Đại cương về xác suất

Nguyễn Thị Hiên

Ngày 1 tháng 10 năm 2023

Nội dung

1. Biến cố và xác suất
   - Biến cố ngẫu nhiên
   - Quan hệ giữa các biến cố
   - Các phép toán trên biến cố
   - Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2. Các công thức tính xác suất cơ bản
   - Công thức cộng xác suất
   - Công thức xác suất có điều kiện. Công thức nhân xác suất.
   - Sự độc lập các biến cố
   - Công thức xác suất đầy đủ. Công thức Bayes

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Ví dụ 1

Phép thử ngẫu nhiên	*Kết quả*
Tung đồng tiền	*Mặt sấp, mặt ngửa*
Điểm thi kết thúc môn	$\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
Nhóm máu của một người	*A, B, O, AB*

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event).Kí hiệu $A, B, C, \ldots$

Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event).Kí hiệu $A, B, C, \ldots$
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.

Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event).Kí hiệu $A, B, C, \ldots$
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.
- Biến cố luôn không xảy ra gọi là biến cố không thể có (empty event), kí hiệu $\emptyset$.

Ví dụ 2

Gieo một lần con xúc xắc. Gọi
$\omega_i =$ *"mặt trên của xúc xắc có số chấm "* $= i$.

Ví dụ 2

Gieo một lần con xúc xắc. Gọi
ω_i = *"mặt trên của xúc xắc có số chấm "* $= i$.
Không gian các biến cố sơ cấp

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

Ví dụ 2

Gieo một lần con xúc xắc. Gọi
$\omega_i =$ *"mặt trên của xúc xắc có số chấm "* $= i$.
Không gian các biến cố sơ cấp

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

$$\begin{array}{llll} A = & \{1,3,5\} = & \text{"chấm lẻ"} & \searrow \\ B = & \{2,4,6\} = & \text{"chấm chẵn"} & \rightarrow \quad \textit{Biến cố ngẫu nhiên} \\ C = & \{5,6\} = & \text{"chấm} > 4\text{"} & \nearrow \end{array}$$

Sự kéo theo

A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

Sự kéo theo

A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

Ví dụ 3

Tung một con xúc xắc.
Gọi A_i là biến cố được i chấm $(i = \overline{1, 6})$,
B là biến cố được số chấm chia hết cho 3,
$C =$ *"số chấm chẵn",*
$P_2 =$ *"số chấm nguyên tố chẵn".*
Khi đó ta có $A_2 \subset C, A_3 \subset B, A_2 \subset P_2, P_2 \subset A_2$.

Sự tương đương

A tương đương với B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

Sự tương đương

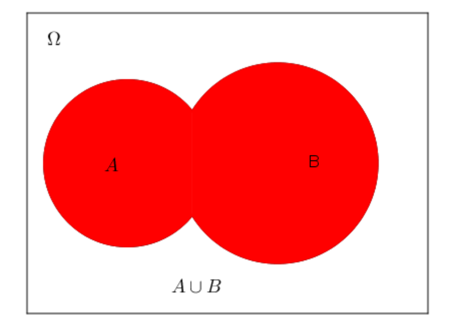
A tương đương với B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

Ví dụ 4

Trong ví dụ trên $A_2 = P_2$.

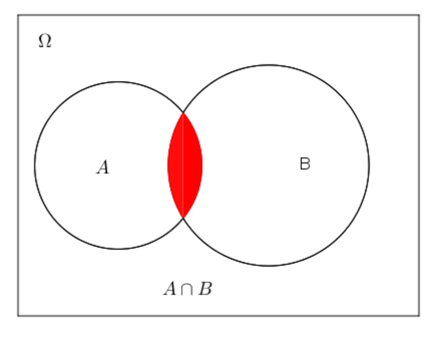
Biến cố tổng (union)

Biến cố tổng của A và B, ký hiệu $A + B$ hay $A \cup B$ là biến cố xảy ra nếu A hoặc B xảy ra (có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra).



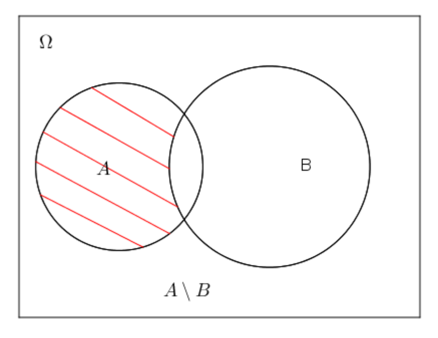
Biến cố tích (intersection)

Biến cố tích của A và B, ký hiệu AB, hay $A \cap B$ là biến cố xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra.



