GIẢI TÍCH

CỦA NGÀI GILBERT STRANG

TẬP MỘT

VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Đạo hàm

Tổng: $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Tích: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Thương: $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{vdu/dx - udv/dx}{v^2}$

Lũy thừa: $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

Xích: $\frac{d}{dx}z(y(x)) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$

Nghịch đảo: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

$\frac{d}{dx}e^{cx} = ce^{cx}$

$\frac{d}{dx}b^x = b^x \ln b$

$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Giới hạn và Tính liên tục

$\frac{\sin x}{x} \to 1 \frac{1-\cos x}{x} \to 0 \ \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$a_n \to 0 : |a_n| < \epsilon$ đối với mọi $n > N$

$a_n \to L : |a_n - L| < \epsilon$ đối với mọi $n > N$

$f(x) \to L : |f(x) - L < \epsilon$ đối với $0 < |x-a| < \sigma$

$f(x) - f(a)$: Liên tục tại a nếu $L = f(a)$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$: Đạo hàm tại a

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$: Định lý Giá trị Trung bình

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$: Đạo hàm tại x

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \to f'(x)$: Sai phân trung tâm

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Quy tắc l'Hôpital đối với $\frac{0}{0}$

Cực đại và Cực tiểu

Cực trị: $f'(x) = 0$ hoặc không có f' hoặc không có điểm mút

Cực tiểu $f'(x) = 0$ và $f''(x) > 0$

Cực đại $f'(x) = 0$ và $f''(x) < 0$

Điểm đối xứng $f''(x) = 0$

Phương pháp của Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ bị hút về

điểm bất động $x^* = F(x^*)$ if $|F'(x^*)| < 1$

Ổn định trong 2D: $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 0$

Cực tiểu$f_{xx} > 0$ $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$

Cực đại$f_{xx} < 0$ $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$

Điểm yên ngựa $f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$

Newton trong 2D $\begin{cases} g + g_x\Delta x + g_y\Delta y = 0 \\ h + h_x\Delta x + h_y\Delta y = 0 \end{cases}$

Đại số

$\frac{x/a}{y/b} = \frac{bx}{ay} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

$(x^2)(x^3) = x^5 \quad (x^2)^3 = x^6 \quad x^2/x^3 = x^{-1}$

$ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x^2 + 2Bx + C = 0$ có các nghiệm $x = -B \pm \sqrt{B^2 - C}$

Phần bù bình phương $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

Các phân thức đơn giản $\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

Sai lầm $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ $\sqrt{x^2+a^2} \neq x + a$

Định lý Cơ sở của Giải tích

$\frac{d}{dx}\int_a^x v(t)\,dt = v(x) \qquad \int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$

$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} v(t)\,dt = v(b(x))\frac{db}{dx} - v(a(x))\frac{da}{dx}$

$\int_0^b y(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x[y(\Delta x) + y(2\Delta x) + \ldots + y(b)]$

Đường tròn, Đường thẳng, và Mặt phẳng

$x = r\cos\omega t$, $y = \sin\omega t$, tốc độ ωr

$y = mx + b$ or $y - y_0 = m(x - x_0)$

Mặt phẳng $ax + by + cz = d$ hay

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_{0)} = 0$

Vector pháp tuyến $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

Khoảng cách tới $(0,0,0)$: $|d|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Đường thẳng $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(v_1,v_2,v_3)$

Không có tham số: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

Phép chiếu: $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b.a}}{\mathbf{a.a}}\mathbf{a}$, $|\mathbf{p}| = |\mathbf{b}|\cos\theta$

Đồng nhất thức Lượng giác

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ (chia bởi $\cos^2 x$)

$1+\cot^2 x = \csc^2 x$ (chia bởi $\sin^2 x$)

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ (góc gấp đối)

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin(s \pm t) = \sin s \cos t \pm \cos s \sin t$

$\cos(s \pm t) = \cos s \cos t \mp \sin s \sin t$

$\tan(s + t) = (\tan s + \tan t)/(1 - \tan s \tan t)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \tan^{-1}\frac{b}{a})$

$\cos(-x) = \cos x$ và $\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos x$ và $\cos(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \sin x$

$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$ và $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$

Tích phân Lượng giác

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x$

$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x$

$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

$\int \cos^n x\,dx = +\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx$

$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$

$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

$\int \sin px \sin qx\,dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}$

$\int \cos px \cos qx\,dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}$

$\int \sin px \cos qx\,dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)}{2(p+q)}$

Còn nhiều tích phân nữa đằng sau chỉ mục

Phép lấy tích phân Từng phần

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

$\int e^{cx}\sin kx\,dx = \frac{e^{cx}}{c^2+k^2}(c\sin kx - k\cos kx)$

$\int e^{cx}\cos kx\,dx = \frac{e^{cx}}{c^2+k^2}(c\cos kx + k\sin kx)$

$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x$

$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$

$\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

$\int x^n \cos x\,dx = +x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$

$\int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Tích phân với x^2 và a^2 và $D = b^2 - 4ac$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x+a}{x-a}| = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}|$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{D}}\ln|\frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}}|,\ D>0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-D}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{-D}},\ D<0$$
$$= \frac{-2}{2ax+b},\ D=0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\frac{-2ax-b}{\sqrt{D}},\ a<0$$

Tích phân Xác định

$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n! = \Gamma(n+1)$

$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2a$

$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx =$

$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}(\frac{\pi}{2})$ hoặc $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n}$

n chẵn $\qquad$ n lẻ

GIẢI TÍCH

CỦA NGÀI GILBERT STRANG

TẬP MỘT

VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Dựa trên tác phẩm gốc của

Gilbert Strang

Giáo sư Toán tại Viện Công nghệ Massachusetts

được dịch bởi

Bùi Minh Huy

Bằng Cử nhân Khoa học Toán từ Viện Công nghệ Georgia

với sự hỗ trợ của

Dương Phước Luân

Bằng Cử nhân Toán Ứng dụng từ Đại học Sư phạm Đà Nẵng

được hiệu đính bởi

Cao Văn Nuôi

Tiến sĩ, Giảng viên Toán tại Đại học Sư phạm Đà Nẵng

Bản quyền

CALCULUS

Strang, Gilbert
Calculus
Included index.

ISBN 0-9614088-2-0
1. Calculus. I. Title.
QA303.S8839 1991 515.20 90-49977

Wellesley-Cambridge Press (not Wellesley College or Cambridge University)
Box 812060
Wellesley MA 02181 USA
(617) 431-8488

GIẢI TÍCH CỦA NGÀI GILBERT STRANG
TẬP MỘT: VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Vẽ minh họa bằng PGF/TikZ: Trịnh Thị Thảo
Thiết kế sách: Trịnh Thị Thảo
Thiết kế bìa: Trương Bảo Nguyên

Ảnh bìa: Nhà thờ Thánh Peter, Cologne, Đức 2018 © Trương Bảo Nguyên

Quyển sách này được chế bản bằng LaTeX bởi Công ty Cổ phần Nền tảng Giáo dục mở Việt Nam, Đà Nẵng, Việt Nam.

Mục lục

Lời mở đầu

Giải tích là một môn học có mục đích. Môn học này mô tả sự phát triển, sự tiêu biến cũng như sự đổi thay. Ví dụ như dân số lại có tốc độ tăng trưởng—vốn là một con số luôn thay đổi. Hay giá trị của tiền tệ lại có tỷ lệ tiêu giảm—hoặc gia tăng. Sự biến đổi chắc chắn luôn tồn tại trong cuộc sống của chúng ta. Để thấu hiểu và vận dụng những biến đổi này trong cuộc sống, chúng ta cần biết đến và sử dụng Giải tích.

Những kiến thức nền tảng đã được hình thành từ lâu. Vì vậy trách nhiệm của tác giả ở đây chính là diễn giải chúng một cách rõ ràng, kèm theo những ví dụ đi thẳng vào vấn đề—*và khơi dậy sự tỏ tường đó đến các bạn độc giả.* Phần tâm huyết nhất của tựa sách này chính là ở khâu biên tập với ngôn ngữ và diễn đạt rõ ràng, sinh động. Con chữ phải luôn là thứ được đặt lên hàng đầu, các dòng văn bản mỗi khi hiện lên đều được chau chuốt tỉ mỉ. Ngôn từ mới chính là thứ hấp dẫn độc giả—và đồng thời làm một cầu nối truyền tải kiến thức và các khái niệm.

Phần lời mở đầu này còn đề cập đến các thay đổi, chỉnh sửa. Các biến tấu là một điều khá hiển nhiên (nhưng hãy cẩn thận). Nhưng bạn đọc sẽ sớm hiểu được ***đây là một giáo trình cơ bản dành cho giải tích***. *Giáo trình này dành cho tất cả các cơ sở giảng dạy, và được viết một cách vô cùng trực quan cho các bạn học sinh và sinh viên.* Những điểm quan trọng sẽ được nhấn mạnh, không chỉ bằng hình thức thể hiện mà còn bằng ngôn từ. Đây là một quyển giáo trình chứ không phải là một ngân hàng đề thi. Tôi hy vọng các bạn độc giả hiểu được mục đích trình bày này.

Bên cạnh đó, tôi cũng hy vọng độc giả của mình thấy được tinh thần mà cuốn sách này chứa đựng. Phần tuyệt vời nhất của toán học chính là làm toán, và chúng ta sẽ đi thẳng vào việc đó. Dù sử dụng cho mục đích giảng dạy hay soạn thảo nghiên cứu, các bạn sẽ dễ dàng làm quen với tựa sách ngay từ ban đầu—và cũng vì chúng tôi luôn muốn cho các lớp học sôi động. Những điều mới mẻ sẽ luôn đến với tất cả các bạn học sinh, sinh viên. Thay vì kết thúc mỗi mục bằng một phần tóm tắt (dành cho người đọc thụ động), chúng tôi chủ động yêu cầu người học đóng góp những từ khóa cho bài học. Điều đó giúp cũng cố thêm sự tự tin trong học tập—vốn vô cùng thiết yếu.

GIỚI THIỆU VỀ GIẢI TÍCH

Chương thứ nhất giới thiệu sơ lược về giải tích—*có mục đích.* Mục đích đó chính là để xem hàm số hoạt động như thế nào. Đặc biệt chúng tôi sẽ giới thiệu ***các cặp hàm số*** , khoảng cách $f(t)$ và vận tốc $v(t)$. Theo kinh nghiệm của tôi, trực giác khi lái xe hơi chính là một món quà miễn phí dành cho những người dạy giải tích. Phương trình $f = vt$ đã được hiểu (nhưng không phải lúc nào cũng được hiểu một cách đầy đủ theo ngôn ngữ của đại số). Tốc kế biểu diễn đạo hàm, hành trình kế lại biểu diễn tích phân. Bằng việc tìm hiểu về các hàm số cụ thể $f(t)$ và $v(t)$, chúng ta bắt đầu đến với giải tích.

Giáo trình này nhấn mạnh hơn so với trước kia về phần hình thức của việc học toán. Những hình ảnh không còn được đặt ở biên trang sách, nơi chúng thường bị chúng ta bỏ quên. Các công thức được gắn liền với các đồ thị. Điều tuyệt nhất mà một chiếc máy tính có thể làm chính là biểu diễn hàm số. Chúng ta sẽ thấy nó đi qua một cực đại, hoặc cắt trục hoành, hoặc dao động. Các đồ thị chính là chìa khóa đến với toán học ở bên ngoài lớp học.

Sớm hơn thông thường, chúng ta sẽ được học về ý nghĩa của các phương trình vi phân. Chúng chính là những mô hình của sự sống. Chúng biểu diễn cách sự biến đổi được xác định như thế nào—theo vị trí hiện tại và ngoại lực. Tôi tin rằng việc gặp một vài phương trình mang tính thực tiễn là vô cùng quan trọng trong một khóa học giải tích. Chúng ta không thể trì hoãn và trông đợi việc nắm được phần kiến thức này ở những khóa học nâng cao hơn.

Tôi hy vọng các bạn sẽ nhận ra rằng nội dung giáo trình sẽ luôn tập trung đi thẳng vào các vấn đề trọng tâm. Nhồi nhét nhiều hơn khả năng mà bạn có thể đọc được là một việc làm vô nghĩa. Và "việc cày cuốc và ngấu nghiến" quyển giáo trình này là một phương pháp phi toán học nhất mà tôi có thể tưởng tượng ra. Chúng tôi luôn đòi hỏi các bạn học và sinh sinh viên phải nỗ lực thực sự, ***nỗ lực mà chúng ta không hề muốn phí hoài***. Việc chôn vùi đi mục đích của giải tích bằng hàng triệu phương trình toán là vô cùng đơn giản. Việc thấu hiểu được các ý tưởng quan trọng và có ý nghĩa nhất mới là điều khó khăn, nhưng lại chính là việc làm đúng đắn hơn hết.

Và trên cơ sở học ít hiểu nhiều, tôi xin phép tóm tắt lại:

(1) Việc thực hành với các hàm số và đồ thị luôn hết sức quan trọng.
(2) Các mô hình của giải tích chính là các phương trình vi phân.
(3) Các ví dụ không cần phải phức tạp như các bài toán đánh đố. Bản thân toán học đã đủ khó rồi.
(4) Không cần thiết phải biết đến tất cả các chủ đề trong quyển sách này.
(5) Chuẩn bị kiến thức để giải quyết các bài toán thực tiễn nhưng chẳng bao giờ được tận mắt thấy chúng là một việc làm hết sức vô nghĩa.

KHÁC BIỆT THẬN TRỌNG

Đây là một giáo trình chính thống, nhưng không phải là một bản sao của những giáo trình khác. Tôi vô cùng tôn trọng những gì đã được các thế hệ trước giảng dạy, nhưng đồng thời vẫn tin rằng một khóa học đương thời hơn sẽ dạy được nhiều điều trường tồn hơn. Giáo trình này khác biệt không phải ở việc nó "dễ hơn" hay "khó hơn" hay "mang tính ứng dụng hơn"—mà là ở tinh thần dám nói và nói một cách thẳng thắn trực tiếp. Tôi hoàn toàn không chấp nhận được ý niệm rằng giải tích là một môn học quá khó đối với các học sinh và sinh viên của chúng ta, hoặc quá xa rời thực tiễn cuộc sống. Ngược lại, chúng ta có thể dạy cho họ những gì họ cần–những điều luôn thay đổi không ngừng.

