

<i>Bài</i>	<i>Đáp án</i>	<i>Điểm</i>
<b>1</b>	<p><b>Bài 1 (2đ)</b></p> <p>Cho biến ngẫu nhiên liên tục <math>X</math> (phút) thể hiện thời gian chờ mua trà sữa của khách hàng ở một quán nhỏ ven đường và có hàm mật độ là</p> $f_X(x) = \begin{cases} kx^2(6-x) & \text{nếu } x \in [0, 6], \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 6], \end{cases}$ <p>trong đó <math>k</math> là một số thực nào đó.</p> <p>(a) Tìm <math>k</math>.</p> <p>(b) Tìm thời gian chờ trung bình của khách.</p> <p>(c) Tìm hàm phân phối tích lũy của biến ngẫu nhiên <math>X</math>.</p> <p>(d) Tìm xác suất thời gian chờ ít nhất 2 phút.</p>	
	<b>(Lời giải)</b>	2.0
	<p>(a) <math>k = \frac{1}{108}</math>.</p> <p>(b) <math>\mathbb{E}(X) = \frac{18}{5} = 3.6</math>.</p> <p>(c) <math>F_X(x) = \begin{cases} 0 &amp; \text{nếu } x &lt; 0, \\ \frac{x^3(8-x)}{432} &amp; \text{nếu } 0 \leq x &lt; 5, \\ 1 &amp; \text{nếu } x \geq 5. \end{cases}</math></p> <p>(d) <math>\mathbb{P}(X &gt; 2) = 1 - F_X(2) = \frac{8}{9} \approx 0.8889</math>.</p>	

<i>Bài</i>	<i>Đáp án</i>	<i>Điểm</i>
	<p><b>Một số nhận xét và hướng chấm điểm.</b></p> <p>(a) Nhận xét:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Mỗi ý 0.5đ (dù độ khó và mức độ tính toán ở các câu có khác nhau);</li> <li>Ý thứ (a) chỉ được 0.5 đ nếu định đủ 2 điều kiện cho hàm mật độ (SV có thể bỏ qua điều kiện hàm mật độ phải là hàm không âm).</li> <li>Ý thứ (c) chỉ được 0.5 đ nếu có đủ 3 nhánh; nếu chỉ 2 trong 3 nhánh thì nhận 0.25đ.</li> <li>Tính toán hoặc lý luận sai ở mức chấp nhận thì không trừ điểm. Ở mỗi bước, sinh viên phải ghi công thức trước khi bắt đầu tính toán (nếu không ghi có thể bị trừ 0.25đ hoặc 2 lần như vậy sẽ trừ 0.25đ). Trường hợp bài làm không tốt, phần ghi công thức có thể được 0.25đ. Mỗi ý 0.25đ sẽ chấm thông tin quan trọng nhất trong ý đó. Các qui ước này cũng được dùng cho các câu hỏi bên dưới.</li> </ul> <p>(b) Một số sai sót của sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>	
<b>3</b>	<b>Bài 2 (3.0 đ)</b>	
	<p>Một nhà nông trồng giống cherry Úc theo phương pháp được các nhà khoa học đề xuất; chính vì thế đường kính quả cherry tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 28mm và độ lệch chuẩn 2mm. Một quả cherry được gọi là có size 32 nếu đường kính của quả cherry nằm trong <math>[30, 32]</math>. Giả sử các quả cherry có size 32 độc lập nhau.</p> <p>(a) Chọn ngẫu nhiên một quả cherry trong vườn, tìm xác suất nhận được quả cherry size 32.</p> <p>(b) Tìm số tự nhiên <math>n</math> nhỏ nhất sao cho chọn <math>n</math> quả cherry trong vườn thì xác suất nhận được ít nhất 1 quả cherry size 32 không bé hơn 0.99.</p> <p>(c) Chọn ngẫu nhiên 100 quả cherry trong vườn, hãy chọn mô hình xấp xỉ thích hợp để tìm xác suất có ít nhất 20 quả cherry size 32.</p>	
	<b>(Lời giải 2a)</b>	1.0
	Gọi $X$ (mm) là biến ngẫu nhiên thể hiện đường kính quả cherry. Khi đó, $X \sim \mathcal{N}(28, 2^2)$	0.25

