CHƯƠNG 5
BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI (PHẦN MỘT)

Bùi Tiến Lên

Đại học Khoa học Tự nhiên

01/01/2017

NỘI DUNG

1. ĐƯỜNG ĐI TRÊN ĐỒ THỊ TỔNG QUÁT

2. ĐƯỜNG ĐI TRÊN ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG ĐI

ĐƯỜNG ĐI TRÊN ĐỒ THỊ TỔNG QUÁT

Đường đi là gì

Định nghĩa 5.1

Cho đồ thị $G = (V, E)$, **đường đi** (**path**) P trong G là một dãy luân phiên các "đỉnh - cạnh"

$$P = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \ldots v_m$$

sao cho $e_i = (v_i, v_{i+1})$
hoặc

$$P = v_1 v_2 v_3 \ldots v_m$$

Đường đi là gì (cont.)

Phân loại đường đi

- Đường đi sơ cấp là đường đi không có đỉnh lặp lại
- Đường đi đơn là đường đi không có cạnh lặp lại
- Đường đi tổng quát không ràng buộc

Các bài toán đường đi

Bài toán 5.1 (Bài toán tìm một đường đi sơ cấp)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai đỉnh s và t. Hãy tìm **đường đi sơ cấp** đi từ s cho đến t

Bài toán 5.2 (Bài toán tìm tất cả đường đi sơ cấp)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai đỉnh s và t. Hãy tìm tất cả **đường đi sơ cấp** từ s cho đến t

Các bài toán đường đi (cont.)

Bài toán 5.3 (Bài toán tìm tất cả đường đi đơn)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai đỉnh s và t. Hãy tìm **đường đi đơn** từ s cho đến t

Bài toán 5.4 (Bài toán tìm một đường đi có chiều dài cho trước)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai đỉnh s và t và một số dương k. Hãy tìm **đường đi** có chiều dài k đi từ s cho đến t

Các bài toán chu trình

Bài toán 5.5 (Bài toán tìm chu trình sơ cấp)

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai s. Hãy tìm **chu trình sơ cấp** đi qua s.

Bài toán 5.6 (Bài toán tìm tất cả chu trình sơ cấp)

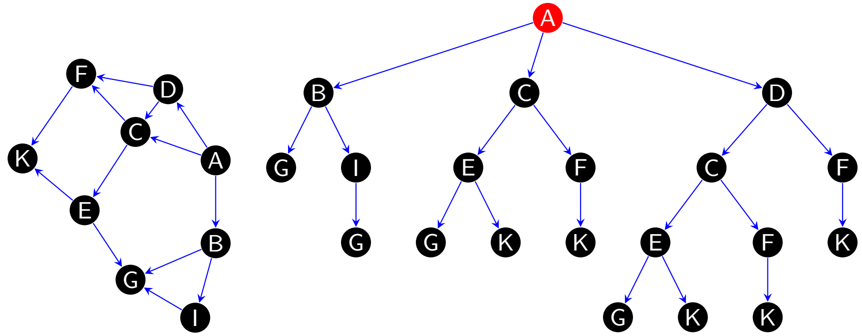
Cho đồ thị $G = (V, E)$ và hai s. Hãy tìm tất cả **chu trình sơ cấp** đi qua s.

Cây đường đi sơ cấp

Định nghĩa 5.2

Cho đồ thị $G = (V, E)$ và đỉnh s, cây đường đi sơ cấp bắt đầu từ đỉnh s sẽ liệt kê tất cả đường đi sơ cấp từ s tới các đỉnh của đồ thị

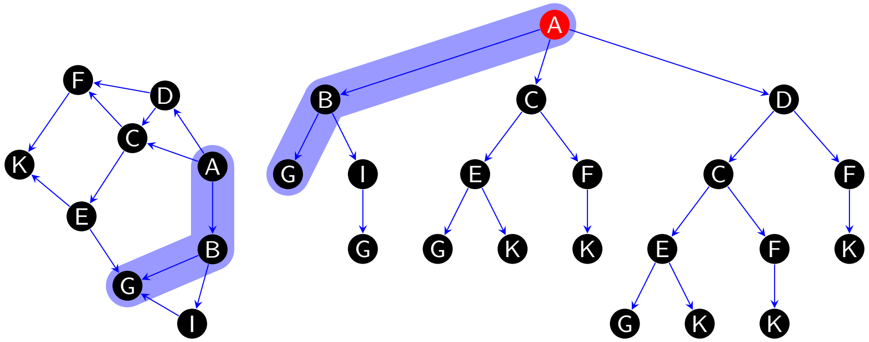
Cây đường đi sơ cấp (cont.)



(a) đồ thị (b) cây đường đi bắt đầu từ đỉnh A

Hình 5.1: Đồ thị và cây đường đi

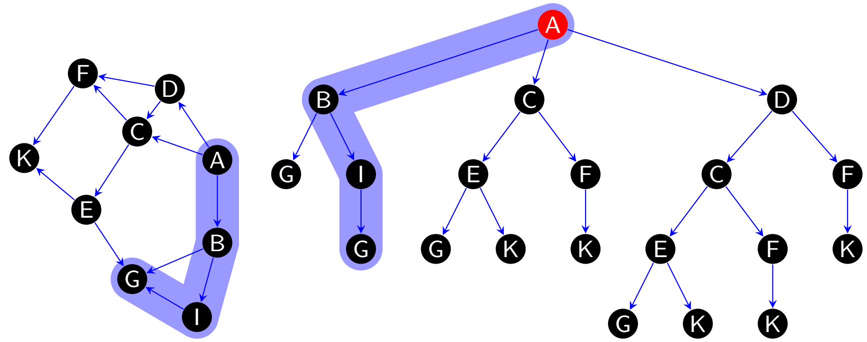
Cây đường đi sơ cấp (cont.)



