Ôn thi giữa kì vi tích phân 2B

Hoàng Ngọc Phú – Huỳnh Quốc Huy

Ngày 11–14 tháng 4 năm 2024

Mục lục

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Không gian Euclide

1.1.1 Định nghĩa

Không gian Euclide gồm tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$$

với $n \in \mathbb{N}$ và các phép toán, độ dài, khoảng cách Euclide được định nghĩa như sau: với $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kì thì

- $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
- $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.
- Tích trong (vô hướng) $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.
- Độ dài Euclide của x là $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
- Khoảng cách Euclide giữa x và y là $\|x - y\|$.

1.1.2 Tập và điểm đặc biệt

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bất kì và $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Quả cầu mở tâm $x \in \mathbb{R}^n$, bán kính $r > 0$ được nghĩa là $B(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n \colon \|x - u\| < r\}$.

2. Điểm x được gọi là điểm trong (interior point) của D nếu tồn tại $r > 0$ để $B(x, r) \subseteq D$. Điểm x được gọi là điểm ngoài (exterior point) của D nếu tồn tại $r > 0$ để $B(x, r) \cap D = \emptyset$. Nếu x không phải điểm trong và ngoài của D thì ta gọi x là điểm biên (boundary point) của D.

3. Tập D được gọi là tập mở nếu D cũng là tập các điểm trong của D. D được gọi cũng là tập đóng nếu D là tập gồm các điểm trong và điểm biên của D.

4. Điểm x được gọi điểm tụ của D nếu mọi quả cầu tâm x bán kính dương bất kì luôn tòn tại một điểm thuộc D khác x.

1.2 Giới hạn

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ và a là điểm tụ của D. Ta nói giới hạn của $f(x)$ là $L \in \mathbb{R}$ khi x tiến dần về a nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < \|x - a\| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Khi đó, ta kí hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Hiểu nôm na, khi x càng gần a thì $f(x)$ càng gần L.

1.3 Liên tục

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ và $a \in D$. Ta nói $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 \leq \|x - a\| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Hiểu nôm na, khi x càng gần a thì $f(x)$ càng gần $f(a)$.

1.4 Đạo hàm riêng

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ và $a = (a_1, \ldots, a_n)$ là điểm trong của D. Giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}$$

nếu tồn tại được gọi là đạo hàm riêng theo biến thức i của f tại a và kí hiệu là

$$D_{x_i} f(a) = f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Hiểu đơn giản, xem các biến khác là hằng số còn biến được dùng để tính đạo hàm riêng là ẩn và ta thực hiện phép đạo hàm một biến của f theo biến đó.

1.5 Vectơ gradient

Cho $D \in \mathbb{R}^n$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, Vectơ gradient của f là vectơ các thành phần là đạo hàm riêng (có tồn tại) của f được định nghĩa bởi

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

1.6 Khả vi

Hàm 2 biến f có các đạo hàm riêng tại điểm (a, b) thì hàm bậc nhất

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

xấp xỉ tốt cho f tại điểm gần (a, b). Nếu

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon(x, y)(y - b)$$

trong đó $\varepsilon_1(x, y) \to 0$ và $\varepsilon_2(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (a, b)$ thì f được gọi là khả vi tại (a, b).

1.7 Khả vi liên tục (trơn)

Hàm số nhiều biến f được gọi là khả vi liên tục (hay trơn đến cấp 1) trên một tập mở U nếu mọi đạo hàm riêng của f đều liên tục trên U.

1.8 Hàm vectơ và ma trận Jacobi

Cho $m, n \in \mathbb{N}$, tập $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Ánh xạ $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là hàm vectơ m chiều n biến. Ta có thể tách f thành các hàm thành phần, tức là $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ trong đó $f_i, i = \overline{1, m}$ là các hàm số n biến.

Nếu các hàm thành phần khả vi trên một tập mở U thì người ta định nghĩa đạo hàm của f là ma trận, có tên là Jacobi, như sau

$$J_f = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \dots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp $m = 1$ thì $J_f = \nabla f$. Trong trường hợp $n = 1$ thì $f'(x) = \nabla f = \left(\frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} x}, \frac{\mathrm{d} f_2}{\mathrm{d} x}, \dots, \frac{\mathrm{d} f_m}{\mathrm{d} x}\right)$.

