

## CHƯƠNG 3 ĐỒ THỊ DẠNG PHẪNG

Bùi Tiến Lên

Đại học Khoa học Tự nhiên

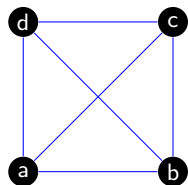
01/01/2017



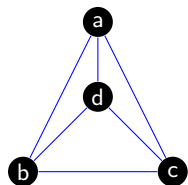
### Đồ thị phẳng

#### Định nghĩa 3.1

Một đồ thị vô hướng được gọi là **đồ thị phẳng** (**planar graph**) nếu tồn tại một cách vẽ đồ thị trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của nó **cắt** (**cross**) nhau



(a) Cách vẽ không phẳng



(b) Cách vẽ phẳng

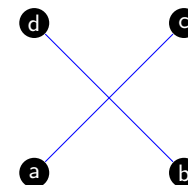
Hình 3.1: Hai cách vẽ cho đồ thị  $K_4$

## NỘI DUNG

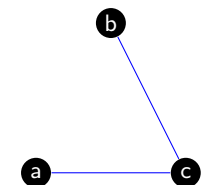
### Đồ thị phẳng (cont.)

Quy ước về **cắt** nhau

- ▶ Hai cạnh có đỉnh chung thì không được xem là cắt nhau
- ▶ Mỗi cách vẽ đồ thị trên mặt phẳng sao cho không có cạnh cắt nhau được gọi là **biểu diễn phẳng** (**planar representation**) của đồ thị



(a) hai cạnh cắt nhau



(b) hai cạnh không cắt nhau

Hình 3.2: Các cạnh cắt và không cắt

## Đồ thị phẳng (cont.)

### Định nghĩa 3.2

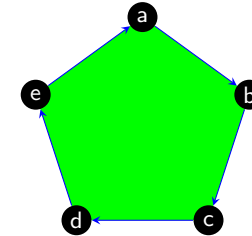
Một đồ thị phẳng và biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ tạo ra các **miền** (region). Có hai loại miền: hữu hạn và vô hạn

- ▶ **Miền hữu hạn** là phần mặt phẳng được giới hạn bởi một chu trình sơ cấp mà không chứa bên trong nó một chu trình sơ cấp khác
- ▶ **Miền vô hạn** là phần mặt phẳng nằm bên ngoài tất cả các miền hữu hạn
- ▶ Chu trình sơ cấp bao quanh một miền được gọi là **đường biên**
- ▶ Chu trình sơ cấp tiếp giáp với miền vô hạn được gọi là **đường biên ngoài**

## Đồ thị phẳng (cont.)

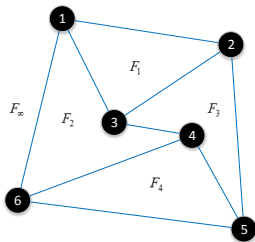
### Quy ước

Các đỉnh của một đường biên được viết theo thứ tự sao cho khi đi dọc theo đường biên theo thứ tự đó thì miền bao quanh ở phía bên tay phải



Hình 3.3: Các đỉnh của đường biên được viết theo quy ước là a b c d e

## Đồ thị phẳng (cont.)



(a) đồ thị có 5 miền

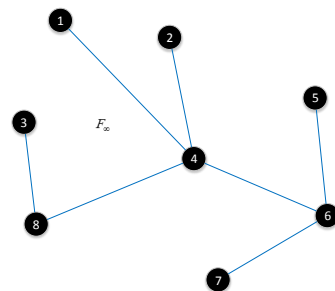
$$F_{\infty} = \{6, 5, 2, 1\}$$

$$F_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$F_2 = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$F_3 = \{2, 5, 4, 3\}$$

$$F_4 = \{4, 5, 6\}$$



(b) đồ thị có 1 miền

$$F_{\infty}$$

Hình 3.4: Các miền của các đồ thị

## Đồ thị phẳng (cont.)

### Tính chất 3.1

Một đồ thị phẳng  $G$

- ▶ Là một đồ thị thưa
- ▶ Là đồ thị 4 màu

Đồ thị phẳng có rất nhiều ứng dụng trong xây dựng, thiết kế mạch VLSI...

