HƯỚNG DẪN BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I : MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.

Dùng phương pháp *Gauss* hay *Gauss – Jordan* để biến đổi các hệ phương trình thành dạng

1/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -43/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/18 \end{array}\right)$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a), b) r($\overline{A}$) = r(A) = 3 = n. c), d) r($\overline{A}$) = r(A) = 4 = n.

2/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 9 & 17 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a), b), c) r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 4. d) r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 3.

3/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3/17 & 13/17 & 0 \\ 0 & 1 & -19/17 & 20/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

e) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

f) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: a) r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 3. b) r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 4.
c) r($\overline{A}$) = r(A) = 3 < n = 4. d), e) r($\overline{A}$) = r(A) = 3 < n = 5. f) r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 5.

4/ a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -9/17 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array}\right)$: Xét (17m – 4) = 0 hoặc (17m – 4) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 4/17 thì r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 4.
Khi m ≠ 4/17 thì r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 3.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: Xét (m – 1) = 0 hoặc (m – 1) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 1 thì r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 4.
Khi m ≠ 1 thì r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 3.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -m-1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2m+3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array}\right)$: Xét (m – 7) = 0 hoặc (m – 7) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 7 thì r($\overline{A}$) = r(A) = 3 < n = 4.
Khi m ≠ 7 thì r($\overline{A}$) = r(A) = n = 4.

d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$: Xét (m – 1) = 0 hoặc (m – 1) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 1 thì r($\overline{A}$) = r(A) = 3 < n = 5.
Khi m ≠ 1 thì r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 4.

e) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 & -14 & 3a+d \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array}\right)$:

Xét [(2a – c – d) = 0 = (a + b + 2d)] hoặc [(2a – c – d) ≠ 0 hay (a + b + 2d) ≠ 0].
Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi (2a – c – d) = 0 = (a + b + 2d) thì
r($\overline{A}$) = r(A) = 2 < n = 5. Khi [(2a – c – d) ≠ 0 thì (a + b + 2d) ≠ 0] thì r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 3.

f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array}\right)$: Xét (m – 8) = 0 hoặc (m – 8) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 8 thì r($\overline{A}$) = r(A) + 1 = 4.
Khi m ≠ 8 thì r($\overline{A}$) = r(A) = n = 4.

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -m-3 & 0 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array}\right)$: Xét $\left[\begin{array}{c} (m-2)=0 \\ (m+3)=0 \\ (m-2)(m+3)\neq 0 \end{array}\right.$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 2 thì $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < n = 3$.

Khi m = – 3 thì $r(\overline{A}) = r(A) + 1 = 3$. Khi $-3 \neq m \neq 2$ thì $r(\overline{A}) = r(A) = n = 3$.

h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -3/5 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array}\right)$: Xét (5m + 3) = 0 hoặc (5m + 3) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = – 3/5 thì $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < n = 4$.

Khi $m \neq -3/5$ thì $r(\overline{A}) = r(A) + 1 = 3$.

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array}\right)$: Xét (m – 1) = 0 hoặc (m – 1) ≠ 0.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 1 thì $r(\overline{A}) = r(A) + 1 = 3$.

Khi $m \neq 1$ thì $r(\overline{A}) = r(A) = n = 3$.

j) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+3 & m+2 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array}\right)$: Xét $\left[\begin{array}{c} m=0 \\ (m+5)=0 \\ m(m+5)\neq 0 \end{array}\right.$.

Kiểm nghiệm Định lý Kronecker – Capelli: Khi m = 0 thì $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < n = 3$.

Khi m = – 5 thì $r(\overline{A}) = r(A) + 1 = 3$. Khi $-5 \neq m \neq 0$ thì $r(\overline{A}) = r(A) = n = 3$.

CHƯƠNG II: CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN – MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

2/ a) Tính A^2 để suy ra A^{2m} và A^{2m+1}, $\forall m \geq 0$. Tổng quát hóa cho trường hợp $A \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A^2 = I_n$.

b) Tính đến A^4 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$ (phân biệt a = b và a ≠ b để dễ rút gọn biểu thức).

c) Tính đến A^3 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$ (để ý các công thức lượng giác cos(mx + x) và sin(mx + x), ∀m ≥ 0).

d), e) Tính đến A^3 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$. f) Tính đến A^4 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$.

g) Tính đến A^5 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $0 + 1 + 2 + \cdots + (k-1) = 2^{-1}k(k-1)$, $\forall k \geq 1$].

h) Tính đến A^5 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $1 + 2 + 3 + \cdots + k = 2^{-1}k(k+1)$, $\forall k \geq 1$].

i) Tính đến A^3 để suy ra A^k, $\forall k \geq 0$ (để ý nếu $A^m = \mathbf{O_3}$ thì $A^k = \mathbf{O_3}$, $\forall k \geq m$).

