Chương 3. KHÔNG GIAN VECTƠ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

3.1 Vectơ

Để khởi tạo một vectơ ta sử dụng các hàm sau

- vector(list_of_elements): trong đó list_of_elements là danh sách các phần tử có dạng $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
- vector(n, element): Tạo ra vectơ n chiều với các phần tử có giá trị là element.
- randvector(n): Tạo ngẫu nhiên một vectơ n chiều với các thành phần có giá trị nguyên thuộc $[-99, 99]$.

Ngoài ra,

- v[i]: Xác định thành phần thứ i của vectơ v.

```
> u := vector([1, 2, -1, 2]);
```
$$[1\ 2\ -1\ 2]$$
```
> v := vector(4, 2);
```
$$[2\ 2\ 2\ 2]$$
```
> randvector(5);   #Kết quả ngẫu nhiên
```
$$[-7\ 22\ -55\ -94\ 87]$$
```
> u[3];
```
$$-1$$

3.2 Các phép toán trên vectơ

Cho u, v là hai vectơ và c là số. Khi đó:

- u+v: Cộng hai vectơ u và v.
- c*v: Nhân c với vectơ v.

Lưu ý: Để in ra giá trị của vectơ v ta dùng lệnh evalm(v).

```
> u := vector([1, 2, -1, 2]);
```
$$[1\ 2\ -1\ 2]$$
```
> v := vector([2, 3, 1, -2]);
```
$$[2\ 3\ 1\ -2]$$
```
> evalm(3*u);
```
$$[3\ 6\ -3\ 6]$$

```
> evalm(3*u-2v);
```

$$[-1\ 0\ -5\ 10]$$

3.3 Một số bài toán liên quan tới tập hợp các vectơ

Ví dụ 1. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không? Nếu có hãy biểu diễn u theo $u_1,\ u_2$ và u_3.

Phương pháp. Lập ma trận $A = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top)$ là ma trận gồm các cột là các vectơ u_1, u_2, u_3. Sau đó giải phương trình ma trận $AX = u^\top$ để có kết luận.

```
> u1 := vector([1, 2, 1]): u2 := vector([-1, -1, 1]): u3 := vector([-2, 1, 1]):
> A := matrix([u1, u2, u3]): A := transpose(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> u := vector([-3, 1, 4]);
```

$$u := [-3\ \ 1\ \ 4]$$

```
> linsolve(A, u);
```

$$[1\ \ 2\ \ 1]$$

Dựa vào kết quả trên, ta thấy u là tổ hợp tuyến tính của $u_1,\ u_2$ và u_3 và $u = u_1 + 2u_2 + u_3$.

Ví dụ 2. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1, 3);\ \ u_2 = (2, 3, 2, -2);\ \ u_3 = (5, 8, 5, -1).$$

Tìm điều kiện để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Phương pháp. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (u_1^\top\ u_2^\top\ u^\top\,|\,u^\top)$. Sau đó đưa $\tilde{A}$ về dạng bậc thang. Dựa vào ma trận này để tìm điều kiện cho hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Khi đó, điều kiện này chính là kết quả.

```
> u1 := vector([1, 2, 1, 3]): u2 := vector([2, 3, 2, -2]):
  u3 := vector([5, 8, 5, -1]): u := vector([a, b, c, d]):
> A := matrix([u1, u2, u3, u]): A := transpose(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 3 & 8 & b \\ 1 & 2 & 5 & c \\ 3 & -2 & -1 & d \end{bmatrix}$$

```
> A := pivot(A, 1, 1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & -1 & -2 & -2\,a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+c \\ 0 & -8 & -16 & -3\,a+d \end{bmatrix}$$

```
> A := pivot(A, 2, 2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3\,a+2\,b \\ 0 & -1 & -2 & -2\,a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+c \\ 0 & 0 & 0 & 13\,a-8\,b+d \end{bmatrix}$$

Dựa vào kết quả, ta thấy điều kiện để u là tổ hợp tuyến của u_1, u_2, u_3 là $-a+c=0$ và $13a-8b+d=0$.

Ví dụ 3. Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,2,1)$ và $u_3 = (1,5,3)$;

b) $u_1 = (0,3,3,6)$, $u_2 = (2,2,0,2)$ và $u_3 = (-3,0,3,3)$.

Phương pháp. Lập ma trận A gồm các dòng hoặc các cột là các vectơ u_1, u_2, u_3. Sau đó tính hạng của A và so sánh với số vectơ để có kết luận.

