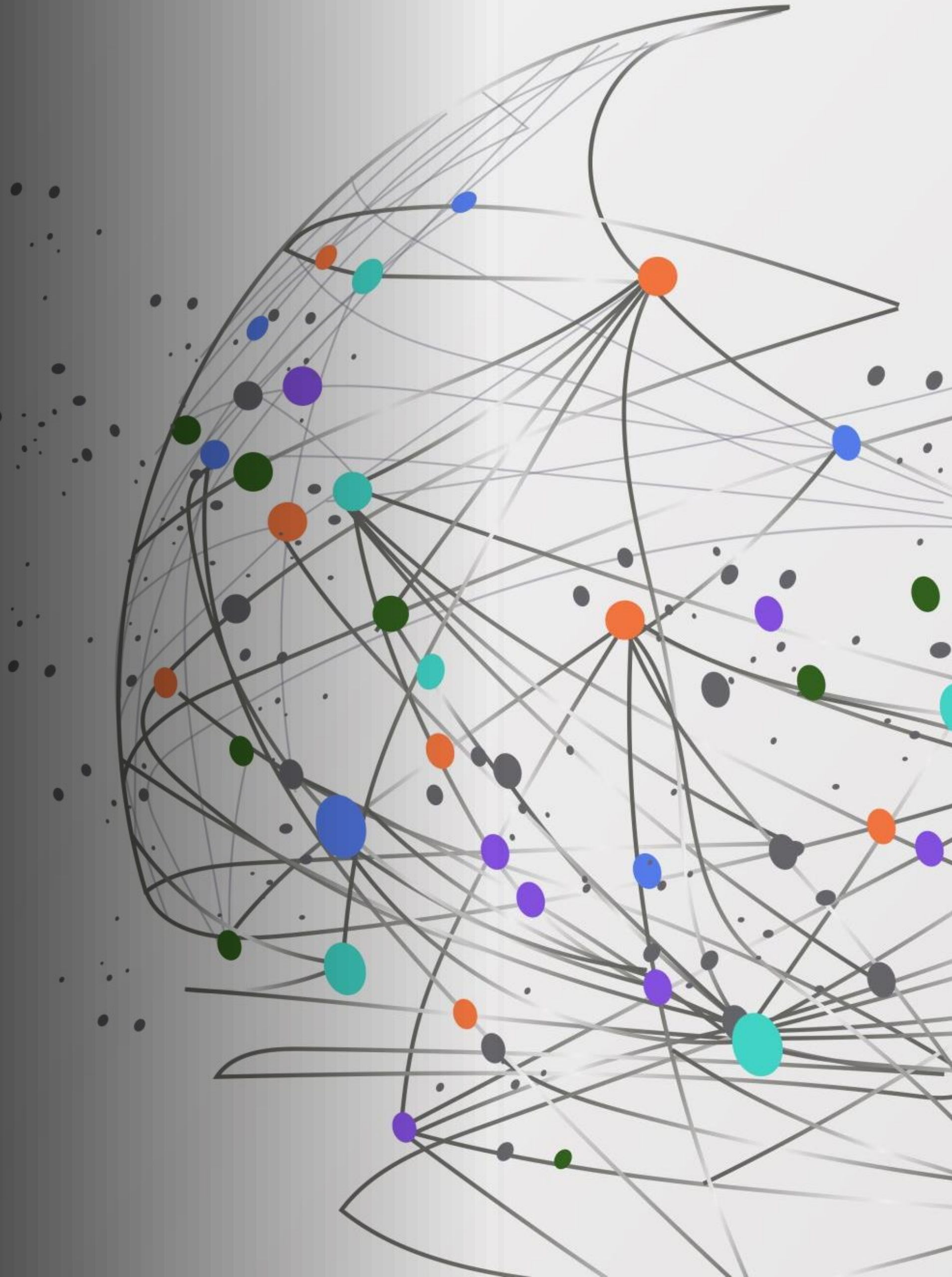
Vtp2-tuần 2



Bộ môn Giải tích,
khoa Toán-Tin học,
Đhkhtn tpHCM

- Đạo hàm riêng
- Tính khả vi
- Hàm số trơn

Quy ước tên tài liệu:

[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th*, tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)

Đạo hàm riêng

Định nghĩa. Giả sử $(a;b)$ là tâm của một đĩa nằm trong tập xác định của một hàm số 2 biến $(x;y) \mapsto f(x;y)$. Ta định nghĩa *đạo hàm riêng* theo biến thứ nhất của f tại $(a;b)$, với các ký hiệu tương ứng sau đây, là giới hạn (nếu tồn tại)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a;b) = f_x(a;b) = D_x f(a;b) = D_1 f(a;b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x;b) - f(a;b)}{x - a}.$$

Tương tự cho định nghĩa của đạo hàm riêng theo biến thứ hai

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a;b) = f_y(a;b) = D_y f(a;b) = D_2 f(a;b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a;y) - f(a;b)}{y - b}.$$

Nhận xét. Với hàm số một biến $g: x \mapsto g(x) \coloneqq f(x;b)$ (giá trị b không đổi) thì định nghĩa trên cho thấy $f_x(a;b) = g'(a)$. Đạo hàm riêng của f theo biến thứ nhất, thực chất là đạo hàm của hàm một biến khi ta cố định giá trị của biến kia.

Đạo hàm riêng

- Ta có thể đổi hình thức của định nghĩa ở trên dưới dạng

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = f'_x(x;y) = f_x(x;y) = D_x f(x;y) = \lim_{t \to x} \frac{f(t;y) - f(x;y)}{t - x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = f'_y(x;y) = f_y(x;y) = D_y f(x;y) = \lim_{t \to y} \frac{f(x;t) - f(x;y)}{t - y}$$

- Khi tìm đạo hàm riêng theo biến nào, ta xem các biến còn lại như là hằng số và có thể tìm biểu thức đạo hàm theo công thức, nếu được, của hàm số một biến.
- Tại các điểm đặc biệt, khi không thể dùng công thức để tìm đạo hàm riêng tại điểm đó, ta phải dùng định nghĩa đạo hàm riêng để khảo sát.

Ví dụ. Cho hàm số f có 2 biến định bởi: $f(0;0) = 1$, $f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2} + 1$ khi $(x;y) \neq (0;0)$. Khi đó

$$\forall (x;y) \neq (0;0), f_x(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

Đạo hàm riêng

$$= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tại điểm đặc biệt $(0;0)$, ta khảo sát đạo hàm riêng theo định nghĩa

$$f_x(0;0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x;0) - f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2}+1\right)-1}{x} = 0.$$

Vai trò của x và y trong biểu thức như nhau nên ta kết luận

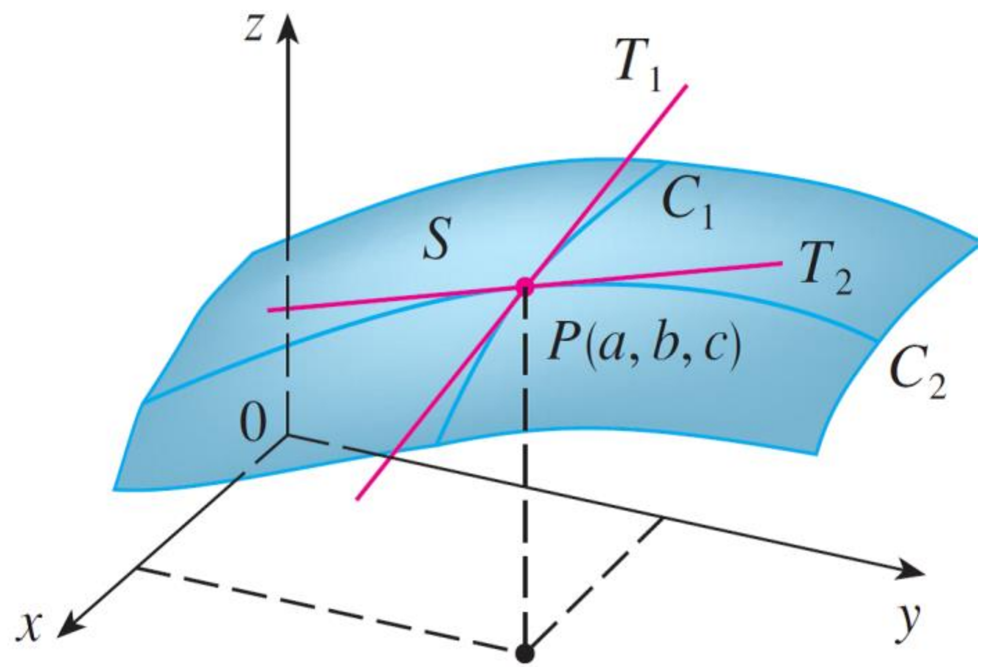
$$f_x(x;y) = \begin{cases} 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0) \\ \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$$

