Vtp2-tuần 3

Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin học, Đhkhtn tp HCM

- Đạo hàm: gradient & ma trận Jacobi
- Các tính chất của đạo hàm

Quy ước tên tài liệu:

[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th* , tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)

Vectơ gradient

Định nghĩa. Vectơ gradient của một hàm số n biến trơn đến cấp 1 (hoặc khả vi), là vectơ gồm n thành phần tọa độ là các đạo hàm riêng của f. Vectơ này cũng được gọi là *đạo hàm của hàm nhiều biến f* và được ký hiệu bởi

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \cdots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Ký hiệu ∇ còn được đọc là nabla.

- Trong tiếng Anh, nghĩa của từ gradient là độ nghiêng.
- Ý nghĩa của vectơ gradient (hay đạo hàm) của một hàm số trơn (hoặc khả vi), sẽ được bàn sau: vectơ gradient là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc của một mặt cong, do đó phản ánh độ nghiêng của mặt cong này.

Tính chất của phép tính gradient

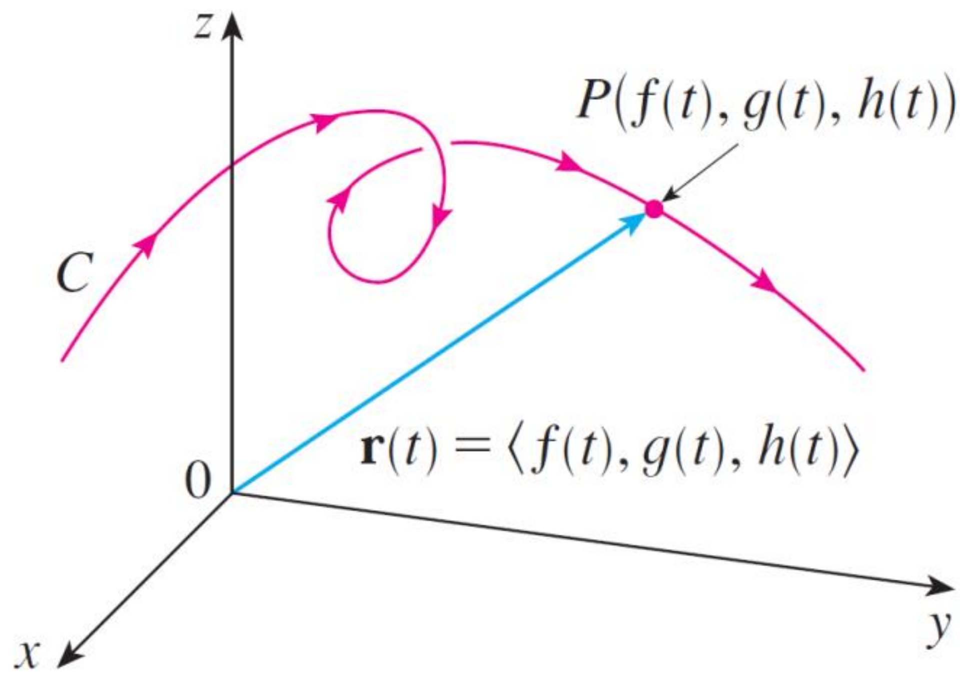
Dựa theo các quy tắc lấy đạo hàm của hàm một biến, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau

Tính chất. Giả sử f và g là hai hàm số n biến trơn đến cấp 1 (hoặc khả vi). Giả sử α và β là hai số thực. Khi đó

- $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
- $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$ nếu $g \neq 0$
- $\nabla(f^n) = n f^{n-1} \nabla f$

Đạo hàm của hàm vectơ 1 biến

- Hàm vectơ 3 chiều một biến là ánh xạ $\mathbf{r}: (a; b) \to \mathbb{R}^3$, ánh xạ số $t \in (a; b)$ thành điểm $\big(f(t); g(t); h(t)\big) \in \mathbb{R}^3$.
- $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ mô phỏng một điểm $P\big(f(t); g(t); h(t)\big)$ trong không gian Oxyz.



- Điểm $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ cũng mô phỏng vectơ hình học $\overrightarrow{OP}$ trong không gian tọa độ Oxyz. Khi t thay đổi thì vị trí của P cũng thay đổi và nó vẽ ra một lộ trình trên một quỹ đạo C trong không gian tọa độ Oxyz. Vectơ $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t)$ cũng được gọi là *vectơ vị trí* của điểm P. Hàm $\mathbf{r}: (a; b) \to \mathbb{R}^3$ cũng được gọi là *lộ trình* trong $\mathbb{R}^3$.

Đạo hàm của hàm vectơ 1 biến

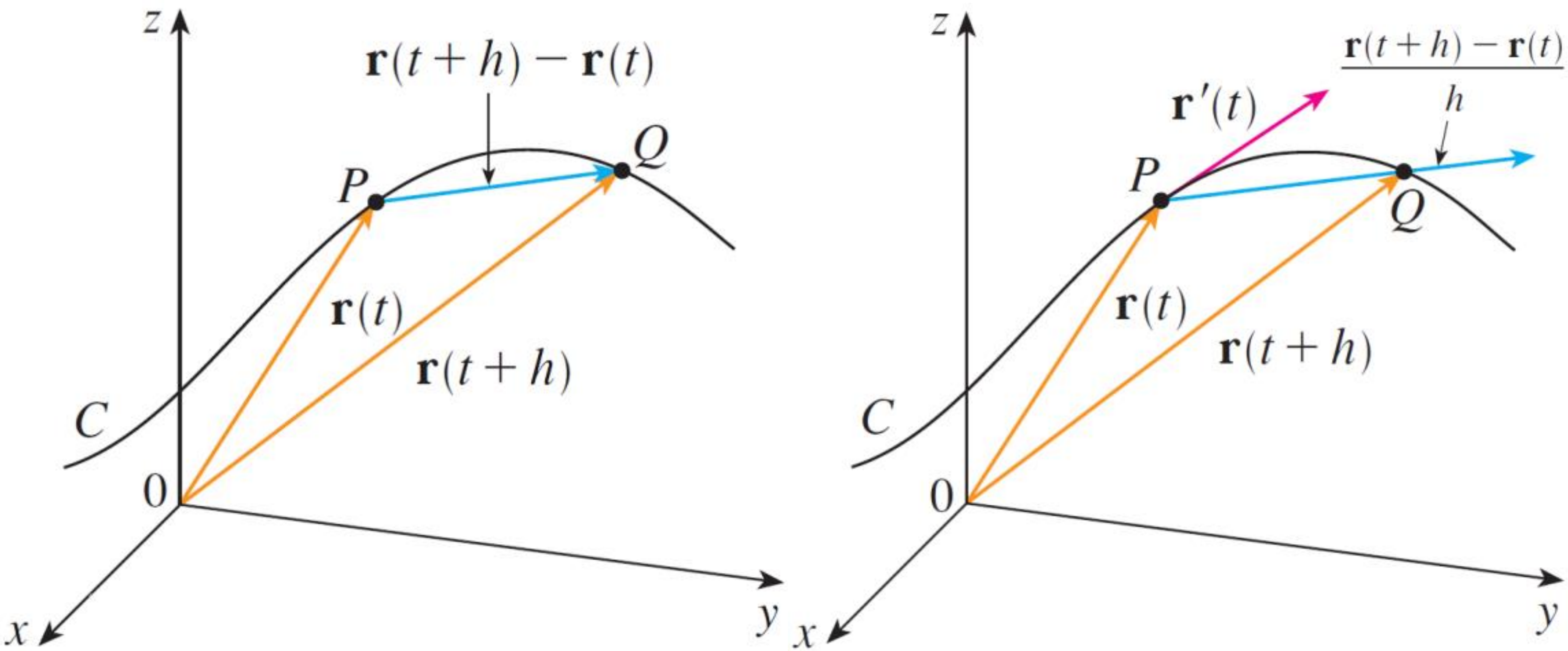
- Hàm vectơ n chiều 1 biến được định nghĩa hoàn toàn tương tự. Trường hợp $n = 2$ hoặc $n = 3$, lộ trình được minh họa dễ dàng bằng hình ảnh trong mặt phẳng hoặc trong không gian.
- Nếu $\mathbf{r}(t) = \big(f(t); g(t); k(t)\big)$ và các hàm thành phần có giới hạn tại a thì ta định nghĩa

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t)\,; \lim_{t\to a} g(t)\,; \lim_{t\to a} k(t)\right).$$

- Nếu các hàm thành phần của $\mathbf{r}$ có đạo hàm thì ta định nghĩa

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h}; \frac{g(t+h) - g(t)}{h}; \frac{k(t+h) - k(t)}{h}\right) \\ &= \big(f'(t); g'(t); k'(t)\big).\end{aligned}$$

Ý nghĩa đạo hàm của hàm vectơ 1 biến



- Nếu hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$ mô phỏng chuyển động của điểm P theo thời gian t thì $\mathbf{r}'(t)$ mô phỏng vận tốc của P, bởi vì $\mathbf{r}'(t)$ là tỉ lệ biến thiên vị trí của P theo thời gian. Phương của vận tốc tiếp xúc với đường cong quỹ đạo. Chiều của vận tốc là chiều chuyển động.

Đạo hàm của hàm vectơ 1 biến

Các tính chất sau được suy trực tiếp từ các tính chất đạo hàm của hàm số một biến:

Tính chất đạo hàm của hàm vectơ

Cho $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ là hai hàm vectơ 1 biến khả vi; f là hàm số 1 biến khả vi và c là hằng số. Khi đó

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)]=\mathbf{r}_1'(t)+\mathbf{r}_2'(t)$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\mathbf{r}_1(t)]=c\mathbf{r}_1'(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\mathbf{r}_1(t)]=f'(t)\mathbf{r}_1(t)+f(t)\mathbf{r}_1'(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)]=\mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}_1(t)]^2=2\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}'_1(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)]=\mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}_1\big(f(t)\big)\right]=\mathbf{r}_1'[f(t)]f'(t)$

Ma trận Jacobi

- Ánh xạ $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được gọi là hàm vectơ m chiều, có n biến, $\mathbf{f} = \langle f_1; f_2; \dots; f_m \rangle$ với các thành phần $f_1; \dots; f_m$ là các hàm số n biến.
- Nếu các hàm thành phần trơn đến cấp 1 (hoặc khả vi) trên tập mở U thì người ta định nghĩa *đạo hàm của* $\mathbf{f}$ là ma trận, với 3 ký hiệu đi kèm, có tên là ma trận Jacobi, như sau

$$J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial(f_1; \dots; f_m)}{\partial(x_1; \dots; x_n)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m; \\ 1 \le j \le n}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}.$$

- Ma trận Jacobi gồm có m hàng, n cột. Mỗi hàng xem như đồng nhất với gradient của các thành phần của vector $\mathbf{f}$.