```
> u1 := vector([0, 1, 1]): u2 := vector([1, 2, 1]): u3 := vector([1, 5, 3]):
> A := matrix([u1, u2, u3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> u1 := vector([0, 3, 3, 6]): u2 := vector([2, 2, 0, 2]): u3 := vector([-3, 0, 3, 3]):
> B := matrix([u1, u2, u3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> rank(B);
```

$$2$$

Dựa vào kết quả trên, ta so sánh số vectơ và hạng của ma trận ta được

- Các vectơ $(0,1,1), (1,2,1)$ và $(1,5,3)$ độc lập tuyến.
- Các vectơ $(0,3,3,6)$, $(2,2,0,2)$ và $(-3,0,3,3)$ phụ thuộc tuyến tính.

3.4 Cở sở của không gian con

Sau đây là một số hàm liên quan tới cơ sở của không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$

- basis(S): Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ của tập hợp S. Kết quả trả về là tập con của S.
- basis(A, 'rowspace'): Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ dòng của ma trận A. Kết quả trả về là danh sách con của danh sách các vectơ dòng của ma trận A.
- basis(A, 'colspace'): Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các vectơ cột của ma trận A. Kết quả trả về là danh sách con của danh sách các vectơ cột của ma trận A.
- rowspan(A): Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các dòng của ma trận A. Kết quả trả về là danh sách các vectơ khác không của một dạng bậc thang của A.
- rowspace(A): Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi các dòng của ma trận A. Kết quả trả về là danh sách các vectơ khác không của dạng bậc thang rút gọn của A.
- nullspace(A): Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$.
- sumbasis(S_1, S_2,...): Tìm một cơ sở của không gian tổng của các không gian sinh bởi các tập hợp S_1, S_2 ....
- intbasis(S_1, S_2,...): Tìm một cơ sở của không gian giao của các không gian sinh bởi các tập hợp S_1, S_2, ...

Ví dụ 4. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ xét các vectơ sau đây:

$u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 3, 1)$, $u_3 = (7, 8, 9, 5)$, $u_4 = (1, 2, 1, 0)$,

$u_5 = (2, -1, 0, 1)$, $u_6 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_7 = (1, 1, 1, 1)$.

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle, W = \langle u_4, u_5, u_6, u_7\rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U, W, $U + W$ và $U \cap W$.

Cách 1. Cơ sở được tìm là tập con của tập sinh.

```
> u1 := vector([1, 2, 0, 1]): u2 := vector([2, 1, 3, 1]): u3 := vector([8, 7, 9, 5]):
  u4 := vector([0, 3, -3, 1]): u5 := vector([2, -1, 0, 1]): u6 := vector([6, 0, -3, 4]):
  u7 := vector([1, 1, 1, 1]):
> B1 := basis([u1, u2, u3]);
```

$$[u1, u2]$$

```
> B2 := basis([u4, u5, u6, u7]);
```

$$[u4, u5, u7]$$

```
> sumbasis(B1, B2);
```

$$[u1, u2, u5, u7]$$

Từ kết quả tính toán, ta có:

- Không gian U có cơ sở $\{u_1,\ u_2\}$.
- Không gian W có cơ sở $\{u_4,\ u_5, u_7\}$.

- Không gian tổng $U + W$ có cơ sở $\{u_1,\ u_2,\ u_5,\ \ u_7\}$.

Cách 2.

