ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 3

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

Những bài đã sửa: $2.3(b,c)$, $2.4(a,b)$, $2.6a$, $2.8d$, $2.10d$

1 Bài 2.1

Bài 2.1 Tính các định thức cấp 2 sau

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{vmatrix}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) = 23$$

b) Ta có:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-1) = -13$$

c) Ta có:

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

d) Ta có:

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{vmatrix} = \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = -\cos(2\alpha)$$

□

2 Bài 2.2

Bài 2.2 Tính các định thức cấp ba sau:

$a)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $d)\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

✍ Lời giải

a) Áp dụng quy tắc Sarrus để tính định thức của ma trận cấp 3:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

b) Áp dụng quy tắc Sarrus để tính định thức của ma trận cấp 3:

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

c) Áp dụng quy tắc Sarrus để tính định thức của ma trận cấp 3:

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 100$$

d) Áp dụng quy tắc Sarrus để tính định thức của ma trận cấp 3:

$$\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

□

3 Bài 2.3

Bài 2.3 Giả sử $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$. Hãy tính theo α các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

✍ Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha.$$

d) Ta có:

$$\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & 2f & 2i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\alpha.$$

e) Ta có:

$$\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha.$$

f) Ta có:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\alpha.$$

□

4 Bài 2.4

Bài 2.4 Chứng tỏ các định thức sau bằng 0:

c) $\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & sin(\alpha+\theta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & sin(\beta+\theta) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$

✍ Lời giải

c)

$$\begin{vmatrix} x & p & ax+bp \\ y & q & ay+bq \\ z & r & az+br \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}\begin{vmatrix} ax & bp & ax+bp \\ ay & bq & ay+bq \\ az & br & az+br \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}\begin{vmatrix} ax & bp & 0 \\ ay & bq & 0 \\ az & br & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

d)

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & sin(\alpha+\theta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & sin(\beta+\theta) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & sin(\gamma+\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & cos(\theta) \\ 0 & 1 & sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 1+2b & 3 & b & x \\ 1+2c & 4 & c & x \\ 1+2d & 6 & d & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a & 2 & a & x \\ 2(b-a) & 1 & b-a & 0 \\ 2(c-a) & 2 & c-a & 0 \\ 2(d-a) & 4 & d-a & 0 \end{vmatrix}$$

Triển khai định thức theo cột 4, ta được:

$$\det(A) = |A| = x(-1)^5\begin{vmatrix} 2(b-a) & 1 & b-a \\ 2(c-a) & 2 & c-a \\ 2(d-a) & 4 & d-a \end{vmatrix}$$

Xét $|B| = \begin{vmatrix} 2(b-a) & 1 & b-a \\ 2(c-1) & 2 & c-a \\ 2(d-a) & 4 & d-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & c-a \\ 0 & 4 & d-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |A| = 0$

f)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ c+b & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$$

Cộng cột 2,3 vào 1 ta được:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 1 \\ a+b+c & c & a & 1 \\ a+b+c & a & b & 1 \\ 2(a+b+c) & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix} = a+b+c \begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 2 & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix}$$

Lấy cột 1 trừ cột 4: $|A| = a+b+c \begin{vmatrix} 0 & b & c & 1 \\ 0 & c & a & 1 \\ 0 & a & b & 1 \\ 0 & b+a & a+c & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\square$

5 Bài 2.5

Bài 2.5 Tính các định thức cấp bốn sau

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & -8 \\ 7 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -9 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

✍ Lời giải

a) Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[d_4-3d_1]{\substack{d_2+d_1 \\ d_3+2d_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 1}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{Sarrus}} 14$$

b) Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[d_4+3d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 1}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 9 \\ -4 & 1 & -4 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{Sarrus}} 36$$

c) Ta có

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_3-8d_1 \\ d_4-2d_1}]{\substack{d_3\leftrightarrow d_1 \\ d_2-4d_1}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & 20 \\ 0 & 4 & -4 & 37 \\ 0 & 9 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 1}} -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 20 \\ 4 & -4 & 37 \\ 9 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{Sarrus}} 42$$

d) Ta có

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & -8 \\ 7 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -9 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[d_4-2d_1]{\substack{d_2-3d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & -8 \\ -11 & -12 & 0 & 21 \\ -16 & -14 & 0 & 26 \\ -21 & -7 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 3}} 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -11 & -12 & 21 \\ -16 & -14 & 26 \\ -21 & -7 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{Sarrus}} 44$$