Bài tập mẫu

- Cho hàm số f định bởi $f(x;y;z) = x^2e^y + z^3\ln x$. Hãy tìm ∇f và $\nabla f(1;\ln 3\,;-1)$.
- Cho $f_1(x;y;z) = x\sin y$, $f_2(x;y;z) = y\ln z$. Đặt $\mathbf{f} = \langle f_1; f_2\rangle$. Viết ma trận Jacobi $J_{\mathbf{f}}$, cũng được ký hiệu là $\frac{\partial(f_1;f_2)}{\partial(x;y;z)}$.
- Cho $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Tính định thức $\left|\frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\theta)}\right|$.
- Vẽ đường cong quỹ đạo và chỉ rõ hướng trên quỹ đạo (khi t tăng) của các lộ trình: $\mathbf{r}_1(t) = \langle\sin t\,; t\rangle$, $\mathbf{r}_2(t) = \langle t^3; t^2\rangle$, $\mathbf{r}_3(t) = \langle t;\cos 2t\,;\sin 2t\rangle$, $\mathbf{r}_4(t) = \langle t;\cos t\,; 2\sin t\rangle$.
- Vẽ đường cong quỹ đạo của lộ trình $\mathbf{r}(t) = \langle t-2; t^2+1\rangle$. Tìm $\mathbf{r}'(t)$. Vẽ hai vectơ hình học mô phỏng bởi $\mathbf{r}(-1)$ và $\mathbf{r}'(-1)$.
- Yêu cầu như trên với $\mathbf{r}(t) = \langle t+1; \sqrt{t}\rangle$, $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}'(1)$.
- Tham khảo thêm bài tập [2] mục 13.1 và 13.2.

Tính chất của đạo hàm

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Định lý (đạo hàm riêng của hàm hợp). *Giả sử* $f: U \to \mathbb{R}$ *là hàm số trơn cấp 1 (hoặc khả vi) trên một tập mở* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Giả sử* x_1, x_2, … *và* x_n *là giá trị của* n *hàm số một biến* t, *khả vi trên khoảng mở* $(a; b)$ *sao cho điểm* $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in U, \forall t \in (a; b)$. *Khi đó hàm một biến* $t \mapsto f(\mathbf{x})$ *(xem như hàm hợp) khả vi và ta có "quy tắc móc xích" sau đây*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = \nabla f\big(\mathbf{x}(t)\big) \cdot \mathbf{x}'(t) \quad (*)$$

(Ký hiệu f ở 2 vế $(*)$ có bản chất khác nhau.)

Chứng minh (có thể bỏ qua). Do tính khả vi của f ta có $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta x_i$, trong đó các đại lượng $\varepsilon_i \to 0$ khi $\Delta x_i \to 0$. Chia cả hai vế bởi Δt thì ta có $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$, cho $\Delta t \to 0$ thì ta được đẳng thức $(*)$.

Đạo hàm riêng của hàm hợp

Nếu x_1, x_2, …, x_n là n giá trị của n hàm số khả vi theo m biến độc lập t_1, t_2, …, t_m thì ta vẫn có thể áp dụng quy tắc móc xích như trên, tức là

$$\forall k = \overline{1, \dots, m}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}$$

Ghi chú thêm. Nếu xem $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ là hàm vectơ có m biến số độc lập t_1, t_2, …, t_m thì công thức tổng quát ở trên là kết quả của phép nhân ma trận sau đây

$$\nabla(f \circ \mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{x}}$$

với $J_{\mathbf{x}}$ là ma trận Jacobi. Công thức trên có hình thức giống như hình thức ở bậc phổ thông cho hàm số một biến: $[f(u)]' = f'(u) \cdot u'$, dạng "móc xích" là $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Bài tập mẫu

- Tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ bằng 2 cách: thế trực tiếp và dùng quy tắc móc xích, với $z = u^2 + \sin v$, $u = x^2 y$, $v = x^3 y^2$.
- Cho hàm f có hai biến, trơn. $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hai hàm số có đạo hàm theo biến t. Đặt $z(t) = f(x(t); y(t))$. Cho $x(1) = 2$, $y(1) = -2$, $x'(1) = 4$, $y'(1) = -3$, $f_x(2; -2) = -4$, $f_y(2; -2) = 6$. Tính $z'(1)$.
- Cho hàm số 1 biến f khả vi. Đặt $z = f(x - y)$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.
- Cho $u = x^2 + yz$, $x = pr\cos\theta$, $y = pr\sin\theta$, $z = p + r$. Hãy tính $\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ khi $p = 2$, $r = 3$ và $\theta = 0$.
- Tham khảo thêm bài tập [1] 1.4.1-12.
- Tham khảo thêm bài tập [2] mục 14.5.

Bài tập mẫu

- Sản lượng lúa mì W (ngàn tấn) trong năm phụ thuộc nhiệt độ T (ºC) và lượng mưa R (cm) trung bình của năm. Các nhà khoa học ước tính trong giai đoạn này, nhiệt độ bình quân đang tăng với tốc độ $0{,}15$ (ºC/năm) và lượng mưa đang giảm với tốc độ $0{,}1$ (cm/năm). Họ cũng ước tính được $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ và $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$.

a) Dấu trong các đạo hàm riêng $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ và $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$ phản ánh điều gì?

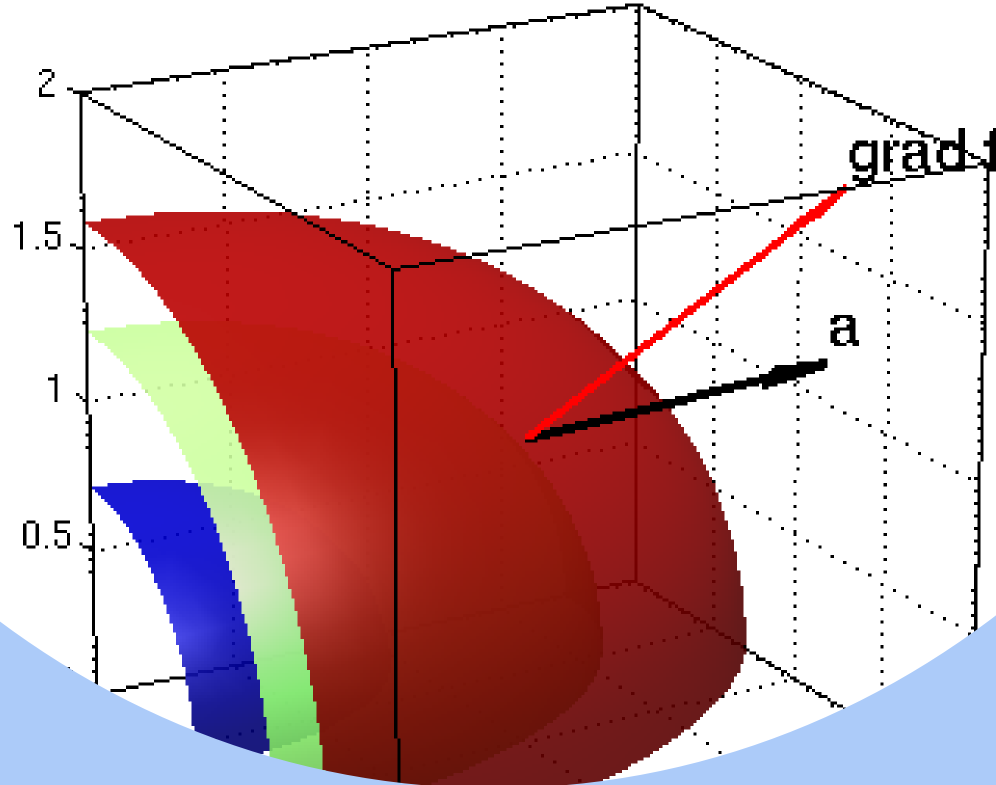
b) Trong giai đoạn này, hãy ước tính sản lượng W thay đổi theo thời gian ra sao.

Bài tập mẫu

- Một nguồn âm có tần số f_s di chuyển trên một đường thẳng với tốc độ v_s và một người quan sát đi trên đường thẳng đó theo hướng ngược lại với tốc độ v_0. Hiệu ứng Doppler trong lý thuyết sóng âm cho biết tần số âm thanh mà người quan sát cảm nhận được (tần số rung màng nhĩ) là

$$f_0 = \left(\frac{c + v_0}{c - v_s}\right) f_s,$$

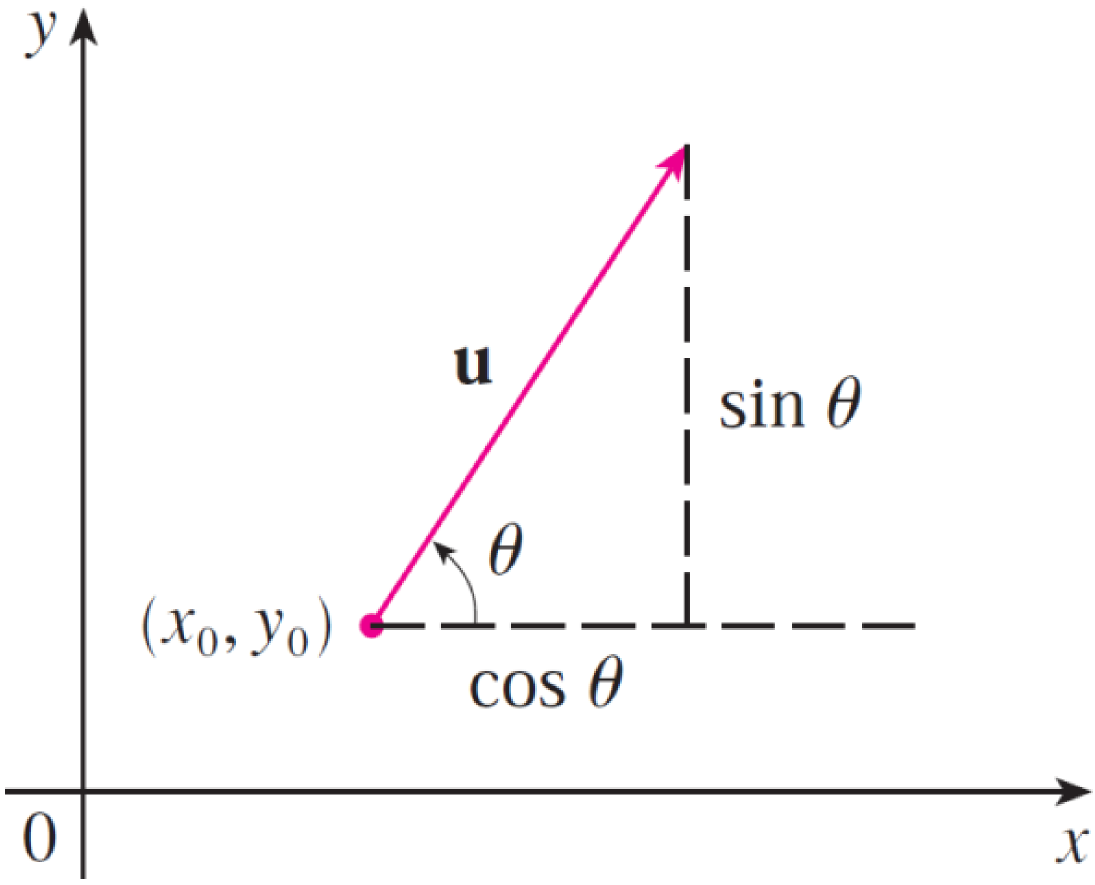
trong đó $c \approx 332$ m/s là tốc độ truyền âm trong không khí. Giả sử tại một thời điểm, bạn đang ngồi trong một xe lửa có tốc độ $v_0 = 34$ m/s, đang tăng tốc ở mức $1{,}2\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}}$, và một xe lửa khác di chuyển ngược lại trên đường ray song song sát bên với $v_s = 40$ m/s và đang tăng tốc ở mức $1{,}4\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}}$, phát ra tiếng còi có tần số $f_s = 460$Hz. Hỏi ngay thời điểm đó, bạn cảm nhận tần số còi là bao nhiêu, tần số này biến thiên nhanh ở mức nào?



Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm theo hướng

- Ký hiệu $\mathbf{u} = (a; b)$ là điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ có độ dài Euclide bằng 1, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, thì $\mathbf{u}$ mô phỏng một vectơ hình học có độ dài 1 (vectơ đơn vị) trong mặt phẳng tọa độ. Vectơ này hợp với trục Ox một góc θ thì ta có thể viết $\mathbf{u} = (a; b) = (\cos\theta\,; \sin\theta)$.

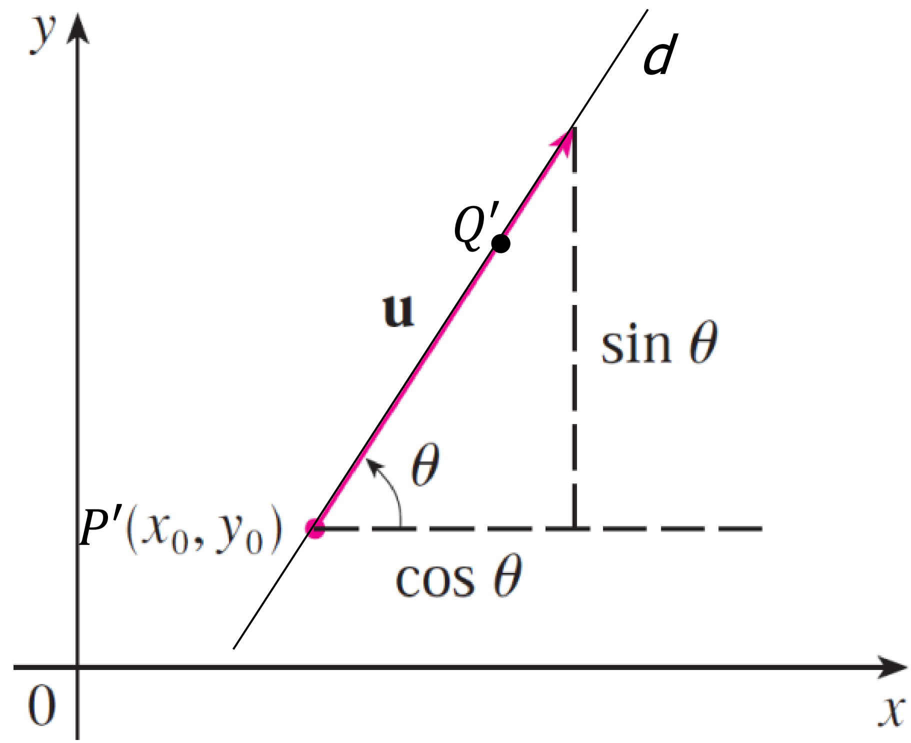


Đạo hàm theo hướng

Cho trước $\mathbf{a} = (x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Với h là số thay đổi quanh 0 thì các điểm

$\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (x_0 + ah; y_0 + bh)$

thay đổi trong $\mathbb{R}^2$ sẽ mô phỏng điều gì trong mặt phẳng tọa độ?



- Điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ mô phỏng điểm hình học $P'(x_0; y_0)$ trong mặt phẳng tọa độ, điểm $\mathbf{a} + h\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ mô phỏng điểm hình học $Q'(x_0 + ah; y_0 + bh)$ chạy qua lại quanh điểm P' trên đường thẳng d khi h thay đổi, $\mathbf{u}$ là vectơ chỉ hướng của d, đồng thời $h = \overline{P'Q'}$.

Đạo hàm theo hướng

- Giả sử một hàm số f có 2 biến, xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm $\mathbf{a}$. Tỉ số

$$\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{h}, \text{ với } h \text{ gần và khác } 0,$$

là tỉ lệ biến thiên của f theo hướng $\mathbf{u}$ so với độ dời h.

- Ta nói *tỉ lệ biến thiên tức thời của f tại $\mathbf{a}$ theo hướng $\mathbf{u}$*, cũng được gọi là *đạo hàm của f theo hướng $\mathbf{u}$ tại $\mathbf{a}$*, là giới hạn, nếu tồn tại, với ký hiệu đi kèm sau đây

$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{h}} \qquad (*)$$

- Khái niệm đạo hàm theo hướng đối với hàm số n biến cũng được định nghĩa theo hình thức $(*)$, trong đó điểm $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) \in \mathbb{R}^n$ là điểm có độ dài Euclide bằng 1, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = 1$.

Đạo hàm theo hướng

- Trường hợp đặc biệt, nếu $\mathbf{u}$ là *vectơ cơ sở chuẩn tắc*, tức là vectơ $\mathbf{e}_k = (0; \dots; 1; \dots; 0)$ có thành phần tọa độ thứ k bằng 1, các thành phần còn lại bằng 0, thì thay $\mathbf{u}$ bởi $\mathbf{e}_k$ vào $(*)$, ta có

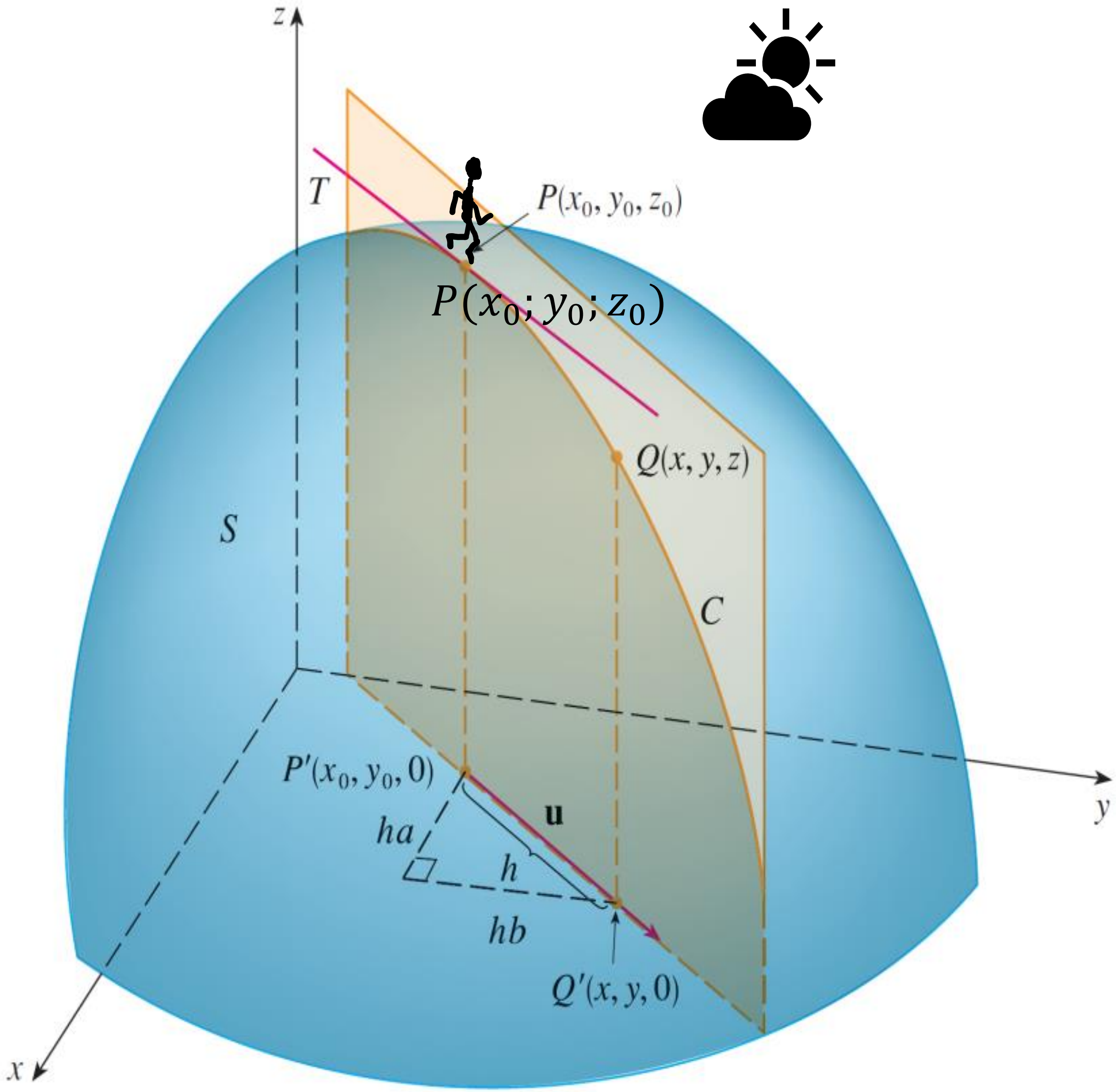
$$D_{\mathbf{e}_\mathrm{k}} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_\mathrm{k}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_\mathrm{k}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1; \dots; a_k + h; \dots; a_n) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

- Vậy các đạo hàm riêng chính là đạo hàm theo các hướng dương của các trục toạ độ, là các hướng đặc biệt.

