Câu 1: Hàm sinh $F(x)$ cho dãy $\{a_k \mid k \geq 0\}$

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^2 . (x^2 + x^3 + \ldots).(x^3 + x^4 + \ldots)^2 (x^5 + x^7 + x^{11})$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 . \frac{x^2}{1-x} . \frac{x^6}{(1-x)^2} . (x^5 + x^7 + x^{11})$$

$$= \frac{x^8.(x^5 + x^7 + x^{11})}{(1-x)^5}$$

Hệ số của x^{38} trong $F(x)$ là hệ số của x^{30} trong $\frac{x^5 + x^7 + x^{11}}{(1-x)^5}$

Đặt $g(x) = x^5 + x^7 + x^{11}$ có hệ số của x^r là $a_5 = \cancel{a_7} = a_{11} = 1$

$h(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$ có hệ số của x^r là $b_r = \binom{r+5-1}{r}$

Hệ số a_{38} cần tìm là hệ số của x^{30} trong $g(x).h(x)$ được tính bởi công thức:

$$a_{30} b_0 + a_{29} b_1 + \ldots + a_0 b_{30}$$

Thu gọn ta được: $a_5 b_{25} + a_7 b_{23} + a_{11} b_{19}$

$$= 1.\binom{25+5-1}{25} + 1.\binom{23+5-1}{23} + 1.\binom{19+5-1}{19}$$

$$= 50156$$

Câu 2: Hàm sinh mũ $E(x)$ cho dãy $\{b_k \mid k \geq 0\}$ là:

$$E(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right).\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right).\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right).$$

$$\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$= e^x.(e^x - 1).\left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right].\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{4}\left(e^{4x} - e^{3x} + e^{-x} - 1\right)$$

Áp dụng công thức $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ ta được:

$$E(x) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} - 1\right)$$

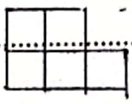
Suy ra hệ số của x^k trong $E(x)$ cũng chính là b_k và bằng:

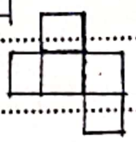
$$b_k = \frac{1}{4}\left(4^k - 3^k + (-1)^k\right)$$

Câu 4: Gọi f là ca sĩ được thêm vào với điều kiện người đó hát được tất cả các bài. Xét bài toán chọn 6 bài hát cho 6 ca sĩ, đây cũng là bài toán tìm số hoán vị cho vị trí cấm.

	1	2	3	4	5	6
a	X	X				
b	X	X	X			
c					X	
d				X	X	X
e						X
f						

Gọi B là bàn cờ được tạo nên bởi các vị trí cấm

(C) 

 (D)

Vì B được tạo nên bởi 2 phần rời nhau nên ta có:

$$R(B,x) = R(C,x) \times R(D,x)$$
$$= (1 + 5x + 4x^2) \times (1 + 5x + 5x^2 + x^3)$$
$$= 1 + 10x + 34x^2 + 46x^3 + 25x^4 + 4x^5$$

Số cách chọn bài hát là số hoán vị trên vị trí cấm là:

$$\sum_{i=0}^{6} (-1)^i (6-i)!\, r_i(B)$$
$$= 6!.1 - 5!.10 + 4!.34 - 3!.46 + 2!.25 - 1!.4 + 0!.0$$
$$= 106$$

Câu 3:

a) Gọi A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tập hợp số nghiệm nguyên thỏa $x \ge 5$, $y \ge 5$, $z \ge 10$, $t \ge 10$

Theo đề ta cần tìm: $|X| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$

Ta có: $|A_1| = K_4^{16} = \binom{16+4-1}{16} = 969$

$|A_2| = K_4^{16} = \binom{16+4-1}{16} = 969$

$|A_3| = |A_4| = K_4^{11} = \binom{11+4-1}{11} = 364$

Đề ý vì có thể đáp ... Đáp án có thể ... s1 - s2 + s3 - ...

Suy ra: $|X| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 2666$

b) ~~Gọi B_i là tập hợp các số nguyên thỏa $x \ge 5$, $y \ge 5$, $z \ge 10$, $t \ge 10$ (với $i = 1, 2, 3, 4$)~~

Tiết giả cần tìm là: $|\bar{A_1}\bar{A_2}\bar{A_3}\bar{A_4}|$

Gọi U là tập hợp các số nguyên không âm của phương trình:

$|U| = K_4^{21} = \binom{21+4-1}{21} = 2024$

Ta có: $|A_1A_2| = K_4^{11} = 364$; $|A_1A_3| = |A_1A_4| = K_4^{6} = 84$;

$|A_2A_3| = |A_2A_4| = K_4^{6} = 84$; $|A_3A_4| = K_4^{1} = 4$

$|A_1A_2A_3| = |A_1A_2A_4| = K_4^{1} = 4$; $|A_1A_3A_4| = |A_2A_3A_4| = 0$

$|A_1A_2A_3A_4| = 0$

Suy ra: $S_1 = \sum_{i=1}^{4} A_i = 2666$

$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_iA_j| = 704$

để ý câu 3a vì đáp án đúng có thể là s1 - s2 + s3 - s4

$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i A_j A_k| = 8$

$S_4 = |A_1 A_2 A_3 A_4| = 0$

Vậy $|Y| = |\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$

$= 2024 - 2666 + 704 - 8 + 0$

$= 54$

c) $|Z| = N_1 = S_1 - \binom{2}{1} S_2 + \binom{3}{1} S_3 - \binom{4}{1} S_4$

$= 2666 - \binom{2}{1}.704 + \binom{3}{1}.8 - \binom{4}{1}.0$

$= 1282$

d) $|T| = N_2^* = S_2 - \binom{2}{1}.S_3 + \binom{3}{1} S_4$

$= 704 - \binom{2}{1}.8 + \binom{3}{1}.0$

$= 688$

Câu 5/

a) $B_1 = \sum_{k=0}^{1} \left\{ {1 \atop k} \right\} = \left\{ {1 \atop 0} \right\} + \left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1$

$B_2 = \sum_{k=0}^{2} \left\{ {2 \atop k} \right\} = \left\{ {2 \atop 0} \right\} + \left\{ {2 \atop 1} \right\} + \left\{ {2 \atop 2} \right\} = 2$

$B_3 = \sum_{k=0}^{3} \left\{ {3 \atop k} \right\} = \left\{ {3 \atop 0} \right\} + \left\{ {3 \atop 1} \right\} + \left\{ {3 \atop 2} \right\} + \left\{ {3 \atop 3} \right\} = 5$

Ta có công thức: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.B_k$

Suy ra: $B_4 = \binom{3}{0}.B_0 + \binom{3}{1}.B_1 + \binom{3}{2}.B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 15$

$B_5 = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1}.B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{4} B_4 = 52$

$B_6 = \binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4 + \binom{5}{5} B_5 = 203$

b) $1005290 = 2 \times 5 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37$

Mỗi nhân tử trong phân tích số 1005290 là tích của phần tử của tập con khác rỗng của $\{2, 5, 11, 13, 19, 37\}$. Do đó số cách phân tích là số phân hoạch của tập này thành 2 tập con

Vậy có $\left\{ {6 \atop 2} \right\} = 2^{6-1} - 1 = 31$ cách phân tích N thành tích của 2 số nguyên ≥ 2

Số cách phân tích N thành tích của các số nguyên ≥ 2 là:

$B_6 = 203$ cách