Một thay đổi (đến từ bên ngoài) về hướng đi của quyển sách này chính là về điện toán. Đây là một thay đổi tốt, và sẽ còn thay đổi tốt hơn nữa. Giáo trình này được soạn ra với ý định củng cố cho xu hướng này, *mà không mang lại cảm giác ép buộc*. Các đồ họa được xây dựng dựa trên máy tính là một phương thức tuyệt diệu để thưởng thức các hàm số. Chúng tôi đưa vào luôn các ví dụ (và các chương trình máy tính) bởi vì đây là một hoạt động rất có giá trị. Nhưng điều này sẽ khá tốn thời gian—điện toán không phải là một giải pháp toàn diện. Những vấn đề của việc học giải tích không thể được giải quyết chỉ bằng một cái nhấp chuột được.

Giáo trình này hoàn toàn phù hợp cho những khóa học giải tích được giảng dạy theo kiểu truyền thống. Phần nội dung bổ trợ cho những gì được giảng dạy tại lớp, nhưng theo một hướng tiếp cận mới hơn. Và tôi tin rằng việc nhìn nhận một vấn đề một cách *thường xuyên* và *rõ ràng* chính là cách để thấu hiểu nó.

Thay đổi thứ hai (đến từ bên trong) về hướng đi của quyển sách này chính là về tính toán học. Đa số các hàm số mới đều được tạo ra từ một xích chẳng hạn như $f(g(x))$. Sự thật này bị chôn vùi sâu trong quá nhiều giáo trình khác. Quy tắc xích không chỉ là một công thức nào đó, và hàm số $f(g(x))) = x$ không chỉ tự nhiên mà tồn tại như vậy. Những chủ đề này đều là những chủ đề vô cùng cơ bản mà chúng ta không nên bỏ sót.

Trường hợp đặc biệt của *phép lặp*, khi f và g là một và xích đó cứ tiếp diễn, tạo nên sự hội tụ hoặc phân kỳ hoặc hỗn độn. Đạo hàm nằm trong tầm tay—một ứng dụng hoàn hảo của giải tích. Các phép lặp bắt đầu với phương pháp của Newton (cách tốt nhất để giải các phương trình trong thực tế). Khi chúng ta dạy những điều đó, chúng ta đang dạy về thực tế. Sau đó Chương 3 cố gắng giải phương trình $x^2 + 1 = 0$, và phương pháp của Newton kết thúc trong hỗn độn.

Đây chính là một thời khắc chuyển tiếp. Giáo trình này phải là tựa sách khuyến khích cho những ý tưởng mới, trong khi vẫn phải trung thành với cấu trúc mà giải tích được xây dựng nên. *Chắc chắn cấu trúc này vẫn có thể được tinh gọn hơn nữa.* Và giáo trình này cũng có thể được tinh gọn như vậy. Chúng ta không cần phải cảm thấy choáng ngợp bởi sức nặng của môn học này, để thấy được sức mạnh của nó. Giáo trình này vẫn có thể được tinh giản hơn nữa[1] bằng việc loại bỏ một số chủ đề, nhưng tôi không nghĩ rằng tác giả tựa sách nên là người làm giáo án. Đây là một đất nước mà bạn có quyền lựa chọn bạn muốn dạy thứ gì.

Một lần nữa tôi phải nhắc lại rằng các thay đổi là rất thận trọng. Một cuộc cách mạng rất có khả năng sẽ kết thúc tại 2π.[2] Sự tự tin của người dạy cũng quan trọng như của người học vậy, và thứ tự của các chủ đề trong quyển sách này cũng vô cùng thiết yếu—môn học này không được tạo nên từ sự ngẫu nhiên. Trọng tâm có thể được thay đổi, trong khi cách thức vẫn sẽ được giữ nguyên. *Mục tiêu của tôi là hỗ trợ một khóa học giải tích truyền thống bằng những ý tưởng mới.* Quyển sách này cũng được dành cho một khóa học "gọn và trực quan," hoặc các khóa học hoàn chỉnh.

ỨNG DỤNG

Tôi hy vọng điện tâm đồ là một ví dụ hấp dẫn. Ví dụ này sẽ được đề cập lần đầu tiên trong Chương 3, và một lần nữa ở Chương 11, để mô tả chuyển động có chu kỳ và các vector và hình chiếu. Sinh học cũng có sử dụng đến giải tích—ngành quản lý và kinh tế học cũng vậy. Tôi đã vô cùng kinh ngạc (đến bây giờ tôi mới nhận ra) về mức độ xuất hiện thường xuyên của các đạo hàm trên các tờ báo. Niềm hân hoan của việc học được một ngôn ngữ đó chính là nghe thấy nó được nói ra và thấy nó được viết ra.

Giáo trình này muốn hướng đến việc kết nối toán học và các ngành học khác. Điều này được trình bày trong những ví dụ mà chúng tôi đã chọn ra và cách chúng tôi trình bày chúng. Các ngành khoa học và kỹ thuật đều là những nguồn ví dụ hoàn hảo. Tốc độ thay đổi xuất hiện ở khắp nơi trong các bộ môn thể thao (và các ngành kinh doanh). Chúng ta không thể cưỡng ép đưa ra các ứng dụng—một câu chuyện quá dông dài về một chủ đề xa xôi luôn không được đón nhận và lắng nghe. Vì vậy nhiệm vụ của người viết sách đó chính là tạo nên những bước đệm vừa đủ

[1]Chúng tôi dự định cho ra một giáo trình trong tương lai dành cho các khóa học giải tích ngắn (nhưng không muốn bị gọi là *Giải tích cấp tốc*).

[2]Nd: Các thay đổi rất có khả năng không thay đổi được điều gì cả.

và rõ ràng để dẫn dắt. Tôi sẽ đề cập đến sáu ứng dụng có thể xuất hiện trong khóa học hoặc chỉ để tham khảo, và tất cả những ví dụ này đều hoàn toàn tùy ý:

(1) Xác suất (bao gồm giá trị trung bình và phương sai).
(2) Các số phức (trong các phương trình vi phân)
(3) Các mô hình trong các ngành khoa học sự sống: ngành hậu cần hay luật hành động tập thể[3] hay các phương trình "MM.[4]"
(4) Toán tài chính: lãi kép, tiền vay, tăng trưởng liên tục *vs.* tăng trưởng rời rạc. "Giải tích kinh doanh" cũng nên được xem là giải tích.
(5) Các phương pháp số: phép lấy tích phân, cực đại và cực tiệu, sự hội tụ của các phép lặp. *Giải tích ứng dụng.*
(6) Kinh tế học: phương trình cung-cầu (một cặp đối lập hoàn hảo) khác với sự tối đa hóa lợi nhuận của một hàng độc quyền.

Các ngành kỹ thuật và vật lý đều hiện diện xuyên suốt trong giáo trình này—chúng tôi đã biên soạn chúng một cách rất cẩn thận. Chuyên khảo về đại số tuyến tính, và sau đó về phép tối ưu hóa của $f(x, y)$ phản ánh tầm quan trọng to lớn của chúng trong thực tiễn. Quyển sách này khép lại với một thảo luận về các khóa học nào nên được theo học tiếp.

BỐ CỤC

Một người dạy nhiều kinh nghiệm sẽ nhận ra hai điều về giáo trình này—thứ tự của các chủ đề rất gần với các giáo trình truyền thống khác, trong khi từng chủ đề đó lại có chút gì đó khá mới mẻ. Khi một ý tưởng được nghĩ thông, một nhận thức mới sẽ luôn tự nảy sinh. Một ví dụ cực kỳ nhỏ bé sẽ khép lại Mục 1.1, ví dụ này nói về đồ thị của một hàm số. Ví dụ này hỏi lý do tại sao $\boldsymbol{X}$ không thể là một đồ thị, và những chữ cái nào có thể là các đồ thị (*Không có nhiều lắm đâu. Vẫn có chỗ cho việc tranh luận.*) Đối với các hàm ngược, °F hay °C cũng đều được thôi chẳng qua khác nhau ở chỗ $\frac{5}{9}$ và $\frac{9}{5}$. Đối với một hàm số từng khúc, chúng ta đến với thuế thu nhập. Ngay cả một hộp giấy có thể tích tối đa cuối cùng cũng phải có một cái nắp có số đo cố định.

Thêm vào đó tôi cũng đưa ra những quyết định nghiêm túc mà tôi hy vọng các bạn sẽ ghi nhận và cho phép. Các hàm sine và cosine được giới thiệu khá sớm. Giải tích phụ thuộc rất nhiều vào một số rất ít các hàm số (vô cùng ít). ***Chúng chỉ được hiểu khi được dùng đến***. Chúng tôi giải thích và thường xuyên ôn tập lại chúng—đừng nghĩ đến việc có một trí nhớ hoàn hảo, hoặc cố gắng hiểu được toàn bộ chúng cùng một lúc. Một người học có thể so sánh $2j$ và j^2 and $2j$ trước khi các hàm số mũ được hoàn toàn xác định. Khi 2^x xuất hiện, đạo hàm của nó sẽ được tìm ra trong hai bước: đầu tiên là dưới dạng $c2^x$—nhấn mạnh vào ý nghĩa của việc có được dy/dx tỷ lệ thuận với y—sau đó chúng ta tìm thấy hằng số c (theo e).

Nỗ lực khảo sát e^x được đền đáp một cách xứng đáng. Nó là hàm số quan trọng nhất từng được tao ra bởi giải tích. Logarithm giúp lấp những khoảng trống giữa các tích phân, nhưng để đưa vào ứng dụng, không gì có thể qua được e^x.

Một phần của giải tích là dành để nói về những hàm số cụ thể này. Phần còn lại của giải tích lại khái quát hơn—nói về $y(x)$ và dy/dx. Chúng liên hệ với nhau khá sâu, nhưng chúng ta hoàn toàn có thể chạm đến được. Giáo trình này tập trung vào những ý tưởng then chốt hơn là những ví dụ phức tạp. Luôn có vấn đề để chúng ta đi tìm giải pháp, nhưng những giải pháp đó không cần phải quá cồng kềnh phức

[3]Nd: Luật hành động tập thể trong hóa học phát biểu rằng tốc độ phản ứng hóa học tỷ lệ thuận với nồng độ phân tử của các chất phản ứng.

[4]Nd: Các phương trình "MM" (Michaelis-Menten) trong sinh học mô tả tốc độ phản ứng enzyme

tạp. Tại sao lại phải làm lu mờ đi một môn học đẹp đẽ như vậy bằng những nặng nề không đáng có? Tôi luôn nỗ lực để khiến cho giáo trình này nhẹ nhàng và tinh tế hơn, cả về phần hồn lẫn nội dung.

Tôi bị thuyết phục bởi lòng tin rằng một giáo trình hay một khóa học vẫn có thể đầy tính hứng khởi và nhân bản mà không làm mất đi mục tiêu cao cả của nó—***để dạy toán học thực thụ***. Giới hạn nằm ở trái tim của giải tích, một khái niệm không được phép bỏ qua (hay say mê quá). Chúng tôi luôn chú ý đến tính logic đằng sau những các từ "cần" và "đủ" và "khi và chỉ khi." Khi một chứng minh được cần đến, chúng tôi cũng không quên nó. *Toán học luôn hiện hữu*—chỉ là không thể bỏ qua vấn đề quan trọng của công tác giảng dạy đó chính là tìm ra thời điểm thích hợp cũng như sự truyền đạt thích hợp.

LỜI TRI ÂN ĐẶC BIỆT

Đã có rất nhiều người hảo tâm đóng góp sức mình cho giáo trình này. Tôi tin rằng họ biết công trình này được trân quý đến bao nhiêu. Đối với phần dạy thử tại lớp, Dan Drucker ở Đại học Bang Wayne[5] là một người dạy hoàn hảo—người luôn đứng ra bảo vệ tính truyền thống của giải tích. Đối với phần phê bình, Bob Lynch ở Đại học Purdue[6] là một bậc thầy. Hàng ngàn điều nhỏ vẫn có thể tạo nên sự khác biệt, khi mà một quyển sách được dùng ngày qua ngày. Còn có người—hoàn toàn bất ngờ—chỉ ra việc cần phải viết lại rất nhiều câu cú trong giáo trình này. Darien Lauten đã giúp tôi mở mang tầm mắt để thấy được một người giáo viên giỏi ở một trường trung học phổ thông ở New Hampshire có thể làm được những gì. Một điều nữa, các lớp giải tích tại trường Trung học Phổ thông Oyster River[7] chỉ chấp nhận một điều đó là sự rõ ràng minh bạch. Giáo trình này được soạn thảo với chủ đích được tiếp nhận một cách hết sức cá nhân, đây cũng chính là hướng tiếp cận mà những người đóng góp sức mình giáo trình đã thực hiện. Những bình luận của họ dù ẩn danh nhưng lại vô cùng thân thiện, và chúng đã làm thay đổi giáo trình này.

Có một người hiểu được mức độ thường xuyên những trang sách này được soạn thảo. Tôi muốn cảm ơn Sophia Koulouras vì những hỗ trợ không ngừng của cô—cô ấy đã truyền động lực cho tôi từ đầu cho đến cuối quá trình soạn thảo.

Tôi cũng muốn bày tỏ, một cách rõ ràng nhất, niềm hạnh phúc của bản thân tôi trong suốt ba năm vừa qua. Đó là nhờ vào những cống hiến độc đáo và không thể đong đếm được của Jill. Các bạn có thể cảm nhận được niềm hân hoan này qua từng trang sách. Giáo trình này xin được phép dành tặng cho cô ấy cũng như dành tặng cho các bạn độc giả của tôi—cùng với lời cảm ơn chân tình nhất.

Gilbert Strang

[5]Nd: Đại học Bang Wayne (tiếng Anh: Wayne State University).
[6]Nd: Đại học Purdue (tiếng Anh: Purdue University).
[7]Nd: Trường Trung học Phổ thông Oyster River (tiếng Anh: Oyster River High School).

CHương 1

Nhập môn Giải tích

1.1. Vận tốc và Quãng đường

Cách tốt nhất để mở đầu một cuốn sách giải tích là khởi động bằng những tính toán. Hai bài toán được đưa ra trong chương này cũng chính là nguyên nhân sinh ra giải tích. Các câu hỏi của hai bài toán đó và tầm quan trọng của câu trả lời cũng sẽ được tìm thấy trong chương này. Còn rất nhiều thứ đang chờ đợi chúng ta trong những chương còn lại, thế tại sao chúng ta lại chưa bắt đầu nhỉ?

