Câu 1. (1 điểm) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình CK17-18

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \le 4$, $x_2 \le 5, x_3 \le 6$.

Đặt U là số nghiệm ng kõ âm của PT (*), ta có

$$|U| = K_4^{20} = \binom{23}{20} = 1771.$$

Đặt A : số nghiệm ng kô âm của (*) thoả $x_1 \geq 5$

B — " — $x_2 \geq 6$

C — " — $x_3 \geq 7$

Ta có : $|A| = K_4^{20-5} = K_4^{15} = \binom{18}{15} = 816$

$$|B| = K_4^{14} = \binom{17}{14} = 680$$

$$|C| = K_4^{13} = \binom{16}{13} = 560$$

$$|AB| = K_4^{9} = \binom{12}{9} = 220$$

$$|AC| = K_4^{8} = \binom{11}{8} = 165$$

$$|BC| = K_4^{7} = \binom{10}{7} = 120$$

$$|ABC| = K_4^{2} = \binom{5}{2} = 10$$

Vậy số ng ng kô âm của (*) thoả $x_1 \le 4$; $x_2 \le 5$; $x_3 \le 6$

là :

$$|\bar{A}\bar{B}\bar{C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |AB| + |AC| + |BC| - |ABC|$$

$$= 1771 - 816 - 680 - 560 + 220 + 165 + 120 - 10$$

$$= 210$$

Câu 2. (1.5 điểm) Có bao nhiêu cách chọn 8 lá bài từ bộ bài 52 lá (gồm 4 nước: cơ, rô, chuồn, bích) sao cho

a) ít nhất một nước không có.

b) có đúng 2 nước.

Ta quy ước các nước cơ, rô, chuồn, bích lần lượt là các nước loại 1, 2, 3, 4. Mỗi loại đều có đúng 13 lá.

Gọi A_i là số cách chọn 8 lá từ 52 lá sao cho ko có nước loại i

Ta có: $S_1 = \sum_{1 \le i \le 4} |A_i| = \binom{4}{1} \cdot \binom{52-13}{8} = 4 \cdot \binom{39}{8}$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i A_j| = \binom{4}{2} \cdot \binom{52 - 2.13}{8} = 6 \cdot \binom{26}{8}$$

Tg tự: $S_3 = \binom{4}{3} \cdot \binom{52 - 3.13}{8} = 4 \cdot \binom{13}{8}$

$$S_4 = 0$$

a/ Bài toán chính là đi tìm số phần tử thuộc ít nhất 1 trong số 4 tập hợp A_1, A_2, A_3, A_4:

$$N_1^{*} = \sum_{i=0}^{4-1} (-1)^i \binom{1+i-1}{1-1} \cdot S_{1+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \cdot S_{1+i}$$

$$= S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

$= 236726490$ (cách)

b) Có đúng 2 nước $\longleftrightarrow$ Kô có đúng 2 nước còn lại, tức là tìm

$$N_2 = \sum_{i=0}^{4-2} (-1)^i \cdot \binom{2+i}{2} \cdot S_{2+i}$$

$$= S_2 - \binom{3}{2} \cdot S_3 + \binom{4}{2} S_4$$

$$= 6 \cdot \binom{26}{8} - \binom{3}{2} \cdot 4 \cdot \binom{13}{8} + 0$$

$$= 9358206.$$