

## CHƯƠNG 5 : SỰ CHÉO HÓA CỦA MA TRẬN VUÔNG

### I. TỔNG TRỰC TIẾP CÁC KHÔNG GIAN CON:

1.1/ **ĐỊNH NGHĨA:** Giả sử  $\mathbf{R}^n$  có các không gian con  $H_1, H_2, \dots, H_k$  ( $k \geq 2$ ).

Ta nói  $\mathbf{R}^n$  là *tổng trực tiếp* của các không gian con  $H_1, H_2, \dots, H_k$

(ký hiệu  $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$  hay  $\mathbf{R}^n = \bigoplus_{j=1}^k H_j$ ) nếu:

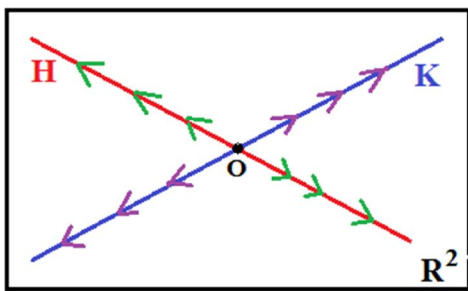
a)  $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \dots + H_k = \{ \alpha = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mid \alpha_j \in H_j \ (1 \leq j \leq k) \}$  (*tổng thường*).

b)  $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, [H_j \cap \sum_{i \neq j} H_i] = \{ \mathbf{O} \}$ .

**Ví dụ:**

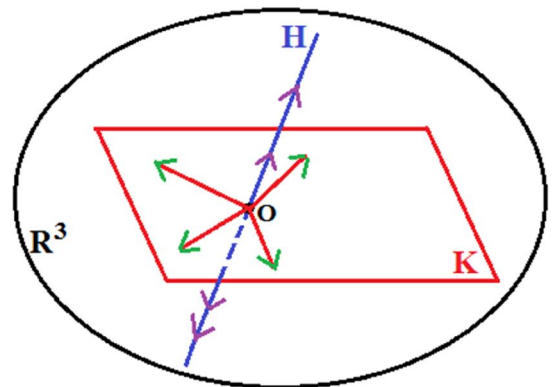
a)  $H$  và  $K$  là các không gian con kiểu đường thẳng trong  $\mathbf{R}^2$  sao cho các đường thẳng tương ứng với  $H$  và  $K$  cắt nhau. Khi đó  $\mathbf{R}^2 = H + K$  và  $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$  nên  $\mathbf{R}^2 = H \oplus K$ .

b)  $H$  và  $K$  lần lượt là các không gian con kiểu đường thẳng và mặt phẳng trong  $\mathbf{R}^3$  sao cho đường thẳng tương ứng với  $H$  cắt mặt phẳng tương ứng với  $K$ . Khi đó  $\mathbf{R}^3 = H + K$  và  $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$  nên  $\mathbf{R}^3 = H \oplus K$ .



$$\mathbf{R}^2 = H + K \quad \text{và} \quad H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$$

nên có tổng trực tiếp  $\mathbf{R}^2 = H \oplus K$ .



$$\mathbf{R}^3 = H + K \quad \text{và} \quad H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$$

nên có tổng trực tiếp  $\mathbf{R}^3 = H \oplus K$ .

c)  $H, K$  và  $L$  là các không gian con kiểu đường thẳng trong  $\mathbf{R}^3$  sao cho các đường thẳng tương ứng với  $H, K$  và  $L$  không đồng phẳng. Để ý  $H + K$ ,

$H + L$  và  $K + L$  là *các không gian con kiểu mặt phẳng* trong  $\mathbf{R}^3$ . Ta có

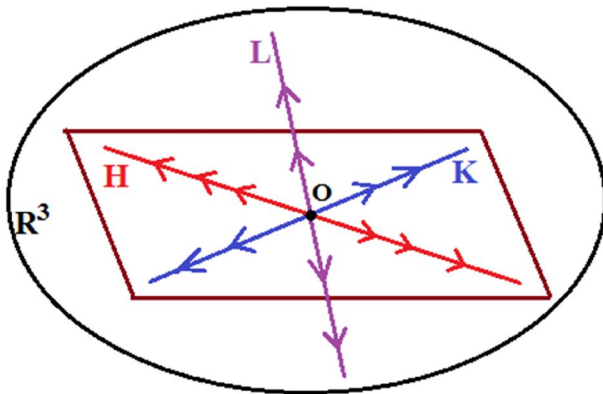
$\mathbf{R}^3 = H + K + L$ ,  $H \cap (K + L) = K \cap (H + L) = L \cap (H + K) = \{ \mathbf{O} \}$  nên

$\mathbf{R}^3 = H \oplus K \oplus L$ .

d)  $H$  và  $K$  là *các không gian con kiểu mặt phẳng* trong  $\mathbf{R}^3$  và *các mặt phẳng* tương ứng với  $H$  và  $K$  *cắt nhau* theo *không gian con kiểu đường thẳng*  $L$ .

Khi đó  $\mathbf{R}^3 = H + K$  [ *tổng thường* mà *không phải là tổng trực tiếp* ] vì

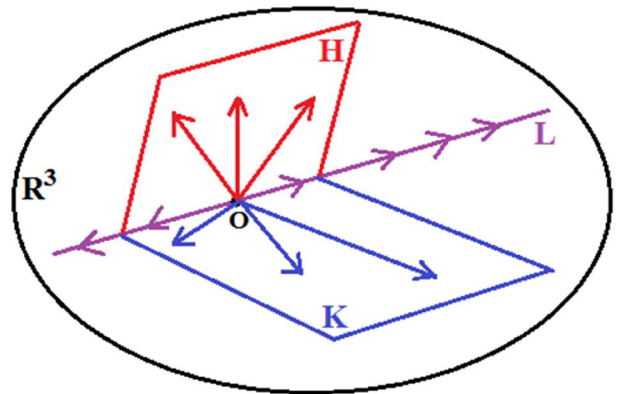
$H \cap K = L \neq \{ \mathbf{O} \}$  và  $\dim(H \cap K) = \dim L = 1$  ].



$\mathbf{R}^3 = H + K + L$ ,  $H \cap (K + L) = \{ \mathbf{O} \}$ ,

$K \cap (H + L) = \{ \mathbf{O} \}$ ,  $L \cap (H + K) = \{ \mathbf{O} \}$ ,

nên *có tổng trực tiếp*  $\mathbf{R}^3 = H \oplus K \oplus L$ .