$$f_y(x;y) = \begin{cases} 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0) \\ \dfrac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$$

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

- Đạo hàm của hàm 1 biến phản ánh độ nghiêng (hệ số góc) của tiếp tuyến của đồ thị, cũng là độ nghiêng của đồ thị tại điểm đang xét đạo hàm.

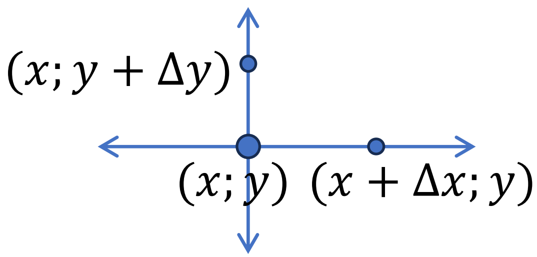
- Đối với hàm số 2 biến, các đạo hàm riêng tại điểm $(a;b)$ phản ánh độ nghiêng của các vết cắt trên mặt đồ thị bởi các mặt phẳng đứng $x = a$ và $y = b$.



Ý nghĩa của đạo hàm riêng

- Ngoài ra, đạo hàm riêng tại điểm $(x; y)$ phản ánh gần đúng tỉ lệ giữa biến thiên giá trị hàm và biến thiên giá trị của một biến, khi dao động quanh điểm $(x; y)$. Nói rõ hơn, nếu hai số Δx và Δy nhỏ (gần bằng 0) thì

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} := \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} \approx \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h; y) - f(x; y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y).$$



$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y} := \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} \approx \lim_{h\to 0} \frac{f(x; y+h) - f(x; y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x; y).$$

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Ví dụ. Giả sử $f(h;t)$ là nhiệt độ (độ C) tại điểm ở độ cao h (mét) cách mặt đất, tại thời điểm t (giờ). Giả sử

$$\frac{\partial f}{\partial h}(21;13) = -2;\ \frac{\partial f}{\partial t}(21;13) = 1.$$

- Điều trên cho biết tại vị trí có cao độ 21 mét, vào lúc 13 giờ, nếu lên cao thêm 1 mét thì nhiệt độ giảm đi (ước chừng) khoảng 2 độ C;
- Cũng tại vị trí có cao độ 21 mét, vào lúc 13 giờ, nếu đợi một giờ trôi qua thì nhiệt độ được ước đoán tăng thêm khoảng 1 độ C.

Đạo hàm riêng cấp cao

- Nếu hàm số nhiều biến $(x_1; x_2; \dots; x_n) \mapsto f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ có đạo hàm riêng theo biến x_i tại mọi điểm thuộc tập mở $D \subset \mathbb{R}^n$, thì ta có một hàm số mới, cũng có n biến, là

$$(x_1; x_2; \dots; x_n) \mapsto f_{\boldsymbol{x_i}}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

- Ta lại có thể xét đạo hàm riêng của hàm mới này, ví dụ

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = f_{x_i x_k}.$$

- Đạo hàm trên là đạo hàm riêng cấp 2 của f, nếu tồn tại ở mọi điểm của D thì ta có thể xét tiếp đạo hàm cấp 3

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_m \partial x_k \partial x_i} = f_{x_i x_k x_m}.$$

Định lý Clairaut (hay Schwartz)

Định lý Clairaut. *Nếu hàm* n *biến* $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *có tất cả các đạo hàm riêng cấp hai tồn tại trong một lân cận của điểm* $\mathbf{a}$ *và liên tục tại* $\mathbf{a}$ *thì với mọi* $i, k = \overline{1, \dots, n}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

- Định lý trên có thể phát biểu vắn tắt rằng nếu các đạo hàm riêng cấp cao là liên tục thì thứ tự lấy đạo hàm theo các biến nhất định nào đó không ảnh hưởng đến kết quả của đạo hàm.

Định nghĩa. Một hàm số f được gọi là *khả vi liên tục đến cấp* k, hoặc là *trơn đến cấp* k, trên tập mở D có nghĩa là hàm f có tất cả các đạo hàm riêng từ cấp 1 đến cấp k cùng liên tục trên tập D, và ta viết là $f \in C^k(D)$.

Bài tập mẫu

- Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và 2 của hàm f định bởi $f(x;y) = \sin(x^4y^5)$.
- Cho $f(x;y) = \int_x^y \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ và $g(x;y) = \int_1^{x^2y} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

  Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(1;2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1;2)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(1;2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1;2)$.
- Mô hình Cobb–Douglas trong Kinh tế cho rằng lượng sản phẩm P (productivity) phụ thuộc lượng vốn K (capital) và lượng lao động L (labor) theo công thức $P = 1{,}2K^{0{,}75}L^{0{,}25}$.

(a) Tính $P_K(100;200), P_L(100;200)$.

(b) Giải thích vì sao có thể nói giá trị $P_K(100;200)$ xấp xỉ mức tăng của sản lượng khi lượng vốn tăng thêm 1 từ mức 100 trong khi lượng lao động giữ nguyên ở mức 200? Hàm P_K được gọi là sản lượng cận biên theo vốn (marginal productivity of capital).

Bài tập mẫu

- Cho hàm số f định bởi

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{khi } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{khi } (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

a) Tìm $f_x(x;y)$ và $f_y(x;y)$ khi $(x;y)\neq(0;0)$.

b) Tìm $f_x(0;0)$ và $f_y(0;0)$.

c) Chứng minh $f_{xy}(0;0)=-1$ và $f_{yx}(0;0)=1$.

d) Tìm $f_{xy}(x;y)$ khi $(x;y)\neq(0;0)$. Từ câu c và định lý Clairaut, ta có thể rút ra điều gì? Hãy kiểm chứng trực tiếp điều đó.

- Tham khảo thêm bài tập [1] mục 1.3.1-4; 1.3.10-14.

- Tính chất khả vi của hàm trơn cấp 1

- Phép xấp xỉ tuyến tính

- Mặt phẳng tiếp xúc

Nhắc lại phép xấp xỉ tuyến tính của hàm 1 biến

Giả sử hàm số một biến f khả vi (có đạo hàm) tại a và ta gọi L là hàm số bậc nhất cho bởi $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ (L được gọi là tuyến tính hóa của f tại a).

