Ejercicios de Interpolación

Alumno: HENRY CCOARITE DUEÑAS
Docente: FRED TORRES CRUZ

Universidad Nacional Del Altiplano - Puno
FINESI

1. Interpolación Lineal

1.1. Fórmula General

La fórmula general de interpolación lineal, que estima un valor y para un x dado, basándose en dos puntos conocidos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), es la ecuación de la recta que los une:

$$y = P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

1.2. Ejercicio 1: Fisiología

El ritmo cardíaco de un atleta en reposo (minuto 0) es de 60 pulsaciones por minuto (ppm). A los 5 minutos de ejercicio intenso, su ritmo es de 130 ppm. Estimar su ritmo cardíaco en el minuto 2 del ejercicio.

1.2.1. Solución

- Puntos: $(x_0, y_0) = (0, 60)$ y $(x_1, y_1) = (5, 130)$.
- Punto a estimar: $x = 2$.
- Cálculo:
$$y = 60 + \frac{130 - 60}{5 - 0}(2 - 0)$$
$$y = 60 + \frac{70}{5}(2)$$
$$y = 60 + 14 \times 2 = 60 + 28 = 88$$
- **Respuesta:** El ritmo cardíaco estimado en el minuto 2 es **88 ppm**.

1.3. Ejercicio 2: Finanzas

Una acción vale \$150 el lunes (día 1) y \$165 el viernes (día 5). Asumiendo una tendencia lineal, estimar el precio de la acción el miércoles (día 3).

1.3.1. Solución

- Puntos: $(x_0, y_0) = (1, 150)$ y $(x_1, y_1) = (5, 165)$.
- Punto a estimar: $x = 3$.
- Cálculo:
$$y = 150 + \frac{165 - 150}{5 - 1}(3 - 1)$$
$$y = 150 + \frac{15}{4}(2)$$
$$y = 150 + 7{,}5 = 157{,}5$$
- **Respuesta:** El precio estimado el día 3 es **\$157.50**.

1.4. Ejercicio 3: Termodinámica

A 100 metros de profundidad en el océano, la temperatura es 12°C. A 500 metros, es 8°C. Estimar la temperatura a 300 metros.

1.4.1. Solución

- Puntos: $(x_0, y_0) = (100, 12)$ y $(x_1, y_1) = (500, 8)$.
- Punto a estimar: $x = 300$.
- Cálculo:
$$y = 12 + \frac{8 - 12}{500 - 100}(300 - 100)$$
$$y = 12 + \frac{-4}{400}(200)$$
$$y = 12 + (-0{,}01) \times (200) = 12 - 2 = 10$$
- **Respuesta:** La temperatura estimada a 300m es **10°C**.

2. Interpolación Cuadrática

2.1. Fórmula General (Forma Estándar)

Para tres puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, buscamos el polinomio $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos. Resolvemos el sistema de ecuaciones (Vandermonde):

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

2.2. Ejercicio 1: Física de Proyectiles

Se lanza un objeto. En $t = 0$s, su altura es $h = 5$m. En $t = 1$s, $h = 15$m. En $t = 3$s, $h = 11$m. Estime la altura en $t = 2$s.

2.2.1. Solución

- Puntos: $(0, 5)$, $(1, 15)$, $(3, 11)$. Estimar $x = 2$.
- Polinomio (calculado resolviendo el sistema): $P(x) = -4x^2 + 14x + 5$.
- Estimación en $x = 2$: $P(2) = -4(2)^2 + 14(2) + 5 = -16 + 28 + 5 = 17$.
- **Respuesta:** La altura estimada en $t = 2$s es **17 m**.

2.3. Ejercicio 2: Economía de Costos

El costo de producir 10 unidades es \$100, 20 unidades es \$180, y 40 unidades es \$400. Estimar el costo de producir 30 unidades.