(a) đường đi trên đồ thị (b) đường đi trên cây đường đi

Hình 5.2: Đường đi từ A đến G

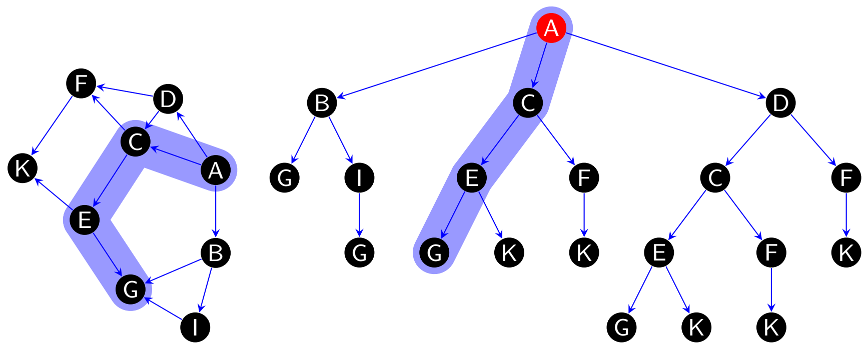
Cây đường đi sơ cấp (cont.)



(a) đường đi trên đồ thị (b) đường đi trên cây đường đi

Hình 5.3: Đường đi từ A đến G

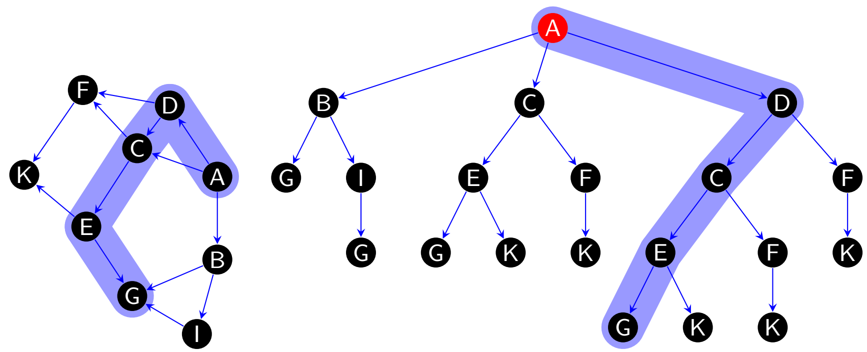
Cây đường đi sơ cấp (cont.)



(a) đường đi trên đồ thị **(b)** đường đi trên cây đường đi

Hình 5.4: Đường đi từ A đến G

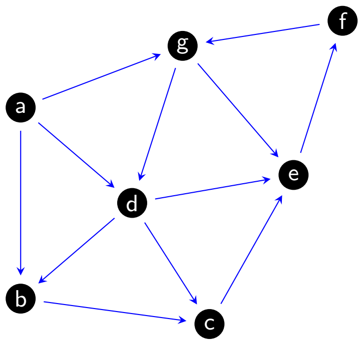
Cây đường đi sơ cấp (cont.)



(a) đường đi trên đồ thị **(b)** đường đi trên cây đường đi

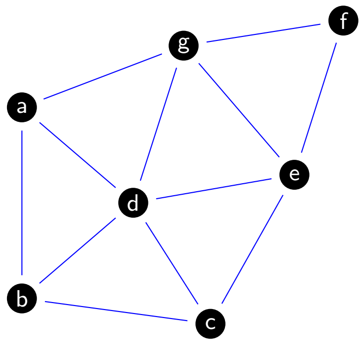
Hình 5.5: Đường đi từ A đến G

Bài tập minh họa



Hình 5.6: Hãy vẽ cây đường đi sơ cấp cho đồ thị có hướng trên bắt đầu từ đỉnh a

Bài tập minh họa (cont.)



Hình 5.7: Hãy vẽ cây đường đi sơ cấp cho đồ thị vô hướng trên bắt đầu từ đỉnh a

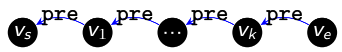
DFS tìm đường đi sơ cấp

Algorithm 1 Tìm đường đi P từ đỉnh v_s đến v_e

function DFS_FIND_PATH(v_s,v_e)
  Duyệt v_s
  if $v_s == v_e$ **then**
    return true
  for mỗi đỉnh v kề với đỉnh v_s **do**
    if v chưa được duyệt **then**
      $pre[v] = v_s$
      if DFS_FIND_PATH(v,v_e) **then**
        return true
  return false

DFS tìm đường đi sơ cấp (cont.)

- Trong hàm trên đã sử dụng kỹ thuật lưu vết của đường đi thông qua việc lưu lại đỉnh trước của đỉnh v bằng phép gán $pre[v] = v_s$
- Để xác định đường đi ta sử dụng cách lần ngược từ đỉnh v_e cho đến v_s



DFS tìm tất cả đường đi sơ cấp

Algorithm 2 Tìm tất cả đường đi từ đỉnh v_s đến v_e

procedure DFS_FIND_ALL_PATHS(v_s,v_e)
  Duyệt v_s
  if $v_s == v_e$ **then**
    In ra đường đi
  for mỗi đỉnh v kề với đỉnh v_s **do**
    if v chưa được duyệt **then**
      PUSH($pre[v]$)
      $pre[v] = v_s$
      DFS_FIND_ALL_PATHS(v,v_e)
      POP($pre[v]$)
  v_s trở lại trạng thái chưa duyệt

