Biến ngẫu nhiên

Nguyễn Thị Hiên

Ngày 25 tháng 9 năm 2022

Tóm tắt nội dung

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp Ω vào $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X \quad : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X = X(\omega) \end{aligned}$$

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp Ω vào $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X \quad : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X = X(\omega) \end{aligned}$$

Người ta thường dùng các chữ in hoa X, Y, Z, ... để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường x,y,z, ... để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Ví dụ: Thực hiện phép thử gieo đồng thời 3 đồng xu cân đối, trong trường hợp này chúng ta có các biến cố sơ cấp sau

$$\omega_1 = (SSS), \quad \omega_2 = (SSN), \quad \omega_3 = (SNN), \quad \omega_4 = (SNS)$$

$$\omega_5 = (NNN), \quad \omega_6 = (NNS), \quad \omega_7 = (NSS), \quad \omega_8 = (NSN)$$

Ví dụ: Thực hiện phép thử gieo đồng thời 3 đồng xu cân đối, trong trường hợp này chúng ta có các biến cố sơ cấp sau

$$\omega_1 = (SSS), \quad \omega_2 = (SSN), \quad \omega_3 = (SNN), \quad \omega_4 = (SNS)$$

$$\omega_5 = (NNN), \quad \omega_6 = (NNS), \quad \omega_7 = (NSS), \quad \omega_8 = (NSN)$$

Nếu gọi biến ngẫu nhiên X là số đồng xu ngửa xuất hiện thì X nhận các giá trị sau

Ví dụ: Thực hiện phép thử gieo đồng thời 3 đồng xu cân đối, trong trường hợp này chúng ta có các biến cố sơ cấp sau

$$\omega_1 = (SSS), \quad \omega_2 = (SSN), \quad \omega_3 = (SNN), \quad \omega_4 = (SNS)$$

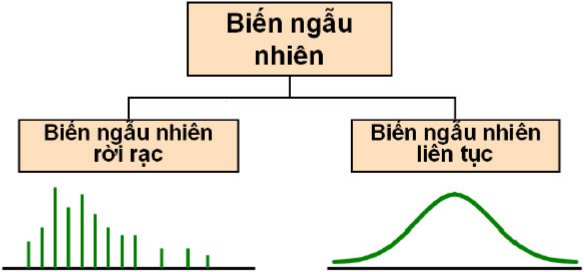
$$\omega_5 = (NNN), \quad \omega_6 = (NNS), \quad \omega_7 = (NSS), \quad \omega_8 = (NSN)$$

Nếu gọi biến ngẫu nhiên X là số đồng xu ngửa xuất hiện thì X nhận các giá trị sau

$$X(\omega_1) = 0, \quad X(\omega_2) = 1, \quad X(\omega_3) = 2, \quad X(\omega_4) = 1$$

$$X(\omega_5) = 3, \quad X(\omega_6) = 2, \quad X(\omega_7) = 1, \quad X(\omega_8) = 2$$

Phân loại biến ngẫu nhiên



Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

Ví dụ

Tung 1 xúc xắc. Gọi X là số chấm xuất hiện thì X có thể nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, 6 và xác suất

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6}, x_i = 1, 2, \ldots, 6$$

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

1. Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

1. Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.
2. Số bit lỗi được truyền đi trong một kênh truyền tín hiệu số.

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

1. Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.
2. Số bit lỗi được truyền đi trong một kênh truyền tín hiệu số.
3. Số con trong một gia đình.

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

1. Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.
2. Số bit lỗi được truyền đi trong một kênh truyền tín hiệu số.
3. Số con trong một gia đình.
4. Số cuộc điện thoại đến một tổng đài ở bưu điện trong một ngày.

Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

1. Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.
2. Số bit lỗi được truyền đi trong một kênh truyền tín hiệu số.
3. Số con trong một gia đình.
4. Số cuộc điện thoại đến một tổng đài ở bưu điện trong một ngày.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

- Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

- Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.
- Độ $0 \leq pH \leq 14$ của một chất hóa học nào đó.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

- Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.
- Độ $0 \leq pH \leq 14$ của một chất hóa học nào đó.
- Biến chiều cao, độ dài ta có thể đo bởi km, m, cm, mm và nhỏ hơn nữa.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

- Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.
- Độ $0 \leq pH \leq 14$ của một chất hóa học nào đó.
- Biến chiều cao, độ dài ta có thể đo bởi km, m, cm, mm và nhỏ hơn nữa.
- Thời gian hoạt động bình thường của một bóng đèn điện tử.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

- Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.
- Độ $0 \leq pH \leq 14$ của một chất hóa học nào đó.
- Biến chiều cao, độ dài ta có thể đo bởi km, m, cm, mm và nhỏ hơn nữa.
- Thời gian hoạt động bình thường của một bóng đèn điện tử.