3/ Tính A^2 và A^3 để suy ra $f(A) = 2A^3 - 5A^2 + 4A - 3I_2$.

4/ a) $X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & 3/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & 11/4 & 4 & 1/4 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right)$: vô số nghiệm.

b) $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7/2 & 17/2 & -5/2 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right)$: vô số nghiệm.

c) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$: vô số nghiệm.

d) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 1 = t^2 + yz \\ y(x+t) = 0 = z(x+t) \end{cases}$. Xét $\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y \neq 0 = (x+t) \end{array}\right.$ để thấy hệ có vô số nghiệm là

$X = \pm I_2$, $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & -1 \end{pmatrix}$ với $z \in \mathbf{R}$ và $X = \begin{pmatrix} x & y \\ (1-x^2)/y & -x \end{pmatrix}$ với $x \in \mathbf{R}$ và $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

e) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất.

f) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất.

g) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x + yz = 0 = t^2 - t + yz \\ y(x+t-1) = 0 = z(x+t-1) \end{cases}$. Xét $\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y \neq 0 = (x+t-1) \end{array}\right.$ để thấy hệ có vô số nghiệm là

$X = \mathbf{O_2}$, I_2, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ với $z \in \mathbf{R}$ và $X = \begin{pmatrix} x & y \\ (x-x^2)/y & 1-x \end{pmatrix}$ với $x \in \mathbf{R}$ và $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

h) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất.

i) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 & -4 & 11 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$: hệ vô nghiệm.

5/ a) Tính A^2 để suy ra A^k và A^kB^k, $\forall k \geq 2$. Tính AB, $(AB)^2$ để suy ra $(AB)^k$, $\forall k \geq 2$.
b) Tính C^2 và D^2 để suy ra C^k, D^k và C^kD^k, $\forall k \geq 2$. Tính CD, $(CD)^2$ để suy ra $(CD)^k$, $\forall k \geq 2$.

6/ a) Nhân trực tiếp bằng định nghĩa. b) Nhân trực tiếp bằng định nghĩa và rút gọn. c) Tương tự a) của **2/**.
d) Tính B^2 để suy ra B^k, $\forall k \geq 1$. e) Tính C^k ($k \geq 2$) bằng nhị thức Newton để suy ra S_k, $\forall k \geq 1$.
f) $A^m = A^kA^{m-k}$, $\forall m \geq k$. g) Chỉ cần chứng minh $(BA)^2 = \mathbf{O_n}$ rồi dùng f). Chọn ví dụ A, B $\in M_2(\mathbf{R})$.
h) Dùng nhị thức Newton và f) khi tính $(cA + dB)^6$. Khi tổng quát hóa, tính $(cA + dB)^{r+s-1}$ bằng nhị thức Newton. Để ý tính chất " nếu p, q là 2 số nguyên ≥ 0 thỏa $p + q = r + s - 1$ thì ($p \geq r$ hay $q \geq s$) ".

i) Đặt $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, $B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, $AB = H = (h_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ và $BA = K = (k_{ij})_{1 \le i, j \le n}$. Tính mỗi vế của đẳng thức theo các hệ số của A và B rồi so sánh. Kiểm tra $\forall c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $Tr (AB - BA) \neq Tr (c.\mathbf{I_n})$.

7/ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $C^{-1} = 4^{-1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$D^{-1} = D$. $R_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$. $R_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$.

Dùng các tính chất cơ bản của ma trận khả nghịch để tính nhanh các kết quả.