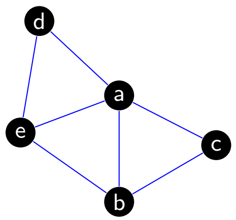
BFS tìm đường đi sơ cấp

Algorithm 3 Tìm đường đi từ đỉnh v_s đến v_e

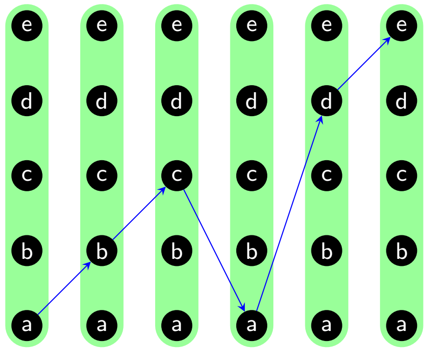
procedure BFS_FIND_PATH(v_s,v_e)
  $queue \leftarrow v_s$
  while $queue \neq \emptyset$ **do**
    $v \leftarrow queue$
    Duyệt đỉnh v
    if $v == v_e$ **then**
      In ra đường và kết thúc
    for mỗi đỉnh u kề với đỉnh v **do**
      if đỉnh u chưa duyệt và không có trong $queue$ **then**
        $pre[u] = v$
        $queue \leftarrow u$

Đồ thị đường đi tổng quát

Đồ thị đường đi tổng quát nhằm mục đích biểu diễn các đường đi không phải sơ cấp hay đơn



Hình 5.8: Đồ thị



Hình 5.9: Đồ thị đường đi a-b-c-a-d-e

ĐƯỜNG ĐI TRÊN ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

Bài toán tìm đường đi

Đối với đồ thị có trọng số, thường xét đến

- Tìm đường đi ngắn nhất
- Tìm đường đi dài nhất
- Tìm đường đi thỏa mãn những yêu cầu nào đó

Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài toán 5.7

Cho đồ thị $G = (V, E, L)$ là một đồ thị có trọng số, hai đỉnh s và t, tập hợp $\mathcal{P}$ là tất cả các đường đi từ s đến t. Bài toán tìm **đường đi ngắn nhất** (**shortest path**) từ s đến t có thể phát biểu qua công thức sau

$$P_{min} = \arg\min_{P \in \mathcal{P}} (P) \quad (5.1)$$

Bài toán đường đi ngắn nhất (cont.)

Một số lưu ý

- Các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị là các thuật toán tối ưu rời rạc
- Các thuật toán nói chung đều có thể áp dụng cho cả đồ thị có hướng và vô hướng
- Khi giải bài toán đường đi ngắn nhất
    - Bỏ đi các cạnh song song và chỉ giữ lại cạnh có trọng số nhỏ nhất
    - Bỏ đi các cạnh khuyên và chỉ giữ lại cạnh khuyên có trọng số âm bé nhất

Nguyên lý Bellman

Phát biểu

- P là đường đi từ đỉnh s đến đỉnh t
- P_1 và P_2, đường đi con của P từ đỉnh s đến k và từ k đến t với k là một đỉnh nằm trên đường đi P

Nếu P là đường đi ngắn nhất **thì** P_1 và P_2 cũng là những đường đi ngắn nhất.

Hình 5.10: Nguyên lý Bellman

Nguyên lý Bellman (cont.)

Chứng minh

- Giả sử tồn tại một đường đi P_1' từ s đến k ngắn hơn đường đi P_1. Nghĩa là
$$L(P_1') < L(P_1)$$
- Suy ra
$$L(P_1' \oplus P_2) < L(P_1 \oplus P_2) = L(P)$$
- Trái với giả thiết P là con đường ngắn nhất để đi từ s cho đến t

$\blacksquare$

Nguyên lý Bellman (cont.)

Lưu ý

- Nguyên lý Bellman không có phát biểu ngược lại
- Các đường đi P, P_1, P_2 là những đường đi bất kỳ

Các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

- Thuật toán cây đường đi ngắn nhất
- Thuật toán Dijkstra
- Thuật toán A*
- Thuật toán Bellman
- Thuật toán Floyd

Thuật toán cây đường đi ngắn nhất

Cho **đồ thị có trọng số không âm** $G = (V, E, L)$ với n đỉnh. Hãy xây dựng cây **đường đi sơ cấp ngắn nhất** $T = (V, E, D)$ bắt đầu từ đỉnh s đến các đỉnh trong đồ thị

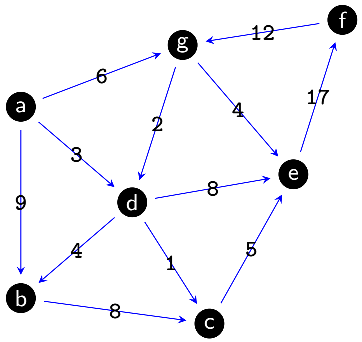
- Bước 1: Khởi tạo $V_T = \{s\}, E_T = \emptyset, d(s) = 0$
- Bước 2: Chọn đỉnh $y, y \in V_G - V_T$ sao cho $d(x) + l(x, y), x \in X_T$ nhỏ nhất

$$V_T = V_T + \{y\}$$
$$E_T = E_T + \{(x, y)\}$$
$$d\,(y) = d\,(x) + l(x, y)$$

- Bước 3: Nếu không tìm được đỉnh y nào thì DỪNG ngược lại quay lại bước 2

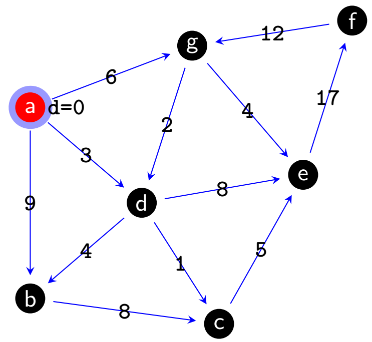
Minh họa thuật toán

Áp dụng thuật toán cây đường đi ngắn nhất để tìm đường đi ngắn từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại



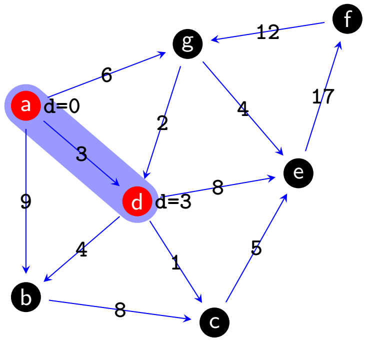
Hình 5.11: Tìm các đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại

Minh họa thuật toán (cont.)