$\square$

6 Bài 2.6

Bài 2.6

$$b)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 8 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

✍ **Lời giải**

b) Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4-d_1 \\ 2d_5+3d_1}]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3+2d_1}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 10 & 7 \\ 0 & -5 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 18 & 21 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[5d_5+18d_2]{\substack{d_2\leftrightarrow d_4 \\ 5d_3+11d_2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -23 & -27 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -39 & -66 & 32 \end{bmatrix} \xrightarrow[23d_5-39d_3]{23d_4-d_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -23 & -27 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -465 & -200 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4d_5+465d_4} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -23 & -27 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11960 \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Bằng các phép biến đổi trên dòng ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}| &= 4 \cdot 23^2 \cdot 5^2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot |A| \\ \Leftrightarrow |A| &= \frac{|\tilde{A}|}{4 \cdot 23^2 \cdot 5^2 \cdot (-1) \cdot 2} \\ \Leftrightarrow |A| &= \frac{2 \cdot (-5) \cdot (-23) \cdot 4 \cdot (-11960)}{4 \cdot 23^2 \cdot 5^2 \cdot (-1) \cdot 2} \\ \Leftrightarrow |A| &= 104 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 8 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3-8d_1 \\ d_4-8d_1 \\ d_5-4d_1}]{\substack{d_1 \leftrightarrow d_4 \\ d_2-3d_1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 15 & -1 & 4 & -28 \\ 0 & 32 & -13 & 9 & -73 \\ 0 & 36 & -9 & 9 & -78 \\ 0 & 14 & -6 & 3 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[15d_5-14d_2]{\substack{15d_3-32d_2 \\ 15d_4-36d_2}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 15 & -1 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & -163 & 7 & -199 \\ 0 & 0 & -99 & -9 & -162 \\ 0 & 0 & -76 & -11 & -118 \end{bmatrix} \xrightarrow[163d_5-76d_3]{163d_4-99d_3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 15 & -1 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & -163 & 7 & -199 \\ 0 & 0 & 0 & -2160 & -6705 \\ 0 & 0 & 0 & -2325 & -4110 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2160d_5-2325d_4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 15 & -1 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & -163 & 7 & -199 \\ 0 & 0 & 0 & -2160 & -6705 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6711525 \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Bằng các phép biến đổi trên dòng ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}| &= |A| \cdot 2160 \cdot 163^2 \cdot 15^3 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow |A| &= \frac{|\tilde{A}|}{2160 \cdot 163^2 \cdot 15^3 \cdot (-1)} \\ \Leftrightarrow |A| &= \frac{1 \cdot 15 \cdot (-163) \cdot (-2160) \cdot 6711525}{(-1)} \\ \Leftrightarrow |A| &= -183 \end{aligned}$$

□

7 Bài 2.7

Bài 2.7 Tính các định thức cấp n sau:

$$a)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \mathbf{2} & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \mathbf{3} & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & \mathbf{n} \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

✍ **Lời giải**

a) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ d_n - d_2}]{\substack{d_3-d_2 \\ d_4-d_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2-2d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

- Ta nhận thấy định thức của ma trận sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng là định thức của ma trận tam giác trên, nên định thức của ma trận ban đầu là:

$$|A| = 1.(-2).(n-2)! = (-2).(n-2)!$$

b) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots \\ d_{n-1}-d_n}]{\substack{d_1-d_n \\ d_2-d_n}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ d_n-a_{n-1}d_{n-1}}]{\substack{d_n-a_1d_1 \\ d_n-a_2d_2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\sum_{1=1}^{n} a_i \end{vmatrix}$$