1.9 Quy tắc móc xích

Cho $f(x_1, \dots, x_m)$ là hàm số m biến, $g(t_1, t_2, \dots, t_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ là hàm vectơ m chiều n biến. Khi đó, ta có đẳng thức

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

Trong trường hợp $n = 1$, tức là g là hàm vectơ 1 biến thì ta có thể thay kí hiệu ∂ bởi d.

1.10 Đạo hàm theo hướng

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, a là điểm trong của D và $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\|v\| = 1$. Ta định nghĩa đạo hàm của f theo hướng v tại a bởi

$$D_v f = \frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

Nếu f khả vi trên một tập mở U, ta có công thức

$$D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v \quad \forall x \in U$$

1.11 Ý nghĩa của vectơ gradient

1. Ta có

$$\begin{aligned} \|D_v f(x)\| &= \|\nabla f(x) \cdot v\| \\ &\leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \\ &\leq \|\nabla f(x)\| \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

   Đứng tại điểm $P(x, f(x)$ trên đồ thị, nếu quay mặt về hướng của $\nabla f(x)$ thì mặt cong đồ thị lên dốc nhiều nhất. Và nếu quay mặt về hướng $-\nabla f(x)$ thì mặt cong đồ thị tuột dốc nhiều nhất.

2. Vectơ gradient là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với mặt đẳng trị $f(x, y, z) = k$ và tiếp tuyến của đường đẳng trị $g(x, y) = k$ (trong đó k là hằng số và f, g là hai hàm số khả vi).

2 Nội dung thi giữa kì

2.1 Tính đạo hàm riêng tại 1 điểm (phải thông qua định nghĩa mới tính được)

2.1.1 Các ví dụ

Ví dụ. Cho hàm số f có 2 biến định bởi

$$f(x;y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} + 1 & \text{nếu } (x;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0;0) \end{cases}$$

Tính đạo hàm riêng theo x của hàm số tại điểm $(0;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} + 1\right) - 1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $f_x(0;0) = 0$. ∎

2.1.2 Nhận xét

Với dạng bài này, thường đề sẽ cho hàm rẽ nhánh, tức là F có dạng

$$F(x;y) = \begin{cases} C & (x;y) = (a;b) \\ f(x;y) & (x;y) \neq (a;b) \end{cases}$$

Và yêu cầu chúng ta tính đạo hàm theo riêng tại điểm $(a;b)$, Giả sử với trường hợp tính đạo hàm riêng của F theo x tại (a,b) ta sẽ làm như sau

Bước 1. Xét $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{F(x;b) - F(a;b)}{x - a}$.

Bước 2. Nếu lim tồn tại hữu hạn và bằng L thì ta kết luận $F_x(a;b) = L$.

Bước 3. Nếu lim không tồn tại hoặc tồn tại nhưng là $\pm\infty$ thì ta kết luận không tồn tại đạo hàm riêng của F theo biến x tại $(a;b)$.

2.2 Tính toán đạo hàm riêng cấp 1 và 2 (bao gồm các hàm cho bởi biểu thức tích phân) thông qua các công thức.

2.2.1 Các ví dụ

Ví dụ. Tính $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(x^2y + xy)$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x^2y+xy) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x^2y+xy)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x)\\ &= 2x+1\end{aligned}$$

■

Ví dụ. Tính $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

Lời giải. Đặt $u = xy$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_1^{u} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= \mathrm{e}^{-(xy)^2}y\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-(xy)^2}y$. ■

2.2.2 Nhận xét

- Chúng ta cần chú ý đến thứ tự đạo để tránh lấy đạo hàm nhầm lẫn.
- Quy tắc móc xích "khá giống" với phép nhân phân số.

2.3 Chứng minh các đẳng thức liên quan đạo hàm riêng và quy tắc móc xích

2.3.1 Các ví dụ

Ví dụ. Cho $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Chứng tỏ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Lời giải. Ta có

$$f_x(x,y,z) = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -xf^3(x,y,z)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= -f^3(x,y,z) - 3f_x(x,y,z)f^2(x,y,z) \\ &= 3x^2f^5(x,y,z) - f^3(x,y,z) \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y,z) &= 3y^2f^5(x,y,z) - f^3(x,y,z) \\ f_{zz}(x,y,z) &= 3z^2f^5(x,y,z) - f^3(x,y,z) \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} (f_{xx}+f_{yy}+f_{zz})(x,y,z) &= 3f^3(x,y,z)\big((x^2+y^2+z^2)f^2(x,y,z) - 1\big) \\ &= 3f^3(x,y,z)(1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Ví dụ. Cho $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(x,y,z) = f\Big((x^2+y^2+z^2)^{1/2}\Big)$. Chứng tỏ rằng

$$\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)(x,y,z) = f'\Big((x^2+y^2+z^2)^{1/2}\Big)^2$$

