ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 9

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

1 Bài 4.21

Bài 4.21 Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.
a) Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f.
b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

✍ **Lời giải**

a) Do f là ánh xạ tuyến tính nên ta áp dụng các tính chất của ánh xạ tuyến tính để giải quyết:

- Ta có:

$$
\begin{aligned}
+\quad & f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = u_2 - u_1 \\
\Leftrightarrow & f(0,1,0) = (0,-1,0) \\
+\quad & f(u_1 - u_3) = f(u_1) - f(u_3) = u_3 - u_1 \\
\Leftrightarrow & f(1,0,0) = (-1,0,0) \\
+\quad & f(u_2 - u_3) = f(u_2) - f(u_3) = u_3 - u_2 \\
\Leftrightarrow & f(1,-1,0) = (-1,1,0)
\end{aligned}
$$

Ta nhận thấy phần tử thứ nhất của f(x, y, z) không tồn tại giá trị y và phần tử thứ 2 của f(x, y, z) không tồn tại giá trị x $\Leftrightarrow f(x,y,z) = (-x + c_1 z, -y + c_2 z, ax + by + cz)$
- Lại có: $f(u_2 + u_3) = f(1,1,2) = (3,3,4)$
Giải ra ta được: $f(x,y,z) = (-x + 2z, -y + 2z, ax + by + cz)$

- Tiếp tục từ các phương trình của đề bài, ta có được hệ phương trình sau:

$$
\begin{cases}
a + c & = 2 \\
b + c & = 2 \\
a + b + c & = 2
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a & = 0 \\
b & = 0 \\
c & = 2
\end{cases}
$$

Từ nghiệm của hệ phương trình trên ta có được kết quả cần tìm:

$$f(x,y,z) = (-x + 2z, -y + 2z, 2z)$$

Vậy ánh xạ tuyến tính f cần tìm:

$$f(x,y,z) = (-x + 2z, -y + 2z, 2z);$$

b) Theo đề bài, ta có:

$$
\begin{aligned}
f(1,1,1) &= (1,1,2) \\
f(1,0,1) &= (1,2,2) \\
f(0,1,1) &= (2,1,2)
\end{aligned}
$$

- Ma trận biểu diễn f theo cơ sở B:

$$[u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T | f(u_1)^T \quad f(u_2)^T \quad f(u_3)^T] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_1-d_2]{-d_2+d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I_3|P]$$

Vậy ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$ cần tìm là:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

2 Bài 4.22

Bài 4.22 Cho $\mathcal{B} = \{(1,-1),(-2,3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

✍ **Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 19 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Do đó $f(x,y) = (-11x - 6y, 19x + 11y)$. □

3 Bài 4.23

Bài 4.23 Cho $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Xác định $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải

Đặt $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,-1)$

Có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^T, u_2^T, u_3^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Suy ra $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ta có:

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}).[f]_{\mathcal{B}}.(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $f(x,y,z) = (2x, 2x - y + z, 2x - 3y + 2z)$. □

4 Bài 4.24

Bài 4.24 Cho cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(2,-1),(-3,2)\}$ (của $\mathbb{R}^2$). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải

Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

và

$$(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -17 & 22 & -10 \\ 11 & -14 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra $f(x,y,z) = (-17x + 22y - 10z, 11x - 14y + 7z),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. □

5 Bài 4.25

Bài 4.25 Cho V là một không gian trên trường $\mathbb{R}$. Giả sử f là một toán tử tuyến tính trong V thỏa $Imf = Kerf$. Chứng minh rằng n là một số chẵn. Hãy cho một ví dụ minh họa.