$\mathbf{R}^3 = H + K$  và  $H \cap K = L \neq \{ \mathbf{O} \}$  nên

*không có tổng trực tiếp*.

$\mathbf{R}^3$  *chỉ là tổng thường* của  $H$  và  $K$ .

**1.2/ MỆNH ĐỀ:**  $\mathbf{R}^n$  có *các không gian con*  $H_1, H_2, \dots, H_k$  ( $k \geq 2$ ).

Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a)  $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$  ( $\mathbf{R}^n$  là *tổng trực tiếp* của  $H_1, H_2, \dots, H_k$ ).

b)  $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, \exists! \alpha_j \in H_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ),  $\alpha = \sum_{j=1}^k \alpha_j$  (viết  $\alpha = \bigoplus_{j=1}^k \alpha_j$ ).

c)  $\forall$  cơ sở  $B_j$  của  $H_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ),  $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$  là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^n$ .

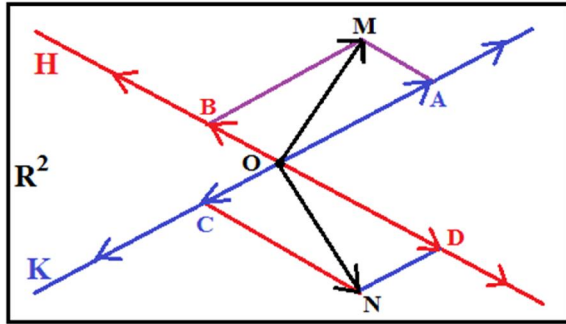
d)  $\exists$  cơ sở  $B_j$  của  $H_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ),  $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$  là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^n$ .

Lưu ý: Nếu  $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \dots + H_k$  *không phải là tổng trực tiếp* thì các kết

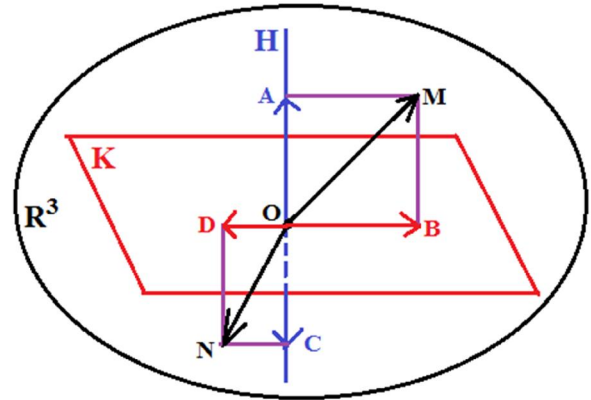
quả trên *không đúng*.  $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, \exists \alpha_j \in H_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ),  $\alpha = \sum_{j=1}^k \alpha_j$ : sự tồn

tại của các  $\alpha_j \in H_j$  *không nhất thiết* là *duy nhất*.  $\forall$  cơ sở  $B_j$  của  $H_j$

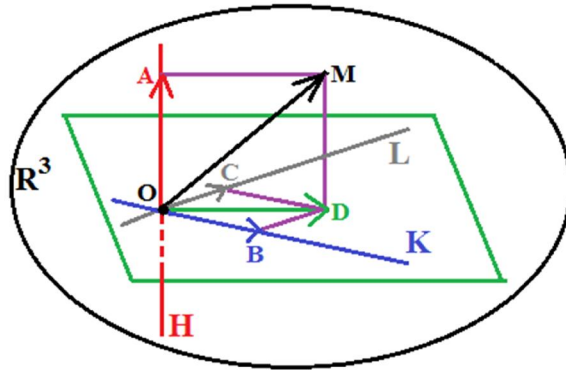
( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ),  $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$  là *một tập sinh* (*không chắc* là *một cơ sở*) của  $\mathbf{R}^n$ .



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$  (*duy nhất*)  
 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{K} \oplus \mathbf{H}$ .

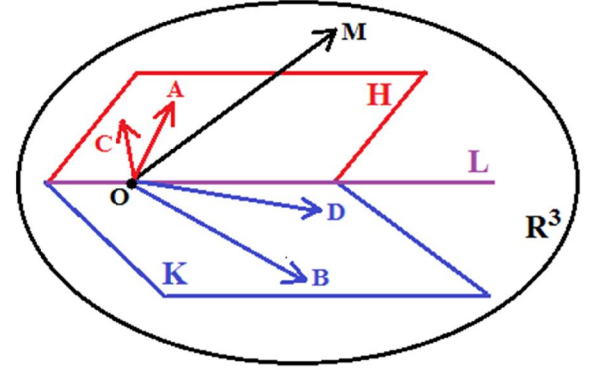


$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$  (*duy nhất*)  
 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{H} \oplus \mathbf{K}$ .



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  (*duy nhất*)

$\mathbf{R}^3 = \mathbf{H} \oplus \mathbf{K} \oplus \mathbf{L}$ .



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$  (*không duy nhất*)

$\mathbf{R}^3 = \mathbf{H} + \mathbf{K}$  (*không là tổng trực tiếp*).

### Ví dụ:

a)  $H = \langle A_1 = \{ \alpha_1 = (1, 2, 0, 3), \alpha_2 = (0, 1, -1, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^4$  và  $A_1$  là *một cơ sở*

của  $H$  vì  $H = \langle A_1 \rangle$  và  $A_1$  *độc lập tuyến tính* (đề ý  $\alpha_1$  *không tỉ lệ* với  $\alpha_2$ )

$K = \langle A_2 = \{ \alpha_3 = (3, -2, 1, 0), \alpha_4 = (0, 2, 0, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^4$  và  $A_2$  là *một cơ sở*

của  $K$  vì  $K = \langle A_2 \rangle$  và  $A_2$  *độc lập tuyến tính* (đề ý  $\alpha_3$  *không tỉ lệ* với  $\alpha_4$ ).

Ta có  $A = A_1 \cup A_2 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$  là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^4$  vì

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1^* & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1^* & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Suy ra  $\mathbf{R}^4 = H \oplus K$ .