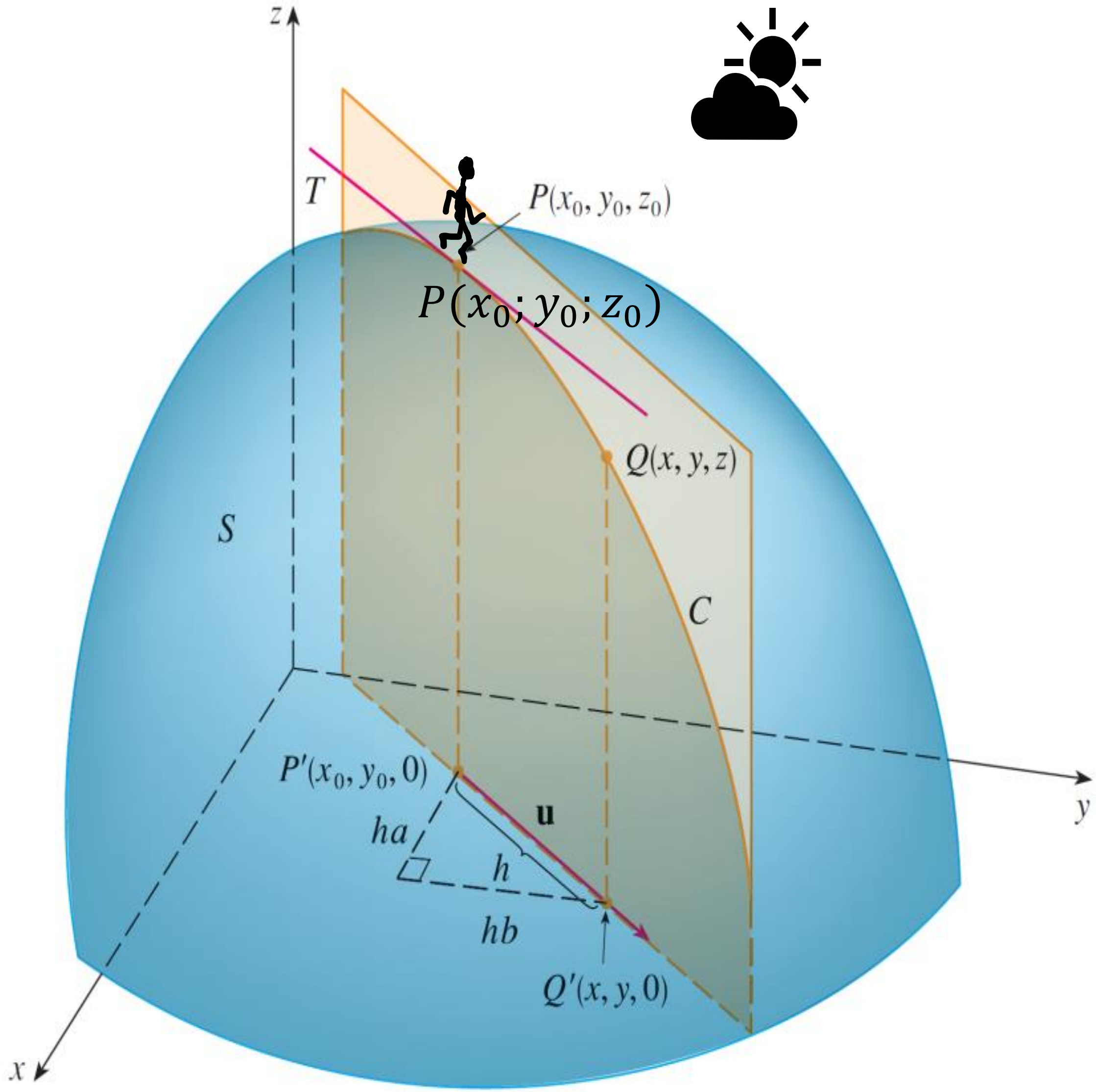
Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Xét hàm số hai biến f có đồ thị là mặt cong màu xanh (hình bên), thì mặt phẳng vàng đứng song song với phương của $\mathbf{u}$ và chứa điểm $P(x_0; y_0; z_0)$, $z_0 = f(x_0; y_0)$, cắt đồ thị theo đường cong C.



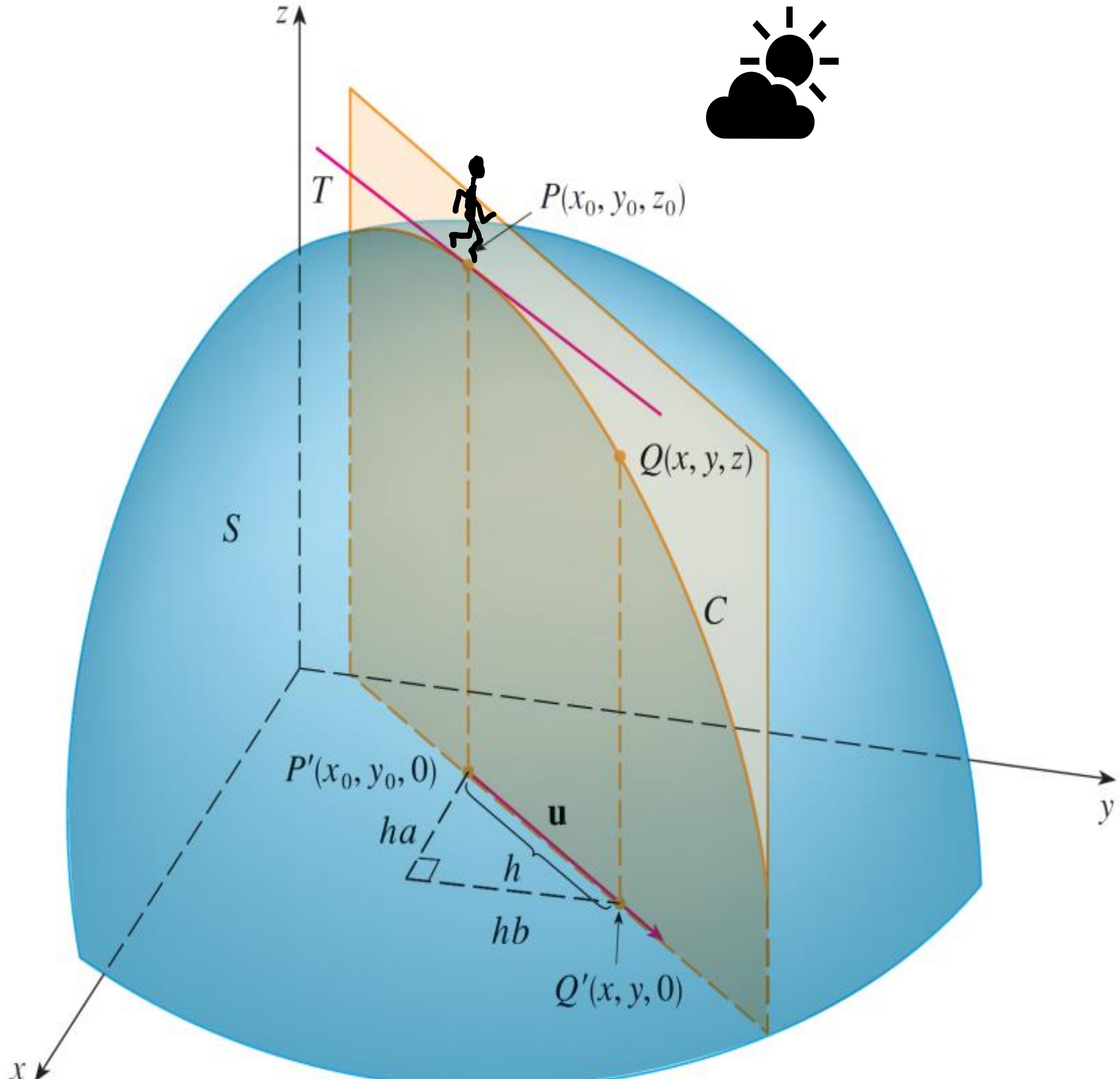
Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Nếu đứng trên mặt cong tại P, nhìn theo hướng $\mathbf{u}$ sẽ cho cảm giác trượt theo đường cong C với độ nghiêng tại P là tỉ lệ giữa biến thiên độ cao và độ dịch chuyển ngang theo hướng $\mathbf{u}$, tức là $D_{\mathbf{u}}f(x_0; y_0)$.



Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Đường thẳng đỏ trong mặt phẳng vàng, qua P, với độ dốc xét theo hướng $\mathbf{u}$ là $D_{\mathbf{u}}f(x_0; y_0)$, được gọi là tiếp tuyến của C.



Đạo hàm theo hướng với gradient

Đối với hàm trơn cấp 1 (hoặc khả vi), đạo hàm theo hướng có thể được tính thông qua vectơ gradient.

Định lý. *Nếu hàm số f trơn đến cấp 1 (hoặc khả vi) trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ thì*

$$\forall \mathbf{x} \in U, D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \text{ (tích vô hướng)}$$

Chứng minh (có thể bỏ qua)**.** Theo định nghĩa $(*)$ và định nghĩa đạo hàm của hàm một biến thì $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = g'(0)$ với g là hàm hợp $t \mapsto \mathbf{x} + t\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) = g(t)$. Giả sử $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n)$ và $\mathbf{u} = (u_1; \dots; u_n)$. Theo quy tắc móc xích thì

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_i + tu_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) \cdot u_i$$

$$= \nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

Suy ra $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = g'(0) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$.

Ý nghĩa của vectơ gradient

Ý nghĩa thứ nhất của vectơ gradient: Đứng tại điểm $P\left(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})\right)$ trên đồ thị, nếu quay mặt về hướng của $\nabla f(\mathbf{x})$ thì mặt cong đồ thị lên dốc "gắt" nhất; Nếu quay mặt về hướng $-\nabla f(\mathbf{x})$ thì mặt cong tuột dốc nhiều nhất.

