CHƯƠNG 5
BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI (PHẦN HAI)

Bùi Tiến Lên

Đại học Khoa học Tự nhiên

01/01/2017

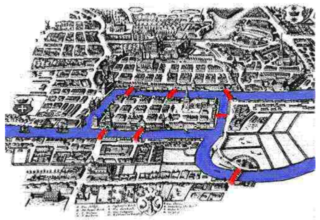
NỘI DUNG

ĐƯỜNG ĐI CÓ RÀNG BUỘC

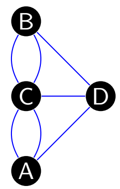
Bài toán về đồ thị Euler

Lịch sử

Bài toán này có nguồn gốc từ bài toán dân gian. Làm sao đi qua 7 chiếc cầu đúng một lần và trở về nơi xuất phát. Bài toán này đã được nhà bác học Euler giải quyết trọn vẹn vào năm 1736.



(a) bảy cây cầu



(b) biểu diễn đồ thị

Hình 5.1: Bài toán bảy cây cầu

Định nghĩa về đồ thị Euler

Định nghĩa 5.1

Cho một đồ thị $G = (V, E)$

- **Dây chuyền Euler** (**Euler path**) là dây chuyền đi qua tất cả các cạnh trong đồ thị và mỗi cạnh đi qua đúng một lần
- **Chu trình Euler** (**Euler circuit**) là dây chuyền Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối
- **Đường đi Euler** (**Euler path**) là đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị và mỗi cạnh được đi qua đúng một lần
- **Mạch Euler** (**Euler circuit**) là đường đi Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối

Định nghĩa về đồ thị Euler (cont.)

Định nghĩa 5.2

- **Đồ thị Euler vô hướng** (**Euler graph**) là đồ thị vô hướng có chứa ít nhất một chu trình Euler
- **Đồ thị Euler có hướng** (**Euler graph**) là đồ thị có hướng chứa ít nhất một chu trình Euler

Định lý về chu trình Euler

Định lý 5.1

Một đa đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn

Chứng minh

■

Thuật toán Hierholzer tìm chu trình Euler

Cho một đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có tất cả các đỉnh bậc chẵn. Thuật toán Hierholzer thực hiện theo nguyên lý tắc sau

- Từ đỉnh v tìm một chu trình C trên đồ thị G
- Nếu C không phải chu trình Euler thì chu trình C sẽ có một đỉnh u có một cạnh không thuộc chu trình C
  - Loại bỏ các cạnh của C khỏi đồ thị G
  - Từ đỉnh u tìm một chu trình C' trên đồ thị G
  - Kết hợp chu trình C' vào chu trình C
  - Quay lại kiểm tra C có phải là chu trình Euler hay không?

Cài đặt thuật toán Hierholzer

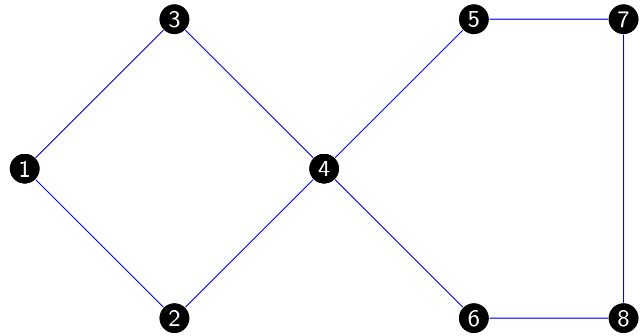
Thuật toán có thể cài đặt bằng stack như sau

Algorithm 1 Tìm chu trình Euler C bắt đầu từ đỉnh *start*

procedure FIND_EULER_CIRCLE(G, *start*, C)
    stack.PUSH(*start*)
    while stack.NOT_EMPTY **do**
        v = stack.TOP
        if không còn cạnh kề với v **then**
            stack.POP
            $C = C + \{v\}$
        else
            Lấy cạnh (v, u) đầu tiên kề với đỉnh v
            Xóa cạnh (v, u)
            stack.PUSH(u)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer

