tuần 6: Phép đổi biến và ứng dụng của tích phân

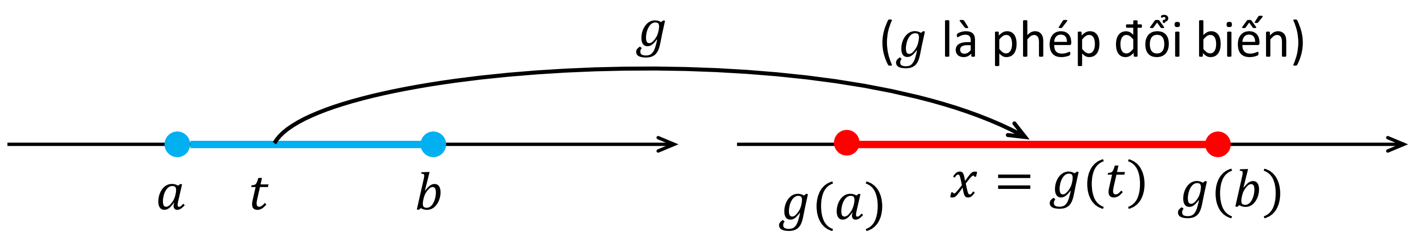
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[g(t)]g'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{g(R)} f = \int_R (f \circ g) \cdot \boxed{?}$$

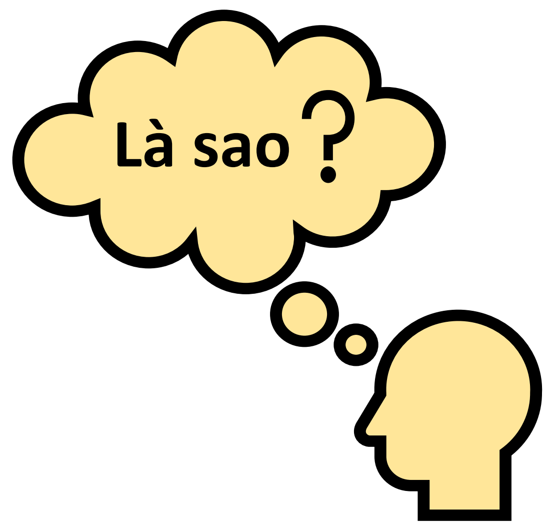
Phép đổi biến tích phân

- Nhắc lại công thức đổi biến tích phân của hàm số một biến: Giả sử f là hàm số liên tục, g là hàm số trơn cấp 1, tức là có đạo hàm g' cũng liên tục. Hơn nữa g đơn điệu (song ánh). Khi đó

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[g(t)]g'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ g)g'.$$



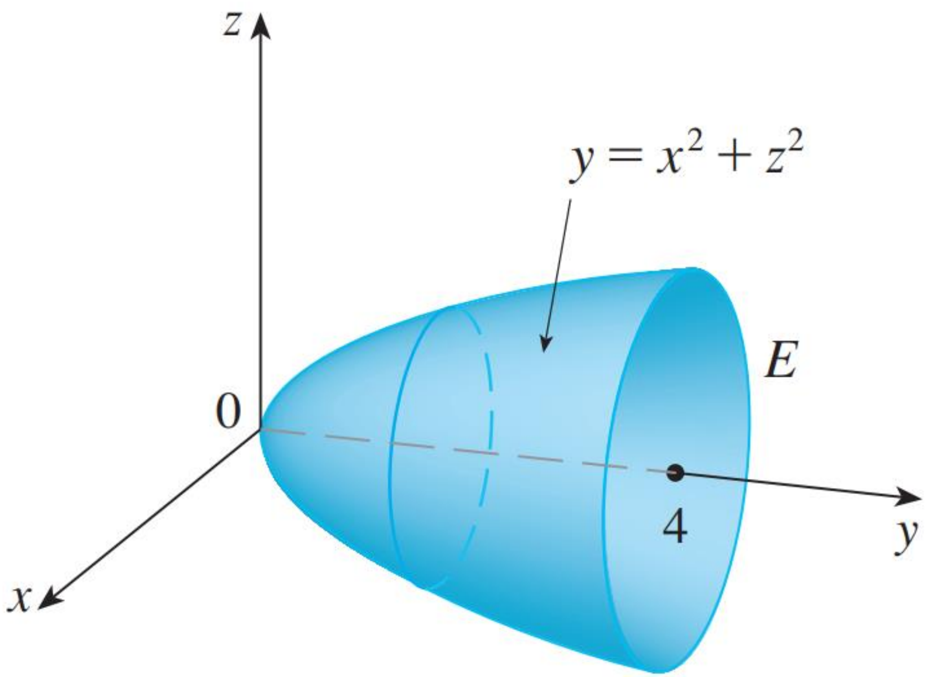
- Đối với tích phân hàm nhiều biến, ta cũng có công thức đổi biến tương tự như trên, nhưng g' ở trong công thức trên được thay bởi trị tuyệt đối của Jacobian, tức là trị tuyệt đối của định thức ma trận Jacobi (xem lại bài giảng tuần 3 về ma trận Jacobi).



Một bài toán mở đầu

Ví dụ. Tính $\int_E \sqrt{x^2 + z^2}\mathrm{d}V$ với E là miền bị bao quanh bởi các mặt $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Phương án 1. Với hình khối cho sẵn, hãy xác định phần giao của khối E với mặt $z = 0$ là miền phẳng D, biểu diễn D đơn giản theo một phương Ox hoặc Oy.



Tiếp theo ta biểu diễn E đơn giản theo phương Oz rồi áp dụng định lý Fubini, biết rằng

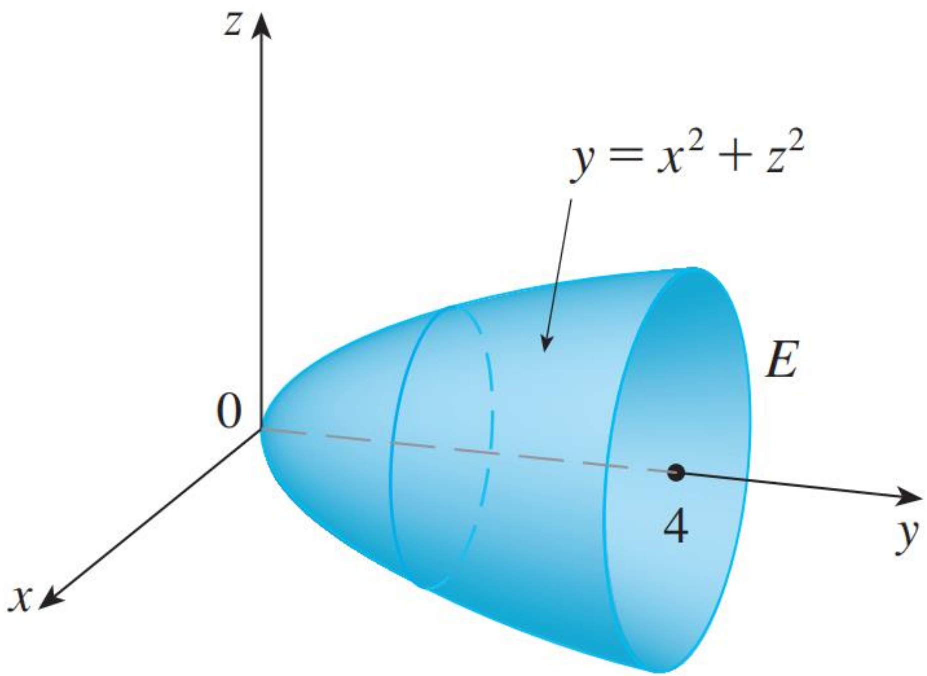
$$\int \sqrt{a^2 + u^2}\mathrm{d}u = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C.$$

Theo phương án này, tính toán khó. Ta thử đổi phương án.

Một bài toán mở đầu

Phương án 2.

