Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Với $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính, ta dễ dàng tìm được ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của V và W. Hơn nữa, các bài toán liên quan đến ánh xạ f có thể được giải được thông qua ma trận biểu diễn của f.

4.1 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Giả sử A là ma trận biểu diễn theo cặp cơ sở chính tắc của ánh xạ tuyến tính f. Khi đó

- kernel(A) hay nullspace(A) : Tìm một cơ sở cho không gian nhân của f. Kết quả trả về là tập hợp các vectơ.
- colspan(A): Tìm một cơ sở cho không gian ảnh của f. Kết quả trả về là tập hợp các vectơ.

Ví dụ 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(a, b, c) = (a - 2b + 2c, -a + 2b - 3c, 2a - 4b + 5c).$$

Tìm một cơ sở của Ker$f$ và Imf.

```
> A := matrix(3, 3, [1, -2, 2, -1, 2, -3, 2, -4, 5]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(A);
```

$$\{[2\ 1\ 0]\}$$

```
> colspan(A);
```

$$\{[0\ \ -1\ 1], [1\ \ -1\ 2]\}$$

Dựa vào kết quả tính toán trên ta có:

- Ker$f$ có một cơ sở là $\{(2, 1, 0)\}$.
- Imf có một cơ sở là $\{(0, -1, 1), (1, -1, 2)\}$.

4.2 Tìm ánh xạ tuyến tính

Bài toán. Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V và $v_1, v_2, \ldots, v_m$ là các vectơ thuộc W. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ thỏa $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n$.

Phương pháp. Với $u \in V$, ta tìm tọa độ của u theo cơ sở $\mathcal{B}$. Giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, khi đó

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\alpha_1 u_1) + f(\alpha_2 u_2) + \ldots + f(\alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (2, -1, 3)\}$ và

$v_1 = (2, 1, -2), v_2 = (1, 2, -2), v_3 = (3, 5, -7)$.

Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, f(u_3) = v_3$.

```
> u1 := vector([1, -1, 1]): u2 := vector([1, 0, 1]): u3 := vector([2, -1, 3]):
  v1 := vector([2, 1, -2]): v2 := vector([1, 2, -2]): v3 := vector([3, 5, -7]):
> u:=vector([x, y, z]);
```

$$u := [x\ y\ z]$$

```
> A := matrix([u1, u2, u3]): A:=transpose(A): s:=linsolve(A, u);      #Tìm [u]_B
```

$$s := [x - z - y \quad 2x - z + y \quad -x + z]$$

```
> evalm(s[1]*v1+s[2]*v2+s[3]*v3);      #Tính f(u)
```

$$[x - y \quad 2z + y \quad x - 3z]$$

Dựa vào kết quả tính toán ta có $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z, x - 3z)$.

4.3 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Bài toán. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Với $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^m$. Cho biết $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0}$, hãy tính $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Phương pháp. Ta áp dụng công thức sau:

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}).$$

Nếu $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ là những cơ sở chính tắc thì việc tính $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$ và $(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})$ rất dễ dàng.

Ví dụ 3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở

$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ và $\mathcal{C} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$.

```
> fBoCo := matrix(2, 3, [1, 1, 0, -1, 0, 2]);      # fBoCo := [f]_B0,C0
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> u1 := vector([1, 0, -1]): u2 := vector([1, 1, 0]): u3 := vector([1, 0, 0]):
  v1 := vector([1, 1]): v2 := vector([2, 1]):
> P := matrix([u1, u2, u3]): BoB := transpose(P);        # BoB := (B0 → B)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Q := matrix([v1, v2]): CoC := transpose(Q);        # CoC := (C0 → C)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> fBC:= multiply(inverse(CoC), fBoCo, BoB);        # fBC := [f]B,C
```

$$\begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Từ kết quả tính toán ta có $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1,1); v_2 = (2,1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm công thức của f.

```
> fBC := matrix(2, 3, [2, 1, -3, 0, 3, 4]);        # fBC := [f]B,C
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> u1 := vector([1, 1, 1]): u2 := vector([1, 0, 1]): u3 := vector([1, 1, 0]):
  v1 := vector([1, 1]): v2 := vector([2, 1]):
> P := matrix([u1, u2, u3]): BoB := transpose(P);        # BoB := (B0 → B)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Q := matrix([v1, v2]): CoC := transpose(Q);        # CoC := (C0 → C)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> fBoCo:= multiply(CoC, fBC, inverse(BoB));          # fBoCo := [f]_{B0,C0}
```

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dựa vào kết quả tính toán ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Phần II. Bài tập

4.1 Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$? Giải thích.

a) $f(x, y) = (xy,\ x + y)$.

b) $f(x, y) = (x + y,\ x - y)$.

c) $f(x, y) = (x,\ 0)$.

d) $f(x, y) = (x^2,\ 0)$.

4.2 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ 2x + 2y + z).$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

4.3 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z).$$

Chứng minh f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

4.4 Cho $V = M_n(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{R}$ và A là một ma trận cố định trong V. Chứng minh rằng $f : V \to V$, với

$$f(X) = XA - AX, \forall X \in V$$

là một toán tử tuyến tính trên V.

4.5 Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-2, 3)$. Hãy xác định toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho $f(u_1) = u_2$ và $f(u_2) = -u_1$.