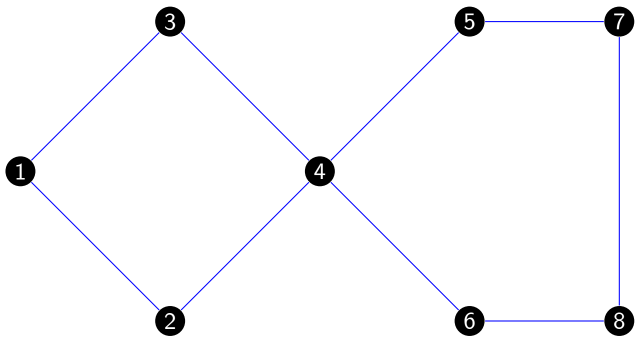
Tìm chu trình Euler của đồ thị dưới đây bắt đầu từ đỉnh 1



Hình 5.2: Đồ thị liên thông có các đỉnh đều bậc chẵn

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

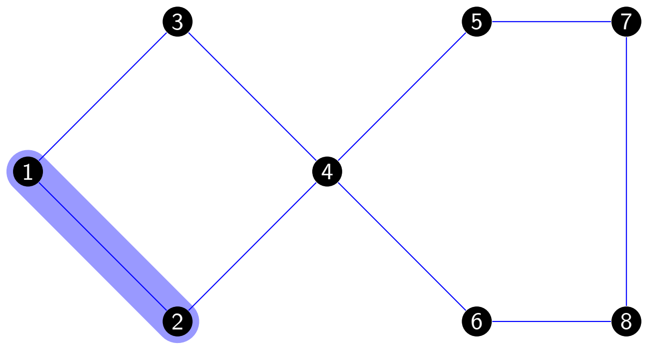
$stack = \{1\}$
$C = \{\emptyset\}$



Hình 5.3: Đưa đỉnh đầu vào *stack*

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

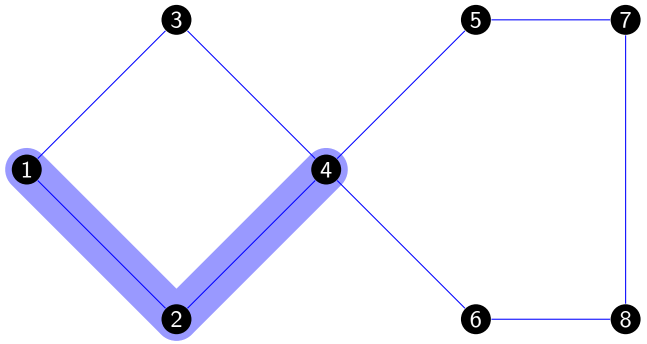
$stack = \{1, 2\}$
$C = \{\emptyset\}$



Hình 5.4: Đưa đỉnh 2 vào *stack* và xóa cạnh (1,2)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

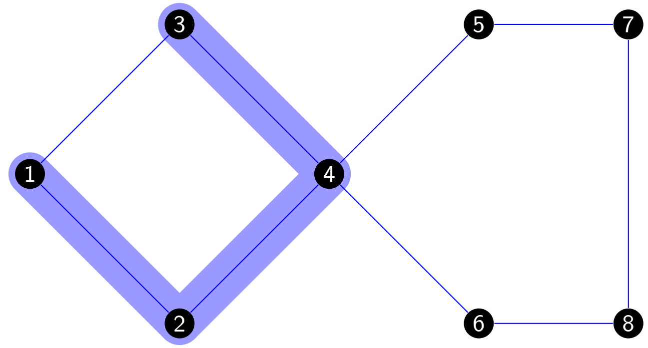
stack $= \{1, 2, 4\}$
$C = \{\emptyset\}$



Hình 5.5: Đưa đỉnh 4 vào *stack* và xóa cạnh (1,4)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

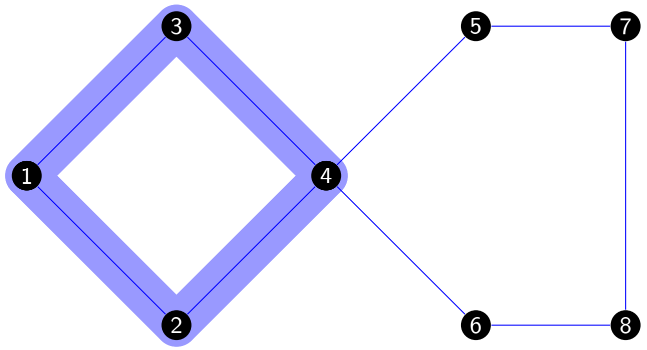
stack $= \{1, 2, 4, 3\}$
$C = \{\emptyset\}$