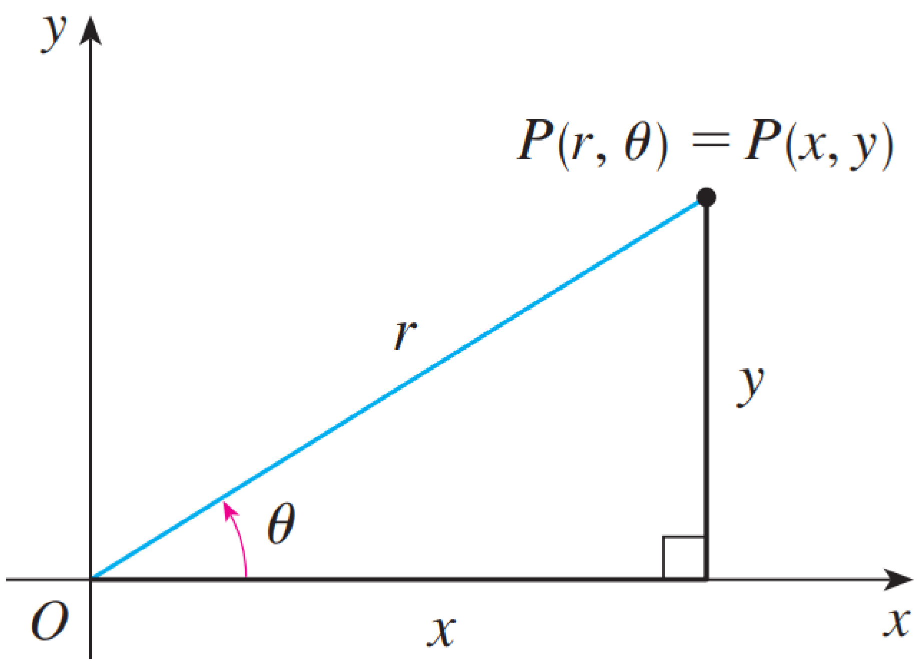
- Hình chiếu của E lên mặt $y = 0$ là D. D là hình gì? Mô tả E đơn giản theo phương Oy rồi lấy tích phân theo biến *y* trước.



- Sau đó lấy tích phân kép trên D. Ta cũng gặp khó khăn khi tìm nguyên hàm. Ta nghĩ đến phép đổi biến tích phân, được bàn ở phần tiếp theo.

Phép đổi biến theo tọa độ cực

- Hai phần tử của $\mathbb{R}^2$ là $(r;\theta)$ và $(x;y)$ (với $r \geq 0$) có thể mô phỏng (hay xác định vị trí của) cùng một điểm P trong mặt phẳng tọa độ theo cách của tọa độ cực và tọa độ Descartes tương ứng, như minh họa trong hình dưới. Trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là khoảng cách từ điểm P đến gốc tọa độ O trong mặt phẳng tọa độ; θ là số đo góc quay có có hướng từ tia Ox đến tia OP (số đo θ có thể âm).



Phép đổi biến theo tọa độ cực là song ánh biến điểm $(r;\theta) \in U_{r\theta} \subset \mathbb{R}^2$ thành điểm $(x;y) \in U_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ theo công thức sau

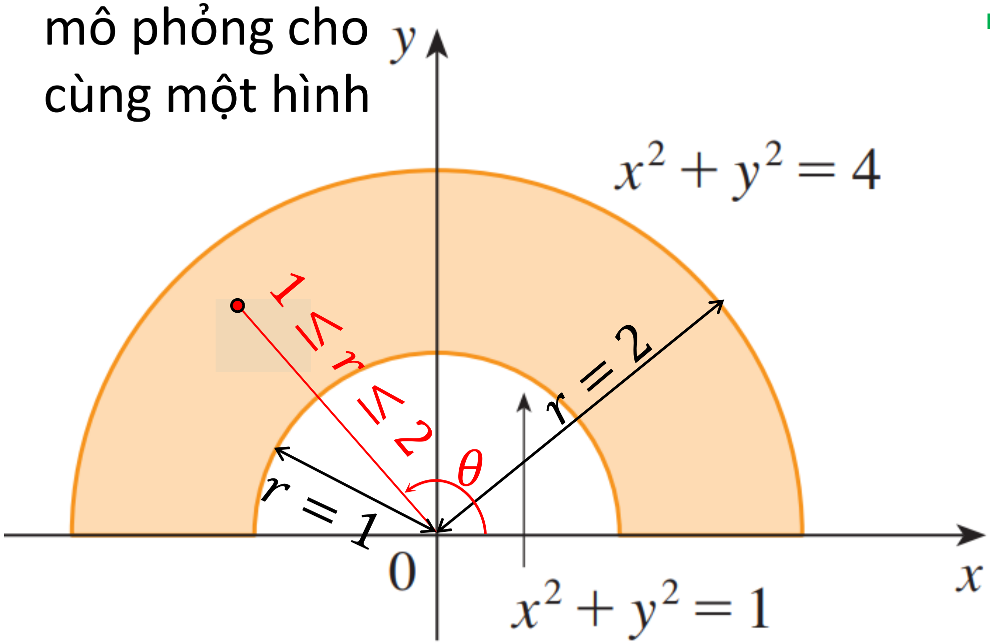
$$x = r\cos\theta\,; \quad y = r\sin\theta\,.$$

Phép đổi biến theo tọa độ cực

- **Ví dụ.** Phép đổi biến theo tọa độ cực biến đổi tập hợp
$$U_{r\theta} = \{(r;\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$
thành tập hợp $U_{xy} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

- Cả hai tập hợp trên cùng mô phỏng nửa vành tròn trong mặt phẳng tọa độ với hai kiểu: tọa độ cực và tọa độ Descartes.

Tập U_{xy} và $U_{r\theta}$ mô phỏng cho cùng một hình



- **Ví dụ.** Gọi D là nửa trên hình tròn trong mặt phẳng Oxy, có bán kính 1, tâm đặt tại điểm $(1;0)$ thuộc trục hoành. Hãy xác định tập $U_{r\theta} \subset \mathbb{R}^2$ mô phỏng hình D theo cách của tọa độ cực.

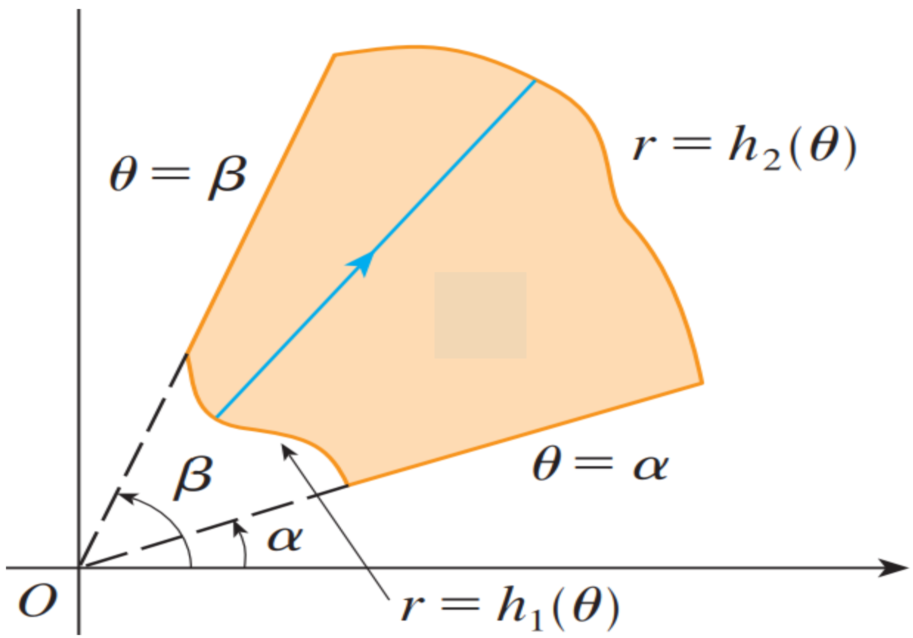
Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Giả sử hai tập hợp

$$U_{r\theta} = \{(r;\theta) \mid \theta \in [\alpha;\beta], h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\} \subset \mathbb{R}^2$$

và tập hợp $U_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ mô phỏng cùng một *hình-có-diện-tích*, nằm trong mặt phẳng như ở dưới theo cách của tọa độ cực và tọa độ Descartes tương ứng. Giả sử hàm số f liên tục trên U_{xy}. Khi đó

