Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hiện tính toán các vấn đề liên quan đến đại số tuyến tính, MAPLE cung cấp hai gói lệnh linalg và LinearAlgebra. Trong phần này chúng tôi trình bày gói linalg. Độc giả có thể tham khảo thêm gói lệnh LinearAlgebra. Mỗi gói lệnh chứa nhiều hàm, để gọi gói_lệnh nào đó ta sử dụng > with(gói_lệnh)

```
> with(linalg);
```

BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow,......, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian

Như vậy, gói lệnh linalg chứa các hàm BlockDiagonal, GramSchmidt,..., wronskian.

1.1 Ma trận

Để khởi tạo một ma trận ta sử dụng các hàm sau:

- randmatrix(m, n): Tạo ra ma trận cấp $m \times n$ với các phần tử là số nguyên được lấy ngẫu nhiên từ -99 đến 99.
- matrix(m, n, list_of_elements): Tạo ra một ma trận cấp $m \times n$ với list_of_elements là danh sách các phần tử, có dạng $[a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{mn}]$.
- matrix(m, n, list_of_rows): Tạo ra một ma trận cấp $m \times n$ với list_of_rows là danh sách các dòng, có dạng $[[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]]$.
- matrix(list_of_rows): Tạo ra một ma trận với list_of_rows là danh sách các dòng, có dạng
$$[[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]].$$
- matrix(m, n, element): Tạo ra một ma trận cấp $m \times n$ với các phần tử đều bằng element.
- array(identity, 1..n, 1..n): Tạo ra ma trận đơn vị cấp n.
- diag(list_of_elements): Tạo ra ma trận đường chéo trong đó list_of_elements là các phần tử trên đường chéo, có dạng $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

```
> with(linalg):
> randmatrix(2, 3);        #Kết quả ngẫu nhiên
```

$$\begin{bmatrix} 44 & 29 & 98 \\ -23 & 10 & -61 \end{bmatrix}$$

```
> matrix(2, 3, [[2, 3, 4], [3, 4, 4]]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> matrix(2, 3, [5, 4, 6, 3, 4, 5]);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> matrix([[2, 3, 4], [3, 4, 4], [4, 5, 3]]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> matrix(3, 2, 0);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> diag(1, -2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> I3:=array(identity, 1 .. 3, 1 .. 3): print(I3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> I3:=diag(1, 1, 1);    #Có thể tạo ma trận đơn vị cấp 3 bằng cách này
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Các phép toán trên ma trận

Cho $A, B, C, \ldots$ là các ma trận. Khi đó

- A[i, j]: Phần tử ở dòng i và cột j của ma trận A.
- evalm(A): In ra ma trận A.
- equal(A, B): Kiểm tra hai ma trận A và B có bằng nhau hay không?.
- transpose(A): Tìm ma trận chuyển vị của ma trận A.

- scalarmul(A, expr) hay evalm(expr*A): Nhân ma trận A với biểu thức expr.
- matadd(A, B, C,...) hay evalm(A+B+C+...): Tính tổng ma trận A + B + C + ...
- multiply(A, B, C,...) hay evalm(A.B.C....): Tính tích ma trận ABC....
- evalm(A^k): Tính lũy thừa k của ma trận A.
- inverse(A) hay evalm(A^(-1)): Tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có).

> **A := matrix(2, 3, [1, 2, 1, -2, 3, 5]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **A[2, 3];**

$$5$$

> **evalm(A);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **transpose(A);** #Chuyển vị ma trận A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

> **evalm(3*A);** #Tính 3A. Lưu ý ***** là dấu sao

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

> **B := matrix(2, 3, [1, -2, 1, 4, 3, 1]);**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

> **equal(A, B);** #Kiểm tra A = B không?

false

> **evalm(3*A - 2*B);** #Tính 3A − 2B

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -14 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