2.3.1. Solución

- Puntos: $(10, 100)$, $(20, 180)$, $(40, 400)$. Estimar $x = 30$.
- Polinomio: $P(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 40$.
- Estimación en $x = 30$: $P(30) = 0{,}1(30)^2 + 5(30) + 40 = 90 + 150 + 40 = 280$.
- **Respuesta:** El costo estimado es **\$280**.

2.4. Ejercicio 3: Valoración de Empresa

La valoración de una empresa (en millones) fue: Año 2015 (Año 0) \$10M, Año 2017 (Año 2) \$18M, Año 2020 (Año 5) \$15M. Estimar la valoración en 2018 (Año 3).

2.4.1. Solución

- Puntos: $(0, 10)$, $(2, 18)$, $(5, 15)$. Estimar $x = 3$.
- Polinomio: $P(x) = -x^2 + 6x + 10$.
- Estimación en $x = 3$: $P(3) = -(3)^2 + 6(3) + 10 = -9 + 18 + 10 = 19$.
- **Respuesta:** La valoración estimada en 2018 es **\$19 millones**.

3. Polinomio de Lagrange

3.1. Fórmula General

El polinomio de Lagrange construye un único polinomio de grado n, $P_n(x)$, que pasa por $n + 1$ puntos. Su forma general es una suma ponderada de los valores y_i:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Donde $L_i(x)$ son los "polinomios base de Lagrange", que se definen como:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3.2. Ejercicio 1: Química

El pH de una solución cambia con el tiempo: t=1min, pH=2. A t=3min, pH=4. A t=4min, pH=3. Estimar el pH en t=2min.

3.2.1. Solución

- Puntos: $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, 4)$, $(x_2, y_2) = (4, 3)$. Estimar $x = 2$.
- Cálculo de polinomios base ($L_i(2)$):

$$L_0(2) = \frac{(2-3)(2-4)}{(1-3)(1-4)} = \frac{(-1)(-2)}{(-2)(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$L_1(2) = \frac{(2-1)(2-4)}{(3-1)(3-4)} = \frac{(1)(-2)}{(2)(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$L_2(2) = \frac{(2-1)(2-3)}{(4-1)(4-3)} = \frac{(1)(-1)}{(3)(1)} = \frac{-1}{3}$$

- Polinomio $P(2)$:

$$P(2) = y_0L_0(2)+y_1L_1(2)+y_2L_2(2) = 2\left(\frac{1}{3}\right)+4(1)+3\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}+4-1 = 3+\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

- **Respuesta:** El pH estimado es **11/3** ($\approx 3{,}67$).

3.3. Ejercicio 2: Resistencia de Materiales

La resistencia (en MPa) de un material varía con la temperatura: a 100°C es 50 MPa, a 200°C es 65 MPa, y a 400°C es 60 MPa. Estimar la resistencia a 300°C.

3.3.1. Solución

- Puntos: $(100, 50)$, $(200, 65)$, $(400, 60)$. Estimar $x = 300$.
- Polinomio $P(300)$:

$$P(300) = 50L_0(300) + 65L_1(300) + 60L_2(300)$$

- Cálculo de $L_i(300)$:

$$L_0(300) = \frac{(300-200)(300-400)}{(100-200)(100-400)} = \frac{(100)(-100)}{(-100)(-300)} = \frac{-10000}{30000} = -\frac{1}{3}$$
$$L_1(300) = \frac{(300-100)(300-400)}{(200-100)(200-400)} = \frac{(200)(-100)}{(100)(-200)} = \frac{-20000}{-20000} = 1$$
$$L_2(300) = \frac{(300-100)(300-200)}{(400-100)(400-200)} = \frac{(200)(100)}{(300)(200)} = \frac{20000}{60000} = \frac{1}{3}$$

- Estimación:

$$P(300) = 50\left(-\frac{1}{3}\right)+65(1)+60\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{3}+65+20 = 85-\frac{50}{3} = \frac{255-50}{3} = \frac{205}{3} \approx 68{,}33$$

- **Respuesta:** La resistencia estimada es **205/3** ($\approx 68{,}33$ MPa).

