ÔN THI GIỮA KỲ MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1:

Câu 1. *Giải hệ sau và kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli*:

$$\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ 2x+3y-z-t=-6 \\ 3x-y-z-2t=-4 \\ x+2y+3z-t=-4 \end{cases}$$

* *Phương pháp Gauss – Jordan* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & 10 & 9 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -53 & -54 \\ 0 & 1^* & 0 & 38 & 37 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -51 & -51 \end{array}\right) \\ E_1 \;\; E_2 \;\; E_3 \qquad\qquad\quad \end{array} \to (R_A\,|\,B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad t \qquad \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 \end{array}\right) \\ E_1 \;\; E_2 \;\; E_3 \;\; E_4 \qquad \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta thấy ngay hệ có nghiệm duy nhất : ($x = y = -1$, $z = 0$ và $t = 1$).

* *Phương pháp Gauss*: ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to (S_A\,|\,B'') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3^* & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -51^* & -51 \end{array}\right) \\ F_1 \;\; F_2 \;\; F_3 \;\; F_4 \qquad \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}.$$ Dùng lần lượt (4), (3), (2) và (1), ta có

nghiệm duy nhất $t = (-51/-51) = 1$, $z = (27t - 27)/(-3) = 9 - 9t = 9 - 9.1 = 0$,

$y = 5z + 7t - 8 = 5.0 + 7.1 - 8 = -1$, $x = 1 - y - 2z - 3t = 1 - (-1) - 2.0 - 3.1 = -1$.

* $m = n = 4$, $A \in M_4(\mathbf{R})$, $\overline{A} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R})$, $r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$: hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 2, *Giải và biện luận hệ sau theo tham số thực m rồi kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli:*

$$\begin{cases} 3x+3y+7z-3t+6u=3 \\ 2x+2y+4z-t+3u=-2 \\ -3x-3y-5z+2t-7u=4m+1 \\ 2x+2y+8z-3t+u=5m-3 \end{cases}.$$

* *Phương pháp Gauss – Jordan* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3&3&7&-3&6&3\\ 2&2&4&-1&3&-2\\ -3&-3&-5&2&-7&4m+1\\ 2&2&8&-3&1&5m-3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^*&1&3&-2&3&5\\ 0&0&-2&3&-3&-12\\ 0&0&2&-1&-1&4m+4\\ 0&0&4&-2&-2&5m-1\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^*&1&0&5/2&-3/2&-13\\ 0&0&1^*&-3/2&3/2&6\\ 0&0&0&2&-4&4m-8\\ 0&0&0&0&0&-3m-9\end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} E_1 & & E_2 & & \end{array} \end{array} \to (R_A\,|\,B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x&y&z&t&u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^*&1&0&0&7/2&-5m-3\\ 0&0&1^*&0&-3/2&3m\\ 0&0&0&1^*&-2&2m-4\\ 0&0&0&0&0&m+3\end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} E_1 & & E_2 & E_3 & & (?) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (1)\\(2)\\(3)\\(4) \end{array}.$$

Nếu $m+3 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ vô nghiệm [do (4)].

Nếu $m+3 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có vô số nghiệm như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (1), (2)

và (3), ta thấy $x = -y-(7/2)u+12$, $z = (3/2)u-9$ và $t = 2u-10$.

* *Phương pháp Gauss* : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3&3&7&-3&6&3\\ 2&2&4&-1&3&-2\\ -3&-3&-5&2&-7&4m+1\\ 2&2&8&-3&1&5m-3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^*&1&3&-2&3&5\\ 0&0&-2&3&-3&-12\\ 0&0&2&-1&-1&4m+4\\ 0&0&4&-2&-2&5m-1\end{array}\right) \to$$

$$\to (S_A\,|\,B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x&y&z&t&u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^*&1&3&-2&3&5\\ 0&0&-2^*&3&-3&-12\\ 0&0&0&2^*&-4&4m-8\\ 0&0&0&0&0&-3m-9\end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} F_1 & & F_2 & F_3 & & (?) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (1)\\(2)\\(3)\\(4) \end{array}$$

Nếu $-3m-9 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ vô nghiệm [do (4)].