✍ **Lời giải**
Ta có định lý sau:

$$dim(Imf) + dim(Kerf) = dimV$$

Khi đó vì $Imf = Kerf$ nên ta đặt: $dim(Imf) = dim(Kerf) = a$. Khi đó:

$$2a = dimV = n$$

Vậy n là số chẵn.
Xét với $n = 2$, ta có $dim(Imf) = dim(Kerf) = 1$. Khi đó chọn:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(2,1)\} \text{ là cơ sở của } Imf \\ \mathcal{B}' &= \{(3,1)\} \text{ là cơ sở của } Kerf \end{aligned}$$

Khi đó dễ chọn được:

$$f(x,y) = (2x - 6y, x - 3y)$$

□

6 Bài 4.26

Bài 4.26 Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ và f là một toán tử tuyến tính trong V. Chứng minh rằng các điều kiện dưới đây tương đương:
a) Kerf $\cap$ Imf $= 0$.
b) Nếu $f^2(u) = 0$ thì $f(u) = 0$, với $u \in V$.

Lời giải

- Ta chứng minh theo chiều thuận ($(a) \Rightarrow (b)$):

- Giả sử ta có v là vector thuộc không gian Imf và $v = f(u)$ (với $u \in V$)
Lại có: $f^2(u) = f(f(u)) = 0$
$\Rightarrow f(u)$ thuộc không gian Kerf hay v thuộc không gian Kerf
- Theo giả thiết ở ý $a)$ có: Kerf $\cap$ Imf $= 0$ nên ta suy ra được:

$$v = f(u) = 0 \quad \text{(đpcm)}$$

- Ta chứng minh theo chiều nghịch ($b) \Rightarrow a)$):

- Đặt: v = Kerf $\cap$ Imf
Do v là phần giao của Kerf và Imf nên tồn tại $u \in V$ thỏa:

$$v = f(u)$$
$$f(v) = 0$$

Ta biến đổi từ trên được:

$$f(v) = f(f(u)) = f^2(u) = 0$$

- Tức là ta được: $f(u) = 0$ hay $v = 0$
Suy ra:

$$\text{Kerf} \cap \text{Imf} = 0 \quad \text{(đpcm)}$$

Vậy 2 điều kiện đề cho là tương đương nhau ☐

7 Bài 4.27

Bài 4.27 Cho f là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ với

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

a) Xét xem f có khả nghịch không? Nếu f khả nghịch hãy tìm f^{-1}.

b) Chứng minh rằng $(f^2 - Id)(f - 2Id) = 0$.

Lời giải

a) Ta có $A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vì $det(A) = -2$ nên f khả nghịch.

Mặt khác, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Nên $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}x + y, x + y - z\right)$.

b) Ma trận biểu diễn $(f^2 - Id)(f - 2Id)$ là

$$(A^2 - I_3)(A - 2I_3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Suy ra $(f^2 - Id)(f - 2Id) = 0$.

□

8 Bài 4.28

Bài 4.28 Cho những ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Chứng minh $g \circ f$ không khả nghịch.

✍ **Lời giải**

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$ ta có $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Ta có $[f]_{\mathcal{B}_0} = ([f(e_1)]_{\mathcal{B}_0} \quad [f(e_2)]_{\mathcal{B}_0} \quad [f(e_3)]_{\mathcal{B}_0})$

Và tương tự ta có:

$[g]_{\mathcal{B}_0} = ([g(e_1)]_{\mathcal{B}_0} \quad [g(e_2)]_{\mathcal{B}_0})$. Ta cần chứng minh $[g]_{\mathcal{B}_0}.[f]_{\mathcal{B}_0} = [g \circ f]_{\mathcal{B}_0}$

Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} [g]_{\mathcal{B}_0}.[f]_{\mathcal{B}_0} &= [g]_{\mathcal{B}_0}.([f(e_1)]_{\mathcal{B}_0} \quad [f(e_2)]_{\mathcal{B}_0} \quad [f(e_3)]_{\mathcal{B}_0}) \\ &= ([g.f(e_1)]_{\mathcal{B}_0} \quad [g.f(e_2)]_{\mathcal{B}_0} \quad [g.f(e_3)]_{\mathcal{B}_0}) \\ &= [g \circ f]_{\mathcal{B}_0} \end{aligned}$$

