ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP TUẦN 5

Môn học: Thực hành Đại số tuyến tính

Ca 1 - Nhóm 2:
23120006 - Trần Minh Hiếu Học
23120007 - Đỗ Trọng Huy
23120008 - Thái Gia Huy
23120009 - Nguyễn Thanh Khôi
23120010 - Hoàng Ngọc Phú

Mục lục

1 Bài 3.2

Bài 3.2 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (10, 6, 5, 3), u_1 = (1, 1, -1, 0), u_2 = (3, 1, 2, 1), u_3 = (2, 1, 3, 1)$

b) $u = (1, 1, 1, 0), u_1 = (1, 1, 0, 1), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 1)$

c) $u = (1, 3, 7, 2), u_1 = (1, 2, 1, -2), u_2 = (3, 5, 1, -6), u_3 = (1, 1, -3, -4)$

Lời giải

a) Lập $[u_1^T\ u_2^T\ u_3^T \mid u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[d_3\leftrightarrow d_4]{d_4\leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4-5d_2]{\substack{d_1-3d_2 \\ d_3+2d_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2-d_3]{d_1+d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3, 1, 2)$,
Nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 và $u = 3u_1 + u_2 + 2u_3$.

b) Lập $[u_1^T\ u_2^T\ u_3^T \mid u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4-d_1]{d_2-d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[d_3+d_2]{d_1+d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2d_4-d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm nên u không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

c) Lập $[u_1^T\ u_2^T\ u_3^T \mid u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2-2d_1 \\ d_3-d_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+3d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4-d_3]{\substack{d_1-d_3 \\ 2d_2-d_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có nghiệm duy nhất là $(0, 1, -2)$. Nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 và $u = u_2 - 2u_3$.

□

2 Bài 3.6

Bài 3.2 Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

✍ **Lời giải**

a) Xét $0 = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, ta lập ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 3$ nên các ma trận là độc lập tuyến tính.

b) Xét $0 = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, ta lập ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3-d_1 \\ d_4-3d_1}]{d_2+2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4+d_2]{7d_3-d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 2 < 3$ nên các ma trận là phụ thuộc tuyến tính.

c) Xét $0 = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, ta lập ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_2]{d_4+2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_4+5d_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 3$ nên hệ các ma trận là độc lập tuyến tính.

d) Xét $0 = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, ta lập ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4-3_d1 \\ d_5-2d_1 \\ d_6-d_1}]{\substack{d_2-4d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -10 & -30 \\ 0 & -7 & -21 \\ 0 & -4 & -17 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4+4d_2 \\ d_5+3d_2 \\ d_6+2d_2}]{\substack{d_2/-10 \\ d_1-4d_2 \\ d_3+7d_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_5-3d_3]{\substack{d_6\leftrightarrow d_3 \\ d_4-5d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì $r(A) = 3$ nên hệ độc lập tuyến tính. □

3 Bài 3.10

Bài 3.10 Tập hợp nào sau đây là không gian con của không gian $\mathbb{R}[t]$?

a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$.

b) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$.

c) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(0) = f(1) + f(2)$.

d) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f^2(t) = f(t)$.

✍ **Lời giải**

a) Đặt $A = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \colon f(-t) = f(t)\}$. Ta có A là tập các đa thức chẵn nên nếu $f, g \in A$ bất kì thì f, g có thể viết dưới dạng

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i}$$
$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^{2i}$$

với $n \in \mathbb{N}$ và $a_i, b_i \in \mathbb{R}; \forall i = \overline{0, n}$. Khi đó

$$(f+g)(t) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) t^{2i} \in A$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i t^{2i} \in A \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Do đó A là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

b) Đặt $B = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] \colon f(-t) = -f(t)\}$. Ta có B là tập các đa thức lẻ nên nếu $f, g \in B$ bất kì thì f, g có thể viết dưới dạng

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i+1}$$
$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^{2i+1}$$

với $n \in \mathbb{N}$ và $a_i, b_i \in \mathbb{R}; \forall i = \overline{0, n}$. Khi đó

$$(f+g)(t) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) t^{2i+1} \in B$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i t^{2i+1} \in B$$