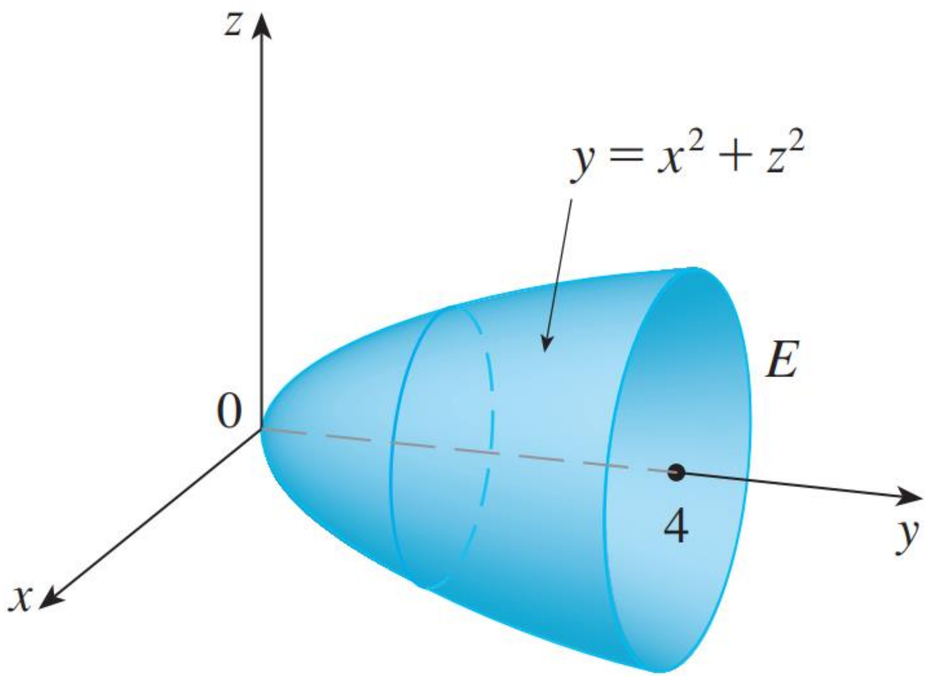
$$\int_{U_{xy}} f(x;y)\mathrm{d}A = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta\,; r\sin\theta)\cdot \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$



- **Chú ý.** Chữ r in màu đỏ trong công thức trên không thể thiếu, có liên quan đến ma trận đạo hàm Jacobi của phép đổi biến theo tọa độ cực, sẽ bàn sau.

Tích phân trên miền 3 chiều, đơn giản

Trở lại ví dụ đã xét ở trước. Bằng cách lấy tích phân theo biến *y* trước, tính $\int_E \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, với E là miền bị bao quanh bởi mặt $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

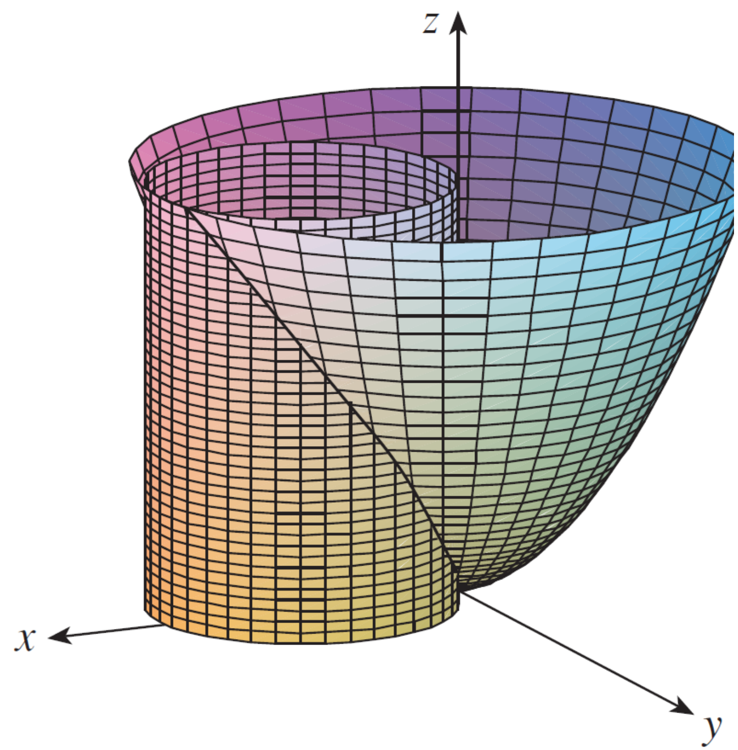


***Hướng dẫn*.**

- Hình chiếu của E lên mặt $y = 0$ là D. D là hình gì? Mô tả E đơn giản theo phương Oy rồi lấy tích phân theo biến *y* trước.
- Sau đó lấy tích phân kép trên D. Đổi biến theo tọa độ cực.

Đổi biến tích phân theo tọa độ cực

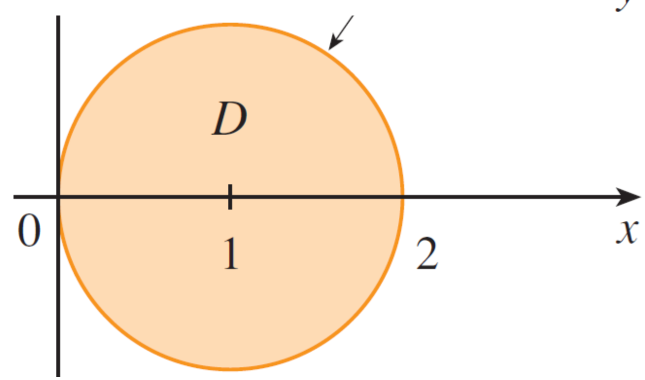
Ví dụ. Tìm thể tích khối nằm dưới mặt $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt $z = 0$ và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.



Hướng dẫn.

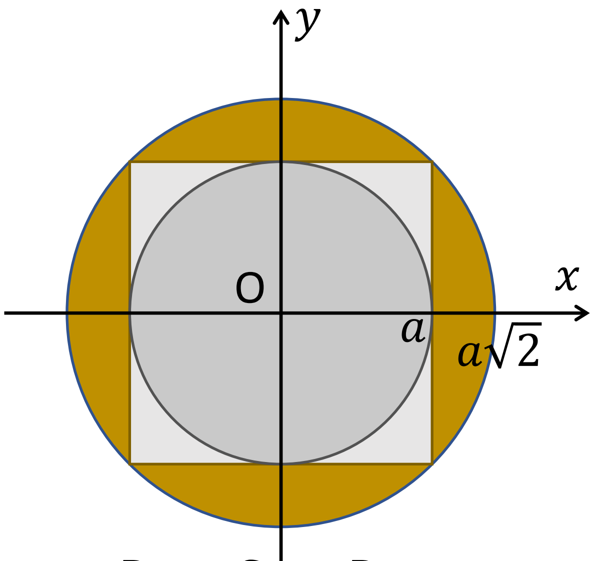
Hình khối trong hình bên gợi ý lập biểu thức tích phân của hàm số nào trên D như là thể tích của khối ấy?

Tìm tập hợp $U_{r\theta}$ mô phỏng hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 2x$ trong mặt phẳng Oxy theo cách của tọa độ cực, đã xét trong ví dụ trước, rồi thực hiện phép đổi biến tích phân theo tọa độ cực.



Phân bố chuẩn trong xác suất

- Hàm số $x \mapsto e^{-x^2}$ được gọi là hàm mật độ phân bố chuẩn trong xác suất. Đặt $S_a = [-a; a] \times [-a; a]$, $D_a: x^2 + y^2 \le a^2$, $D_{a\sqrt{2}}: x^2 + y^2 \le 2a^2$ là các tập hợp trong $\mathbb{R}^2$, mô phỏng hình vuông và hai hình tròn như hình bên.