Xét  $\alpha = (-5, 9, -4, 1) \in \mathbf{R}^4 = H \oplus K$ . Ta muốn phân tích  $\alpha = \beta \oplus \gamma$  với  $\beta \in H$

và  $\gamma \in K$ . Ta tìm được  $[\alpha]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  (bằng cách *giải phương trình vector*  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \alpha$  với *các ẩn số thực*  $c_1, c_2, c_3$  và  $c_4$ ).

Khi đó  $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = -2(1, 2, 0, 3) + 3(0, 1, -1, 1) = (-2, -1, -3, -3) \in H$

và  $\gamma = c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = -(3, -2, 1, 0) + 4(0, 2, 0, 1) = (-3, 10, -1, 4) \in K$ .

b)  $M = \langle B_1 = \{\beta_1 = (1, 4, 2, 3), \beta_2 = (0, 3, 1, 2)\} \rangle \leq \mathbf{R}^4$  và  $B_1$  là *một cơ sở* của

$M$  vì  $M = \langle B_1 \rangle$  và  $B_1$  *độc lập tuyến tính* (để ý  $\beta_1$  *không tỉ lệ* với  $\beta_2$ ).

$N = \langle B_2 = \{\beta_3 = (2, 0, 1, 0)\} \rangle \leq \mathbf{R}^4$  và  $B_2$  là *một cơ sở* của  $N$  vì

$N = \langle B_2 \rangle$  và  $B_2$  *độc lập tuyến tính* (để ý  $\beta_3 \neq \mathbf{0}$ ).

$L = \langle B_3 = \{\beta_4 = (0, -3, 0, 1)\} \rangle \leq \mathbf{R}^4$  và  $B_3$  là *một cơ sở* của  $L$  vì

$L = \langle B_3 \rangle$  và  $B_3$  *độc lập tuyến tính* (để ý  $\beta_4 \neq \mathbf{0}$ ).

Ta có  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$  là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^4$  vì

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -26 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -26 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Suy ra  $\mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$ .

Xét  $\alpha = (-5, -14, -5, -3) \in \mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$ .

Ta muốn phân tích  $\alpha = \beta \oplus \gamma \oplus \delta$  với  $\beta \in M, \gamma \in N$  và  $\delta \in L$ .

Ta tìm được  $[\alpha]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  (bằng cách *giải phương trình vector*

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + c_4\beta_4 = \alpha \text{ với các ẩn số thực } c_1, c_2, c_3 \text{ và } c_4).$$

$$\text{Khi đó } \beta = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 = (1, 4, 2, 3) - 4(0, 3, 1, 2) = (1, -8, -2, -5) \in M,$$

$$\gamma = c_3\beta_3 = -3(2, 0, 1, 0) = (-6, 0, -3, 0) \in N \text{ và}$$

$$\delta = c_4\beta_4 = 2(0, -3, 0, 1) = (0, -6, 0, 2) \in L.$$

c)  $P = \langle D_1 = \{ \delta_1 = (-3, 0, 2) \} \rangle \leq \mathbf{R}^3$  và  $D_1$  là một cơ sở của  $P$  vì

$$P = \langle D_1 \rangle \text{ và } D_1 \text{ độc lập tuyến tính (để ý } \delta_1 \neq \mathbf{O} \text{)}.$$

$$Q = \langle D_2 = \{ \delta_2 = (4, 1, -3) \} \rangle \leq \mathbf{R}^3 \text{ và } D_2 \text{ là một cơ sở của } Q \text{ vì}$$

$$Q = \langle D_2 \rangle \text{ và } D_2 \text{ độc lập tuyến tính (để ý } \delta_2 \neq \mathbf{O} \text{)}.$$

$$U = \langle D_3 = \{ \delta_3 = (6, 1, -4) \} \rangle \leq \mathbf{R}^3 \text{ và } D_3 \text{ là một cơ sở của } U \text{ vì}$$

$$U = \langle D_3 \rangle \text{ và } D_3 \text{ độc lập tuyến tính (để ý } \delta_3 \neq \mathbf{O} \text{)}.$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3 \} \text{ là một cơ sở của } \mathbf{R}^3 \text{ vì}$$

$$\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1^* & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Do đó } \mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U.$$

$$\text{Xét } \alpha = (25, 1, -16) \in \mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U.$$

$$\text{Ta muốn phân tích } \alpha = \beta \oplus \gamma \oplus \delta \text{ với } \beta \in P, \gamma \in Q \text{ và } \delta \in U.$$

$$\text{Ta tìm được } [\alpha]_D = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (bằng cách giải phương trình vector)}$$

$$c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 = \alpha \text{ với các ẩn số thực } c_1, c_2 \text{ và } c_3).$$

$$\text{Khi đó } \beta = c_1\delta_1 = -5(-3, 0, 2) = (15, 0, -10) \in P,$$

$$\gamma = c_2\delta_2 = -2(4, 1, -3) = (-8, -2, 6) \in Q \text{ và}$$

$$\delta = c_3\delta_3 = 3(6, 1, -4) = (18, 3, -12) \in U.$$

d)  $V = \langle C_1 = \{ \gamma_1 = (1, 2, 2), \gamma_2 = (4, 7, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^3$  và  $C_1$  là một cơ sở của  $V$

$$\text{vì } V = \langle C_1 \rangle \text{ và } C_1 \text{ độc lập tuyến tính (vì } \gamma_1 \text{ không tỉ lệ với } \gamma_2 \text{)}.$$

$W = \langle C_2 = \{ \gamma_3 = (-2, -3, 4), \gamma_4 = (3, 7, 15) \} \rangle \leq \mathbf{R}^3$  và  $C_2$  là *một cơ sở* của

$W$  vì  $W = \langle C_2 \rangle$  và  $C_2$  *độc lập tuyến tính* (vì  $\gamma_3$  *không tỉ lệ* với  $\gamma_4$ ).

Ta có  $V + W = \langle C = C_1 \cup C_2 \rangle = \langle \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \} \rangle$ .

Lập ma trận và biến đổi về *dạng bậc thang rút gọn*:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -16 \\ 0 & 1^* & 9 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy  $V + W$  có *một cơ sở* là  $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ , nghĩa là  $V + W = \mathbf{R}^3$  và

$\dim(V + W) = |B_o| = 3$ . Như vậy  $C = C_1 \cup C_2 = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \}$  *không phải*

là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^3 = V + W$  (do  $|C| = 4 \neq 3 = \dim \mathbf{R}^3$ ). Như vậy

$\mathbf{R}^3 = V + W$  là *tổng thường* mà *không phải* là *tổng trực tiếp*.

