ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 10

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

1 Bài 5.1

Bài 5.1 Tìm đa thức đặc trưng cho các ma trận sau đây:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Ta có:

$$P_A(\lambda) = |\, A - I_n \cdot \lambda \,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 \cdot \lambda - 4$$

b) Ta có:

$$P_A(\lambda) = |\, A - I_n \cdot \lambda \,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 \cdot \lambda + 28$$

c) Ta có:

$$P_A(\lambda) = |\, A - I_n \cdot \lambda \,| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 \cdot (\lambda - 3)$$

d) Ta có:

$$P_A(\lambda) = |\, A - I_n \cdot \lambda \,| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda - 2)^3$$

□

2 Bài 5.2

Bài 5.2 Ma trận nào sau đây chéo hóa được? Trong trường hợp chéo hóa được hãy tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo nó.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Ta có $P_A(x) = -x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = -(x-2)^2(x-6)$. Xét

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra một cơ sở của $E(2)$ là $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$. Lại xét

$$A - 6I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra một cơ sở của $E(6)$ là $\{(1,2,1)\}$ Vậy A chéo hóa được, ma trận làm chéo A là

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và dạng chéo của A là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

b) Ta có $P_B(x) = -(x-1)^3$. Xét

$$B - I_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $\dim E(1) = 2 < 3$. Vậy B không chéo hóa được.

c) Ta có $P_C(x) = -(x-2)^3$. Xét

$$C - 2I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $\dim E(2) = 2 < 3$. Vậy C không chéo hóa được.

d) Ta có $P_D(x) = -x^2(x-1)$. Xét

$$D \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $\dim E(0) = 1 < 2$. Vậy D không chéo hóa được.

e) Ta có $P_E(x) = -x^2(x-1)^2$. Xét

$$E - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $\dim E(1) = 1 < 2$. Vậy E không chéo hóa được.

f) Ta có $P_F(x) = -x^2(x-1)^2$. Xét

$$F - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $\dim E(1) = 1 < 2$. VậyF không chéo hóa được.

□

3 Bài 5.3

Bài 5.3 Hãy tìm điều kiện đối với các số thực a, b, c sao cho ma trận sau đây chéo hóa được

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

✍ **Lời giải**

- Đa thức đặc trưng của A là:

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) &= A - \lambda I_3 \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 2-\lambda & c \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda+1)(-\lambda+2)^2 \end{aligned}$$

- Hai trị riêng của A là:

$$\lambda_1 = 1 \text{ (bội 1) và } \lambda_2 = 2 \text{ (bội 2)}$$

- Ta xét các không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ ứng với phương trình: $(A - \lambda I_3)X = 0$.
+Với $\lambda_2 = 2$ (bội 2):
Ma trận hóa ta được:

$$\begin{bmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Để $dimE(\lambda_1) = 2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình có 2 ẩn tự do $\in \mathbb{R}$

Tức là $c = 0$ để hạng của ma trận bằng 1.
+ Với $\lambda_1 = 1$ (bội 1):
Ma trận hóa ta được:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 - ad_2 - bd_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Hạng của ma trận r = 2 nên $dimE(\lambda_1) = 1$ (thỏa)

  Vậy điều kiện a, b, c cần tìm là:

$$a, b \in \mathbb{R}, c = 0$$

□

4 Bài 5.4

Bài 5.4 Tìm điều kiện đối với a, b, c để ma trận sau đây chéo hóa được

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

✍ **Lời giải**

Đặt $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ Xét $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$.
Suy ra A có 1 trị riêng là $\lambda = 0$ (bội 4).
Để A chéo hóa được thì $\dim E(\lambda) = 4$, hay $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A - \lambda I_4) = 0$. Do đó $a = b = c = 0$.

□

5 Bài 5.5

Bài 5.2 A là ma trận vuông cấp hai. Chứng minh rằng nếu A là ma trận đối xứng (nghĩa là $A^T = A$) thì A chéo hóa được

Lời giải
Do A là ma trận đối xứng nên A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

Lập đa thức đặc trưng: $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$

Ta có $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = 4b^2 + (a-d)^2 \geq 0$

TH 1: $\Delta > 0$

Khi đó A có 2 trị riêng phân biệt, do đó A chéo hóa được

TH 2:$\Delta = 0$, khi đó $a = d$ và $b = 0$

Do đó $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ đã chéo hóa
Vậy nếu A đối xứng thì A chéo hóa được.

