ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 7

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

1 Bài 3.25

Bài 3.25 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1=(1,1,1,1), u_2=(1,-1,1,-1), u_3=(1,3,1,3),$$
$$v_1=(1,2,0,2), v_2=(1,2,1,2), v_3=(3,1,3,1)$$

Đặt $U=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ và $W=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con $U, W, U+W$ và $U\cap W$.

✍ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} \xrightarrow[d_2-d_1]{d_3-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{d_2/(-2)\\ d_1-d_2}]{d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Suy ra $\{u_1,u_2\}$ là cơ sở của U. Ta lại có

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} \xrightarrow[v_3-3v_1]{v_2-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

Suy ra $\{v_1,v_2,v_3\}$ là cơ sở của W. Xét

$$\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4-d_1\\ d_5-3d_1}]{\substack{d_2-d_1\\ d_3-d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{d_4-d_2\\ d_3-d_2}]{\substack{d_5-d_2\\ d_2/(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Suy ra $\{u_1,u_2,v_1\}$ là cơ sở của $U+W$. Ta có

$$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=2$$

Mà $U \cap W \leq U$ nên $\{u_1, u_2\}$ là tập sinh của $U \cap W$. Mà $\dim U \cap W = 2$, nên theo định lý thì $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở của $U \cap W$. $\square$

2 Bài 3.27

Bài 3.27 Cho W_1 là không gian của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

và W_2 là không gian nghiệm sinh bởi $\{v_1 = (1,2,2,1); v_2 = (3,-2,2,1)\}$
a) Tìm một cơ sở của không gian W_1
a) Tìm một cơ sở của không gian $W_1 + W_2$
a) Tìm một cơ sở của không gian $W_1 \cap W_2$

Lời giải
a) Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-3d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{5d_3-3d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy một cơ sở của W_1 là $\{u_1, u_2\}$ với $u_1 = (1,2,-2,5),\ u_2 = (0,0,5,-10)$.
b) Xét ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy cơ sở của $W_1 + W_2$ là $\{(1,2,-2,5),\ (0,-8,8,-14),\ (0,0,3,-6),\ (0,0,0,4)\}$
c) Xét ma trận:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Từ kết quả trên ta suy ra: $dim(W_2) = 2$.
Ta có công thức:

$$dim(W_1 \cap W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 + W_2)$$

Khi đó $dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 4 = 0$. Từ đó có thể kết luận không gian $W_1 \cap W_2$ là không gian rỗng. $\square$

3 Bài 3.29

Bài 3.29 Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho

$$S = \{u_1 = (1,0,2,1,1), \quad u_2 = (1,0,3,2,5), \quad u_3 = (2,0,5,3,2)\}.$$

Chứng tỏ S độc lập tuyến tính và thêm vào S một số vector để S trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^5$.

✍ **Lời giải**

- Ta lập ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- Thực hiện các phép biến đổi trên dòng:

$$A \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Do $r(A) = 3$ nên các vector trong S độc lập tuyến tính với nhau. Ta cần chọn 2 vector thêm vào S (do $dim(\mathbb{R}^5) = 5$. - Ta chọn: $u_4 = (0,1,0,0,0)$, và $u_5 = (0,0,0,1,0)$. Khi đó S sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^5$. $\square$

4 Bài 3.31

Bài 3.31 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của vector $u = (3,1,4)$ theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)\}$.

✍ **Lời giải**

Xét ma trận

$$\left[u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \quad \middle| \quad u^T\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3-d_1-d_2]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vậy $u = 3u_1 - 2u_2 + 3u_3$ nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

□

5 Bài 3.33

Bài 3.33 Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở $\mathcal{B}$.

✍ **Lời giải**

a) Ta lập ma trận: $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3-d_1 \\ d_4-d_1}]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{-3d_4 \\ d_4+d_3}]{d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow det(S) \neq 0 \rightarrow A_1, A_2, A_3, A_4$ độc lập tuyến tính.

Mặt khác $dim(M_2(\mathbb{R})) = 4 = dim(\mathcal{B})$.