```
> C := matrix(3, 3, [1, 1, -1, 1, 2, 1, -2, -1, 3]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(B.C);     #Tính AC. Lưu ý . là dấu chấm
```

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(C^4);     #Tính C^4
```

$$\begin{bmatrix} 47 & 53 & -26 \\ -28 & -8 & 53 \\ -133 & -134 & 99 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(C);     #Tính C^-1
```

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.3 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho A là ma trận. Khi đó các phép biến đổi sơ cấp trên A được thực hiện bởi các hàm sau:

- swaprow(A, i, j): Hoán vị hai dòng i và j ($d_i \leftrightarrow d_j$).
- swapcol(A, i, j): Hoán vị hai cột i và j ($c_i \leftrightarrow c_j$).
- mulrow(A, i, α): Nhân dòng i với α ($d_i \to \alpha d_j$).
- mulcol(A, i, α): Nhân cột i với α ($c_i \to \alpha c_j$).
- addrow(A, j, i, α): Thay dòng i bởi dòng i cộng cho α lần dòng j ($d_i \to d_i + \alpha d_j$).
- addcol(A, j, i, α): Thay cột i bởi cột i cộng cho α lần cột j ($c_i \to c_i + \alpha c_j$).

```
> A := matrix(3, 4, [1, 2, 4, 3, 2, 4, 0, 1, 3, 1, 5, 2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> swaprow(A, 1, 2);     #Hoán vị dòng 1 và dòng 2
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> **mulrow(A, 2, 4)**   #Nhân dòng 2 với 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 16 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> **addrow(A, 2, 1, 3)**   #dòng 1 = dòng 1+3*dòng 2

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

1.4 Dạng bậc thang của ma trận

Cho A là ma trận. Khi đó

- pivot(A, i, j): Nếu phần tử $A_{ij} \neq 0$ thì sẽ đưa các phần tử khác trên cột j về 0 bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng loại 3. Ngược lại, báo lỗi.
- gausselim(A): Tìm một dạng bậc thang của ma trận A.
- gaussjord(A): Tìm dạng bậc thang rút ngọn của ma trận A.
- rank(A): Tìm hạng của ma trận A.

> **A := matrix(3, 4, [1, 1, 2, 3, 1, 2, 8, 1, 3, 2, 3, 5]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **pivot(A, 2, 1)**;

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -21 & 2 \end{bmatrix}$$

> **gausselim(A);**   #Dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

> **gaussjord(A);**   #Dạng bậc thang rút gọn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);    #Tính hạng ma trận
```

$$3$$

1.5 Giải phương trình ma trận AX=B

Cho A, B là các ma trận và X là biến ma trận. Khi đó

- linsolve(A, B): Giải phương trình ma trận $AX = B$.

Ví dụ 1. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> A := matrix(2, 3, [1, 2, -1, -2, -3, 1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:= matrix(2, 2, [1, -2, -1, 1])
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A, B);
```

$$\begin{bmatrix} -\_t_{1_1} & 1 - \_t_{2_1} \\ \_t_{1_1} & \_t_{2_1} \\ -1 + \_t_{1_1} & 3 + \_t_{2_1} \end{bmatrix}$$

Từ kết quả tính toán trên, ta kết luận $X = \begin{pmatrix} -t & 1-s \\ t & s \\ -1+t & 3+s \end{pmatrix}$ với t, s tự do.

1.6 Giải hệ phương trình tuyến tính

- solve(eqns, vars): Giải hệ phương trình eqns với các biến vars. Trong đó eqns có dạng {eqn1, eqn2, ...}; vars có dạng {var1, var2, ...}.
- linsolve(A, b): Giải hệ phương trình $AX = b$, với A là ma trận hệ số, b là vectơ các hệ số tự do.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ x + y + z = 4; \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$$

Cách 1.

```
> solve({x-y-2*z = -3, x+y+z =4, 2*x-y+z =1}, {x, y, z});
```

$$\{x = 1, y = 2, z = 1\}$$

Cách 2.