- Ta nhận thấy định thức của ma trận sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng là định thức của ma trận tam giác trên, nên định thức của ma trận ban đầu là:

$$|B| = 1 + \sum_{1}^{n} a_i$$

c) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng và cột, ta có:

$$|C| = \begin{vmatrix} x_1y_1+1 & x_1y_2+1 & \cdots & x_1y_n+1 \\ x_2y_1+1 & x_2y_2+1 & \cdots & x_2y_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1+1 & x_ny_2+1 & \cdots & x_ny_n+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ \frac{1}{x_n}d_n}]{\substack{\frac{1}{x_1}d_1 \\ \frac{1}{x_2}d_2}} x_1x_2...x_n \begin{vmatrix} y_1+\frac{1}{x_1} & y_2+\frac{1}{x_1} & \cdots & y_n+\frac{1}{x_1} \\ y_1+\frac{1}{x_2} & y_2+\frac{1}{x_2} & \cdots & y_n+\frac{1}{x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1+\frac{1}{x_n} & y_2+\frac{1}{x_n} & \cdots & y_n+\frac{1}{x_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n-c_1}]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} x_1x_2...x_n \begin{vmatrix} y_1+\frac{1}{x_1} & y_2-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \\ y_1+\frac{1}{x_2} & y_2-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1+\frac{1}{x_n} & y_2-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ d_{n-1}-d_n}]{\substack{d_1-d_n \\ d_2-d_n}} x_1x_2...x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1+\frac{1}{x_n} & y_2-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \end{vmatrix}$$

- Ta nhận thấy định thức của ma trận sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng là định thức của ma trận tam giác dưới, nên định thức của ma trận ban đầu là:

$$|C| = 0$$

d) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, ta có:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ d_2-d_1}]{\substack{d_n-d_{n-1} \\ d_{n-1}-dn-2}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Như vậy định thức của ma trận ban đầu bằng với:

$$|D| \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ d_{n-2}-d_{n-1}}]{\substack{d_1-d_{n-1} \\ d_2-d_{n-1}}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\cdots]{\substack{d_1 \leftrightarrow d_{n-2} \\ d_2 \leftrightarrow d_{n-3}}} -\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\left[\frac{n-2+1}{2}\right]} \begin{vmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\left[\frac{n-2+1}{2}\right]}(-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{n+1}{2}(-n)^{n-1}.$$

Vậy $|D| = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{n+1}{2}(-n)^{n-1}$, với $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n-1}{2}$. $\square$

8 Bài 2.8

Bài 2.8 Tìm x để các định thức bằng 0:

a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$

✍ **Lời giải**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

Theo giả thiết, ta có $|A| = 0$

Hay $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{d_3+d_1+d_2} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2+x+1 & x^2+x+1 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x^2+x+1) \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta có $x^2 + x + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Theo đề, ta có $A = 0 \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^4 - x^3 - x + 1 = 0$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} & x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3(x-1) - (x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3-1)(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

c)

Xét $A = \begin{bmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = (x^2 - 9)(x+4) - 30 - 6(x-3) + 12(x+3) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$

Theo giả thiết, ta có $|A| = 0$ hay $x^3 + 4x^2 - 3x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$ □

9 Bài 2.9

Bài 2.9 Tìm ma trận phụ hợp (hay ma trận phó) của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Đặt $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ và $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$. Ta có:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\,|8| = 8.$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2}\,|5| = -5.$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1}\,|3| = -3.$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2}\,|7| = 7.$$