Xét  $\alpha = (1, 2, -3) \in \mathbf{R}^3$ . Ta có *sự phân tích không duy nhất*  $\alpha = \beta + \gamma = \delta + \varepsilon$

với  $\beta = 8\gamma_1 - 6\gamma_2 = (-16, -26, 10) \in V$ ,  $\gamma = -7\gamma_3 + \gamma_4 = (17, 28, -13) \in W$ ,

$\delta = 17\gamma_1 - 3\gamma_2 = (5, 13, 31) \in V$  và  $\varepsilon = -\gamma_3 - 2\gamma_4 = (-4, -11, -34) \in W$ .

**1.3/ MỆNH ĐỀ:** Giả sử  $\mathbf{R}^n$  có các không gian con  $H_1, H_2, \dots, H_k$  ( $k \geq 2$ ).

Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a)  $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ .

b)  $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \dots + H_k$  và  $\dim \mathbf{R}^n = \dim H_1 + \dim H_2 + \dots + \dim H_k$ .

(nếu  $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \dots + H_k$  thì  $\dim \mathbf{R}^n \leq \dim H_1 + \dim H_2 + \dots + \dim H_k$ ).

**Ví dụ:** Xét các Ví dụ trong (1.2).

a)  $\mathbf{R}^4 = H \oplus K$ ,  $\dim H = |A_1| = 2$ ,  $\dim K = |A_2| = 2$  và  $4 = \dim \mathbf{R}^4 = \dim H + \dim K$

b)  $\mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$ ,  $\dim M = |B_1| = 2$ ,  $\dim N = |B_2| = 1$ ,  $\dim L = |B_3| = 1$  và  
 $4 = \dim \mathbf{R}^4 = \dim M + \dim N + \dim L$ .

c)  $\mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U$ ,  $\dim P = |D_1| = 1$ ,  $\dim Q = |D_2| = 1$ ,  $\dim U = |D_3| = 1$  và

$$3 = \dim \mathbf{R}^3 = \dim P + \dim Q + \dim U.$$

d)  $\mathbf{R}^3 = V + W$  (*không trực tiếp*) nên  $3 = \dim \mathbf{R}^3 < \dim V + \dim W = 2 + 2 = 4$ .

## II. TRỊ RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG, VECTOR RIÊNG VÀ ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $c \in \mathbf{R}$ .

a) Đặt  $E_c^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid A.\alpha = c.\alpha \} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid A.\alpha - c.I_n.\alpha = \mathbf{O} \}$

$$= \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid (A - c.I_n).\alpha = \mathbf{O} \} \text{ thì } E_c^A \leq \mathbf{R}^n. \text{ Hơn nữa}$$

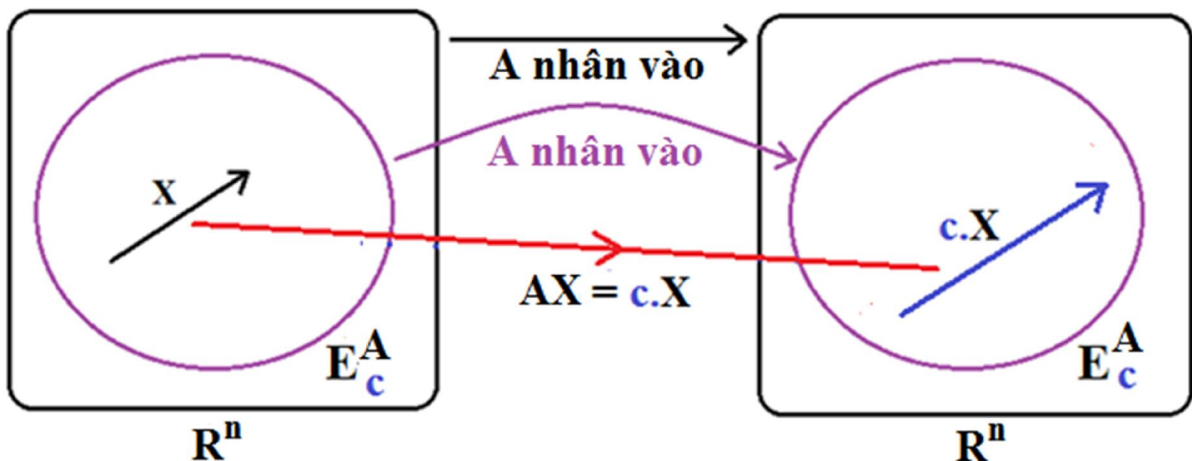
$$[A.E_c^A = E_c^A \text{ khi } c \neq 0] \text{ và } [A.E_c^A = \{\mathbf{O}\} \text{ khi } c = 0]. \text{ Suy ra } A.E_c^A \subset E_c^A.$$

Ký hiệu  $A.E_c^A = \{ A.\alpha \mid \alpha \in E_c^A \}$  ( $A.\alpha$  là dạng viết gọn của  $A.\alpha^t$ ).

b) Nếu  $E_c^A \neq \{\mathbf{O}\}$  thì ta nói  $c$  là *một trị riêng thực* của  $A$  và  $E_c^A$  là *không*

*gian riêng* của  $A$  ứng với *trị riêng*  $c$ . Lúc đó,  $\forall \alpha \in E_c^A \setminus \{\mathbf{O}\}$ ,

$A.\alpha = c.\alpha$  và  $\alpha$  được gọi là *một vector riêng* của  $A$  ứng với *trị riêng*  $c$ .