Cuốn sách này bắt đầu với một ví dụ quen thuộc với bất kỳ ai đã từng lái xe hơi. Nó chính là một ví dụ về giải tích trong thực tế—người lái xe chứng kiến được ứng dụng của *dặm trên giờ*. Đại lượng *thời gian* có mặt trong giải tích. Ví dụ này là về mối quan hệ giữa *tốc độ kế* và *hành trình kế*. Một cái đo tốc độ (hoặc ***vận tốc***); cái còn lại đo ***quãng đường đi được***. Chúng ta sẽ viết v đối với vận tốc, và f đối với quãng đường xe hơi đã đi. Hai đại lượng này nằm cạnh nhau trên cùng bảng điều khiển xe hơi:

HÌNH 1.1.1. Vận tốc v và tổng quãng đường f (tại một thời điểm).

Chú ý rằng các đơn vị đo lường là khác nhau đối với v và f. Quãng đường f được đo theo kilometer hoặc dặm (ở Hoa Kỳ, người ta thường dùng dặm). Vận tốc v được đo theo km/hr hoặc *dặm trên giờ*. Đại lượng *thời gian* có mặt trong vận tốc nhưng không hiện hữu trong quãng đường. Mỗi công thức để tính v từ f sẽ có f bị chia bởi thời gian.

Câu hỏi chính của giải tích đó là mối quan hệ giữa v và f

Liệu bạn có thể tìm được v nếu đã biết f, và ngược lại, và làm như thế nào? Nếu chúng ta biết được vận tốc trên toàn bộ hành trình của xe hơi, chúng ta sẽ tính được tổng quãng đường đường đã đi. Nói cách khác, nếu ghi chép tốc độ kế là đầy đủ nhưng ghi chép hành trình bị mất, thông tin của ghi chép hành trình kế vẫn có thể được phục hồi. Một cách để thực hiện điều này (mà không cần đến giải tích) đó là lắp đặt một hành trình kế mới vào xe hơi và lái xe hơi đi lại hành trình đã đi tại đúng các tốc độ đã đi. Cách này xem ra khó mà thực hiện được; cách dùng đến giải tích có thể dễ hơn. Nhưng điểm quan trọng là *thông tin luôn ở đó.* Nếu chúng ta biết mọi thứ về v, phải có một phương pháp để tìm f.

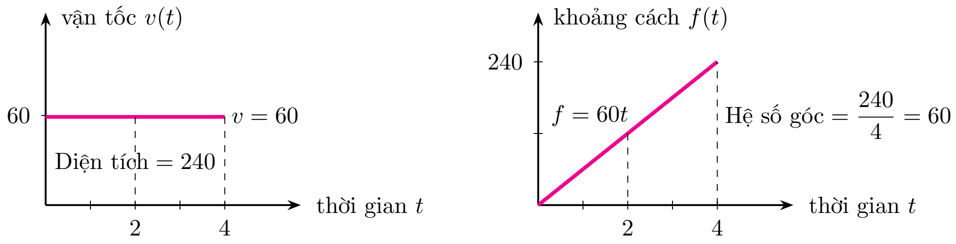
Điều gì sẽ xảy ra theo tình huống ngược lại, khi đã biết f? Nếu bạn đã có một ghi chép hoàn chỉnh về quãng đường đã đi, liệu bạn có thể phục hồi lại được vận tốc hoàn chỉnh hay không? Về nguyên lý, bạn ta có thể lái xe hơi, lặp lại lịch sử hành trình, và đọc được tốc độ. Một lần nữa, chúng ta phải có một cách tốt hơn.

Toàn bộ đối tượng của giải tích được xây dựng trên mối quan hệ giữa v và f. Câu hỏi được đặt ra ở đây không hẳn là không liên quan, sau đó cuốn sách này sẽ trở nên rất quan trọng và toán học sẽ bắt đầu nhập cuộc. Ngược lại, *bây giờ tôi đang rất nghiêm túc*—và toán học đã bắt đầu nhập cuộc rồi. Chúng ta cần phải biết cách làm thế nào để tìm vận tốc từ lịch sử của quãng đường. (Đó được gọi là ***phép lấy vi phân***, và nó là ý tưởng chính của ***giải tích vi phân***). Chúng ta cũng muốn tính quãng đường từ lịch sử của vận tốc. (Đó được gọi nó là ***phép lấy tích phân***, và là mục đích của ***giải tích tích phân***).

Phép lấy vi phân đi từ f tới v, phép lấy tích phân đi từ v tới f. Chúng ta trước tiên nhìn vào các ví dụ mà có thể tính được và hiểu được những cặp đại lượng này.

VẬN TỐC HẰNG

Giả sử rằng vận tốc được cố định tại $v = 60$ (dặm trên giờ). Khi đó f tăng theo tốc độ hằng này. Sau hai giờ, quãng đường là $f = 120$ dặm. Sau bốn giờ, quãng đường là $f = 240$ dặm, và sau t giờ, quãng đường là $f = 60t$. Chúng ta nói rằng f tăng ***tuyến tính*** theo thời gian—đồ thị của nó là một đường thẳng.



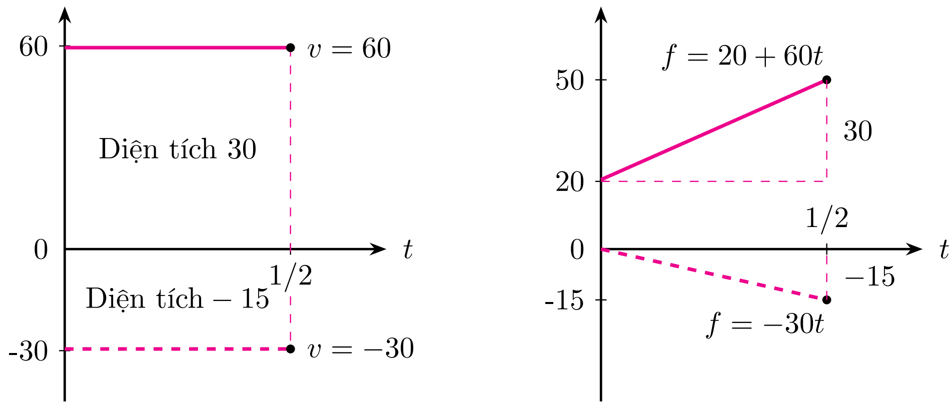
Hình 1.1.2. Vận tốc hằng $v = 60$ và quãng đường tăng tuyến tính $f = 60t$.

Chú ý rằng xe hơi trong ví dụ này khởi hành tại vận tốc đầy đủ. Chiếc xe hơi không mất thời gian tăng tốc để đạt tốc độ đó. (Vận tốc này là một "hàm bậc thang.") Ngoài ra lưu ý rằng quãng đường bắt đầu tại không hay hành trình kế bắt đầu tại không; điều này có nghĩa là chiếc xe là hoàn toàn mới. Những quyết định này làm cho các đồ thị của v và f trở nên hết sức gọn gàng. Đồ thị của v là đường thẳng nằm ngang $v = 60$. Đồ thị của f là đường thẳng nằm nghiêng $f = 60t$. Mối liện hệ này của v, f, t chỉ cần dùng đại số chứ chưa cần giải tích.

nếu v là hằng và f bắt đầu tại 0, khi đó $f = vt$.

Trường hợp ngược lại cũng đúng. Khi f tăng tuyến tính, v là hằng. *Phép chia bởi thời gian đưa ra hệ số góc.* Quãng đường là $f_1 = 120$ dặm khi thời gian là $t_1 = 2$ giờ. Sau đó $f_2 = 240$ tại $t_2 = 4$. Tại hai thời điểm này, tỷ số f/t đều là 60 dặm/giờ. Về mặt hình học, ***vận tốc là hệ số góc của đồ thị quãng đường***:

$$\text{hệ số góc} = \frac{\text{số gia trong quãng đường}}{\text{số gia trong thời gian}} = \frac{vt}{t} = v.$$



HÌNH 1.1.3. Các đường thẳng $f = 20+60t$ (độ dốc 60) và $f = -30$ (độ dốc -30).

Hệ số góc của f-đồ thị đưa ra v-đồ thị. Hình 1.1.3 cho thấy thêm hai khả năng:

(1) Quãng đường bắt đầu tại 20 thay vì 0. Công thức quãng đường thay đổi từ $60t$ thành $20+60t$. Số 20 bị mất đi khi chúng ta tính *số gia trong* đường đi—nên hệ số góc vẫn là 60.

(2) Khi v là *âm*, đồ thị của f đi *xuống*. Chiếc xe đi theo hướng ngược lại và hệ số góc của $f = -30t$ là $v = -30$.

Tôi không nghĩ tốc độ kế có thể chạy xuống dưới 0. Nhưng việc lái xe đi thụt lùi là không an toàn. Nếu bạn đi đủ nhanh, hãng Toyota tuyên bố rằng họ cho các "giá trị tuyệt đối"—tốc độ kế báo +30 khi vận tốc là -30. Đối với hành trình kế, theo tôi được biết, sẽ dừng chạy, trong khi theo lý thiết, nó phải chạy ngược lại.[1]

VẬN TỐC vs. ĐƯỜNG ĐI: ĐỘ DỐC vs. DIỆN TÍCH

Chúng ta làm thế nào để tính f từ v? Mấu chốt của câu hỏi này là thấy được $f = vt$ *trên các đồ thị*. Chúng ta nên bắt đầu với đồ thị của v và tìm hiểu đồ thị của f. Kết quả thật ngạc nhiên, đại lượng ngược với hệ số góc chính là *diện tích.*

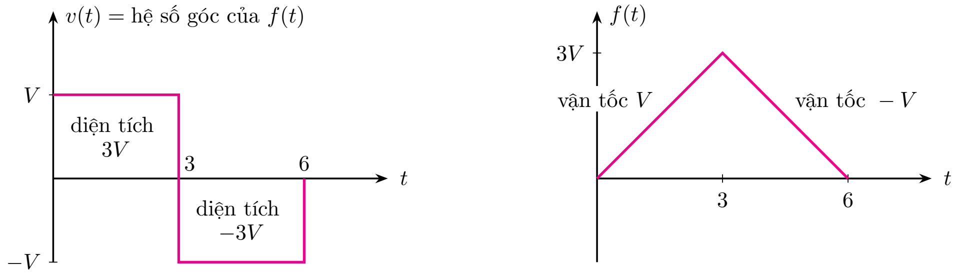
Quãng đường f là diện tích phía dưới đồ thị v. Khi v là hằng, miền phía dưới đồ thị này là một hình chữ nhật. Chiều cao của nó là v, chiều rộng là t, và diện tích của nó là v lần t. Đây chính là *phép lấy tích phân*, để đi từ v tới f bằng cách tính diện tích. Chúng ta đang xem xét hai việc trong số các việc quan trọng của giải tích.

PHÁT BIỂU 1.1.1. Hệ số góc của f-đồ thị đưa ra vận tốc v. Diện tích phía dưới đồ thị v đưa ra quãng đường f.

Điều này chắc chắn không dễ giải thích, và tôi đã do dự khá lâu trước khi viết nó trong mục đầu tiên này. Cách tốt nhất để thấu hiểu vấn đề đó là xem xét nhiều ví dụ hơn. Nhìn chung, điểm chủ yếu của giải tích đó là làm việc với các vận tốc *không* hằng, và từ bây giờ, v có nhiều giá trị.

VÍ DỤ (Đi tới và lui). Đây là một chuyển động dễ hiểu. Một chiếc xe hơi đi tới với vận tốc V, và đi lui tại cùng tốc độ đó. Chính xác hơn, *vận tốc trong phần thứ hai hay phần đi lui là $-V$*. Nếu phần đi tới diễn ra cho đến $t = 3$, và phần đi lui

[1]Điều này thực sự xảy ra trong bộ phim *Kỳ nghỉ của Ferris Bueller* (tiếng Anh: Ferris Bueller's Day Off), khi nhân vật người anh hùng bí mật lái đi chiếc xe thể thao của cha anh ta, con số trên trên hành trình kế tăng lên. Lúc trở về nhà, để người cha không biết rằng anh đã lái chiếc xe đi, anh ta treo chiếc chiếc xe lên và chạy lùi để hành trình kế chạy ngược trở về giá trị ban đầu. Tôi không rõ liệu cách này có thực sự làm cho hành trình kế chạy ngược lại trong thực tế hay không.



HÌNH 1.1.4. Các vận tốc $+V$ và $-V$ đưa ra chuyển động đi tới và lui, kết thục tại $f(6) = 0$.

tiếp tục cho đến $t = 6$, ***chiếc xe sẽ trở lại nơi nó đã khởi hành***. Tổng quãng đường sau cả hai phần sẽ là $f = 0$.

Đồ thị của v cho thấy các vận tốc $+V$ và $-V$. Quãng đường bắt đầu với hệ số góc $+V$ và đạt $f = 3V$. Khi đó xe bắt đầu đi lui lại. Quãng đường đi đi xuống với hệ số góc $-V$ và trở về $f = 0$ tại $t = 6$.

Chú ý về ý nghĩa của việc này. Tổng diện tích "phía dưới" v-đồ thị bằng 0! Một vận tốc âm làm cho đồ thị quãng đường đi xuống (hệ số góc âm). Chiếc xe đang chuyển động theo hướng ngược lại. ***Diện tích dưới trục hoành trong v-đồ thị được xem là âm***.

HÀM SỐ

Ví dụ đi tới-đi lui này đưa ra một thực tế với một ý tưởng cực kỳ quan trọng—khái niệm của một "***hàm số***". Chúng ta dùng ý tưởng này để giải thích các hàm số:

Số $v(t)$ là giá trị của hàm số v tại thời điểm t.

Thời điểm t là ***đầu vào*** cho hàm số này. Vận tốc $v(t)$ tại thời điểm đó là ***đầu ra***. Hầu hết mọi người nói "v của t" khi họ đọc $v(t)$. Số "v của 2" là vận tốc khi $t = 2$. Ví dụ đi tới-đi lui có $v(2) = +V$ và $v(4) = -V$. Hàm số này chứa toàn bộ lịch sử hành trình của chiếc xe, như một bộ nhớ mà có một ghi chép của v tại từng t.