```
> A := matrix([u1, u2, u3]);   #Lập ma trận A từ u1, u2, u3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=rowspan(A);
```

$$\{[0\ \ -3\ 3\ \ -1],\ [1\ 2\ 0\ 1]\}$$

```
> B := matrix([u4, u5, u6, u7]): B2:=rowspan(B);
```

$$\{[0\ 0\ 15\ 0],\ [0\ 6\ \ -6\ 2],\ [2\ \ -1\ 0\ 1]\}$$

```
> AB := matrix([u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7]): rowspan(AB);
```

$$\{[0\ \ -3\ 3\ \ -1],\ [0\ 0\ 0\ 5],\ [0\ 0\ 15\ \ -2],\ [1\ 2\ 0\ 1]\}$$

```
> intbasis(B1, B2);
```

$$\{[0\ 6\ \ -6\ 2]\}$$

Từ kết quả tính toán, ta có:

- Không gian U có cơ sở $\big\{(0,\ -3,\ 3,\ -1),\ (1,\ 2,\ 0,\ 1)\big\}$.
- Không gian U có cơ sở $\big\{(0,\ 0,\ 15,\ 0),\ (0,\ 6,\ -6,\ 2),\ (2,\ -1,\ 0,\ 1)\big\}$.
- Không gian tổng $U+W$ có cơ sở $\big\{(0,\ -3,\ 3,\ -1),\ (0,\ 0,\ 0,\ 5),\ (0,\ 0,\ 15,\ -2),\ (1,\ 2,\ 0,\ 1)\big\}$.
- Không gian giao $U \cap W$ có cơ sở $\big\{(0,\ 6,\ -6\,,2)\big\}$.

Ví dụ 5. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0; \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0; \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 17x_3 & + & 11x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

```
> A := matrix(3, 4, [2, -4, 5, 3, 3, -6, 4, 2, 4, -8, 17, 11]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> nullspace(A);
```

$$\left\{[2\ \ 1\ \ 0\ \ 0],\ \left[\frac{-2}{5}\ \ 0\ \ 1\ \ \frac{-7}{5}\right]\right\}$$

Vậy không gian nghiệm có số chiều là 2, và có cơ sở:

$$\left\{(2,1,0,0),\left(-\frac{2}{5},0,1,-\frac{7}{5}\right)\right\}.$$

3.5 Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Bài toán. Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} := (\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m\ )$ là cơ sở được sắp của V và $u \in V$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Giải. Tọa độ của u trong $\mathcal{B}$ chính là nghiệm của hệ phương trình $(u_1^\top\ u_2^\top\ \ldots u_m^\top \mid u^\top)$. Trong Maple, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lần lượt thực hiện các lệnh sau:

```
> B := matrix([u1, u2,..., un]);
> B := transpose(B);
> linsolve(B, u);
```

Ngoài ra, nếu $\mathcal{B} = (\ u_1, u_2, \ldots, u_m\ )$ và $\mathcal{B}' = (\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m\ )$ là hai cơ sở của V thì việc tìm ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ được thực hiện thông qua việc tính $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_m]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ 6. Trong $\mathbb{R}^4$, cho $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (-2, 3, 4, 1)$, $u_3 = (-1, 4, 3, 2)$, $v_1 = (1, 1, -1, -1)$, $v_2 = (2, 7, 0, 3)$ và $v_3 = (2, 7, 0, 2)$. Đặt $\mathcal{A} = (\ u_1, u_2, u_3\ )$ và $\mathcal{B} = (\ v_1, v_2, v_3\ )$.

a) Kiểm tra $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai cơ sở của một không gian vectơ W.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ nếu biết $[u]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Tính $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

