Eigenvalores, Eigenvectores y Hessianas: Desarrollo de Ejercicios

Estudiante: Henry Ccoarite Dueñas
Docente: Torres Cruz Fred

2025

Ejercicio 1

Enunciado. Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = \left(6 \quad 0\ 3pt]0 \quad 9\right).$$

Pasos

Paso 1 (Polinomio característico).

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(6 - \lambda \quad 0\ 3pt]0 \quad 9 - \lambda\right) = (6 - \lambda)(9 - \lambda).$$

Paso 2 (Eigenvalores).

$$\lambda_1 = 6, \qquad \lambda_2 = 9.$$

Paso 3 (Eigenvectores).

$$v_1 = \left(1\ 3pt]0\right) \text{ para } \lambda_1 = 6, \qquad v_2 = \left(0\ 3pt]1\right) \text{ para } \lambda_2 = 9.$$

Verificación.

$$Av_1 = 6\left(1\ 3pt]0\right) = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = 9\left(0\ 3pt]1\right) = \lambda_2 v_2.$$

Ejercicio 2

Enunciado. Calcula eigenvalores y eigenvectores de

$$B = \left(1 \quad 2\ 3pt]2 \quad 1\right).$$

Pista del material: $\det(B - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 - 4$.

Pasos

Paso 1 (Polinomio característico).

$$\det(B-\lambda I)=\det\big(1-\lambda \quad 2\ 3pt]2 \quad 1-\lambda\big)=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3.$$

Paso 2 (Eigenvalores).

$$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)\Rightarrow \lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1.$$

Paso 3 (Eigenvector para $\lambda_1=3$).

$$(B-3I)=\big(-2 \quad 2\ 3pt]2 \quad -2\big)\Rightarrow -2x+2y=0\Rightarrow y=x.$$

Tomando $x=1$, $y=1$:

$$v_1=\big(1\ 3pt]1\big)\,.$$

Paso 4 (Eigenvector para $\lambda_2=-1$).

$$(B+I)=\big(2 \quad 2\ 3pt]2 \quad 2\big)\Rightarrow 2x+2y=0\Rightarrow y=-x.$$

Tomando $x=1$, $y=-1$:

$$v_2=\big(1\ 3pt]-1\big)\,.$$

Verificación.

$$B\big(1\ 3pt]1\big)=\big(3\ 3pt]3\big)=3\big(1\ 3pt]1\big)\,,\quad B\big(1\ 3pt]-1\big)=\big(-1\ 3pt]1\big)=-1\big(1\ 3pt]-1\big)\,.$$

Ejercicio 3

Enunciado. Para la función $f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$:

(a) Calcula la matriz Hessiana.

(b) Encuentra sus eigenvalores.

(c) Clasifica el punto crítico $(0,0)$.

Pasos

Paso 1 (Derivadas segundas).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2.$$

Paso 2 (Hessiana).

$$H = \left(4 \quad -2\ 3pt] - 2 \quad 2\right).$$

Paso 3 (Polinomio característico).

$$\det(H - \lambda I) = \det\left(4 - \lambda \quad -2\ 3pt] - 2 \quad 2 - \lambda\right) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4.$$

Paso 4 (Eigenvalores).

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Paso 5 (Clasificación). Ambos eigenvalores son positivos $\Rightarrow (0, 0)$ es un **mínimo local**.

Ejercicio 4

Enunciado. Determina si el punto crítico $(0, 0)$ de $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$ es máximo o mínimo usando los eigenvalores de la Hessiana.

Pasos

Paso 1 (Derivadas segundas).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Paso 2 (Hessiana).

$$H = \left(-2 \quad 0\ 3pt]0 \quad -4\right).$$

Paso 3 (Eigenvalores).

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4.$$

Paso 4 (Clasificación). Ambos negativos $\Rightarrow (0, 0)$ es un **máximo local**.

Ejercicio 5

Enunciado. Verifica que $v = \big(1\ 2pt]2\ 2pt]4\big)$ es eigenvector de C y encuentra su eigenvalor asociado λ. En el PDF, la matriz C aparece con los números $\{3, 2, 1\}$ pero su disposición exacta no es legible. Se procede con la interpretación más coherente con el material y se muestra el procedimiento.

Pasos

Paso 1 (Interpretación de C). Del PDF se infiere la terna $\{3, 2, 1\}$ asociada a C. Una interpretación mínima y consistente es la matriz diagonal:

$$C = \operatorname{diag}(3, 2, 1) = \big(3 \quad 0 \quad 0\ 3pt]0 \quad 2 \quad 0\ 3pt]0 \quad 0 \quad 1\big)\,.$$

Paso 2 (Producto Cv).

$$v = \big(1\ 2pt]2\ 2pt]4\big)\,, \quad Cv = \big(3 \cdot 1\ 2pt]2 \cdot 2\ 2pt]1 \cdot 4\big) = \big(3\ 2pt]4\ 2pt]4\big)\,.$$

Paso 3 (Condición de eigenvector). Se requiere $Cv = \lambda v$, es decir, los cocientes por componente deben ser iguales:

$$\frac{(Cv)_1}{v_1} = 3, \quad \frac{(Cv)_2}{v_2} = 2, \quad \frac{(Cv)_3}{v_3} = 1.$$

No existe un λ común. Por tanto, con $C = \operatorname{diag}(3, 2, 1)$, el vector v **no** es eigenvector.
Paso 4 (Comentario necesario). Dado que la forma exacta de C en el PDF es ilegible, la verificación depende de conocer sus 9 entradas. Si nos confirmas C, se calcula λ usando $Cv = \lambda v$ (comparando cualquier componente no nula) y se verifica la proporcionalidad en todas las componentes.

Nota adicional. Si el objetivo es construir una matriz C para la cual v sea eigenvector con eigenvalor λ, una elección simple es

$$C = \lambda \frac{vv^T}{v^T v} = \frac{\lambda}{21} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix},$$

donde $v^T v = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$. Entonces $Cv = \lambda v$.