Do đó $\mathcal{B}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b)
Xét ma trận

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3-d_1 \\ d_4-d_1}]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-d_3 \\ -d_4}]{-d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3-2d_4 \\ d_1-d_4}]{d_3+d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_4-d_3 \\ d_2-d_4}]{d_2-d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Vậy $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ □

6 Bài 3.35

Bài 3.35 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,0,-1), u_2 = (1,2,-2), u_3 = (0,-3,2)$ và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

✍ **Lời giải**

a) Ta có

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

nên u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^\top & u_2^\top & u_3^\top \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra

$$[\varepsilon_1]_{\mathcal{B}} = (-2,3,2)$$
$$[\varepsilon_2]_{\mathcal{B}} = (-2,2,1)$$
$$[\varepsilon_3]_{\mathcal{B}} = (-3,3,2)$$

□

7 Bài 3.37

Bài 3.37 Trong không gian $\mathbb{R}_2[t]$, cho đa thức $f_1(t) = 1 + t + t^2, f_2(t) = 2 + 2t + t^2, f_3(t) = 2 + 3t + t^2, g_1(t) = 1 + 2t, g_2(t) = t, g_2(t) = 1 + t^2$.
a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.
b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$

Lời giải

a)
Gọi $u = (x,\ y,\ z)$ là một vector bất kỳ thuộc $\mathbb{R}_2$.
Xét ma trận mở rộng:

$$[f_1^T\ f_2^T\ f_3^T \mid u^T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & y-x \end{array}\right]$$

Vậy $\mathcal{B}$ là tập sinh của $R_2[t]$. Ta cũng có $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.
Xét ma trận mở rộng:

$$[g_1^T\ g_2^T\ g_3^T \mid u^T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

Vậy $\mathcal{B}'$ là tập sinh của $\mathbb{R}_2[t]$. Ta cũng có $\mathcal{B}'$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.
b)
Ta có:

$$[g_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [g_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [g_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có, ma trận chuyển cơ sở:

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vẫn như trên, ta tính được:

$$[f_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [f_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [f_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bằng cách làm tương tự như trên ta tìm được:

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

8 Bài 3.39

Bài 3.39 Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector $u_1 = (1,1,1,2)$, $u_2 = (1,2,1,-1)$, $u_3 = (2,3,1,1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a,b,c,d để $u \in \mathbb{R}^4$. Với điều kiện đó hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a,b,c,d.

c) Cho $u_1' = (1,1,-1,2)$, $u_2' = (2,4,1,-2)$, $u_3' = (1,0,0,5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

✍ Lời giải

a) Để chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của W, ta chứng minh $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

- Ta lập ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

- Ta thấy $r(A) = 3$ nên B độc lập tuyến tính.

Do đó, B là cơ sở của W (đpcm).
b) Để $u = (a, b, c, d) \in W$ thì u phải là tổ hợp tuyến tính của W.
- Ta lập ma trận sau: $\mathcal{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} u_1^T & u_2^T & u_3^T & u^T \end{array}\right]$

- Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 2 & -1 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3-d_1 \\ d_4-2d_1}]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c-a \\ 0 & -3 & -3 & d-2a \end{array}\right] \xrightarrow{d_4+3d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d+3b-5a \end{array}\right]$$

- u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 khi và chỉ khi: $d + 3b - 5a = 0$.
Vậy mối liên hệ cần tìm là: $d + 3b - 5a = 0$

- Tiếp tục biến đổi sơ cấp trên dòng, ta được:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & b+c-2a \\ 0 & 0 & 1 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & d+3b-5a \end{array}\right]$$

Vậy tọa độ của vector u theo cơ sở B là: $[u]_B = \begin{bmatrix} a-b+c \\ b+c-2a \\ a-c \end{bmatrix}$

c) Ta chứng minh các vector u_1', u_2', u_3' độc lập tuyến tính với nhau. Thật vậy, ta lập ma trận:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ta thấy: $r(C) = 3$ và $dimW = 3$ nên $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W.

- Ta tìm tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$:

Đặt: $u = (a, b, c, d) \in W$
- Từ trên ta có được kết quả cần tìm:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a - b + c \\ b + c - 2a \\ a - c \end{bmatrix}$$

Thay các vector u_1', u_2', u_3' vào ta được:

$$[u_1']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [u_2']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [u_3']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Do đó:

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mặt khác,

$$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

□

9 Bài 3.41

Bài 3.41 Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vector $u = (2, 1, -1)$.

b) Xác định các vector u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.

✍ **Lời giải**

a) Ta có $[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mà $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T & u_3^T \end{bmatrix}$.

Do đó $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (2,1,0), u_3 = (4,2,1)\}$.