Khi x trong lân cận (ở xung quanh gần) điểm a, ta so sánh hai phép xấp xỉ

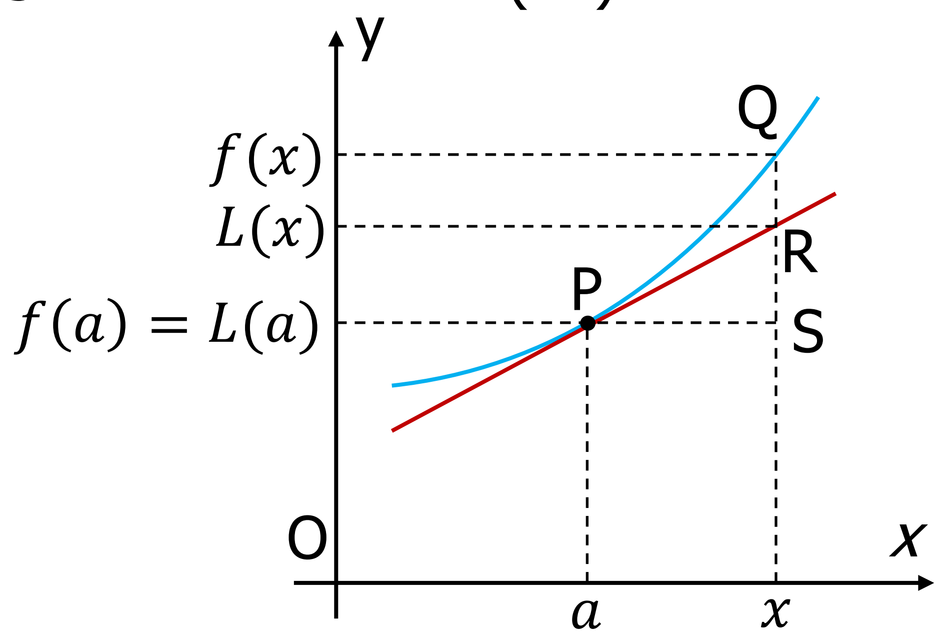
$$f(x) \approx f(a)$$

và

$$f(x) \approx L(x),$$

phép xấp xỉ nào tốt hơn?

Đồ thị của f (xanh) và của L (đỏ)



Dùng hình ảnh trực quan ở trên, thử phán đoán câu trả lời!

Nhắc lại phép xấp xỉ tuyến tính của hàm 1 biến

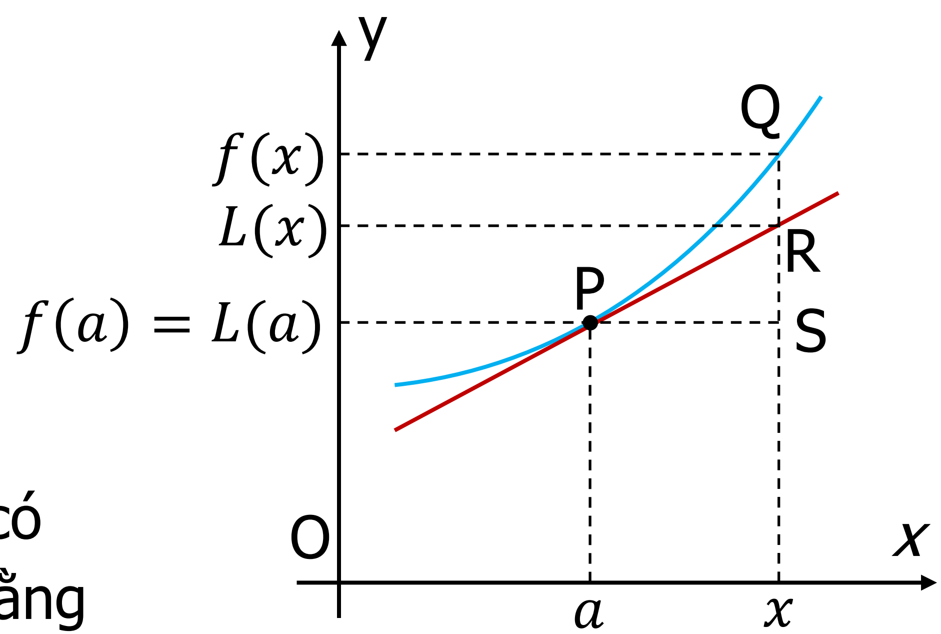
Cơ sở để khẳng định phép xấp xỉ nào tốt hơn là dựa trên đánh giá độ lớn sai số của phép xấp xỉ.

Phép xấp xỉ $f(x) \approx f(a)$ có độ lớn sai số $|f(x) - f(a)|$ bằng

$$|R_0(x)| := |D| \cdot |x - a|,$$

trong đó $D = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ là hệ số góc của PQ.

Đồ thị của f (xanh) và của L (đỏ)



Phép xấp xỉ $f(x) \approx L(x)$ thì có độ lớn sai số $|f(x) - L(x)|$ bằng

$$|R_1(x)| := \varepsilon(x)|x - a|,$$

$$\varepsilon(x) = \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right|.$$

Rõ ràng khi $x \to a$ thì $\varepsilon(x) \to 0$, do đó $|R_1(x)|$ có thể nhỏ hơn $|R_0(x)|$.

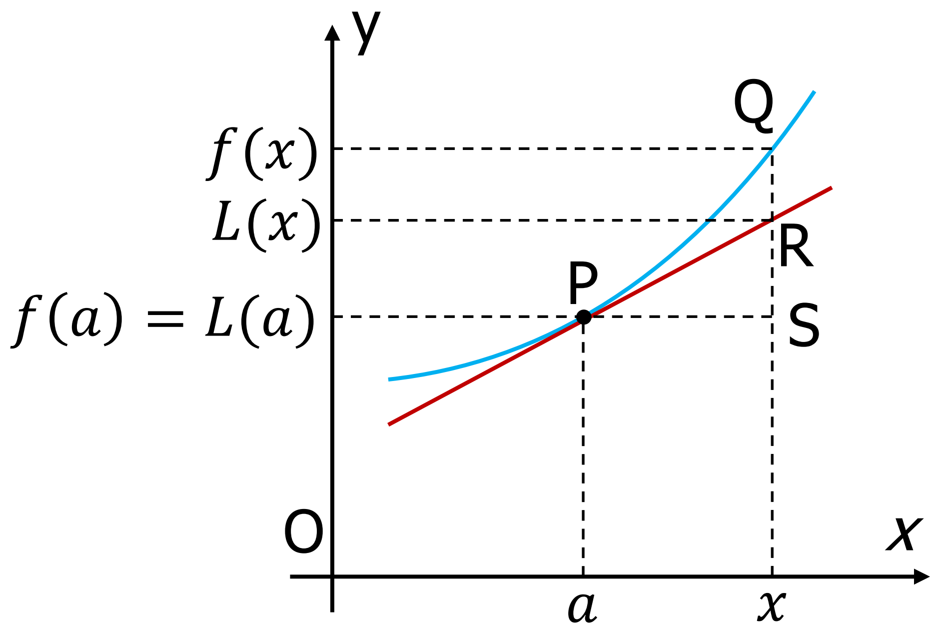
Nhắc lại phép xấp xỉ tuyến tính của hàm 1 biến

Vậy phép xấp xỉ tuyến tính $f(x) \approx L(x)$ tốt hơn phép xấp xỉ $f(x) \approx f(a)$, được áp dụng khi x gần a.

Đồ thị của f, của L và đường nằm ngang $y = f(a)$ cũng phản ánh điều đó, tức là ở khu vực x gần a, đường đỏ có vẻ gần áp sát đường xanh.

Vì lẽ trên mà ta nói đường đỏ là tiếp tuyến của đường xanh như đã biết ở học kỳ trước.

Đồ thị của f (xanh) và của L (đỏ)



Khái niệm khả vi của hàm nhiều biến

- Nếu hàm số một biến f khả vi (có đạo hàm) tại a thì, như đã phân tích ở trên, $f(x) - L(x) = \varepsilon(x)(x - a)$ với $\varepsilon(x) \to 0$ khi $x \to a$. Điều này có ý nghĩa là khi x gần a, sai số giữa $f(x)$ và $L(x)$ nhỏ hơn nhiều so với sai số giữa x và a, đồ thị của L gần như trùng với đồ thị của f ở gần tiếp điểm $P\big(a; f(a)\big)$.