Định lý (cực trị của đạo hàm theo hướng). *Giả sử hàm số* f *trơn đến cấp 1 (hoặc khả vi) trên tập mở chứa điểm* $\mathbf{x}$. *Giả sử* $\mathbf{x}$ *không là điểm dừng của* f, *tức là* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. *Khi đó*

- *Hướng mà theo đó đạo hàm của* f *tại* $\mathbf{x}$ *đạt cực đại là hướng của vectơ* $\nabla f(\mathbf{x})$ *và*

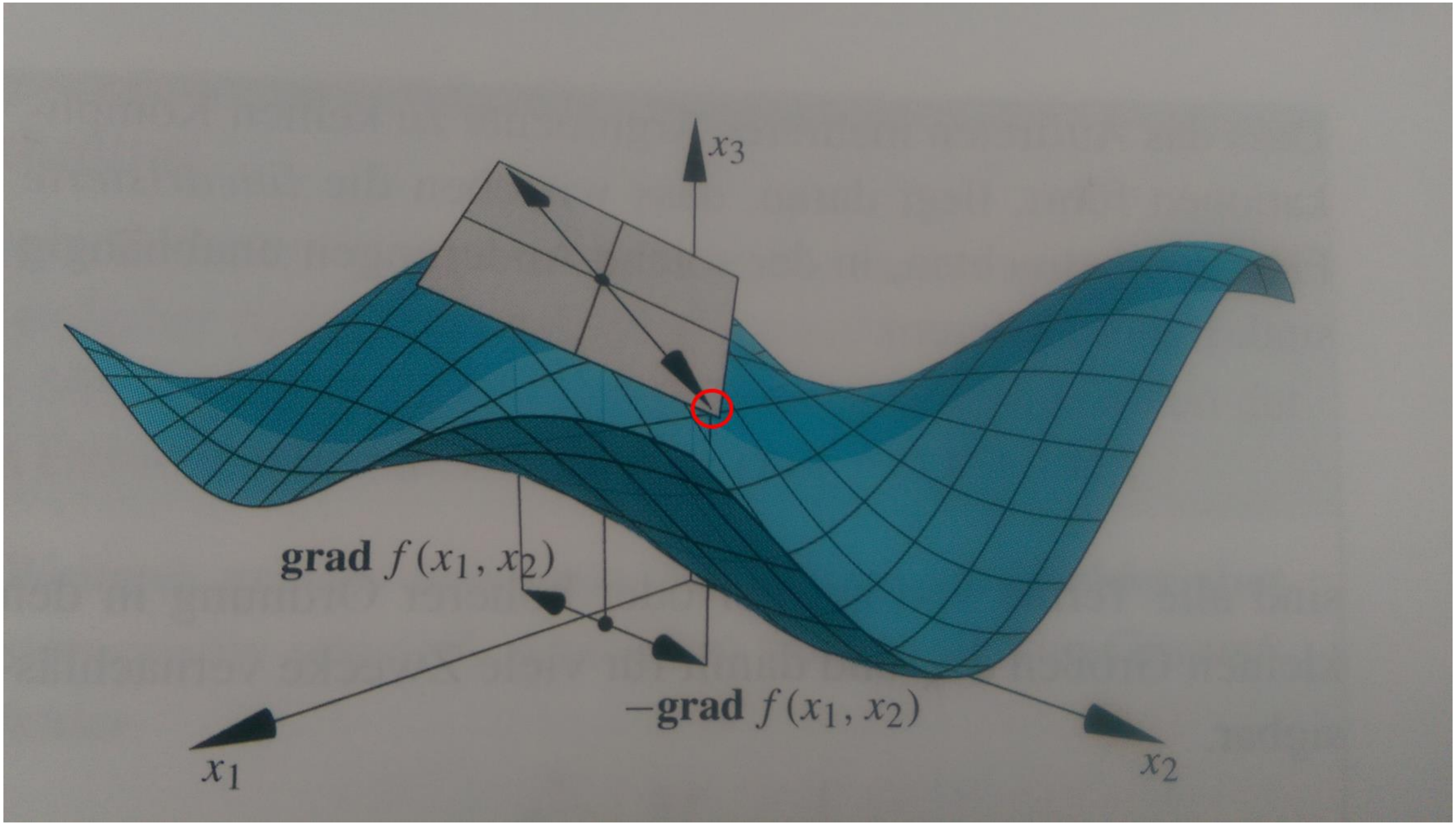
$$\max_{\forall \mathbf{u}} D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|, \text{ đạt được khi } \mathbf{u} = \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} \nabla f(\mathbf{x}).$$

- *Hướng mà theo đó đạo hàm của* f *tại* $\mathbf{x}$ *đạt cực tiểu là hướng của vectơ* $-\nabla f(\mathbf{x})$ *và*

$$\min_{\forall \mathbf{u}} D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|, \text{ đạt được khi } \mathbf{u} = -\frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} \nabla f(\mathbf{x}).$$

Ý nghĩa của vectơ gradient

Ảnh minh họa: đồ thị hàm số 2 biến f, phương có độ dốc lên xuống gắt nhất ở một điểm trên mặt cong đồ thị.



Ý nghĩa của vectơ gradient

Ví dụ. Cho hàm số $f(x;y) = xe^y$. Tính đạo hàm của f tại $P(2;0)$ theo hướng từ P đến $Q\left(\frac{1}{2};2\right)$. Xác định hướng làm cho đạo hàm của f tại P lớn nhất.

Giải. $\nabla f = \left(f_x; f_y\right) = (e^y; xe^y)$, suy ra $\nabla f(P) = (e^0; 2e^0) = (1;2)$.
Vectơ đơn vị chỉ hướng từ P đến Q là

$$\mathbf{u} = \frac{1}{PQ}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1{,}5^2 + 2^2}}\left(-\frac{3}{2};2\right) = \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right).$$

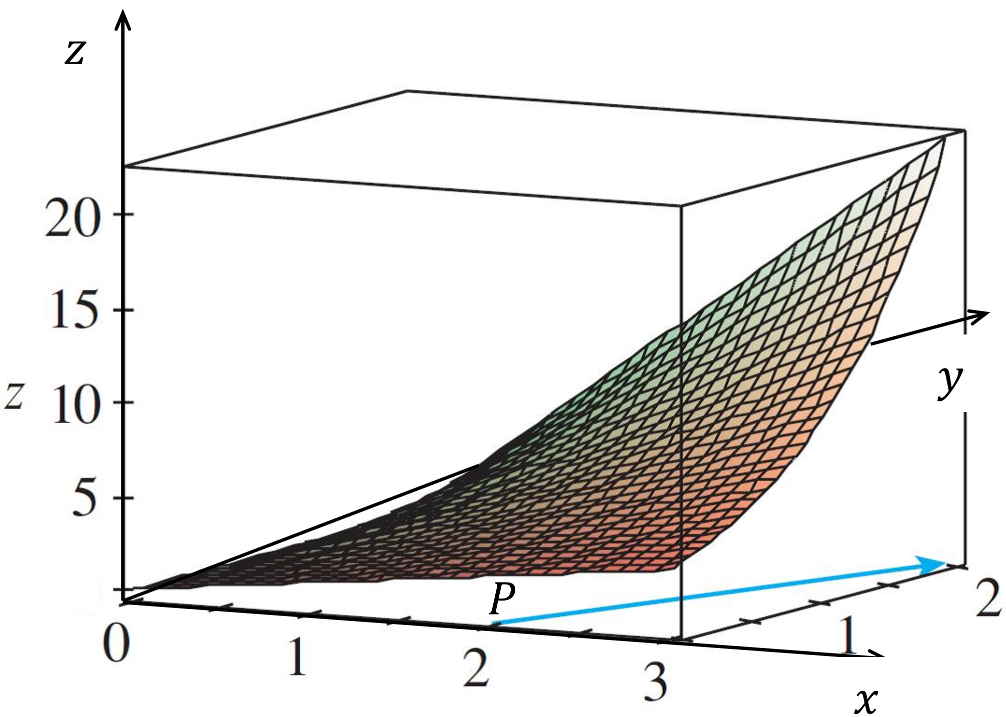
Do f là hàm trơn nên

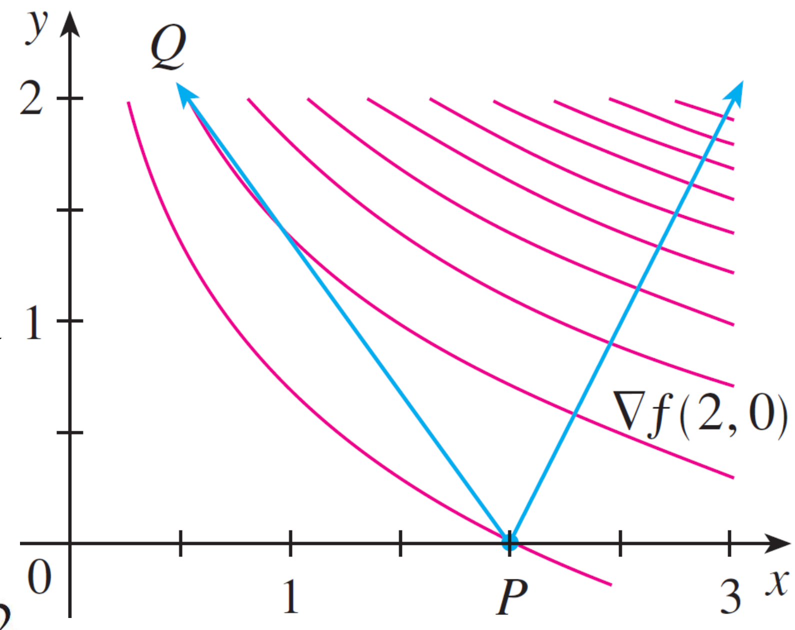
$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{u} = 1\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1.$$

Đạo hàm theo hướng của f tại P đạt giá trị lớn nhất bằng $|\nabla f(P)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, theo hướng của $\nabla f(P) = (1;2)$.

