

ĐỀ THI MÔN VI TÍCH PHẦN B2

Năm 2016-2017

(Đề có 2 mặt. Thời gian 120 phút. Không dùng đa phương tiện, tài liệu)

ĐẠO HÀM- VI PHẦN

Bài 1. [1đ] Cho hàm số f định bởi $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$.

a) Giải thích vì sao hàm f khả vi tại $(8; 0)$ và viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của f tại $(8; 0)$.

b) Dùng phép xấp xỉ tuyến tính để xấp xỉ giá trị của $f(8,02; 0,05)$.

Bài 2. [1đ] Giả sử f là một hàm số khả vi và $u = f(x, y)$. Giả sử

$$x = e^s \cos t, y = e^s \sin t. \text{ Chứng minh } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right].$$

Bài 3. [1đ] Giả sử một đĩa phẳng kim loại có tâm đặt tại điểm $(0,0)$ với nhiệt độ T (đơn vị $^\circ\text{C}$) tại điểm $(x, y) \neq (0,0)$ trên mặt đĩa được cho bởi công thức

$$T = T(x, y) = \frac{125}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) Hãy tính tốc độ biến thiên nhiệt từ điểm $(3,4)$ hướng đến điểm $(-1,1)$ (ghi rõ đơn vị tính).

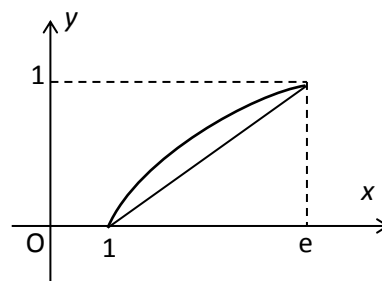
b) Xét tại điểm (x,y) bất kỳ khác tâm đĩa, chứng minh rằng hướng mà theo đó nhiệt độ tăng nhanh nhất là hướng đến tâm đĩa; và hãy cho biết tốc độ tăng nhiệt theo hướng đó là bao nhiêu?

Bài 4. [1đ] Cho hàm số f định bởi $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Chứng minh f đạt cực tiểu tại một điểm, đạt cực đại tại một điểm và f có hai điểm yên ngựa.

TÍCH PHẦN

Bài 5. [1đ] Cho f là hàm số liên tục xác định trên miền phẳng D nằm trong góc phần tư thứ nhất và bị bao quanh bởi hai đường $y = \ln x$; $x + (1 - e)y - 1 = 0$ (e là hằng số Népere). Phác họa của D như hình bên.

Dùng định lý Fubini, viết công thức tính tích phân kép $\iint_D f(x, y) dA$ theo hai tích phân lặp với thứ tự lấy tích phân khác nhau.



Bài 6. Cho trường vector \vec{F} định bởi $\vec{F}(x, y) = \langle xy^2, x^2y \rangle$.

a) [0.5đ] Chứng minh \vec{F} là trường bảo toàn trên \mathbb{R}^2 .

b) [0.5đ] Tìm hàm thế f của \vec{F} và tính $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ với C là đường cong cho bởi

$$C : \vec{r}(t) = \left\langle t + \sin \frac{1}{2} \pi t, t + \cos \frac{1}{2} \pi t \right\rangle, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bài 7. Xét tích phân đường $\oint_C x dx + y dy$, với C gồm đoạn thẳng hướng từ $(0,1)$ đến

$(0,0)$; đoạn thẳng hướng từ $(0,0)$ đến $(1,0)$ và parabol $y = 1 - x^2$ hướng từ $(1,0)$ đến $(0,1)$. Hãy tính tích phân trên theo hai cách:

(a) [1đ] Tính trực tiếp

(b) [0.5đ] Dùng định lý Green.

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài 8. Giải các phương trình vi phân sau

a) [0.5đ] $xy' + 2y = x^3, x > 0, y(1) = 0$

b) [1đ] $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

Bài 9. [1đ] Chứng minh hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$, nhưng không tại đó không tồn tại đạo hàm theo bất cứ hướng nào khác với \vec{i} và \vec{j} .

HẾT