Thật dễ dàng chuyển đổi chuyển động đi tới-đi lui này thành một công thức. Đây là $v(t)$:

$$v(t) = \begin{cases} +V & \text{nếu } 0 < t < 3 \\ ? & \text{nếu } t = 3 \\ -V & \text{nếu } 3 < t < 6 \end{cases}$$

Vế phải chứa các quy tắc để tìm $v(t)$. Đầu vào t được chuyển đổi thành đầu ra $+V$ hoặc $-V$. Vận tốc $v(t)$ phụ thuộc vào t. Trong trường hợp này, hàm số là "gián đoạn," bởi vì có các bước nhảy xen ngang tại $t = 3$. *Vận tốc không được xác định tại thời điểm đó*. Không có $v(3)$. (Bạn có thể xem v là 0 tại bước nhảy này, nhưng điều này lại dẫn đến trục trặc.) Đồ thị của f có một điểm góc, và chúng ta không thể đưa ra hệ số góc của nó.

Bài toán này cũng liên quan đến một hàm số thứ hai, cụ thể là quãng đường. Nguyên lý đằng sau $f(t)$ cũng tương tự như nguyên lý đằng sau $v(t)$: $f(t)$ là quãng đường tại thời điểm t. Nó là quãng đường đi tới sau cùng, và một lần nữa các quy tắc để tìm hàm số thay đổi tại $t = 3$. Trong chuyển động đi tới, $f(t) = Vt$ như trước đây. Trong nửa đường đi lui, một phép tính được xây dựng thành công thức cho $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} Vt & \text{nếu } 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ V(6 - t) & \text{nếu } 3 \leqslant t \leqslant 6 \end{cases}$$

Tại thời điểm thay đổi giữa hai quy tắc tìm hàm số, vế phải đưa ra hai quy tắc (một quy tắc trên từng hàng). Đây là một ví dụ không hay nhưng nó lại thỏa mãn: $f(3) = 3V$.[2] Hàm quãng đường là "*liên tục.*" Không có bước nhảy trong f, ngay cả khi có bước nhảy trong v. Sau $t = 3$, quãng đường giảm do $-Vt$. Tại $t = 6$, hương dẫn thứ hai đưa ra $f(6) = 0$.

Chú ý thêm một số thứ. Các hàm được cho bởi các đồ thị trước khi chúng được cho bởi các công thức. Các đồ thị cho bạn biết f và v tại mỗi thời điểm t—đôi khi nó còn rõ hơn cả các công thức. Các giá trị $f(t)$ và $v(t)$ cũng có thể được cho bởi các bảng hoặc các phương trình hoặc một tập hợp gồm các quy tắc. (Trong cách nào đó, mọi hàm số đều là các quy tắc—hàm số cho chúng ta biết cách tìm f tại thời điểm t). Một phần của việc hiểu f đó là biết về mọi đầu vào và đầu ra của nó—***miền xác định*** và ***vùng giá trị*** của nó.

Miền xác định của một hàm số là tập hợp gồm các đầu vào. Vùng giá trị là tập hợp gồm các đầu ra.

Miền xác định của f bao gồm tất cả các thời điểm $0 \leqslant t \leqslant 6$. Vùng giá trị bao gồm tất cả các quãng đường $0 \leqslant f(t) \leqslant 3V$. (Vùng giá trị của v chỉ chứa hai vận tốc $+V$ và $-V$.) Chúng ta bây giờ nhắc đến, và sau này nhắc lại, rằng mỗi hàm số "tuyến tính" đều có một công thức $f(t) = vt + C$. Đồ thị của nó là một đường thẳng và v là hệ số góc. Hằng số C di chuyển đường thẳng lên và xuống. Nó điều chỉnh đường thẳng đi qua bất kỳ điểm ban đầu được cho trước nào.

TÓM TẮT: NÓI THÊM VỀ CÁC HÀM SỐ

Liệu tôi có thể tập hợp lại các ý tưởng được đưa ra bởi ví dụ này hay không? Chúng ta đã có hai hàm số v và f. Một hàm số là *vận tốc*, hàm số còn lại là *quãng đường*. Từng hàm số này đều có một *miền xác định* và một *vùng giá trị*,và quan trọng nhất là một *đồ thị*. Đối với f-đồ thị, chúng ta đã nghiên cứu hệ số góc (mà đồng nhất với v). Đối với v-đồ thị, chúng ta đã nghiên cứu diện tích (mà đồng nhất với f). Giải tích sinh ra các cặp hàm số, và cuốn sách này sẽ cho bạn thấy nhiều cặp hàm số như vậy:

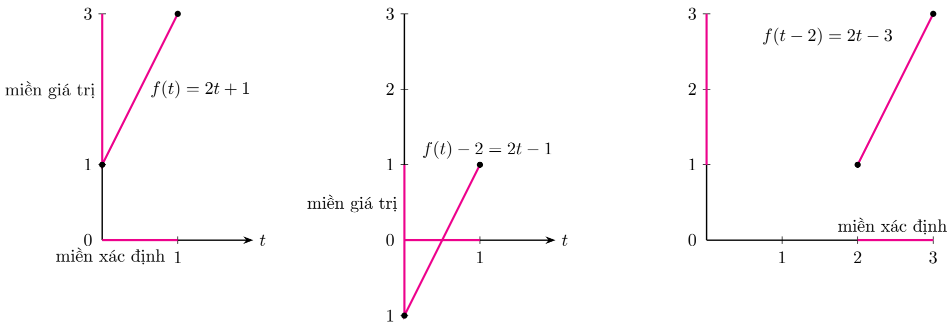
$$\begin{array}{c} \textbf{\textit{trong}} \\ \textbf{\textit{miền}} \\ \textbf{\textit{xác định}} \end{array} \left\{ \begin{array}{lclcl} \textbf{đầu vào } t & \to & \textbf{hàm số } f & \to & \textbf{đầu ra } f(t) \\ \textbf{đầu vào } 2 & \to & \textbf{hàm số } v & \to & \textbf{đầu ra } v(2) \\ \textbf{đầu vào } 7 & \to & f(t) = 2t + 6 & \to & f(7) = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \textbf{\textit{trong}} \\ \textbf{\textit{vùng}} \\ \textbf{\textit{giá trị}} \end{array}$$

Lưu ý về định nghĩa của một hàm số. Ý tưởng đằng sau ký hiệu $f(t)$ là rất quan trọng đối với toán học vì không phải thứ gì cũng có thể được giải thích hết bằng lời! Theo định nghĩa, một hàm số là một "quy tắc" mà gán một phần tử của vùng giá trị cho từng phần tử của miền xác định. Hoặc, một hàm số là một tập hợp gồm các cặp $(t, f(t))$ mà không có t nào xuất hiện hai lần. (Đây là các "cặp thứ tự" bởi vì chúng ta viết t trước $f(t)$). Cả hai định nghĩa này đều đúng—nhưng về mặt nào đó chúng lại quá thụ động.

Trong thực tế, điều quan trọng chính là phần chủ động. Số $f(t)$ được sinh ra từ số t. Chúng ta đọc một đồ thị, thế vào một công thức, giải một phương trình, chạy một chương trình máy tính. Đầu vào t được "**ánh xạ**" tới đầu ra $f(t)$, mà thay đổi khi t thay đổi. Giải tích là bộ môn nghiên cứu về ***tốc độ thay đổi***. Tốc độ thay đổi này là chính là hàm số còn lại của chúng ta, hàm số v.

Việc thấy được sự khác biệt giữa $f(t) - 2$ và $f(t - 2)$ ngay từ đầu là khá khó. Cả hai hàm số này đều là các hàm mới được tạo ra từ hàm gốc $f(t)$. Trong $f(t) - 2$, chúng ta trừ 2 khỏi toàn bộ các quãng đường. Điều này dịch chuyển toàn bộ đồ thị đi *xuống*. Trong $f(t-2)$, chúng ta trừ 2 khỏi thời gian. Điều này dịch chuyển đồ thị

[2]Một hàm số chỉ cho phép có một giá trị $f(t)$ hoặc $v(t)$ tại từng thời điểm t.

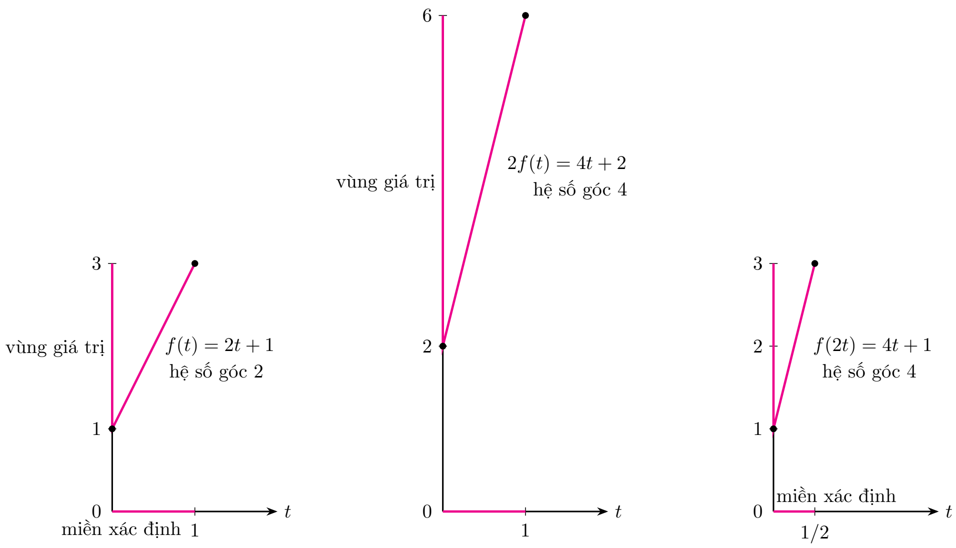


HÌNH 1.1.5. Việc trừ 2 khỏi f ảnh hướng đến vùng giá trị. Việc trừ 2 khỏi t ảnh hưởng đến miền xác định.

đi *sang phải*. Hình 1.1.5 cho thấy hai phép dịch chuyển này, bắt đầu từ $f(t) = 2t+1$. Công thức để tìm $f(t-2)$ đó là $2(t-2)+1$, mà là $2t-3$.

Một máy tính cầm tay có chức năng vẽ đồ thị cũng có thể di chuyển đồ thị, khi bạn thay đổi khung hình trên máy tính cầm tay đó. Bạn có thể chọn bất kỳ hình chữ nhật $A \leqslant t \leqslant B$, $C \leqslant f(t) \leqslant D$ nào. Màn hình chỉ hiển thị đồ thị tại khung hình đó. Nhưng trên máy tính cầm tay đó, *hàm số $f(t)$ vẫn giữ nguyên*. Chỉ có trục hoành bị thay đổi tỷ lệ.

Có thêm hai cách nữa để thay đổi một hàm số. (Chúng ta luôn muốn tạo ra các hàm mới—toán học chính là tạo ra những thứ mới từ những cái đã có). Thay vì việc trừ hay cộng, chúng ta có thể *nhân* quãng đường bởi 2. Hình 1.1.6 cho thấy $2f(t)$. Và thay vì dịch chuyển thời gian, chúng ta có thể *tăng tốc* thời gian. Hàm số trở thành $f(2t)$. Kết quả thu được là tiến trình xảy ra nhanh gấp đôi (và chỉ với một nửa thời gian so với ban đầu). Trên máy tính cầm tay, những thay đổi này tương ứng với chức năng "***thu phóng***[3]"—trên trục f hay trục t. Chúng ta sẽ sớm quay lại với chức năng "phóng to và thu nhỏ."



HÌNH 1.1.6. Gấp đôi quãng đường hoặc tăng tốc độ gấp đôi sẽ gấp đôi hệ số góc.

[3]Nd: Chức năng thu phóng (tiếng Anh: zoom)

BÀI TẬP 1.1

Mỗi mục của cuốn sách đều chứa các các câu hỏi điền từ vào chỗ trống. Chúng cho phép bạn tự rút ra các điểm chính trong mục đó—đây là một cách học chủ động hơn so với việc đọc một tóm tắt. Đây có lẽ là cách tốt nhất để ghi nhớ những ý tưởng quan trọng.

Bắt đầu từ $f(0) = 0$ tại vận tốc hằng v, hàm quãng đường là $f(t) =$ ___ a ___. Khi $f(t) = 55t$, vận tốc là $v =$ ___ b ___. Khi $f(t) = 55t + 1000$, vận tốc vẫn là ___ c ___ và giá trị tại thời điểm khởi hành là $f(0) =$ ___ d ___. Trong từng trường hợp, v là ___ e ___ của đồ thị của f. Khi ___ f ___ là âm, đồ thị của ___ g ___ đi xuống. Trong trường hợp đó, diện tích phía dưới đồ thị v được xem là ___ h ___.

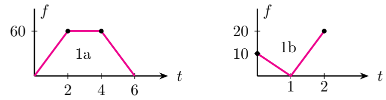
Chuyển động đi tới từ $f(0) = 0$ tới $f(2) = 10$ có $v =$ ___ i ___. Sau đó chuyển động đi lui tới $f(4) = 0$ có $v =$ ___ j ___. Hàm quãng đường là $f(t) = 5t$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 2$ và sau đó là $f(t) =$ ___ k ___ (chứ không phải $-5t$). Các hệ số góc là ___ l ___ và ___ m ___. Quãng đường $f(3) =$ ___ n ___. Diện tích phía dưới v-đồ thị cho đến thời điểm 1.5 là ___ o ___. Miền xác định của f là khoảng thời gian ___ p ___, và vùng giá trị là khoảng quãng đường ___ q ___. Vùng giá trị của $v(t)$ chỉ là ___ r ___.

Giá trị của $f(t) = 3t + 1$ tại $t = 2$ là $f(2) =$ ___ s ___. Giá trị 19 bằng $f($___ t ___$)$. Hiệu $f(4) - f(1) =$ ___ u ___. Đó là số gia trong quãng đường, trong khi $4 - 1$ là số gia trong ___ v ___. Tỷ số của những số gia này bằng ___ w ___, mà chính là ___ x ___ của đồ thị. Công thức đối với $f(t) + 2$ là $3t + 3$ trong khi $f(t + 2) =$ ___ y ___. Các hàm số này có cùng ___ z ___ với f : đồ thị của $f(t) + 2$ được dịch chuyển ___ A ___ và $f(t + 2)$ được dịch chuyển ___ B ___. Công thức đối với $f(5t)$ là ___ C ___. Công thức đối với $5f(t)$ là ___ D ___. Hệ số góc này đã nhảy từ 3 lên ___ E ___.