```
> u1 := vector([1, 1, -1, 0]): u2 := vector([-2, 3, 4, 1]): u3 := vector([-1, 4, 3, 2]):
  v1 := vector([1, 1, -1, -1]): v2 := vector([2, 7, 0, 3]):  v3 := vector([2, 7, 0, 2]):
> A:=matrix([u1, u2, u3]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

```
> B := matrix([v1, v2, v3]):
> equal(gaussjord(A), gaussjord(B));
```

$$\mathit{true}$$

Từ kết quả trên ta được $r(A) = 3$ nên $\mathcal{A}$ độc lập tuyến tính, và do đó $\mathcal{A}$ là cơ sở của W. Ma trận A và ma trận B có cùng dạng bậc thang rút gọn nên A và B tương đương dòng. Do đó không gian sinh bởi $\mathcal{A}$ trùng với không gian sinh bởi $\mathcal{B}$. Hay $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai cơ sở của một không gian vectơ.

```
> A := transpose(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B := transpose(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> uA := vector([5, 1, 4]);
```

$$[5\ 1\ 4]$$

```
> u := evalm(A.uA)      #Lưu ý . là dấu chấm câu
```

$$[-1\ 24\ 11\ 9]$$

```
> uB := linsolve(B, u);
```

$$[-11\ \ -12\ 17]$$

Từ kết quả tính toán trên ta có: $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ 17 \end{pmatrix}$.

```
> v1A := linsolve(A, v1):      #Tính các tọa độ v_i theo cơ sở A
  v2A := linsolve(A, v2):
  v3A := linsolve(A, v3):
> P := matrix([v1A, v2A, v3A]): P := transpose(P);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ kết quả tính toán trên ta có:

$$P = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phần II. Bài tập

3.1 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (1, 3, 2)$, $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$.

b) $u = (1, 4, -3)$, $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (1, 1, -2)$.

c) $u = (4, 1, 2)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, -1)$.

d) $u = (1, 3, 5)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (2, 1, 0)$.

3.2 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (10, 6, 5, 3)$, $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (3, 1, 2, 1)$, $u_3 = (2, 1, 3, 1)$.

b) $u = (1, 1, 1, 0)$, $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1, 1)$.

c) $u = (1, 3, 7, 2)$, $u_1 = (1, 2, 1, -2)$, $u_2 = (3, 5, 1, -6)$, $u_3 = (1, 1, -3, -4)$.

3.3 Trong các câu sau, hãy tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để vectơ $u = (a, b, c, d)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3.

a) $u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 1, 2)$.

b) $u_1 = (1, 1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 0, 1), u_3 = (1, 0, 1, 1)$.

c) $u_1 = (1, -2, 0, 3), u_2 = (2, 3, 0, -1), u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

3.4 Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, -1)$;

b) $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 5, 3)$;

c) $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$, $u_3 = (0, 1, -2, 2)$.

d) $u_1 = (1, 2, 3, -4)$, $u_2 = (3, 5, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, -5, 9)$.

e) $u_1 = (1, 3, 1, -1)$, $u_2 = (2, 5, 1, 1)$ $u_3 = (1, 1, -3, 13)$, $u_4 = (1, 3, 2, -5)$.

3.5 Xét xem các đa thức sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2$, $f_2 = -4 - t + 6t^2$, $f_3 = 6 + 3t - 4t^2$;

b) $f_1 = 1 - 2t$, $f_2 = 1 - t + t^2$, $f_3 = 1 - 7t + 10t^2$;

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2$, $f_2 = 1 + t + 4t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3$, $f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3$, $f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$.

3.6 Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3.7 Cho V là một không gian vectơ và $u, v, w \in V$. Chứng minh rằng, $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u + v, v + w, w + u\}$ độc lập tuyến tính.

3.8 Trong các tập hợp W sau đây thì tập hợp nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$?

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 0\}$.

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$.

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 3x_2 = 1\}$.

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$.

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 = x_2 x_3\}$.

f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 x_2 = 0\}$.

3.9 Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n?

a) Tập các ma trận đường chéo cấp n.

b) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 0$.

c) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\det A = 1$.

d) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A khả nghịch.

e) Tập các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^\top = A$.

3.10 Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $\mathbb{R}[t]$?