Ví dụ:

Cho  $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ . Xét  $c = 0$  và  $d = -1 \in \mathbf{R}$ .

$$E_0^A = \{ \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid A\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \mathbf{O} = (0, 0, 0) \} \text{ do các phép biến}$$

đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta ( $u = v = w = 0$ ).

$$\begin{array}{c} u \quad v \quad w \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 7 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 17 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -22 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -15 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -33 & -34 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \end{array} \right).$$

Suy ra  $c = 0$  *không phải* là *một trị riêng thực* của  $A$ .

$$\text{Ta có } (A + I_3) = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -10 \\ -12 & 18 & 24 \\ 12 & -15 & -21 \end{pmatrix} \text{ và}$$

$$E_{-1}^A = \{\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid (A + I_3)\alpha = \mathbf{0}\} = \{\alpha = (a, -2a, 2a) \mid a \in \mathbf{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}$$

do các phép biến đổi về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta

$$w = 2a \ (a \in \mathbf{R}), u = a, v = -2a :$$

$$\begin{array}{c} u \quad v \quad w \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 18 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -21 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Suy ra  $d = -1$  là *một trị riêng thực* của  $A$  và  $E_{-1}^A$  là *không gian riêng* của  $A$

ứng với *trị riêng*  $(-1)$ .  $\forall \alpha \in E_{-1}^A \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $A(\alpha) = -\alpha$  và  $\alpha$  được gọi là *một*

*vector riêng* của  $A$  ứng với *trị riêng*  $(-1)$ .

## 2.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ .

Cho *biến số*  $x$  lấy *giá trị thực*. Đặt  $p_A(x) = \det(x \cdot I_n - A)$  thì  $p_A(x)$  là

*một đa thức đơn khởi bậc  $n$*  trên  $\mathbf{R}$  có dạng

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \text{ với } a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}.$$

Ta nói  $p_A(x)$  là *đa thức đặc trưng* của *ma trận vuông thực*  $A$ .

### Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } xI_3 - A = \begin{pmatrix} x+3 & -4 & 7 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-9 \end{pmatrix} \text{ ( } x \text{ là biến thực )}$$

$$\text{Ta có } p_A(x) = |xI_3 - A| = (x+3)(x-2)(x-9) = x^3 - 8x^2 - 15x + 54.$$



**2.3/ MỆNH ĐỀ:** Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $c \in \mathbf{R}$ . Khi đó

a)  $c$  là *một trị riêng thực* của  $A \Leftrightarrow p_A(c) = 0$ .

b) Suy ra: *tập hợp các trị riêng thực* của  $A$  chính là *tập hợp các nghiệm thực* của *đa thức đặc trưng*  $p_A(x)$ .

**Ví dụ:**

$$a) A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \text{ có } p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-6 & -3 \\ 7 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 9.$$

$p_A(x)$  vô nghiệm trên  $\mathbf{R}$  (vì  $\Delta' = -5 < 0$ ) nên  $A$  không có trị riêng thực.

$$b) B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -12 & 7 & -3 \\ -16 & 12 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_B(x) = |xI_3 - B| = \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ 12 & x-7 & 3 \\ 16 & -12 & x+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ -3x-6 & x+2 & 0 \\ 16 & -12 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -3 & 1 \\ 0 & x+2 & 0 \\ -20 & -12 & x+6 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -20 & x+6 \end{vmatrix} = (x+1)(x+2)^2.$$

Ta nói  $B$  có hai trị riêng thực là  $c_1 = -1$  và  $c_2 = -2$ .

### **III. SỰ CHÉO HÓA CỦA TOÁN TỬ VÀ MA TRẬN VUÔNG:**

**3.1/ MỆNH ĐỀ:**

a) Cho  $c_1, c_2, \dots, c_m$  là *các trị riêng thực khác nhau* của  $A \in M_n(\mathbf{R})$  ( $m \geq 2$ )

và  $W = (E_{c_1}^A + E_{c_2}^A + \dots + E_{c_m}^A) \leq \mathbf{R}^n$ . Khi đó ta có  $W = E_{c_1}^A \oplus E_{c_2}^A \oplus \dots \oplus E_{c_m}^A$ .

c) Như vậy *tổng của các không gian riêng ứng với các trị riêng thực khác nhau* của *ma trận vuông* là *tổng trực tiếp*.

**3.2/ ĐỊNH NGHĨA:** Cho  $A, H, K \in M_n(\mathbf{R})$ .

a) Ta nói  $H$  và  $K$  *đồng dạng với nhau* nếu có  $P$  *khả nghịch*  $\in M_n(\mathbf{R})$  thỏa

$$P^{-1}HP = K \text{ (lúc đó ta cũng có } Q^{-1}KQ = H \text{ với } Q = P^{-1}).$$

*Quan hệ đồng dạng* trên  $M_n(\mathbf{R})$  là *một quan hệ tương đương*.

b) A chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$  nếu A đồng dạng với một ma trận đường chéo,

$$\text{nghĩa là có } \mathbf{P} \text{ khả nghịch} \in M_n(\mathbf{R}) \text{ thỏa } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

( $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  là một ma trận đường chéo).

**Ví dụ:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 12 \\ -6 & 17 & -15 \\ -10 & 24 & -22 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}). \text{ Ta có } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ khả nghịch} \in M_3(\mathbf{R})$$

$$\text{với } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nên A chéo hóa được trên } \mathbf{R}.$$

**3.3/ ĐỊNH LÝ:** Cho  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbf{R})$ . Khi đó

a) A chéo hóa được trên  $\mathbf{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (*) p_A(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (**) \dim E_{c_j}^A = r_j (1 \leq j \leq k) \end{cases}.$$

b) Khi xảy ra (\*) thì ta nói đa thức  $p_A(x)$  tách được trên  $\mathbf{R}$ .

**3.4/ MỆNH ĐỀ:** Cho  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbf{R})$ . Nếu  $p_A(x)$  có n nghiệm thực khác nhau thì

A chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ .

**3.5/ HỆ QUẢ:** Cho  $\mathbf{A} \in M_n(\mathbf{R})$ . Khi đó:

a) Đề ý  $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$  [ nếu p và q có nội dung độc lập với nhau ].