Ý nghĩa của vectơ gradient

Ảnh minh họa:





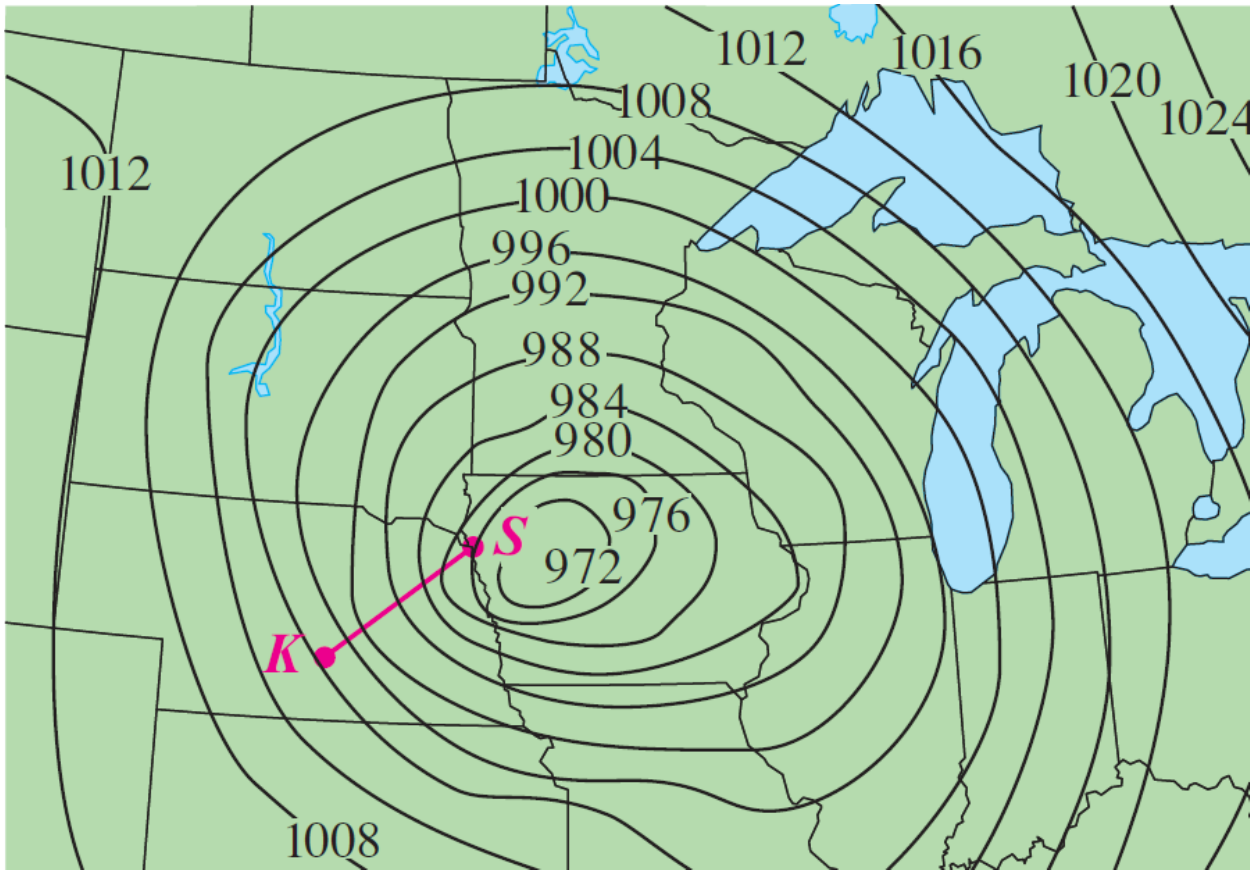
$$D_{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}} f(P) = 1;$$

$$\max_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{v}} f(P) = |\nabla f(P)| = \sqrt{5}.$$

Xem bản đồ các đường đẳng trị của f, dự đoán xem vị trí tương đối của vectơ $\nabla f(P) = \nabla f(2; 0)$ đối với đường đẳng trị qua điểm P như thế nào? Kết quả dự đoán sẽ được khảo sát ở phần sau.

Bài tập mẫu

- Hình dưới là bản đồ các đường đẳng áp (đơn vị đo là milibars) được ghi nhận lúc 6:00AM, 10 Nov, 1998. Khoảng cách từ K (Kearney, Nebraska) đến S (Sioux City, Iowa) là 300km. Từ K đến S khí áp biến thiên như thế nào so với khoảng cách?



Nguồn từ *Meteorology Today,* 8E *by C. Donald Ahrens* (2007 *Thomson Brooks/Cole*).

Bài tập mẫu

- Tìm đạo hàm tại 1 điểm theo hướng của vectơ cho trước:
  a) $f(x;y) = y\sqrt{x}$ tại điểm $(1;2)$ theo hướng của $(2;3)$.
  b) $f(x;y) = x^4 - xy + y^3$ tại điểm $(1;2)$ theo hướng hợp với trục Ox một góc $60°$.
  c) $f(x;y;z) = xy + yz + zx$ tại điểm $P(1;-1;3)$, hướng đến điểm $Q(2;4;5)$.
- Giả sử $T(x;y) = x^2 + y^2 - x - y$ là nhiệt độ $(°\mathrm{C})$ tại điểm $(x;y)$ trên mặt phẳng tọa độ. Một con kỳ nhông đang ở vị trí $(1;3)$. Nó nên di chuyển theo hướng nào để được sưởi ấm nhanh nhất?
- Địa hình một ngọn núi được mô hình hóa theo dạng mặt cong đồ thị của $f(x;y) = 3000/(x^2 + 2y^2 + 5)$. Một dòng suối dẫn nước chảy đến điểm $\big(5;4;f(5;4)\big)$ thì đoán xem nước chảy tiếp theo hướng nào?

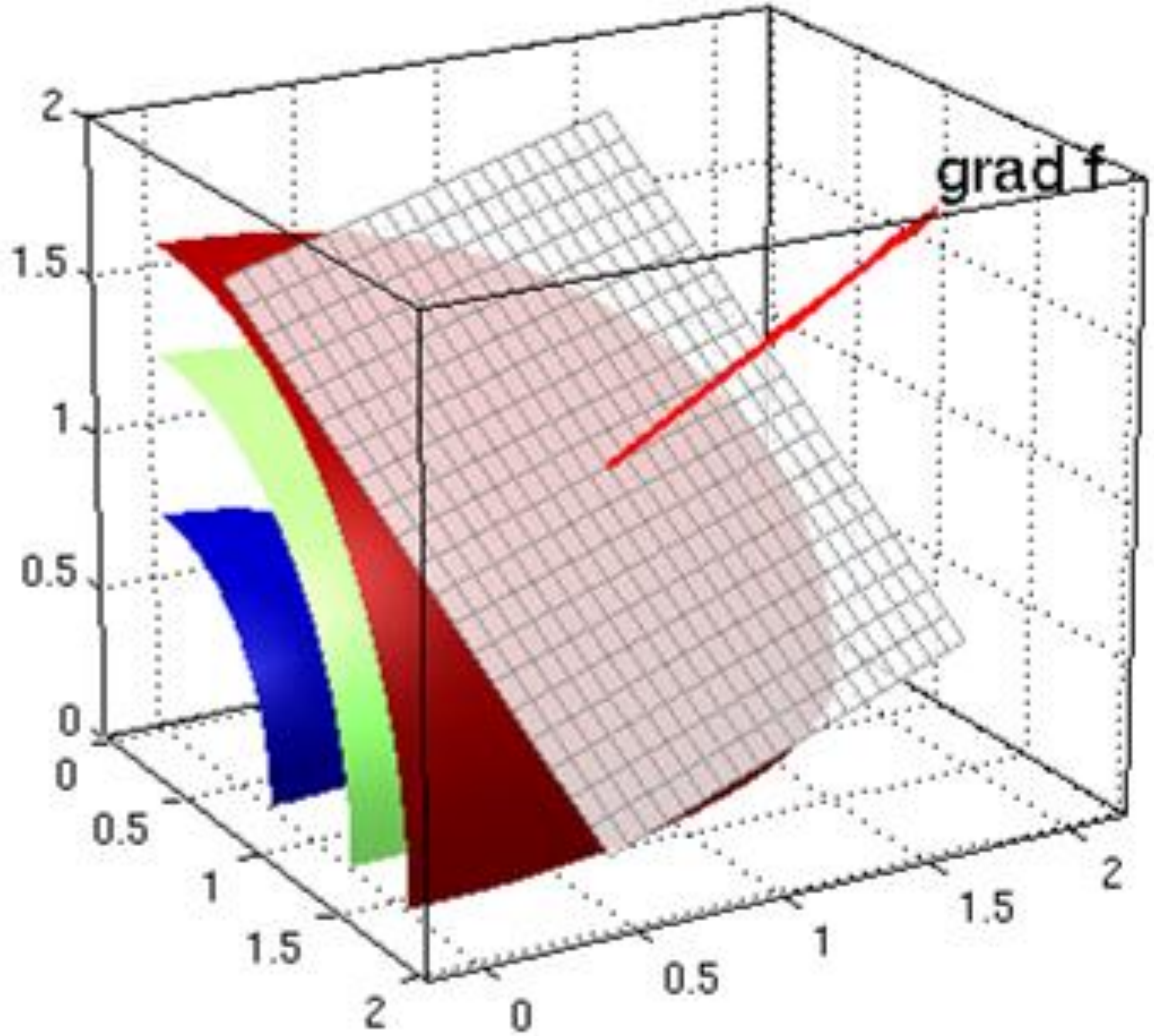
Bài tập mẫu

- Cho hàm số $f(x;y) = \sqrt[3]{xy}$. Tìm $f_x(0;0)$ và $f_y(0;0)$. Chứng minh rằng nếu $\mathbf{u}$ là vectơ đơn vị không cùng phương với $\mathbf{i} = (1;0)$ và $\mathbf{j} = (0;1)$ thì không tồn tại đạo hàm tại $(0;0)$ theo hướng $\mathbf{u}$ của f. Từ đó có thể rút ra điều gì?
- Cho hàm số 2 biến f trơn (đến cấp 1). Cho các điểm $A(1;3)$, $B(3;3)$, $C(1;7)$ và $D(6;15)$. Biết rằng đạo hàm tại A của f theo hướng $\overrightarrow{AB}$ bằng 3, theo hướng $\overrightarrow{AC}$ bằng 26. Tìm đạo hàm của f tại A theo hướng của $\overrightarrow{AD}$.
- Tham khảo thêm bài tập [1] 1.4.13-19.
- Tham khảo thêm [2] mục 14.6, bài tập 1-40.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt đẳng trị Đường thẳng tiếp xúc với đường đẳng trị

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy:

- Vectơ gradient của hàm 3 biến khả vi thì vuông góc với mặt đẳng trị của hàm đó tại điểm đang xét.
- Vectơ gradient của hàm 2 biến khả vi thì vuông góc với đường đẳng trị của hàm đó tại điểm đang xét.



Nhắc lại: tập mức hay tập đẳng trị

- Giả sử f là một hàm số 2 biến và k là một số thực cố định. Tập hợp $C = f^{-1}(\{k\})$ bao gồm các điểm $(x; y)$ trong tập xác định của f thỏa $f(x; y) = k$, được gọi là *tập mức* hay là *tập đẳng trị* của f ở mức k. Tập hợp này mô phỏng một đường cong có phương trình $f(x; y) = k$ trong mặt phẳng tọa độ.

Ví dụ. Với hàm số f cho bởi $f(x; y) = x^2 + y^2$ thì phương trình $f(x; y) = 4$ mô tả đường đẳng trị của f là đường tròn tâm O bán kính 2 trong mặt phẳng tọa độ.

