ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 1

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Bài 1.15 Cho $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ bằng quy nạp toán học chứng minh rằng:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}; \qquad (*)$$

✍ **Lời giải**

- Chứng minh dựa trên phương pháp quy nạp.
- Với $n = 1$ ta có (*) hiển nhiên đúng.
- Giả sử (*) đúng với $n = k$ ta có:

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

- Ta sẽ chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$ tức là:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\sin((k+1)\theta) \\ \sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$$

Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(k\theta)\cdot\cos(\theta) - \sin(k\theta)\cdot\sin(\theta) & -\cos(k\theta)\cdot\sin(\theta) - \sin(k\theta)\cdot\cos(\theta) \\ \sin(k\theta)\cdot\cos(\theta) + \cos(k\theta)\cdot\sin(\theta) & -\sin(k\theta)\cdot\sin(\theta) + \cos(k\theta)\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\sin((k+1)\theta) \\ \sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quy nạp hoàn tất, từ đây ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 1.19 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

c) Giả sử $ABA = BAB = A^4B^7 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

✍ Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} A^{20} = A^9.A^{11} \\ A^9 = A^{20} = I_n \end{cases} \Rightarrow I_n = I_n.A^{11} \Rightarrow I_n = A^{11}$

$$\begin{cases} A^{11} = I_n \\ A^9 = I_n \\ A^{11} = A^2.A^9 \end{cases} \Rightarrow I_n = A^2.I_n \Rightarrow I_n = A^2$$

$$\begin{cases} A^2 = I_n \Rightarrow (A^2)^4 = I_n \\ A^9 = I_n \\ A^9 = (A^2)^4.A \end{cases} \Rightarrow I_n = I_n.A \Rightarrow A = I_n \text{ (dpcm)}$$

b) Ta có $\begin{cases} I_n = A^3.B^7 = A.A^2.B^3.B^4 \\ I_n = A^2.B^3 \end{cases} \Rightarrow I_n = A.I_n.B^4 = A.B^4$

$$\begin{cases} I_n = A.B^4 \\ I_n = A^8.B^4 = A^7.A.B^4 \end{cases} \Rightarrow I_n = A^7.I_n = A^7$$

$$\begin{cases} I_n = A^8.B^4 = A^6.(A^2.B^3).B \\ I_n = A^2.B^3 \end{cases} \Rightarrow I_n = A^6.I_n.B = A^6.B$$

Như vậy ta có $\begin{cases} I_n = A.B^4 (1) \\ I_n = A^7 (2) \\ I_n = A^6.B (3) \end{cases}$

Xét:

$$A^7.B = A.A^6.B$$
$$(2)(3) \Rightarrow B = A.I_n = A (4)$$

Thay vào (1) ta được: $I_n = A^5$

Có $\begin{cases} (2) : I_n = A^7 = A^5.A^2 \\ A^5 = I_n \end{cases} \Rightarrow I_n = A^2$

$$\begin{cases} (2): I_n = A^7 = (A^2)^3.A \\ A^2 = I_n \Rightarrow (A^2)^3 = I_n \end{cases} \Rightarrow I_n = A$$

Vậy $A = B = I_n$ (đpcm)

c) Ta có $\begin{cases} A.B.A = I_n \\ B.A.B = I_n \end{cases} \Rightarrow ABA.BAB = I_n.I_n = I_n$

Có $\begin{cases} I_n = ABA.BAB = A.(BAB).A.B = A.I_n.A.B = A^2.B(1) \\ I_n = ABA.BAB = AB.(ABA)B = AB.I_n.B = A.B^2(2) \end{cases}$

Xét $I_n = A^4.B^7$ (3)

Áp dụng (1) liên tiếp vào (3), ta được:

$$\begin{aligned} I_n &= A^4.B^7 = A^2.(A^2.B).B^7 = A^2.I_n.B^7 \\ &= A^2.B.B^6 = I_n.B^6 = B^6 \end{aligned}$$

Áp dụng (1) và (2) vào (3), ta được:

$$\begin{aligned} I_n &= A^4.B^7 = A.A^2.(A.B^2).B.B^4 = A.(A^2.B).B^4 \\ &= A.B^4 \end{aligned}$$

(2)$\Rightarrow I_n = A.B^4 = (A.B^2).B^2 = I_n.B^2 = B^2$

Có $\begin{cases} I_n = B^2 \\ I_n = A.B^2(2) \end{cases} \Rightarrow A.I_n = A = I_n$

Có $\begin{cases} A = I_n \Rightarrow A^2 = I_n^2 = I_n \\ (1): I_n = A^2.B \end{cases} \Rightarrow I_n.B = B = I_n$

Vậy $A = B = I_n$ (đpcm).

□

Bài 1.23 Một ma trận $P \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *lũy linh* nếu nó tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $P^k = 0_n$.
Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu A lũy linh và A, B giao hoán nhau thì AB lũy linh.

b) Nếu A, B lũy linh và A, B giao hoán nhau thì $uA + vB$ lũy linh $\forall A, B \in \mathbb{R}$.