Các giá trị ở ví dụ trên có thể lấy bất kỳ giá trị nào tùy thuộc vào khả năng đo lường.

Định nghĩa

Một hệ thức cho phép biễu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Quy luật phân phối xác suất

Định nghĩa

Một hệ thức cho phép biễu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa hàm phân phối xác suất (Cumulative distribution function)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X (xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω) là hàm $F(x)$ được định nghĩa

$$F(x) = P(X \leq x)$$

với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$

Định nghĩa

Một hệ thức cho phép biễu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa hàm phân phối xác suất (Cumulative distribution function)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X (xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω) là hàm $F(x)$ được định nghĩa

$$F(x) = P(X \leq x)$$

với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

iii) Liên tục phải, có giới hạn bên trái tại mỗi điểm.

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

iii) Liên tục phải, có giới hạn bên trái tại mỗi điểm.

iv) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

iii) Liên tục phải, có giới hạn bên trái tại mỗi điểm.

iv) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

v) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \leq b$

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

iii) Liên tục phải, có giới hạn bên trái tại mỗi điểm.

iv) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

v) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \leq b$

Định nghĩa hàm xác suất (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa hàm xác suất (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

i) $f(x_i) \geq 0$

Định nghĩa hàm xác suất (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

Định nghĩa hàm xác suất (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$

Định nghĩa hàm xác suất (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

i) $f(x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

iii) $f(x_i) = P(X = x_i)$

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

Bảng phân phối của một biến ngẫu nhiên X có dạng như sau:

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

Bảng phân phối của một biến ngẫu nhiên X có dạng như sau:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	...

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

Bảng phân phối của một biến ngẫu nhiên X có dạng như sau:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	...

Ví dụ

1. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$f(x) = \frac{2x+1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

a) Lập bảng phân phối xác suất

b) Tính $P(X \leq 1)$ và $P(2 \leq X \leq 4)$

Ví dụ

1. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$f(x) = \frac{2x+1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

a) Lập bảng phân phối xác suất

b) Tính $P(X \leq 1)$ và $P(2 \leq X \leq 4)$

2. Một xạ thủ có 4 viên đạn. bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0.7. Nếu có một viên trúng hoặc hết đạn thì dừng. Gọi X là số viên đạn đã bắn, lập bảng phân phối xác suất cho X.

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu là $F(x)$, được xác định như sau

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Cụ thể

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$

Ví dụ

Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong một lần gieo đồng xu cân đối đồng chất. Hãy lập bảng phân phối và xác định hàm phân phối xác suất của X.

Ví dụ

Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong một lần gieo đồng xu cân đối đồng chất. Hãy lập bảng phân phối và xác định hàm phân phối xác suất của X.

Lời giải

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X:

Ví dụ

Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong một lần gieo đồng xu cân đối đồng chất. Hãy lập bảng phân phối và xác định hàm phân phối xác suất của X.

Lời giải

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} P(\varnothing) = 0 & x < 0 \\ P(S) = 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ P(\Omega) = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Ví dụ: Một lô hàng có 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm không hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm không đạt chất lượng trong 2 sản phẩm được chọn.

a) Lập bảng phân phối xác suất cho X.
b) Viết hàm phân phối xác suất.

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục ngoài công cụ là hàm phân phối xác suất ta còn sử dụng hàm mật độ xác suất của nó.

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

i) $P(X \in I) = \displaystyle\int_I f(x)dx, \forall I \subset \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

hàm số $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Chú ý:

1. Mọi hàm $f(x)$ không âm, và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó.

Chú ý:

1. Mọi hàm $f(x)$ không âm, và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó.
2. Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Chú ý:

1. Mọi hàm $f(x)$ không âm, và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó.
2. Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

3. $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Chú ý:

1. Mọi hàm $f(x)$ không âm, và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó.
2. Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

3. $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$
4. Nếu X là một biến ngẫu nhiên liên tục, với x_1 và x_2 bất kỳ

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(x_1 < X \leq x_2) \\ &= P(x_1 \leq X < x_2) \\ &= P(x_1 < X < x_2) \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

Ví dụ 1:

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

- Xác định a để f(x) là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục X.
- Tính $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$
- Xác định hàm phân phối của X.

Lời giải

- Điều kiện f(x) là hàm mật độ là:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

Ta có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Lời giải

- Điều kiện f(x) là hàm mật độ là:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

  Ta có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

- $P(1/4 \leq X \leq 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx = 1/4$

Lời giải

- Ta có $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} dt = x$
  Hàm phân phối của X có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2:

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X.

Ví dụ 2:

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X.

b. Xác định hàm phân phối của X.

Ví dụ 2:

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X.

b. Xác định hàm phân phối của X.

c. Tính $P(1 \le X \le 3/2)$.