## Phép biến đổi đồng phôi

### Định nghĩa 3.3

Phép **biến đổi đồng phôi** (**homeomorphism**) bao gồm

- ▶ Tách một cạnh thành hai cạnh (thêm đỉnh)
- ▶ Gộp hai cạnh có chung một đỉnh bậc 2 thành một cạnh hay (bỏ đỉnh)

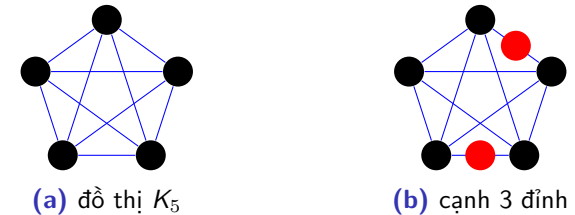


Hình 3.5: Biến đổi đồng phôi trên cạnh

## Phép biến đổi đồng phôi (cont.)

### Định nghĩa 3.4

Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu tồn tại một chuỗi các biến đổi đồng phôi biến đồ thị này thành đồ thị kia

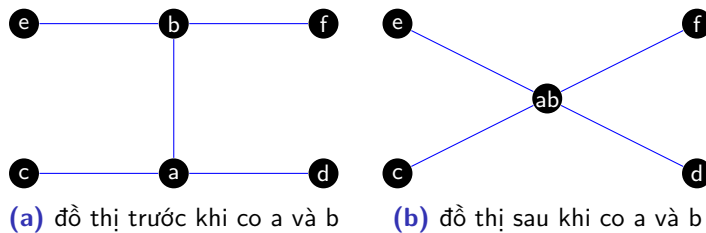


Hình 3.6: Đồ thị  $K_5$  và đồ thị đồng phôi của nó

## Phép biến đổi co

### Định nghĩa 3.5

Phép **biến đổi co** (**shrink**) là phép biến đổi gộp đỉnh ("xóa cạnh")



Hình 3.7: Phép biến đổi co

## Một số nhận xét về tính phẳng của đồ thị

### Nhận xét

Tính chất phẳng hay không phẳng của một đồ thị không ảnh hưởng bởi

- ▶ Cạnh khuyên  $\implies$  bỏ cạnh khuyên
- ▶ Các cạnh song song  $\implies$  bỏ các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh)
- ▶ Các phép biến đổi đồng phôi

## Định lý Euler

### Bổ đề 3.1

Cây có  $n$  đỉnh là một đồ thị phẳng có số cạnh  $e = n - 1$  và số miền  $f = 1$

### Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

## Định lý Euler (cont.)

### Định lý 3.1 (công thức về số cạnh, số miền và số đỉnh của một đồ thị phẳng)

Cho một đồ thị phẳng, liên thông gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh và  $f$  miền thì ta có công thức sau:

$$f = e - n + 2 \quad (3.1)$$

### Chứng minh

Cho  $G$  là một đồ thị liên thông phẳng có  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh và  $f$  miền

- ▶ Nếu  $G$  có chu trình thì bỏ đi một cạnh của chu trình
- ▶ Khi đó số cạnh  $e$  giảm đi một, và số miền  $f$  bớt đi một, nhưng số đỉnh giữ nguyên
- ▶ Tiếp tục quá trình bỏ cạnh cho đến khi không thực hiện được nữa thì đồ thị còn cuối cùng là một cây

## Định lý Euler (cont.)

- ▶ Đồ thị dạng cây luôn thỏa công thức Euler
- ▶ Vậy đồ thị ban đầu phải thỏa công thức Euler

■

## Định lý Euler (cont.)

### Bổ đề 3.2

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh ( $e \geq 3$ ) và  $f$  miền thì ta có bất đẳng thức sau

$$e \geq \frac{3}{2}f \quad (3.2)$$

### Chứng minh

Xét một đồ thị phẳng, đơn, liên thông  $G$  thì (**Lưu ý về suy luận cho miền vô hạn**)