Suy ra $C = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$. Do đó $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Đặt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ và $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$. Ta có:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -57.$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 51.$$
$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 33.$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -30.$$
$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6.$$
$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3.$$
$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6.$$
$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Suy ra $C = \begin{bmatrix} -57 & 51 & -3 \\ 33 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$. Do đó $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -57 & 33 & -3 \\ 51 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

c) Đặt $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ và $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$. Ta có:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18.$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12.$$
$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$
$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$
$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$
$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Suy ra $C = \begin{bmatrix} 18 & -12 & -6 \\ -7 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$. Do đó $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

d) Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ và $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$. Ta có:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8. \qquad c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16. \qquad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20. \qquad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$c_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \qquad c_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2. \qquad c_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12. \qquad c_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15. \qquad c_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8. \qquad c_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Suy ra $C = \begin{bmatrix} -8 & 16 & -20 & 0 \\ -2 & -12 & 15 & -8 \\ 16 & 0 & -8 & 0 \\ -6 & -4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$. Do đó $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 16 & -6 \\ 16 & -12 & 0 & -4 \\ -20 & 15 & -8 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

□

10 Bài 2.10

Bài 2.10 Tìm nghịch đảo của các ma trận trong Bài tập 2.9 bằng cách áp dụng công thức định thức.

Lời giải

a) Ta có $\det(A) = 41 \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \\ &= \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{8}{41} & -\dfrac{3}{41} \\ -\dfrac{5}{41} & \dfrac{7}{41} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Ta có $\det(B) = 27 \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{\det(B)}\operatorname{adj}(B) \\ &= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -57 & 33 & -3 \\ 51 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\dfrac{19}{9} & \dfrac{11}{9} & -\dfrac{1}{9} \\ \dfrac{17}{9} & -\dfrac{10}{9} & \dfrac{2}{9} \\ -\dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Ta có $\det(C) = 24 \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\det(C)} \operatorname{adj}(C) \\ &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} \det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} &\xlongequal[d_4 - d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 + d_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{cột 1}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{Sarrus}} -32 \neq 0 \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \frac{1}{\det(D)} \operatorname{adj}(D) \\ &= \frac{-1}{32} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 16 & -6 \\ 16 & -12 & 0 & -4 \\ -20 & 15 & -8 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{15}{32} & \frac{1}{4} & \frac{3}{32} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

11 Bài 2.11

Bài 2.11 Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó.

a) $\begin{bmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a)

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có: $|A| = m^2 - 1$. Để A khả nghịch ta cần: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \pm 1$. Dễ dàng tìm được ma trận nghịch đảo của A là:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{adj(A)}{|A|} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{bmatrix}}{m^2 - 1} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{m}{m^2-1} & -\dfrac{1}{m^2-1} \\ -\dfrac{1}{m^2-1} & \dfrac{m}{m^2-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bằng quy tắc Sarrus ta tính được $|B| = m^3 - 3m + 2$. Để ma trận B khả nghịch thì $m^3 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ và $m \neq 1$.

Ta tìm ma trận phụ hợp của B;

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1-m & c_{12} &= 1-m & c_{13} &= m^2-1 \\ c_{21} &= m^2-1 & c_{22} &= 1-m & c_{23} &= 1-m \\ c_{31} &= 1-m & c_{32} &= m^2-1 & c_{33} &= 1-m \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{adj(B)}{|B|} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1-m & 1-m & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \end{bmatrix}}{m^3-3m+2} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \\ \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bằng quy tắc Sarrus ta tính được $|C| = m^2 - 2m + 1$. Để ma trận C khả nghịch thì $m^2 - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Tìm ma trận phụ hợp với C.

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2-2m & c_{12} &= -1 & c_{13} &= m \\ c_{21} &= m^2-1 & c_{22} &= 1 & c_{23} &= -m \\ c_{31} &= 2-2m & c_{32} &= m-2 & c_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
C^{-1} &= \frac{adj(C)}{|C|} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 2-2m & -1 & m \\ m^2-1 & 1 & -m \\ 2-2m & m-2 & 1 \end{bmatrix}}{m^2-2m+1} \\
&= \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{m-1} & -\dfrac{1}{m^2-2m+1} & \dfrac{m}{m^2-2m+1} \\ \dfrac{m+1}{m-1} & \dfrac{1}{m^2-2m+1} & -\dfrac{m}{m^2-2m+1} \\ -\dfrac{2}{m-1} & \dfrac{m-2}{m^2-2m+1} & \dfrac{1}{m^2-2m+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

d) Ta có:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{bmatrix}$$

Bằng quy tắc Sarrus ta tính được $|D| = m^2+3m+2$. Để ma trận D khả nghịch thì $m^2+3m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq -2$.