$D_a \subset S_a \subset D_{a\sqrt{2}}$

- Dùng tính chất của tích phân và định lý Fubini, hãy chứng minh

$$\left(\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A\right)^{-\frac{1}{2}} \le \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$\le \left(\int_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

- Dùng phép đổi biến, chứng minh

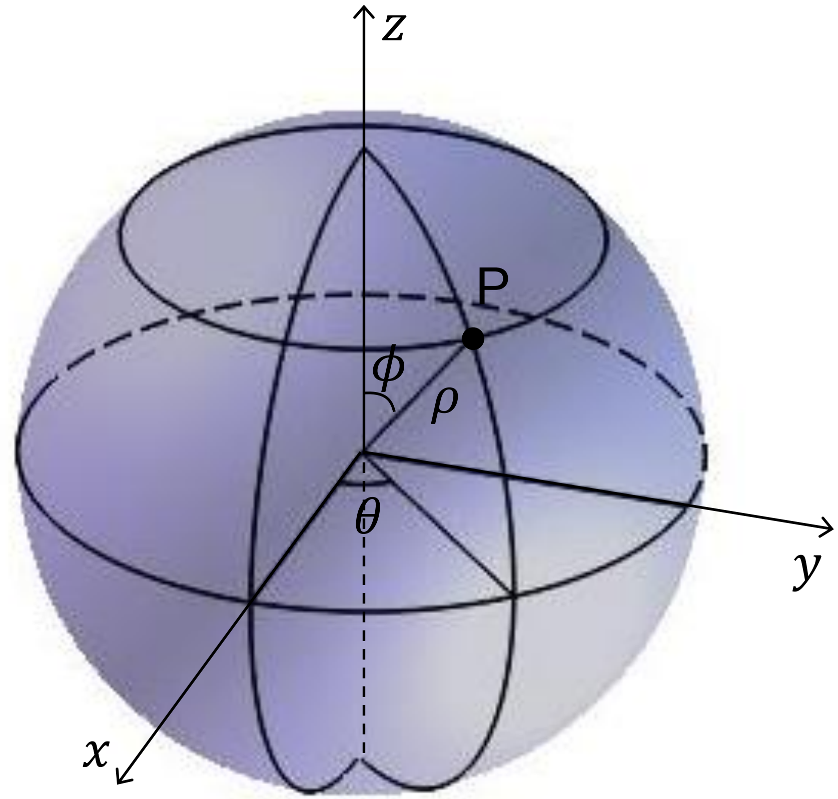
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Sinh viên tự đọc thêm:

Phép đổi biến tích phân theo tọa độ cầu và đổi biến tổng quát

Đổi biến theo tọa độ cầu

- Xem hình bên cạnh, cả hai phần tử $(\rho;\theta;\phi) \in \mathbb{R}^3$ và $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ mô phỏng (hay xác định vị trí của) cùng một điểm P trong không gian theo hai cách: tọa độ cầu và tọa độ Descartes tương ứng.
- $(x;y;z)$ định vị trí P trong không gian theo tọa độ Descartes đã được biết. Với cách định vị bằng tọa độ cầu thì số ρ cho biết P thuộc mặt cầu tâm là gốc tọa độ O, bán kính ρ; số θ có vai trò gần giống kinh độ; và số ϕ có vai trò gần giống vĩ độ trên Trái Đất.



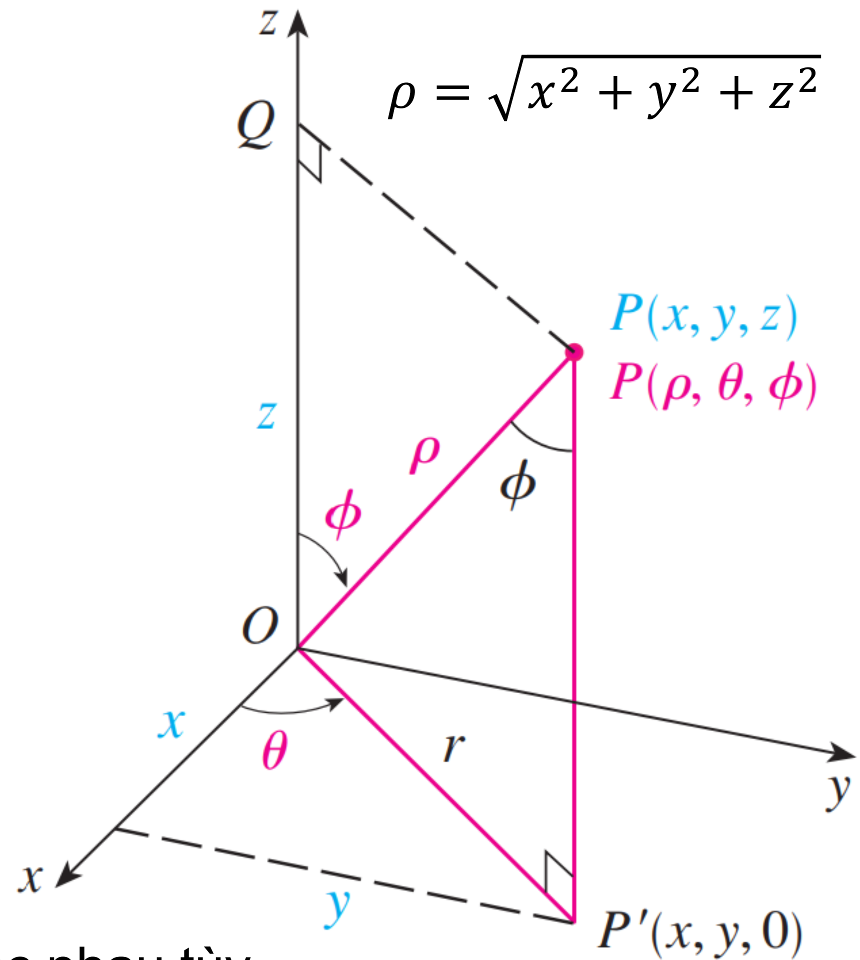
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Đổi biến theo tọa độ cầu

Phép đổi biến theo tọa độ cầu là song ánh biến điểm $(\rho; \theta; \phi) \in V_{\rho\theta\phi} \subset \mathbb{R}^3$ thành điểm $(x; y; z) \in V_{xyz} \subset \mathbb{R}^3$ theo công thức sau

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (\rho\sin\phi)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (\rho\sin\phi)\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

trong đó $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ và $0 \leq \theta < 2\pi$ (hoặc có thể giá trị của ϕ và θ trong các đoạn-khoảng hẹp hơn).



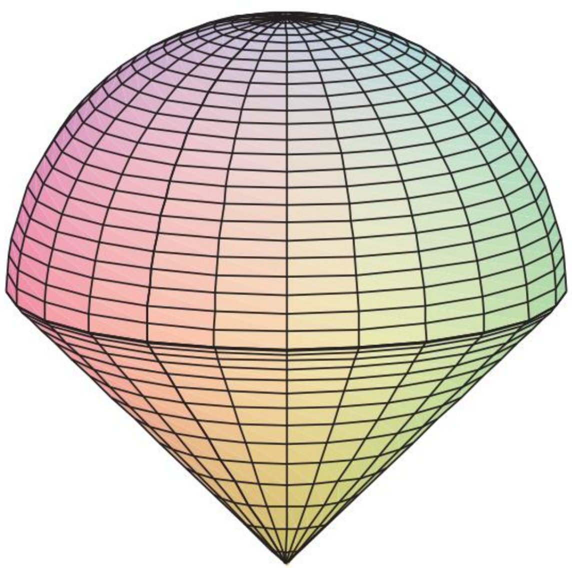
Ký hiệu góc của tọa độ cầu có thể khác nhau tùy theo từng sách. Ở đây, ϕ là góc vĩ độ (tạm gọi) và θ là góc kinh độ.