□

10 Bài 3.43

Bài 3.43 Cho A, B là hai ma trận cùng loại. Chứng minh rằng:

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

Lời giải

Gọi W là không gian sinh ra bởi các vecto cột của ma trận A, V là không gian sinh ra bởi các vector cột của ma trận B

Ta có:

$$dim(W+V) = dim(W) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

Mặt khác $dim(U \cap V) \geq 0$, do đó :

$$dim(W+V) \leq dim(W) + dim(V)$$

Mà $dim(W) = rank(A), dim(V) = rank(B), dim(W+V) \geq rank(A+B)$, do đó:

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$

□

11 Bài 3.45

Bài 3.35 Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa $AB = 0$. Chứng minh $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \leq n$, hơn nữa, với mọi k thỏa $\mathrm{r}(A) \leq k \leq n$, luôn tìm được ma trận C sao cho $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(C) = k$ và $AC = 0$.

✍ Lời giải

Theo bài 3.44, dễ thấy $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \leq n$. Xét các phép biến đổi tương đương trên dòng $v_1, v_2, \dots, v_a$ thỏa

$$S = v_1(v_2(\dots(v_a(A))\dots)) = v_1(I_n)v_2(I_n)\cdots v_a(I_n)A$$

là ma trận bậc thang rút gọn. Gọi $a_1 < a_2 < \dots < a_{\mathrm{r}(A)}$ là vị trí cột của các phần tử cơ sở dòng thứ $1, 2, \dots, \mathrm{r}(A)$ của S. Khi đó, ta có $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-\mathrm{r}(A)}$ lần lượt là số thứ tự của cột không có phần tử cơ sở từ trái qua. Khi đó xây dựng C như sau

- $C_{b_i i} = 1, \forall i = \overline{1,k}$.
- $C_{b_i \_} = 0, \forall \_ \neq i, \forall i = \overline{1,k}$.
- $C_{b_i \_} = 0, \forall \_ = \overline{1,n}, i > k$.
- $S_{ia_i}C_{a_i j} = -S_{ib_j}C_{b_j j}, \forall i = \overline{1,\mathrm{r}(A)}, j = \overline{1,n}$.

Để rằng $a_1, \dots, a_{\mathrm{r}(A)}, b_1, \dots, b_{n-\mathrm{r}(A)}$ đôi một phân biệt nên các điều kiện cuối không mâu thuẫn các điều kiện trên. Ta chứng minh $SC = 0_n$. Thật vậy

$$(SC)_{ij} = S_{ia_i}C_{a_i 1} + S_{ib_j}C_{b_j j} = 0, \forall i = \overline{1,\mathrm{r}(A)}, j = \overline{1,n}$$

và

$$(SC)_{ij} = 0, \forall i > \mathrm{r}(A), j = \overline{1,n}$$

Do các phần tử trước trước phần tử cơ sở dòng i của S bằng 0, các phần tử nằm trên cột có phần tử cơ sở khác của S bằng 0 và các phần tử nằm trên cột không có phần tử cơ sở của S thì phần tử tương ứng bên C bằng 0. Do đó $SC = 0_n$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} 0_n = SC &= v_1(I_n)\cdots v_a(I_n)AC \\ &= v_1(v_2(\dots(v_a(AC))\dots)) \end{aligned}$$

nên $AC = 0_n$. Lại có, dễ thấy $\mathrm{r}(C) = k$ (do các vectơ cột tương ứng của C độc lập tuyến tính bằng cách xét đối xứng ra ma trận bậc thang). Suy ra điều phải chứng minh. □

12 Bài 3.47

Bài 3.47 Cho A là ma ma trận có hạng là r. Chứng minh rằng định thức con nằm trên giao điểm r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính của A bao giờ cũng khác 0.

✍ Lời giải

Giả sử $A \in \mathbb{R}^{m*n}$ có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Đưa ma trận A về A' là ma trận bậc thang rút gọn của nó.
Khi đó:

$$rank(A') = rank(A) = r$$

Định thức con nằm trên giao điểm của r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính của A có "cùng tính chất" với định thức là ma trận A' bỏ đi các dòng, các cột chỉ chứa toàn số 0. Gọi ma trận mới thu được từ ma trận A' là A''. Khi đó ma trận A'' sẽ $\in \mathbb{R}^r$ và có hạng là r.
* "cùng tính chất": được hiểu là 2 định thức cùng khác 0 hoặc cùng bằng 0.

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy $A'' = I_r$ nên $det(A'') = 1$.
Như đã đề cập ở trên, định thức con nằm trên giao điểm của r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính của A có "cùng tính chất" với định thức là ma trận A' bỏ đi các dòng, các cột chỉ chứa toàn số 0 (chính là ma trận A''). Từ đó ta có $detA \neq 0$. □