Tìm ma trận phụ hợp với D:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -2m^2-10m-7 & c_{12} &= 4m+3 & c_{13} &= -3m-1 \\
c_{21} &= -m^2-5m-3 & c_{22} &= 2m+1 & c_{23} &= 1-m \\
c_{31} &= -m & c_{32} &= m & c_{33} &= 2
\end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
D^{-1} &= \frac{adj(D)}{|D|} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} -2m^2-10m-7 & 4m+3 & -3m-1 \\ -m^2-5m-3 & 2m+1 & 1-m \\ -m & m & 2 \end{bmatrix}}{m^2-2m+1} \\
&= \begin{bmatrix} -\dfrac{2m^2+10m+7}{m^2+3m+2} & \dfrac{4m+3}{m^2+3m+2} & -\dfrac{3m+1}{m^2+3m+2} \\ -\dfrac{m^2+5m+3}{m^2+3m+2} & \dfrac{2m+1}{m^2+3m+2} & -\dfrac{m-1}{m^2+3m+2} \\ -\dfrac{m}{m^2+3m+2} & \dfrac{m}{m^2+3m+2} & \dfrac{2}{m^2+3m+2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

12 Bài 2.12

Bài 2.12 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

✍ Lời giải

- Ta có: A là ma trận vuông cấp n và A có nhiều hơn $n^2 - n$ hệ số bằng 0, tức là A có thể có nhiều nhất $(n-1)$ hệ số bằng 0.
Suy ra ma trận A luôn tồn tại ít nhất 1 dòng và 1 cột có tất cả các phần tử có giá trị là 0.
- Theo tính chất của định thức ma trận thì ta được: $\det A = 0$ (Đpcm). □

13 Bài 2.13

Bài 2.13 Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Chứng tỏ rằng $detA \in \mathbb{Z}$, đồng thời nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow |detA| = 1$$

✍ Lời giải

Vì $A \in M_n(\mathbb{Z})$ nên $detA$ sẽ là tổng, hiệu, tích các số nguyên, hay $detA \in \mathbb{Z}$.
Khi A khả nghịch:

i) (<=) Nếu $|detA| = 1$:
Đặt $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ với c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}, với mỗi $i, j \in \overline{1, n}$. Vì $A \in M_n(\mathbb{Z})$ nên $C \in M_n(\mathbb{Z})$. Suy ra $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} adj(A) = \pm\, C^T \in M_n(\mathbb{Z})$.

ii) (=>) Nếu $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ thì $detA^{-1} \in \mathbb{Z}$.
Ta có $I_n = AA^{-1}$ nên $1 = detI_n = det(AA^{-1}) = detA \cdot detA^{-1}$.
Mà $detA, detA^{-1}$ là số nguyên nên $|detA| = 1$.

□

14 Bài 2.14

Bài 2.14 Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là trực giao nếu $AA^T = I_n$. Chứng minh rằng, nếu A trực giao thì $det A = \pm 1$. Cho ví dụ về một ma trận trực giao có định thức bằng 1 và một ví dụ về ma trận trực giao có định thức bằng -1.

✍ Lời giải

Ta có A trực giao nên $AA^T = I_n \Rightarrow det(AA^T) = det(A).det(A^T) = 1$.
Mà $det(A) = det(A^T) \Rightarrow det(A)^2 = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$ (dpcm).
Ví dụ cho ma trận trực giao có định thức bằng 1:

$$A = I_n, A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ với } \theta = 16.26 \text{ độ}$$

Ví dụ cho ma trận trực giao có định thức bằng -1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

15 Bài 2.15

Bài 2.15 Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận B, C khả nghịch sao cho $A = B + C$.