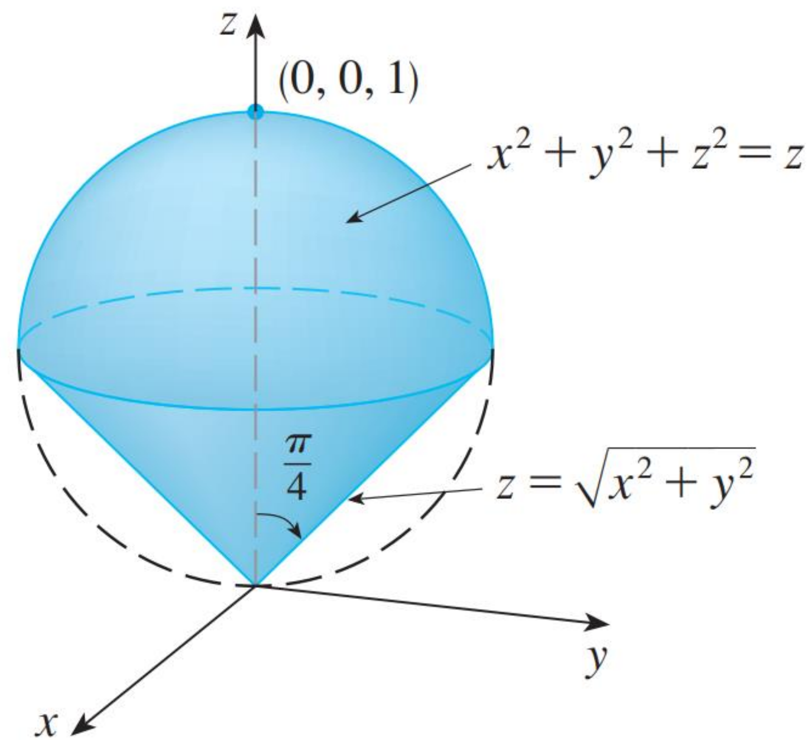
Phép đổi biến theo tọa

- **Ví dụ.** Tập hợp $U_{\rho\theta\phi} \subset \mathbb{R}^3$ mô phỏng một khối như hình dưới theo cách của tọa độ cầu. Hãy xác định tập hợp này.

Hướng dẫn. θ và ϕ thuộc đoạn giá trị thực nào? Với mỗi cặp giá trị ϕ và θ cố định, giá trị ρ thay đổi như thế nào?

Đ/án: $U_{\rho\theta\phi} = \left\{(\rho;\theta;\phi) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0;2\pi], \phi \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right], 0 \le \rho \le \cos\phi\right\}$.





Đổi biến theo tọa độ cầu

Đổi biến tích phân theo tọa độ cầu.

Giả sử hai tập hợp

$$U_{\rho\theta\phi} = \{(\rho;\theta;\phi) \mid \rho_1 \le \rho \le \rho_2;\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2;\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2\} \subset \mathbb{R}^3$$

và $U_{xyz} \subset \mathbb{R}^3$ mô phỏng cùng một *khối-có-thể-tích*, trong không gian theo cách của tọa độ cực và tọa độ Descartes tương ứng. Giả sử f là hàm liên tục trên U_{xyz}. Khi đó

$$\int_{U_{xyz}} f(x;y;z)\mathrm{d}V$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\phi\cos\theta\,;\rho\sin\phi\sin\theta\,;\rho\cos\phi)\cdot\rho^2\sin\phi$$

$$\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.$$

- **Chú ý.** Biểu thức $\rho^2\sin\phi$ in màu đỏ trong công thức trên không thể thiếu, có liên quan đến ma trận đạo hàm Jacobi của phép đổi biến theo tọa độ cầu, sẽ bàn sau.

Phép đổi biến tổng quát tích phân

Phép đổi biến tổng quát trong tích phân bội.

- Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Ta nói song ánh $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ là phép đổi biến khi φ trơn đến cấp 1 và ánh xạ ngược φ^{-1} cũng trơn đến cấp 1.
- Giả sử hàm số f khả tích trên tập $\varphi(U)$ có thể tích, với φ là phép đổi biến trên tập U mở có thể tích, hàm hợp $f \circ \varphi$ cũng khả tích trên *U*. Khi đó

$$\int_{\varphi(U)} f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot \left|\det J_\varphi\right|,$$

trong đó J_φ là ma trận Jacobi chứa các thành phần là các đạo hàm riêng của mỗi thành phần của φ.

- Chứng minh của định lý trên nằm ngoài phạm vi của giáo trình này.

Phép đổi biến tổng quát trong tích phân

Bài tập. Phép đổi biến theo tọa độ cực biến điểm $(r;\theta) \mapsto (x;y)$. Chứng minh định thức ma trận Jacobi (gọi là Jacobian) bằng r, với ký hiệu sau

$$\frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = r.$$

Bài tập. Phép đổi biến theo tọa độ cầu biến điểm $(\rho;\theta;\phi) \mapsto (x;y;z)$. Chứng minh trị tuyệt đối của định thức ma trận Jacobi bằng $\rho^2 \sin\phi$, với ký hiệu sau

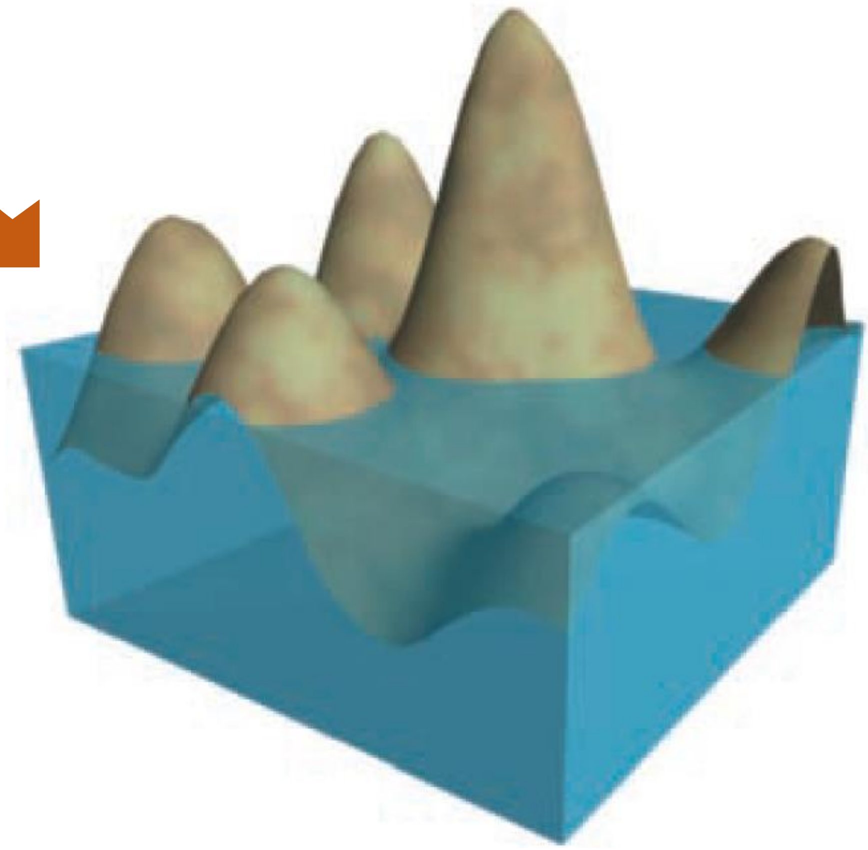
$$\left|\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(\rho;\theta;\phi)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}\right| = \rho^2 \sin\phi\,.$$

Vài ứng dụng của tích phân nhiều lớp

- Giá trị trung bình của hàm số
- Tâm khối
- Xác suất

Giá trị trung bình của hàm số

Độ cao trung bình của mặt cong địa hình là bao nhiêu?