- Lý do của tên gọi tập mức là như vầy: mặt phẳng ngang $z = k$ có độ cao k (ở mức k) cắt đồ thị của f tạo vết cắt ngang (xem lại bài giảng tuần 1). Chiếu vết cắt ngang lên mặt Oxy sẽ thành đường đẳng trị, bao gồm các điểm $(x; y)$ thoả phương trình $f(x; y) = k$.

Nhắc lại: tập mức hay tập đẳng trị

- Tương tự cho hàm số F, có 3 biến, thì tập đẳng trị của nó mô phỏng mặt cong (S) (mặt đẳng trị) có phương trình $F(x;y;z) = k$ trong không gian tọa độ.
- Tổng quát, ta cũng có tập mức, tập đẳng trị của hàm số n biến.

- Cho f là hàm số hai biến khả vi. Giả sử một phần của đường đẳng trị $f(x;y) = k$ là đồ thị của hàm ẩn một biến khả vi: $x \mapsto y = y(x)$, thì

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

- Cho F là hàm 3 biến khả vi. Giả sử một phần của mặt đẳng trị $F(x;y;z) = k$ là đồ thị của hàm số hai biến khả vi: $(x;y) \mapsto z = z(x;y)$, thì ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}.; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} - \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Đạo hàm hàm ẩn

Ta giải thích công thức đạo hàm hàm ẩn ở trước như sau

- Với đường đẳng trị có phương trình $f(x; y) = k$, ta thay $y = y(x)$ như là ẩn hàm theo biến mới x (Chữ x vừa đóng vai trò của biến cũ, được in màu đen, vừa đóng vai trò của biến mới, được in màu đỏ). Lấy đạo hàm theo x ở hai vế của phương trình $f\big(x; y(x)\big) = k$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\big(x; y(x)\big)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

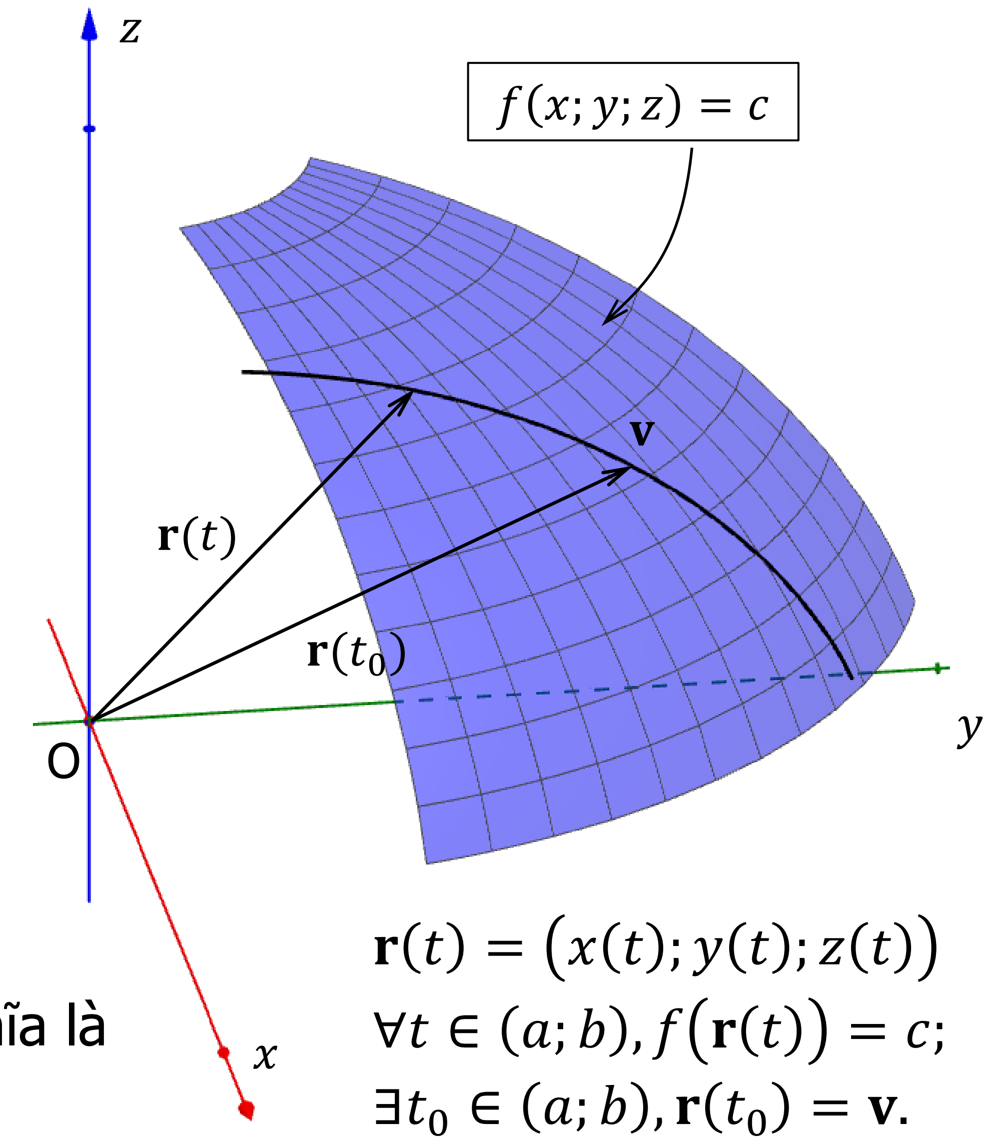
- Trường hợp phương trình mặt đẳng trị của hàm 3 biến cho hàm ẩn $z = z(x; y)$ thì công thức đạo hàm riêng của z theo x, y cũng được chứng minh tương tự ở trên.

Bài tập mẫu

- Cho y là giá trị của một ẩn hàm theo x định bởi phương trình $y\sin 2x = x\cos 2y$.
  a) Tìm biểu thức theo x, y của y' theo cách của học kỳ trước (phạm vi kiến thức Vtp1) và theo công thức vừa học.
  b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm ẩn tại điểm $(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4})$.
- Giả sử z là giá trị của một ẩn hàm theo hai biến x và y cho bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Tìm biểu thức của $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ theo x, y, z.

Gradient $\perp$ mặt phẳng tiếp xúc và tiếp tuyến

- Giả sử f là hàm số 3 biến khả vi và $\mathbf{v} = (x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt đẳng trị của f ở mức c, nghĩa là $f(\mathbf{v}) = c$. Giả sử $\nabla f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Xét một đường cong bất kỳ đi qua $\mathbf{v}$, nằm trong mặt đẳng trị nói trên, được mô phỏng bởi lộ trình $\mathbf{r}(t)$, $t \in (a; b)$, trơn đến cấp 1.



Điều này có nghĩa là

$$\mathbf{r}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$$
$$\forall t \in (a; b), f\big(\mathbf{r}(t)\big) = c;$$
$$\exists t_0 \in (a; b), \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{v}.$$

Gradient ⊥ mặt phẳng tiếp xúc và tiếp tuyến

- Dùng quy tắc móc xích, lấy đạo hàm theo biến t ở hai vế của $f\big(\mathbf{r}(t)\big) = c$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\mathbf{r}(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{c})$$

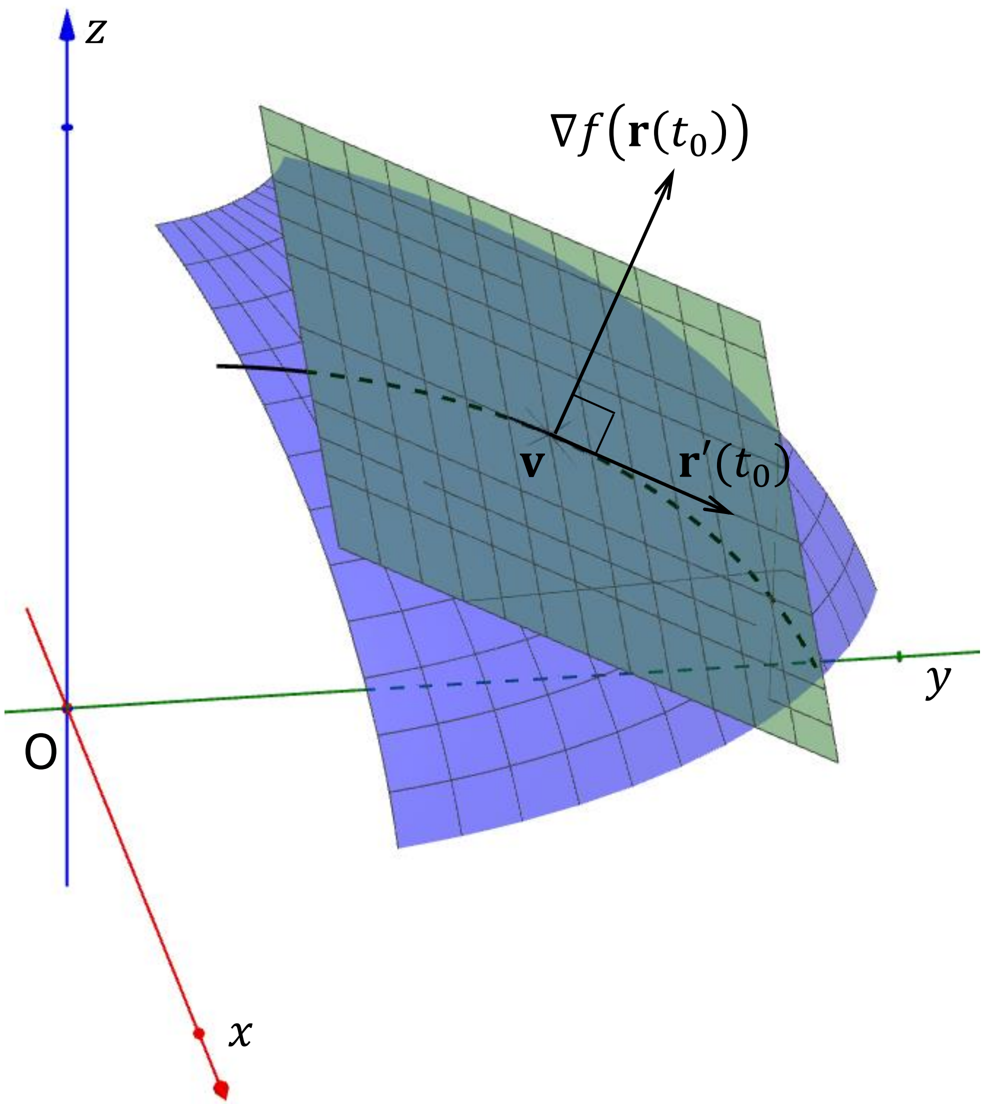
$\Leftrightarrow \nabla f\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$