✍ Lời giải

Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $r(A) = k$. Xét một số phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_a$ với $a \in \mathbb{N}$ sao cho

$$A' = \varphi_1(\varphi_2(\ldots(\varphi_a(A))\ldots))$$

là một ma trận bậc thang. Gọi $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-k}$ là các cột không có phần tử cơ sở của A'. Xét hai ma trận B', C' thỏa

$$\begin{cases} B'_{ij} = 1 & \text{nếu } i = k + t, j = c_t \text{ với } t = \overline{1, n-k} \\ B'_{ij} = \frac{A'_{ij}}{2} & \text{ngược lại} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} C'_{ij} = -1 & \text{nếu } i = k+t, j = c_t \text{ với } t = \overline{1, n-k} \\ C'_{ij} = \frac{A'_{ij}}{2} & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Khi đó, $A' = B' + C'$ và $r(B') = r(C') = n$ (ta chỉ cần thực hiện một số phép biến đổi sơ cấp trên dòng loại 2 – phép hoán đổi hai dòng – để đưa B', C' thành ma trận bậc thang). Xét

$$B = \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(B')))\ldots)$$
$$C = \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(C')))\ldots)$$

với để ý rằng $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}, \ldots, \varphi_a^{-1}$ cũng là các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nên $r(B) = r(B') = n, r(C) = r(C') = n$ và

$$\begin{aligned} B + C &= \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(B')))\ldots) + \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(C')))\ldots) \\ &= \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(B'+C')))\ldots) \\ &= \varphi_a^{-1}(\ldots(\varphi_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(A')))\ldots) \\ &= A \end{aligned}$$

Vậy tồn tại hai ma trận B, C khả nghịch sao cho $A = B + C$. □

16 Bài 2.16

Bài 2.16 Giải các hệ phương trình sau bằng cách áp dụng quy tắc Cramer

a) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 7x_2 &= 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 &= 8 \\ -3x_1 + 9x_2 &= 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 11 \end{cases}$

✍ **Lời giải**

a) Xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\Delta = 22, \quad \Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = 32$$

Do $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Khi đó nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{11} \\ x_2 = \dfrac{16}{11} \end{cases}$$

b) Xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\Delta = 27, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 36$$

Do $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Khi đó nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

c) Xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\Delta = 2, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = -2$$

Do $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Khi đó nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

d) Xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$\Delta = -36, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 36, \quad \Delta_3 = -36$$

Do $\Delta \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Khi đó nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

□

17 Bài 2.17

Bài 2.17 Giải và biện luận (theo tham số m) các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (m-3)x + 2y = m+3 \\ -(2m+1)x + (m+2)y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - mx_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1 \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m \end{cases}$

f) $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m \end{cases}$

✍ **Lời giải**

a) Ta có

$$\Delta = m^2 + 3m - 4$$
$$\Delta_x = m^2 + 5m - 6$$
$$\Delta_y = 2m^2 + 13m - 15$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 1 \wedge m \neq -4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{m+6}{m+4} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{2m+15}{m+4} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 1 \vee m = -4$ thì

- Nếu $m = -4$ thì $\Delta_x = -10 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$, xét ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 - d_1]{\substack{d_1/-2 \\ d_2/-3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = -2 + y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= m^2 - 3m + 2 \\ \Delta_1 &= -m + 1 \\ \Delta_2 &= -m + 1 \\ \Delta_3 &= 4m^2 - 9m + 5 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 1 \wedge m \neq 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-1}{m-2} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-1}{m-2} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{4m-5}{m-2} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 1 \vee m = 2$ thì

- Nếu $m = 2$ thì $\Delta_2 = -1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Nếu $m = 1$, xét ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \leftrightarrow d_2]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - d_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= -m^2 - m + 6 \\ \Delta_1 &= -m^2 - m + 6 \\ \Delta_2 &= -m + 2 \\ \Delta_3 &= -m + 2 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 2 \wedge m \neq -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{m+3} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{1}{m+3} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 2 \vee m = -3$ thì

