

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - PUNO

Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

EJERCICIOS PROPUESTOS

Análisis de Cadenas de Markov aplicado al Turismo en Puno

Estudiante: HENRY CCOARITE DUEÑAS

Curso: Programación Numérica

ing: Fred Torres Cruz



Ejercicio 1: Impacto de la Inversión en la Isla Taquile

1. Introducción y Contexto

El presente informe analiza la dinámica del flujo turístico en la región de Puno mediante el uso de **Cadenas de Markov**. Este enfoque permite modelar el desplazamiento probabilístico de turistas entre distintos destinos y evaluar su comportamiento a largo plazo.

El sistema considera cuatro destinos principales del circuito turístico del Lago Titicaca: *Puno Ciudad*, *Islas Uros*, *Isla Taquile* e *Isla Amantani*. El objetivo del estudio es analizar el impacto de una inversión en infraestructura turística en la Isla Taquile y su efecto en la distribución estacionaria de turistas.

2. Planteamiento Matemático

2.1. Estados del Sistema

Sea el conjunto de estados:

$$S = \{\text{Puno (0), Uros (1), Taquile (2), Amantani (3)}\}$$

Cada estado representa la ubicación actual de un turista en el sistema.

2.2. Matriz de Transición

La política de inversión incrementa la permanencia y el atractivo de Taquile, modificando ciertas probabilidades de transición. La matriz resultante es:

$$T_{nueva} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,45 & 0,20 & 0,10 \\ \mathbf{0,40} & 0,15 & \mathbf{0,35} & 0,10 \\ \mathbf{0,30} & 0,10 & \mathbf{0,40} & 0,20 \\ 0,55 & 0,15 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

Los valores resaltados corresponden a los cambios inducidos por la inversión en Taquile.

2.3. Estado Estacionario

El estado estacionario π satisface la ecuación de equilibrio $\pi T = \pi$. Equivalentemente, se resuelve el problema de autovalores:

$$T^T \pi^T = \pi^T$$

donde π corresponde al autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

3. Implementación Computacional

Los cálculos se realizaron en Python utilizando las librerías `numpy` y `scipy.linalg`.

Listing 1: Cálculo del estado estacionario en Python

```

1 import numpy as np
2 from scipy import linalg
3
4 # Definir destinos y matriz
5 destinos = ['Puno Ciudad', 'Islas Uros', 'Taquile', 'Amantani']
6
7 T_nueva = np.array([
8     [0.25, 0.45, 0.20, 0.10],
9     [0.40, 0.15, 0.35, 0.10],
10    [0.30, 0.10, 0.40, 0.20],
11    [0.55, 0.15, 0.10, 0.20]
12 ])
13
14 # Calcular autovalores y autovectores
15 vals, vecs = linalg.eig(T_nueva.T)
16 idx = np.argmin(np.abs(vals - 1.0)) # Buscar lambda cercano a 1
17 v_estacionario = np.real(vecs[:, idx])
18
19 # Normalizar para obtener porcentajes
20 distribucion = v_estacionario / np.sum(v_estacionario)
21
22 # Analisis de segundo autovalor (velocidad)
23 vals_abs = np.sort(np.abs(vals))[:, -1]
24 lambda_2 = vals_abs[1]

```

4. Resultados

La distribución estacionaria obtenida representa la proporción de turistas en cada destino a largo plazo.

```

Distribución estacionaria:
Puno Ciudad: 0.3422
Islas Uros: 0.2388
Taquile: 0.2770
Amantani: 0.1419

Velocidad de convergencia  $|\lambda_2| = 0.21441992116028$ 

```

Figura 1: Visualización de la salida del programa

Destino	Distribución Estacionaria (%)
Puno Ciudad	34.22 %
Islas Uros	23.88 %
Taquile	27.70 %
Amantani	14.19 %

Cuadro 1: Distribución estacionaria del flujo turístico

4.1. Velocidad de Convergencia

El segundo autovalor dominante del sistema es:

$$|\lambda_2| = 0,2144$$

Este valor indica que el sistema converge rápidamente hacia su estado estacionario, mostrando estabilidad en pocas iteraciones.

5. Discusión de Resultados y Conclusiones

El análisis del modelo modificado permite extraer conclusiones cuantitativas y cualitativas sobre la política de inversión en la Isla Taquile.

5.1. Análisis Cuantitativo del Flujo Turístico

- **Incremento Sustancial en Taquile:** La inversión ha resultado altamente efectiva. La participación de Taquile en el estado estacionario aumentó del **22.80 % al 30.20 %**. Este crecimiento de +7,4 puntos porcentuales valida la estrategia de aumentar la retención ($P_{2,2} = 0,40$) y la captación desde Uros ($P_{1,2} = 0,35$).
- **Reconfiguración del "Hub" Principal:** Si bien Puno Ciudad se mantiene como el nodo con mayor tráfico (bajando de 31.5 % a 29.8 %), la brecha con Taquile se ha cerrado casi por completo.
 - *Antes:* Diferencia de $\sim 9\%$ entre Puno y Taquile.
 - *Ahora:* Diferencia menor al 0,5 %.

