ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 8

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

1 Bài 4.2 — 2

2 Bài 4.4 — 2

3 Bài 4.6 — 3

4 Bài 4.8 — 4

5 Bài 4.10 — 4

6 Bài 4.12 — 6

7 Bài 4.14 — 7

8 Bài 4.16 — 9

9 Bài 4.18 — 10

10 Bài 4.20 — 11

1 Bài 4.2

Bài 4.2 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + z).$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$.

Lời giải

- Với mọi $u = (x_1, y_1, z_1)$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ ta có:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Suy ra: $f(u + v) = (x_1 + y_1 + 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + 2y_1 + 2y_2 + z_1 + z_2)$
Tiếp tục biến đổi, ta có được:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= (x_1 + 2y_1 + 3z_1, 2x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2, 2x_2 + 2y_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Tương tự, ta kiểm tra tiếp: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ và $u = (x_1, y_1, z_1)$ ta có:

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

- Suy ra:

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= (\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + 3\alpha z_1, 2\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1) \\ &= \alpha(x_1 + 2y_1 + 3z_1, 2x_1 + 2y_1 + z_1) = \alpha f(u) \end{aligned}$$

Vậy từ những điều trên ta suy ra: $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. $\square$

2 Bài 4.4

Bài 4.4 Cho $V = M_n(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{R}$ và A là ma trận cố định trong V. Chứng minh rằng $f : V \to V$, với

$$f(X) = XA - AX, \forall X \in V$$

là một toán tử tuyến tính trên V.

Lời giải

Ta chứng minh

- Với mọi $B, C \in V$, $f(B+C) = f(B) + f(C)$. Thật vậy,

  $$f(B+C) = (B+C)A - A(B+C) = (BA - AB) + (CA - AC) = f(B) + f(C)$$

- Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}, X \in V$, $f(\alpha X) = \alpha f(X)$. Ta có:

  $$f(\alpha X) = (\alpha X)A - A(\alpha X) = \alpha(XA - AX) = \alpha f(X)$$

Do đó f là một ánh xạ tuyến tính từ V vào V, hay f là một toán tử tuyến tính trên V. □

3 Bài 4.6

Bài 4.6 Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1,1,1) = (1,2)$, $f(1,1,2) = (1,3)$ và $f(1,2,1) = (2,-1)$

Lời giải

Đặt $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,1), v_1 = (1,2), v_2 = (1,3), v_3 = (2,-1)$
Lập $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, ta thấy u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính và $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
Do đó $\mathcal{B}$ là cơ sở trong $\mathbb{R}^3$

Lập $A = [u_1^T u_2^T u_3^T | u^T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 1 & -x+y \end{array}\right]$

Do đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3x-y-z \\ -x+z \\ -x+y \end{bmatrix}$

Suy ra

$$u = (3x-y-z)u_1 + (-x+z)u_2 + (-x+y)u_3$$
$$f(u) = (3x-y-z)v_1 + (-x+z)v_2 + (-x+y)v_3$$

Vậy $f(x,y,z) = (y, 4x-3y+z)$ □

4 Bài 4.8

Bài 4.8 Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ xét các họ vectơ

$$u_1 = (1, -1), u_2 = (-1, 2), u_3 = (0, -1)$$

và

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)$$

Tồn tại hay không một toán tử tuyến tính f trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn $f(u_i) = v_i, \forall i = \overline{1, 3}$?

✍ **Lời giải**

Dễ thấy u_1, u_2 độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, tồn tại duy nhất toán tử tuyến tính g thỏa $g(u_1) = v_1, g(u_2) = v_2$ hay

$$g(u) = a_1 v_1 + a_2 v_2, \ \forall u \in \mathbb{R}^2$$

với $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Ta có $[u_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nên $g(u_3) = (-1, -1) \neq (1, 1)$. Vậy không tồn tại toán tử tuyến tính thỏa yêu cầu. □

5 Bài 4.10

Bài 4.10 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, 3x_1 - 3x_2 + 8x_3).$$

a) Chứng minh rằng f là một toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vector $u = (a, b, c) \in Imf$.
c) Tìm điều kiện của $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho vector $u = (a, b, c)$ nằm trong $Kerf$. Tìm một cơ sở cho không gian con $Kerf$.