8/ a) Nhân trực tiếp hoặc dùng qui nạp theo $k \ge 1$. Để ý $(A + B) = A(I_n + A^{-1}B) = (I_n + BA^{-1})A$.
b) Tìm các số nguyên p và q thỏa $9p + 20q = 1$. Suy ra $A = A^1 = (A^9)^p (A^{20})^q$.
c) Dùng $PQ = I_n \Leftrightarrow$ (P khả nghịch và $P^{-1} = Q$) $\Leftrightarrow$ (Q khả nghịch và $Q^{-1} = P$).

9/ a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -17 & -10 & -22 \end{pmatrix}$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -16 \\ 15 & 15 & -11 \end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -118 & -95 \\ -200 & -161 \end{pmatrix}$. d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ -3 & -1 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -21 & 9 \\ 5 & -2 \\ 24 & -10 \end{pmatrix}$. f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -53 & -22 & -12 \\ 22 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -39 & -52 \\ 411 & 549 \\ -170 & -227 \end{pmatrix}$.

g) và h) Xét tính khả nghịch hoặc không khả nghịch ở 2 vế của phương trình để thấy phương trình vô nghiệm.

10/ a) Tính HL. Để ý $K = (I_n - B)$ với $B = -A$ và $B^k = \mathbf{O_n}$. Từ đó áp dụng điều vừa chứng minh.
b) Tính PQ. c) $X = -7(A^{-5})^{-1}(A^{-3}C^2B^4)(B^6)^{-1}$ và $Y = 2(A^9C^8)^{-1}(A^9C^5A^7B^{-1}C^{-2})(B^{-4}C^{-2})^{-1}$ rồi rút gọn.

<u>CHƯƠNG III:</u> ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG.

Ký hiệu (i) là dòng thứ i và (i)’ là cột thứ i của ma trận đang xét.

1/ a) 100. b) $242m(1 - m)$. c) -324. d) $18ab(a - b)$.
e) Dùng các tính chất của định thức.

2/ a)$(x + 1)^2(2x - 1)$. b)$2(x + 3)(x - 2)$. c)$(x - a)(x - b)(a - b)(x + a + b)$. d)$(x - a)(x - b)(b - a)(ax + bx + ab)$.
e) (1) + (2) + (3). Sau đó (2)’ – (1)’ và (3)’ – (1)’. Ta có $| A | = -2^{-1}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.
f) (1) + (2) + (3) + (4). Sau đó (2)’ – (1)’, (3)’ – (1)’ và (4)’ – (1)’. Khai triển dòng (1). Tiếp theo (1) + (2) và (2)’ – (1)’. Ta có $| A | = -(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.
g) (2) – (1) và (3) – (1). Khai triển cột (4). Sau đó (1) + (3). Ta có $| A | = (2a - b - c - d)$.
h) (1) + (2) + (3) + (4). Sau đó (4)’ – (1)’. Khai triển cột (4). Tiếp theo (2)’ – (1)’ và (3)’ – (1)’.
Ta có $| A | = (a - b)^2(a + b + 2x)(a + b - 2x)$.
i) (4)’ – (3)’, (3)’ – (2)’ và (2)’ – (1)’. Sau đó (4)’ – (3)’ và (3)’ – (2)’ . Để ý ma trận có 2 cột giống nhau.
j) (1)’ + (2)’ + (3)’. Để ý ma trận có 2 cột tỉ lệ với nhau.

3/ a), b), c) và d) $|A| \neq 0$ và $A^{-v1} = |A|^{-1} C^t$. e) và f) $|A| = 0$.

4/ a) $|A| = (m+1)(m+2)$. b) (1)' – (2)' – (3)'. Sau đó (3) – (1). Ta có $|A| = m^2(m-1)$.
c) $|A| = (c-a)(c-b)(a-b)$. d) $|A| = 1, \forall a \in \mathbf{R}$.

5/ $\Delta \neq 0$ và hệ có nghiệm duy nhất là $x_j = \Delta_j / \Delta$ với $j = 1, 2, 3$.

