Chương 2. ĐỊNH THỨC

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

2.1 Định thức của ma trận

Cho A là ma trận vuông. Khi đó:

- det(A): Tính định thức của A.
- adj(A) hay adjoint(A): Tìm ma trận phụ hợp (hay ma trận phó) của A.
- minor(A, i, j): Ma trận có được từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j.

```
> A := matrix(3, 3, [-1, 2, -1, -2, 3, -5, -4, 5, 2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$15$$

```
> adj(A);   #Ma trận phụ hợp của A
```

$$\begin{bmatrix} 31 & -9 & -7 \\ 24 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> minor(A, 2, 3);   #Xóa dòng 2 và cột 3
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

- col(A, i): Cột thứ i của ma trận A.
- col(A, i..k): Ma trận được tạo bởi các cột i đến k của ma trận A.
- concat(A, B, ...): Ma trận được tạo bằng cách ghép các ma trận hay các cột lại với nhau.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

```
> A:=matrix(3, 3, [1, 2, 2, -2, m-2, m-5, m, 1, m+1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{bmatrix}$$

```
> b := [0, 2, -2];
```

$$[0\ 2\ \ -2]$$

```
> dtA:= det(A);
```

$$dtA := m^2 - 4\,m + 3$$

```
> A1 := concat(b, col(A,2..3)):  dt1:= det(A1);
```

$$dt1 := -4m + 12$$

```
> A2:= concat(col(A,1), b, col(A,3)): dt2 := det(A2);
```

$$dt2 := 0$$

```
> A3:= concat(col(A,1.. 2), b):  dt3:= det(A3);
```

$$dt3 := 2m - 6$$

Từ kết quả tính toán trên ta có:

i) Nếu $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1},\, 0,\, \frac{2}{m-1}\right).$$

ii) Nếu $|A| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$ thì:

- Với $m = 1$ ta có $|A_1| = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$ ta có $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$. Khi đó

```
> A:=matrix(3, 3, [1, 2, 2, -2, 1, -2, 3, 1, 4]):   b:= [0, 2, -2]:
> linsolve(A, b);
```

$$[\ 3\_t_1 - 2\ \ \_t_1\ \ \frac{-5}{2}\_t_1 + 1\ ]$$

Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2,\, t,\, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t là ẩn tự do.

Phần II. Bài tập

2.1 Tính các định thức cấp hai sau

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

2.2 Tính các định thức cấp ba sau

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.3 Giả sử $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$. Hãy tính theo α các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

2.4 Chứng tỏ rằng các giá trị định thức sau bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & (a+b)^2 \\ bc & b^2+c^2 & (b+c)^2 \\ ca & c^2+a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$.

2.5 Tính các định thức cấp bốn sau

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & -8 \\ 7 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -9 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2.6 Tính các định thức cấp năm sau

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 8 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

2.7 Tính các định thức cấp n sau:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \mathbf{3} & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & \boldsymbol{n} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \dots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \dots & x_2y_n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \dots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$;

2.8 Tìm các giá trị của x để các định thức sau bằng 0.

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 8x+13 \end{vmatrix}$.

2.9 Tìm ma trận phụ hợp (hay ma trận phó) của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.10 Tìm nghịch đảo của các ma trận trong Bài tập 2.9 bằng cách áp dụng công thức định thức.

2.11 Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó.

a) $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$.

2.12 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

2.13 Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $\det A \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |\det A| = 1.$$

2.14 Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *trực giao* nếu $A\,A^\top = I_n$. Chứng minh rằng, nếu A trực giao thì $\det A = \pm 1$. Cho ví dụ về một ma trận trực giao có định thức bằng 1 và một ví dụ về ma trận trực giao có định thức bằng -1.

2.15 Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận B, C khả nghịch sao cho $A = B + C$.

2.16 Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer.

a) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 = 12. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2.17 Giải và biện luận (theo tham số m) các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (m-3)x + 2y = m+3 \\ -(2m+1)x + (m+2)y = 6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3, \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - mx_3 = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1; \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m; \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m, \end{cases}$

f) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m; \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m; \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m, \end{cases}$

2.18 Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số a, b

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.