- Nếu $m = -3$ thì $\Delta_2 = 5 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 2$, xét ma trận mở rộng

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{d_1 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = 1 - 4x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= m^2 + 2m - 3 \\ \Delta_1 &= m^2 + 2m - 3 \\ \Delta_2 &= -m + 1 \\ \Delta_3 &= m - 1 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 1 \wedge m \neq -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-1}{m+3} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{1}{m+3} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 1 \vee m = -3$ thì

- Nếu $m = -3$ thì $\Delta_2 = 4 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$, xét ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_1 - d_2]{\substack{d_3 + d_2 \\ d_2 / -2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} - 2x_3 \\ x_2 = \dfrac{-1}{2} + x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= m^3 - m\\ \Delta_1 &= 2m^3 - m + 1\\ \Delta_2 &= m^3 + m^2\\ \Delta_3 &= -2m^3 + m - 1\end{aligned}$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 0 \wedge m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{2m^2 - 2m + 1}{m^2 - m} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m}{m - 1} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-2m^2 + 2m - 1}{m^2 - m} \end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 0 \vee m = \pm 1$ thì

- Nếu $m = 0$ thì $\Delta_1 = 1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì $\Delta_1 = 2 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = -1$, xét ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-d_1 \\ d_2 + 3d_1}]{d_3 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_1 + d_2]{d_2 / -5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -1 - \dfrac{3}{5}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= m^3 - 6m^2 + 8m\\ \Delta_1 &= m^3 - 7m^2 + 7m\\ \Delta_2 &= -2m^3 + 8m^2 - 5m\\ \Delta_3 &= m^3 - m\end{aligned}$$

Xét các trường hợp

TH1: Nếu $\Delta \neq 0$ hay $m \neq 0 \wedge m \neq 2 \wedge m \neq 4$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m^2 - 7m + 7}{m^2 - 6m + 8}\\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-2m^2 + 8m - 5}{m^2 - 6m + 8}\\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{m^2 - 1}{m^2 - 6m + 8}\end{cases}$$

TH2: Nếu $\Delta = 0$ hay $m = 0 \vee m = 2 \vee m = 4$ thì

- Nếu $m = 2$ thì $\Delta_3 = 6 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 4$ thì $\Delta_3 = 60 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$, xét ma trận mở rộng

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[d_2+2d_1]{d_3+d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[-d_2]{d_1+d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3\\ x_2 = 3x_3\\ x_3 \in \mathbb{R}\end{cases}$$

□

18 Bài 2.18

Bài 2.18 Cho hệ phương trình phụ thuộc vào các tham số a, b

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 3; \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 &= 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất.
b) Xác định a, b để hệ có vô số nghiệm và tìm nghiệm tương ứng.

Lời giải

a) Ta tính định thức của ma trận, áp dụng quy tắc Sarrus, ta có:

$$\Delta = -3 - 4a + 3a + 2a + a - 18 = 2a - 21$$

- Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì:

$$\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq \frac{21}{2}$$

- Vậy $a \neq \dfrac{21}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Ta biến đổi sơ cấp trên dòng với ma trận mở rộng sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-3d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -7 & -4a & -7 \\ 0 & -3 & 3-2a & b-6 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{7}d_2]{7d_3-3d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7}a & 1 \\ 0 & 0 & 21-2a & 7b-21 \end{array}\right]$$

- Để hệ phương trình có vô số nghiệm thì:

$$\begin{cases} a &= \frac{21}{2} \\ b &= 3 \end{cases}$$

Ta thay vào ma trận mở rộng ban đầu được 1 ma trận mở rộng mới:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1-2d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

- Từ đó, nghiệm tổng quát của hệ phương trình có vô số nghiệm là:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 + \dfrac{3}{2}t; \\ x_2 &= 1 - 6t; \\ x_3 &= t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

□