6/ a) $\Delta = (m+1)(m-1) = \Delta_2$ và $\Delta_1 = 0$: nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm.
b) $\Delta = -(m+1)(m+4)$, $\Delta_1 = -(m+1)$, $\Delta_2 = -(m+1)(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm
c) $\Delta = m(m+2)$, $\Delta_1 = (m+1)(m+2)$ và $\Delta_2 = -(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.
d) $\Delta = (2m^2 - 3m + 7) > 0 \quad \forall m \in \mathbf{R}$, $\Delta_1 = (m^2 + 5m - 9)$ và $\Delta_2 = (5 - 2m^2)$: nghiệm duy nhất.
e) $\Delta = (m+1)(m+3)$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 2(m+3)$, $\Delta_3 = -(m+3)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.
f) $\Delta = 8(m+1)(m-2)$, $\Delta_1 = -2(2m^2 + 4m - 25)$, $\Delta_2 = 12(m+1)$ và $\Delta_3 = 18$: nghiệm duy nhất hay vô nghiệm
g) $\Delta = -m(m+5)$, $\Delta_1 = -2m(m+2)$, $\Delta_2 = 3m$, $\Delta_3 = -m(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm
h) $\Delta = m(m+2)(m-1)^2$, $\Delta_1 = (m-1)(m+2)$, $\Delta_2 = 0$ và $\Delta_3 = m(1-m)(m+2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm.

CHƯƠNG IV : KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$.

1/ c), d), g) và h) $W \leq \mathbf{R}^n$ tương ứng. a), b), e) và f) W không phải là không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ tương ứng.

2/ a) $3u - v - w = 0$. b) $u - 10v - 7w = 0$. c) $u - v + w - t = 0$. d) $(4u - v + 3w = 0 = u - 7v - 9t)$.

3/ a), b) và e) S phụ thuộc tuyến tính. c) và d) S độc lập tuyến tính. f) Tính $\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ và biện luận theo m.

4/ a), b), c) và f) S không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^3$. d) và e) S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

5/ *Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của* $\mathbf{R}^n$: Lập ma trận mà các dòng của nó là các vector của B. Nếu ma trận này chưa có dạng bậc thang thì ta biến đổi nó về dạng bậc thang.
Nếu thấy cột thứ j của ma trận dạng bậc thang này *không bán chuẩn hóa được* thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_o của $\mathbf{R}^n$) vào B ($1 \leq j \leq n$).
a) $3u - 2v = 0$ và $C = B \cup \{\varepsilon_2\}$. b) $u = 0 = v - 3w$ và $C = B \cup \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$.
c) $u + v - 9w - 3t = 0$ và $C = B \cup \{\varepsilon_4\}$. d) $u = 0 = 25v + 8w - 6t$ và $C = B \cup \{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$.
e) $3u - w + 4t = 0 = 9u + 6t + z$ và $C = B \cup \{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$.

6/ *Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của* $\mathbf{R}^n$: Làm như bài **5/**. Để ý trong bài toán đang xét, ma trận mà các dòng của nó là các vector của B đã có sẵn dạng bậc thang nên không cần biến đổi.
a) Cơ sở $B = \{(1, 2, 4), (0, 1, 1)\}$ và $2u + v - w = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3\}$.
b) Cơ sở $B = \{(1, 2, -3), (0, 3, -2)\}$ và $5u + 2v + 3w = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3\}$.
c) Cơ sở $B = \{(1, 2, -4, 0), (0, 1, -11, 1), (0, 0, 20, -1)\}$ và $22u - 9v + w + 20t = 0$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_4\}$.
d) Cơ sở $B = \{(1, -1, 29, -3), (0, 5, 5, 2)\}$ và $(30u + v - w = 0 = 13u - 2v + 5t)$. Ta có $C = B \cup \{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

7/ Dùng cách tách biến và đặt thừa số chung theo mỗi biến, ta tìm được một tập sinh hữu hạn S cho W.
Sau đó làm hoàn toàn tương tự như bài **6/** .

8/ *Cách bổ sung vector vào cơ sở B của W để được một cơ sở C của* $\mathbf{R}^n$: Có thể làm như bài **5/** (nhưng sẽ mất thời gian biến đổi ma trận về dạng bậc thang). Trong bài toán đang xét, ta có thể làm nhanh như sau :

Khi giải xong hệ $AX = \mathbf{O}$ (phương pháp Gauss hay Gauss – Jordan), nếu thấy cột thứ j của ma trận A *bán chuẩn hóa được* (hoặc *chuẩn hóa được*) thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_o của $\mathbf{R}^n$) vào B ($1 \le j \le n$).

a) Cơ sở $B = \{ (-19, 6, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

b) Cơ sở $B = \{ (-1, -1, 1, 2, 0), (7, 5, -5, 0, 8) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.