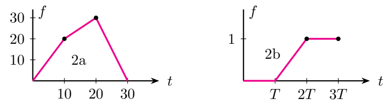
Tập hợp gồm các đầu vào cho một hàm số chính là ___ F ___ của nó. Tập hợp gồm các đầu ra chính là ___ G ___ của nó. Các hàm số $f(t) = 7 + 3(t - 2)$ và $f(t) = vt + C$ là ___ H ___. Các đồ thị của chúng là ___ I ___ với các hệ số góc bằng ___ J ___ và ___ K ___. Chúng cùng là một hàm số, nếu $v =$ ___ L ___ và $C =$ ___ M ___.

Vẽ đồ thị vận tốc ứng với từng đồ thị quãng đường.

1.1.1.



1.1.2.



1.1.3. Viết ra các công thức ba phần đối với các vận tốc $v(t)$ trong Bài tập 2, bắt đầu từ $v(t) = 2$ đối với $0 < t < 10$.

1.1.4. Quãng đường trong 1b bắt đầu với $f(t) = 10 - 10t$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 1$. Đưa ra một công thức cho quãng đường thứ hai.

1.1.5. Trong khoảng giữa của đồ thị 2a, tìm $f(15)$, $f(12)$ và $f(t)$.

1.1.6. Trong đồ thị 2b, tìm $f(1.4T)$. Nếu $T = 3$, hỏi $f(4)$?

1.1.7. Tìm ***tốc độ trung bình*** giữa $t = 0$ và $t = 5$ trong đồ thị 1a. Hỏi tốc độ tại $t = 5$?

1.1.8. Hỏi tốc độ trung bình giữa $t = 0$ và $t = 2$ trong đồ thị 1b? Tốc độ trung bình bằng 0 giữa $t = \dfrac{1}{2}$ và $t =$ ________.

1.1.9 (được khuyến nghị). Một chiếc xe hơi chạy tại tốc độ $v = 20$ đâm thẳng vào một bức tường gạch tại quãng đường $f = 4$. Đưa ra các công thức hai phần đối với $v(t)$ và $f(t)$ (trước và sau), và vẽ các đồ thị.

1.1.10. Vẽ các đồ thị hợp lý của $v(t)$ và $f(t)$ khi

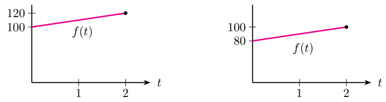
(a) người tài xế lùi xe, dừng lại để sang số, rồi đi nhanh về phía trước;

(b) người tài xế đi chậm xuống 55 vì thấy có xe cảnh sát.

(c) trong một pha sang số sống, chiếc xe nhảy chồm về phía trước;

(d) người tài xế đợi đèn giao thông chuyển sang màu xanh.

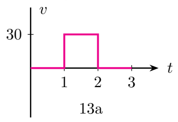
1.1.11. Tài khoản ngân hàng của bạn kiếm lãi đơn trên số dư đầu kỳ $f(0)$. Hỏi lãi suất trên mỗi năm?



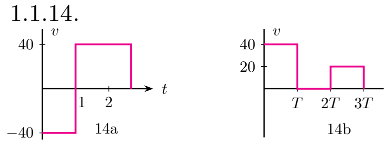
1.1.12. Dân số của trái đất đang tăng dần tại $v = 100$ triệu một năm, bắt đầu từ $f = 5.2$ tỷ vào năm 1990. Vẽ đồ thị $f(t)$ và tìm $f(2000)$.

Vẽ đồ thị quãng đường ứng với từng đồ thị vận tốc. Bắt đầu từ $f = 0$ tại $t = 0$ và đánh dấu quãng đường.

1.1.13.



1.1.14.



1.1.15. Viết ra các công thức đối với $v(t)$ trong Bài tập 14, bắt đầu với $v = -40$ với $0 < t < 1$. Tìm các vận tốc trung bình với $t = 2.5$ và $t = 3T$.

1.1.16. Đưa ra các công thức 3-phần đối với các diện tích $f(t)$ phía dưới $v(t)$ trong 13.

1.1.17. Quãng đường trong 14a bắt đầu với $f(t) = -40t$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 1$. Tìm $f(t)$ trong phần khác, mà đi qua $f = 0$ tại $t = 2$.

1.1.18. Vẽ các đồ thị vận tốc và quãng đường nếu $v(t) = 8$ đối với $0 < t < 2$, $f(t) = 20 + t$ đối với $2 \leqslant t \leqslant 3$.

1.1.19. Vẽ các đồ thị thô của $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt{x-4}$ và $y = \sqrt{x} - 4$. Chúng là các "nửa parabola" với hệ số góc vô hạn tại điểm khởi hành.

1.1.20. Hỏi điểm hòa vốn nếu x cuốn niên giám có chi phí sản xuất là $\$1200 + 30x$ và doanh thu là $40x$? Hệ số góc của đường chi phí là ________ (chi phí để có thêm một cuốn). Nếu nó đi phía trên ________, bạn không thể hòa vốn.

1.1.21. Hỏi miền xác định và vùng giá trị của các hàm quãng đường trong 14a và 14b—mọi giá trị của t và $f(t)$ nếu $f(0) = 0$?

1.1.22. Hỏi vùng giá trị của $v(t)$ trong 14b? Tại sao $t = 1$ không nằm trong miền xác định của $v(t)$ trong 14a?

Các bài tập 1.1.23-1.1.28 liên quan đến các hàm tuyến tính $f(t) = vt + C$. Tìm các hằng số v và C.

1.1.23. Hàm tuyến tính nào có $f(0) = 3$ và $f(2) = -11$?

1.1.24. Tìm *hai* hàm tuyến tính có miền xác định là $0 \leqslant t \leqslant 2$ và có vùng giá trị là $1 \leqslant f(t) \leqslant 9$.

1.1.25. Tìm hàm tuyến tính với $f(1) = 4$ và hệ số góc 6.

1.1.26. Hàm số nào có $f(t+1) = f(t) + 2$?

1.1.27. Tìm hàm tuyến tính với $f(t+2) = f(t) + 6$ và $f(1) = 10$.

1.1.28. Tìm hàm số $f = vt$ có $f(2t) = 4f(t)$. Chứng tỏ rằng mỗi $f = \frac{1}{2}at^2$ đều có tính chất này. Để đi gấp ________ lần về đường đi trong trong thời gian gấp đôi, bạn phải gia tốc.

1.1.29. Vẽ đồ thị của $f(t) = |5 - 2t|$ (giá trị tuyệt đối) đối với $|t| \leqslant 2$ và tìm các hệ số góc và vùng giá trị của nó.

1.1.30. Vẽ đồ thị của $f(t) = 4 - t - |4 - t|$ đối với $2 \leqslant t \leqslant 5$ và tìm các hệ số góc và vùng giá trị của nó.

1.1.31. Giả sử $v = 8$ cho đến thời điểm T, và sau đó $v = -2$. Bắt đầu từ 0, khi nào f trở lại bằng 0? Đưa ra các công thức đối với $v(t)$ và $f(t)$.

1.1.32. Giả sử $v = 3$ cho đến thời điểm $T = 4$. Vận tốc mới nào sẽ kéo theo $f(7) = 30$ nếu $f(0) = 0$? Đưa ra các công thức đối với $v(t)$ và $f(t)$.

1.1.33. Hàm số $F(C)$ nào chuyển đổi nhiệt độ Celsius C sang nhiệt độ Fahrenheit F? Hệ số góc là ________, cũng chính là số độ Fahrenheit tương đương với 1°C.

1.1.34. Hàm số $C(F)$ nào chuyển đổi độ Fahrenheit sang độ Celsius (hay độ bách phân), và hỏi hệ số góc của nó?

1.1.35. Hàm số nào chuyển đổi khối lượng w được đo theo gam (gram) sang khối lượng $f(w)$ được đo theo kilogam? Giải thích hệ số góc của $f(w)$.

1.1.36. (Báo tháng 3 năm 1989) Mười giờ sau tai nạn, nồng độ cồn được ghi nhận là .061. Nồng độ cồn trong máu được thải ra là .015 trên một giờ. Hỏi nồng độ cồn tại thời điểm xảy ra tai nạn? Bao lâu sau đó nồng độ cồn giảm xuống còn .04 (mức tối đa được quy định bởi Lực lượng Bảo vệ Bờ biển Hoa Kỳ[4])? Giới hạn thông thường cho tài xế là .10 phần trăm.

Các điểm nào giữa $t = 0$ và $t = 5$ có thể thuộc miền xác định của $f(t)$? Với miền xác định này, tìm vùng giá trị trong 1.1.37-1.1.42.

1.1.37. $f(t) = \sqrt{t-1}$

1.1.38. $f(t) = 1/\sqrt{t-1}$

1.1.39. $f(t) = |t-4|$ (giá trị tuyệt đối)

1.1.40. $f(t) = 1/(t-4)^2$

1.1.41. $f(t) = 2^t$

1.1.42. $f(t) = 2^{-t}$

1.1.43. (a) Vẽ đồ thị hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t + 3$ với miền xác định $0 \leqslant t \leqslant 2$. Sau đó đưa ra một công thức và đồ thị của

(b) $f(t) + 1$ (d) $4f(t)$
(c) $f(t+1)$ (e) $f(4t)$.

1.1.44. (a) Vẽ đồ thị của

$$U(t) = \text{hàm bước nhảy} = \{0, 1\}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{đối với } t < 0, \\ 1 & \text{đối với } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Sau đó vẽ

(b) $U(t) + 2$ (d) $3U(t)$
(c) $U(t+2)$ (e) $U(3t)$.

1.1.45. (a) Vẽ đồ thị của $f(t) = t + 1$ đối với $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Tìm miền xác định, vùng giá trị, hệ số góc, và công thức đối với

(b) $2f(t)$ (d) $-f(t)$
(c) $f(t-3)$ (e) $f(-t)$.

1.1.46. Nếu $f(t) = t - 1$, hỏi $2f(3t)$ và $f(1-t)$ và $f(t-1)$?

1.1.47. Trong ví dụ đi tới-đi lui, tìm $f(\frac{1}{2}T)$ và $f(\frac{3}{2}T)$. Xác minh rằng cákhoảng cáchc giá trị này trùng với các diện tích "phía dưới" v-đồ thị trong Hình 1.1.4.

1.1.48. Tìm các công thức đối với các đầu ra $f_1(t)$ và $f_2(t)$ mà được sinh ra từ đầu vào t:

$$\begin{aligned} &(1)\ \text{bên trong} = \text{đầu vào} * 3 \\ &\qquad \text{đầu ra} = \text{bên trong} + 3 \\ &(2)\ \text{bên trong} \leftarrow \text{đầu vào} + 6 \\ &\qquad\qquad \leftarrow \text{bên trong} * 3 \end{aligned}$$

LƯU Ý. BASIC và FORTRAN (và bản thân giải tích) dùng = thay vì ←. Nhưng ký hiệu ← hay : = về mặt nào đó lại tốt hơn. Lệnh $t \leftarrow t + 6$ sinh ra một t mới bằng với t cũ cộng sáu. Phương trình $t = t + 6$ không nhằm mục đích này.

1.1.49. Máy tính của bạn có thể cộng và nhân. Bắt đầu với số 1 và đầu vào được gọi t, hãy liệt kê các lệnh để kéo theo những đầu ra sau:

$$f_1(t) = t^2 + 1$$
$$f_2(t) = f_1(f_1(t))$$
$$f_3(t) = f_1(t+1).$$

1.1.50. Trong năm mươi từ hoặc ít hơn, hãy giải thích một *hàm số* là gì.

Những câu hỏi sau cùng này mặc dù khó nhưng chúng ta vẫn có thể thực hiện được.

1.1.51. Nếu $f(t) = 3t - 1$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 2$, đưa ra công thức (với miền xác định) và tìm hệ số góc của sáu hàm số sau:

(a) $f(t+2)$ (d) $f(2t)$
(b) $f(t) + 2$ (e) $f(-t)$
(c) $2f(t)$ (f) $f(f(t))$.

1.1.52. Đối với $f(t) = vt + C$, tìm các công thức và hệ số góc của

(a) $3f(t) + 1$ (d) $f(-t)$
(b) $f(3t+1)$ (e) $f(t) - f(0)$
(c) $2f(4t)$ (f) $f(f(t))$.

1.1.53 (bài tập khó nhất). Hàm số đi tới-đi lui là $f(t) = 2t$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 3$, $f(t) = 12 - 2t$ đối với $3 \leqslant t \leqslant 6$. Vẽ đồ thị của $f(f(t))$ và tìm công thức bốn phần của nó. Trước tiên, thử $t = 1.5$ và 3.

1.1.54. (a) Tại sao chữ cái **X** không phải là đồ thị của một hàm số?

(b) Những chữ cái in hoa nào là các đồ thị của các hàm số?

(c) Vẽ các đồ thị của hệ số góc của chúng.

[4]Nd: Lực lượng Bảo vệ Bờ biển Hoa Kỳ (tiếng Anh: United States Coast Guard, viết tắt: USCG).

1.2. Giải tích Dưới Góc nhìn Không có Giới hạn

Trang kế tiếp sẽ tiết lộ một trong những ý tưởng chính nằm đằng sau giải tích. Chúng ta chỉ thảo luận về các con số—các hàm số và các hệ số góc được đề cập sau. Các con số mà chúng ta nói đến không có gì đặc biệt cả, chúng có thể là bất kỳ con số nào. Điều quan trọng là các sai phân[5] của chúng.