- ▶ Mỗi miền được bao bởi ít nhất 3 cạnh
- ▶ Mỗi cạnh kề nhiều nhất là 2 miền
- ▶ Do đó

$$2e \geq 3f \Rightarrow e \geq \frac{3}{2}f$$

■

## Định lý Euler (cont.)

### Hệ quả 3.1

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh ( $e \geq 3$ ) và  $f$  miền thì ta có bất đẳng thức sau

$$e \leq 3n - 6 \quad (3.3)$$

### Chứng minh

- ▶ Theo định lý Euler ta có

$$f = e - n + 2$$

- ▶ Theo bổ đề trước ta có

$$\frac{2}{3}e \geq f$$

## Định lý Euler (cont.)

- ▶ Do đó

$$\frac{2}{3}e \geq e - n + 2 \Rightarrow e \leq 3n - 6$$

■

## Định lý Euler (cont.)

### Hệ quả 3.2

Một đồ thị đơn, phẳng và liên thông gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh ( $e \geq 4$ ),  $f$  miền và các chu trình đều có độ dài  $\geq 4$  thì ta có bất đẳng thức sau

$$e \leq 2n - 4 \quad (3.4)$$

### Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

## Định lý Euler tổng quát

### Định lý 3.2

Cho một đồ thị phẳng gồm  $n$  đỉnh,  $e$  cạnh,  $f$  miền và  $p$  thành phần liên thông thì ta có công thức sau:

$$f = e - n + p + 1 \quad (3.5)$$

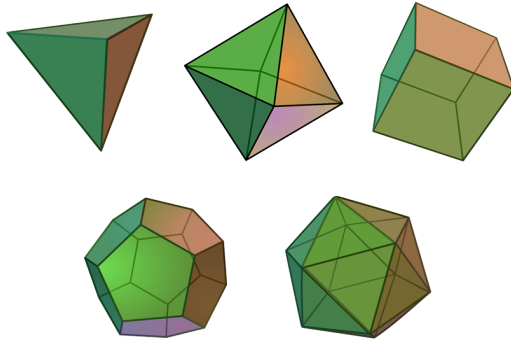
### Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

## Định lý Euler tổng quát (cont.)

### Nhận xét

Công thức Euler cũng đúng cho các khối đa diện lồi



Hình 3.8: Năm khối đa diện lồi đều

## Định lý Kuratowski

### Định lý 3.3

Đồ thị đủ  $K_5$  là đồ thị không phẳng

### Định lý 3.4

Đồ thị phân đôi đủ  $K_{3,3}$  là đồ thị không phẳng

### Định lý 3.5

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông có tính phẳng là đồ thị không chứa đồ thị con nào đồng phôi với  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$

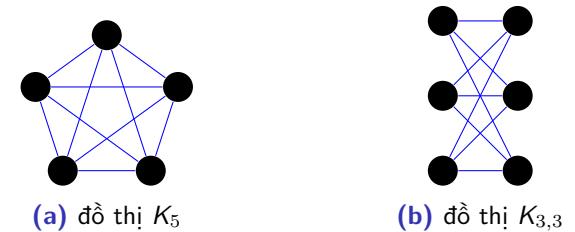
## Định lý Kuratowski (cont.)

### Nhận xét

Hai đồ thị  $K_5$  và  $K_{3,3}$  là hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất

- ▶ Nếu xóa bất kỳ một đỉnh hoặc một cạnh thì sẽ được một đồ thị phẳng
- ▶ Đồ thị  $K_5$  là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất
- ▶ Đồ thị  $K_{3,3}$  là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất

## Định lý Kuratowski (cont.)



Hình 3.9: Hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất  $K_5$  và  $K_{3,3}$

## Định Lý Kuratowski (cont.)

### Chứng minh

Phương pháp chứng minh phản chứng

- ▶ Giả sử đồ thị  $K_5$  phẳng. Đồ thị này có số đỉnh  $n = 5$  và số cạnh  $e = 10$ . Theo hệ quả  $e \leq 3n - 6$ ; nhưng  $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$  là vô lý. Vậy ta có điều phải chứng minh
- ▶ Giả sử đồ thị  $K_{3,3}$  phẳng. Đồ thị  $K_{3,3}$  có số đỉnh  $n = 6$  và số cạnh  $e = 9$ . Đồ thị  $K_{3,3}$  chỉ có các chu trình từ 4 cạnh trở lên vậy theo hệ quả  $e \leq 2n - 4$ ; nhưng  $9 \leq 2 \cdot 6 - 4$  là vô lý. Vậy ta phải có điều chứng minh