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow [\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q})] \text{ (nếu có p thì mới hiểu được q)}.$$

b) A không chéo hóa được trên  $\mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_A(x) \text{ không tách được trên } \mathbf{R}) \text{ hoặc}$

$$\begin{cases} (*) p_A(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (**) \exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, \dim E_{c_j}^A < r_j \end{cases}.$$

**Ví dụ:**

$$\begin{aligned} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_A(x) = |x\mathbf{I}_3 - A| &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 3 \\ -3 & x-1 & 1 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ x-4 & x-1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-4) \begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-4)(x^2+4). \end{aligned}$$

Do  $p_A(x)$  *không tách được* trên  $\mathbf{R}$  nên  $A$  *không chéo hóa được* trên  $\mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } H = \begin{pmatrix} -10 & 13 & -4 \\ -13 & 16 & -4 \\ -12 & 12 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_H(x) = |x\mathbf{I}_3 - H| &= \begin{vmatrix} x+10 & -13 & 4 \\ 13 & x-16 & 4 \\ 12 & -12 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & -13 & 4 \\ x-3 & x-16 & 4 \\ 0 & -12 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -13 & 4 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -12 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3) \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ -12 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x+1). \end{aligned}$$

$$E_3^H = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - 3\mathbf{I}_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (\mathbf{v}, \mathbf{v}, 0) = \mathbf{v}(1, 1, 0) \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}\}$$

có *cơ sở*  $C = \{\alpha = (1, 1, 0)\}$  do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang*

*rút gọn* cho ta ( $\mathbf{v} \in \mathbf{R}, u = \mathbf{v}, w = 0$ ):

$$(H - 3\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{O}) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ -13 & 13 & -4 & 0 \\ -13 & 13 & -4 & 0 \\ -12 & 12 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u & v & w \\ 1^* & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do  $\dim E_3^H = |C| = 1 < 2$  nên  $H$  *không chéo hóa được* trên  $\mathbf{R}$ .

**3.6/ CHÉO HÓA MA TRẬN:** Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $A$  *chéo hóa được* trên  $\mathbf{R}$ ,

$$\text{nghĩa là } \begin{cases} (*) p_A(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (**) \dim E_{c_j}^A = r_j (1 \leq j \leq k) \end{cases}.$$

\*  $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , tìm *một cơ sở*  $B_j$  cho  $E_{c_j}^A = \{\alpha \in \mathbf{R}^n \mid (A - c_j \mathbf{I}_n)\alpha = \mathbf{O}\}$ .

(*cơ sở*  $B_j$  *không duy nhất*).

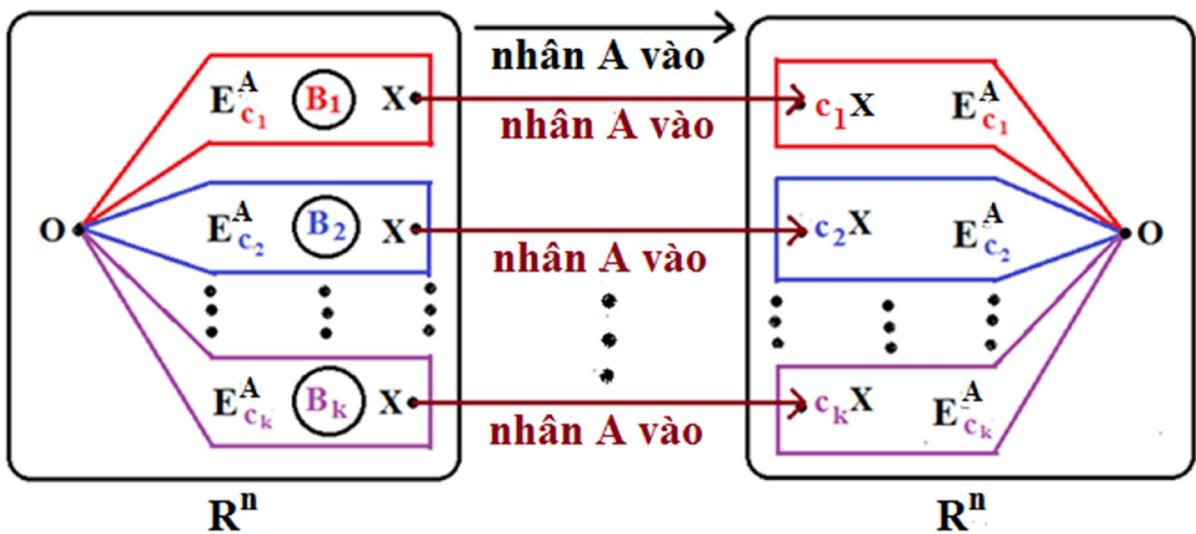
\* Đặt  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$  thì  $B$  là *một cơ sở* của  $\mathbf{R}^n = E_{c_1}^A \oplus E_{c_2}^A \oplus \dots \oplus E_{c_k}^A$

( cơ sở  $B$  không duy nhất ).

\* Đặt  $P = (C \rightarrow B)$  với  $C$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbf{R}^n$  thì  $P$  khả nghịch  $\in M_n(\mathbf{R})$

$P$  không duy nhất và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & c_k & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & c_k \end{pmatrix} \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, c_j \text{ xuất hiện } r_j \text{ lần}).$$



$$\mathbf{R}^n = E_{c_1}^A \oplus E_{c_2}^A \oplus \dots \oplus E_{c_k}^A \text{ và } A.E_{c_j}^A \subset E_{c_j}^A \quad (1 \leq j \leq k).$$

Ví dụ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_A(x) = |xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-7 & 12 & 2 \\ -3 & x+4 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-7)(x+4)(x+2) - 4(x+4) + 36(x+2) = x(x+1)(x-2).$$

$p_A(x)$  có 3 nghiệm thực đơn là 0, -1 và 2 nên  $A$  chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ .

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -12 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$E_0^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid A\alpha = \mathbf{0} \} = \{ \alpha = (-4a, -3a, 4a) = a(-4, -3, 4) \mid a \in \mathbf{R} \}$$

có *một cơ sở* là  $B_1 = \{ \alpha_1 = (-4, -3, 4) \}$  do các phép biến đổi đưa về

*dạng bậc thang rút gọn* cho ta  $[w = 4a \ (a \in \mathbf{R}), u = -4a, v = -3a]$ .

$$(A | \mathbf{O}) = \begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ \hline 7 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1^* & -4 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1^* & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$$E_{-1}^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (A + I_3)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (-a, -a, 2a) = a(-1, -1, 2) \mid a \in \mathbf{R} \}$$

có *một cơ sở* là  $B_2 = \{ \alpha_2 = (-1, -1, 2) \}$  do các phép biến đổi đưa về

*dạng bậc thang rút gọn* cho ta  $[w = 2a \ (a \in \mathbf{R}), u = -a, v = -a]$ .

$$(A + I_3 | \mathbf{O}) = \begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ \hline 8 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$$E_2^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (A - 2I_3)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (-2w, -w, w) = w(-2, -1, 1) \mid w \in \mathbf{R} \}$$

có *một cơ sở* là  $B_3 = \{ \alpha_3 = (-2, -1, 1) \}$  do các phép biến đổi đưa về

*dạng bậc thang rút gọn* cho ta  $(w \in \mathbf{R}, u = -2w, v = -w)$ .

$$(A - 2I_3 | \mathbf{O}) = \begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ \hline 5 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -10 & 0 \\ \hline 0 & 30 & 30 & 0 \\ 0 & -24 & -24 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$\mathbf{R}^3 = E_0^A \oplus E_{-1}^A \oplus E_2^A$  có *một cơ sở* là  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$  với

$A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1 = \mathbf{O}$ ,  $A\alpha_2 = -\alpha_2$  và  $A\alpha_3 = 2\alpha_3$ .