Ví dụ 2:

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X.

b. Xác định hàm phân phối của X.

c. Tính $P(1 \leq X \leq 3/2)$.

Ví dụ 3:

Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a. Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.

Ví dụ 3:

Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a. Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.

b. Một thiết bị có tuổi thọ trong khoảng từ 1000 đến 2000 giờ.

Ví dụ 3:

Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a. Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.

b. Một thiết bị có tuổi thọ trong khoảng từ 1000 đến 2000 giờ.

c. Xác định số giờ mà có khoảng 10% thiết bị hỏng trước thời gian đó.

Ví dụ 3:

Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a. Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.
b. Một thiết bị có tuổi thọ trong khoảng từ 1000 đến 2000 giờ.
c. Xác định số giờ mà có khoảng 10% thiết bị hỏng trước thời gian đó.
d. Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$.

Ví dụ 3:

Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a. Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.
b. Một thiết bị có tuổi thọ trong khoảng từ 1000 đến 2000 giờ.
c. Xác định số giờ mà có khoảng 10% thiết bị hỏng trước thời gian đó.
d. Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$.

Ví dụ 4:

Thời gian để hoàn thành một phản ứng hóa học (đv: mili-giây) là biến ngẫu nhiên liên tục X và có hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0.01x} & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Xác định hàm mật độ xác suất của X.

Ví dụ 4:

Thời gian để hoàn thành một phản ứng hóa học (đv: mili-giây) là biến ngẫu nhiên liên tục X và có hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0.01x} & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Xác định hàm mật độ xác suất của X.
b. Xác suất để phản ứng hoàn thành trong vòng 200 mili-giây là bao nhiêu?

Ví dụ 4:

Thời gian để hoàn thành một phản ứng hóa học (đv: mili-giây) là biến ngẫu nhiên liên tục X và có hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0.01x} & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Xác định hàm mật độ xác suất của X.

b. Xác suất để phản ứng hoàn thành trong vòng 200 mili-giây là bao nhiêu?

Kỳ vọng (Expectation)

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$	$\dots$

Kỳ vọng của X, ký hiệu $\mathbb{E}(X)$, là một số được định nghĩa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i f(x_i) \end{aligned}$$

Ví dụ

Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 3 viên bi đỏ nặng 10g, 5 viên bi trắng nặng 50g và 2 viên bi xanh nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên ra 1 viên bi và gọi X là khối lượng của viên bi đó. Tính $\mathbb{E}(X)$?

Kỳ vọng

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất f(x), kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Kỳ vọng

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất f(x), kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Ví dụ

Cho X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tính kỳ vọng của X

Kỳ vọng

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất f(x), kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Ví dụ

Cho X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tính kỳ vọng của X

Tính chất của kỳ vọng

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

- $\mathbb{E}(c) = c$
- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Ý nghĩa của kỳ vọng

- Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên.

Kỳ vọng

Ý nghĩa của kỳ vọng

- Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên.
- Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Ví dụ

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 20e^{-20(x-12.5)}, & x \geq 12.5 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Tính $P(X > 12.6)$

b. Tính kỳ vọng của X.

Phương sai (Variance)

Định nghĩa

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai của X, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2$$

Định nghĩa

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai của X, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2$$

Trong thực tế, để tính phương sai của biến ngẫu nhiên X ta thường sử dụng công thức

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Độ lệch chuẩn (Standard deviation)

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X là căn bậc 2 của $\mathbb{V}ar(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$$

Phương sai

Định nghĩa

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, công thức tính phương sai là

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

Định nghĩa

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, công thức tính phương sai là

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, công thức tính phương sai là

$$\mathbb{V}ar(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Tính chất của phương sai

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì phương sai có các tính chất sau

i) $\mathbb{V}ar(c) = 0$

Tính chất của phương sai

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì phương sai có các tính chất sau

i) $\mathbb{V}ar(c) = 0$

ii) $\mathbb{V}ar(cX) = c^2\mathbb{V}ar(X)$

Tính chất của phương sai

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì phương sai có các tính chất sau

i) $\mathbb{V}ar(c) = 0$

ii) $\mathbb{V}ar(cX) = c^2\mathbb{V}ar(X)$

iii) $\mathbb{V}ar(X + c) = \mathbb{V}ar(X)$

Tính chất của phương sai

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì phương sai có các tính chất sau

i) $\mathbb{V}ar(c) = 0$
ii) $\mathbb{V}ar(cX) = c^2\mathbb{V}ar(X)$
iii) $\mathbb{V}ar(X + c) = \mathbb{V}ar(X)$
iv) Nếu X và Y độc lập thì $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, hay phương sai là trung bình bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, hay phương sai là trung bình bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất. Nếu X là kích cỡ nào đó thì $\mathbb{V}ar(X)$ biểu thị cho độ chính xác ứng với kích cỡ đó của các sản phẩm.