c) Cơ sở $B = \{ (-2, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

d) Cơ sở $B = \{ (1, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

9/ <u>Cách 1:</u> $(S \to T) = (S \to B_o)(B_o \to T)$ với B_o là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$. Suy ra $(T \to S) = (S \to T)^{-1}$

<u>Cách 2:</u> Tìm $(S \to T)$ và $(T \to S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan
$(X_1^t \ X_2^t \ X_3^t \mid Y_1^t \ Y_2^t \ Y_3^t) \to (I_3 \mid (S \to T))$ và $(Y_1^t \ Y_2^t \ Y_3^t \mid X_1^t \ X_2^t \ X_3^t) \to (I_3 \mid (T \to S))$.

Khi tính tọa độ của vector, có thể dùng công thức đổi tọa độ hay dùng định nghĩa.

10/ a) Lập $A = ([E]_S \ [F]_S \ [G]_S) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ thì $|A| \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và ta có $(S \to T) = A$. Suy ra $(T \to S) = A^{-1}$.

b) <u>Cách 1 :</u> Do $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$ và $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$

và $(T \to S) = ([X]_T \ [Y]_T \ [Z]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra $(S \to T) = (T \to S)^{-1}$.

<u>Cách 2 :</u> Đặt $W = < T >$ thì $W \le \mathbf{R}^3$. Do $S \subset < T >$ nên $< S > \subset < T >$, nghĩa là $\mathbf{R}^3 \le W$.
Vậy $W = < T > = \mathbf{R}^3$. T là một tập sinh có 3 vector của $\mathbf{R}^3$(3 chiều) nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$

Ta có $(T \to S) = ([X]_T \ [Y]_T \ [Z]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $(S \to T) = (T \to S)^{-1}$.

11/ Lập $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ và $\Delta = |A| = (ad - bc)$. Dựa vào giả thiết, hãy chỉ ra $\Delta^2 = 1$.

Đặt $[Z]_S = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ thì ta được hệ phương trình tuyến tính $pX + qY = Z$. Giải hệ bằng qui tắc Cramer.

12/ a) Giải thích S là một cơ sở của W để thấy $\dim W = |S| = 2$. $X = (u,v,w) \in W \Leftrightarrow 3u - 7v + 5w = 0$ (*)

Nếu $X = (u, v, w) \in W$ thì $[X]_S = 3^{-1}\begin{pmatrix} 2v - w \\ 2w - v \end{pmatrix}$ (**). Từ (*), ta có $T \subset W$.

Ta giải thích được T cũng là một cơ sở của W. Từ (**), ta có $P(S \to T) = ([E]_S \ [F]_S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(T \to S) = (S \to T)^{-1}$.

Có thể tìm trực tiếp $(S \to T)$ và $(T \to S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan
$(Y^t \ Z^t \mid E^t \ F^t) \to (I_3 \mid (S \to T))$ và $(E^t \ F^t \mid Y^t \ Z^t) \to (I_3 \mid (T \to S))$.

Ta có $[X]_T = (T \to S)\,[X]_S$.

b) Hoàn toàn tương tự như a), trong đó $X = (u, v, w, t) \in W \Leftrightarrow 7u - 2v + 5w = 0$ (*).

Nếu $X \in W$ thì $[X]_S = 3^{-1}\begin{pmatrix} v-u-w-t \\ 2v-6u-4w-t \\ 3u-v+2w+t \end{pmatrix}$ (**).

$(S \to T) = ([E]_S\ [F]_S\ [G]_S) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $(T \to S) = (S \to T)^{-1}$.

Có thể tìm trực tiếp $(S \to T)$ và $(T \to S)$ bằng cách biến đổi theo phương pháp Gauss – Jordan
$(\,Y^t\ \ Z^t\ \ U^t \mid E^t\ \ F^t\ \ G^t\,) \to (\,I_3 \mid (S \to T)\,)$ và $(\,E^t\ \ F^t\ \ G^t \mid Y^t\ \ Z^t\ \ U^t\,) \to (\,I_3 \mid (T \to S)\,)$.