Đặt  $P = (C \rightarrow B) = ([\alpha_1]_C \ [\alpha_2]_C \ [\alpha_3]_C) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  với  $C$  là *cơ sở*

*chính tắc* của  $\mathbf{R}^3$  thì  $P$  khả nghịch,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  và  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } H = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_H(x) = |xI_3 - H| = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ 3 & x-5 & 1 \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 2-x & 0 \\ 3 & x-5 & 1 \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & x-2 & 1 \\ 3 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2.$$

$$H - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad H - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$E_1^H = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - I_3)\alpha = \mathbf{0} \} = \{ \alpha = (\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}(1, 1, 1) \mid \mathbf{w} \in \mathbf{R} \}$  có một cơ sở là  $B_1 = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1) \}$  và  $\dim E_1^H = |B_1| = 1$  do các phép biến đổi đưa về dạng bậc thang rút gọn cho ta ( $\mathbf{w} \in \mathbf{R}, u = \mathbf{w}, v = \mathbf{w}$ ).

$$(H - I_3 \mid \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$E_2^H = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - 2I_3)\alpha = \mathbf{0} \} = \{ \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid -3u + 3v - w = 0 \}$   
 $= \{ \alpha = (u, v, 3v - 3u) = u(1, 0, -3) + v(0, 1, 3) \mid u, v \in \mathbf{R} \}$  có một cơ sở là  $B_2 = \{ \alpha_2 = (1, 0, -3), \alpha_3 = (0, 1, 3) \}$  và  $\dim E_2^H = |B_2| = 2$ .

Ta có  $p_H(x) = (x-1)(x-2)^2$  tách được trên  $\mathbf{R}$ ,  $\dim E_1^H = 1$  và  $\dim E_2^H = 2$  nên  $H$  chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ .  $\mathbf{R}^3 = E_1^H \oplus E_2^H$  có một cơ sở là  $B = B_1 \cup B_2 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$  với  $H\alpha_1 = \alpha_1$ ,  $H\alpha_2 = 2\alpha_2$  và  $H\alpha_3 = 2\alpha_3$ .

$$\text{Đặt } P = (C \rightarrow B) = ( [\alpha_1]_C \mid [\alpha_2]_C \mid [\alpha_3]_C ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ với } C \text{ là cơ sở}$$

$$\text{chính tắc của } \mathbf{R}^3 \text{ thì } P \text{ khả nghịch, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

#### IV. ỨNG DỤNG:

##### 4.1/ LŨY THỪA VÀ CĂN THỨC CỦA MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC:

Cho  $A \in M_n(\mathbf{R})$  và  $A$  chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ . Xét số nguyên  $k \geq 2$ .

Tìm ma trận  $\mathbf{P}$  khả nghịch  $\in M_n(\mathbf{R})$  thỏa  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ .

$$\text{Suy ra } \mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \text{ và } \mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Nếu có  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{R}$  thỏa  $\mathbf{v}_j^k = \lambda_j^k$  ( $1 \leq j \leq n$ ), ta chọn

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & & \\ & \mathbf{v}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \in M_n(\mathbf{R}) \text{ thì } \mathbf{H}^k = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}.$$

Ta nói  $\mathbf{H}$  là một căn bậc  $k$  của  $\mathbf{A}$  trong  $M_n(\mathbf{R})$ .

**Ví dụ:** Cho  $\mathbf{A} \in M_3(\mathbf{R})$  trong Ví dụ (3.6) và  $k$  là số nguyên  $\geq 2$ . Ta có

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ với } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

$$\text{Suy ra } \mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \text{ và } \mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

$$= (-1)^k \mathbf{S} + 2^k \mathbf{T} \text{ với } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Cho số nguyên lẻ  $r \geq 3$ .

$$\text{Chọn } \mathbf{H} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[r]{2} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ thì } \mathbf{H}^r = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}.$$

$$\text{Ta có } \mathbf{H} = (-1)\mathbf{S} + \sqrt[r]{2}\mathbf{T} \text{ với } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

## 5.2/ GIẢI MỘT SỐ HỆ THỨC ĐỀ QUI DƯA THEO SỰ CHÉO HÓA CỦA

### MA TRẬN VUÔNG:

a) Tìm  $u_n$  theo  $n$  ( $n$  nguyên  $\geq 0$ ) nếu

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ và } u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \forall n \geq 0.$$

$$\forall k \geq 0, \text{ đặt } t_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} \text{ thì } t_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ và } t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} + 6u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_k. \text{ Vậy } \forall k \geq 0, t_{k+1} = A t_k \text{ với } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ và } P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} (A \text{ chéo hóa được trên } \mathbf{R}).$$

$$\text{Do đó, } \forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A t_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \dots = A^{n-1} t_1 = A^n t_0 =$$

$$= P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ 4 \cdot 3^n + (-2)^n \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } \forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{5} [4 \cdot 3^n + (-2)^n].$$

Giải thích *tính chéo hóa được* trên  $\mathbf{R}$  của  $A$ :

$$p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -6 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - x + 6 = (x-3)(x+2) \text{ có 2 nghiệm}$$

*thực đơn* ( $c_1 = 3 \neq c_2 = -2$ ) nên  $A$  *chéo hóa được* trên  $\mathbf{R}$ .