- Nếu một hàm số 2 biến f có các đạo hàm riêng tại điểm $(a; b)$ thì hàm 2 biến bậc nhất sau đây

$$L(x; y) = f(a; b) + f_x(a; b)(x - a) + f_y(a; b)(y - b),$$

có thể được dùng để "xấp xỉ tốt" cho $f(x; y)$ khi điểm $(x; y)$ ở gần điểm $(a; b)$ giống như trường hợp hàm một biến hay không? Và lúc đó, đồ thị của L (là mặt phẳng) có cho cảm giác bám khít với đồ thị của f (mặt cong), khi xét $(x; y)$ ở gần điểm $(a; b)$, hay không?

Khái niệm khả vi của hàm nhiều biến

- Lặp lại câu hỏi trên cho rõ hơn, khi điểm $(x; y)$ ở gần điểm $(a; b)$ thì sai lệch giữa $f(x; y)$ và $L(x; y)$ có được hình thức tương tự trường hợp hàm một biến không, tức là liệu rằng

$$f(x; y) - L(x; y) = \varepsilon_1(x; y)(x - a) + \varepsilon_2(x; y)(y - b), \tag{1}$$

trong đó $\varepsilon_1(x; y) \to 0$ và $\varepsilon_2(x; y) \to 0$ khi $(x; y) \to (a; b)$ **??** (2)

Định nghĩa. Một hàm 2 biến f có các đạo hàm riêng tại $(a; b)$ và thỏa (1), (2) được gọi là *khả vi* tại $(a; b)$. (Định nghĩa tương tự đối với hàm số n biến.)

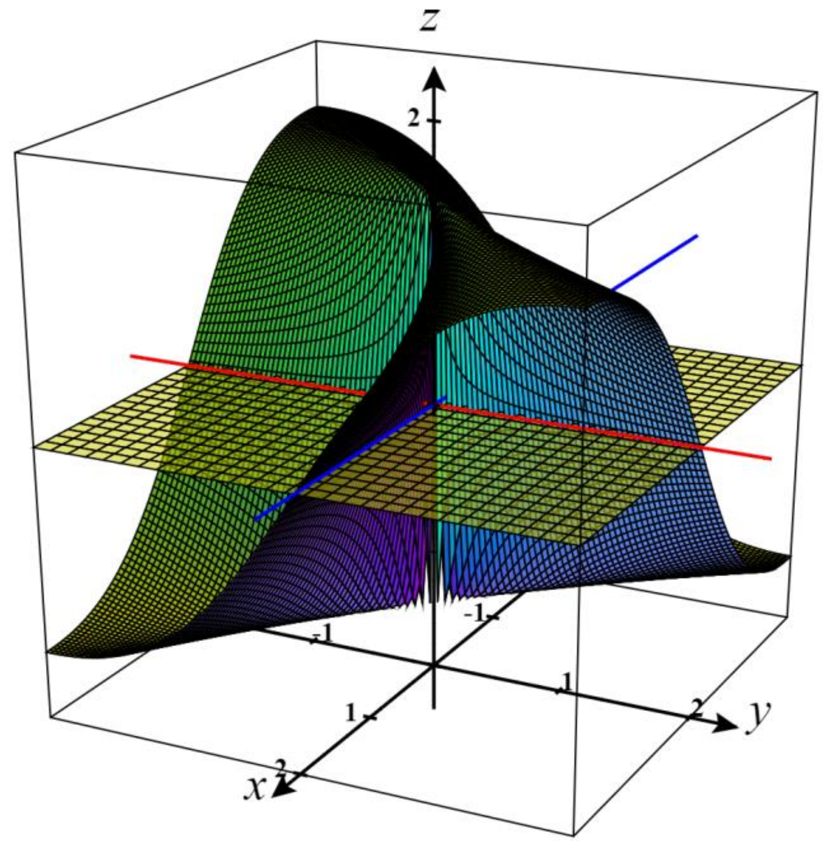
- Ý nghĩa trực quan của sự khả vi tại điểm $(a; b)$ của hàm số f là đồ thị của hàm bậc nhất $L(x; y)$ là mặt phẳng gần như "áp sát khít" với mặt cong đồ thị của f ở gần điểm $P(a; b; f(a; b))$.

Khái niệm khả vi của hàm nhiều biến

- Có những hàm số tuy có đạo hàm riêng tại điểm $(a;b)$ nhưng không khả vi tại $(a;b)$. Ta có thể thấy điều đó một cách trực quan thông qua ví dụ sau

$$f(x;y) = \begin{cases} 1 \quad \text{nếu } (x;y) = (0;0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} + 1 \text{ nếu } (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$$

Lúc đó $f_x(0;0) = f_y(0;0) = 0$ và $L(x;y) = 1$. Người ta chứng minh được rằng hàm này không khả vi tại $(0;0)$.



Trực quan cho thấy đồ thị của $z = L(x;y)$, tức là $z = 1$, là mặt phẳng vàng, không có vẻ gì áp sát (tiếp xúc), đồ thị hàm f tại (0;0;1).

Điều kiện đủ của sự khả vi

- Việc khảo sát tính khả vi của hàm số nhiều biến thông qua định nghĩa ở trước hơi bất tiện. Chúng ta có điều kiện đủ sau đây về tính khả vi (Việc chứng minh được bỏ qua.)

Định lý (điều kiện đủ khả vi). *Nếu hàm số nhiều biến f có các đạo hàm riêng xác định trên một lân cận của điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, đồng thời các đạo hàm riêng này liên tục tại $\mathbf{a}$, thì hàm số f sẽ khả vi tại điểm $\mathbf{a}$.*

Hệ quả (điều kiện đủ khả vi). *Nếu hàm số nhiều biến f trơn đến cấp 1 trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ (viết là $f \in C^1(U)$) thì f khả vi (tại mọi điểm) trên U.*

- Do hệ quả trên mà hàm số trơn cấp 1 còn được gọi là hàm số *khả vi liên tục*.

Mặt phẳng tiếp xúc, phép xấp xỉ tuyến tính

- Khi f khả vi tại $(a;b)$, ta nói hàm số $L(x;y)$ là *tuyến tính hóa* của f tại điểm $(a;b)$ và phép xấp xỉ

$$f(x;y) \approx L(x;y),$$

$$f(x;y) \approx f(a;b) + f_x(a;b)(x-a) + f_y(a;b)(y-b),$$

được áp dụng khi $(x;y)$ gần $(a;b)$, được gọi là *phép xấp xỉ tuyến tính*.

- Khi f khả vi tại $(a;b)$, ta nói đồ thị của hàm $L(x;y)$ là *mặt phẳng tiếp xúc* với đồ thị của hàm f tại điểm $P(a;b;f(a;b))$.
- Từ đây về sau, chúng ta chỉ xét các hàm trơn, các hàm này sẽ khả vi và do đó có thể xét phép xấp xỉ tuyến tính, tìm mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị (trong trường hợp hàm có 2 biến).

Mặt phẳng tiếp xúc, phép xấp xỉ tuyến tính

Ví dụ. Tìm phép xấp xỉ tuyến tính cho hàm số $f(x;y) = \ln(x-3y)$ tại $(7;2)$ và áp dụng để tính xấp xỉ $f(6{,}9;2{,}06)$.

Giải. Ta tìm các đạo hàm riêng $f_x = 1/(x-3y)$ và $f_y = -3/(x-3y)$. Các đạo hàm riêng này là liên tục (liên hệ bài học cũ) nên hàm f đang xét là trơn đến cấp 1, do đó ta có phép xấp xỉ tuyến tính tại điểm $(7;2)$ là

$f(x;y) \approx f(7;2) + f_x(7;2)(x-7) + f_y(7;2)(y-2)$ hay là

$$\ln(x-3y) \approx 1(x-7) - 3(y-2),$$

được áp dụng khi $(x;y)$ gần với điểm $(7;2)$.

