TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ

Học kỳ 2 – Năm học 2022-2023

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng KT-ĐBCL ghi)

Tên học phần:	**Vi tích phân 2B**	**Mã HP:**	**MTH00004**
Thời gian làm bài:	**90 phút**	Ngày thi:	**20/6/2023 lúc 13h30**
Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài.*			

Câu 1. Hãy thực hiện các câu sau:

a) (1đ) Cho hai hàm số f định bởi $f(x;y) = xy - 1$. Hãy lập phép xấp xỉ tuyến tính của f tại $(1;1)$. Viết kết quả xấp xỉ tương tự (không cần chứng minh lại) cho hàm số ba biến có giá trị là $xyz - 1$, trong đó ba biến $x;y;z$ có giá trị được xét gần với 1.

Giải. Đáp số là $xy - 1 \approx (x-1) + (y-1)$, tương tự là $xyz - 1 = (x-1) + (y-1) + (z-1)$ với x, y, z gần 1.

b) (1đ) Trong đo đạc thực nghiệm, người ta định nghĩa sai số tỉ đối giữa hai trị số a và $\bar{a}$ là $\delta_a = \left|\frac{a}{\bar{a}} - 1\right| = \left|\frac{a-\bar{a}}{\bar{a}}\right|$, thông thường là một lượng rất nhỏ gần bằng 0, do đó $\frac{a}{\bar{a}}$ gần bằng 1, $\frac{a}{\bar{a}} - 1 \approx \delta_a$ và $\frac{\bar{a}}{a} - 1 \approx \delta_a$. Các ký hiệu δ_b và δ_c mang nghĩa tương tự. Dùng kết quả câu a), hãy giải thích tại sao người ta lấy sai số tỉ đối giữa $\frac{ab}{c}$ và $\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{c}}$ xấp xỉ bằng $\delta_a + \delta_b + \delta_c$?

Giải. Do các giá trị $\frac{a}{\bar{a}}$, $\frac{b}{\bar{b}}$ và $\frac{c}{\bar{c}}$ gần bằng 1 nên sai số tỉ đối giữa $\frac{ab}{c}$ và $\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{c}}$ là

$$\left|\frac{ab}{c} : \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{c}} - 1\right| = \left|\frac{a}{\bar{a}}\frac{b}{\bar{b}}\frac{\bar{c}}{c} - 1\right| \approx \left|\left(\frac{a}{\bar{a}} - 1\right) + \left(\frac{b}{\bar{b}} - 1\right) + \left(\frac{\bar{c}}{c} - 1\right)\right| = |\delta_a + \delta_b + \delta_c|$$
$$= \delta_a + \delta_b + \delta_c.$$

Câu 2. Cho hàm số f định bởi $f(x;y) = x^3 - \frac{3}{2}xy^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1$.

a) (1đ) Tìm các điểm dừng của hàm f trên tập xác định của nó. (Yêu cầu giải hệ phương trình, không đoán nghiệm.)

Giải. Điểm dừng của f là nghiệm của hệ sau

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - \dfrac{3}{2}y^2 - 12x = 0 \\ f_y = -3xy - 12y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 - 8x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \{(0;0), (4;0), (-4;-8), (-4;8)\}.$$

b) (1đ) Khảo sát cực trị (không ràng buộc) của f trên tập xác định của nó.

Ta có $f_{xx} = 6x - 12$, $f_{yy} = -3x - 12$, $f_{xy} = f_{yx} = -3y$ và Hessian $D(x;y) = -18(x-2)(x+4) - 9y^2$.

- $D(0;0) = 144 > 0, f_{xx}(0;0) = -12 < 0$ nên $(0;0)$ là điểm cực đại.
- $D(4;0) = -288 < 0, D(-4;\pm 8) = -576 < 0$ nên các điểm còn lại là điểm yên ngựa.

Câu 3. Hãy thực hiện các câu sau:

a) (1đ) Tính tích phân kép $\int_D 6x^2y\mathrm{d}A$ bằng cách đưa về tích phân lặp, trong đó D là miền phẳng bị bao quanh bởi các đường $(P)\colon y = x^2 - 4x + 2$, $d\colon y = 2x - 3$.

Giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d cho ta hai giao điểm là $(1;-1)$ và $(5;7)$, đồng thời ta biểu diễn tập D ở dạng

$$D = \{(x;y) |\, x \in [1;5],\ \ x^2 - 4x + 2 \le y \le 2x - 3\}.$$

Do đó

$$\int_D 6x^2y\mathrm{d}A = \int_1^5 \int_{x^2-4x+2}^{2x-3} 6x^2y\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^5 3x^2[(2x-3)^2 - (x^2-4x+2)^2]\mathrm{d}x = \frac{53056}{35} \text{ (máy bỏ túi)} \cdot$$

b) (1đ) Hãy tính lại kết quả câu a) thông qua định lý Green.