Nếu $-3m-9 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có vô số nghiệm như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (3), (2) và (1), ta có

$t = (4u - 20)/2 = 2u - 10$, $z = (3t - 3u + 12)/2 = [\,3(2u - 10) - 3u + 12\,]/2 = (3/2)u - 9$ và

$x = (2t - 3y - 7z - 3u + 5)/3 = \{2(2u - 10) - 3y - 7[(3/2)u - 9] - 3u + 5\}/3 = 12 - y - (7/2)u$

* Kiểm nghiệm lại bằng Kronecker – Capelli : $m = 4$, $n = 5$, $A \in M_{4\times 5}(\mathbf{R})$, $\overline{A} \in M_{4\times 6}(\mathbf{R})$.

Nếu $m \neq -3$ thì $(R_A \mid B') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -5m-3 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (m+3)^* \end{array}\right)$ hay

E_1 E_2 E_3 F_4

$(S_A \mid B'') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3m-9)^* \end{array}\right)$ và $r(\overline{A}) = 4 = r(A) + 1$: hệ vô nghiệm.

F_1 F_2 F_3 F_4

Nếu $m = -3$ thì $(R_A \mid B') = R_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -18 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay

E_1 E_2 E_3

$(S_A \mid B'') = S_{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ và $r(\overline{A}) = r(A) = 3 < n = 5$:

F_1 F_2 F_3

hệ có vô số nghiệm với $(5 - 3) = 2$ ẩn tự do.

Câu 3. *Tìm hạng của ma trận A dưới đây (biện luận theo tham số thực m) :*

$$A = \begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thì hạng của ma trận không thay đổi. Từ A, ta hoán vị (dòng 1 với dòng 3) rồi hoán vị tiếp (cột 1 với cột 4), ta đưa hệ số $2m + 1$ về vị trí dòng 3 và cột 4 để dễ đưa ma trận về dạng bậc thang và biện luận nhằm tìm hạng.

$$\begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2m+1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -2 & 2m+3 \end{pmatrix}$$

$$\to S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8 \end{pmatrix}. \text{ Nếu } m = 4 \text{ thì } S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = r(B) = 2.$$

$F_1 \quad F_2 \qquad F_3$ (?) $\qquad\qquad F_1 \quad F_2$

$$\text{Nếu } m \neq 4 \text{ thì } S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8^* \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = r(B) = 3.$$

$F_1 \quad F_2 \qquad F_3$

CHƯƠNG 2:

Câu 1. Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^k, ∀k nguyên ≥ 0.

Thử $A^o = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^1 = A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ và $A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Dự đoán $A^k = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}$, ∀k ≥ 0. Ta chứng minh bằng qui nạp theo k ≥ 0.

Khi k = 0 thì $A^o = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^0\begin{pmatrix} 2.0+1 & -4.0 \\ 0 & 1-2.0 \end{pmatrix}$: mệnh đề đúng khi k = 0.

Xét k ≥ 0 và giả sử mệnh đề đúng với k. Khi đó

$$A^{k+1} = A^k.A = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^k\begin{pmatrix} -2k-3 & 4k+4 \\ -k-1 & 2k+1 \end{pmatrix}$$

$= -(-1)^k\begin{pmatrix} 2k+3 & -4k-4 \\ k+1 & -2k-1 \end{pmatrix} = (-1)^{k+1}\begin{pmatrix} 2(k+1)+1 & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{pmatrix}$: mệnh đề cũng đúng với (k + 1).

Kết luận : $A^k = (-1)^k\begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}$, ∀k ≥ 0.

Câu 2. *Các ma trận sau có khả nghịch không ? Tại sao ?*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ta chỉ cần tìm S_A và S_B để có kết luận về tính khả nghịch của A và B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A.$$

$$\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad F_1\ F_2$$

Ta thấy S_A có 2 dòng $\neq \mathbf{O}$ nên $r(A) = 2 < n = 3$ và do đó A không khả nghịch.

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & -1^* \end{pmatrix} = S_B.$$

$$\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad F_1\ F_2\ F_3$$

Ta thấy S_B có 3 cột bán chuẩn nên $r(B) = 3 = n$ và do đó B khả nghịch.

Câu 3. *Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để xét tính khả nghịch của các ma trận sau và tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của chúng (nếu có) :*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } L = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(H \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -6/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -2/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\qquad\qquad E_1 \qquad\qquad\qquad E_1\ E_2$$

$= (R_H \mid H')$. Ta thấy $R_H \neq I_3$ nên H không khả nghịch.

$$(K \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) = (R_K = I_3 \mid K^{-1}).$$

$$E_1\ E_2\ E_3$$

Ta thấy $R_K = I_3$ nên K khả nghịch và $K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $K.K^{-1} = I_3$.

$$(L \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & 4 & 3 \end{array}\right) = (R_L = I_2 \mid L^{-1}).$$

$$\qquad E_1 \qquad\qquad E_1\ E_2$$

Ta thấy $R_L = I_2$ nên L khả nghịch và $L^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $L.L^{-1} = I_2$.