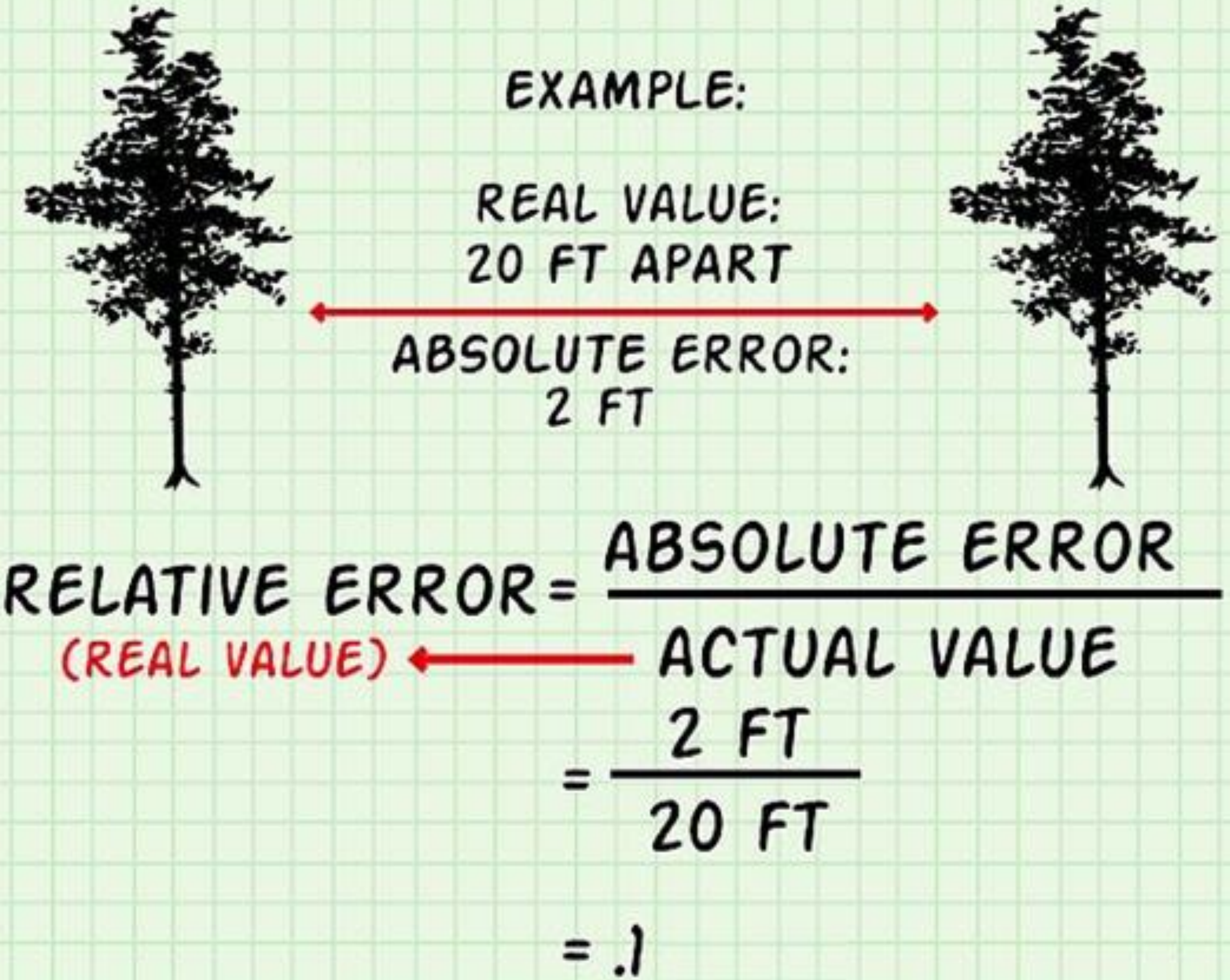
Vậy với điểm $(6{,}9;2{,}06)$ gần với điểm $(7;2)$ thì

$$f(6{,}9;2{,}06) \approx (6{,}9-7) - 3(2{,}06-2) = -0{,}28.$$

Bài tập mẫu

- Tìm xấp xỉ tuyến tính của $f(x;y) = x^2y^3$ ở gần điểm $(2;1)$.
- Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $f(x;y) = x^3y + 2x^4y^5$ tại $(x;y) = (1;1)$.
- Tính xấp xỉ $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,01^2}$.
- Cho hàm số hai biến f khả vi và đặt $z = f(x^2;y^4)$. Tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
- Tham khảo thêm bài tập [1] 1.3.5-8.

Sai số tỉ đối (tự đọc thêm)



Sai số tỉ đối

- Trong đo đạc thực nghiệm, đại lượng thứ k $(1 \leq k \leq n)$ có trị số đúng $\overline{a}_k$ không được biết, mà chỉ biết trị số gần đúng a_k từ phép đo. Người ta quan tâm đến sai số tỉ đối của kết quả đo định bởi

$$\delta_k = \frac{a_k - \overline{a}_k}{\overline{a}_k} = \frac{a_k}{\overline{a}_k} - 1 \Leftrightarrow a_k = \overline{a}_k(1 + \delta_k).$$

- Điều trên cũng có nghĩa là nếu có số δ sao cho một số gần đúng bằng số đúng nhân với $1 + \delta$ thì ta nói δ là sai số tỉ đối giữa chúng.
- Thực tế, trị số δ_k cũng không biết được (vì không biết $\overline{a}_k$), nhưng người ta chỉ cần thông tin $|\delta_k| < \varepsilon_k$ với số dương ε_k được biết trước, khá nhỏ (cỡ vài phần trăm hoặc vài phần nghìn, tùy theo mức độ chính xác của dụng cụ đo), và người ta xem như ε_k là sai số tỉ đối, tức là xem như đồng nhất với δ_k.

Sai số tỉ đối

- Nếu một đại lượng A, do một định luật Vật lý nào đó, có quan hệ với các đại lượng a_k theo công thức

$$A = \frac{a_1 a_2 \dots a_m}{a_{m+1} \dots a_n}, \qquad \overline{A} = \frac{\overline{a}_1 \overline{a}_2 \dots \overline{a}_m}{\overline{a}_{m+1} \dots \overline{a}_n}, \qquad n > m.$$

Làm thế nào ước lượng sai số tỉ đối của A một cách đơn giản?

- Xét hàm số n biến $f(x_1; \dots; x_n) = \frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)}{(1+x_{m+1})\cdots(1+x_n)}$, trơn đến cấp 2 trong một lân cận của điểm $(0; 0; \dots; 0)$. Sinh viên tự kiểm tra xấp xỉ tuyến tính của f tại $(0; 0; \dots; 0)$ là

$$f(x_1; \dots; x_n) \approx 1 + x_1 + \cdots + x_m - x_{m+1} - \cdots - x_n.$$

- Nếu áp dụng phép xấp xỉ trên, ta thấy

$$A = \overline{A} \cdot f(\delta_1; \dots; \delta_n) \approx \overline{A}(1 + \delta_1 + \cdots + \delta_m - \delta_{m+1} - \cdots - \delta_n).$$

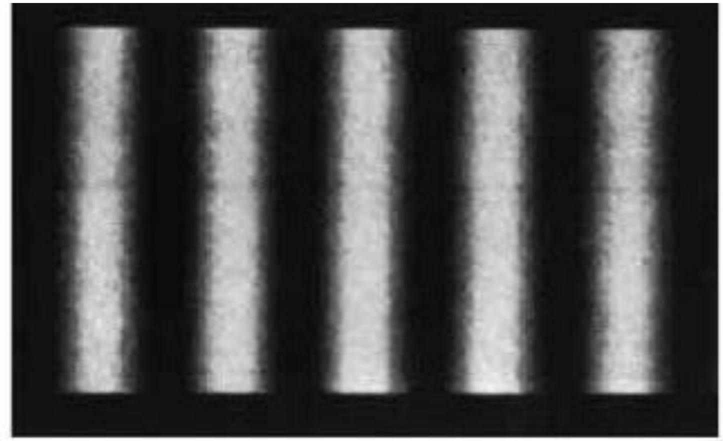
Do đó, ta xấp xỉ $\delta_A \approx \delta_1 + \cdots + \delta_m - \delta_{m+1} - \cdots - \delta_n$.