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector(3, [1, 4, -3]);
```

$$b := [1\ 4\ -3]$$

```
> linsolve(A, b);
```

$$[1\ 2\ 1]$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10 \end{cases}$$

```
> A := matrix(3, 3,[1, 1, -2, 2, 3, 3, 5, 7, 4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector(3, [4, 3, 10]);
```

$$[4\ 3\ 10]$$

```
> linsolve(A, b);
```

$$[9 + 9\_t_1\ \ -5 - 7\_t_1\ \ \_t_1]$$

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x & = & 9 + 9t \\ y & = & -5 - 7t \\ z & = & t \end{cases}$ với t là ẩn tự do.

Phần II. Bài tập

1.1 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tính $\quad 3A \pm 2B$.

b) Tìm ma trận X sao cho $2A + 3B - 4X = 0$.

1.2 Tính các tích sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3 Tính $A^\top A$ và $AA^\top$ với

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4 Tính $AB - BA$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 Cho $A = \operatorname{diag}(2, 3, 1, 4)$ và $B = \operatorname{diag}(1, -1, 3, 2)$. Tính

a) $A + B$. b) $2A - 3B$. c) AB. d) A^3.

1.6 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $B \neq C$ mà $AB = AC$.

1.7 Tìm tất cả các ma trận giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.8 Cho $A, B \in M_n(K)$ là hai ma trận đối xứng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh tích AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi chúng giao hoán nhau.

1.9 Tìm hai ma trận A, B khác ma trận không sao cho AB là ma trận không.

1.10 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB \neq BA$. Chứng minh rằng:

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. b) $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

1.11 Tìm một ma trận A sao cho $A \neq 0$ nhưng $A^2 = 0$.

1.12 Tìm tất cả các ma trận X vuông cấp 2 thỏa:

a) $X^2 = 0$ b) $X^2 = I_2$ c) $X^2 = X$

1.13 * Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), n > 2$ thỏa tính chất: Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại đều bằng 1.

a) Xác định các hệ số $\alpha, \beta \in K$ sao cho $(\alpha A + \beta I)^2 = I$.

b) Viết cụ thể α, β trong trường hợp $n = 3$ và $n = 4$.

1.14 Tìm $A^k, k \in \mathbb{N}$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

f)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.15 Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Bằng quy nạp toán học, chứng minh rằng

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.16 Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh rằng

a) $(A + A^\top)$; $AA^\top$; $A^\top A$ là các ma trận đối xứng và $(A - A^\top)$ là ma trận phản đối xứng;

b) tồn tại duy nhất hai ma trận $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho P đối xứng, Q phản đối xứng và $A = P + Q$.

1.17 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ là hai ma trận đối xứng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh tích AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi chúng giao hoán nhau.

1.18 Hãy xác định $f(A)$ trong các trường hợp sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f(x) = 4x^2 - 3x + 4$.

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $f(x) = -3x^2 - x + 5$.

1.19 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Giả sử $A^9 = A^{20} = I_n$. Chứng minh rằng $A = I_n$.

b) Giả sử $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

c) Giả sử $ABA = BAB = A^4B^7 = I_n$. Chứng minh rằng $A = B = I_n$.

1.20 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ với $A^2 = 0$. Đặt $B = I_n + A$.

a) Tính B^k theo I_n và A ($k \in \mathbb{N}$);

b) Tính $S_k = I_n + B + B^2 + ... + B^k$ theo I_n và A;

c) Tính S_k khi $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.

1.21 Đặt $A(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 1/\alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Chứng minh rằng $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$ ta có:

a) $A(\alpha)A(\beta) = A(\beta)A(\alpha)$ khi và chỉ khi $\alpha = \beta$;

b) $(A(\alpha) + A(2\alpha))^{2n}$ không phụ thuộc α với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.22 Một ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *lũy đẳng* nếu $A^2 = A$.

a) Kiểm tra $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

b) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = A$ và $BA = B$ thì A và B là các ma trận lũy đẳng.

c) Chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho A và B cùng lũy đẳng thì $A + B$ lũy đẳng khi và chỉ khi $AB = BA = 0$.

1.23 Một ma trận $P \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $P^k = 0_n$.

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu A lũy linh và A, B giao hoán nhau thì AB lũy linh.

b) Nếu A, B lũy linh và A, B giao hoán nhau thì $uA + vB$ lũy linh với mọi $u, v \in \mathbb{R}$.

1.24 Ma trận tam giác được gọi là *ngặt* nếu tất cả phần tử trên đường chéo chính của nó đều bằng 0. Chứng minh rằng mọi tam giác ngặt đều lũy linh.

1.25 Xác định hạng của các ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 15 & 13 \end{pmatrix}$

1.26 Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1.27 Tìm dạng bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

1.28 Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) * $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

1.29 Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}$.