Do đó B là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

c) Đặt $C = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : f(0) = f(1) + f(2)\}$. Với $f, g \in C$ bất kì. Ta có

$$\begin{aligned}(f+g)(0) &= f(0) + g(0)\\ &= f(1) + g(1) + f(2) + g(2)\\ &= (f+g)(1) + (f+g)(2)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(\alpha f)(0) &= \alpha f(0)\\ &= \alpha f(1) + \alpha f(2)\\ &= (\alpha f)(1) + (\alpha f)(2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Do đó C là không gian con của $\mathbb{R}[t]$

d) Đặt $D = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : f^2(t) = f(t)\}$. Xét $f(t) = 1$ thì $f \in D$ nhưng $(2f)(t) = 2$ và $2f \notin D$. Vậy D không là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

□

4 Bài 3.14

Bài 3.14 Chứng minh rằng tập hợp các đa thức $f_1 = 1 + 2t - 7t^2, f_2 = 3 + t + t^2, f_3 = 7 + 2t + 4t^2$ là một tập sinh của không gian $\mathbb{R}_2[t]$.

✍ Lời giải

Giả sử f là một phần tử thuộc $\mathbb{R}_2[t] \Rightarrow f = a + bt + ct^2$. Ta có:

$$A = \left(u_1^T \;\; u_2^T \;\; u_3^T \,\middle|\, u^T \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ -7 & 1 & 4 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3+7d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & -5 & -12 & b-2a \\ 0 & 22 & 53 & c+7a \end{array}\right) \xrightarrow{5d_3+22d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & -5 & -12 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & -9a+22b+5c \end{array}\right)$$

Vì $r(A) = 3$ nên hệ phương trình $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = f$ luôn có nghiệm với $f \in \mathbb{R}_2[t]$. $\square$

5 Bài 3.18

Bài 3.18 Cho $S = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,2,5), u_3 = (5,3,4)\}$ và $W = \langle S \rangle$.
a) Chứng minh $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.
b) Tìm một cơ sở B của W sao cho $B \subset S$ và xác định $dimW$.

✍ **Lời giải**

a) Để chứng minh S không là cơ sở của W, ta chứng minh các vectơ của S phụ thuộc tuyến tính.
Thật vậy, ta có ma trận:

$$\text{Đặt: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 5d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 + 2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ta nhận thấy hạng của ma trận A: $r(A) = 2 < 3$, nên u_1, u_2 và u_3 phụ thuộc tuyến tính.

Do đó, S không là cơ sở của W (đpcm).
b) Vì u_3 là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 (do u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính) nên $\{u_1, u_2\}$ là tập sinh của S. Và $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở của W.
Ta chỉ cần chọn $B = \{u_1, u_2\}$. Từ đó $dimW = 2$. $\square$

6 Bài 3.22

Bài 3.22 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2, f_2 = -4 - t + 6t^2, f_3 = 6 + 3t - 4t^2$.

b) $f_1 = 1 - 2t, f_2 = 1 - t + t^2, f_3 = 1 - 7t + 10t^2$

c) $f_1 = 1 - 2t + 3t^2, f_2 = 1 + t + 4t^2, f_3 = 2 + 5t + 9t^2$

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3, f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3, f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$

✍ **Lời giải**

a) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-6d_1]{d_2+4d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -9 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{7d_3+9d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}$

Suy ra không gian đã cho có một cơ sở là

$$S = \{u_1 = 1 - 2t - 5t^2; u_2 = 7t - 14t^2; u_3 = 56t^2\}$$

b) Xét ma trận $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3+5d_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

Suy ra không gian đã cho có một cơ sở là

$$S = \{u_1 = 1 - 2t; u_2 = t + t^2; u_3 = 15t^2\}$$

c) Xét ma trận $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3-3d_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Suy ra không gian đã cho có một cơ sở là

$$S = \{u_1 = 1 - 2t + 3t^2; u_2 = 3t + t^2\}$$

d) Xét ma trận $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -8 & -1 \\ 1 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Suy ra không gian đã cho có một cơ sở là

$$S = \{u_1 = 12t - 3t^2 - 2t^3; u_2 = t - 2t^2 + 3t^3; u_3 = t^3\}$$

□