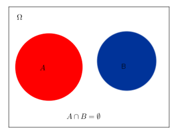
Biến cố hiệu

Biến cố hiệu của A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là biến cố A xảy ra nhưng B không xảy ra.



Các biến cố xung khắc (mutually exclusive)

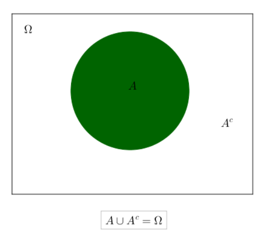
A xung khắc với B nếu A và B không đồng thời xảy ra, ký hiệu $AB = \emptyset$.



Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi một nếu $A_iA_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Biến cố đối lập (Biến cố bù) (complement)

Biến cố đối lập của A, ký hiệu A^c, là biến cố xảy ra khi A không xảy ra và ngược lại, nghĩa là $\begin{cases} A + A^c & = \Omega \\ AA^c & = \emptyset \end{cases}$ hay $A^c = \Omega \setminus A$.



Tính chất

$$
\begin{aligned}
(A+B)^c &= A^c B^c \\
(AB)^c &= A^c + B^c.
\end{aligned}
$$

Hệ đầy đủ các biến cố (exhaustive)

Dãy n các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

$$A_iA_j = \emptyset, \ \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$$
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

Ví dụ 5

Có 3 bệnh nhân phỏng. Đặt các biến cố:

$$A_i = \text{"Bệnh nhân } i \text{ tử vong"}, i = 1, 2, 3.$$

Hãy biểu diễn theo A_i các biến cố sau:

a) B = *"Có không quá hai bệnh nhân tử vong".*

b) C = *"Có ít nhất một bệnh nhân tử vong".*

c) D = *"Có ít nhất hai bệnh nhân tử vong".*

d) E = *"Cả ba bệnh nhân đều sống sót".*

Khái niệm về xác suất

Xác suất của biến cố A là một con số, số đó đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng. Ký hiệu là $P(A)$.

Nhận xét 1

- *$P(A)$ càng lớn (càng gần 1) thì khả năng xuất hiện A càng nhiều.*
- *$P(A)$ càng nhỏ (càng gần 0) thì khả năng xuất hiện A càng ít.*

Định nghĩa 1 (Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển)

Nếu trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả năng, nghĩa là $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$, *trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của A, ký hiệu,* $P(A)$, *là tỉ số* $\frac{m}{n}$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số biến cố thuận lợi cho } A}{\text{Số tất cả các biến cố có thể xảy ra}}$$

Ví dụ 6

Trong một hộp có 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ giống hết nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tìm xác suất để được

a) *3 quả cầu đỏ.*

b) *2 quả cầu trắng và 1 quả đỏ.*

Ưu và nhược điểm

- Ưu điểm: Tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.
- Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó. Vì vậy, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

Định nghĩa 2 (Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê)

Thực hiện phép thử n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện m lần. Khi đó m là tần số suất hiên biến cố A trong n phép thử, và tỷ số $\frac{m}{n}$ *được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử, ký hiệu,* $f_n(A) = \frac{m}{n}$.
Thực hiện phép thử vô hạn lần, $(n \to \infty)$ *tần suất xuất hiện biến cố A tiến về một số xác định gọi là xác suất của biến cố A.*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Định nghĩa 3 (Định nghĩa theo quan điểm hình học)

Xét một phép thử đồng khả năng, không gian mẫu có vô hạn phần tử và được biểu diễn thành một miền hình học Ω *có độ đo xác định (độ dài, diện tích, thể tích). Biến cố* $A \subset \Omega$ *được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó, xác suất xảy ra A được xác định bởi:*

$$P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega} \tag{2}$$

Ví dụ 7 (Bài toán gặp gỡ)

Hai người hẹn nhau tại một địa điểm vào khoảng từ 11 giờ đến 12 giờ. Họ quy ước rằng người đến trước chỉ đợi 20 phút, nếu không gặp sẽ đi. Giả sử việc đến điểm hẹn của mỗi người là ngẫu nhiên. Tìm xác suất để hai người gặp nhau.

Tính chất của xác suất

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(\Omega) = 1$.
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

Công thức cộng xác suất

- A, B là hai sự kiện tùy ý, ta có:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Công thức cộng xác suất

- A, B là hai sự kiện tùy ý, ta có:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- A, B, C là ba sự kiện tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - \\ &\quad - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \end{aligned}$$

Công thức cộng xác suất

- Cho A và B là hai biến cố xung khắc ta có :

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Công thức cộng xác suất

- Cho A và B là hai biến cố xung khắc ta có :

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các sự kiện xung khắc từng đôi một $(A_iA_j = \emptyset \text{ với } i \neq j)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{3}$$

Ví dụ 8

Trong số 300 sinh viên năm I có 100 sinh viên biết tiếng Anh, 80 sinh viên biết tiếng Pháp, 30 sinh viên biết cả 2 ngoại ngữ Anh-Pháp. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên năm I. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ (Anh hoặc Pháp).