Giá trị trung bình của hàm số

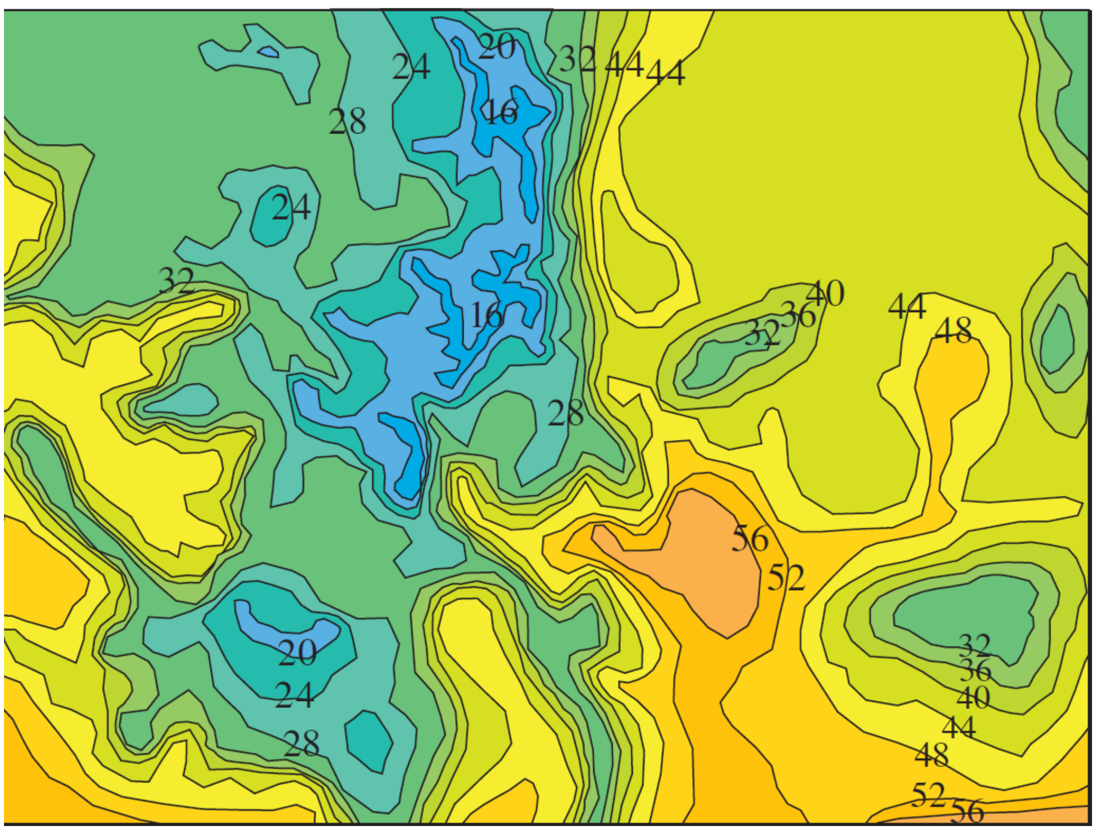
- Nếu hàm số f khả tích trên hình chữ nhật R thì người ta nói
$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{|R|}\int_R f$$
là giá trị trung bình của f trên R.

- Nếu hàm số f liên tục trên hình chữ nhật đóng $R = [a; b] \times [c; d]$ thì tồn tại một điểm $(x_0; y_0) \in R$ sao cho $f(x_0; y_0) = f_{\text{ave}}$.

- ***Ý nghĩa.*** Thể tích khối nằm dưới mặt cong đồ thị f, $\int_R f$, giống như thể tích đất đá của dãy núi tọa lạc trên miền hình chữ nhật R, bằng diện tích hình chữ nhật R nhân giá trị trung bình, giống như thể tích hình hộp. Do đó độ cao hộp này được xem là độ cao trung bình của dãy núi.

Bài tập mẫu

- Bản đồ các đường đẳng nhiệt, đơn vị là độ Fahrenheit, cho biết tình hình nhiệt độ lúc 4:00 PM vào ngày 26, tháng 2, 2007 ở bang Colorado. (Đo từ Tây sang Đông là 388 dặm, từ Nam lên Bắc là 276 dặm.) Dùng Quy tắc trung điểm với $m = n = 4$, hãy ước tính nhiệt độ trung bình của bang lúc đó.



- Tham khảo bài tập [1], 2.4.5, 2.4.6.

Tâm khối lượng

- Tâm khối lượng là một khái niệm của Cơ học, là điểm mà trọng lực tác dụng vào vật rắn luôn đặt vào đó, cho dù vật nằm ở bất cứ vị trí nào.

- Để hình dung một cách trực quan, nếu vật rắn được cột vào một sợi dây tại một điểm bất kỳ và treo vật lên cao, khi vật ở vị trí cân bằng thì phương sợi dây luôn qua tâm khối.

Định lý. Một vật rắn có hình dạng được mô phỏng bởi tập $E \subset \mathbb{R}^3$ và $\rho(x; y; z)$ là mật độ khối lượng tập trung tại $(x; y; z) \in E$. Khi đó khối lượng m của vật và tâm khối của vật lần lượt là

$$m = \int_E \rho \,; \text{ điểm } \left(\frac{1}{m}\int_E x\rho \,; \frac{1}{m}\int_E y\rho \,; \frac{1}{m}\int_E z\rho\right).$$

Tích phân trong xác suất

- Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục (xem lại khái niệm trong Vi tích phân 1B), mà giá trị của chúng tạo thành cặp số, xem như phần tử $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
- Hàm mật độ xác suất của hai biến này là hàm 2 biến f không âm thỏa $\int_{\mathbb{R}^2} f = 1$ với ý nghĩa là: xác suất để $(X; Y)$ có giá trị $(x; y) \in D$ được đo bởi $\int_D f$.
- Trong thực tế, hàm f là kết quả của việc thống kê và lập mô hình.
- Nếu hai biến X và Y mang giá trị ngẫu nhiên độc lập nhau, f_1 và f_2 tương ứng là hai hàm mật độ xác suất của X và của Y thì hàm mật độ xác suất của cặp biến $(X; Y)$ cho bởi $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, và theo định lý Fubini thì

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x) f_2(y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{d}y\right) = 1.$$

Tích phân trong xác suất

Ví dụ. Một xe buýt A theo kế hoạch phải về bến ở thời điểm 0 (phút) và đợi ở đó 5 phút trước trước khi bắt đầu phiên lộ trình mới. Xe A thường đến bến trễ, nhưng không quá 10 phút. Gọi X là thời điểm (phút) thực tế mà xe A về đến bến (có giá trị ngẫu nhiên). Hàm mật độ xác suất của X cho bởi $f_1(x) = -0{,}02x + 0{,}2$ với $0 \leq x \leq 10$ và $f_1(x) = 0$ khi $x \notin [0; 10]$. Một người theo kế hoạch hàng ngày là sau giờ làm sẽ đến bến xe vào thời điểm 0 để lên xe A về nhà. Nhưng người này thường đến bến muộn, và muộn không quá 20 phút so với thời điểm dự định. Thời điểm Y mà người này đến bến có hàm mật độ xác suất cho bởi $f_2(y) = -0{,}005y + 0{,}1$ với $0 \leq y \leq 20$ và $f_2(y) = 0$ khi $y \notin [0; 20]$. Hỏi xác suất mà người này không bị lỡ chuyến xe A là bao nhiêu?

Tích phân trong xác suất

Giải. Hai giá trị mà X và Y lấy là độc lập nhau nên hàm mật độ xác suất của cặp biến $(X; Y)$ cho bởi

$$f(x; y) = f_1(x) f_2(y) = \left(-\frac{x}{50} + \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{y}{200} + \frac{1}{10}\right),$$

với $(x; y) \in [0; 5] \times [0; 20]$. Nếu $(x; y) \notin [0; 5] \times [0; 20]$ thì $f(x; y) = 0$.

