

Método de Punto Fijo

Autor: Henry Ccoarite Dueñas

Curso: Programación Numérica

Docente: Fred Torres Cruz

Universidad Nacional del Altiplano - Puno

1. Descripción del método

El **método de punto fijo** es un procedimiento iterativo utilizado para encontrar una raíz real de una función continua $f(x)$, transformando la ecuación $f(x) = 0$ en una expresión equivalente de la forma:

$$x = g(x)$$

A partir de un valor inicial x_0 , se aplica de manera sucesiva la fórmula:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, el límite será una raíz de la ecuación original. La convergencia se garantiza si se cumple la condición:

$$|g'(x)| < 1$$

Ventajas

- Es sencillo de implementar y no requiere derivadas de $f(x)$.
- Permite verificar fácilmente la convergencia con $|g'(x)| < 1$.

Desventajas

- Puede divergir si la condición de convergencia no se cumple.
- La elección de la función $g(x)$ influye directamente en la rapidez o falla del método.

2. Código implementado en Python

A continuación se presenta la implementación del método de punto fijo en Python.

Listing 1: Implementación del método de Punto Fijo en Python

```

1 import math
2
3 def punto_fijo(g, x0, tol=1e-6, max_iter=100):
4
5     print(f"{'Iter':<6} {'x_i':<15} {'g(x_i)':<15} {'Error':<15}")
6     print("-" * 51)
7
8     x_ant = x0

```

```
9     print(f"{0:<6} {x0:<15.8f} {'-'<15} {'-'<15}")  
10    for i in range(max_iter):  
11        x_nuevo = g(x_ant)  
12  
13        if x_nuevo != 0:  
14            error = abs((x_nuevo - x_ant) / x_nuevo)  
15        else:  
16            error = abs(x_nuevo - x_ant)  
17  
18        print(f"{i+1:<6} {x_nuevo:<15.8f} {g(x_nuevo):<15.8f} {  
19             error:<15.8f}")  
20  
21        if error < tol:  
22            print(f"\nRaíz encontrada: {x_nuevo:.10f}")  
23            print(f"Iteraciones: {i+1}")  
24            return x_nuevo, i+1  
25  
26        x_ant = x_nuevo  
27  
28    print(f"\nSe alcanzó el máximo de iteraciones")  
29    print(f"Última aproximación: {x_nuevo:.10f}")  
30    return x_nuevo, max_iter  
31  
32  
33 def verificar_convergencia(g, dg, x_aprox):  
34  
35     derivada = dg(x_aprox)  
36     print(f"\nVerificación de convergencia:")  
37     print(f"|g'({x_aprox:.6f})| = {abs(derivada):.6f}")  
38  
39     if abs(derivada) < 1:  
40         print("    El método converge (|g'(x)| < 1)")  
41     else:  
42         print("    El método NO converge (|g'(x)| >= 1)")  
43  
44  
45 if __name__ == "__main__":  
46  
47     print("Método de Punto Fijo")  
48     print("*"*51)  
49     print("Ejemplo: Raíz de e^x - 4x = 0")  
50     print("Función de iteración: g(x) = ln(4x)")  
51     print("Valor inicial: x0 = 1.0\n")  
52  
53     def g_pdf(x):  
54         return math.log(4 * x)  
55  
56     def dg_pdf(x):  
57         return 1 / x
```

```

59     def f_pdf(x):
60         return math.exp(x) - 4 * x
61
62     try:
63         raiz, iteraciones = punto_fijo(g_pdf, 1.0, tol=1e-6)
64         verificar_convergencia(g_pdf, dg_pdf, raiz)
65         print(f"Verificación: e^x - 4x = {f_pdf(raiz):.10f}")
66     except ValueError as e:
67         print(f"Error de ejecución: {e}")
68     except Exception as e:
69         print(f"Error: {e}")

```

3. Salida del programa (Output)

El siguiente bloque muestra el ejemplo del resultado obtenido al ejecutar el programa.

Salida del programa

Método de Punto Fijo

Ejemplo: Raíz de $e^x - 4x = 0$
 Función de iteración: $g(x) = \ln(4x)$
 Valor inicial: $x_0 = 1.0$

Iter	x_i	$g(x_i)$	Error
0	1.00000000	-	-
1	1.38629436	1.60489628	0.27850295
2	1.60489628	1.66176672	0.03565327
3	1.66176672	1.67605892	0.00852567
4	1.67605892	1.67958941	0.00210406
5	1.67958941	1.68047113	0.00052496
6	1.68047113	1.68069109	0.00013085
7	1.68069109	1.68074565	0.00003849

Raíz encontrada: 1.6807456543

Iteraciones: 7

Verificación de convergencia:

$|g'(1.680746)| = 0.595014$

El método converge ($|g'(x)| < 1$)

Verificación: $e^x - 4x = 0.0000000003$

4. Descripción del funcionamiento del código

1. Se define la función de iteración $g(x) = \ln(4x)$ derivada de la ecuación original $e^x - 4x = 0$.

2. Se escoge un valor inicial $x_0 = 1,0$.
3. Se aplica la fórmula $x_{n+1} = g(x_n)$ hasta que el error sea menor que la tolerancia.

4. El error se calcula como:

$$\text{Error} = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$$

5. Si se cumple la condición de error, el programa imprime la raíz aproximada y las iteraciones realizadas.
6. Finalmente, se comprueba la convergencia verificando que $|g'(x)| < 1$.

Gráfico de la función $f(x) = x^2 - 4$

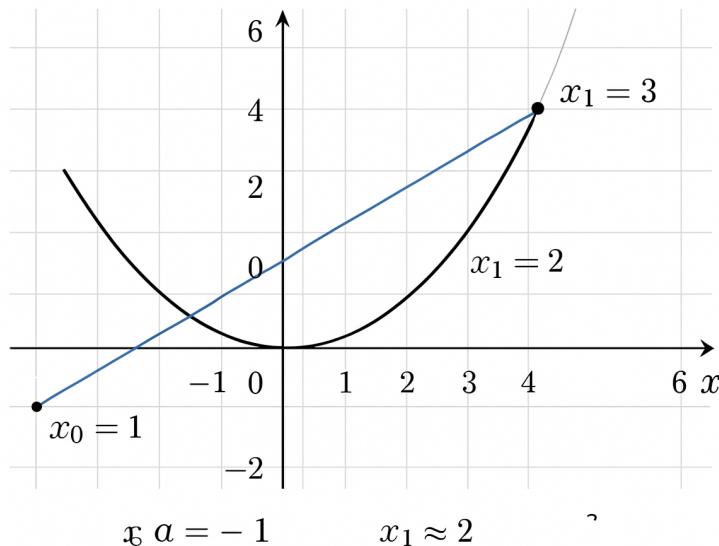


Figura 1: Gráfico de la función $f(x) = e^x - 4x$ mostrando la raíz aproximada.

5. Conclusión

El método de punto fijo es una herramienta fundamental para la resolución de ecuaciones no lineales mediante iteraciones sucesivas. En este ejemplo, aplicado a la ecuación $e^x - 4x = 0$, el método converge satisfactoriamente hacia la raíz $x \approx 1,6807$, demostrando ser un procedimiento eficiente siempre que se cumpla la condición $|g'(x)| < 1$ y se elijan adecuadamente los valores iniciales.