Ví dụ 8

Trong số 300 sinh viên năm I có 100 sinh viên biết tiếng Anh, 80 sinh viên biết tiếng Pháp, 30 sinh viên biết cả 2 ngoại ngữ Anh-Pháp. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên năm I. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ (Anh hoặc Pháp).

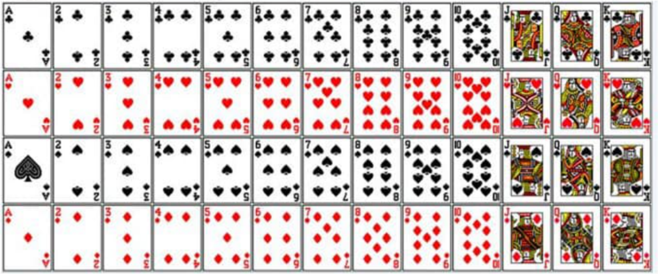
Bài giải 1

Đặt các biến cố:

$$\begin{aligned} A &= \{ \textit{ Sinh viên này biết tiếng Anh } \} \\ B &= \{ \textit{ Sinh viên này biết tiếng Pháp } \} \\ N &= \{ \textit{ Sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ } \} \end{aligned}$$

Ta có $N = A + B;\ AB \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{100}{300} + \frac{80}{300} - \frac{30}{300} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$



Ví dụ 9

Một bộ bài tây có 52 lá được trộn kỹ. Chọn ngẫu nhiên 1 lá. Biết đã chọn được lá đỏ. Tính xác suất lá đó là lá át cơ.

Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa 4 (Conditional ptobability)

Cho hai biến cố A và B.

- *Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ P(B) > 0. \tag{5}$$

Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa 4 (Conditional ptobability)

Cho hai biến cố A và B.

- *Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ P(B) > 0. \tag{5}$$

- *Tương tự, xác suất xảy ra biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra là*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \ P(A) > 0. \tag{6}$$

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1.$
2. $P(B|B) = 1.$

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
2. $P(B|B) = 1$.
3. Nếu $AC = \emptyset$ thì $P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$.

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
2. $P(B|B) = 1$.
3. Nếu $AC = \emptyset$ thì $P[(A + C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$.
4. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

Ví dụ 10

Một nhóm gồm 300 người trong đó có 200 nam và 100 nữ. Trong 200 nam có 100 người hút thuốc. Trong 100 nữ có 20 người hút thuốc. Chọn ngẫu nhiên một người

a) *Biết đã chọn được nữ, tính xác suất người đó là người hút thuốc?*

b) *Biết đã chọn được người hút thuốc, tính xác suất người đó là nam?*

Công thức nhân xác suất

Hệ quả 1 (Multiplication rule)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \tag{7}$$

Hệ quả 1 (Multiplication rule)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \tag{7}$$

Công thức nhân xác suất tổng quát

Cho họ $A_i (i = 1, \ldots, n)$ là họ n biến cố, khi đó

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{8}$$

Ví dụ 11

Một hộp có 10 ống thuốc, trong đó có 5 ống thuốc kém chất lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 3 ống thuốc. Tính xác suất.

a) *Lấy được 3 ống thuốc tốt.*

b) *Lấy được 2 ống thuốc tốt, 1 kém chất lượng.*

Sự độc lập giữa các biến cố

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập (independent)** với nhau nếu

$$P(AB) = P(A).P(B) \tag{9}$$

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập (independent)** với nhau nếu

$$P(AB) = P(A).P(B) \tag{9}$$

Suy ra, nếu A độc lập với B thì

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

Ví dụ 12

Khảo sát giới tính của đứa con thứ nhất và thứ hai trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không (xét thứ tự sinh trước/sau)?

Ví dụ 12

Khảo sát giới tính của đứa con thứ nhất và thứ hai trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không (xét thứ tự sinh trước/sau)?

Bài giải 2

Không gian biến cố sơ cấp của phép thử: $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$
Đặt :
$A =$ *"Con đầu là con trai."* $= \{TT, TG\}$
$B =$ *"Con thứ hai là con gái "* $= \{TG, GG\}$
Ta có:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ và } P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

và $P(AB) = \dfrac{1}{4} = P(A).P(B)$. *Vậy* A, B *độc lập.*

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 13

Xét phép thử ngẫu nhiên có các kết quả đồng khả năng

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Đặt $A = \{\omega_1, \omega_4\}, B = \{\omega_2, \omega_4\}, C = \{\omega_3, \omega_4\}$. *Tính* $P(AB), P(AC), P(BC)$ *và* $P(ABC)$.