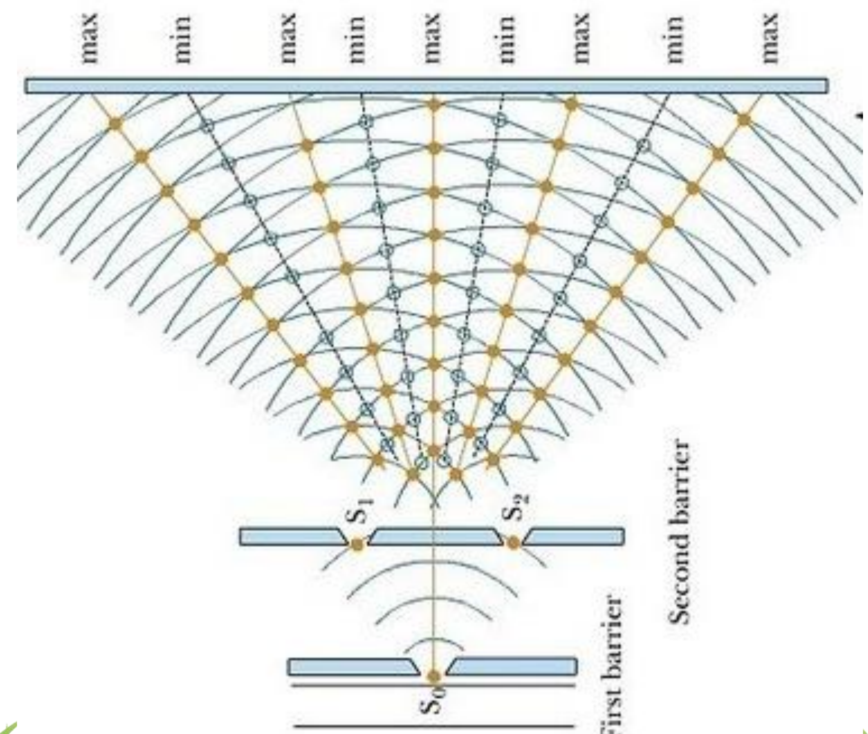
Sai số tỉ đối

- Do $\delta_A \approx \delta_1 + \cdots + \delta_m - \delta_{m+1} - \cdots - \delta_n$ nên bất đẳng thức sau được ta xem như "gần đúng"
$$|\delta_A| \leq |\delta_1| + |\delta_2| + \cdots + |\delta_n|.$$
- Mà $|\delta_k| < \varepsilon_k$ nên xem như
$$|\delta_A| < \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n.$$
- Trong thực tế, vì không biết được giá trị của δ_A mà chỉ biết $|\delta_A| \leq \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ nên ta lấy sai số tỉ đối của A là $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ cho đơn giản.

Sai số tỉ đối

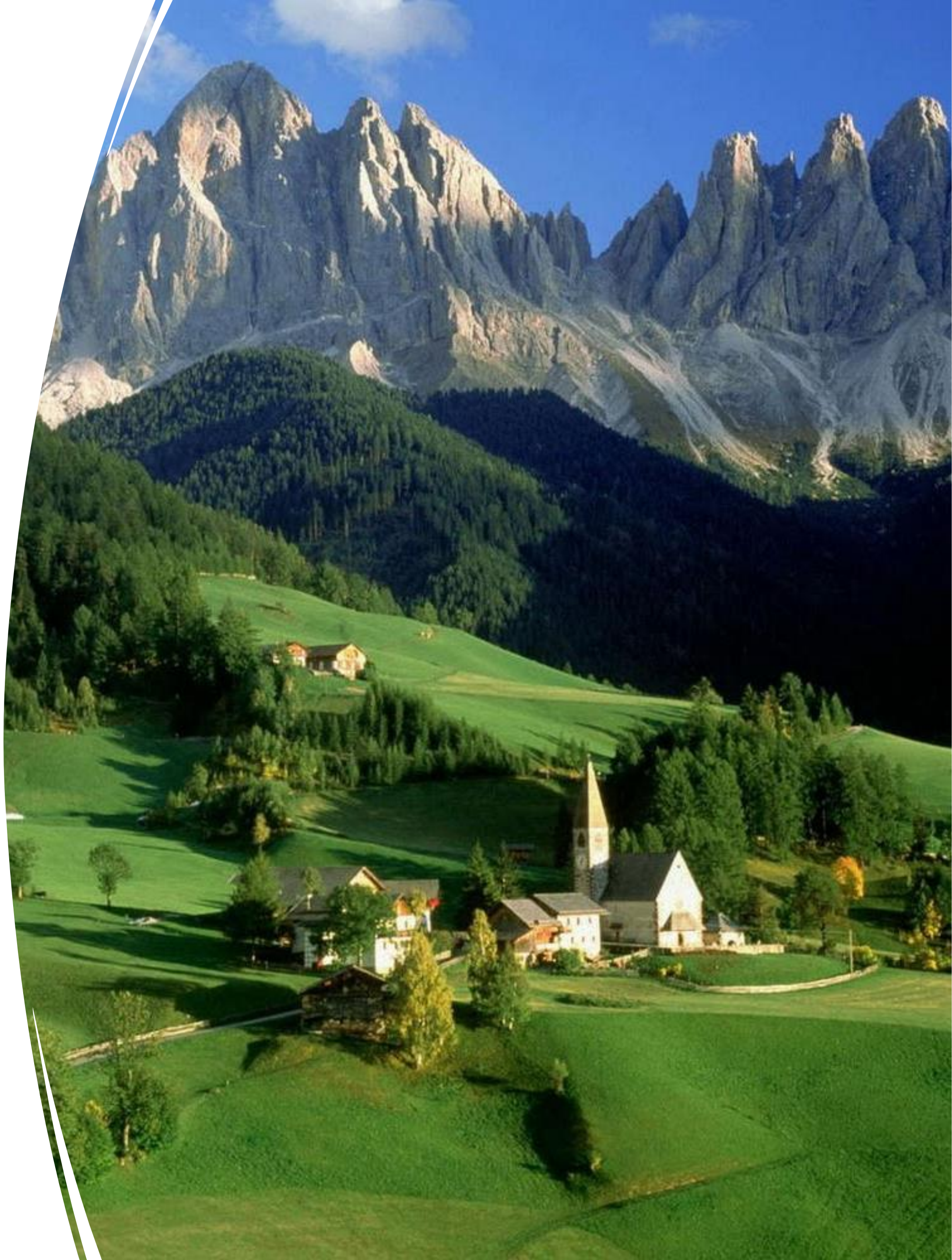
Ví dụ. Trong thí nghiệm của Young về giao thoa của hai nguồn sáng đơn sắc, ta có công thức $\lambda = ia/D$, trong đó λ (đơn vị μm) là bước sóng của ánh sáng đơn sắc, i (mm) là khoảng cách giữa hai vân sáng (hoặc tối) liên tiếp, a (mm) là khoảng cách giữa hai nguồn sáng, D (mét) là khoảng cách từ nguồn sáng đến màn chắn.