Hình 5.6: Đưa đỉnh 3 vào *stack* và xóa cạnh (4,3)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

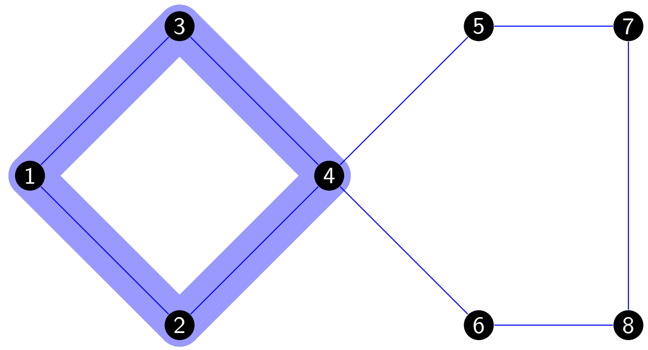
stack $= \{1, 2, 4, 3, 1\}$
$C = \{\emptyset\}$



Hình 5.7: Đưa đỉnh 1 vào *stack* và xóa cạnh (3,1)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

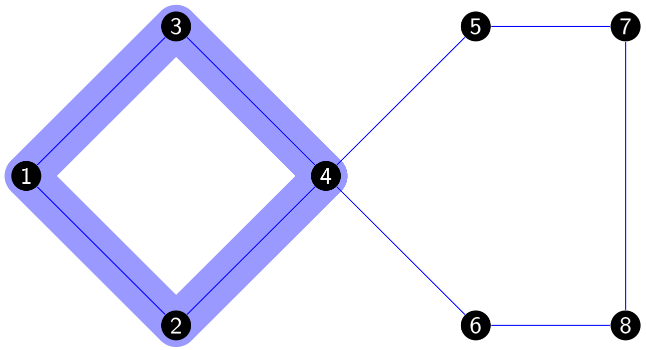
stack $= \{1, 2, 4, 3\}$
$C = \{1\}$



Hình 5.8: Lấy đỉnh 1 ra khỏi *stack* và thêm vào chu trình *C*

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

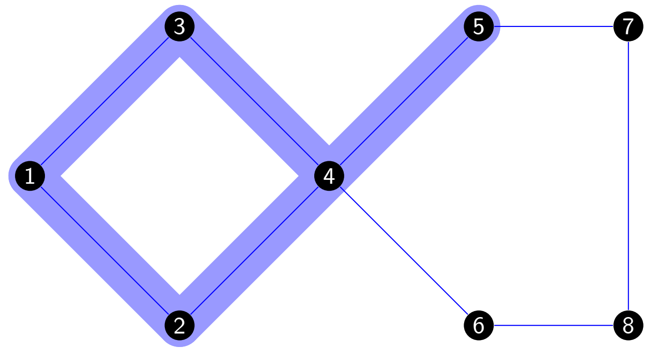
stack $= \{1, 2, 4\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.9: Lấy đỉnh 3 ra khỏi *stack* và thêm vào chu trình *C*

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

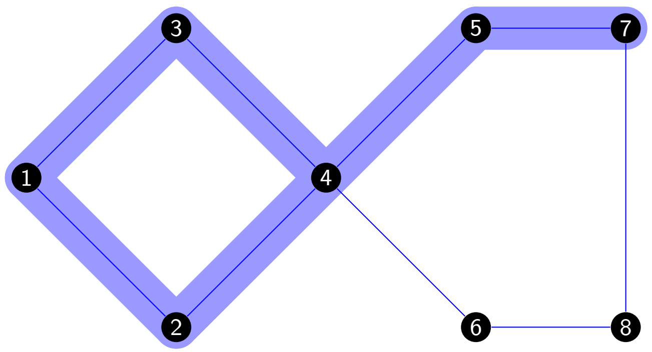
stack $= \{1, 2, 4, 5\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.10: Đưa đỉnh 5 vào *stack* và xóa cạnh (4,5)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

