Chương 5. CHÉO HÓA MA TRẬN

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Cho ma trận vuông A, để thực hiện chéo hóa A ta có các lệnh liên quan sau:

- **charmat(A, x)**: Xác định ma trận đặc trưng của ma trận A theo **x**, đó là ma trận dạng $(xI - A)$.
- **charpoly(A,x)**: Xác định đa thức đặc trưng của ma trận A theo **x**, đó là đa thức $f(x) = \det(xI - A)$.
- **eigenvalues(A)**: Xác định các trị riêng của ma trận A.
- **eigenvectors(A)**: Xác định các vectơ riêng tương ứng với từng trị riêng của ma trận A.

Ví dụ. Tìm dạng chéo hóa của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

> **with(linalg):**
> **A := matrix([[3,1,1],[2,4,2],[1,1,3]]);**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

> **charmat(A,x)**; # Ma trận đặc trưng

$$\begin{bmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -2 & x-4 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{bmatrix}$$

> **f := charpoly(A,x);** #Đa thức đặc trưng

$$f := x^3 - 10\,x^2 + 28\,x - 24$$

> **factor(f);** #Phân tích đa thức f thành nhân tử

$$(x-6)\,(-2+x)^2$$

> **eigenvectors(A);** #Các trị riêng và các véctơ riêng

$$[6, 1, \{[1\ 2\ 1]\}], [2, 2, \{[-1\ 0\ 1], [-1\ 1\ 0]\}]$$

Lưu ý: Đối với lệnh **eigenvectors(A)** thì kết quả trả là một danh các dạng $[e_i, m_i, \{v_{1i}, \ldots v_{n_i i}\}]$. Trong đó e_i là trị riêng, m_i là số bội của trị riêng e_i, $\{v_{1i}, \ldots v_{n_i i}\}$ là cơ sở của không gian riêng tương ứng với trị riêng e_i.

Từ kết quả tính toán trên ta có ma trận A chéo hóa được. Dạng chéo hóa của A là

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

và ma trận làm chéo hóa A là

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Phần II. Bài tập

5.1 Tìm đa thức đặc trưng của các ma trận sau đây:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5.2 Ma trận nào sau đây chéo hóa được? Trong trường hợp chéo hóa được hãy tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo nó.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3 Hãy tìm điều kiện đối với các số thực a, b, c sao cho ma trận sau đây chéo hóa được

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.4 Tìm điều kiện đối với a, b, c để ma trận sau đây chéo hóa được

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5 Cho A là ma trận vuông cấp hai. Chứng minh rằng nếu A là ma trận đối xứng (nghĩa là $A^\top = A$) thì A chéo hóa được.

5.6 Giả sử Fibonacii xây dựng dãy số của mình với $F_0 = 1, F_1 = 3$ và $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \forall k \geq 0$. Hãy tính các số Fibonacii mới và chứng minh rằng tỉ số F_{k+1}/F_k cũng dần tới "tỉ lệ vàng"

5.7 Tính lũy thừa n của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

5.8 Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng A chéo hóa được. Tìm một dạng chéo và một ma trận khả nghịch làm chéo A.

b) Đặt $B = \dfrac{1}{4}A$. Hãy tính $B^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Cho các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, (v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được xác định theo qui tắc sau: $u_0 = 2, v_0 = 1$ và đối với mọi $n \geq 1$

$$u_n = \frac{3}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-1}; v_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{4}v_{n-1}.$$

Hãy tính u_n và v_n như các hàm số của n. Tìm giới hạn của u_n và v_n khi n tiến tới ∞.