- Khi thay $t = t_0$ vào phương trình trên thì ta có

$$\nabla f(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

nghĩa là

$$\nabla f(\mathbf{v}) \perp \mathbf{r}'(t_0).$$



Gradient ⊥ mặt phẳng tiếp xúc và tiếp tuyến

- Do đường cong qua điểm $\mathbf{v}$ trong mặt đẳng trị được xét ở trước là bất kỳ, điều này có nghĩa là vector gradient $\nabla f(\mathbf{v})$ vuông góc với mọi tiếp tuyến của các đường cong trong mặt đẳng trị tại $\mathbf{v}$. Nói cách khác, mọi tiếp tuyến của mặt đẳng trị tại điểm $\mathbf{v}$ là đồng phẳng.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt đẳng trị $f(x;y;z)=k$, (k là hằng số, f là hàm số khả vi) tại điểm $(x_0;y_0;z_0)$ (dĩ nhiên $f(x_0;y_0;z_0)=k$) là mặt phẳng nhận $\nabla f(x_0;y_0;z_0)$ (nếu khác vectơ không) làm vectơ pháp tuyến, và phương trình mặt phẳng tiếp xúc ấy là

$$f_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+f_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+f_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0.$$

Đường pháp tuyến xuyên qua mặt tại $(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{f_z(x_0;y_0;z_0)}$$

Gradient ⊥ mặt phẳng tiếp xúc và tiếp tuyến

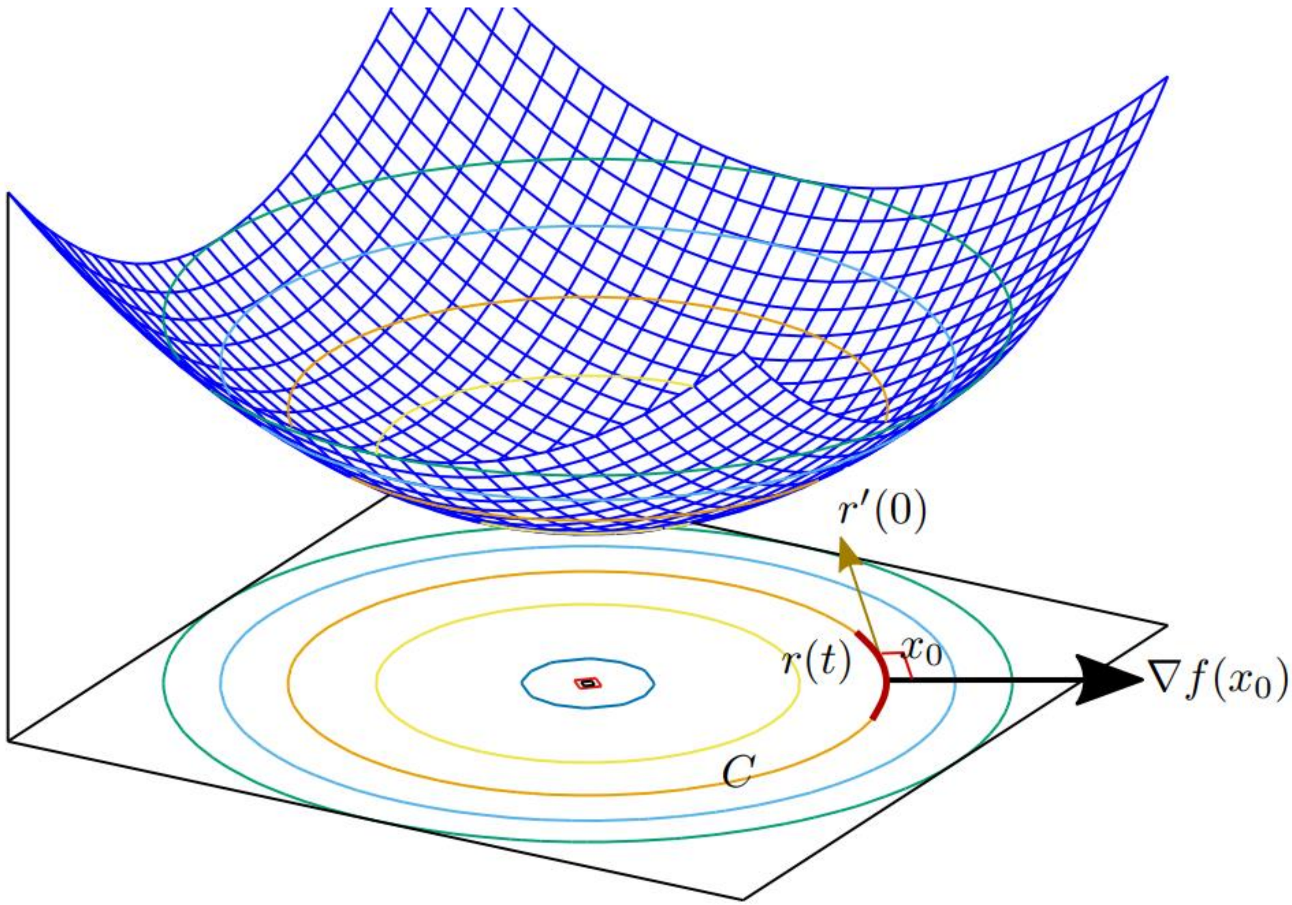
Tương tự ta có tiếp tuyến của đường đẳng trị

Tiếp tuyến của đường đẳng trị $f(x; y) = k$, (k là hằng số, f là hàm số khả vi) tại điểm $(x_0; y_0)$ (dĩ nhiên $f(x_0; y_0) = k$) là đường thẳng nhận $\nabla f(x_0; y_0)$ (nếu khác vectơ không) làm vectơ pháp tuyến, và phương trình tiếp tuyến ấy là

$$f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0.$$

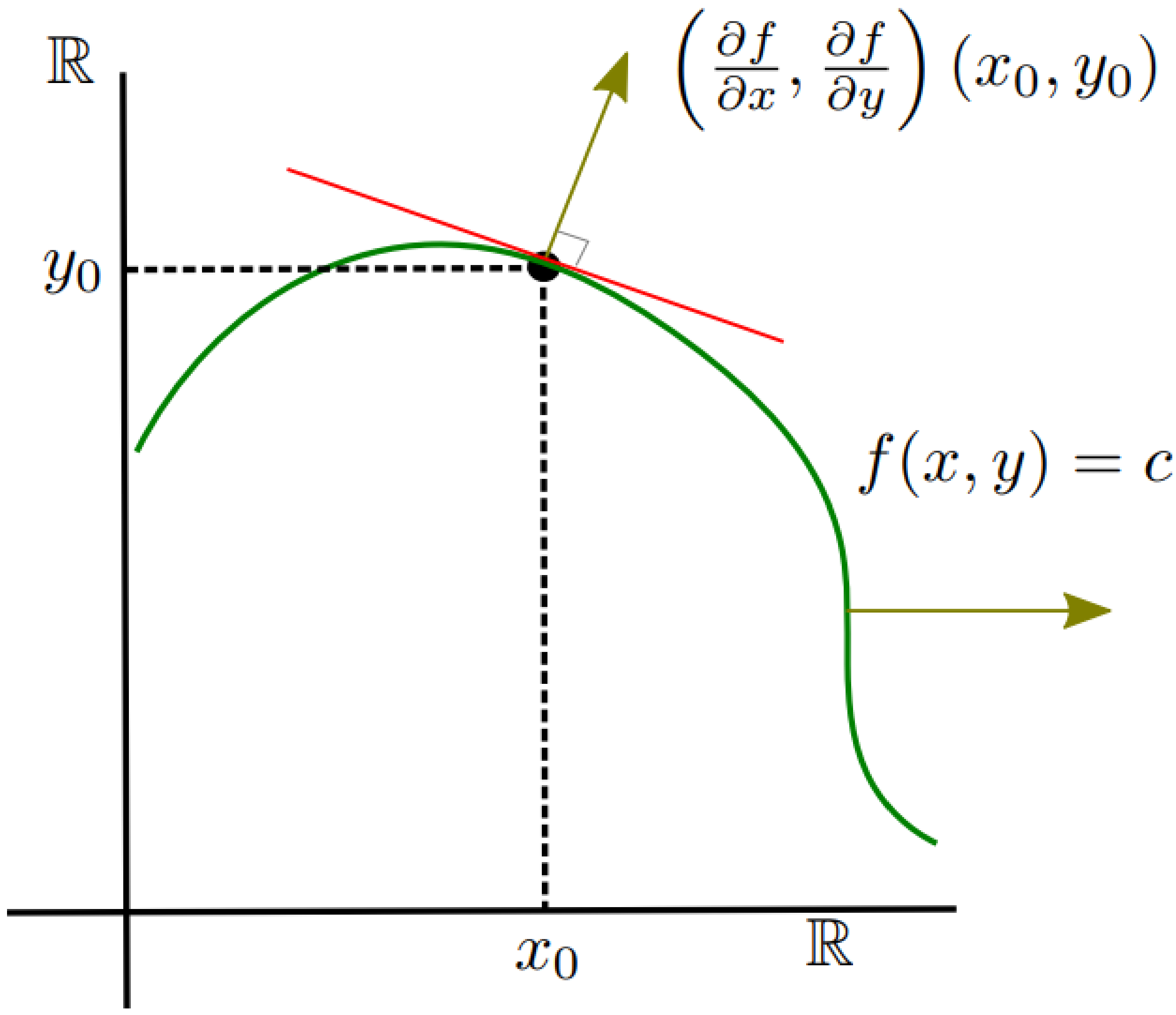
Ý nghĩa thứ hai của vector gradient

Ý nghĩa thứ hai của vector gradient: Gradient của một hàm nhiều biến khả vi, nếu khác vectơ không, thì luôn vuông góc với tập mức của hàm ấy, đồng thời chỉ hướng tăng giá trị của mức.



Trong hình bên, x_0 là ký hiệu của phần tử $\mathbb{R}^2$, xem như điểm trên đường đẳng trị. Cung màu đỏ được mô phỏng bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$, $t = 0$ ứng với điểm x_0.

Ý nghĩa thứ hai của vector gradient



Bài tập mẫu

- Xét lại bài tập mẫu ở trước: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$ của đường cong có phương trình $y\sin 2x = x\cos 2y$.
- Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ tại điểm $P(-2;1;-3)$. Viết phương trình đường pháp tuyến xuyên qua P của mặt cong (E). Dùng máy tính vẽ hình minh họa.
- Tham khảo thêm bài tập [1] từ 1.4.20-25.