4.6 Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 2) = (1, 3)$ và $f(1, 2, 1) = (2, -1)$.

4.7 Hãy xây dựng một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ thỏa điều kiện

$$f(1, -1, 1) = (1, 0) \text{ và } f(1, 1, 1) = (0, 1).$$

4.8 Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ xét các họ vectơ

$$u_1 = (1, -1), u_2 = (-1, 2), u_3 = (0, -1) \text{ và } v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1).$$

Tồn tại hay không một toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(u_i) = v_i, \forall i \in \overline{1, 3}$?.

4.9 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z,\ 2x - 4y + 5z).$$

a) Kiểm tra các vectơ $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0)$ có thuộc $\mathrm{Ker}f$ hay không?

b) Kiểm tra các vectơ $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 2)$, $v_3 = (0, 0, 0)$ có thuộc $\mathrm{Im}f$ hay không?

4.10 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3).$$

a) Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c) \in \mathrm{Im}f$.

c) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vectơ $u = (a, b, c)$ nằm trong $\mathrm{Ker}f$. Tìm một cơ sở cho không gian con $\mathrm{Ker}f$.

4.11 Cho f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z,\ x - 2y + 4z,\ 2x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker}f$ và một cơ sở của $\mathrm{Im}f$.

4.12 Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z - t, x + 2y - z - 2t, x + 3y - 3z - 3t).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker}f$ và một cơ sở của $\mathrm{Im}f$.

4.13 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ có dạng ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm cơ sở cho $\mathrm{Im}f$ và $\mathrm{Ker}f$.

4.14 Giả sử $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ là một đa thức với hệ số thực. Định nghĩa đa thức đạo hàm Df của f bởi

$$Df = n a_n t^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} t^{n-2} + \ldots + a_1.$$

a) Chứng minh rằng D là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ $\mathbb{R}[t]$. Ta gọi D là *toán tử đạo hàm* trong $\mathbb{R}[t]$.

b) Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng tập hợp $R_n[t]$ gồm tất cả các đa thức của $\mathbb{R}[t]$ có bậc $\leq n$ là một không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

c) Hãy xác định ảnh và nhân của toán tử đạo hàm D trong không gian vectơ $\mathbb{R}_3[t]$.

4.15 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\mathrm{Ker}f = \langle (1, 1, 1),\ (0, 1, 2) \rangle$ và $\mathrm{Im}f = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

4.16 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\text{Ker}f = \langle (1,1,1) \rangle$ và $\text{Im}f = \langle (1,1,1),\ (0,1,2) \rangle$.

4.17 Tìm một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ sao cho

$$\text{Im}f = \langle (1,0,-1), (2,1,1) \rangle.$$

4.18 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x+y-z,\ 2x-3y+z).$$

a) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(1,1),\ (2,3)\}$ (của $\mathbb{R}^2$).

4.19 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x,y) = (x-2y,\ 2x+y)$.

a) Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$, với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$, với $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,-3), u_2 = (-1,2)\}$.

4.20 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x-y+z,\ x+2y-2z,\ x-3y+3z).$$

a) Tìm một cơ sở của $\text{Im}f$ và một cơ sở của $\text{Ker}f$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (1,-2,0),\ (2,1,3)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

4.21 Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$.

a) Hãy xác định ánh xạ tuyến tính f.

b) Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

4.22 Cho $\mathcal{B} = \{(1,-1),\ (-2,3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.23 Cho $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.24 Cho cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(2,-1),\ (-3,2)\}$ (của $\mathbb{R}^2$). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.25 Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$. Giả sử f là một toán tử tuyến tính trong V thỏa $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$. Chứng minh rằng n là một số chẵn. Hãy cho một ví dụ minh họa.

4.26 Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và f là một toán tử tuyến tính trong V. Chứng minh rằng các điều kiện dưới đây tương đương:

a) $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = 0$.

b) Nếu $f^2(u) = 0$ thì $f(u) = 0$, với $u \in V$.

4.27 Cho f là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ với

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3).$$

a) Xét xem f có khả nghịch không? Nếu f khả nghịch hãy tìm f^{-1}.

b) Chứng minh rằng $(f^2 - Id)(f - 2Id) = 0$.

4.28 Cho những ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng $g_\circ f$ không khả nghịch.

4.29 Tìm hai toán tử tuyến tính g, f trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $g_\circ f = 0$ nhưng $f_\circ g \neq 0$.

4.30 Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ bất kỳ và giả sử $f^2 = 0$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $\mathrm{Ker}f$ và $\mathrm{Im}f$.

4.31 Cho V là một không gian vectơ hai chiều trên trường $\mathbb{R}$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở được sắp của V. Chứng minh rằng nếu f là một toán tử tuyến tính trong V và $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}$ thì

$$f^2 - (a + d)f + (ad - bc)Id = 0.$$

4.32 Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (-x_2, 2x_1)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong $\mathcal{B}_0$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở được sắp

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1), u_2 = (-1, 2)).$$

c) Tìm tất cả $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho toán tử tuyến tính $(f - \alpha Id)$ khả nghịch.

4.33 Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + x_1, -2x_2 + x_3, -x_2 + 2x_3 + 4x_1).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$

c) Chứng minh rằng f khả nghịch và tìm f^{-1}.