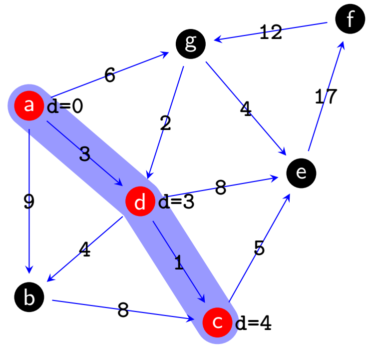
Hình 5.12: Đỉnh đầu tiên a

Minh họa thuật toán (cont.)



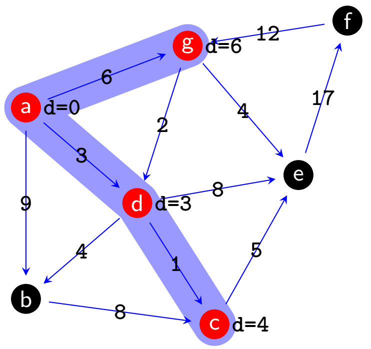
Hình 5.13: Thêm đỉnh d và cạnh ad

Minh họa thuật toán (cont.)



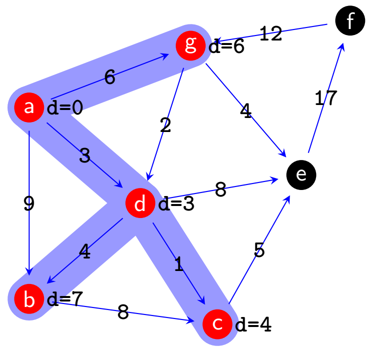
Hình 5.14: Thêm đỉnh c và cạnh dc

Minh họa thuật toán (cont.)



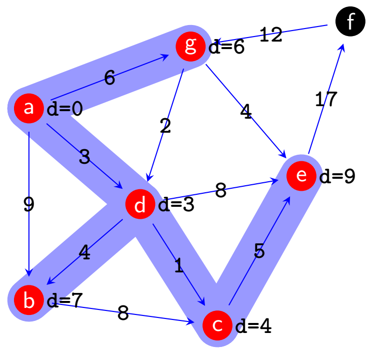
Hình 5.15: Thêm đỉnh g và cạnh ag

Minh họa thuật toán (cont.)



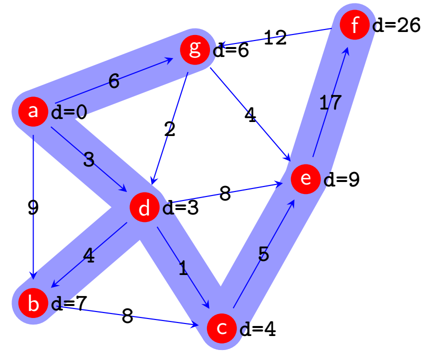
Hình 5.16: Thêm đỉnh d và cạnh db

Minh họa thuật toán (cont.)



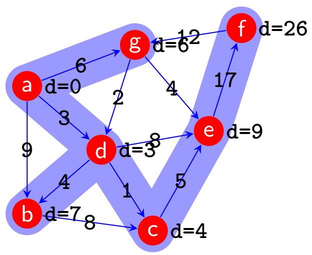
Hình 5.17: Thêm đỉnh e và cạnh ce

Minh họa thuật toán (cont.)



Hình 5.18: Thêm đỉnh f và cạnh ef

Minh họa thuật toán (cont.)



Hình 5.19: Cây đường đi ngắn nhất từ đỉnh a

Vậy đường đi ngắn nhất

- Từ a đến d: a d với trọng số 3
- Từ a đến c: a d c với trọng số 4
- Từ a đến g: a g với trọng số 6
- Từ a đến b: a d b với trọng số 7
- Từ a đến e: a d c e với trọng số 9
- Từ a đến f: a d c e f với trọng số 26

Thuật toán Dijkstra

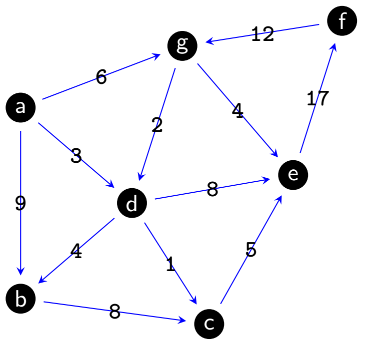
Cho **đồ thị có trọng số không âm** $G = (V, E, L)$ với n đỉnh. Hãy tìm **đường đi sơ cấp ngắn nhất** từ đỉnh s đến các đỉnh

- bước 1: $d(s) = 0$ và $d(x) = \infty, \forall x \neq s$
- bước 2: $T = \emptyset$
- bước 3: Lặp nếu còn đỉnh
  - Chọn đỉnh $y, y \notin T$ sao cho $d(y)$ nhỏ nhất
  - Cập nhật T: $T = T + \{y\}$
  - Cập nhật các giá trị d cho các đỉnh còn lại

$$\forall x \notin T, d(x) > d(y) + l(y, x) \Rightarrow d(x) = d(y) + l(y, x)$$

Minh họa thuật toán Dijkstra

Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại

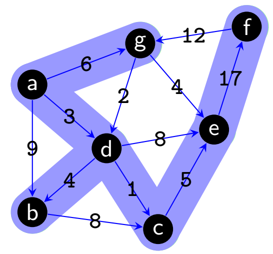


Hình 5.20: Tìm các đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại

Minh họa thuật toán Dijkstra

Bảng 5.1: Bảng tính trọng số đường đi từ 1 đến các đỉnh

d(a)	d(b)	d(c)	d(d)	d(e)	d(f)	d(g)
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	9	∞	**3**	∞	∞	6
	7	**4**		11	∞	6
	7			9	∞	**6**
	7			9	∞	
				9	∞	
					26	