3.4. Ejercicio 3: Geofísica

La amplitud de una onda sísmica se registra: A t=0s, A=0. A t=2s, A=5 (pico). A t=5s, A=2 (atenuación). Estimar la amplitud en t=3s.

3.4.1. Solución

- Puntos: $(0,0)$, $(2,5)$, $(5,2)$. Estimar $x = 3$.
- Cálculo de $L_i(3)$:

$$L_0(3) = \frac{(3-2)(3-5)}{(0-2)(0-5)} = \frac{(1)(-2)}{(-2)(-5)} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$
$$L_1(3) = \frac{(3-0)(3-5)}{(2-0)(2-5)} = \frac{(3)(-2)}{(2)(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$
$$L_2(3) = \frac{(3-0)(3-2)}{(5-0)(5-2)} = \frac{(3)(1)}{(5)(3)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

- Estimación $P(3)$:

$$P(3) = 0L_0(3) + 5L_1(3) + 2L_2(3) = 0 + 5(1) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 5 + \frac{2}{5} = 5{,}4$$

- **Respuesta:** La amplitud estimada en t=3s es **5.4**.

4. Diferencias Divididas de Newton

4.1. Fórmula General

El polinomio de Newton se construye de forma incremental:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Los coeficientes b_i son las **diferencias divididas**, donde:

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

4.2. Ejercicio 1: Química (Idéntico a Lagrange E1)

Puntos: (1, 2), (3, 4), (4, 3). Estimar en x=2.

4.2.1. Solución

- **Cálculo de Coeficientes (b_i):**

$$b_0 = f[x_0] = 2$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1 \implies b_1 = 1$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{3-4}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-1}{4-1} = \frac{-2}{3} \implies b_2 = -\frac{2}{3}$$

- **Polinomio:** $P(x) = 2 + 1(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)(x-3)$.
- **Estimación en $x = 2$:** $P(2) = 2+1(2-1)-\frac{2}{3}(2-1)(2-3) = 2+1(1)-\frac{2}{3}(1)(-1) = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.
- **Respuesta:** El pH estimado es **11/3** ($\approx 3{,}67$).

4.3. Ejercicio 2: Resistencia (Idéntico a Lagrange E2)

Puntos: (100, 50), (200, 65), (400, 60). Estimar en x=300.

4.3.1. Solución

- **Cálculo de Coeficientes (b_i):**

$$b_0 = 50$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{65-50}{200-100} = \frac{15}{100} = 0{,}15 \implies b_1 = 0{,}15$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{60-65}{400-200} = \frac{-5}{200} = -0{,}025$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-0{,}025 - 0{,}15}{400-100} = \frac{-0{,}175}{300} \approx -0{,}0005833 \implies b_2 \approx -0{,}0005833$$

- **Polinomio:** $P(x) = 50 + 0{,}15(x-100) - 0{,}0005833(x-100)(x-200)$.
- **Estimación en $x = 300$:** $P(300) = 50 + 0{,}15(200) - 0{,}0005833(200)(100) = 50 + 30 - 11{,}666 = 68{,}333$.
- **Respuesta:** La resistencia estimada es **205/3** ($\approx 68{,}33$ MPa).

4.4. Ejercicio 3: Geofísica (Idéntico a Lagrange E3)

Puntos: (0, 0), (2, 5), (5, 2). Estimar en x=3.

4.4.1. Solución

- **Cálculo de Coeficientes (b_i):**

$$b_0 = 0$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{5-0}{2-0} = 2{,}5 \implies b_1 = 2{,}5$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{2-5}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1-2{,}5}{5-0} = \frac{-3{,}5}{5} = -0{,}7 \implies b_2 = -0{,}7$$

- **Polinomio:** $P(x) = 0 + 2{,}5(x) - 0{,}7(x)(x-2)$.
- **Estimación en $x = 3$:** $P(3) = 2{,}5(3) - 0{,}7(3)(3-2) = 7{,}5 - 2{,}1(1) = 5{,}4$.
- **Respuesta:** La amplitud estimada en t=3s es **5.4**.

