đó e_i là trị riêng, m_i là số bội của trị riêng e_i, $\{v_{1i}, \dots v_{n_i i}\}$ là cơ sở của không gian riêng tương ứng với trị riêng e_i.

Từ kết quả tính toán trên ta có ma trận A chéo hóa được. Dạng chéo hóa của A là

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

và ma trận làm chéo hóa A là

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phần II. Bài tập

5.1 Tìm đa thức đặc trưng của các ma trận sau đây:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5.2 Chứng minh rằng các toán tử sau đây không chéo hóa được trên $\mathbb{R}$:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, với $f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 3x_2 + 2x_3, -5x_1 - 2x_2 - 2x_3, -3x_1 - 2x_2)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, với $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + 2x_2, x_3 - 2x_4, x_3 + 4x_4)$.

5.3 Chứng minh rằng các toán tử sau đây chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ và tìm cơ sở trong đó toán tử có dạng chéo:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, với $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3, 3x_1 + 5x_2 + 3x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, với

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

5.4 Ma trận nào sau đây chéo hóa được trên $\mathbb{R}$? Trong trường hợp chéo hóa được hãy tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo nó.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.5 Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

a) A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ không?

b) A có chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ không?

5.6 Hãy tìm điều kiện đối với các số thực a, b, c sao cho ma trận sau đây chéo hóa được:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.7 Tìm điều kiện đối với a, b, c để ma trận sau đây chéo hóa được trên $\mathbb{R}$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

5.8 Cho A là ma trận vuông cấp hai trên trường số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu A là ma trận đối xứng (nghĩa là $A^\top = A$) thì A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$.

5.9 Cho A là ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$ thỏa $A^2 = 0$. Chứng minh rằng nếu $A \neq 0$ thì A đồng dạng trên $\mathbb{C}$ với ma trận $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.10 Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$ thì A đồng dạng trên $\mathbb{C}$ với một ma trận thuộc một trong hai dạng sau:
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

5.11 Cho V là không gian vectơ các hàm thực liên tục và T là một toán tử tuyến tính trên V được định nghĩa bởi
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng T không có trị riêng.

5.12 Xét $M_2(\mathbb{R})$ như một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$ và $A \in M_2(\mathbb{R})$. Gọi $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ là một ánh xạ được định nghĩa bởi
$$T(X) = AX, \forall X \in M_2(\mathbb{R}).$$
Hỏi A và T có cùng tập hợp các trị riêng hay không?

5.13 Ký hiệu $\mathbb{R}_n[t]$ là không gian vectơ gồm các đa thức của $\mathbb{R}[t]$ có bậc $\leq n$. Cho toán tử tuyến tính
$$f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t],$$
được xác định như sau:
$$f(Q) = (2t + 1)Q - (t^2 - 1)Q', \forall Q \in \mathbb{R}_2[t].$$
Hãy tính $f^n(t)$.

5.14 Cho V là không gian vectơ thực gồm tất cả các ma trận thực cấp 2 có vết bằng 0.

a) Tìm một cơ sở và số chiều của V.

b) Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $f : V \to V$ được định nghĩa bởi $f(X) = XB - BX, \forall X \in V$. Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong không gian V và tính $f^n(A)$, với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

5.15 Giả sử Fibonacii xây dựng dãy số của mình với $F_0 = 1, F_1 = 3$ và $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \forall k \geq 0$. Hãy tính các số Fibonacii mới và chứng minh rằng tỉ số F_{k+1}/F_k cũng dần tới "tỉ lệ vàng"

5.16 Cho $\mathbb{R}$ là trường số thực và $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi công thức

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 3x_2, -2x_1 + x_2 + 2x_3),$$

đối với mọi phần tử $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh rằng toán tử f chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ và tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận biểu diễn toán tử f trong cơ sở đó là một ma trận chéo.

b) Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, chứng minh rằng tồn tại một toán tử $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $g^n = f$.

5.17 Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được. Tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo A.

b) Đặt $B = \dfrac{1}{4}A$. Hãy tính $B^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Cho các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, (v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được xác định theo qui tắc sau: $u_0 = 2, v_0 = 1$ và đối với mọi $n \geq 1$

$$u_n = \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-1}; v_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}v_{n-1}.$$

Hãy tính u_n và v_n như các hàm số của n. Tìm giới hạn của u_n và v_n khi n tiến tới ∞.

5.18 Tìm nghiệm phức của hệ phương trình vi phân sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$$

5.19 Tìm nghiệm thực của hệ phương trình vi phân sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y + z. \end{cases}$$