Hình 5.21: Đồ thị và các đỉnh được chọn

Thuật toán Dijkstra cập nhật

Để xác định đường đi ta cần một biến $prev(x)$ để lưu lại thông tin đỉnh trước của đỉnh x trong đường đi

- bước 1: $d(s) = 0, d(x) = \infty, \forall x \neq s$ và $prev(x) = \infty, \forall x$
- bước 2: $T = \emptyset$
- bước 3: Lặp nếu còn đỉnh
  - Chọn đỉnh $y, y \notin T$ sao cho $d(y)$ nhỏ nhất
  - Cập nhật T: $T = T + \{y\}$
  - Cập nhật các giá trị d và $prev$ cho các đỉnh còn lại

$$\forall x \notin T, d(x) > d(y) + l(y,x) \Rightarrow \begin{cases} d(x) = d(y) + l(y,x) \\ prev(x) = y \end{cases}$$

Minh họa thuật toán Dijkstra cập nhật

Bảng 5.2: Bảng xác định trọng số & đỉnh trước trong đường đi

a	b	c	d	e	f	g
(0;null)	(∞;null)	(∞;null)	(∞;null)	(∞;null)	(∞;null)	(∞;null)
	(9;a)	(∞;null)	**(3;a)**	(∞;null)	(∞;null)	(6;a)
	(7;d)	**(4;d)**		(11;d)	(∞;null)	(6;a)
	(7;d)			(9;c)	(∞;null)	**(6;a)**
	(7;d)			(9;c)	(∞;null)	
				(9;c)	(∞;null)	
					(26;e)	

Cài đặt Dijkstra bằng hàng đợi ưu tiên

Vấn đề

- Trong thực tế, đồ thị có số đỉnh rất lớn
- Do đó thuật toán Dijkstra nên được cài đặt bằng hàng đợi ưu tiên

Định nghĩa 5.3

Hàng đợi ưu tiên (**priority queue**) là một hàng đợi trong đó mỗi phần tử được gắn với một con số được gọi là độ ưu tiên

- Độ ưu tiên sẽ do ứng dụng xác định
- Việc lấy một phần tử ra khỏi hàng đợi sẽ được dựa trên độ ưu tiên và quy tắc FIFO. Nghĩa là phần tử nào có độ ưu tiên cao nhất sẽ được lấy ra trước nhất. Trong trường hợp có nhiều phần tử có cùng độ ưu tiên thì sử dụng quy tắc FIFO

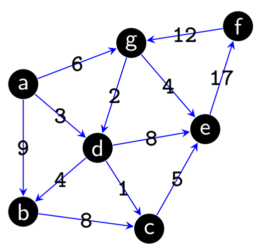
Cài đặt Dijkstra bằng hàng đợi ưu tiên (cont.)

Algorithm 4 Tìm đường đi từ đỉnh v_s đến v_e

procedure DIJKSTRA_FIND_PATH(v_s,v_e)
  $priority\_queue \leftarrow v_s$ (với $v_s.d = 0$ và $v_s.prev = null$)
  while $priority\_queue \neq \emptyset$ **do**
    $v \leftarrow priority\_queue$
    Duyệt đỉnh v
    if $v == v_e$ **then**
      In ra đường và kết thúc
    for mỗi đỉnh u kề với đỉnh v **do**
      if đỉnh u chưa duyệt **then**
        if $u \in priority\_queue$ **then**
          cập nhật $u.d$ và $u.pre$ nếu tốt hơn
        else
          $u.pre = v$ và $u.d = v.d + l(v, u)$
          $priority\_queue \leftarrow u$

Minh họa

Hình 5.22: Tìm đường đi bắt đầu từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại

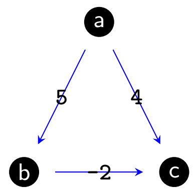


Bảng 5.3: Bảng tính cho thuật toán Dijkstra sử dụng hàng đợi ưu tiên. Mỗi đỉnh sẽ có hai thuộc tính *d* độ dài tính từ đỉnh xuất phát (dùng làm độ ưu tiên) và *pre* đỉnh trước của đỉnh này

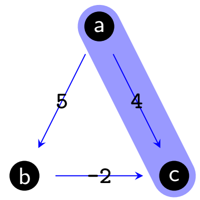
v	*priority_queue*
	a(0;null)
a(0;null)	b(9;a) d(3;a) g(6;a)
d(3;a)	b(7;d) g(6;a) c(4;d) e(11;d)
c(4;d)	b(7;d) g(6;a) e(9;c)
g(6;a)	b(7;d) e(9;c)
b(7;d)	e(9;c)
e(9;c)	f(26;e)
f(26;e)	$\emptyset$

Thuật toán Dijkstra và đồ thị có trọng số âm

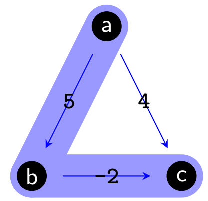
Thuật toán Dijkstra áp dụng cho đồ thị có trọng số âm



Hình 5.23: đồ thị có trọng số âm



Hình 5.24: đường đi ngắn nhất từ a - c theo Dijkstra

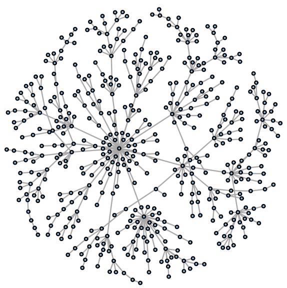


Hình 5.25: đường đi ngắn nhất từ a - c thật sự

Thuật toán A*

Vấn đề

- Thuật toán Dijkstra là một thuật toán vét cạn. Do đó, sẽ gặp rất nhiều khó khăn trong các bài toán có độ phức tạp lớn.