□

6 Bài 5.6

Bài 5.6 Giả sử Fibonacii xây dựng dãy số của mình với $F_0 = 1, F_1 = 3$ và $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, $\forall k \geq 0$. Hãy tính các số Fibonacii mới và chứng minh rằng tỉ số F_{k+1}/F_k cũng dần tới "tỉ lệ vàng".

Lời giải
Đặt $u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$ và $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$u_{k+1} = Au_k$$

Từ đó suy ra,

$$u_k = A^k u_0$$

với $u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng $f_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ có các nghiệm là

$$\lambda_1 = \varphi, \lambda_2 = \frac{-1}{\varphi}$$

với φ là tỉ lệ vàng. Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

với $P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ta có

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} u_k = A^k u_0 &= PD^kP^{-1}u_0 \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 3\lambda_1^{k+1} - 3\lambda_2^{k+1} - (\lambda_1^k - \lambda_2^k) \\ 3\lambda_1^k - 3\lambda_2^k - (\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra

$$F_k = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(3\lambda_1^k - 3\lambda_2^k + \lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1})$$

Để ý rằng, $|\lambda_1| > 1$ và $|\lambda_2| < 1$, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \lambda_1 = \varphi$$

□

7 Bài 5.7

Bài 5.7 Tính lũy thừa n của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Các trị riêng: $\lambda_1 = 1$ (bội 1) và $\lambda_2 = 2$ (bội 1)
Với $\lambda_1 = 1$, không gian $E(1)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - I_2) \cdot X = 0$.

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1,\ x_2) = (p, p)\ p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(1)$ có một sở sở là $\{u_1 = (1, 1)\}$.
Với $\lambda_2 = 2$, không gian $E(2)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - 2I_2) \cdot X = 0$.

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1, x_2) = (0, p)\ p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(2)$ có một sở sở là $\{u_2 = (0, 1)\}$.
Từ những điều trên ta tìm được một ma trận làm A chéo hóa là:

$$P = [u_1^T\ u_2^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Và một dạng chéo hóa của A ứng với P là:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& D^n = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^n \\
\Leftrightarrow\ & D^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P \\
\Leftrightarrow\ & A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 2^n & 2^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 5)$$

Các trị riêng: $\lambda_1 = 4$ (bội 1) và $\lambda_2 = 5$ (bội 1)
Với $\lambda_1 = 4$, không gian $E(4)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - 4I_2) \cdot X = 0$.

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1,\ x_2) = (p, 2p)\ p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(1)$ có một sở sở là $\{u_1 = (1, 2)\}$.
Với $\lambda_2 = 5$, không gian $E(5)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - 5I_2) \cdot X = 0$.

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1, x_2) = (p, p)$ $p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(5)$ có một sở sở là $\{u_2 = (1,1)\}$.
Từ những điều trên ta tìm được một ma trận làm A chéo hóa là:

$$P = [u_1^T \; u_2^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Và một dạng chéo hóa của A ứng với P là:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& D^n = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^n \\
\Leftrightarrow \quad & D^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P \\
\Leftrightarrow \quad & A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & A^n = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5^n - 4^n & 4^n - 5^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 4^n & 2 \cdot 4^n - 5^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Các trị riêng: $\lambda_1 = 1$ (bội 1) và $\lambda_2 = 2$ (bội 2)
Với $\lambda_1 = 1$, không gian $E(1)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - I_3) \cdot X = 0$.

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (0, 0, p)$ $p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(1)$ có một sở sở là $\{u_1 = (0, 0, 1)\}$.
Với $\lambda_2 = 2$, không gian $E(2)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - 2I_3) \cdot X = 0$.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-p, q, p)$ $p,\ q \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(2)$ có một sở sở là $\{u_2 = (-1, 0, 1),\ u_3 = (0, 1, 0)\}$.