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ và } A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$E_3^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A - 3I_2)\alpha = \mathbf{0} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a - 3b = 0 \}$$

$$= \{ \alpha = (3b, b) = b(3, 1) \mid b \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ sở } C_1 = \{ \alpha_1 = (3, 1) \}.$$

$$E_{-2}^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A + 2I_2)\alpha = \mathbf{0} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a + 2b = 0 \}$$

$$= \{ \alpha = (-2b, b) = b(-2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ sở } C_2 = \{ \alpha_2 = (-2, 1) \}.$$

$$\mathbf{R}^2 = E_3^A \oplus E_{-2}^A \text{ có cơ sở } C = C_1 \cup C_2 = \{ \alpha_1 = (3, 1), \alpha_2 = (-2, 1) \}.$$



Đặt  $\mathbf{P} = (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) = ([\alpha_1]_{\mathbf{B}} [\alpha_2]_{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  với  $\mathbf{B}$  là cơ sở chính tắc

của  $\mathbf{R}^2$  thì  $\mathbf{P}$  khả nghịch,  $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  và  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

b) Tìm  $u_n$  và  $v_n$  theo  $n$  ( $n$  nguyên  $\geq 0$ ) nếu

$$u_0 = 2, v_0 = 5, u_{n+1} = u_n - 4v_n \text{ và } v_{n+1} = -u_n + v_n, \forall n \geq 0.$$

$$\forall k \geq 0, \text{ đặt } t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \text{ thì } t_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ và } t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k - 4v_k \\ -u_k + v_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} t_k. \text{ Vậy } \forall k \geq 0, t_{k+1} = \mathbf{A}t_k \text{ với } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \text{ và } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (\mathbf{A} \text{ chéo hóa được trên } \mathbf{R}).$$

$$\text{Do đó } \forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}t_{n-1} = \mathbf{A}^2 t_{n-2} = \dots = \mathbf{A}^{n-1} t_1 = \mathbf{A}^n t_0$$

$$= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 4 \cdot 3^n \\ 3(-1)^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Suy ra } \forall n \geq 0, u_n = 6(-1)^n - 4 \cdot 3^n \text{ và } v_n = 3(-1)^n + 2 \cdot 3^n.$$

Giải thích tính chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$  của  $\mathbf{A}$ :

$$p_{\mathbf{A}}(x) = |x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \text{ có 2 nghiệm thực đơn } (c_1 = 3 \neq c_2 = -1) \text{ nên } \mathbf{A} \text{ chéo hóa được trên } \mathbf{R}.$$

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{A} + \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$E_3^{\mathbf{A}} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid -a - 2b = 0 \}$$

$$= \{ \alpha = (-2b, b) = b(-2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ sở } \mathbf{C}_1 = \{ \alpha_1 = (-2, 1) \}.$$

$$E_{-1}^{\mathbf{A}} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (\mathbf{A} + \mathbf{I}_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid -a + 2b = 0 \}$$

$$= \{ \alpha = (2b, b) = b(2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ sở } \mathbf{C}_2 = \{ \alpha_2 = (2, 1) \}.$$

$$\mathbf{R}^2 = E_3^A \oplus E_{-1}^A \text{ có cơ sở } \mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2 = \{ \alpha_1 = (-2, 1), \alpha_2 = (2, 1) \}.$$

$$\text{Đặt } \mathbf{P} = (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) = ([\alpha_1]_{\mathbf{B}} \quad [\alpha_2]_{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ với } \mathbf{B} \text{ là cơ sở chính tắc}$$

$$\text{của } \mathbf{R}^2 \text{ thì } \mathbf{P} \text{ khả nghịch, } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Tìm  $u_n, v_n$  và  $w_n$  theo  $n$  ( $n$  nguyên  $\geq 0$ ) nếu  $u_0 = -2, v_0 = 3, w_0 = -1$ ,

$$u_{n+1} = 6u_n + 12v_n + 16w_n, \quad v_{n+1} = -3u_n - 7v_n - 12w_n \text{ và}$$

$$w_{n+1} = u_n + 3v_n + 6w_n, \quad \forall n \geq 0.$$

$$\forall k \geq 0, \text{ đặt } t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \text{ thì } t_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ và } t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_k + 12v_k + 16w_k \\ -3u_k - 7v_k - 12w_k \\ u_k + 3v_k + 6w_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} t_k. \text{ Vậy } \forall k \geq 0, t_{k+1} = A t_k \text{ với}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \text{ và } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

( $A$  chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ ).

$$\text{Do đó } \forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A t_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \dots = A^{n-1} t_1 = A^n t_0$$

$$= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 2^n - 12 \\ 9 - 6 \cdot 2^n \\ 2 \cdot 2^n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2^{n+1} - 12 \\ 9 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Suy ra } \forall n \geq 0, u_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 12, \quad v_n = 9 - 3 \cdot 2^{n+1} \text{ và } w_n = 2^{n+1} - 3.$$

Giải thích tính chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$  của  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ có } p_A(x) = |xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 3 & x+7 & 12 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 0 & x-2 & 3x-6 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & 20 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -3 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-6 & 20 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2.$$

$$E_1 = \{ X \in \mathbf{R}^3 / (A - I_3)X = \mathbf{0} \}.$$

$$X = (u, v, w) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 12 & 16 & | & 0 \\ -3 & -8 & -12 & | & 0 \\ 1 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \{ X = (4w, -3w, w) = w(4, -3, 1) / w \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ sở}$$

$$C_1 = \{ X_1 = (4, -3, 1) \} \text{ và } \dim E_1 = |C_1| = 1.$$

$$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 / (A - 2I_3)X = \mathbf{0} \}.$$

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 12 & 16 & | & 0 \\ -3 & -9 & -12 & | & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1 \ 3 \ 4 \ | \ 0).$$

$$E_2 = \{ X = (-3v - 4w, v, w) = v(-3, 1, 0) + w(-4, 0, 1) / v, w \in \mathbf{R} \} \text{ có cơ}$$

$$\text{sở } C_2 = \{ X_2 = (-3, 1, 0), X_3 = (-4, 0, 1) \} \text{ và } \dim E_2 = |C_2| = 2. \text{ Suy ra}$$

A chéo hóa được trên  $\mathbf{R}$ .

Đặt  $C = C_1 \cup C_2 = \{ X_1, X_2, X_3 \}$  thì  $C$  là một cơ sở của  $\mathbf{R}^3$  vì  $\mathbf{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ .

Gọi  $B = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbf{R}^3$ .

$$\text{Xét } P = (B \rightarrow C) = ( [X_1]_B \ [X_2]_B \ [X_3]_B ) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ thì } P \text{ khả}$$

$$\text{nghịch, } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$