a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$.

b) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$.

c) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(0) = f(1) + f(2)$.

d) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $(f(t))^2 = f(t)$.

3.11 Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $W_1 \cup W_2$ là không gian con của V khi và chỉ khi $W_1 \subset W_2$ hoặc $W_2 \subset W_1$.

3.12 Chứng minh rằng:

a) $\mathcal{S} = \{(1,\ -1), (-2,\ 3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{S} = \{(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ -1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{S} = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

3.13 Trong $\mathbb{R}^3$ chứng minh rằng không gian sinh bởi các vectơ $(1,2,3), (-1,-1,2)$, và $(-1,1,12)$ trùng với không gian con sinh bởi các vectơ $(0,1,5)$ và $(1,3,8)$.

3.14 Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1+2t-7t^2$, $f_2 = 3+t+t^2$, $f_3 = 7+2t+4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{R}_2[t]$.

3.15 Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{B} = \{u_1 = (2,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (1,1,2)\}$.

b) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}$.

c) $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,1,-1)\}$.

d) $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (1,5,3)\}$.

3.16 Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ t-1,\ (t-1)^2,\ \ldots,\ (t-1)^n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}_n[t]$.

3.17 Kiểm tra tập hợp $\{1+t,\ t+t^2, t^2+t^3,\ \ldots, t^{n-1}+t^n\}$ có là cơ sở của $\mathbb{R}_n[t]$ hay không?

3.18 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (1,-1,0,1)$, $u_3 = (1,2,1,-1)$. Kiểm tra tập hợp $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ có là cơ sở của W hay không? Hãy xác định $\dim W$.

3.19 Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (1,2,5),\ u_3 = (5,3,4)\}$ và $W = \langle \mathcal{S} \rangle$.

a) Chứng minh $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.

b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của W sao cho $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ và xác định $\dim W$.

3.20 Cho $\mathcal{S} = \{u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (1,2,5)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Chứng minh $\mathcal{S}$ độc lập tuyến tính.

b) Cho $u = (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm điều kiện của $a,\ b,\ c$ sao cho $\mathcal{S} \cup \{u\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

3.21 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các vectơ sau:

a) $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,3,4)$, $u_3 = (3,4,5)$.

b) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.

c) $u_1 = (1,2,3,1)$, $u_2 = (1,2,1,-2)$, $u_3 = (1,3,2,1)$, $u_4 = (2,1,3,-7)$.

d) $u_1 = (1,1,-1,2)$, $u_2 = (1,-1,-2,1)$, $u_3 = (1,3,2,1)$; $u_4 = (2,1,2,-1)$.

3.22 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1+2t-5t^2$, $f_2 = -4-t+6t^2$, $f_3 = 6+3t-4t^2$;

b) $f_1 = 1-2t$, $f_2 = 1-t+t^2$, $f_3 = 1-7t+10t^2$;

c) $f_1 = 1-2t+3t^2$, $f_2 = 1+t+4t^2$, $f_3 = 2+5t+9t^2$;

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3,\ f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3,\ f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3.$

3.23 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các ma trận sau:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix};$

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix};$

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$

3.24 Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$

3.25 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$u_1 = (1, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, -1, 1, -1),\ u_3 = (1, 3, 1, 3),$

$v_1 = (1, 2, 0, 2),\ v_2 = (1, 2, 1, 2),\ v_3 = (3, 1, 3, 1).$

Đặt $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ và $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U, W, $U + W$ và $U \cap W$.

3.26 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u = (1, 1, 0, -1),\ v = (1, 0, 0, -1) \text{ và } w = (1, 0, -1, 0).$$

Đặt $U = \langle u, v, w \rangle$ và

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

a) Chứng tỏ rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U, W, $U + W$ và $U \cap W$.

3.27 Cho W_1 là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

và W_2 là không gian sinh bởi $\{v_1 = (1, 2, 2, 1); v_2 = (3, -2, 2, 1)\}$.

a) Tìm một cơ sở của không gian W_1.

b) Tìm một cơ sở của không gian $W_1 + W_2$.

c) Tìm số chiều của không gian $W_1 \cap W_2$.