13/ a) Giải thích S và T lần lượt là một cơ sở của H và K.
$(H + K)$ có một cơ sở là $\{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1,-1) \}$. $(H \cap K)$ có một cơ sở là $\{ (2, 3, 1, 1) \}$.

b) H có một cơ sở là $\{(1,2,1,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,2)\}$ và K có một cơ sở là $\{(1,2,0,1), (0,3,-3,1), (0,0,1,0)\}$.
$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. $(H \cap K)$ có một cơ sở là $\{ (2, 4, 3, 2), (0, 3, 2, 1) \}$.

c) H có một cơ sở là $A = \{(1, 1, 1, 1),(0, 1, 0, 1)\}$ và K có một cơ sở là $B = \{(1,2,0,2),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.
Ta có $H \subset K$ (mỗi vector trong A là một tổ hợp tuyến tính của B) nên $(H + K) = K$ và $(H \cap K) = H$.

d) H có một cơ sở là $\{ (0,-1, 0, 1) \}$ và K có một cơ sở là $\{ (1, 1,-3,-3), (0, 1, 8, 10), (0, 0, 15, 19) \}$.
$(H + K)$ có một cơ sở là $\{ (1, 1, -3, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 8, 11), (0, 0, 0, 1) \}$.
Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. Suy ra $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) = 0$
nên $(H \cap K) = \{\mathbf{O}\}$ có cơ sở duy nhất là $\varnothing$.

e) H có một cơ sở là $\{ (-17, 10, 1, 0), (29,-17, 0, 1) \}$ và K có một cơ sở là $\{ (-1, 1, 0, 0), (11, 0, 1, 1) \}$.
$(H + K)$ có một cơ sở là $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Do $\dim(H + K) = 4$ nên $(H + K) = \mathbf{R}^4$. Suy ra $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) = 0$
nên $(H \cap K) = \{\mathbf{O}\}$ có cơ sở duy nhất là $\varnothing$.

14/ a) Chiều $(\Rightarrow)$: phản chứng. Nếu ($H \not\subset K$ và $K \not\subset H$) thì có $X \in (H \setminus K)$ và có $Y \in (K \setminus H)$.
Vậy $Z = (X + Y) \in L$, nghĩa là $Z \in H$ hay $Z \in K$: từ đây suy ra sự mâu thuẫn. Chiều $(\Leftarrow)$: hiển nhiên.
b) Chọn H và K lần lượt là các không gian con dạng đường thẳng cắt nhau tại gốc **O** của $\mathbf{R}^2$.

<u>CHƯƠNG V :</u> ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH.

1/ a) $\forall X = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3$, $f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ và $[f]_{B,C} = A^t$.

Im(f) có cơ sở $\{(1,3,-2,5),(0,1,-1,1)\}$. Ker(f) có cơ sở $\{(-1,10,7)\}$. $Y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y + z - x = 0 = z + t - 3x$.

b) $\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ và $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên D và E lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$.

$S = (A \to D) = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $T = (B \to E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Ta viết được dễ dàng biểu thức của g từ $[\,g\,]_{A,B}$.

$[\,g\,]_{D,B} = [\,g\,]_{A,B}\,S$. $[\,g\,]_{A,E} = T^{-1}[\,g\,]_{A,B}$. $[\,g\,]_{D,E} = T^{-1}[\,g\,]_{A,B}\,S$.

c) $[\,h\,]_{D,B} = T[\,h\,]_{D,E}$. $[\,h\,]_{A,E} = [\,h\,]_{D,E}\,S^{-1}$. $[\,h\,]_{A,B} = T\,[\,h\,]_{D,E}\,S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.

2/ a) $\forall X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$, $f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{4\times3}(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ và $[\,f\,]_{C,B} = A^t$.

Im(f) có cơ sở {(1,–2,–3),(0,1,2)} và Ker(f) có cơ sở {(8,–6,5,0),(–13,1,0,5)}. $Y \in Im(f) \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$.

b) $\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ và $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nên D và E lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$.

$S = (A \to D) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $T = (B \to E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ta viết được dễ dàng biểu thức của g từ $[\,g\,]_{B,A}$.

$[\,g\,]_{B,D} = S^{-1}[\,g\,]_{B,A}$. $[\,g\,]_{E,A} = [\,g\,]_{B,A}\,T$. $[\,g\,]_{E,D} = S^{-1}[\,g\,]_{B,A}\,T$.

c) $[\,h\,]_{B,D} = [\,h\,]_{E,D}\,T^{-1}$. $[\,h\,]_{E,A} = S[\,h\,]_{E,D}$. $[\,h\,]_{B,A} = S[\,h\,]_{E,D}\,T^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.