Hình 5.26: Bài toán với đồ thị phức tạp

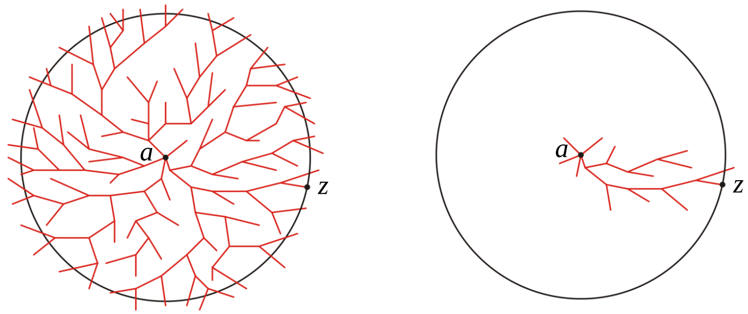
Thuật toán A* (cont.)

Thuật toán A*

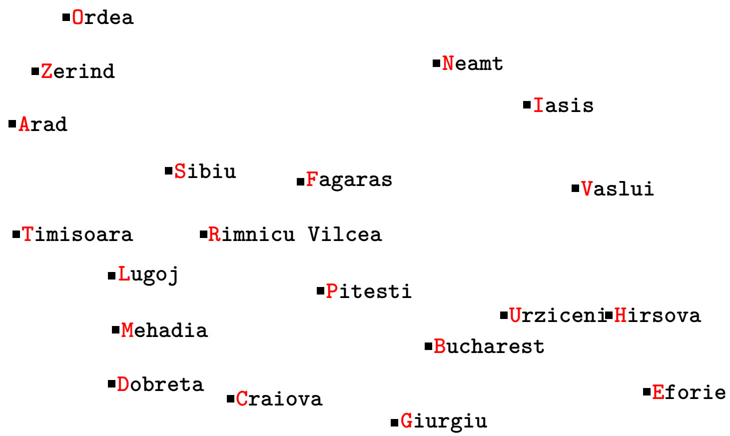
- Được Peter Hart, Nils Nilsson, và Bertram Raphael đề xuất vào năm 1968
- Là sự cải tiến đột phá từ thuật toán Dijkstra bằng cách mỗi đỉnh có thêm *thông tin ước lượng h* cho các đỉnh là khoảng cách từ nó đến *đỉnh kết thúc*
- Độ ưu tiên trong hàng đợi sẽ được tính dựa trên d và h. Thông thường là

$$d + h \tag{5.2}$$

Thuật toán A* (cont.)

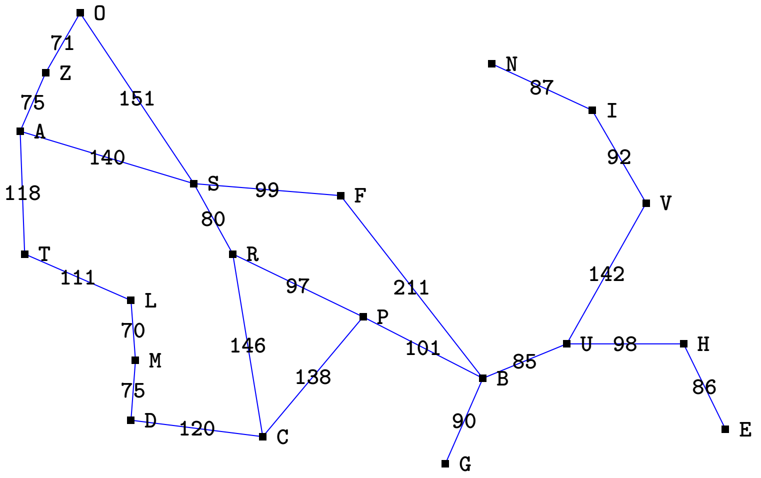


Minh họa thuật toán A*



Hình 5.27: Các thành phố của Romania

Minh họa thuật toán A*



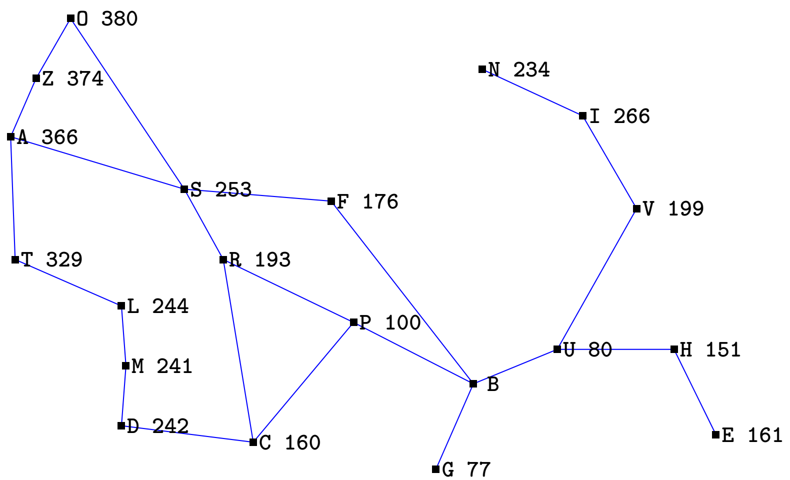
Hình 5.28: Bản đồ đường bộ

Minh họa thuật toán A*

Bảng 5.4: Khoảng cách theo đường chim bay từ các thành phố đến thành phố Bucharest

thành phố	h	thành phố	h
Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Dobreta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugo	244	Zerind	374

Minh họa thuật toán A*



Thuật toán Bellman

Thuật toán Bellman là **thuật toán qui hoạch động** (**dynamic algorithm**) sử dụng nguyên lý Bellman để tìm **đường đi** ngắn nhất. Cho đồ thị có trọng số bất kỳ $G = (V, E, L)$ với n đỉnh. Ý tưởng của thuật toán được thể hiện qua hàm đệ qui $\mathcal{P}$