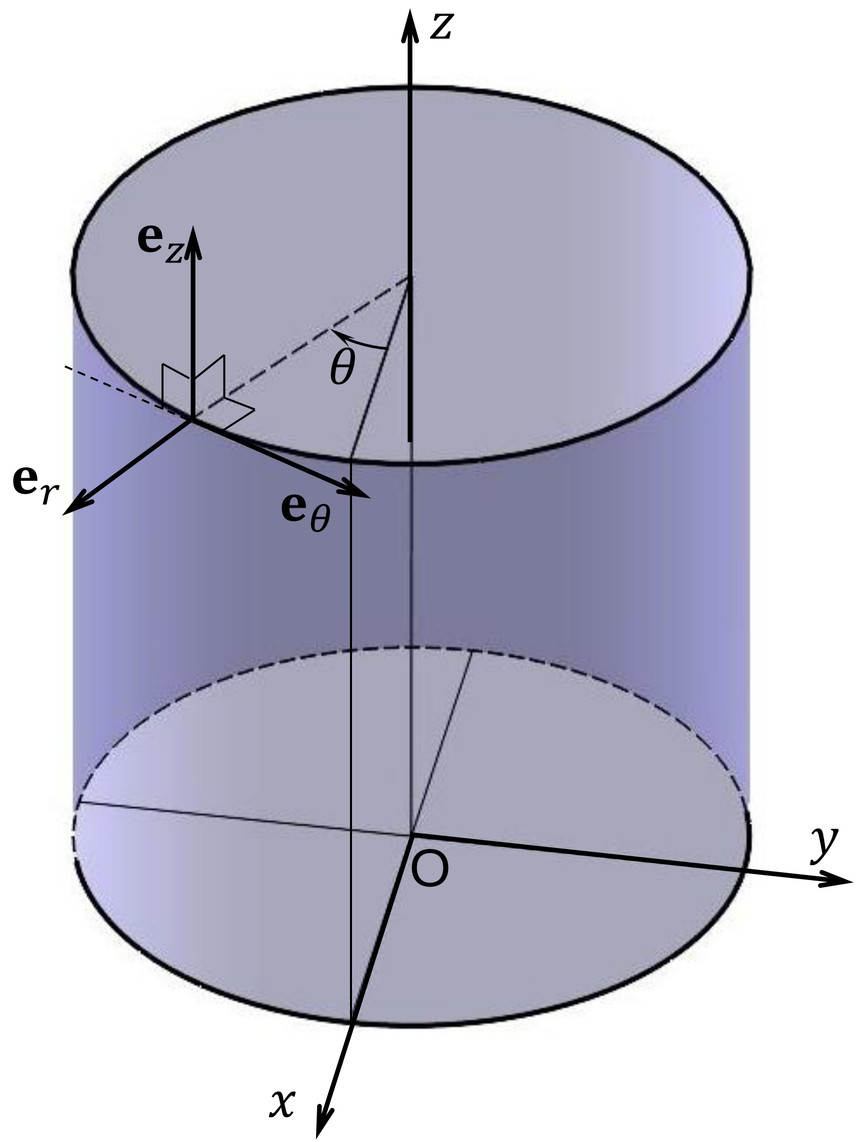
Để không lỡ chuyến xe A, người đó phải có mặt tại bến ở thời điểm y với $0 \leq y \leq x + 5$. Gọi $D = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x + 5\}$ thì xác suất để người này không bị lỡ chuyến xe A là

$$P(0 \leq Y \leq X + 5) = \int_D f = \int_0^{10} \int_0^{x+5} f(x; y) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \approx 65\%.$$

- Làm bài tập [1] 2.4.9→11.

Sv tự đọc thêm: Vectơ cơ sở theo tọa độ cực, tọa độ cầu và tọa đô trụ

Sinh viên ngành Vật Lý hoặc một số ngành liên quan nên biết

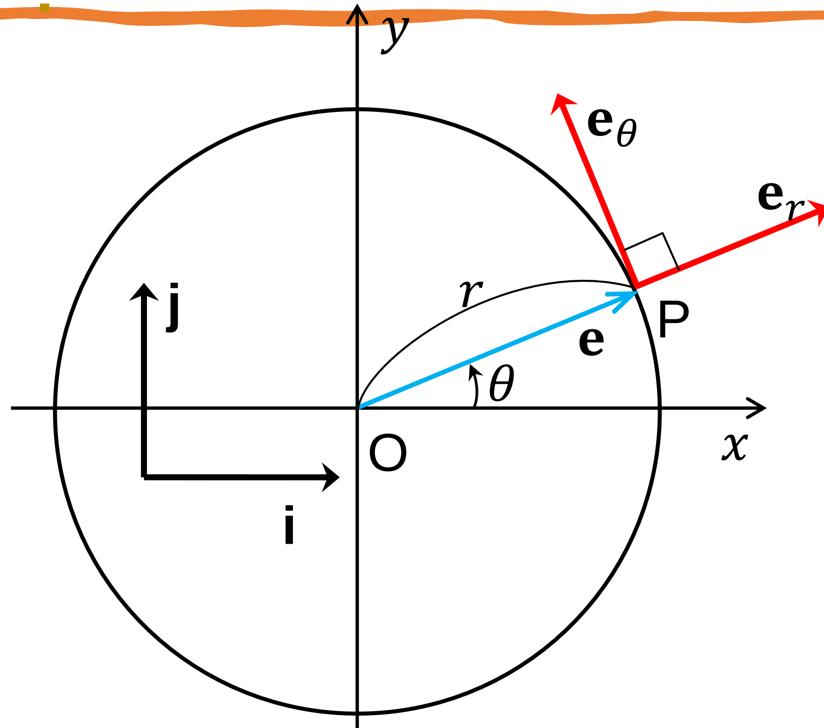


Vectơ cơ sở theo tọa độ cực

- Mỗi điểm trong mặt phẳng hoặc không gian Vật Lý đều có thể được định vị bởi phần tử của $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$ theo hai kiểu: tọa độ Descartes hoặc tọa độ cực-tọa độ trụ.
- Mỗi vectơ hình học (đoạn thẳng có hướng) trong mặt phẳng hay không gian được mô phỏng bởi phần tử của $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$ chỉ theo một kiểu tọa độ như đã biết ở phổ thông.
- Với cùng điểm P trong mặt phẳng có tọa độ Descates và tọa độ cực lần lượt là $(x; y)$ và $(r; \theta)$, ta ký hiệu $\mathbf{e} = (x; y) = (r\cos\theta\,; r\sin\theta)$, là phần tử của $\mathbb{R}^2$ mô phỏng đoạn thẳng có hướng $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (có sách cũng gọi là vectơ bán kính).
- Trong $\mathbb{R}^2$ có hai phần tử $\mathbf{e}_x = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} = \mathbf{i} = (1; 0)$ và $\mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y} = \mathbf{j} = (0; 1)$ mô phỏng hai đoạn thẳng theo hướng dương của trục Ox và Oy, có độ dài bằng 1. $\mathbf{e}_x$ và $\mathbf{e}_y$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^2$.
- Ký hiệu $\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} = (\cos\theta\,; \sin\theta)$, $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\,; \cos\theta)$.

Vectơ cơ sở theo tọa độ cực

- $\mathbf{e}_r$ và $\mathbf{e}_\theta$ có độ dài Euclide bằng 1 và tích trong $\mathbb{R}^2$ của chúng bằng 0, nghĩa là chúng vuông góc nhau.
- Các vectơ $\mathbf{e}_r$ và $\mathbf{e}_\theta$ sẽ thay đổi khi vị trí điểm P thay đổi, được gọi là các vectơ cơ sở kiểu tọa độ cực.



Gradient theo tọa độ cực.

Giả sử $f(x;y)$ là hàm số hai biến trơn cấp 1 (hoặc khả vi) và $\tilde{f}(r;\theta) = f(r\cos\theta\,; r\sin\theta)$. Khi đó

$$\nabla f(x;y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta.$$

Một số sách in $\frac{\partial f}{\partial r}$ thay cho $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ vì không muốn đưa thêm $\tilde{f}$ vào.