■

## Định Lý Wagner

### Định lý 3.6

*Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông có tính phẳng là đồ thị không chứa đồ thị con nào có thể co thành  $K_5$  hoặc  $K_{3,3}$*

## Kiểm tra tính phẳng của một đồ thị

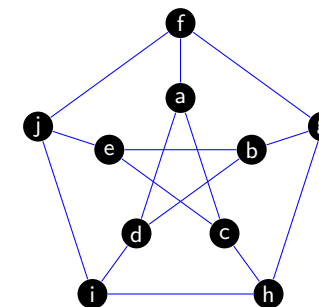
Có nhiều phương pháp để kiểm tra tính phẳng của đồ thị

- ▶ Sử dụng định lý Euler
- ▶ Sử dụng định lý Kuratowski
- ▶ Sử dụng định lý Wagner
- ▶ Sử dụng thuật toán Demoucron, Malgrange and Pertuiset (DMP)

## Ví dụ minh họa

Chứng minh đồ thị Peterson không phẳng bằng

- ▶ Sử dụng định lý Wagner
- ▶ Sử dụng định lý Kuratowski

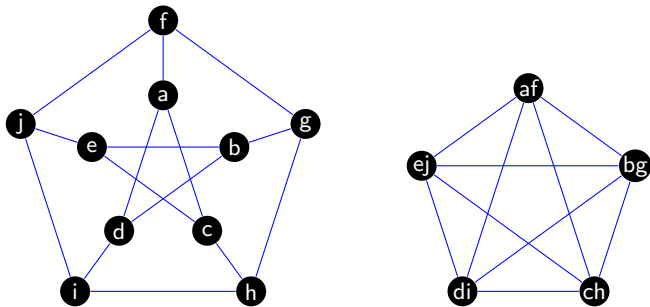


Hình 3.10: Đồ thị Peterson

## Ví dụ minh họa (cont.)

Áp dụng định lý Wagner

- ▶ Thực hiện phép co 5 lần
- ▶ Đồ thị kết quả là  $K_5$

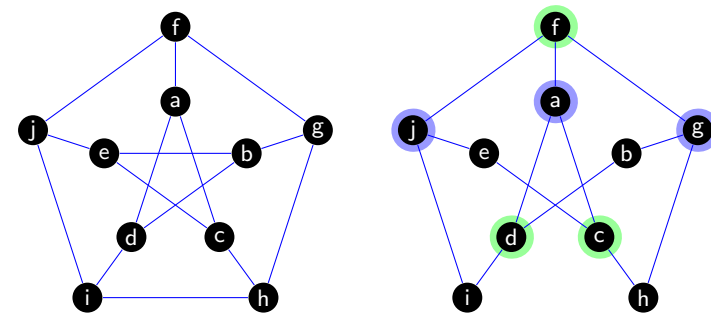


Hình 3.11: Đồ thị và kết quả sau khi thực hiện phép co 5 lần

## Ví dụ minh họa (cont.)

Áp dụng định lý Kuratowski

- ▶ Loại bỏ một số cạnh
- ▶ Đồ thị kết quả đồng phôi với  $K_{3,3}$



Hình 3.12: Đồ thị và kết quả loại bỏ các cạnh

## Thuật toán DMP

Một số giả thiết đối với đồ thị  $G = (V, E)$  cần kiểm tra tính phẳng

1.  $G$  là một đồ thị đơn, vô hướng
2.  $G$  có  $|E| \leq 3|V| - 6$
3.  $G$  là một đồ thị liên thông
4.  $G$  là một đồ thị song liên thông

## Thuật toán DMP (cont.)

### Định nghĩa 3.6

Cho một đồ thị  $G = (V, E)$  và đồ thị con  $G' = (V', E')$ .  $S$  được gọi là một **mảnh (segment)** của đồ thị  $G$  theo  $G'$  nếu thỏa một trong hai điều sau