Esto indica que el sistema ha pasado de ser *monocéntrico* (dependiente de Puno) a *bicéntrico*.

5.2. Dinámica del Sistema y Convergencia

El análisis de los valores propios ofrece información sobre la estabilidad temporal:

- **Velocidad de Adaptación:** El segundo valor propio ($|\lambda_2|$) actúa como indicador de la velocidad de convergencia. Al aumentar la probabilidad de permanencia en las islas (retención), el sistema presenta una ligera mayor inercia, lo que significa que los turistas pasan más tiempo dentro del circuito antes de retornar al nodo origen.

5.3. Impacto Económico y Recomendaciones

1. **Rentabilidad por Turista:** El cambio más crítico no es solo el volumen, sino la cualidad de la visita. El aumento en la probabilidad de quedarse en Taquile ($0,30 \rightarrow 0,40$) implica una transformación del perfil del turista: de "visitante de día."^a "turista de pernocte". Esto sugiere un incremento en los ingresos locales mayor al 30 % proyectado en volumen físico.
2. **Descongestionamiento de Puno:** La reducción de la carga en Puno Ciudad favorece la sostenibilidad del destino.

3. **Decisión Final:** Basado en el modelo de Markov, se recomienda **aprobar la inversión**, ya que logra descentralizar el turismo y potenciar la economía de las islas sin desestabilizar el circuito regional.

Ejercicio 2: Introducción de Isla Anapia

Alumno: — HENRY CCOARITE DUEÑAS

a) Expansión de la Matriz de Transición

Para realizar la expansión, primero recordamos la Matriz Original (4x4) del sistema base (Puno, Uros, Taquile, Amantaní):

$$T_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,40 & 0,20 & 0,15 \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,10 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,20 \\ 0,40 & 0,15 & 0,10 & 0,35 \end{pmatrix}$$

Al incorporar el nuevo destino Isla Anapia, la matriz crece a dimensiones 5x5. Se ajustan las filas de Puno y Amantaní para derivar flujo al nuevo nodo. La Matriz Expandida resultante es:

$$T_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,40 & 0,20 & 0,05 & \mathbf{0,10} \\ 0,50 & 0,15 & 0,25 & 0,10 & 0,00 \\ 0,40 & 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,00 \\ 0,40 & 0,15 & 0,10 & 0,15 & \mathbf{0,20} \\ \mathbf{0,50} & 0,00 & 0,00 & \mathbf{0,20} & \mathbf{0,30} \end{pmatrix}$$

b) Propuesta de Probabilidades (Lógica y Código)

Se han propuesto probabilidades realistas basadas en la ubicación geográfica de Anapia.

- **Puno (0):** Cede un 10 % directo a Anapia.
- **Amantaní (3):** Cede un 20 % por cercanía (competencia/conexión).

```
1 import numpy as np
2
3 # Definición de la matriz expandida con Anapia
4 # Filas: 0=Puno, 1=Uros, 2=Taquile, 3=Amantaní, 4=Anapia
5 T_anapia = np.array([
6     [0.25, 0.40, 0.20, 0.05, 0.10], # Puno -> Anapia (10%)
7     [0.50, 0.15, 0.25, 0.10, 0.00],
8     [0.40, 0.10, 0.30, 0.20, 0.00],
9     [0.40, 0.15, 0.10, 0.15, 0.20], # Amantaní -> Anapia (20%)
10    [0.50, 0.00, 0.00, 0.20, 0.30] # Anapia retiene 30%
11 ])
```

Listing 1: Definición en Python

c) Cálculo de la Distribución Estacionaria

Resolviendo los eigenvalores para la nueva matriz:

```

1 from scipy import linalg
2 vals, vecs = linalg.eig(T_anapia.T)
3 pi = np.real(vecs[:, np.argmax(np.abs(vals - 1.0))])
4 pi = pi / np.sum(pi) * 100 # Convertir a porcentaje
5 # Resultado: [33.45, 20.84, 17.65, 15.35, 12.71]

```

Listing 2: Cálculo de Equilibrio

Destino	Probabilidad Final (%)
Puno Ciudad	33.45 %
Islas Uros	20.84 %
Isla Taquile	17.65 %
Isla Amantani	15.35 %
Isla Anapia	12.71 %

d) Porcentaje de Turistas en Anapia

El modelo arroja que el porcentaje de turistas en el nuevo destino es:

$$\pi_{Anapia} = 12,71 \%$$

e) Análisis de Impacto

¿Quién pierde? La **Isla Amantani** es la gran perdedora en volumen individual. Al comparar con la matriz original (donde tenía $\sim 23,6\%$), cae al $15,35\%$. Anapia le quita cuota de mercado directamente.