Từ những điều trên ta tìm được một ma trận làm A chéo hóa là:

$$P = [u_1^T \ u_2^T \ u_3^T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Và một dạng chéo hóa của A ứng với P là:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} & D^n = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^n \\ \Leftrightarrow \quad & D^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P \\ \Leftrightarrow \quad & A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & A^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d) Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

Các trị riêng: $\lambda_1 = 2$ (bội 1) và $\lambda_2 = 1$ (bội 2)
Với $\lambda_1 = 2$, không gian $E(2)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - 2 \cdot I_3) \cdot X = 0$.

$$A - 2 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1, \ x_2, \ x_3) = (p, p, p) \ p \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(2)$ có một sở sở là $\{u_1 = (1, 1, 1)\}$.
Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là nghiệm của phương trình cho bởi $(A - I_3) \cdot X = 0$.

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của hệ là $(x_1, \ x_2, \ x_3) = (p + q, 2q, p) \ p, \ q \in \mathbb{R}$.
Khi đó suy ra $E(2)$ có một sở sở là $\{u_2 = (1, 0, 1), \ u_3 = (1, 2, 0)\}$.

Từ những điều trên ta tìm được một ma trận làm A chéo hóa là:

$$P = [u_1^T\ u_2^T\ u_3^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Và một dạng chéo hóa của A ứng với P là:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& D^n = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^n \\
\Leftrightarrow\ & D^n = P^{-1} \cdot A^n \cdot P \\
\Leftrightarrow\ & A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & A^n = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 2 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

8 Bài 5.8

Bài 5.8 Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được. Tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo A.

b) Đặt $B = \frac{1}{4}A$. Hãy tính $B^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Cho các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, (v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được xác định theo qui tắc sau: $u_0 = 2, v_0 = 1$ và đối với mọi $n \geq 1$

$$u_n = \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-1}; \quad v_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}v_{n-1}.$$

Hãy tính u_n và v_n như các hàm số của n. Tìm giới hạn của u_n và v_n khi n tiến tới ∞.

✍ **Lời giải**

a) Đa thức đặc trưng của A là:

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) &= A - \lambda I_2 \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-4) \end{aligned}$$

- Hai trị riêng của A là: $\lambda_1 = 2$ (bội 1) và $\lambda_2 = 4$ (bội 1)

Do đó, ma trận A chéo hóa được.
- Dạng chéo cần tìm:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Ta xét không gian nghiệm E đối với phương trình $A - \lambda I_2$:
+ Đối với $\lambda_1 = 2$ (bội 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Hạng ma trận bằng 1 nên $dimE = 1$ (thỏa)

Cơ sở của $E(2)$ bằng $(1,1)$
+ Đối với $\lambda_2 = 4$ (bội 1):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-d_1]{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Hạng ma trận bằng 1 nên $dimE = 1$(thỏa)

Cơ sở của $E(4)$ bằng $(1,-1)$
Vậy ma trận khả nghịch làm chéo A:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Theo đề bài, ta có:

$$B = \frac{1}{4}A \Rightarrow B^n = \frac{1}{4^n}A^n$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} &D = P^-1AP \\ \Leftrightarrow &A = PDP^-1 \\ \Leftrightarrow &A^n = PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

Mặt khác biến đổi lần lượt ta có được:

$$D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{4^n} A^n \\ &= \frac{1}{4^n} P D^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4^n} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $B^n = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}2^{-n} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}2^{-n} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}2^{-n} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}2^{-n} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

c) Đặt: $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ và $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Dựa vào các ý trên ta có:

$$X_n = \frac{1}{4} A X_{n-1} = B X_{n-1}$$

Biến đổi ta có:

$$X_n = B^n X_0 \text{ và } B^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Từ đó ta có được:

$$u_n = \frac{3}{2}2^{-n} + \frac{1}{2}$$
$$v_n = \frac{3}{2}2^{-n} - \frac{1}{2}$$

- Khi $n \to \infty$ thì:

$$u_n = \frac{1}{2},$$
$$v_n = \frac{-1}{2}$$

Vậy u_n, v_n là các hàm theo biến n là:

$$u_n = \frac{3}{2}2^{-n} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow u_n = \frac{1}{2} \text{ khi } n \to \infty$$
$$v_n = \frac{3}{2}2^{-n} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow v_n = \frac{-1}{2} \text{ khi } n \to \infty$$

□