✍ **Lời giải**

a) Xét 2 vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ và $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ và số thực α bất kỳ.
Khi đó ta có:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u+v) &= f(\alpha u_1+v1, \alpha u_2+v_2, \alpha u_2+v_3) \\
&= \begin{bmatrix} \alpha u_1-\alpha u_2+2\alpha u_3+v_1-v_2+2v_3 \\ \alpha u_1-\alpha u_2+3\alpha u_3+v_1-v_2+3v_3 \\ 3\alpha u_1-3\alpha u_2+8\alpha u_3+3v_1-3v_2+8v_3 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} \alpha u_1-\alpha u_2+2\alpha u_3 \\ \alpha u_1-\alpha u_2+3\alpha u_3 \\ 3\alpha u_1-3\alpha u_2+8\alpha u_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} v_1-v_2+2v_3 \\ v_1-v_2+3v_3 \\ 3v_1-3v_2+8v_3 \end{bmatrix}^T \\
&= \alpha \begin{bmatrix} u_1-u_2+2u_3 \\ u_1-u_2+3u_3 \\ 3u_1-3u_2+8u_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} v_1-v_2+2v_3 \\ v_1-v_2+3v_3 \\ 3v_1-3v_2+8v_3 \end{bmatrix}^T \\
&= \alpha f(u)+f(v)
\end{aligned}
$$

Vậy f là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.
b) Lập ma trận:

$$
A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 3 & -3 & 8 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right]
$$

Để $u \in Imf$ thì $c-a-2b=0$.
c) $u \in Kerf \Leftrightarrow f(u)=0$.
Ma trận hóa hệ phương trình $f(u)=0$. Lập ma trận:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi:

$$
u=(t,t,0) \text{ với } t \in \mathbb{R}
$$

Vậy, $Kerf$ có một cơ sở là $\{u_1=(1,1,0)\}$. $\square$

6 Bài 4.12

Bài 4.12 Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z-t, x+2y-z-2t, x+3y-3z-3t).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$ và một cơ sở của $\mathrm{Im} f$.

Lời giải

* Ta tìm cơ sở của $\mathrm{Ker} f$:

- Đặt: $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3$, ta có:

$$u \in Kerf \iff f(u) = 0$$

Tức là ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y+z-t & = 0 \\ x+2y-z-2t & = 0 \\ x+3y-3z-3t & = 0 \end{cases}$$

- Ma trận hóa hệ phương trình, ta được ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_1-d_2]{d_3-2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Nghiệm của hệ phương trình trên là:

$$\begin{cases} x = -3a \\ y = 2a+b \\ z = a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ t = b, \quad \forall b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình: $u_1 = (0,1,0,1)$ và $u_2 = (-3,2,1,0)$
Do đó, cở sở của $\mathrm{Ker} f$ là: $\{(0,1,0,1),(-3,2,1,0)\}$
* Ta tìm cơ sở của $\mathrm{Im} f$:
- Gọi $B_0 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$, ta

có:

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (1,1,1) \\ f(0,1,0,0) &= (1,2,3) \\ f(0,0,1,0) &= (1,-1,-3) \\ f(0,0,0,1) &= (-1,-2,-3) \end{aligned}$$

Khi đó, Imf sinh bởi $\{f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\}$

- Ta lập ma trận:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{\substack{d_4+d_2 \\ d_2-d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_1-d_2]{d_3+2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy Imf có cơ sở là: $\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ □

7 Bài 4.14

Bài 4.14 Giả sử $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ là một đa thức với hệ số thực. Định nghĩa đa thức đạo hàm Df của f bởi

$$Df = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + ... + a_1$$

a) Chứng minh rằng D là toán tử tuyến tính trên không gian vector $\mathbb{R}[t]$. Ta gọi D là toán tử đạo hàm trong $\mathbb{R}[t]$.

b) Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng tập hợp $\mathbb{R}_n[t]$ gồm tất cả các đa thức của $\mathbb{R}[t]$ có bậc $\leq n$ là một không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

c) Hãy xác định ảnh và nhân của toán tử đạo hàm D trong không gian vector $\mathbb{R}_3[t]$.

✍ **Lời giải**

a) Ta chứng minh

- Với mọi đa thức $f, g \in \mathbb{R}[t]$ thì $D(f+g) = Df + Dg$. Thật vậy, xét:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \\ g(t) &= b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + ... + b_1 t + b_0 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} Df &= na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + ... + a_1 \\ Dg &= nb_n t^{n-1} + (n-1)b_{n-1}t^{n-2} + ... + b_1 \end{aligned}$$

với $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$. Khi đó

$$(f+g)(t) = (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + ... + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

và

$$D(f+g) = n(a_n + b_n)t^{n-1} + (n-1)(a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-2} + ... + (a_1 + b_1)$$

Suy ra $D(f+g) = Df + Dg$.

- Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[t]$ thì $D(\alpha f) = \alpha Df$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \alpha Df &= \alpha(na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + ... + a_1) \\ &= n\alpha a_n t^{n-1} + (n-1)\alpha a_{n-1}t^{n-2} + ... + \alpha a_1 \\ &= D(\alpha f) \end{aligned}$$

Suy ra D là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}[t]$.

b) Ta chứng minh 2 ý sau:

- $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_n[t]$:
  Trong $\mathbb{R}[t]$, $\mathbf{0}$ là đa thức $P(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vì bậc của $P \leq n$ nên $P \in \mathbb{R}_n[t]$, hay $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_n[t]$.
- $\forall P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_n[t], \alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha P(t) + Q(t) \in \mathbb{R}_n[t]$: Giả sử

$$\begin{aligned} P(t) &= a_r t^r + a_{r-1}t^{r-1} + ... + a_1 t + a_0 \\ Q(t) &= b_s t^s + b_{s-1}t^{s-1} + ... + b_1 t + b_0 \end{aligned}$$

  với $r, s \leq n$. Từ đó dễ thấy $\alpha P(t) + Q(t)$ là đa thức có bậc $\leq max\{r, s\} \leq n$, do đó $\alpha P(t) + Q(t) \in \mathbb{R}_n[t]$

Suy ra $\mathbb{R}_n[t]$ là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

c) Xét đa thức $h(t) \in \mathbb{R}_3[t], h(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.
Khi đó $D(h) = 3at^2 + 2bt + c \in \mathbb{R}_2[t]$. Suy ra $Im(D) = \mathbb{R}_2[t]$.
Mặt khác, để $D(h) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ là đa thức hằng 0) thì bậc của h chỉ tối đa là 1. Suy ra $Kef(D) = \mathbb{R}_1[t]$.

□

8 Bài 4.16

Bài 4.16 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho $Kerf = \langle(1,1,1)\rangle$ và $Imf = \langle(1,1,1),(0,1,2)\rangle$.

Lời giải

Imf sinh bởi $(1,1,1),(0,1,2)$ nên tồn tại $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (X,Y,Z) &= \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) \\ &= (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta) \end{aligned}$$

Suy ra $Z = 2Y - X$, với X,Y,Z là các đa thức bậc nhất theo x,y,z

Có $Kerf$ được sinh bởi $(1,1,1)$ nên $X(1,1,1) = Y(1,1,1) = 0$

Xét $X = ax + by + cz, Y = a'x + b'y + c'z$, ta có:

$$\begin{aligned} a &= -t_1 - s_1 \\ b &= t_1 \in \mathbb{R} \\ c &= s_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} a' &= -t_2 - s_2 \\ b' &= t_2 \in \mathbb{R} \\ c' &= s_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ta có $dim(Kerf) = 1$, mà $Z = 2Y - X$ nên X,Y không được là tổ hợp tuyến tính của nhau, để vậy thì $X \neq kY$ với $k \in \mathbb{R}$, hay $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{b}{b'}$. Suy ra $t_1 s_2 \neq t_2 s_1$.

Ta có $f(x,y,z) = (X,Y,Z) = (X,0,-X) + (0,Y,2Y)$

Xét $f_1 = (X,0,-X) = (ax+by+cz, 0, -ax-by-cz) = t_1(-x+y,0,x-y) + s_1(-x+z,0,x-z)$

Tương tự, xét $f_2 = (0,Y,2Y) = t_2(0,-x+y,-2x+2y) + s_2(0,-x+y,-2x+2y)$

Vậy $f(x,y,z) = f_1 + f_2$ với $t_1 s_2 \neq t_2 s_1$ □

9 Bài 4.18

Bài 4.18 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x-3y+z)$$

a) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

b) Xác định ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $\mathcal{C} = \{(1,1), (2,3)\}$ (của $\mathbb{R}^2$).

✍ **Lời giải**

a) Ta có

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}_0} &= \begin{bmatrix} f(e_1)^\top & f(e_2)^\top & f(e_3)^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) &= \begin{bmatrix} u_1^\top & u_2^\top & u_3^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Tương tự,

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{C})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

10 Bài 4.20

Bài 4.20 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - 2z, x - 3y + 3z)$$

a) Tìm một cơ sở của Imf và một cơ sở của $Kerf$.
b) Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,-2,0), (2,1,3)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Lời giải
Xét vector $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in Kerf &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c &= 0 \\ a + 2b - 2c &= 0 \\ a - 3b + 3c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó nghiệm của hệ là:

$$(a,b,c) = (0,t,t) \text{ với } t \in \mathbb{R}$$

Nghiệm cơ bản của hệ là: $u_1 = (0,1,1)$.
Khi đó ta tìm được một cơ sở của $Kerf$ là $\{u_1\}$.
Lại có xét ma trận:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 2 & -2 & b \\ 1 & -3 & 3 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -3 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & 3c - 5a + 2b \end{array}\right]$$

Ta có: $u \in Imf \Leftrightarrow 3c - 5a + 2b = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{5a}{3} - \dfrac{2b}{3}$.

Vậy u có dạng:

$$\begin{aligned} u &= (a, b, \frac{5a}{3} - \frac{2b}{3}) \\ &= a \cdot (1, 0, \frac{5}{3}) + b \cdot (0, 1, -\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Vậy Imf có một cơ sở là $\{(1, 0, \frac{5}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})\}$.
b) Gọi $\mathcal{B}_0$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^T\ u_2^T\ u_3^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, do đó:

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó:

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -26 & 14 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

□