Câu 4. *Tìm M khả nghịch có $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng*

.

$$(M^{-1} \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -7/4 & -1/4 & 10/4 \\ 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1/4 & 1/4 & 2/4 \end{array}\right) = (I_3 \mid (M^{-1})^{-1}) = (I_3 \mid M). \text{ Vậy } M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$E_1\ E_2\ E_3$

Thử lại, $M^{-1}.M = I_3$.

Câu 5. Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$, $C \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $D \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$. Khi đó

♦ Nếu A *khả nghịch* thì

* A^{-1} cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^{-1})^{-1} = A$.

* A^t cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

* cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

* A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng *khả nghịch* và ta có ngay $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

♦ AB *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A và B đều *khả nghịch*).

Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (thứ tự *bị đảo ngược*).

♦ AB *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A hay B *không khả nghịch*).

♦ $(A_1A_2 \ldots A_k)$ *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ ($A_1, A_2, \ldots, A_k$ *đều khả nghịch*).

Lúc đó $(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$ (*thứ tự bị đảo ngược*).

♦ $(A_1A_2 \ldots A_k)$ *không khả nghịch* $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_j *không khả nghịch*.

♦ $E = CD \in M_m(\mathbf{R})$ và $F = DC \in M_n(\mathbf{R})$. Hơn nữa $\forall k \geq 1$, $E^k = C.F^{k-1}.D$ và

$F^k = D.E^{k-1}.C$.

Câu 6. *Giải phương trình ma trận* (A *và* C *khả nghịch*, B *cho sẵn và* X *là ma trận ẩn*).

* $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (*nghiệm duy nhất*).

* $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*).

* $AXC = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$(*nghiệm duy nhất*).

Ví dụ:

a) *Giả sử* A, B, C và $D \in M_n(\mathbf{R})$ *đều khả nghịch*. Ta có

$$(A^4B^{-5}C^2B^3D^{-9}C^{-7}D^6A^{-8})^{-1} = (A^{-8})^{-1}(D^6)^{-1}(C^{-7})^{-1}(D^{-9})^{-1}(B^3)^{-1}(C^2)^{-1}(B^{-5})^{-1}(A^4)^{-1}$$

$$= A^8D^{-6}C^7D^9B^{-3}C^{-2}B^5A^{-4}.$$

Tìm X *và* Y *nếu* $A^{-5}D^9XB^6 = -7A^{-3}C^2B^4$ và $A^9C^8YB^{-4}C^{-2} = 2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}$.

Ta có $X = (A^{-5}D^9)^{-1}(-7A^{-3}C^2B^4)(B^6)^{-1} = -7D^{-9}A^5A^{-3}C^2B^4B^{-6} = -7D^{-9}A^2C^2B^{-2}$,

$Y = (A^9C^8)^{-1}(2A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2})(B^{-4}C^{-2})^{-1} = 2C^{-8}A^{-9}A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2}C^2B^4 = 2C^{-3}A^7B^3$.

b) *Tìm các ma trận* X, Y *và* Z *thỏa*

$$KX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \ YL = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } LZK = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$ [K *và* L *đã cho ở phần* c)].

Ta có $X = K^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 3 \\ 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -16 \end{pmatrix}$ và $Z = L^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}K^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 13 & 13 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 22 & 21 & 4 \\ 39 & 26 & 13 \end{pmatrix}.$$

c) (đọc thêm) *Tìm* H *thỏa* $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 .H^5.\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2$.