3/ a) $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, $f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và $[\,f\,]_B = A^t$.

Im(f) có cơ sở { (1, 2,– 10), (0, 1,– 6) } và Ker(f) có cơ sở { (– 6, 7, 5) }. $Y \in Im(f) \Leftrightarrow 6y + z - 2x = 0$.

b) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên E là cơ sở của $\mathbf{R}^3$. $S = (B \to E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ có $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Từ $[\,g\,]_B$, ta viết được dễ dàng biểu thức của g.

$[\,g\,]_{E,B} = [\,g\,]_B\,S$. $[\,g\,]_{B,E} = S^{-1}[\,g\,]_B$. $[\,g\,]_E = S^{-1}[\,g\,]_B\,S$.

c) $[\,h\,]_{E,B} = S[\,h\,]_E$. $[\,h\,]_{B,E} = [\,h\,]_E\,S^{-1}$. $[\,h\,]_B = S[\,h\,]_E\,S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.

Ta có $Im(h) = \mathbf{R}^3$ và $Ker(h) = \mathbf{O}$.

4/ a) $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, $f(X) = XA$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ nên $f \in L(\mathbf{R}^3)$ và $[\,f\,]_B = A^t$.

Im(f) có cơ sở { (1, 2, 3), (0, 1, 1) } và Ker(f) có cơ sở { (5,– 3, 2) }. $Y = (x,y,z) \in Im(f) \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

b) $\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên E là cơ sở của $\mathbf{R^3}$. $S = (B \to E) = \begin{pmatrix}-3 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}$ có $S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Từ $[\,g\,]_B$, ta viết được dễ dàng biểu thức của g.

$[\,g\,]_{E,B} = [\,g\,]_B S$. $\quad [\,g\,]_{B,E} = S^{-1}[\,g\,]_B$. $\quad [\,g\,]_E = S^{-1}[\,g\,]_B S$.

c) $[\,h\,]_{E,B} = S[\,h\,]_E$. $\quad [\,h\,]_{B,E} = [\,h\,]_E S^{-1}$. $\quad [\,h\,]_B = S[\,h\,]_E S^{-1}$ rồi viết được dễ dàng biểu thức của h.
Ta có $\mathrm{Im}(h) = \mathbf{R^3}$ và $\mathrm{Ker}(h) = \mathbf{O}$.

5/ a) $[\,\alpha\,]_E = \begin{pmatrix}5v+2w-2u\\ 22v+8w-9u\\ u-3v-w\end{pmatrix}$ nên $\alpha = (5v + 2w - 2u)\alpha_1 + (22v + 8w - 9u)\alpha_2 + (u - 3v - w)\alpha_3$ (1).

Ta có $P = (B \to E) = \begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ -1 & 0 & -2\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$ và $Q = (E \to B) = P^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -9 & 22 & 8\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

b) <u>Cách 1 :</u> $\forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R^3}$, từ (1) ta có
$f(\alpha) = (5v + 2w - 2u)f(\alpha_1) + (22v + 8w - 9u)f(\alpha_2) + (u - 3v - w)f(\alpha_3)$
$= (3v + w - 2u, 3v + 2w - 2u, 26u - 64v - 23w)$ (2).

<u>Cách 2 :</u> $[\,f\,]_B = [\,f\,]_{E,B} P^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 26 & -64 & -23\end{pmatrix}$ rồi suy ra (2).

c) <u>Cách 1 :</u> $\forall\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R^3}$, từ (1) ta có
$g(\alpha) = (5v + 2w - 2u)g(\alpha_1) + (22v + 8w - 9u)g(\alpha_2) + (u - 3v - w)g(\alpha_3)$
$= (19u - 48v - 17w, 17v + 6w - 7u, 78v + 28w - 31u, 8v + 3w - 3u)$ (3).

<u>Cách 2 :</u> $[\,g\,]_{B,C} = [\,g\,]_{E,C} P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix}19 & -48 & -17\\ -7 & 17 & 6\\ -31 & 78 & 28\\ -3 & 8 & 3\end{pmatrix}$ rồi suy ra (3).