Giải. Theo định lý Green thì

$$\int_D 6x^2y\mathrm{d}A = \int_D -\frac{\partial}{\partial y}(-3x^2y^2)\mathrm{d}A = \oint_{\partial D} -3x^2y^2\mathrm{d}x$$

trong đó $\partial D = C_1 + C_2$, $C_1\colon x = t, y = t^2 - 4t + 2, 1 \le t \le 5$ và $-C_2\colon x = t, y = 2t - 3$. Vậy

$$\int_D 6x^2y\mathrm{d}A = \int_{C_1} -3x^2y^2\mathrm{d}x - \int_{-C_2} -3x^2y^2\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^5 -3t^2(t^2-4t+2)^2\mathrm{d}t - \int_1^5 -3t^2(2t-3)^2\mathrm{d}t = \frac{53056}{35} \cdot$$

c) (1đ) Hãy chứng tỏ trường vetor $\vec{\mathbf{F}}(x;y) = \cos x \sin y\,\vec{\mathbf{i}} + \sin x \cos y\,\vec{\mathbf{j}}$ bảo toàn trên miền xác định của nó. Từ đó, dùng hàm thế, hãy tính công của lực $\vec{\mathbf{F}}$ đối với một chất điểm di chuyển dọc theo nửa trên của đường tròn $(x-4)^2+(y-5)^2=9$ từ điểm $(1;5)$ đến điểm $(7;5)$.

Giải. Trường $\vec{\mathbf{F}}$ xác định trên tập hình sao (hoặc đơn liên) $\mathbb{R}^2$, và trên đó thỏa

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin y)=\cos x\cos y=\frac{\partial}{\partial x}(\sin x\cos y).$$

Vậy $\vec{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$ và có hàm thế là f, nghĩa là

$$\vec{\mathbf{F}}=\nabla f \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\sin y=f_x & (1)\\ \sin x\cos y=f_y & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $f=\int \cos x\sin y\,\mathrm{d}x=\sin x\sin y+C(y)$, kết hợp với (2) sẽ cho

$$\frac{\partial}{\partial y}[\sin x\sin y+C(y)]=\sin x\cos y \Leftrightarrow \sin x\cos y+C'(y)=\sin x\cos y.$$

Vậy $C'(y)=0\Leftrightarrow C(y)=C$, hằng số độc lập với x và y.

Để tìm công của lực $\vec{\mathbf{F}}$, ta chọn hằng số $C=0$ và $f=\sin x\sin y$. Khi đó công cần tìm là

$$\int_{(1;5)}^{(7;5)}\vec{\mathbf{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}=\int_{(1;5)}^{(7;5)}\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}=f(7;5)-f(1;5)=(\sin 7-\sin 1)\sin 5\ \text{(đơn vị công)}.$$

Câu 4. Hãy thực hiện các câu sau:

a) (1đ) Tìm hàm số $y=y(x)\neq 0$ định bởi phương trình hàm ẩn, là nghiệm của bài toán giá trị đầu $xy+e^{-x^2}(y^2-1)y'=0$, $y(0)=1$.

Giải. Đưa phương trình vi phân về dạng tách biến $\frac{y'}{y}(1-y^2)=xe^{x^2}$, suy ra

$$\int\frac{y'}{y}(1-y^2)\mathrm{d}x=\int xe^{x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{y}-y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|-\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C,$$

là phương trình cho hàm ẩn y theo x.

Điều kiện $y(0)=1$ cho $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$, suy ra $C=-1$. Vậy hàm số cần tìm định bởi phương trình $\ln|y|-\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}e^{x^2}-1$.

b) (1đ) Tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp hai $y''-4y'+4y=2e^{2x}$.

Giải. Do vế phải có dạng $2e^{2x}$ và hệ số 2 của mũ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ nên nghiệm riêng có dạng $y_p = Ax^2e^{2x}$.

Do $y_p'' - 4y_p{}' + 4y_p = 2e^{2x}$ nên

$$(2A + 8Ax + 4Ax^2)e^{2x} - 4(2Ax + 2Ax^2)e^{2x} + 4Ax^2e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2A = 2 \Leftrightarrow A = 1.$$

Vậy $y_p = x^2e^{2x}$.

c) (1đ) Tìm nghiệm của phương trình trong câu b) thỏa điều kiện đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Giải. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $r = 2$ nên nghiệm tổng quát của bài toán không thuần nhất có dạng $y = (C_1x + C_2)e^{2x} + y_p = (x^2 + C_1x + C_2)e^{2x}$.

Suy ra $y' = [2x^2 + (2C_1 + 2)x + 2C_2 + C_1]e^{2x}$. Điều kiện đầu cho hệ

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ 2C_2 + C_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm bài toán là $y = (x^2 + x)e^{2x}$.

HẾT.