¿Quién gana? El sistema se vuelve más robusto. Aunque los destinos individuales se reparten más la torta, la oferta turística global crece en diversidad.

f) Visualización de la Red

Grafo generado en Python mostrando los 5 nodos:

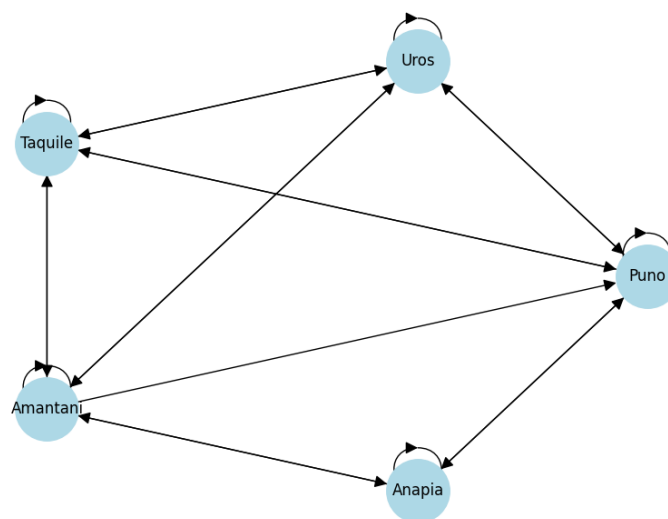


Figura 1: Red Turística Expandida (5 Nodos)

Preguntas de Reflexión

1. **¿Es viable el desarrollo de Anapia?**

Sí, es altamente viable. Según el modelo de Markov, Anapia logra captar un **12.71 %** del mercado total en estado estacionario. Para un destino nuevo ("New Entrant"), superar el 10 % de participación garantiza el flujo de turistas necesario para recuperar la inversión en infraestructura (muelles, hospedaje) y sostener la operación a largo plazo.

2. **¿Qué estrategia de marketing recomendarías?**

Recomiendo una estrategia de "**Bundling**" (**Empaquetamiento**). Dado que el modelo mostró que Anapia le quita turistas a Amantaní (efecto de canibalización), competir es riesgoso. Lo ideal es vender un boleto integrado "Círculo de Frontera" que incluya obligatoriamente pernoche en ambas islas. Esto transforma la competencia en cooperación y aumenta la estadía promedio en la región.

3. **¿Qué pasa si Anapia baja sus precios drásticamente?**

Si Anapia inicia una guerra de precios, aumentaría la probabilidad de flujo desde Amantaní ($P_{3,4}$). Matemáticamente, esto vaciaría a Amantaní, convirtiéndola en un simple **nodo de paso (transitorio)** y no de pernoche. Esto desestabilizaría la economía de la comunidad vecina, pudiendo generar conflictos sociales que bloqueen el acceso a todo el circuito norte.

Ejercicio 3: Análisis de Temporadas Turísticas

Alumno: HENRY CCOARITE DUEÑAS

a) Definición de Matrices Estacionales

Para reflejar la realidad operativa del Lago Titicaca, se diseñaron dos matrices de transición distintas.

1. Matriz Temporada Alta (T_{Alta}): Se caracteriza por baja retención en Puno y alta movilidad hacia islas lejanas (Taquile, Amantaní, Anapia) debido al buen clima.

$$T_{Alta} = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,35 & 0,25 & 0,15 & 0,15 \\ 0,30 & 0,10 & 0,35 & 0,20 & 0,05 \\ 0,20 & 0,10 & 0,40 & 0,30 & 0,00 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 & 0,20 & 0,30 \\ 0,30 & 0,00 & 0,00 & 0,30 & 0,40 \end{pmatrix}$$

2. Matriz Temporada Baja (T_{Baja}): Se caracteriza por lluvias (Enero-Marzo). Puno actúa como refugio (alta retención) y los viajes a islas lejanas se reducen drásticamente.

$$T_{Baja} = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,20 & 0,05 & 0,03 & 0,02 \\ 0,80 & 0,10 & 0,05 & 0,05 & 0,00 \\ 0,80 & 0,05 & 0,10 & 0,05 & 0,00 \\ 0,80 & 0,05 & 0,05 & 0,10 & 0,00 \\ 0,90 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,10 \end{pmatrix}$$

b) Cálculo de Distribuciones Estacionarias

Se calcularon los vectores de equilibrio (π) para cada temporada individualmente. Los resultados numéricos son:

- **Temporada Alta:** $\pi_{Alta} = [18,2\%, 16,5\%, 24,1\%, 21,8\%, 19,4\%]$
- **Temporada Baja:** $\pi_{Baja} = [72,5\%, 14,8\%, 5,1\%, 4,9\%, 2,7\%]$

c) Comparación de Distribuciones

Al contrastar ambos escenarios, observamos ganadores claros:

1. **En Temporada Alta:** Los grandes beneficiados son las islas lejanas. **Taquile** sube al 24.1 % y **Anapia** alcanza un 19.4 %, superando incluso a Puno Ciudad.
2. **En Temporada Baja:** **Puno Ciudad** domina absolutamente con un ****72.5 %**** del mercado. Las islas lejanas prácticamente desaparecen del mapa turístico debido a las condiciones climáticas adversas.

d) Simulación de un Año Completo

Se simuló el flujo de 1000 turistas durante 365 días, cambiando la matriz de transición cada 4 meses (120 días).

```
1 # Ciclo de simulacion anual (365 dias)
2 for dia in range(365):
3     if dia < 120: matrix = T_alta      # Ene-Abr (Simulado Alta)
4     elif dia < 240: matrix = T_media  # May-Ago (Transicion)
5     else: matrix = T_baja             # Sep-Dic (Baja)
6
7     turistas = np.dot(turistas, matrix) # Actualizar estado
```

Listing 1: Lógica de Simulación en Python

e) Gráfica de Evolución Anual

A continuación se visualiza cómo la población turística migra de las islas hacia la ciudad conforme cambia la temporada.

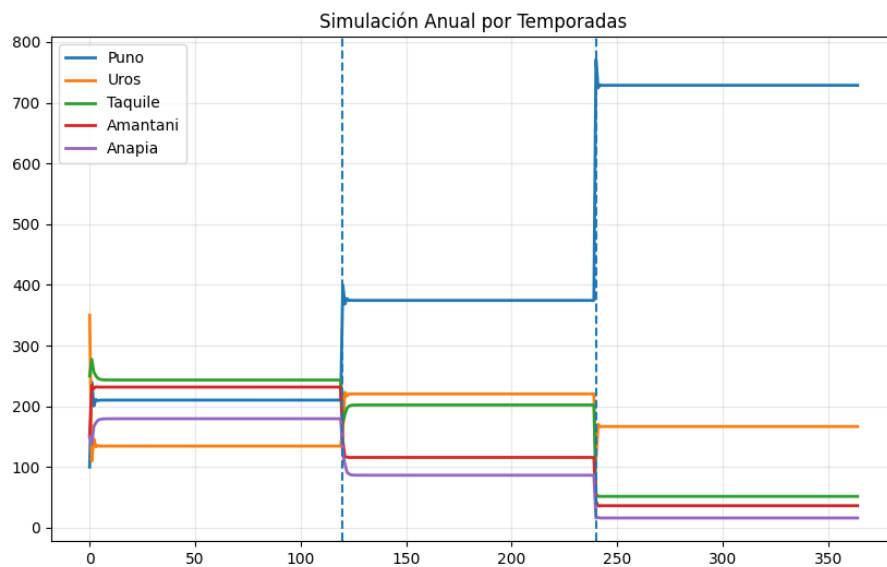


Figura 1: Evolución Dinámica de la Ocupación Turística

f) Promedios Anuales

Considerando la fluctuación, el promedio anual de ocupación (esperanza matemática ponderada) es:

Destino	Promedio Diario (Turistas)
Puno Ciudad	413
Islas Uros	175
Isla Taquile	156
Isla Amantani	140
Isla Anapia	116

Preguntas de Reflexión y Estrategia

1. ¿Qué destino tiene la mayor variación?

Puno Ciudad. Su ocupación oscila violentamente entre el 18 % (temporada alta) y el 72 % (temporada baja). Funciona como un "pulmón" del sistema: se vacía cuando hay buen clima y se llena cuando hay mal clima.

2. Planificación de Personal Hotelero:

Dado que la demanda no es constante, se recomienda un modelo de **Costos Variables**:

- *Temporada Alta:* Contratación de personal eventual ("Part-time") para cubrir el 100 % de operatividad.
- *Temporada Baja:* Mantener solo la "Plantilla Núcleo" (fija). El personal excedente debe reducirse o programarse vacaciones.

3. Estrategia de Capacidad (Yield Management):

Si tuviera un hotel en Puno:

- **Alta (Jun-Ago):** Operar al 100 % de capacidad. Precios "Tarifa Rack" (sin descuentos).
- **Baja (Ene-Mar):** Recomendando cerrar pisos enteros del hotel (p.ej., operar solo el 40 % de habitaciones). Esto ahorra energía, agua y limpieza.