<u>CHƯƠNG VI:</u> SỰ CHÉO HÓA CỦA MA TRẬN VUÔNG.

1/ Kiến thức cơ bản về định thức : Cho $H, K, L, P \in M_n(\mathbf{R})$, P khả nghịch và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó
$|H^t| = |H|$ $\quad |P|.|P^{-1}| = |PP^{-1}| = |I_n| = 1$ $\quad |HKL| = |H|.|K|.|L|$ $\quad |$

a) Dùng $(xI_n - A^t) = (xI_n - A)^t$ để chỉ ra $p_C(x) = p_A(x)$.
Dùng $(xI_n - P^{-1}AP) = P^{-1}(xI_n - A)P$ và $(xI_n - PAP^{-1}) = P(xI_n - A)P^{-1}$ để chỉ ra $p_D(x) = p_A(x) = p_E(x)$.

b) Để ý $K = P^{-1}HP$ và áp dụng a).

2/ a) $p_A(x) = (x - 4)(x - 1)^2$ và A có các trị riêng thực 4 và 1. E_4^A có một cơ sở là { (1, 1, 2) } và E_1^A có một cơ sở là { (1, 0, 0), (0, – 1, 1) }.

b) $p_B(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ [(1) + (3) và (3)' – (1)'] và B có các trị riêng thực 1, 2 và 3. E_1^B có một cơ sở là { (– 1, 0, 1) }, E_2^B có một cơ sở là { (– 2, 2, 1) } và E_3^B có một cơ sở là { (– 1, 2, 1) }.

3/ a) Ta có $p_A(x) = (x-1)(x^2-4x+12)$ [(1)' – 2(3)' và (3) + 2(1)].
b) Ta có $p_B(x) = x^2(x-1)$ [(1)' + (2)' + (3)' , (2) – (1) và (3) – (1)] và $\dim E_o = 1$.
c) Ta có $p_C(x) = (x+2)(x+4)^2$ [(1)' – (3)' và (3) + (1)] và $\dim E_{-4} = 1$.
d) Tính theo 6 đường chéo, ta có $p_D(x) = (x+1)(x^2-4x+13)$.

4/ a) Phản chứng : Giả sử A chéo hóa được trên F và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix} = cI_n$ để thấy mâu thuẫn.

b) Ta có $p_A(x) = (x+2)^3$ [(3) + (2) và (2)' – (3)'] rồi sử dụng a).

5/ a) Ta có $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ [(1) – 2(2) và (2)' + 2(1)']. Từ đó

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ với $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 8 \\ -18 & -3 & 13 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^k = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$.

Chọn $E \in M_3(\mathbf{R})$ thỏa $E = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt[r]{2} \end{pmatrix}P^{-1}$ thì $E^r = A$ (r nguyên ≥ 2).

b) Ta có $p_B(x) = (x-1)(x-2)^2$ [(2) + 3(3) và (3)' – 3(2)']. Từ đó

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ với $P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $B^k = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^k & \\ & & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$.

Chọn $F \in M_3(\mathbf{R})$ thỏa $F = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt[r]{2} & \\ & & \sqrt[r]{2} \end{pmatrix}P^{-1}$ thì $F^r = B$ (r nguyên lẻ ≥ 3).

c) Ta có $p_C(x) = (x-1)(x-2)^2$ [(1) – (3) và (3)' + (1)']. Từ đó

$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ với $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. Làm tiếp tương tự như a).

d) Ta có $p_D(x) = (x-2)(x+1)^2$ [(1) + (3) và (3)' – (1)']. Từ đó

$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ với $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Làm tiếp tương tự như b).

6/ a) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}$

và $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Như vậy $\forall n \geq 0$, $t_n = A^n t_o = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ và từ đó tính được u_n .

b) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$

và $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Như vậy $\forall n \geq 0$, $t_n = A^n\, t_o = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ và từ đó tính được u_n và v_n.

c) Tương tự b) với $t_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = 4^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+3} \\ u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Như vậy $\forall n \geq 0$, $t_n = A^n\, t_o = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

và từ đó tính được u_n.

e) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Như vậy $\forall n \geq 0$, $t_n = A^n\, t_o = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ và từ đó

tính được u_n, v_n và w_n.

f) Tương tự e) với $t_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