Nếu có H thì $H \in M_3(\mathbf{R})$. Ma trận đứng trước H không khả nghịch nên vế trái không khả nghịch trong khi vế phải lại khả nghịch : mâu thuẫn! Vậy phương trình vô nghiệm.

d) (đọc thêm) *Giải phương trình ma trận tổng quát:* $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X + X^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -11 & -8 \end{pmatrix}$ (*)

Ta có $X \in M_2(\mathbf{R})$ nên đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ và thay vào (*) rồi rút gọn để có hệ phương trình

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)\end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 8 & -7 & -12 & -39 \\ 0 & 10 & -9 & -15 & -47 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right)\end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -7 & 0 & -23 \\ 0 & 1^* & 6 & -27 & -35 \\ 0 & 0 & -23 & 85 & 101 \\ 0 & 0 & -24 & 102 & 132 \end{array}\right)\end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -119 & -240 \\ 0 & 1^* & 0 & 75 & 151 \\ 0 & 0 & 1^* & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -306 & -612 \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \; E_3 \end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 2 \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \; E_3 \; E_4 \end{array} : \text{nghiệm duy nhất } X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) A *là một ma trận vuông có dạng tam giác* (đặc biệt là *dạng đường chéo*). *Khi đó*

A *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ *Mọi hệ số trên đường chéo của* A *đều* $\neq 0$.

A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ *Có ít nhất một hệ số* $= 0$ *trên đường chéo của* A.

CHƯƠNG 3:

Câu 1. *Tính* $|D| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5a & 8 \\ -3b & 2b & 4ab & -6b \\ 2 & -5 & -7a & 5 \\ 4(b-a) & 3(a-b) & 5a(a-b) & 6(b-a) \end{vmatrix}$ *và xét tính khả nghịch của* D.

Ta có $|D| = ab(a-b)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} 1^* & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -9 & -11 & -1 \\ -7 & -9 & 4 \end{vmatrix}$

$= ab(a-b)\begin{vmatrix} 0 & -1^* & 0 \\ 2 & -11 & -23 \\ 2 & -9 & -14 \end{vmatrix} = ab(a-b)\begin{vmatrix} 2 & -23 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = 18ab(a-b).$

D khả nghịch $\Leftrightarrow |D| = 18ab(a-b) \neq 0 \Leftrightarrow (a \neq 0 \neq b \neq a)$.

D không khả nghịch $\Leftrightarrow$ $|D| = 18ab(a-b) = 0$ $\Leftrightarrow$ ($a = 0$ hay $b = 0$ hay $a = b$).

Câu 2.

a) *Dùng phương pháp định thức để kiểm tra tính khả nghịch rồi tìm ma trận nghịch đảo của*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ (nếu có).}$$

B không khả nghịch vì $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-30 + 8 + 21) - (12 + 15 - 28) = -1 + 1 = 0.$

A khả nghịch vì $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 24 + 60) - (6 + 16 + 60) = 32 - 82 = -50 \neq 0.$

Tính $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$ $(1 \leq i, j \leq 3)$: $C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10,$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14,$ $\quad C_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9,$ $\quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ $\quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10,$

$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10,$ $\quad C_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30,$ $\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 22$ và $C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -32.$

Lập $C = (C_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 9 \\ 0 & 10 & -10 \\ 30 & 22 & -32 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 10 & 0 & -30 \\ 14 & -10 & -22 \\ -9 & 10 & 32 \end{pmatrix}.$

b) *Suy ra* $|E|$ *với* $E = 4A^{-9}.(A^t)^{10}A^7(A^{-4})^t$ *với* t *là ký hiệu của phép chuyển vị ma trận.*

Ta có $|E| = 4^3|A^{-9}|.|(A^t)^{10}|.|A^7|.|(A^{-4})^t| = 4^3|A|^{-9}.|A^t|^{10}.|A|^7.|A^{-4}|$

$= 4^3|A|^{-9}.|A|^{10}.|A|^7.|A|^{-4} = 4^3|A|^4 = 64(-50)^4 = 400.000.000.$

Câu 3. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$ *với m là tham số thực.*

a) *Viết ma trận phụ hợp* $\text{adj}(A) = C^t$ *của* A. *Khi nào* A *khả nghịch ?*

b) *Khi* $m = 1$, *hãy viết* A^{-1}.