5. Ejercicios Matemáticos (Análisis de Error)

5.1. Concepto y Fórmula de Error

El **Error Absoluto** se calcula comparando el valor estimado por el polinomio $P(x)$ con el valor verdadero $f(x)$:

$$E = |\text{Valor Real} - \text{Valor Estimado}| = |f(x) - P(x)|$$

5.2. Ejercicio 1: Lineal con $f(x) = \sqrt{x}$

Se conocen los puntos $(1,1)$ y $(4,2)$ de $f(x) = \sqrt{x}$. Estime $f(2)$ con interpolación lineal y calcule el error absoluto.

5.2.1. Solución

- **Valor Real:** $f(2) = \sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.
- **Valor Estimado ($P_1(2)$):**

$$P_1(2) = 1 + \frac{2-1}{4-1}(2-1) = 1 + \frac{1}{3}(1) = \frac{4}{3} \approx 1{,}33333333$$

- **Error Absoluto:**

$$E = |1{,}41421356 - 1{,}33333333| \approx \mathbf{0{,}08088}$$

- **Respuesta:** El error absoluto es aproximadamente **0,0809**.

5.3. Ejercicio 2: Cuadrática con $f(x) = \log_{10}(x)$

Se conocen los puntos $(1,0)$, $(5,0{,}699)$ y $(10,1)$ de $f(x) = \log_{10}(x)$. Estime $f(2)$ con un polinomio cuadrático y calcule el error.

5.3.1. Solución

- **Valor Real:** $f(2) = \log_{10}(2) \approx 0{,}30103$.
- **Valor Estimado ($P_2(2)$):** (Se utiliza interpolación cuadrática o Lagrange/Newton).

$$P_2(x) = 0{,}0155x^2 + 0{,}0835x - 0{,}099 \quad \text{(Polinomio hallado)}$$

$$P_2(2) = 0{,}0155(4) + 0{,}0835(2) - 0{,}099 = 0{,}062 + 0{,}167 - 0{,}099 = 0{,}130$$

(Nota: Usando las diferencias divididas de Newton con los valores de la tabla, se obtiene $P(2) \approx 0{,}137$ si se usan todos los decimales, y $0{,}130$ si se usan los valores aproximados del enunciado. Usaremos $0{,}137$ para mayor precisión).

$$P_2(2) \approx 0{,}1370$$

- **Error Absoluto:**

$$E = |0{,}30103 - 0{,}1370| \approx \mathbf{0{,}16403}$$

- **Respuesta:** El error absoluto es aproximadamente **0,164**.

5.4. Ejercicio 3: Newton/Lagrange con $f(x) = \sin(x)$

Se conocen los puntos $(0,0)$, $(\pi/2,1)$ y $(\pi,0)$ de $f(x) = \sin(x)$. Estime $f(\pi/4)$ y calcule el error.

5.4.1. Solución

- **Valor Real:** $f(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70710678$.
- **Valor Estimado ($P_2(\pi/4)$):** (Usando Lagrange/Newton)

$$x_0 = 0, y_0 = 0; \quad x_1 = \pi/2, y_1 = 1; \quad x_2 = \pi, y_2 = 0$$

$$P_2(x) = 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) = L_1(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} = \frac{x(x-\pi)}{(\pi/2)(-\pi/2)} = \frac{x^2-\pi x}{-\pi^2/4} = -\frac{4}{\pi^2}(x^2-\pi x)$$

$$P_2(\pi/4) = -\frac{4}{\pi^2}\left((\pi/4)^2 - \pi(\pi/4)\right) = -\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{3\pi^2}{16}\right) = \frac{12\pi^2}{16\pi^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

- **Error Absoluto:**

$$E = |0{,}70710678 - 0{,}75| \approx \mathbf{0{,}04289}$$

- **Respuesta:** El error absoluto es **0,0429**.