Giả sử các số là $f =$	0		2		6		7		4		9
Các sai phân của chúng là $v =$		2		4		1		-3		5	

Các sai phân này được in ở giữa hai số liên tiếp nhau, để cho thấy $2 - 0 = 2$ và $6 - 2 = 4$ và $7 - 6 = 1$. Chú ý $4 - 7$ đưa ra một đáp án âm -3. Các số trong f có thể tăng hoặc giảm, các sai phân trong v có thể là dương hoặc âm. Ý tưởng nằm đằng sau giải tích xuất hiện khi bạn ***cộng các sai phân này lại với nhau***:

$$\mathbf{2 + 4 + 1 - 3 + 5 = 9}$$

Tổng của các sai phân này là 9. Đây là số nằm sau cùng trong hàng thứ nhất (theo f). Liệu điều này chỉ là ngẫu nhiên, hay là đương nhiên? Nếu chúng ta dừng tại bước $2 + 4 + 1$, chúng ta nhận được 7 trong f. Chúng ta hãy cùng nhau kiểm tra dự đoán của bạn trong ví dụ thứ hai:

Giả sử các số là $f =$	1		3		7		8		5		10
Các sai phân của chúng là $v =$		2		4		1		-3		5	

Các f được tăng thêm một đơn vị. ***Các sai phân không thay đổi***. Tổng của các sai phân vẫn là 9. Nhưng số hạng sau cùng của f bây giờ là 10. Dự đoán luôn nhận được số hạng cuối cùng của f là không đúng.

Số đầu tiên của f bây giờ là 1. Đáp án 9 (tổng của các sai phân) là $10 - 1$, f ***cuối trừ f đầu***. Điều gì sẽ xảy ra khi chúng ta thay đổi các f nằm ở giữa?

Giả sử các số là $f =$	1		5		12		7		10
Các sai phân của chúng là $v =$		4		7		-5		3	

Các sai phân này cộng lại với nhau $4 + 7 - 5 + 3 = 9$. Đáp án vẫn là $10 - 1$. Dù chúng ta chọn f nào hay bao nhiêu f đi nữa, tổng của các sai phân vẫn bị kiểm soát bơi f đầu và f cuối. Nếu điều này là đương nhiên, phải có một lý do rõ ràng cho việc *tại sao các các số nằm ở giữa bị triệt tiêu.*

Tổng của các sai phân là $(5-1)+(12-5)+(7-12)+(10-7) = 10 - 1$**.**

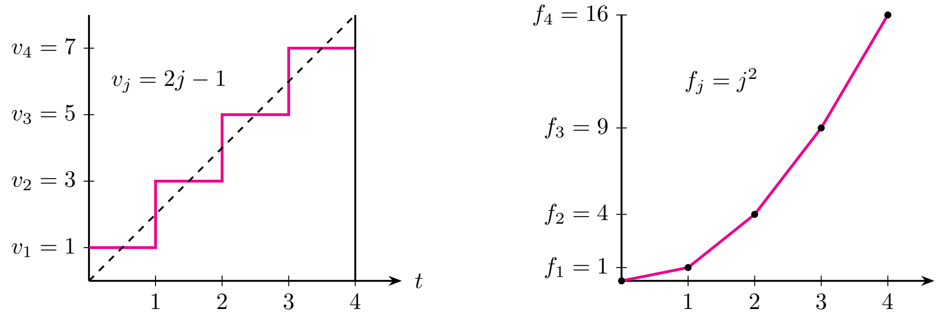
Các số 5 bị triệt tiêu, các số 12 bị triệt tiêu, các số 7 bị triệt tiêu. Chỉ có $10 - 1$ là không bị triệt tiêu. Đây là điểm then chốt cho giải tích!

PHÁT BIỂU 1.2.1. Các sai phân của các f cộng lại với nhau thành $(f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}})$.

VÍ DỤ 1.2.1.

Các số tăng tuyến tính: $f =$	2		3		4		5		6		7
Các sai phân của chúng là hằng: $v =$		1		1		1		1		1	

[5]Nd: Sai phân là sự chênh lệch giá trị của hàm số tại hai điểm gần nhau. Có hai loại sai phân đó là sai phân tiến và sai phân lùi. Sai phân tiến của $f(x)$ là $f(x+1) - f(x)$, và sai phân lùi của $f(x)$ là $f(x) - f(x-1)$.



HÌNH 1.2.1. Tăng tuyến tính trong $v = 1, 3, 5, 7$. Các số chính phương trong các quảng đường $f = 0, 1, 4, 9, 16$.

Tổng của các sai phân chắc chắn bằng 5. Điều này thoả mãn $7 - 2 = f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$. Các số trong v gợi cho chúng ta về vận tốc hằng. Các số trong f gợi cho chúng ta về một đường thẳng $f = vt + C$. Ví dụ này có $v = 1$ và các f bắt đầu tại 2. Đường thẳng sẽ được sinh ra từ $f = t + 2$.

VÍ DỤ 1.2.2.

Các số chính phương: $f =$	0		1		4		9		16
Các sai phân tăng tuyến tính: $v =$		1		3		5		7	

$1 + 3 + 5 + 7$ bằng với $4^2 = 16$. Việc j số lẻ đầu tiên cộng lại với nhau luôn bằng với j^2 thực sự là một kết quả đẹp. Các v là các số lẻ, các f là các số chính phương.

LƯU Ý. Chữ cái j đôi khi còn giúp chúng ta biết được chúng ta đang nhìn vào số nào trong f. Đối với ví dụ này, số thứ không là $f_0 = 0$ và số thứ j là j^2. Đây là một phần của đại số, đưa ra một công thức đối với các f thay vì cho một liệt kê gồm các số. Chúng ta cũng có thể dùng j để biết chúng ta đang nhìn vào sai phân nào. Số đầu tiên của v chính là số lẻ thứ nhất $v_1 = 1$.

Với ký hiệu này, sai phân thứ j ***là*** $v_j = f_j - f_{j-1}$. Bạn sẽ sớm quen dần với các chỉ số dưới j và $j - 1$. Điều quan trọng là tổng của các v bằng $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$. Chúng ta bây giờ liên hệ các v với các hệ số góc, và các f với các diện tích.

Hình 1.2.1 cho thấy một cách tự nhiên để vẽ đồ thị Ví dụ 2, với các số lẻ trong v và các số chính phương trong f. Chú ý điểm khác biệt quan trọng giữa v-đồ thị và f-đồ thị. Đồ thị của f là "***tuyến tính từng khúc***". Chúng ta đặt các số trong f vào hệ toạ độ và nối chúng lại bởi các đoạn thẳng. Đồ thị của v là "***hằng từng khúc***". Chúng ta vẽ các sai phân dưới dạng hằng trên từng đoạn. Điều này gợi cho chúng ta về các đồ thị quãng đường-vận tốc, khi quãng đường $f(t)$ là một đường thẳng và vận tốc $v(t)$ là một đường nằm ngang.

Bây giờ chúng ta liên hệ với các hệ số góc:

$$\text{Hệ số góc của đồ thị } f \text{ là } \frac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} = \frac{\text{số gia trong } f}{\text{số gia trong } t} = v.$$

Trên từng khúc, số gia trong t (phương ngang) là 1. Số gia trong f (phương đứng) là sai phân mà chúng ta đang gọi là v. Tỷ số là hệ số góc $v/1$ hay chỉ là v. Hệ số góc bị thay đổi đột ngột tại các điểm ngắt quãng $t = 1, 2, 3, \ldots$. Tại các điểm đặc biệt này, hệ số góc của f-đồ thị không được xác định—chúng ta đã kết nối các v bởi đường thẳng đứng nhưng điều này vẫn gây tranh cãi. ***Ý tưởng quan trọng ở đây đó là giữa các điểm ngắt quãng này, hệ số góc của*** $f(t)$ ***chính là*** $v(t)$.

Bây giờ chúng ta liên hệ với các diện tích:

Diện tích toàn phần phía dưới v-đồ thị là $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$.

Diện tích này, diện tích phía dưới bậc thang trong Hình 1.2.1, gồm các hình chữ nhật. Đáy của mỗi hình chữ nhật là 1. Các chiều cao của các hình chữ nhật là v. Vậy các diện tích cũng bằng các v, và diện tích toàn phần là tổng của các v. Diện tích này là $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$.

Không chỉ như vậy, chúng ta cũng có thể bắt đầu tại bất kỳ thời điểm nào, và kết thúc tại thời điểm tuỳ ý sáu đó—không nhất thiết tại các thời điểm đặc biệt $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Giả sử chúng ta dừng lại tại $t = 3.5$. Chỉ một nửa diện tích của hình chữ nhật sau cùng được tính. Diện tích toàn phần là $1 + 3 + 5 + \frac{1}{2}(7) = 12.5$. Điều này vẫn đáp ứng $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}} = 12.5 - 0$. Tại thời điểm kết thúc $t = 3.5$ mới này, chúng ta mới chỉ đi thêm được nửa nhịp sau cùng trong f-đồ thị. Nửa đường giữa 9 và 16 là 12.5.

Phát biểu 1.2.2. ***Các v là các hệ số góc của $f(t)$. Diện tích phía dưới đồ thị v là $f(t_{\text{cuối}}) - f(t_{\text{đầu}})$.***

Điều này chính là Định lý Cơ sở của Giải tích. Nhưng chúng ta mới chỉ dùng tới đại số (không xét tới các đồ thị đường cong và không có các phép tính liên quan đến các giới hạn). Trong giai đoạn này, định lý này bị hạn chế cho các $f(t)$ tuyến tính từng khúc và các $v(t)$ hằng từng khúc. Những hạn chế này sẽ được khắc phục trong Chương 5.

Chú ý rằng một chứng minh về việc $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ được đề xuất bởi Hình 1.2.1a. Hình tam giác phía dưới đường nét đứt có cùng diện tích với bốn hình chữ nhật phía dưới bậc thang. Diện tích của hình tam giác là $\frac{1}{2}\cdot$ đáy $\cdot$ chiều cao $= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8$, mà chính là số chính phương 4^2. Khi có j hình chữ nhật thay vì 4, chúng ta nhận được $\frac{1}{2}\cdot j\cdot 2j = j^2$ đối với diện tích.

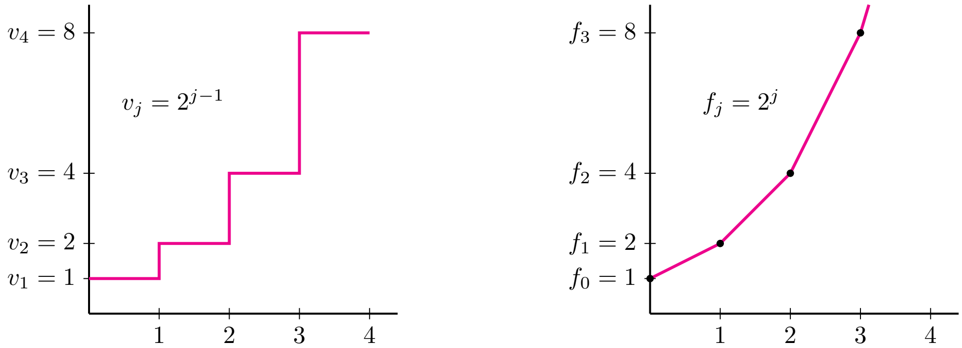
Các ví dụ tiếp theo thể hiện các xu hướng khác, trong đó f và v tăng theo theo hàm mũ hoặc dao động quanh không. Tôi hy vọng bạn thích chúng, nhưng tôi không nghĩ bạn buộc phải học chúng. Chúng giống như các hàm đặc biệt 2^t và $\sin t$ và $\cos t$—ngoại trừ việc chúng là các hàm bậc thang. Bạn sẽ có được một ấn tượng nhất định về các hàm số quan trọng của giải tích nhưng chỉ cần sử dụng tới đại số. ***Chúng ta cần tới giải tích đối với vận tốc thay đổi đều, khi đồ thị của f là một đường cong.***

Ví dụ cuối cùng sẽ là về thuế *thu nhập*—đồ thị trong ví dụ này chính là một hàm bậc thang. Sau đó Mục 1.3 sẽ giới thiệu hệ số góc của một đường cong. Bước mấu chốt đối với với các đường cong là bước làm việc với các ***giới hạn***. Chính việc này sẽ đưa chúng ta từ đại số sang giải tích.

VẬN TỐC MŨ VÀ QUÃNG ĐƯỜNG

Bắt đầu với các số $f = 1, 2, 4, 8, 16$. Chúng là các "luỹ thừa của 2." Chúng bắt đầu với luỹ thừa không, đó là $2^0 = 1$. H*àm mũ này bắt đầu tại* 1 *chứ không phải là tại* 0. Sau j bước, có j thừa số 2, và f_i bằng 2^j. H***ãy thử phân tích điểm khác biệt giữa $2j$ và j^2 và 2^j***. Số $2j$ tăng tuyến tính, số j^2 tăng theo hàm bình phương, số 2^j tăng theo hàm mũ. Tại $j = 10$, các số này lần lượt là 20 và 100 và 1024. Hàm mũ 2^j nhanh chóng trở nên hơn các hàm số khác.

Các sai phân của $f = 1, 2, 4, 6, 8, 10$ đúng là $v = 1, 2, 4, 8$. Các hàm số f và v có chung một dự liệu. ***Khi các f là các luỹ thừa của 2, v cũng là các luỹ thừa của*** 2. Công thức $v_j = 2^{j-1}$ là hơi khác so với $f_j = 2^j$, bởi vì số v thứ nhất được đánh số v_1. (Khi đó $v_1 = 2^0 = 1$. Luỹ thừa thứ không của mỗi số là 1, ngoại trừ



HÌNH 1.2.2. Vận tốc và quãng đường tăng theo hàm mũ (các lũy thừa của 2).

0^0 là không có nghĩa). Hai đồ thị trong Hình 1.2.2 dùng cùng số liệu nhưng chúng trông có vẻ khác nhau, bởi vì f là tuyến tính từng khúc và v là hằng từng khúc.

Giải tích xuất hiện ở chỗ nào? Nó làm việc với đường cong trơn $f(t) = 2^t$. Sự tăng trưởng theo hàm luỹ thừa này là rất quan trọng đối với dân số và tiền trong ngân hàng và nợ quốc gia. Bạn có thể nhận thấy sự tăng trường này bởi phép thử sau: $v(t)$ ***tỷ lệ thuận với*** $f(t)$.