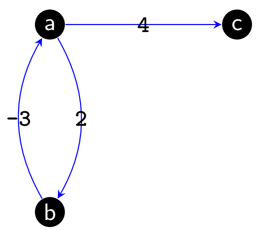
- Hàm $\mathcal{P}_k(t)$ là hàm trả về đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến đỉnh t và đi qua tối đa k đỉnh không tính đỉnh đầu
- Hàm $\mathcal{P}_{k+1}(t)$ là hàm trả về đường đi ngắn nhất đi từ đỉnh s đến đỉnh t và đi qua tối đa $k+1$ đỉnh không tính đỉnh đầu.
- Hàm $\mathcal{P}_k(t)$ được định nghĩa đệ qui như sau

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0(t) = \begin{cases} 0 & t = s \\ \infty & t \neq s \end{cases} \\ \mathcal{P}_{k+1}(t) = \min\left(\mathcal{P}_k(t), \min\left(\mathcal{P}_k(v) + l(v,t), \forall v\right)\right) \end{cases} \tag{5.3}$$

Minh họa thuật toán Bellman

Ví dụ 5.1

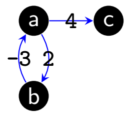
Áp dụng thuật toán Bellman tìm đường đi ngắn nhất cho đồ thị sau từ đỉnh a. Lưu ý đồ thị có mạch âm



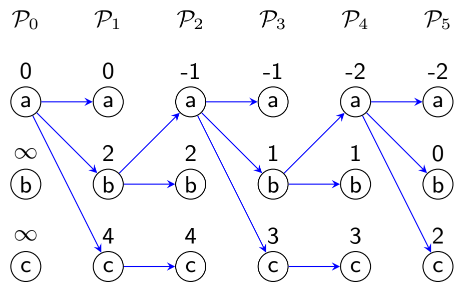
Hình 5.29: Đồ thị có trọng số âm 3 đỉnh

Minh họa thuật toán Bellman

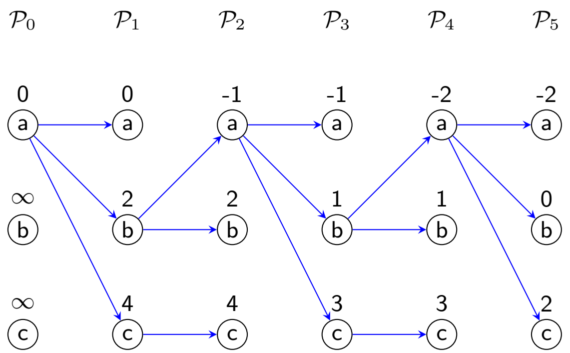
Bảng 5.5: Đồ thị, ma trận trọng số và bảng tính



	a	b	c
a	0	2	4
b	-3	0	∞
c	∞	∞	0



Minh họa thuật toán Bellman



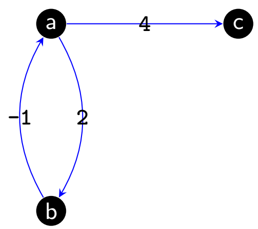
Vậy đường đi ngắn nhất từ a đi qua tối đa 6 đỉnh

- đến đỉnh b: a b a b a b có trọng số là 0
- đến đỉnh c: a b a b a c có trọng số là 2
- đến đỉnh a: a b a b a có trọng số là -2

Minh họa thuật toán Bellman

Ví dụ 5.2

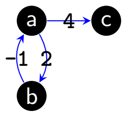
Áp dụng thuật toán Bellman tìm đường đi ngắn nhất cho đồ thị sau từ đỉnh a. Lưu ý đồ thị không có mạch âm



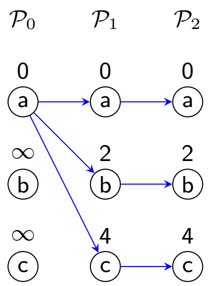
Hình 5.30: Đồ thị có trọng số âm 3 đỉnh

Minh họa thuật toán Bellman

Bảng 5.6: Đồ thị, ma trận trọng số và bảng tính



	a	b	c
a	0	2	4
b	-1	0	∞
c	∞	∞	0



Nhận xét về thuật toán Bellman

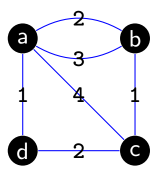
Nhận xét

- Nếu trong đồ thị tồn tại **mạch âm** thì trọng số đường đi sẽ càng lúc càng giảm
- Điều kiện để dừng thuật toán Bellman
  - Nếu P_k và P_{k+1} là hoàn toàn giống nhau
  - Nếu điều kiện trên không xảy ra nghĩa là trong đồ thị tồn tại **những mạch âm** thì việc dừng thuật toán tại bước lặp k với đường đi P_k được hiểu là một lời giải cho đường đi ngắn nhất đi qua tối đa k đỉnh không kể đỉnh bắt đầu

Bài tập

Bài tập 5.1

Áp dụng thuật toán Bellman tìm đường đi ngắn nhất cho đồ thị sau bắt đầu từ đỉnh a

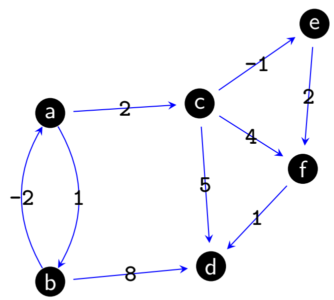


Hình 5.31: Đồ thị có trọng số không âm 4 đỉnh

Bài tập (cont.)