1.30 Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.31 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu AB khả nghịch thì A và B cùng khả nghịch.

1.32 Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu $AB = A + B$ thì A và B giao hoán nhau, nghĩa là $AB = BA$.

1.33 Giải các phương trình ma trận

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

f) $X \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.34 Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $XA = B$.

1.35 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A và B khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $AXB = C$.

1.36 Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tính B^2 và tìm ma trận X thỏa mãn $AXA = B^2 - 2I_3$.

1.37 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA = ABA$.

1.38 Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Giả sử ma trận $C = I_n + AB$ khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận $D = I_n + BA$ cũng khả nghịch và ta có

$$D^{-1} = I_n - BC^{-1}A.$$

1.39 Chứng minh rằng, nếu f là một đa thức trên $\mathbb{R}$ và $B \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận khả nghịch thì

$$f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B.$$

1.40 Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh $A^2 - 2A + I_2 = 0$. Suy ra A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $B = I_2 + A + A^2 + \cdots + A^n$. Tính A^n và B theo $A; I_2$ và n.

1.41 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận lũy linh. Chứng minh $B = (I_n - A)$ khả nghịch và

$$B^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

Suy ra $C = (I_n + A)$ cũng khả nghịch và tính C^{-1} theo A.

1.42 Chứng minh rằng, nếu $m > n$ thì với mọi ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ta có AB không khả nghịch.

1.43 Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa $A + B = AB$. Chứng minh $AB = BA$.

1.44 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R}), B \neq 0$ sao cho $AB = 0$.

1.45 * Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Giả sử A là ma trận tam giác và $AA^\top = I_n$. Chứng minh rằng A là ma trận đường chéo và các phần tử trên đường chéo là 1 hoặc -1.

b) Giả sử A đối xứng, B phản đối xứng, $(A-B)$ khả nghịch và $AB = BA$. Đặt $C = (A+B)(A-B)^{-1}$. Chứng minh rằng $CC^\top = I_n$.

1.46 * Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R}), B \neq 0$ sao cho $AB = BA = 0$.

1.47 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & + & 2z & = & 1; \\ & & 2y & - & 5z & = & 2; \\ & & & & 4z & = & 8. \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 5z & - & 2t & = & 9; \\ & & 5y & - & z & + & 3t & = & 1; \\ & & & & 7z & - & t & = & 3; \\ & & & & & & 2t & = & 8. \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & z & = & 11; \\ & & 5y & + & z & = & 2; \\ & & & & 3z & = & -9. \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 5; \\ & & 2y & - & z & + & t & = & 0; \\ & & & & z & - & t & = & 1; \\ & & & & & & 4t & = & 6. \end{array}\right.$

1.48 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 5; \\ & & & & x_3 & - & 4x_4 & = & 2. \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & - & 5x_5 & = & 3; \\ & & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & & & = & 1; \\ & & & & & & x_4 & - & 3x_5 & = & 2. \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 4; \\ & & & & x_3 & + & 8x_4 & - & 3x_5 & = & 6; \\ & & & & & & x_4 & - & 5x_5 & = & 5. \end{array}\right.$

1.49 Giải các hệ phương trình sau:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 10; \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1; \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4; \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 9; \\ 5x_1 & - & 10x_2 & - & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 22. \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 7; \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 17; \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 14. \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 2; \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1; \\ 5x_1 & + & 12x_2 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & = & 7. \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1; \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 4; \\ 3x_1 & + & 8x_2 & - & 13x_3 & = & 7. \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1; \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2; \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -5; \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11, \end{array}\right.$

1.50 Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

1.51 Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + mx_3 = m+1. \end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho:

a) hệ có một nghiệm duy nhất;

b) hệ vô nghiệm;

c) hệ có vô số nghiệm.

1.52 Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số m:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3; \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1. \end{cases}$

1.53 Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số m:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = m; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2m+1; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -m, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 2; \\ 5x_1 + 10x_2 - 17x_3 + 23x_4 = 1; \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 + mx_4 = 13-m, \end{cases}$