Khi đo các giá trị của i, a và D, giả sử ta biết các sai số tỉ đối lần lượt không quá ε_i, ε_a và ε_D tương ứng. Sau đó ta tìm bước sóng ánh sáng λ thông qua công thức trên thì sai số tỉ đối của λ được lấy là (hoặc là không quá) $\varepsilon_i + \varepsilon_a + \varepsilon_D$.

Vi phân của hàm số nhiều biến khả vi



Nhắc lại vi phân của hàm số một biến

Giả sử hàm 1 biến f khả vi (có đạo hàm) tại a.

- Khi x gần a, hiệu $\mathrm{d}x = x - a$ là nhỏ. Từ đây trở đi, ký hiệu dx ám chỉ một số nhỏ (trong lân cận của số 0).
- Ký hiệu $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \mathrm{d}x) - f(a)$ được gọi là biến thiên của f trên đoạn [a,x] (hay trên đoạn $[a, a + \mathrm{d}x]$). Khi x thay đổi gần a (hay dx thay đổi gần 0) thì Δf được gọi là biến thiên của f xung quanh a.
- Biểu thức $\mathrm{d}f := f'(a)\mathrm{d}x$ được gọi là *vi phân* của f tại a.

Ôn lại phép tính vi phân hàm số 1 biến

- Từ phép xấp xỉ tuyến tính, ta đổi hình thức xấp xỉ như sau

$$\boxed{f(a+\mathrm{d}x)-f(a)\approx f'(a)\mathrm{d}x \text{ hay là } \Delta f\approx \mathrm{d}f}$$

- Hình thức chung là

$$\boxed{\Delta f := f(x+\mathrm{d}x)-f(x)\approx f'(x)\mathrm{d}x\,,}$$

được gọi là *phép xấp xỉ vi phân của f xung quanh điểm x*.

- Ta có thể phát biểu rằng *nếu f khả vi tại x thì biến thiên của f xung quanh x được xấp xỉ bằng vi phân của f tại x*.
- Trường hợp đặc biệt, $f(x)=x$, thì ta viết $\Delta x=\Delta f=f(x+\mathrm{d}x)-f(x)=(x+\mathrm{d}x)-x=\mathrm{d}x$. Do vậy, nếu x là biến độc lập của một hàm số thì Δx đồng nhất với ký hiệu $\mathrm{d}x$, ám chỉ một số nhỏ.

Ôn lại phép tính vi phân hàm số 1 biến

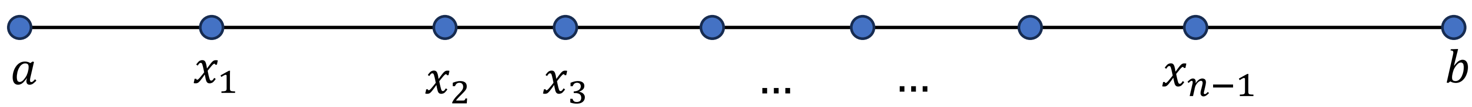
- Khi khảo sát độ biến thiên $f(b) - f(a)$ của hàm số f trên đoạn $[a; b]$, người ta chia $[a; b]$ thành nhiều phân khúc nhỏ:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

với $\mathrm{d}x_k = x_k - x_{k-1}$ nhỏ, thì ta xấp xỉ

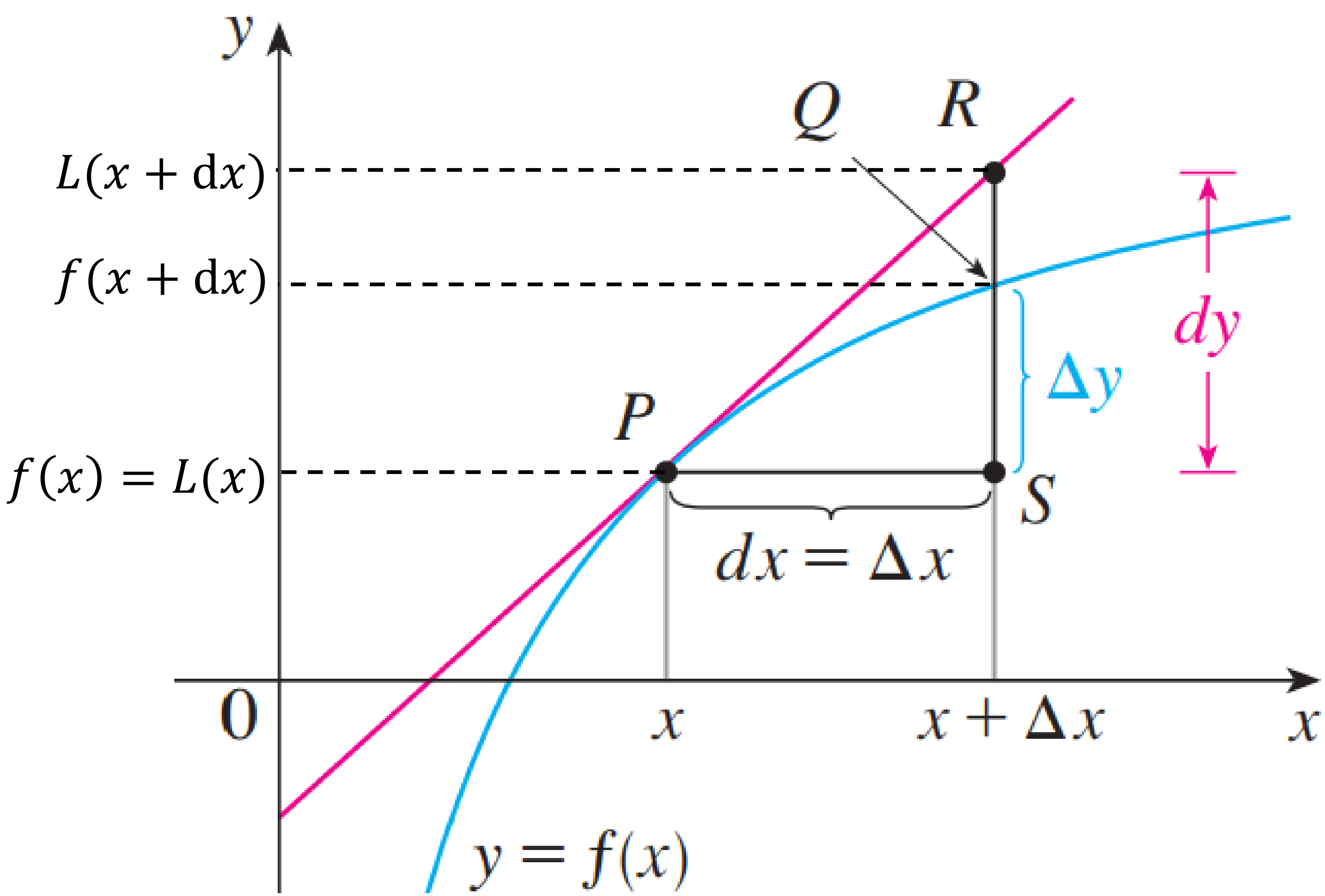
$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= [f(x_n) - f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})] \\ &\quad + \cdots + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_1) - f(x_0)] \\ &\approx f'(x_{n-1})\mathrm{d}x_n + f'(x_{n-2})\mathrm{d}x_{n-1} + \cdots + f'(x_0)\mathrm{d}x_1, \end{aligned}$$

từ đó xuất hiện thuật ngữ "vi phân" (phân chia nhỏ).



Ôn lại phép tính vi phân hàm số 1 biến

Hình ảnh sau minh họa các đại lượng được nói ở trên.