✍ Lời giải

a) Theo đề bài, ta giả sử: $\exists k \in \mathbb{N}$ sao cho $A^k = 0_n$.
- Lại có A và B giao hoán nhau nên: $AB = BA$ (*)
Từ (*) ta nhân 2 vế với AB:

$$\begin{aligned} & (AB)^2 = BA(AB) \\ \Leftrightarrow \quad & (AB)^2 = BA^2B \end{aligned}$$

- Tương tự, ta cũng lần lượt có các giá trị lũy thừa của AB đến bậc $n \in \mathbb{N}$: (tận dụng tính giao hoán)

$$\begin{aligned} (AB)^3 &= (BA^2B)AB = BA^2AB^2 = BA^3B^2 \\ (AB)^4 &= BA^4B^3 \\ &\;\;\ldots.. \\ (AB)^n &= BA^nB^{n-1} \end{aligned}$$

- Thay n = k, ta được: $(AB)^k = BA^kB^{k-1} = 0_n$
Vậy AB lũy linh (đpcm).

b) Do A, B lũy linh nên ta giả sử $\exists p, q \in \mathbb{N}$ và $p \leq q$ sao cho : $A^p = 0_n$ và $B^q = 0_n$.
- Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} A^q = 0_n, \quad B^q = 0, \\ AB = BA \quad \text{(do A, B giao hoán với nhau)} \end{cases}$$

- Mặt khác, ta xét biểu thức:

$$(uA + vB)^{2q} \quad = \quad \sum_{i=0}^{2q} C_i (uA)^i (vB)^{2q-i}$$

- Nhận thấy, $\forall i \geq q$ thì $(uA)^i = 0_n$ hoặc $\forall i < q$ thì $(2q - i) > q$ nên $(vB)^{2q-i} = 0_n$.
$\Rightarrow$ Từ đó ta rút ra được:

$$C_i(uA)^i(vB)^{2q-i} = 0_n, \quad \forall i \in [0, 2q]$$

Như vậy, $(uA + vB)^{2q} = 0_n$ hay $(uA + vB)$ lũy linh (đpcm).

$\square$

Bài 1.27 Tìm dạng bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Áp dụng phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dạng bậc thang rút gọn của ma trận: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Áp dụng phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}d_3]{\frac{1}{2}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 - 2d_2 \\ d_2 - 3d_3 \\ d_1 + 2d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dạng bậc thang rút gọn của ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Áp dụng phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{d_2-2d_1 \\ d_3-d_1 \\ d_4+2d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{d_3-2d_2 \\ d_3-d_4 \\ d3\leftrightarrow d_4 \\ (-1)d_2 \\ \frac{1}{4}d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{d_2+2d_3 \\ d_1+2d_3 \\ d_1-3d_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dạng bậc thang rút gọn của ma trận là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Áp dụng phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1 \\ d_4-2d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{\frac{1}{2}d_2 \\ \frac{1}{3}d_4 \\ d_2\leftrightarrow d_4 \\ d_3+d_2 \\ d_4-d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_1+3d_3 \\ (-1)d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dạng bậc thang rút gọn của ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

Bài 1.31 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng nếu AB khả nghịch thì A và B khả nghịch.

✍ **Lời giải**

Nếu AB khả nghịch thì tồn tại ma trận C sao cho $(AB)C = C(AB) = I_n$.

- Khi đó $A(BC) = (AB)C = I_n$ nên ma trận A khả nghịch, hay BC là ma trận nghịch đảo của A.
- Tương tự, $(CA)B = C(AB) = I_n$ nên ma trận B khả nghịch, hay CA là ma trận nghịch đảo của B.

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 1.35 Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Chứng minh A và B khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $AXB = C$.

✍ **Lời giải**

a) $(A|I_n) = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_1 - d_2]{3d_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{d_2 - 5d_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -15 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{3}d_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right]$

$$(B|I_n) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3+d_2]{d_1-d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2+2d_3]{d_1-2d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vậy A, B khả nghịch và $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ và $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Ta có A, B khả nghịch và $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ và $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Phương trình dạng $AXB = C$, do đó

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 9 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -19 & -11 \\ 1 & -34 & -20 \end{bmatrix}$$

Vậy $X = \begin{bmatrix} 0 & -19 & -11 \\ 1 & -34 & -20 \end{bmatrix}$

□

Bài 1.39 Chứng minh rằng, nếu f là một đa thức trên $\mathbb{R}$ và $B \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận khả nghịch thì

$$f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$$

✍ Lời giải

Ta chứng minh quy nạp theo n khẳng định: "$\forall n \in \mathbb{N} : a(B^{-1}AB)^n = aB^{-1}A^nB$".

- Với $n = 1$, dễ thấy khẳng định đúng.
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \in \mathbb{N}$, ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$
\begin{aligned}
a(B^{-1}AB)^{k+1} &= a(B^{-1}AB)^k B^{-1}AB \\
&= aB^{-1}A^k BB^{-1}AB \quad \text{(do khẳng định đúng với } n = k\text{)} \\
&= aB^{-1}A^k I_n AB \\
&= aB^{-1}A^k AB \\
&= aB^{-1}A^{k+1}B
\end{aligned}
$$

  Suy ra khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Giả sử $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ với $m \geq 0$ nào đó. Khi đó,

$$
\begin{aligned}
f(B^{-1}AB) &= \sum_{i=0}^{m} a_i (B^{-1}AB)^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i B^{-1} A^i B \quad \text{(kết quả của khẳng định trên)} \\
&= B^{-1} \left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i \right) B \\
&= B^{-1} f(A) B \quad \text{(đpcm)}
\end{aligned}
$$

Kết thúc bài toán. □