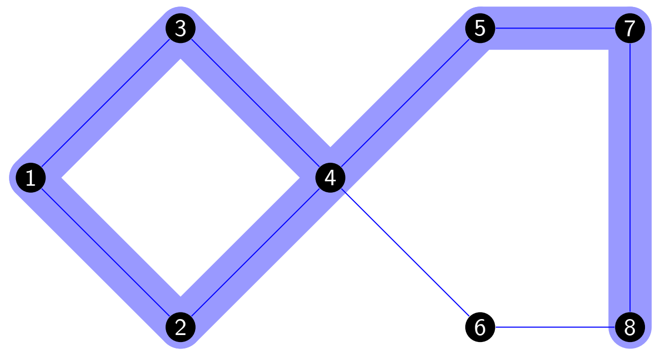
stack $= \{1, 2, 4, 5, 7\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.11: Đưa đỉnh 7 vào *stack* và xóa cạnh (5,7)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

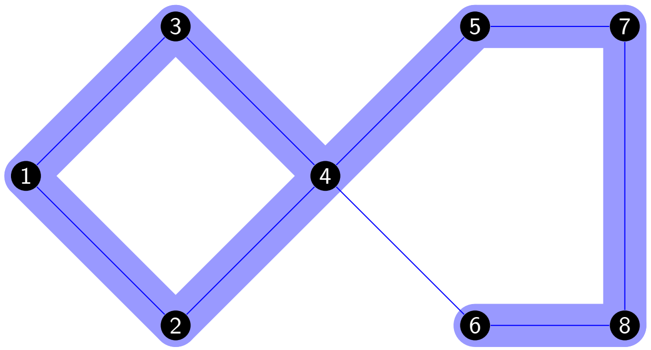
stack $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.12: Đưa đỉnh 8 vào *stack* và xóa cạnh (7,8)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

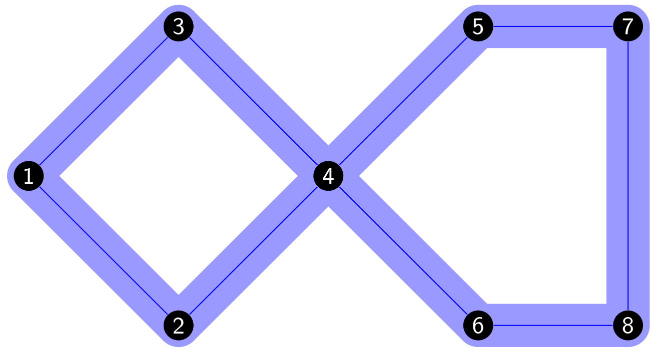
stack $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 6\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.13: Đưa đỉnh 6 vào *stack* và xóa cạnh (8,6)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

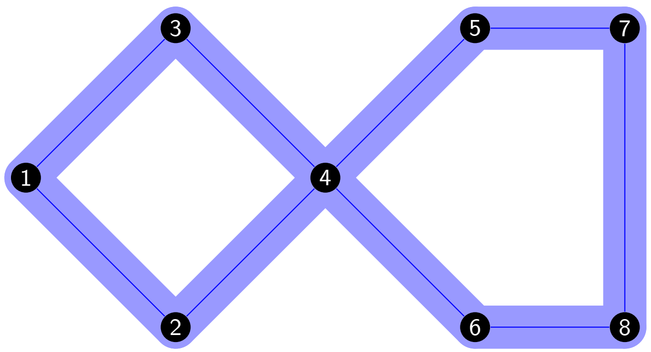
stack $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 4\}$
$C = \{1, 3\}$



Hình 5.14: Đưa đỉnh 4 vào *stack* và xóa cạnh (6,4)

Minh họa cài đặt thuật toán Hierholzer (cont.)

stack $= \{\emptyset\}$
$C = \{1, 3, 4, 6, 8, 7, 5, 4, 2, 1\}$

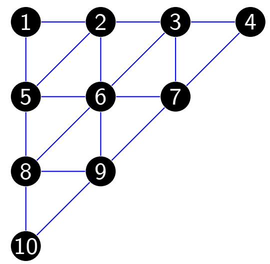


Hình 5.15: Lần lượt lấy các đỉnh ra khỏi *stack* và thêm vào chu trình *C*

Bài tập

Bài tập 5.1

Áp dụng thuật toán Hierholzer tìm chu trình Euler cho đồ thị sau



Hình 5.16: Đồ thị Euler?