Lời giải. Đặt $u = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= f'(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = f'(u)^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 &= f'(u)^2\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 &= f'(u)^2\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)(x,y,z) = f'(u)^2 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$
$$= f'(u)^2$$
$$= f'\Big((x^2+y^2+z^2)^{1/2}\Big)^2 \qquad \blacksquare$$

2.4 Tính đạo hàm theo hướng của vectơ v (chưa phải là vectơ đơn vị)

2.4.1 Các ví du

Ví dụ. Cho hàm số $f(x,y) = x\mathrm{e}^y$. Tính đạo hàm của f tại $P(2,0)$ theo hướng từ P đến $Q(1/2,2)$. Xác định hướng làm cho đạo hàm của f tại P lớn nhất.

Lời giải. Ta có $\nabla f = (f_x, f_y) = (\mathrm{e}^y, x\mathrm{e}^y)$, suy ra $\nabla f(P) = (1,2)$. Vectơ đơn vị chỉ hướng từ P đến Q là

$$v = \frac{1}{PQ}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1{,}5^2+2^2}}\left(-\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Do f trơn đến cấp 1 trên $\mathbb{R}^2$ nên

$$D_v f(P) = \nabla f(P)\cdot v = 1\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1$$

Đạo hàm theo hướng của f tại P đạt giá trị lớn nhất bằng

$$\|\nabla f(P)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

theo hướng của $\nabla f(P) = (1,2)$. $\blacksquare$

2.4.2 Nhận xét

Để sử dụng công thức $D_v f(x) = \nabla f(x)\cdot v$, chúng ta cần v phải là vectơ đơn vị. Nếu không, ta xét vectơ $\dfrac{v}{\|v\|}$.

2.5 Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường cong, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong bằng cách dùng vector gradient

2.5.1 Các ví dụ

Ví dụ. Dùng vectơ gradient, hãy viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $(S)\colon \sqrt{xyz} = 6$ tại điểm $(3; 2; 6)$.

Lời giải. Đặt $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, ta có

$$f_x(x; y; z) = \frac{\sqrt{xyz}}{2x}$$
$$f_y(x; y; z) = \frac{\sqrt{xyz}}{2y}$$
$$f_z(x; y; z) = \frac{\sqrt{xyz}}{2z}$$

Nên

$$\nabla f(3; 2; 6) = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta lại có (S) là mặt đẳng trị $f(x, y, z) = 6$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $P(3; 2; 6)$ là

$$\nabla f(P) = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Vậy phương trình mặt phẳng tiếp xúc là

$$(\alpha)\colon 2(x - 3) + 3(y - 2) + (z - 6) = 0$$

■

2.5.2 Nhận xét

Sử dụng tính chất $\nabla f(x)$ là vectơ pháp tuyến để viết phương trình mặt phẳng (hay đường thẳng) tiếp xúc.

3 Đề thi giữa kì vi tích phân 2B năm học 2022–2023

Câu 1. Hãy thực hiện các phép tính sau

a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}(x^2y + xy)$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ với $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Lời giải. a) Ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}(x^2y + xy) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^2y + xy)\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(2xy + y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(2xy + y)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(2x + 1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

b) Ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) \\
&= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Do đó

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

■

Câu 2. Hãy thực hiện các phép tính sau

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

b) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_x^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

Lời giải. a) Đặt $u = xy$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_1^{u} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= \mathrm{e}^{-u^2}y\\ &= \mathrm{e}^{-(xy)^2}y\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Theo câu a, ta có

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-(xy)^2}y$$

Lại có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Nên

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-(xy)^2}y - \mathrm{e}^{-x^2}$$

■

Câu 3. Dùng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, hãy thực hiện phép tính sau

a) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ tại $s = 4, t = 2, u = 1$, với $z = x^4 + x^2y$ và $x = s + 2t - u, y = stu^2$.