- ▶ Nó là một cạnh không thuộc  $E'$  nhưng có hai đỉnh thuộc  $V'$
- ▶ Nó là một thành phần liên thông của đồ thị  $G - V'$  cùng với các cạnh nối nó với  $G'$

### Định nghĩa 3.7

Các đỉnh của một mảnh được gọi là **đỉnh tiếp xúc (contact vertex)** nếu nó thuộc đồ thị con  $G'$



## Thuật toán DMP (cont.)

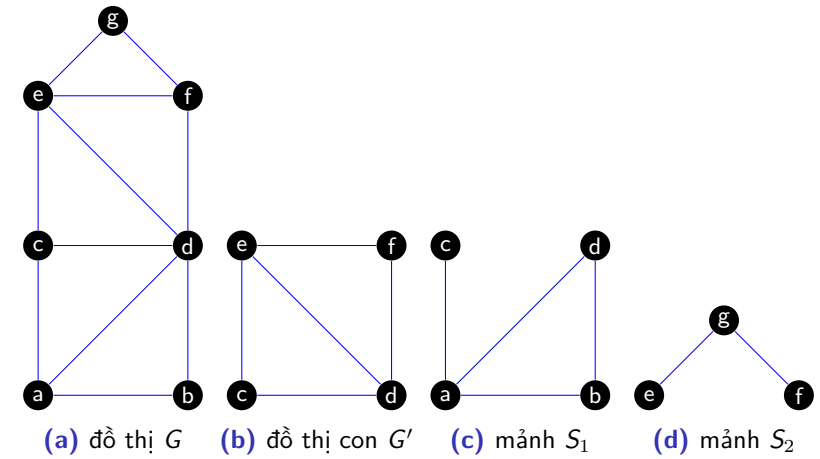
### Định nghĩa 3.8

Một miền của đồ thị con  $G'$  là **miền tiếp nhận** (**admissible face**) của một mảnh nếu nó chứa tất cả các đỉnh tiếp xúc của mảnh này.

### Định nghĩa 3.9

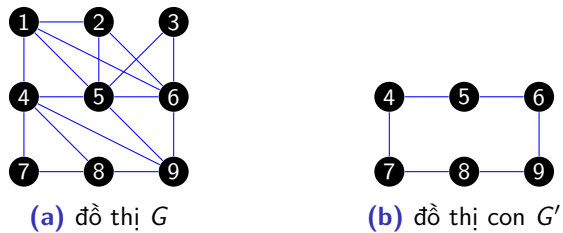
**Đường đi- $\alpha$**  ( **$\alpha$ -path**) của một mảnh là đường đi nối hai đỉnh tiếp xúc của mảnh này.

## Thuật toán DMP (cont.)



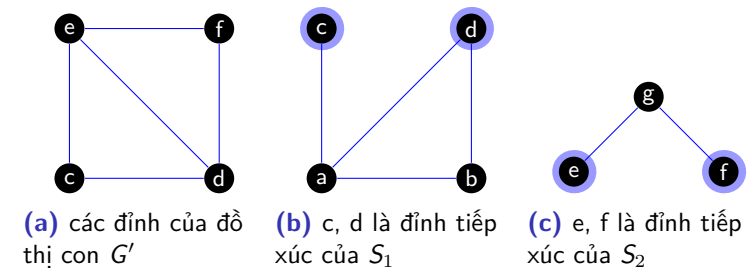
Hình 3.13: Các mảnh của đồ thị

## Thuật toán DMP (cont.)



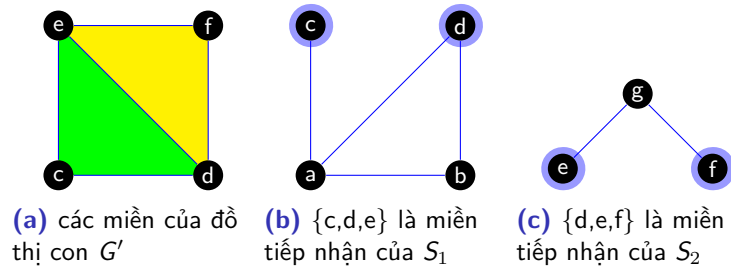
Hình 3.14: Hãy xác định các mảnh của đồ thị