Thuật toán Fleury tìm chu trình Euler

Cho một đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có tất cả các đỉnh bậc chẵn. Thuật toán Fleury thực hiện theo hai qui tắc

- Quy tắc 1: Mỗi khi đi qua một cạnh thì xóa cạnh đó và xóa đỉnh cô lập (nếu có)
- Quy tắc 2: Không đi qua cạnh cầu trừ phi không còn cách nào khác

Định lý về đường đi Euler

Định lý 5.2

Một đa đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ có đường đi Euler khi và chỉ khi đồ thị có đúng 2 đỉnh bậc lẻ

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Đường đi Euler cho đồ thị có hướng

Định lý 5.3

Một đa đồ thị có hướng liên thông $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ tại mỗi đỉnh v của đồ thị đều có $d^+(v) = d^-(v)$

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Định lý 5.4

Một đa đồ thị có hướng liên thông $G = (V, E)$ có đường đi Euler khi và chỉ tại tất cả các đỉnh v của đồ thị đều có $d^+(v) = d^-(v)$ trừ duy nhất 2 đỉnh x, y

$$d^+(x) = d^-(x) + 1, d^+(y) + 1 = d^-(y)$$

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Bài toán người đưa thư Trung Hoa

Bài toán 5.1

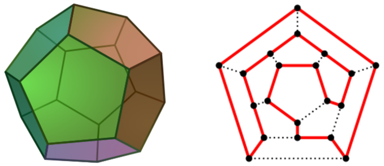
Bài toán người đưa thư Trung Hoa (**Chinese postman problem**) được phát biểu như sau: Cho một đồ thị liên thông tìm một chu trình ngắn nhất đi qua các cạnh

- Nếu đồ thị không có trọng số thì chu trình ngắn nhất là chu trình có số cạnh ít nhất
- Nếu đồ thị có trọng số thì chu trình ngắn nhất là chu trình có trọng số nhỏ nhất

Bài toán về đồ thị Hamilton

Lịch sử

- Bài toán này xuất phát từ trò đố vui do William Rowan Hamilton, nhà toán học người Ailen đưa ra vào năm 1857.
- Giả sử có một khối thập nhị diện đều với mỗi mặt là một ngũ giác đều. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh khối này được đặt tên một thành phố. Hãy tìm một cách đi khép kín ghé thăm 20 thành phố chỉ một lần



Hình 5.17: Khối thập nhị diện đều và chu trình Hamilton

Định nghĩa về đồ thị Hamilton

Định nghĩa 5.3

Cho một đồ thị $G = (V, E)$

- **Dây chuyền Hamilton** (**Hamilton path**) là dây chuyền đi qua tất cả các đỉnh trong đồ thị và mỗi đỉnh đi qua đúng một lần
- **Chu trình Hamilton** (**Hamilton circuit**) là dây chuyền Hamilton có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối
- **Đường đi Hamilton** (**Hamilton path**) là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị và mỗi đỉnh được đi qua đúng một lần
- **Mạch Hamilton** (**Hamilton circuit**) là đường đi Hamilton có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối

Định nghĩa về đồ thị Hamilton (cont.)

Định nghĩa 5.4

- **Đồ thị Hamilton** (**Hamilton graph**) là đồ thị có chứa ít nhất một chu trình Hamilton

Các điều kiện đủ

Định lý 5.5 (Ore, 1960)

Cho một đơn đồ thị liên thông $G = (V, E)$ với số đỉnh $n \geq 3$, nếu $\forall u, v \in V, d(u) + d(v) \geq n$ thì đồ thị có chu trình Hamilton

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Các điều kiện đủ (cont.)

Định lý 5.6 (Dirac, 1952)

Cho một đơn đồ thị liên thông $G = (V, E)$ với số đỉnh $n \geq 3$, nếu $\forall v \in V, d(v) \geq \frac{n}{2}$ thì đồ thị có chu trình Hamilton

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

Các điều kiện đủ (cont.)