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, hay phương sai là trung bình bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất. Nếu X là kích cỡ nào đó thì $\mathbb{V}ar(X)$ biểu thị cho độ chính xác ứng với kích cỡ đó của các sản phẩm.
- Trong chăn nuôi với X là mức độ tăng trưởng thì $\mathbb{V}ar(X)$ thể hiện mức độ tăng trưởng đồng đều của các gia súc.

Ví dụ

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3
P	0.3	0.4	0.3

Tính $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$?

Ví dụ

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3
P	0.3	0.4	0.3

Tính $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$?

Lời giải

Ta có:

X^2	1	4	9
P	0.3	0.4	0.3

và $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 4.6$, $\mathbb{V}ar(X) = 0.6$

Trung vị (Median)

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên X, trung vị của X, ký hiệu $Med(X)$, là giá trị m của biến ngẫu nhiên sao cho

$$\begin{cases} P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \\ P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trung vị (Median)

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên X, trung vị của X, ký hiệu $Med(X)$, là giá trị m của biến ngẫu nhiên sao cho

$$\begin{cases} P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \\ P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi X là biến ngẫu nhiên liên tục thì trung vị của X chính là điểm chia phân phối xác suất thành hai phần bằng nhau. Nghĩa là

$$P(X \geq m) = P(X \leq m) = \frac{1}{2}.$$

Mode

Định nghĩa

Mode của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $Mode(X)$, là giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được với xác suất lớn nhất.

Mode

Định nghĩa

Mode của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $Mode(X)$, là giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được với xác suất lớn nhất.

- X là biến ngẫu nhiên rời rạc.

$$Mode(X) = x_i \Leftrightarrow p_i = P(X = x_i) = \max\{p_1, p_2, \ldots\}$$

Mode

Định nghĩa

Mode của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $Mode(X)$, là giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được với xác suất lớn nhất.

- X là biến ngẫu nhiên rời rạc.

$$Mode(X) = x_i \Leftrightarrow p_i = P(X = x_i) = \max\{p_1, p_2, \dots\}$$

- X là biến ngẫu nhiên liên tục

$$Mode(X) = x_i \Leftrightarrow f(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

Bài tập 1:
Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	a	0.1	0.3	0.4	2
P	0.3	0.2	0.2	b	0.1

a. Xác định a, b biết $\mathbb{E}(X) = 0.3$
b. Tìm hàm phân phối xác suất của X.

Bài tập 2:

Theo thống kê, một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên 1 năm với xác suất là 0.992 và xác suất người đó chết trong vòng 1 năm tới là 0.008. Một công ty bảo hiểm A đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho 1 năm với số tiền chi trả là 10,000USD, phí bảo hiểm là 100USD. Hỏi trung bình công ty A lãi bao nhiêu khi bán bảo hiểm cho người đó?

Bài tập 3:

Người thợ chép tranh mỗi tuần chép hai bức tranh độc lập A và B với xác suất hỏng tương ứng là 0.03 và 0.05. Biết rằng nếu thành công thì người thợ sẽ kiếm lời từ bức tranh A là 1.3 triệu đồng và B là 0.9 triệu đồng, nhưng nếu hỏng thì bị lỗ do bức tranh A là 0.8 triệu đồng và do B là 0.6 triệu đồng. Hỏi trung bình người thợ kiếm được bao nhiêu tiền chép tranh mỗi tuần?

Bài tập 4:

Tuổi thọ X (năm) của người dân ở một địa phương là biến ngẫu nhiên có hàm phân phối xác suất như sau

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

với $\lambda = 0.013$. Tính

a. Tỷ lệ người dân thọ từ 60 đến 70 tuổi.

b. Hàm mật độ của X.

c. Tuổi thọ trung bình và $\mathbb{V}ar(X)$.

Bài tập 5:

Tuổi thọ X (tháng) của một bộ phận trong một dây chuyền sản xuất là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{2}(x+10)^{-2} & \text{khi } x \in (0,40) \\ 0 & \text{khi } x \notin (0,40) \end{cases}$$

Tính

a. Xác suất tuổi thọ của bộ phận này nhỏ hơn 6 tháng.

b. Tuổi thọ trung bình của bộ phận này.

c. Hàm phân phối xác suất của X.

Bài tập 6:
Cho X là biến ngẫu nhiên có hàm phân phối tích lũy như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

Tính

a. Tính $P(X \leq 1), P(0,5 \leq X \leq 1)$ và $P(X \geq 1,5)$.
b. Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.
c. Tìm giá trị trung vị của X.
d. Tính $E(X)$ và $Var(X)$.
e. Tính giá trị kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $h(X) = X^2$.
f. Tính $Mode(X)$.