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$ với $z = f(x - y)$ và f là hàm một biến khả vi.

Lời giải. a) Với $s = 4, t = 2, u = 1$ thì $x = 7, y = 8$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= (4x^3 + 2xy) + x^2tu^2\\ &= 1582\end{aligned}$$

b) Đặt $u = x - y$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot(-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Câu 4. Hãy thực hiện các yêu cầu sau

a) Tìm đạo hàm tại $(3; 2; 6)$ của hàm f cho bởi $f(x; y; z) = \sqrt{xyz}$ theo hướng của vectơ $v = (-1; -2; 2)$.

b) Dùng vectơ gradient, hãy viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (S): $\sqrt{xyz} = 6$ tại điểm $(3; 2; 6)$.

Lời giải. a) Vectơ đơn vị theo hướng của v là

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned}f_x(x; y; z) &= \frac{\sqrt{xyz}}{2x} \\ f_y(x; y; z) &= \frac{\sqrt{xyz}}{2y} \\ f_z(x; y; z) &= \frac{\sqrt{xyz}}{2z}\end{aligned}$$

Nên

$$\nabla f(3; 2; 6) = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Do đó đạo hàm $f(x; y; z) = \sqrt{xyz}$ tại $(3; 2; 6)$ theo hướng của vectơ $v = (-1; -2; 2)$ là

$$\begin{aligned}D_u f(3; 2; 6) &= \nabla f(3; 2; 6) \cdot u \\ &= \left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

b) (S) là mặt đẳng trị $f(x,y,z) = 6$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $P(3;2;6)$ là

$$\nabla f(P) = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Vậy phương trình mặt phẳng tiếp xúc là

$$(\alpha)\colon 2(x-3) + 3(y-2) + (z-6) = 0$$ ■

4 Đề thi giữa kì vi tích phân 2B năm học 2021–2022

Câu 1. Cho hàm số f định bởi $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \end{cases}$.

a) Từ định nghĩa đạo hàm riêng như là giới hạn, hãy tính các đạo hàm riêng $f_x; f_y$ tại điểm $(0;0)$.

b) Tìm đạo hàm riêng của f tại các điểm còn lại.

Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x\cdot 0^2}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x} \\ &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Do đó $f_x(0;0) = 0$. Tương tự,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{0y^2}{\sqrt{0^2+y^2}}}{y} \\ &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Do đó $f_y(0;0) = 0$.

b) Với $(x;y) \neq (0;0)$, ta có

$$\begin{aligned}
f_x(x;y) &= \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{y^2(x^2+y^2) - x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
f_y(x;y) &= \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{2x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

■

Câu 2. Cho hàm số f định bởi $f(x,y) = \dfrac{2x}{x+y}$.

a) Giải thích sự tồn tại của phép xấp xỉ tuyến tính tại $(1,1)$.

b) Tìm tuyến tính hóa của f tại $(1,1)$ và sử dụng nó để xấp xỉ giá trị của f tại $(0{,}9; 1{,}1)$.

c) Tại điểm $(-1;1)$ có tồn tại bất kỳ phép xấp xỉ tuyến tính nào hay không? Giải thích?

Lời giải. a) Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(x+y) - 2x}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

Suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1;1) = f_x(1;1) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1;1) = f_y(1;1) = \frac{-1}{2}$$

Do f_x, f_y xác định trên một lân cận của $(1;1)$ và liên tục tại $(1;1)$ nên tồn tại phép xấp xỉ tuyến tính của f tại $(1,1)$.

b) Tuyến tính hóa của f tại $(1;1)$ là

$$L(x;y) = f(1;1) + f_x(1;1)(x-1) + f_y(1;1)(y-1)$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
f(0{,}9;1{,}1) &\approx L(0{,}9;1{,}1)\\
&\approx f(1;1) + f_x(1;1)(-0.1) + f_y(1;1)(0.1)\\
&\approx 1 + \frac{1}{2}(-0.1) + \frac{-1}{2}(0.1)\\
&\approx 0{,}9
\end{aligned}$$

c) Tại điểm $(-1;1)$ thì f không xác định nên không tòn tại phép xấp xỉ tuyến tính. ■

Câu 3. Giả sử $f = uv^3w, u = xy^2, v = \ln(xy); w = \mathrm{e}^{-x}$.