Định lý 5.7 (Posa)

Cho một đơn đồ thị liên thông $G = (V, E)$ với số đỉnh $n \geq 3$; giả sử có không quá $k - 1$ đỉnh có bậc không lớn hơn k với $k \in \left[1 ... \frac{n-1}{2}\right)$ và có không quá $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc vượt quá $\frac{n-1}{2}$ với n lẻ. Khi đó đồ thị G có một chu trình Hamilton

Chứng minh

Sinh viên tự chứng minh ■

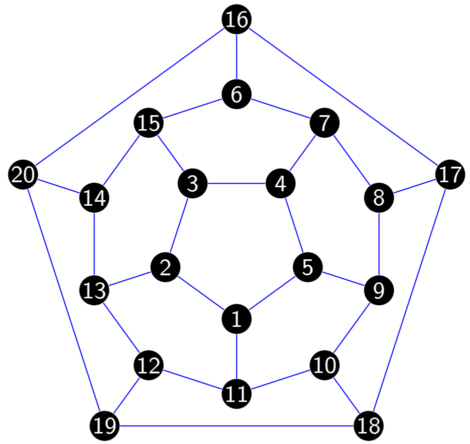
Phương pháp tìm chu trình Hamilton

Thuật toán tìm chu trình Hamilton có độ phức tạp lũy thừa. Tuy nhiên, trong quá trình tìm chu trình Hamilton ta có thể áp dụng các quy tắc sau

- Quy tắc 1: Nếu đồ thị có đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo thì đồ thị không có chu trình Hamilton
- Quy tắc 2: Nếu đỉnh v có bậc $d(v) = 2$ thì cả hai cạnh kề với nó đều phải thuộc chu trình Hamilton
- Quy tắc 3: Khi hai cạnh có chung một đỉnh v thuộc chu trình Hamilton thì các cạnh kề còn lại của v sẽ không thuộc chu trình Hamilton
- Quy tắc 4: Tránh tạo ra chu trình con
- Quy tắc 5: Tận dụng tính đối xứng của đồ thị để giảm bớt trường hợp

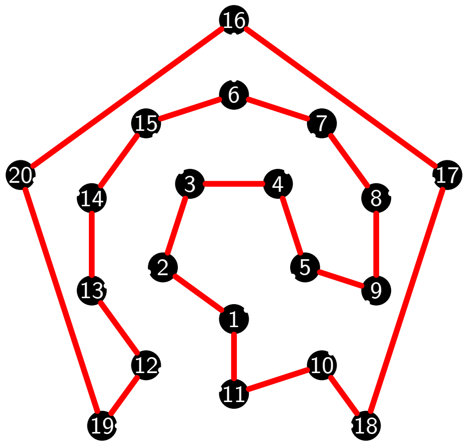
Minh họa

Tìm chu trình Hamilton của đồ thị dưới đây



Hình 5.18: Đồ thị biểu diễn khối thập nhị diện đều

Minh họa

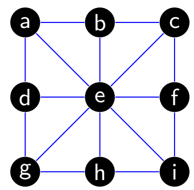


Nhánh	Thực hiện
	Bắt đầu tại đỉnh 1
✓	Chọn đỉnh 2, cạnh (1,2)
✓	Chọn đỉnh 3, cạnh (2,3)
	xóa cạnh (2,13)
	chọn cạnh (12, 13), (13,14)
✓	Chọn đỉnh 4, cạnh (3,4)
	xóa cạnh (3,15)
	chọn cạnh (14, 15), (15,6)
	xóa cạnh (14,20)
	chọn cạnh (19, 20), (20,16)
✓	Chọn đỉnh 5, cạnh (4,5)
	xóa cạnh (4,7)
	chọn cạnh (6, 7), (7,8)
	xóa cạnh (6,16)
	chọn cạnh (16, 17)
	...

Bài tập

Bài tập 5.2

Hãy tìm chu trình Hamilton (nếu có) của các đồ thị sau



Hình 5.19: Đồ thị Hamilton?

Bài toán người bán hàng

Bài toán 5.2

Bài toán người bán hàng (**travelling salesman problem**) được phát biểu như sau: Cho một đồ thị liên thông tìm một chu trình ngắn nhất đi qua các đỉnh

- Nếu đồ thị không có trọng số thì chu trình ngắn nhất là chu trình có số cạnh ít nhất
- Nếu đồ thị có trọng số thì chu trình ngắn nhất là chu trình có trọng số nhỏ nhất

Tài liệu tham khảo