3.28 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 3, 0, 1)$ và $U = \langle u_1, u_2\rangle$, $W = \langle v_1, v_2\rangle$. Tính $\dim(U + W)$ và $\dim(U \cap W)$.

3.29 Trong không gian $\mathbb{R}^5$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 0, 2, 1, 1), u_2 = (1, 0, 3, 2, 5), u_2 = (2, 0, 5, 3, 2)\}.$$

Chứng tỏ S độc lập tuyến tính và thêm vào S một số vectơ để S trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^5$.

3.30 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho W sinh bởi

$$S = \{u_1 = (1, -1, -1, 3), u_2 = (1, 3, 3, 3), u_3 = (0, 1, 1, 0), u_4 = (1, 5, 5, 3)\}.$$

Tìm một tập con của S để là cơ sở của W.

3.31 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của vectơ $u = (3, 1, 4)$ theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1),$ $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)\}$.

3.32 Trong không gian $\mathbb{R}_2[t]$, cho các đa thức

$$f_1(t) = 1 + t - t^2, f_2(t) = t + t^2, f_3(t) = 3 + 4t - t^2.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.

b) Cho $f(t) = 3 + t - 2t^2$. Hãy tìm tọa độ của f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

3.33 Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở $\mathcal{B}$.

3.34 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (1, 1, -1).$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$, biết rằng $u = (1, 3, -2)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.35 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, -2)$, $u_3 = (0, -3, 2)$ và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ và $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

3.36 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, -1)$, $u'_1 = (1, 1, 2)$, $u'_2 = (1, -2, 1)$ $u'_3 = (2, 1, 4)$.

a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ biết rằng $u = (1, 2, 3)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$ biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Tìm $[w]_{\mathcal{B}'}$ biết rằng $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

3.37 Trong không gian $\mathbb{R}_2[t]$, cho các đa thức $f_1(t) = 1 + t + t^2$, $f_2(t) = 2 + 2t + t^2$, $f_3(t) = 2 + 3t + t^2$, $g_1(t) = 1 + 2t$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = 1 + t^2$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

3.38 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u'_1 = (0, 1, 2, -3), u'_2 = (2, 0, 1, 3), u'_3 = (0, 1, -2, 1)\}$. Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

3.39 Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ $u_1 = (1, 1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$ và $u_3 = (2, 3, 1, 1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_\mathcal{B}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u'_1 = (1, 1, -1, 2)$, $u'_2 = (2, 4, 1, -2)$, $u'_3 = (1, 0, 0, 5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

3.40 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 2, -2, 2)$ và $W = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_\mathcal{B}$ theo a, b, c, d.

c) Cho $u'_1 = (2, 1, 0, 1)$, $u'_2 = (2, 3, -3, 4)$, $u'_3 = (3, 3, -2, 3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

d) Tìm $[u]_\mathcal{B}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.41 Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tọa độ $[u]_\mathcal{B}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vectơ $u = (2, 1, -1)$.

b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.

3.42 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (3, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, -5)$, $u_3 = (-3, -1, 15)$. Đặt

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 - u_2 - u_3, \\ v_2 &= -2u_1 + 5u_2 + 3u_3, \\ v_3 &= u_1 - 2u_2 - u_3. \end{cases}$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

3.43 Cho A, B là hai ma trận cùng loại. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

3.44 * Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh bất đẳng thức Sylvester

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

3.45 * Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thoả $AB = 0$. Chứng minh $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le n$, hơn nữa, với mọi k thỏa $\operatorname{rank}(A) \le k \le n$, luôn tìm được ma trận C sao cho $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) = k$ và $AC = 0$.

3.46 * Cho A là hai ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = I_n$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{rank}(A + I_n) + \operatorname{rank}(A - I_n) = n.$$

3.47 * Cho A là ma trận có hạng là r. Chứng minh rằng định thức con nằm trên giao điểm của r dòng độc lập tuyến tính và r cột độc lập tuyến tính của A bao giờ cũng khác 0.