<i>Bài</i>	<i>Đáp án</i>	<i>Điểm</i>
	<p>Xác suất cần nhận được quả cherry (có) size 32:</p> $p : = \mathbb{P}(30 \leq X \leq 32)$ $= \phi(2) - \phi(1) = 0.1359.$	0.25 + 0.5
	<b>(Lời giải 2b)</b>	1.0
	Với $n \in \mathbb{N}$ , gọi $Y_n$ là số quả cherry (có) size 32 trong $n$ quả cherry được chọn. Khi đó, $Y_n \sim B(n, p = 0.1359)$ .	0.25
	Khi đó, $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \geq 0.99 \iff 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) \geq 0.99$ .	0.25
	Hay $1 - (1 - p)^n \geq 0.99$ .	0.25
	Giải bất phương trình, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của $n$ là 32.	0.25
	<b>(Lời giải 2c)</b>	1.0
	Vì $Y_{100} \sim B(n = 100, p = 0.1359)$ thỏa các điều kiện $n \geq 30, np \geq 5, n(1 - p) \geq 5$ nên ta sẽ xấp xỉ chuẩn cho biến ngẫu nhiên $Y_{100}$ :	0.25
	$Y_{100} \approx Z \sim \mathcal{N}(np = 13.59, np(1 - p) = 11.7431)$ .	0.25
	Do đó, xác suất có ít nhất 20 quả cherry size 32:	0.5 = 0.25 × 2
	$\mathbb{P}(Y \geq 20) \approx \mathbb{P}(Z \geq 20) = 1 - \Phi\left(\frac{20 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right)$ $= 1 - \Phi(1.8705) = 0.0307.$	
	<p><b>Một số nhận xét và hướng chấm điểm.</b></p> <p>(a) Nhận xét:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ý đầu tiên của 2(a-b) phải đề cập đến phân phối.</li> <li>Xác suất có thể xấp xỉ kết hợp với hiệu chỉnh liên tục:</li> </ul> $\mathbb{P}(Y \geq 20) \approx \mathbb{P}(Z \geq 20 - 0.5) = 1 - \Phi\left(\frac{19.5 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) = ....$ <p>(b) Một số sai sót của sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>...</li> </ul>	
<b>3</b>	<b>Bài 3 (5.0 đ)</b>	

Bài	Đáp án	Điểm																																	
<p>Để xem xét tình hình học tập môn xác suất thống kê (XSTK), một giảng viên (GV) đã tiến hành lấy mẫu (hai lần). Biết rằng điểm sinh viên tuân theo phân phối chuẩn. Điểm sinh viên nam và sinh viên nữ độc lập nhau.</p> <p>(a) Ở lần lấy mẫu thứ nhất, GV này thu thập được thông tin của 20 sinh viên với điểm trung bình là 5.5 và độ lệch chuẩn là 0.75. Sử dụng thông tin này để ước lượng điểm trung bình của sinh viên với độ tin cậy 95%.</p> <p>GV này tiếp tục thực hiện lấy mẫu lần thứ hai và thu thập được bảng thông tin sau:</p> <table><tr><th>Điểm</th><th>[0, 1)</th><th>[1, 2)</th><th>[2, 3)</th><th>[3, 4)</th><th>[4, 5)</th><th>[5, 6)</th><th>[6, 7)</th><th>[7, 8)</th><th>[8, 9)</th><th>[9, 10]</th></tr><tr><td>Nam</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>Nữ</td><td>5</td><td>10</td><td>8</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr></table> <p>Bảng 1: Bảng thông tin lần lấy mẫu thứ hai</p> <p>(Bảng dữ liệu chứa thông tin: có 4 sinh viên nam và 5 sinh viên nữ có điểm số nằm trong [0, 1), có 6 sinh viên nam và 10 sinh viên nữ có điểm số nằm trong [1, 2), ...)</p> <p><b>Hãy sử dụng thông tin ở lần lấy mẫu thứ hai (như Bảng 1) để giải các câu hỏi 3(b-c-d).</b></p> <p>(b) Một sinh viên được gọi là điểm cao nếu điểm lớn hơn hoặc bằng 7.0. Ước lượng khoảng tin cậy cho tỷ lệ sinh viên điểm cao với độ tin cậy 99%.</p> <p>(c) Dựa theo số liệu điểm môn XSTK trong học kỳ trước, điểm trung bình của sinh viên <b>nam</b> là 5.0. Hãy cho biết giá trị trên có phù hợp với dữ liệu quan sát (điểm sinh viên nam đã thu thập được) hay không với mức ý nghĩa 2%?</p> <p>(d) Có nhiều người cho rằng các bạn nữ chăm học hơn các bạn nam nên điểm trung bình của các bạn nữ cao hơn điểm trung bình của các bạn nam. Tuy nhiên, GV này cho rằng điểm trung bình các bạn nữ <b>không cao hơn</b> điểm trung bình của các bạn nam. Hãy sử dụng dữ liệu quan sát để kiểm tra nhận định về hai điểm trung bình của <b>GV</b> với mức ý nghĩa 2%.</p>	Điểm	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10]	Nam	4	6	4	6	2	6	5	2	6	4	Nữ	5	10	8	8	5	4	3	2	3	2		
Điểm	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10]																									
Nam	4	6	4	6	2	6	5	2	6	4																									
Nữ	5	10	8	8	5	4	3	2	3	2																									
(Lời giải 3a)		1.0																																	
Gọi $X$ là điểm XSTK của sinh viên.		0.25																																	
<b>Trường hợp:</b> ước lượng trung bình trong trường hợp chưa biết phương sai (tổng thể) và cỡ mẫu nhỏ.		0.25																																	
<b>Chuẩn bị dữ liệu:</b> $\bar{x} = 5.5, s_X = 0.75, \epsilon = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = t_{0.975}^{19} \frac{0.75}{\sqrt{20}} = 2.0930 \cdot \frac{0.75}{\sqrt{20}} \approx 0.3510s$ .		0.25																																	