GHI CHÚ. Hàm số 2^t là phức tạp hơn hàm số t^2. Đối với $f = t^2$, hệ số góc là $v = 2t$. Nó tỷ lệ thuận với t, nhưng không tỷ lệ thuận với t^2. Đối với $f = 2^t$ hệ số góc là $c2^t$, và chúng ta sẽ biết được $c = 0.693\cdots$ trong Chương 6 (Số c là logarithm tự nhiên của 2.) Bài tập 1.2.37 ước tính c bằng một máy tính cầm tay—điều quan trọng là nó là hằng.

VẬN TỐC DAO ĐỘNG VÀ QUÃNG ĐƯỜNG

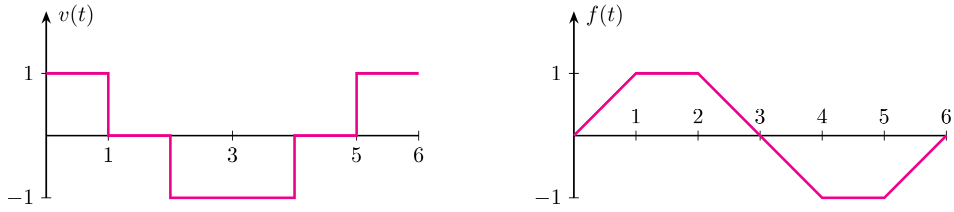
Chúng ta đã thấy một chuyển động đi tới-đi lui, vận tốc V và sau đó là $-V$. Đây là loại dao động đơn giản nhất. Đồ thị của f là đường thẳng đi lên và đi xuống. Hình 1.2.3 cho thấy một dao động khác cũng trở về không, nhưng có đường đi phức tạp hơn nhiều.

Các số trong f bây giờ là $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0$. Vì $f_6 = 0$, chuyển động này đưa chúng ta quay về vị trí xuất phát. Toàn bộ dao động có thể được lặp lại.

Các sai phân trong v là $1, 0, -1, -1, 0, 1$. Tổng của chúng bằng không, mà thoả mãn $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$. Dao động này tương tự với dao động trong f (và cũng có thể được lặp lại), nhưng được dịch chuyển theo thời gian.

Đồ thị của f có hình dáng (khá) giống một ***đường sine***. Đồ thị của v có hình dáng (rất) giống một ***đường cosine***. Các dạng sóng trong tự nhiên là các đường trơn, trong khi các dạng này đã bị "số hoá"—giống như việc thời gian trên một chiếc đồng hồ điện tử chạy một cách rời rạc thay vì liên tục. Đây chính là việc thay đổi từ analog sang kỹ thuật số, và điều này đã mang lại cuộc cách mạng máy tính. Cuộc cách mạng tương tự cũng xuất hiện trong lĩnh vực mày chơi đĩa CD. Các tín hiệu kỹ thuật số (tắt hoặc mở, 0 hoặc 1) dường như luôn luôn chiến thắng trong cuộc chiến với các tín hiệu analog.

Các đồ thị của các hàm số v và f từng khúc một lần nữa bắt đầu tại $t = 6$. Các đường sine và cosine thông thường lặp lại tại $t = 2\pi$. Một chuyển động cứ lặp đi lặp lại được gọi là ***tuần hoàn***—ở đây "chu kỳ" là 6 hoặc 2π. (Với t theo độ, chu kỳ là 360—đủ một vòng quay). Chu kỳ trở thành 2π khi góc được đo theo ***radian***.



HÌNH 1.2.3. Các hàm "cosine" hằng từng khác và "sine" tuyến tính từng khúc." Cả hai đều lặp đi lặp lại.

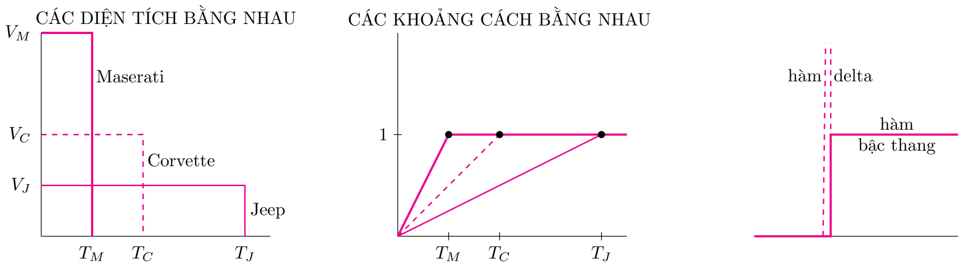
CÚ TĂNG TỐC ĐỘT NGỘT

Ví dụ tiếp theo là về một chiếc xe hơi được lái chạy nhanh trong một thời gian ngắn. Tốc độ là V cho đến khi quãng đường đạt đến $f = 1$, khi đó chiếc xe đột ngột dừng lại. Đồ thị của f là đường thẳng đi lên với hệ số góc V, và sau đó đi ngang với hệ số góc không.

$$v(t) = \begin{cases} V & \text{cho đến khi } t = T \\ 0 & \text{sau khi } t = T \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} Vt & \text{cho đến khi } t = T \\ 1 & \text{sau khi } t = T \end{cases}$$

Đây là một ví dụ khác của "khái niệm hàm số." Chú ý thời gian tổng quát t và thời điểm dừng cụ thể T. Quãng đường là $f(t)$. Miền xác định của f (các đầu vào) bao gồm tất cả thời điểm $t \geqslant 0$. Miền giá trị của f (các đầu ra) bao gồm tất cả các quãng đường $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Hình 1.2.4 cho phép chúng ta so sánh ba chiếc xe hơi—một chiếc Jeep và một chiếc Corvette và một chiếc Maserati. Chúng có các tốc độ khác nhau, nhưng đều đạt đến $f = 1$. Vậy các diện tích phía dưới các v-đồ thị đều bằng 1. Các hình chữ nhật có các chiều cao V và đáy $T = 1/V$.



HÌNH 1.2.4. Cú tăng tốc đột ngột với $V_M T_n = V_C T_C = V_J T_J = 1$. Hàm bước ngày có hệ số góc vô hạn.

GHI CHÚ TÙY CHỌN. Việc nghĩ đến tốc độ càng nhanh, hệ số góc càng lớn, độ dốc càng dốc là hết sức tự nhiên. Đồ thị của f đạt tới 1 trong thời gian ngắn hơn. Trường hợp kỳ dị đó là trường hợp của một ***hàm bậc thang***, khi đồ thị của f đi thẳng lên trên. Đây là hàm bậc thang đơn vị $U(t)$, có giá trị bằng không cho đến khi $t = 0$ và ngay lập tức nhảy sang giá trị $U = 1$ đối với $t > 0$.

Hỏi hệ số góc của hàm bậc thang này? Luôn bằng 0 ngoại trừ tại điểm nhảy. Tại thời điểm $t = 0$ này, hệ số góc là *vô hạn*. Cái vận tốc $v(t)$ mà chúng ta trải nghiệm là không tầm thường chút nào—thay cho sự nhạt nhẽo của một vận tốc thông thường, chúng ta lại cảm nhận được một xung lực làm cho chiếc xe hơi nhảy chồm lên. Đồ thị là một điểm nhọn tại điểm đơn $t = 0$, và nó thường được ký hiệu bởi δ—nên hệ số góc của hàm bậc thang được gọi là "***hàm delta***." Diện tích phía dưới điểm nhọn vô hạn là 1.

Bạn hoàn toàn không cần quan tấm đến lý thuyết của các hàm delta! Giải tích chỉ quan tâm đến các đường cong chứ không quan tâm đến các bước nhảy.

Ví dụ cuối cùng của chúng ta là một ứng dụng trong thực tế của các hệ số góc và tỷ suất—để giải thích "cách hệ thống thuế hoạt động." Đặc biệt lưu ý sự khác nhau giữa tỷ suất, khung thuế và thuế toàn phần. Tỷ suất là v, khung thuế được áp lên x, và thuế toàn phần là f.

VÍ DỤ 1.2.3. Thuế thu nhập là tuyến tính từng khúc. Các hệ số góc là các tỷ suất thuế $.15, .28, .31$.
Giả sử bạn đang độc thận với thu nhập có thể bị tính thuế là x dollars (Mẫu khai 1040, hàng 37—sau khi khấu trừ tất cả). Sau đây là các hướng dẫn vào năm 1991 từ Sở Thuế Vụ Hoa Kỳ[6]:

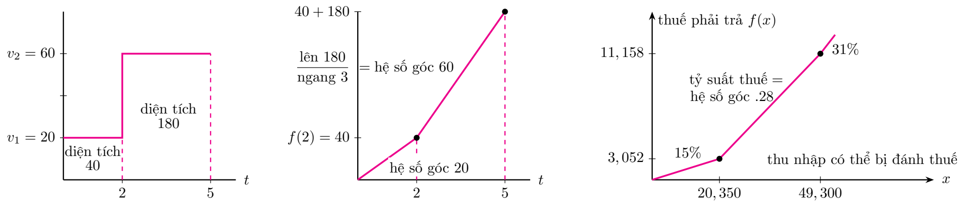
Nếu x không vượt quá \$20, 350, thuế là 15% của x.

Nếu $\$20,350 \leqslant x \leqslant \$49,300$, thuế là \$3052.50+28% của phần vượt quá \$20, 350.

Nếu x vượt quá \$49.300, thuế là \$11, 158.50 + 31% của phần vượt quá \$49, 300.

Khung thuế thứ nhất là $0 \leqslant x \leqslant \$20,350$. (IRS không bao giờ dùng ký hiệu $\leqslant$, nhưng tôi nghĩ việc dùng dấu này ở đây không sao cả. Chúng ta hiểu dầu này có ý nghĩa gì.) Khung thuế thứ hai là $\$20,350 \leqslant x \leqslant \$49,300$. Khung thuế cuối cùng $x \geqslant \$49,300$ nộp thế ở tỷ suất cao nhất 31%. Nhưng chỉ thu nhập nằm bên trong khung thuế đỏ phải nộp thuế tại tỷ suất đó.

Hình 1.2.5 cho thấy tỷ suất thuế, khung thuế và thuế phải chịu. Đây không phải là các ***tỷ suất trung bình***, mà là các ***tỷ suất biên***. Thuế toàn phần bị chia bởi tổng thu nhập sẽ là tỷ suất trung bình. Các tỷ suất biên .28 hay .31 đưa ra thuế cho từng dollar của thu nhập *vượt* khung thuế đứng trước—nó là hệ số góc tại điểm x. Thuế giống như *diện tích* hoặc *khoảng cách*—nó được cộng dồn. ***Tỷ suất thuế*** giống như ***hệ số góc*** hoặc ***vận tốc***—nó phụ thuộc vào việc chúng ta đang ở khung thuế nào. Báo chí thường không nói rõ việc này.



HÌNH 1.2.5. Tỷ suất thuế là v, tổng thuế là f. Các khung thuế kết thúc tại các điểm ngắt đoạn.

CÂU HỎI. *Phương trình đường thẳng nào biểu diễn khung thuế cao nhất?*

CÂU TRẢ LỜI. Khung thuế cao nhất bắt đầu tại \$49, 300 khi thuế là $f(x) = \$11,158.50$. Hệ số góc của đường thẳng là tỷ suất thuế .31. Cần phải nhấn mạnh là khi biết một điểm trên đường thẳng và hệ số góc, chúng ta biết được phương trình đường thẳng.

PHÁT BIỂU 1.2.3. Đối với x thuộc khung thuế cao nhất, thuế là $f(x) = 11,158.50 + .31(x - \$49,300)$. Đây là thuế trên \$49, 300 cộng thuế thêm trên phần thu nhập vượt quá \$49, 300.

[6]Nd: Sở Thuế Vụ Hoa Kỳ (tiếng Anh: Internal Revenue Service, viết tắt: IRS)

Mục 2.3 trình bày "phương trình điểm-hệ số góc" này đối với bất kỳ đường thẳng nào. Ở mục này, bạn chỉ gặp được một ví dụ cụ thể. Số $11,158.50 đến từ đâu? Nó là thuế tại *điểm kết thúc* của khung thuế ở giữa, nên nó là thuế tại *điểm khởi đầu* của khung thuế cao nhất.

Hình 1.2.5 cũng cho thấy một ví dụ quãng đường-vận tốc. Quãng đường tại $t = 2$ là $f(t) = 40$ dặm. Sau thời điểm đó, vận tốc là 60 dặm trên mỗi giờ. Vậy, đường thẳng với hệ số góc 60 trên f-đồ thị có phương trình

$f(t) =$ khoảng cách bắt đầu $+$ khoảng cách thêm $= 40 + 60(t - 2)$.

Điểm xuất phát là $(2; 40)$. Tốc độ mới 60 nhân thời gian thêm $t - 2$. Phương trình điểm-hệ số góc có nghĩa ***Chúng ta bây giờ ta ôn tập lại mục này, với các bình luận sau***.

Ý TƯỞNG CHÍNH. Bắt đầu tại bất kỳ số nào trong f. Các sai phân của chúng xuất hiện trong v. Khi đó tổng của các sai phân này là $f_{\text{cuối}} - f_{\text{đầu}}$.

KÝ HIỆU CHỈ SỐ DƯỚI. Các số là $f_0, f_1, \ldots$ và sai phân thứ nhất là $v_1 = f_0 - f_1$. Một số điển hình là f_j và sai phân thứ j là $v_j = f_j - f_{j-1}$. Khi các sai phân này được cộng với nhau, tất cả các f nằm ở giữa (chẳng hạn f_1) đều triệt tiêu:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_j = (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_j - f_0) = f_j - f_0.$$

VÍ DỤ. $f_j = j$ hoặc j^2 hoặc 2^j. Khi đó $v_j = 1$ (hằng số) hay $2j - 1$ (số lẻ) hay 2^{j-1}.

CÁC HÀM SỐ. Kết nối các f thành tuyến tính từng khúc. Khi đó hệ số góc v là hằng từng khúc. Diện tích phía dưới v-đồ thị v từ bất kỳ $t_{\text{đầu}}$ nào đến bất kỳ $t_{\text{cuối}}$ nào đều là $f(t_{\text{cuối}}) - f(t_{\text{đầu}})$.

CÁC ĐƠN VỊ. Quãng đường được đo theo dặm và vận tốc được đo theo dặm trên giờ. Thuế được tính theo dollars và tỷ suất thuế được tính theo (dollars phải trả)/(dollars kiếm được). tỷ suất thuế là một số thập phân như .28 và không có đơn vị.