Tính $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i, j)| (1 \le i, j \le 3)$:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -7 & m+5 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = -2m^2 - 10m - 7,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & m+5 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m - 3,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -m & 2m \end{vmatrix} = -m,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 4m + 3, \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 2m + 1, \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -m & 2m \end{vmatrix} = m,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & m+5 \end{vmatrix} = -3m - 1, \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m+5 \end{vmatrix} = 1 - m \quad \text{và} \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2.$$

$$C = (C_{ij})_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} -2m^2-10m-7 & -m^2-5m-3 & -m \\ 4m+3 & 2m+1 & m \\ -3m-1 & 1-m & 2 \end{pmatrix} \text{ thì } C^t = \begin{pmatrix} -2m^2-10m-7 & 4m+3 & -3m-1 \\ -m^2-5m-3 & 2m+1 & 1-m \\ -m & m & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 3 & 2 & m-1 \\ -m & -m & 2m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ -m & 2m+1 \end{vmatrix} = m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2).$$

A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = (m+1)(m+2) \ne 0 \Leftrightarrow -2 \ne m \ne -1$.

b) Khi $m = 1$ thì $|A| = (1+1)(1+2) = 6 \ne 0$ nên A khả nghịch.

Lúc đó từ a), thế $m = 1$ để có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} C^t = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -19 & 7 & -4 \\ -9 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 4. *Giải và biện luận hệ sau bằng qui tắc Cramer (các ẩn lần lượt là* x_1, x_2 *và* x_3*):*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 \\ m+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ thì hệ trên viết gọn là $AX = B$. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+6 \\ m-1 & 6 \end{vmatrix} = -\,m^2 - 5m = -\,m(m+5).$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ m+1 & 1 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1^* & 0 \\ m+2 & 1 & m+3 \\ m+2 & m & 3m+3 \end{vmatrix} = -\,(m+2)\begin{vmatrix} 1 & m+3 \\ 1 & 3m+3 \end{vmatrix} = -\,2m(m+2).$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & m+1 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -1 & -3 \\ 0 & m+3 & m+6 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & m+6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3m.$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m+3 \\ 0 & m-1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+3 \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} = -\,m^2 - 2m = -\,m(m+2).$$

* Nếu $-5 \neq m \neq 0$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m+2)}{m+5}\ ,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{m+5} \text{ và } x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m+2}{m+5}.$$

* Nếu $m = -5$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_1 = -30$ nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $m = 0$ thì $\Delta = 0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, ta thế $m = 0$ vào hệ và giải (PP Gauss – Jordan):

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ E_1\ E_2 \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = 2 - 3a$ và $x_2 = 6a - 3$.

Câu 5. (***Các câu hỏi dạng khác với các mức độ khác nhau của* Câu 4**):

Cho hệ phương trình tuyến tính với tham số thực m *(các ẩn lần lượt là* x_1, x_2 và x_3) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right).$$

a) *Giải hệ khi* $m = -4$.

b) *Khi nào hệ có nghiệm duy nhất ?*

c) *Khi nào hệ có nghiệm duy nhất và tính nghiệm duy nhất lúc đó ?*

d) *Khi nào hệ vô nghiệm ?*

e) *Khi nào hệ có vô số nghiệm ?*

f) *Khi nào hệ có vô số nghiệm và tìm các nghiệm của hệ lúc đó ?*

a) Khi $m = -4$, ta có hệ là

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \to \underset{E_1}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 3 \end{array}\right)} \to \underset{E_1\ E_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1^* & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right)} \to \underset{E_1\ E_2\ E_3}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1^* & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right) \end{array}}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = -4$, $x_2 = -3$ và $x_3 = -2$.

Trong các phần dưới đây, các kết quả tính toán được tính từ trong **Câu 4**.

b) Ta có $\Delta = |A| = -m(m+5)$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq m \neq -5$.

c) Ta có $\Delta = |A| = -m(m+5)$, $\Delta_1 = |A_1| = -2m(m+2)$, $\Delta_2 = |A_2| = 3m$ và

$\Delta_3 = |A_3| = -m(m+2)$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq m \neq -5$. Nghiệm duy nhất lúc đó là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m+2)}{m+5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{m+5} \quad \text{và} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m+2}{m+5}.$$

d) Khi hệ vô nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$: hệ có vô số nghiệm (loại bỏ).

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$: hệ vô nghiệm (nhận).

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -5$.

e) Khi hệ có vô số nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$: hệ có vô số nghiệm (nhận).

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$: hệ vô nghiệm (loại bỏ).

Vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $m = 0$.

f) Khi hệ có vô số nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \\ E_1 \qquad\qquad\qquad \end{array} \to \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ E_1 \ E_2 \qquad\qquad \end{array}$$: hệ có vô số nghiệm (nhận).

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$: hệ vô nghiệm (loại bỏ).

Vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $m = 0$.

Lúc đó hệ có vô số nghiệm như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = 2 - 3a$ và $x_2 = 6a - 3$.