Bài tập 5.2

Áp dụng thuật toán Bellman tìm đường đi ngắn nhất cho đồ thị sau bắt đầu từ đỉnh a



Hình 5.32: Đồ thị có trọng số âm 6 đỉnh

Thuật toán Floyd

Thuật toán Floyd cũng là một thuật toán qui hoạch động dùng để tìm trọng số đường đi ngắn nhất cho tất cả các cặp đỉnh của đồ thị có trọng số $G = (V, E, L)$ có n đỉnh $\{1, ..., n\}$. Ý tưởng của thuật toán được trình bày qua hàm đệ qui $\mathcal{D}$ như sau

- Hàm $\mathcal{D}_k(i, j)$ là hàm trả về đường đi ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j sử dụng các đỉnh trung gian $\{1, ..., k\}$
- Hàm $\mathcal{D}_{k+1}(i, j)$ là hàm trả về đường đi ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j sử dụng các đỉnh trung gian $\{1, ..., k, k+1\}$
- Hàm $\mathcal{D}_k(i, j)$ được định nghĩa đệ qui như sau

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0(i, j) = l(i, j) \\ \mathcal{D}_{k+1}(i, j) = \min\left(\mathcal{D}_k(i, j), \mathcal{D}_k(i, k+1) + \mathcal{D}_k(k+1, j)\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

Thuật toán Floyd (cont.)

Sau đây là cài đặt thuật toán Floyd với n và l là số đỉnh và ma trận trọng số của đồ thị

Listing 5.1: Floyd algorithm

```
for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
    {
        d[i][j] = l[i][j];
        if (d[i][j] == INFINITY)
            pre[i][j] = NO;
        else
            pre[i][j] = i;
    }
for (k = 0; k < n; k++)
    for (i = 0; i < n; i++)
        for (j = 0; j < n; j++)
        if (d[i][j] > d[i][k] + d[k][j])
        {
```

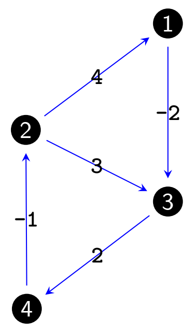

Thuật toán Floyd (cont.)

```
            d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];
            pre[i][j] = pre[k][j];
        }
```


Minh họa thuật toán Floyd

Ví dụ 5.3

Hãy áp dụng thuật toán Floyd cho đồ thị dưới đây



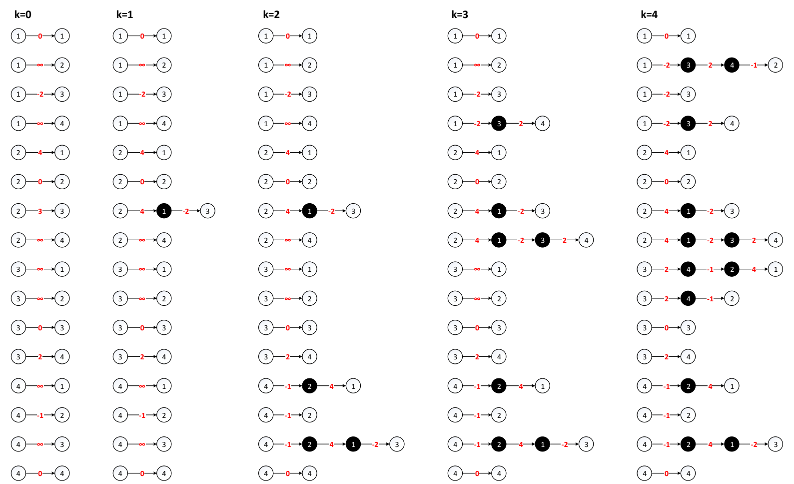
Hình 5.33: Đồ thị có trọng số âm

Minh họa thuật toán Floyd (cont.)

Ma trận trọng số của đồ thị là

$$L = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & -2 & \infty \\ 4 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & -1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Minh họa thuật toán Floyd (cont.)



Minh họa thuật toán Floyd (cont.)

- Khi $k = 0$ các đường đi khởi tạo: 1 →3, 2 →1, 2 →3, 3 →4, 4 →2
- Khi $k = 1$ cập nhật đường đi: 2 →1 →3
- Khi $k = 2$ cập nhật đường đi: 4 →2 →1, 4 →2 →1 →3
- Khi $k = 3$ cập nhật đường đi: 1 →3 →4, 2 →1 →3 →4
- Khi $k = 4$ cập nhật đường đi: 1 →3 →4 →2, 3 →4 →2 →1, 3 →4 →2

MỘT SỐ KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG ĐI

Ma trận khoảng cách

Định nghĩa 5.4

Gọi G là một đồ thị có trọng số không âm có n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$, **ma trận khoảng cách** (**distance matrix**) d là ma trận vuông cấp n với

$$d(v_i, v_j) = \text{trọng số đường đi ngắn nhất từ } v_i \text{ đến } v_j$$

Lưu ý

Ma trận khoảng cách cho đồ thị vô hướng là một trận đối xứng

Một số khái niệm

Định nghĩa 5.5

Cho đồ thị có trọng số G, **độ lệch** (**eccentricity**) của đỉnh v

$$\epsilon(v) = \max\{d(v, u) | \forall u \in V, u \neq v\}$$

Định nghĩa 5.6

Cho đồ thị có trọng số G, **tâm** (**center**) của đồ thị là

$$center(G) = \arg\min_{v \in V}(\epsilon(v))$$

Một số khái niệm (cont.)

Định nghĩa 5.7

Cho đồ thị có trọng số G, **bán kính** (**radius**) của đồ thị là

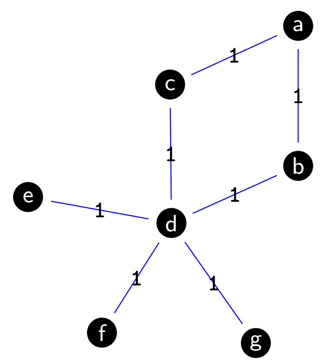
$$rad(G) = \min\{\epsilon(v)) | \forall v \in V\}$$

Định nghĩa 5.8

Cho đồ thị có trọng số G, **đường kính** (**diameter**) của đồ thị là

$$diam(G) = \max\{\epsilon(v)) | \forall v \in V\}$$

Ví dụ



Hình 5.34: Xác định độ lệch, tâm, bán kính và đường kính

Tài liệu tham khảo