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$\begin{aligned} P(A_iA_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \end{aligned}$$

với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập 3 $(i, j, k), \ldots$ của n chỉ số.

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$\begin{aligned} P(A_iA_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \end{aligned}$$

với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập 3 $(i, j, k), \ldots$ của n chỉ số.

Chú ý

Sự độc lập từng đôi một không dẫn đến sự độc lập toàn phần.

Ví dụ 14

Có 10 lá thăm, trong đó có 4 lá thăm trúng thưởng. Sinh viên A rút trước, B rút sau.

a) *Hỏi trò chơi có công bằng hay không?*

b) *Nếu B được thưởng, tính xác suất A được thưởng?*

Ví dụ 14

Có 10 lá thăm, trong đó có 4 lá thăm trúng thưởng. Sinh viên A rút trước, B rút sau.

a) *Hỏi trò chơi có công bằng hay không?*

b) *Nếu B được thưởng, tính xác suất A được thưởng?*

Định nghĩa 5 (Total Probability Rule)

Cho $A_i (i = 1, \dots, n)$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là một biến cố nào đó (trong cùng phép thử) thì

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned} \tag{10}$$

Ví dụ 15

Một nông trường có 4 đội sản xuất. Đội 1 sản xuất 1/3 tổng sản lượng nông sản của nông trường. Đội 2 sản xuất 1/4 tổng sản lượng, đội 3 sản xuất 1/4 tổng sản lượng và đội 4 sản xuất 1/6 tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm tương ứng với các đội sản xuất là 0.15; 0.08; 0.05 và 0.01.
Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường. Tìm xác suất để lấy phải một phế phẩm.

Công thức xác suất đầy đủ

1. Gọi $A_i =$ " Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất ", $i = 1, 2, 3, 4$
   $B =$ " Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".

1. Gọi $A_i =$ " Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất ",
   $i = 1, 2, 3, 4$
   $B =$ " Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".
2. Vì chỉ lấy ngẫu nhiên một sản phẩm nên ta có:
   $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ và theo giả thiết

$$P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}, P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$P(B|A_1) = 0.15,\ P(B|A_2) = 0.08,\ P(B|A_3) = 0.05,\ P(B|A_4) = 0.01.$

1. Gọi $A_i =$ " Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất ",
   $i = 1, 2, 3, 4$
   $B =$ " Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".
2. Vì chỉ lấy ngẫu nhiên một sản phẩm nên ta có:
   $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ và theo giả thiết
   $$P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}, P(A_4) = \frac{1}{6}$$
   $$P(B|A_1) = 0.15,\ P(B|A_2) = 0.08,\ P(B|A_3) = 0.05,\ P(B|A_4) = 0.01.$$
3. Áp dụng công thức toàn phần ta có:
   $$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \\ &+ P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4), \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0.15 + \frac{1}{4}\cdot 0.08 + \frac{1}{4}\cdot 0.05 + \frac{1}{6}\cdot 0.01 \\ &\approx 0,08417. \qquad (11) \end{aligned}$$

Công thức Bayes

Định nghĩa 6 (Bayes Fomula)

Cho $A_i(i = 1, \ldots, n)$ *là hệ đầy đủ các biến cố,* B *là một biến cố nào đó liên quan đến hệ sao cho* $P(B) > 0$. *Khi đó với mọi* i

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{12}$$

Ví dụ 16

Một đám đông có số đàn ông bằng nửa số phụ nữ. Xác suất để đàn ông bị bệnh tim là 0.06 và phụ nữ là 0.036. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ đám đông, tính xác suất để người này bị bệnh tim.

Ví dụ 17

Dùng phản ứng thì phát hiện 5 người bị bệnh trong 1000 người, nếu người bị bệnh thì phản ứng dương tính 97%, nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính 1%.

a) *Tìm xác suất dương tính của phản ứng.*

b) *Một người làm phản ứng thấy dương tính, tìm xác suất người đó là người bị bệnh.*

c) *Tìm xác suất chuẩn đoán đúng của phản ứng.*

Ví dụ 18

Bài tập 1.20 Không gian mẫu của một phép thử ngẫu nhiên là $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$.

w_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
P	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

Đặt biến cố $A = \{w_1, w_2, w_3\}$ *và biến cố* $B = \{w_3, w_4, w_5\}$. *Tính các xác suất sau:*

a) $P(A)$; $P(B)$

b) $P(A^c)$

c) $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$