Vi phân của hàm số hai biến

Tương tự phép tính vi phân của hàm 1 biến, ta xét hàm số 2 biến $f(x;y)$ khả vi, hai ký hiệu $\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}y$ ám chỉ hai số nhỏ, độc lập nhau. Khi đó

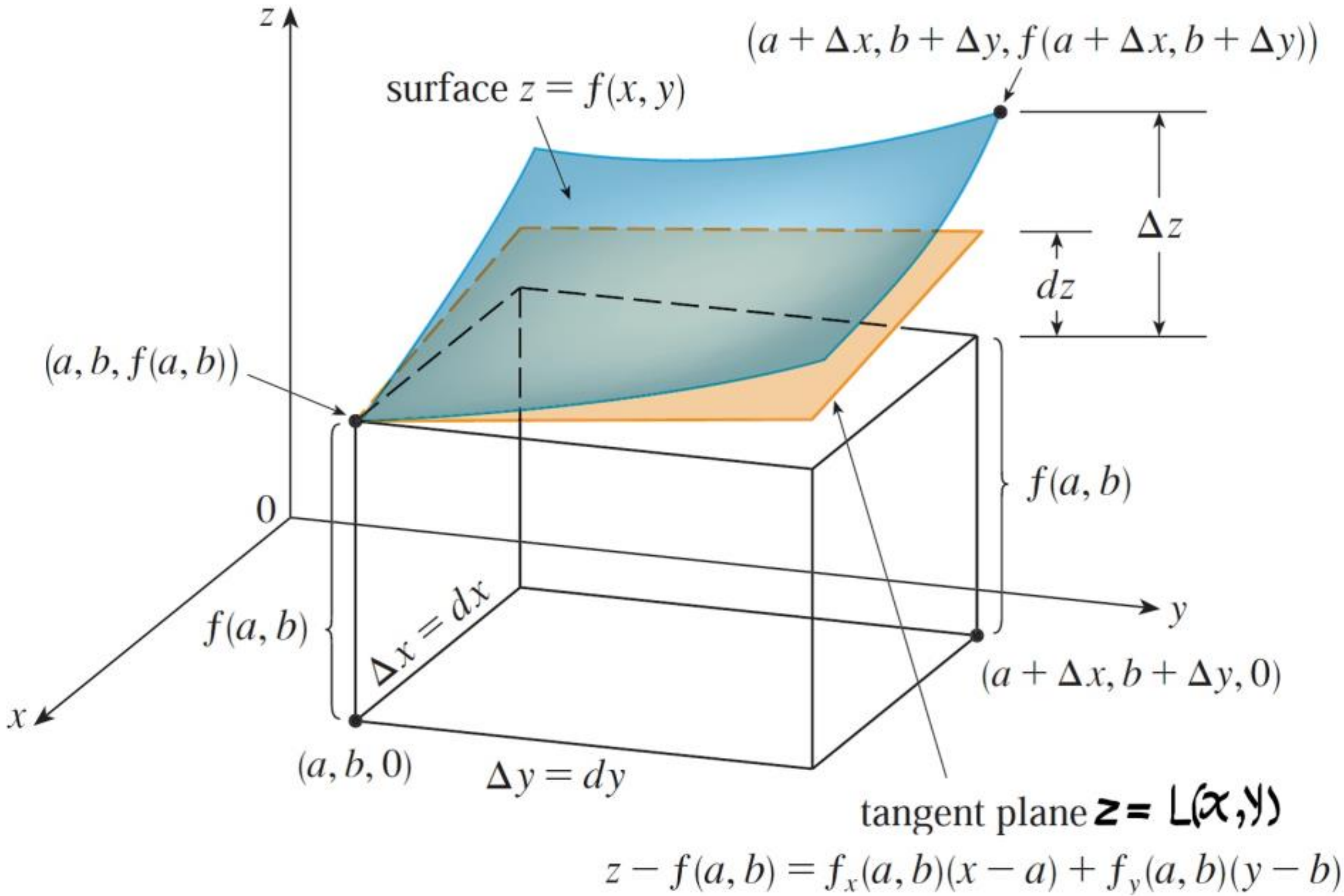
- Biểu thức $\mathrm{d}f = f_x(x;y)\mathrm{d}x + f_y(x;y)\mathrm{d}y$ được gọi là *vi phân của f*.
- Ký hiệu $\Delta f = f(x+\mathrm{d}x; y+\mathrm{d}y) - f(x;y)$ được gọi là *biến thiên của f xung quanh* $(x;y)$. *Phép xấp xỉ vi phân* của f xung quanh điểm $(x;y)$ là

$$\boxed{\Delta f \approx \mathrm{d}f \text{ hay } f(x+\mathrm{d}x; y+\mathrm{d}y) - f(x;y) \approx f_x(x;y)\mathrm{d}x + f_y(x;y)\mathrm{d}y}$$

- Trường hợp đặc biệt, nếu $f(x;y) = x$ thì ta có thể viết $\Delta x = \Delta f = f(x+\mathrm{d}x; y+\mathrm{d}y) - f(x;y) = (x+\mathrm{d}x) - x = \mathrm{d}x$. Tương tự, nếu $f(x;y) = y$ thì ta có thể viết $\Delta y = \mathrm{d}y$.
- Về tổng quát thì Δf không đồng nhất với $\mathrm{d}f$ mà chỉ có $\Delta x \equiv \mathrm{d}x$ và $\Delta y \equiv \mathrm{d}y$ (nếu đang coi x và y là hai biến số độc lập của f).

Phép tính vi phân của hàm số 2 biến

Minh họa các đại lượng trong được đề cập ở trước.



Ví dụ về phép xấp xỉ vi phân

Ví dụ. Một hộp trụ kín bằng nhôm có đường kính 4 cm, cao 10 cm, độ dày hai nắp đáy là 0,1 cm, độ dày thành ống là 0,05 cm. Sử dụng vi phân để ước tính lượng nhôm làm vỏ hộp.

Giải. Gọi độ cao và bán kính hộp lần lượt là *h* (cm) và *r* (cm) thì thể tích hộp là $V = \pi r^2 h\ (\mathrm{cm}^3)$. Lượng nhôm làm vỏ hộp là độ chênh lệch thể tích không bao gồm vỏ và thể tích tính luôn vỏ hộp, được ước tính bởi

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial h}\mathrm{d}h = 2\pi r h \mathrm{d}r + \pi r^2 \mathrm{d}h,$$

trong đó $\mathrm{d}r = 0{,}05$ (cm), $\mathrm{d}h = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ (cm) được xem là nhỏ so với $r = 2$ (cm), $h = 10$ (cm).

Vậy lượng nhôm làm vỏ hộp được ước tính là $\Delta V \approx 2{,}8\pi$ (cm^3).

Bài tập mẫu

- Nếu $z = 5x^2 + y^2$ và $(x; y)$ biến thiên từ $(1; 2)$ đến $(1{,}05; 2{,}1)$, hãy so sánh giá trị của Δz và $\mathrm{d}z$.
- Tìm $\mathrm{d}z$ với $z = x^3 \ln(y^2)$; $\mathrm{d}w$ với $w = xye^{xz}$.
- Kích thước của khối hộp chữ nhật được cho là 80cm, 60cm và 50cm với sai số tối đa là 0,2cm cho mỗi kích thước. Dùng vi phân, hãy ước lượng sai số tối đa khi tính thể tích hộp theo kích thước đã cho.
- Một tấm kim loại hình chữ nhật kích thước 3 mét × 4 mét khi gặp nóng bị giãn ra, mỗi mét chiều dài ước lượng sẽ giãn ra thêm 1 cm. Hãy ước lượng nhanh (không dùng máy tính) lượng gia tăng của diện tích tấm kim loại.
- Tham khảo bài tập [2] mục 14.4.