Vectơ cơ sở theo tọa độ trụ

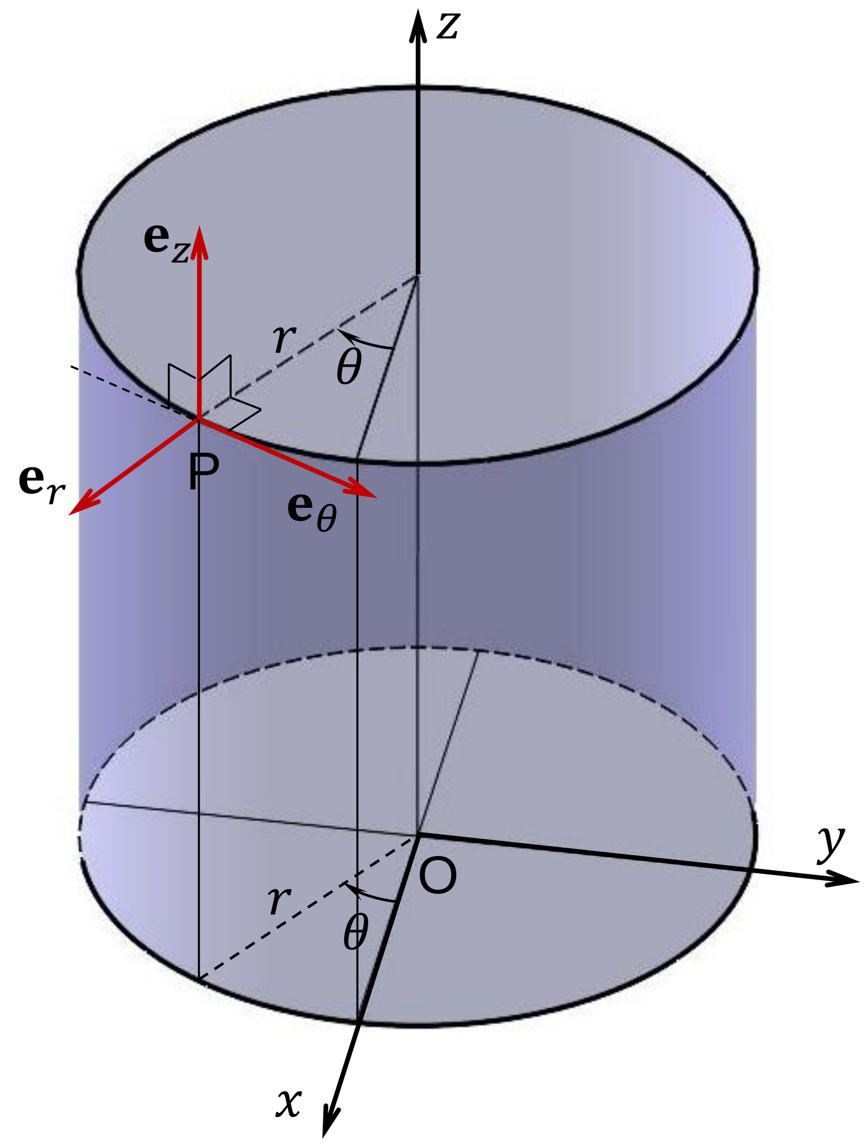
- Xét điểm P trong không gian có tọa độ Descartes là $(x; y; z)$, tọa độ trụ là $(r; \theta; z)$, ta ký hiệu $\mathbf{e} = (x; y; z) = (r\cos\theta\,; r\sin\theta\,; z) \in \mathbb{R}^3$, mô phỏng đoạn thẳng có hướng $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ trong không gian Oxyz. (Một số sách gọi **e** là vectơ bán kính, hoặc vectơ vị trí của P.)

- Ký hiệu $\mathbf{e}_x = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} = \mathbf{i} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e}_y = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y} = \mathbf{j} = (0; 1; 0)$ và $\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z} = \mathbf{k} = (0; 0; 1)$. Ba phần tử này của $\mathbb{R}^3$ mô phỏng ba đoạn thẳng theo hướng dương của trục Ox, Oy và Oz, có độ dài bằng 1. Chúng là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$.

- Đặt $\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} = (\cos\theta\,; \sin\theta\,; 0)$, $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\,; \cos\theta\,; 0)$ và $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ thì độ dài Euclide của chúng bằng 1, hơn nữa tích trong $\mathbb{R}^3$ của hai trong số chúng bằng 0, nghĩa là từng cặp vuông góc nhau.

Các vectơ cơ sở theo tọa độ trụ

- Khi vị trí điểm đặt P thay đổi thì các vectơ $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ cũng thay đổi.

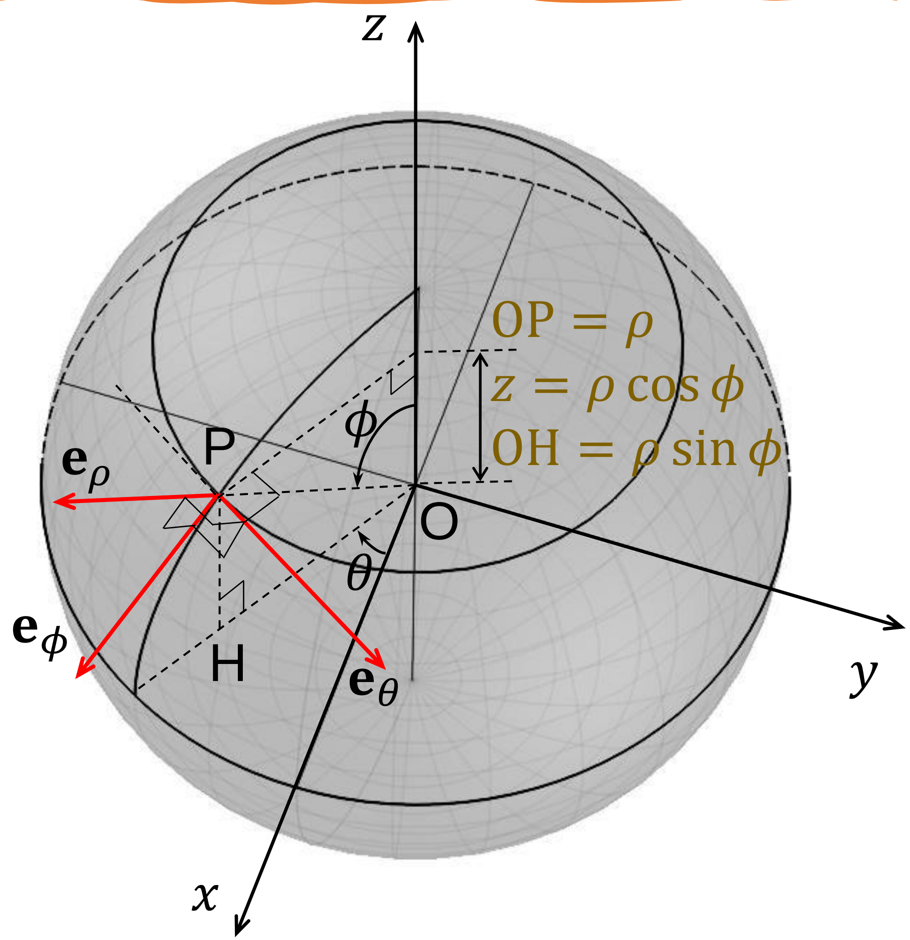


Nếu $\tilde{f}(r;\theta;z) = f(x;y;z)$ khả vi thì
$\nabla f(x;y;z)$
$$= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

- **Ghi chú.** Trong một số sách, người ta viết $\frac{\partial f}{\partial r}$, nhưng phải hiểu ngầm là $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$, vì không muốn đưa thêm ký hiệu $\tilde{f}$.

Vectơ cơ sở theo tọa cầu

- Với mỗi điểm P trong không gian có tọa độ Descartes và tọa độ cầu lần lượt là $(x; y; z)$ và $(\rho; \theta; \phi)$, ta ký hiệu $\mathbf{e} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, mô phỏng $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.



- Đặt

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \rho}$$
$$= (\sin\phi\cos\theta\,; \sin\phi\sin\theta\,; \cos\phi)$$
$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\,; \cos\theta\,; 0)$$
$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi}$$
$$= (\cos\theta\,; \sin\theta\,; -\sin\phi).$$

- $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ và $\mathbf{e}_\phi$ có độ dài Euclide bằng 1, vuông góc nhau từng đôi một, mô phỏng ba đoạn thẳng có hướng như hình trên.

Gradient theo tọa độ cầu

Gradient tính theo tọa độ cầu.

- Giả sử $f(x;y;z)$ là hàm số ba biến trơn cấp 1 (hoặc khả vi). Đặt $\tilde{f}(\rho;\theta;\phi) = f(\rho\sin\phi\cos\theta\,;\rho\sin\phi\sin\theta\,;\rho\cos\phi)$, thì

$$\nabla f(x;y;z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho\sin\phi}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi.$$

- Một số sách không muốn đưa thêm ký hiệu $\tilde{f}$ mà hiểu ngầm $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ là $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}$. Tương tự cho ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ và $\frac{\partial f}{\partial \phi}$.