<i>Bài</i>	<i>Đáp án</i>	<i>Điểm</i>
	Khoảng tin cậy cho điểm trung bình môn XSTK của sinh viên với độ tin cậy $\gamma = 95\%$ :  $[\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [5.1490; 5.8510]$ .	0.25
	<b>(Lời giải 3b)</b>	1.0
	Gọi $P$ là tỷ lệ sinh viên điểm cao trong mẫu (có thể gọi $p$ là tỷ lệ (tổng thể) sinh viên điểm cao).	0.25
	<b>Chuẩn bị dữ liệu:</b> $\hat{p} = \frac{19}{95} = 0.2, n = 95, \epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = z_{0.995} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{95}} = 2.575 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{95}} \approx 0.1057$ .	0.25
	<b>Điều kiện:</b> $n \geq 30, n\hat{p} \geq 5, n(1-\hat{p}) \geq 5$ .	0.25
	Khoảng tin cậy cho tỷ lệ sinh viên đạt điểm cao môn XSTK với độ tin cậy $\gamma = 99\%$ :  $[\hat{p} - \epsilon, \hat{p} + \epsilon] = [0.0943; 0.30571]$ .	0.25
	<b>(Lời giải 3c)</b>	1.5
	Gọi $W$ là biến ngẫu nhiên thể hiện điểm số của sinh viên nữ (tính theo thang điểm 10).	0.25
	Bài toán kiểm định: $H_0 : \mu = \mu_0 = 5$ và $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .	0.25
	<b>Trường hợp:</b> ước lượng trung bình trong trường hợp chưa biết phương sai (tổng thể) và cỡ mẫu nhỏ.	0.25
	<b>Chuẩn bị dữ liệu:</b> $\bar{m} = 4.9000, s_m = 2.910, n_m = 45$ .	0.25
	Giá trị thống kê $z_0 = \frac{\bar{m} - \mu_0}{s_m / \sqrt{45}} = -0.2305$ .	0.25
	<b>Kết luận:</b> Vì $ z_0  = 0.2305 < z_{1-\alpha/2} = z_{0.99} = 2.33$ nên không đủ cơ sở để bác bỏ $H_0$ .	0.25
	<b>(Lời giải 3d)</b>	1.5
	Gọi $M$ là biến ngẫu nhiên thể hiện điểm số của sinh viên nam (tính theo thang điểm 10).	0.25
	Bài toán kiểm định: $H_0 : \mu_W \leq \mu_M$ và $H_1 : \mu_W > \mu_M$ . Bài toán kiểm định 'thay thế' là $H'_0 : \mu_W = \mu_M$ và $H'_1 : \mu_W > \mu_M$ .	0.25
	<b>Trường hợp:</b> ước lượng trung bình trong trường hợp chưa biết các phương sai (tổng thể) và cỡ mẫu lớn.	0.25
	<b>Chuẩn bị dữ liệu:</b> $\bar{w} = 3.7800, s_w = 2.5398, n_w = 50$ .	0.25
	Giá trị thống kê $z_0 = \frac{\bar{w} - \bar{m}}{\sqrt{\frac{s_w^2}{n_w} + \frac{s_m^2}{n_m}}} = -1.9883$ .	0.25
	<b>Kết luận:</b> Vì $z_0 = -1.9883 \leq z_{1-\alpha} = z_{0.98} = 2.05$ nên không đủ cơ sở bác bỏ $H'_0$ . Bằng cách kiểm định này, ta cũng không có cơ sở để bác bỏ $H_0$ .	0.25

---

<i>Bài</i>	<i>Đáp án</i>	<i>Điểm</i>
	<p>Một số nhận xét và hướng chấm điểm.</p> <p>(a) Nhận xét:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• ...</li></ul> <p>(b) Một số sai sót của sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• ...</li></ul>	