a) Tìm biểu thức của $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Khi $x = 1$ và $y = \mathrm{e}$, tính $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\\
&= v^3wy^2 + 3uv^2w\frac{1}{x} - uv^3\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= 2v^3wxy + 3uv^2w\frac{1}{y}
\end{aligned}$$

b) Khi $x = 1, y = \mathrm{e}$ thì $u = \mathrm{e}^2, v = 1, w = \mathrm{e}^{-1}$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2v^3wxy + 3uv^2w\frac{1}{y} = 2 + 3 = 5 \qquad \blacksquare$$

Câu 4. Cho hàm số f định bởi $f(x; y) = y\mathrm{e}^{-xy}$.

a) Tìm độ dốc (hệ số góc) của tiếp tuyến của mặt cong đồ thị hàm f tại điểm $(0; 2; 2)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = \langle -3; 4\rangle$, nghĩa là tính đạo hàm của f tại $(0; 2)$ theo hướng của $\vec{v}$.

b) Tìm hướng theo đó mặt cong đồ thị của hàm f tại $(0; 2; 2)$ có độ dốc bằng 1.

Lời giải. a) Vectơ đơn vị theo hướng $\vec{v}$ là:

$$u = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{-3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} f_x(x; y) &= -y^2\mathrm{e}^{-xy} \\ f_y(x; y) &= \mathrm{e}^{-xy} - xy\mathrm{e}^{-xy} \end{aligned}$$

Suy ra $\nabla f(0; 2) = (-4; 1)$. Khi đó, đạo hàm của f tại $(0; 2)$ theo hướng của $\vec{v}$ là

$$D_u f(0; 2) = \nabla f(0; 2) \cdot u = (-4; 1) \cdot \left(\frac{-3}{5}; \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}$$

Vậy độ dốc của tiếp tuyến mặt cong đồ thị f tại điểm $(0; 2; 2)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = \langle -3; 4\rangle$ là $D_u f(0; 2) = \dfrac{16}{5}$.

b) Giả sử $v = (a; b) \in \mathbb{R}^2$ là vectơ đơn vị sao cho mặt cong đồ thị của hàm f tại $(0; 2; 2)$ có độ dốc bằng 1. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \nabla f(0; 2) \cdot v = 1 &\Leftrightarrow (-4; 1) \cdot (a; b) = 1 \\ &\Leftrightarrow -4a + b = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp với $1 = \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ta suy ra được $v = (0; 1) \vee v = (-8/17, -15/17)$. Vậy theo hướng của vectơ $(0; 1)$ hay $(-8/17; -15/17)$ thì mặt cong đồ thị của f tại $(0; 2; 2)$ có độ dốc bằng 1. $\blacksquare$

Câu 5. a) Chứng minh rằng ellipsoid $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ tiếp xúc nhau tại điểm $M(1, 1, 2)$ (nghĩa là chứng minh chúng có một mặt phẳng tiếp xúc chung tại điểm này).

b) Viết phương trình đường pháp tuyến của mặt ellipsoid và mặt cầu (S) tại M.

Lời giải. a) Ta có ellipsoid trên là mặt đẳng trị của $f(x, y, z) = 9$ với $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$. Ta có

$$\nabla f(x, y, z) = (6x, 4y, 2z)$$
$$\nabla f(1, 1, 2) = (6, 4, 4)$$

Tương tự, (S) là mặt đẳng trị của $g(x, y, z) = 0$ với $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24$. Ta cũng có

$$\nabla g(x, y, z) = (2x - 8, 2y - 6, 2z - 8)$$
$$\nabla g(1, 1, 2) = (-6, -4, -4)$$

Vì

$$\nabla f(1, 1, 2) = -\nabla g(1, 1, 2)$$

nên

$$\nabla f(1, 1, 2) \parallel \nabla g(1, 1, 2)$$

Mà $\nabla f(1, 1, 2)$ và $\nabla g(1, 1, 2)$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc ellipsoid và (S) tại điểm M nên hai mặt phẳng tiếp xúc này trùng nhau.

b) Ta có $\nabla f(1, 1, 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường pháp tuyến của mặt ellipsoid và (S) tại M nên phương trình của đường thẳng này là

$$\begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 4t + 1 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 2 \end{cases}$$

■

Câu 6. Khảo sát cực trị của hàm số $f(x; y) = x^4 - x^2 - 2xy + y^4 - y^2$.

Lời giải.