## Thuật toán DMP (cont.)



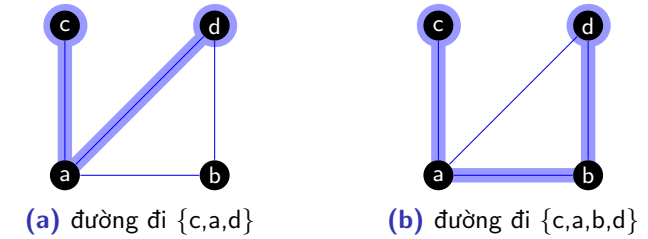
Hình 3.15: Các đỉnh tiếp xúc của các mảnh

## Thuật toán DMP (cont.)



Hình 3.16: Các miền tiếp nhận của các mảnh

## Thuật toán DMP (cont.)



Hình 3.17: Các đường đi- $\alpha$  của  $S_1$

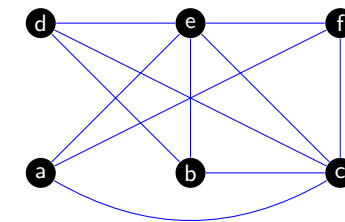
## Thuật toán DMP (cont.)

Cho một đồ thị  $G$

**Algorithm 1** Thuật toán Demoucron, Malgrange and Pertuiset

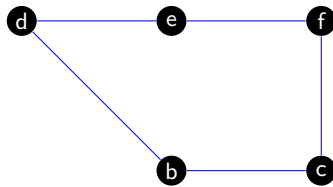
- 1: Chọn một chu trình  $G'$  của  $G$
- 2: **while**  $G' \neq G$  **do**
- 3:   Xác định các mảnh của  $G - G'$
- 4:   Xác định các miền tiếp nhận của các mảnh
- 5:   **if** tồn tại một mảnh không có miền tiếp nhận **then**
- 6:     Dừng, đồ thị  $G$  không phẳng
- 7:   Chọn một mảnh và một miền tiếp nhận của mảnh (*ưu tiên mảnh có 1 miền tiếp nhận*)
- 8:   Nhúng đường đi- $\alpha$  của mảnh vào miền tiếp nhận này
- 9:   Cập nhật  $G' = G' + \alpha$
- 10: Đồ thị  $G$  phẳng

## Ví dụ minh họa thuật toán DMP



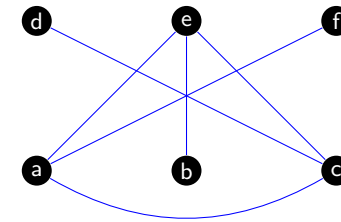
Hình 3.18: Áp dụng thuật toán DMP để kiểm tra tính phẳng của đồ thị  $G$ ? Nếu đồ thị phẳng hãy vẽ ra một biểu diễn phẳng của đồ thị?

## Ví dụ minh họa thuật toán DMP (cont.)



Hình 3.19: Đồ thị  $G'$

## Ví dụ minh họa thuật toán DMP (cont.)

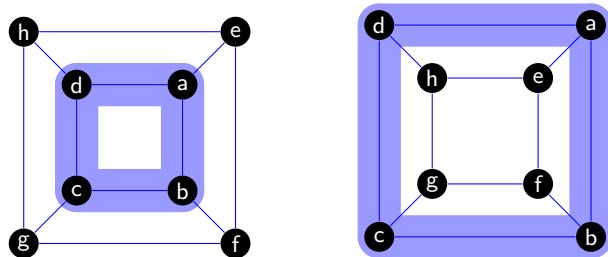


Hình 3.20: Đồ thị  $G - G'$

## Định lý về biểu diễn phẳng

### Định lý 3.7

Một biểu diễn phẳng của đồ thị luôn luôn có thể biến đổi thành một biểu diễn phẳng khác sao cho miền hữu hạn của nó trở thành miền vô hạn của kia



Hình 3.21: Biến đổi biểu diễn phẳng

## Tài liệu tham khảo