Ta có $r([f]_{\mathcal{B}_0}) \leq dim(\mathbb{R}^2)$ và $r([g]_{\mathcal{B}_0}) \leq dim(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow$r([g $\circ f]_{\mathcal{B}_0}) = r([g]_{\mathcal{B}_0}.[f]_{\mathcal{B}_0}) \leq min(r([g]_{\mathcal{B}_0}), r([f]_{\mathcal{B}_0}))$

Do đó $r([g \circ f]_{\mathcal{B}0}) \leq 2$. Vậy $g \circ f$ không khả nghịch □

9 Bài 4.29

Bài 4.29 Tìm hai toán tử tuyến tính g, f trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $g \circ f = \mathbf{0}$ nhưng $f \circ g \neq \mathbf{0}$.

Lời giải
Chọn

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (0,x) \\ g(x,y) &= (x,0) \end{aligned}$$

Thì $g(f(x,y)) = (0,0) = \mathbf{0}$ nên $g \circ f = \mathbf{0}$ nhưng $f(g(x,y)) = (0,x)$ nên $f \circ g \neq \mathbf{0}$. □

10 Bài 4.30

Bài 4.30 Cho f là toán tử tuyến tính tính trong không gian vector bất kỳ và giả sử $f^2 = 0$. Hãy tìm liên hệ giữa $Kerf$ và Imf.

Lời giải
Theo giải thuyết ta có: $f(f(u)) = 0 \quad \forall u \in V$.
Khi đó theo định nghĩa $Kerf$, dễ thấy $f(u) \in Kerf$.
Vẫn theo định nghĩa Imf, ta lại có $f(u) \in Imf$
Khi đó, hai không gian vector $Kerf$ và Imf trùng nhau. Hơn thế nữa theo câu 4.25 ta có để điều kiện này xảy ra thì $dim(V)$ chẵn. □

11 Bài 4.31

Bài 4.31 Cho V là một không gian vector hai chiều trên trường $\mathbb{R}$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở được sắp của V. Chứng minh rằng nếu f là một toán tử tuyến tính trong V và $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}$ thì

$$f^2 - (a+d)f + (ad - bc)Id = 0$$

Lời giải
Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

Suy ra ma trận biểu diễn của $f^2 - (a+d)f$ là

$$A^2 - (a+d)A = \begin{bmatrix} bc - da & 0 \\ 0 & cb - da \end{bmatrix} = -(ad - bc)I_2$$

Từ đây ta được điều cần phải chứng minh:

$$f^2 - (a+d)f + (ad - bc)Id = 0$$

□

12 Bài 4.32

Bài 4.32 Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vector $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)\}.$$

c) Tìm tất cả $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho toán tử tuyến tính $(f - \alpha Id)$ khả nghịch.

Lời giải

a) $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b)

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) Ma trận biểu diễn $(f - \alpha Id)$ là

$$[f]_{\mathcal{B}0} - \alpha I_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ 2 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Ta có: $det([f]_{\mathcal{B}0} - \alpha I_2) = \alpha^2 + 2 > 0, \forall \alpha$ nên $[f]_{\mathcal{B}0} - \alpha I_2$ khả nghịch. Do đó $(f - \alpha I)$ luôn khả nghịch với mọi α.

□

13 Bài 4.33

Bài 4.31 Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1)$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)\}$$

c) Chứng minh f khả nghịch và tìm f^{-1}.

Lời giải

a) $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.[f]_{\mathcal{B}_0}.(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 9 \\ -11 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c)

Xét $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Có $r([f]_{\mathcal{B}_0}) = 3 = dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow f$ khả nghịch

Và nghịch đảo của $[f]_{\mathcal{B}0}$ $([f]_{\mathcal{B}_0})^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 4/9 & 2/9 & -1/9 \\ 8/9 & 13/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

Vậy $f^{-1} = \left(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \frac{4}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \frac{1}{9}x_3, \frac{8}{9}x_1 + \frac{13}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3\right)$ □