BÀI TẬP 1.2

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Bắt đầu với các số $f = 1, 6, 2, 5$. Các sai phân của chúng là $v =$ __a__. Tổng của các sai phân này là __b__. Nó bằng $f_{\text{cuối}}$ trừ __c__. Các số 6 và 2 không ảnh hưởng gì đến kết quả này, bởi vì trong $(6-1)+(2-6)+(5-2)$, các số 6 và 2 __d__. Hệ số góc của đường thẳng giữa $f(0) = 1$ và $f(1) = 6$ là __e__. Phương trình của đường thẳng này là $f(t) =$ __f__.

Với các quãng đường 1, 5, 25 tại các thời điểm đơn vị, các vận tốc là __g__. Chúng là __h__ của f-đồ thị. Hệ số góc của đồ thị thuế là __i__ thuế . Nếu $f(t)$ là bưu phí đối với t ounce hoặc t gram, hệ số góc là __j__ trên __k__. Đối với các quãng đường 0, 1, 4, 9, các vận tốc là __l__. Tổng của j số lẻ đầu tiên là $f_j =$ __m__. Khi đó f_{10} là __n__ và vận tốc v_{10} là __o__.

Hàm sine tuyến tính từng khúc có các hệ số góc __p__. Chúng tạo thành một hàm số cosine __q__ từng khúc. Cả hai hàm số này đều có __r__ bằng với 6, điều này có nghĩa rằng $f(t + 6) =$ __s__ đối với mỗi t. Các vận tốc $v = 1, 2, 4, 8, \ldots$ có $v_j =$ __t__. Trong trường hợp đó, $f_0 = 1$ và $f_j =$ __u__. Tổng của 1, 2, 4, 8, 16 là __v__. sai phân $2^j - 2^{j-1}$ bằng __w__. Sau pha tăng tốc đột ngột V đến thời điểm T, quãng đường là __x__. Nếu $f(T) = 1$ và V tăng, pha tăng tốc đột ngột này chỉ kéo dài đến $T =$ __y__. Khi V tiến tới vô cùng, $f(t)$ tiến tới một hàm __z__. Các vận tốc tiến tới một hàm __A__, mà bị tập trung tại $t = 0$ nhưng có diện tích __B__ phía dưới đồ thị của nó. Hệ số góc của một hàm bậc thang là __C__.

Các bài tập 1.2.1-1.2.4 là về các số f và các sai phân v.

1.2.1. Từ các số $f = 0, 2, 7, 10$, hãy tìm các sai phân v và tổng của ba v này. Viết ra một f khác mà cũng dẫn tới cùng các v này. Đối với $f = 0, 3, 12, 10$, tổng của các v vẫn là ________.

1.2.2. Bắt đầu từ $f = 1, 3, 2, 4$, vẽ f-đồ thị (các khúc tuyến tính) và v-đồ thị. Các diện tích nào "phía dưới" v-đồ thị mà cộng lại với nhau thành $4 - 1$? Nếu số tiếp theo trong f là 11, hỏi diện tích phía dưới v tiếp theo?

1.2.3. Từ $v = 1, 2, 1, 0, -1$, tìm các f bắt đầu tại $f_0 = 3$. Vẽ đồ thị v và f. Giá trị cực đại của f xảy ra khi $v =$ ________. Cực đại của f ở đâu khi $v = 1, 2, 1, -1$?

1.2.4. Đối với $f = 1, b, c, 7$, tìm các sai phân v_1, v_2, v_3 và cộng chúng lại với nhau. Thực hiện tương tự đối với $f = a, b, c, 7$. Thực hiện tương tự đối với $f = a, b, c, d$.

Các bài tập 1.2.5-1.2.11 là về các hàm tuyến tính và các hệ số góc hằng.

1.2.5. Viết ra các hệ số góc của các hàm tuyến tính sau:
(a) $f(t) = 1.1t$
(b) $f(t) = 1 - 2t$
(c) $f(t) = 4 + 5(t - 6)$.
Tính $f(6)$ và $f(7)$ đối với từng hàm số và xác nhận rằng $f(7)-f(6)$ bằng hệ số góc.

1.2.6. Nếu $f(t) = 5 + 3(t - 1)$ và $g(t) = 1.5+2.5(t-1)$, hỏi $h(t) = f(t)-g(t)$? Tìm các hệ số góc của f, g, và h.

1.2.7. Giả sử $v(t) = 2$ đối với $t < 5$ và $v(t) = 3$ đối với $t > 5$.
(a) Nếu $f(0) = 0$, tìm công thức hai phần đối với $f(t)$.
(b) Kiểm tra rằng $f(10)$ bằng diện tích phía dưới đồ thị của $v(t)$ (hai hình chữ nhật) cho đến khi $t = 10$.

1.2.8. Giả sử $v(t) = 10$ đối với $t < \dfrac{1}{10}$, $v(t) = 0$ đối với $t > \dfrac{1}{10}$. Bắt đầu từ $f(0) = 1$, tìm $f(t)$ trong hai khúc.

1.2.9. Giả sử $g(t) = 2t+1$ và $f(t) = 4t$. Tìm $g(3)$ và $f(g(3))$ và $f(g(t))$. Hệ số góc của $f(g(t))$ được liên hệ với các hệ số góc của f và g như thế nào?

1.2.10. Cũng đối với các hàm số ở bài tập trên, hỏi $f(3)$ và $g(f(3))$ và $g(f(t))$? Khi t được thay đổi thành $4t$, quãng đường tăng nhanh ________ lần khi vận tốc được nhân bởi ________.

1.2.11. Tính $f(6)$ và $f(8)$ đối với các hàm số trong Bài tập 5,. Xác nhận rằng các hệ số góc v đúng bằng với

$$\begin{aligned}\text{hệ số góc} &= \frac{f(8) - f(6)}{8 - 6}\\ &= \frac{\text{độ biến thiên của } f}{\text{độ biến thiên của } t}\end{aligned}$$

.

Các bài tập 1.2.12-1.2.18 dựa trên Ví dụ 1.2.3 về thuế thu nhập.

1.2.12. Hỏi thuế thu nhập trên $x = \$10,000$ và $x = \$30,000$ và $x = \$50,000$?

1.2.13. Hỏi phương trình đối với thuế thu nhập $f(x)$ trong khung thuế thứ hai $\$20,350 \leqslant x \leqslant \$49,300$? Số $11,158.50$ liên quan với các số khác trong các hướng dẫn thuế như thế nào?

1.2.14. Viết ra hàm thuế $F(x)$ đối với một cặp vợ chồng nếu IRS xem họ như hai người đóng thuế riêng với thu nhập chịu thuế $x/2$ đối với từng người. (Trên thực tế, điều này là không đúng).

1.2.15. Trong khung thuế 15%, với 5% thuế tiểu bang[7] được xem là một khoản khấu trừ, tỷ suất kết hợp không phải là 20% mà là ________. Hãy nghĩ về thuế bạn phải nộp trên mỗi 100\$ bạn có thêm được.

1.2.16. Một hàm tuyến tính từng khúc là ***liên tục*** khi $f(t)$ tại điểm kết thúc của từng khoảng bằng $f(t)$ tại điểm bắt đầu của khoảng tiếp theo. Nếu $f(t) = 5t$ cho đến khi $t = 1$ và $v(t) = 2$ đối với $t > 1$, xác định f ngoài $t = 1$ để nó là (a) liên tục (b) gián đoạn. (c) Xác định một hàm thuế $f(x)$ với các lãi suất .15 và .28 sao cho bạn sẽ phải nộp thuế nhiều hơn một dollar trên mỗi dollar bạn kiếm thêm khi vượt quá điểm hòa nhau.

1.2.17. Sai phân giữa một *tín dụng* thuế và một *khấu trừ* là sai phân giữa $f(x) - c$ và $f(x - d)$. Điều kiện nào hấp dẫn hơn, một khoản tín dụng thuế có $c = \$1000$ hay một chiết khấu có $d = \$1000$, và tại sao? Phác họa các đồ thị thuế khi $f(x) = .15x$.

[7]Nd: Hầu hết người nộp thuế ở Hoa Kỳ phải nộp thêm thuế thu nhập cấp tiểu bang bên cạnh thuế thu nhập cấp liên bang. Hai khoản thuế là riêng biệt với nhau.

1.2.18. Tỷ suất thuế trung bình trên thu nhập có khả năng bị đánh thuế x là $a(x) = f(x)/x$. Đây là hệ số góc giữa $(0, 0)$ và $(x, f(x))$. Phác họa một đồ thị của $a(x)$. tỷ suất trung bình a nằm dưới tỷ suất biên v bởi vì ________.

Các bài tập 1.2.19-1.2.30 liên quan đến các số $f_0, f_1, f_2, \ldots$ và các sai phân $v_j = f_j - f_{j-1}$ của chúng. Chúng giúp chúng ta làm quen với các chỉ số dưới $0, \ldots, j$.

1.2.19. Tìm các vận tốc v_1, v_2, v_3 và các công thức đối với v_j và f_j:

(a) $f = 1, 3, 5, 7, \ldots$

(b) $f = 0, 1, 0, 1, \ldots$

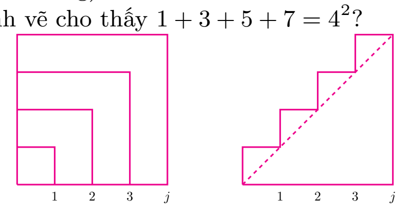
(c) $f = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$

1.2.20. Tìm f_1, f_2, f_3 và công thức đối với f_j với $f_0 = 0$:

(a) $v = 1, 2, 4, 8, \ldots$

(b) $f = -1, 1, -1, 1, \ldots$

1.2.21. Diện tích của các hình vuông lồng nhau này là $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$. Hỏi diện tích của các dải hình chữ L (sai phân giữa các hình vuông) là bao nhiêu? Làm thế nào mà hình vẽ cho thấy $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$?



1.2.22. Từ diện tích phía dưới cầu thang (bởi các hình chữ nhật và sau đó bởi các hình tam giác), chứng tỏ rằng toàn bộ số nguyên j đầu tiên từ 1 đến j cộng lại với nhau thành $\frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j$. Tìm $1 + 2 + \cdots + 100$.

1.2.23. Nếu $v = 1, 3, 5, \ldots$, khi đó $f_j = j^2$. Nếu $v = 1, 1, 1, \ldots$, khi đó $f_j =$. Cộng những f_j này lại với nhau để tìm tổng của $2, 4, 6, \ldots, 2j$. Chia bởi 2 để tìm tổng của $1, 2, 3, \ldots, j$. (So sánh với Bài tập 22).

1.2.24. ***Đúng*** (với lý do) ***hay sai*** (với phản ví dụ).

(a) Nếu các f là tăng, các v cũng là tăng.

(b) Nếu các v là tăng, các f cũng là tăng.

(c) Nếu các f là tuần hoàn, các v cũng cũng là tuần hoàn.

(d) Nếu các v là tuần hoàn, các f cũng là tuần hoàn.

1.2.25. Cho $f(t) = t^2$, hãy tính $f(99)$ và $f(101)$. Giữa các thời điểm này, mức tăng của f bị chia bởi mức tăng của t là bao nhiêu?

1.2.26. Cho $f(t) = t^2 + t$, hãy tính $f(99)$ và $f(101)$. Giữa các thời điểm này, mức tăng của f bị chia bởi mức tăng của t là bao nhiêu?

1.2.27. Nếu $f_j = j^2 + j + 1$, tìm một công thức đối với v_j.

1.2.28. Giả sử các v tăng thêm 4 tại mỗi bước. Chứng tỏ bằng ví dụ và sau đó bằng đại số rằng "sai phân cấp hai" $f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$ bằng 4.

1.2.29. Giả sử $f_0 = 0$ và các v là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$. Đối với j nào $f_j = 5$?

1.2.30. Chứng tỏ rằng $a_j = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$ luôn bằng $v_{j+1} - v_j$. Nếu v là vận tốc, a ký hiệu cho ________.

Các bài tập 1.2.31-1.2.34 liên quan đến các f và các v tuần hoàn (như $\sin t$ và $\cos t$).

1.2.31. Đối với sine rời rạc $f = 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0$, tìm các sai phân cấp hai $a_1 = f_2 - 2f_1 + f_0$ và $a_2 = f_3 - 2f_2 + f_1$ và a_3. So sánh a_j với f_j.

1.2.32. Nếu dãy số $v_1, v_2, \ldots$ có chu kỳ 6 và $w_1, w_2, \ldots$ có chu kỳ 10, hỏi chu kỳ của $v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots$?

1.2.33. Vẽ đồ thị của $f(t)$ bắt đầu từ $f_0 = 0$ khi $v = 1, -1, -1, 1$. Nếu v có chu kỳ 4, tìm $f(12), f(13), f(100.1)$.

1.2.34. Vẽ đồ thị của $f(t)$ từ $f_0 = 0$ đến $f_4 = 4$ khi $v = 1, 2, 1, 0$. Nếu v có chu kỳ 4, tìm $f(12)$ và $f(14)$ và $f(16)$. *Tại sao f không có chu kỳ 4?*

Các bài tập 1.2.35-1.2.42 là về các v và f có dạng hàm mũ.

1.2.35. Tìm các v đối với $f = 1, 3, 9, 27$. Dự đoán v_4 và v_j. Đại số đưa ra $3^j - 3^{j-1} = (3-1)3^{j-1}$.

1.2.36. Tìm $1 + 2 + 4 + \cdots + 32$ và ngoài ra tìm $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{32}$.

1.2.37. Ước lượng hệ số góc của $f(t) = 2^t$ tại $t = 0$. Dùng một máy tính cầm tay để tính (mức tăng của f)/(mức tăng của t) khi t là nhỏ:

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{2-1}{1} \text{ và } \frac{2^{.1}-1}{.1}$$
$$\text{và } \frac{2^{.01}-1}{.01} \text{ và } \frac{2^{.001}-1}{.001}.$$

1.2.38. Giả sử $f_0 = 1$ và $v_j = 2f_{j-1}$. Tìm f_4.

1.2.39. (a) Từ $f = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, tìm v_1, v_2, v_3 và dự đoán v_j.
(b) Kiểm tra $f_3 - f_0 = v_1 + v_2 + v_3$ và $f_j - f_{j-1} = v_j$.

1.2.40. Giả sử $v_j = r^j$. Chứng tỏ rằng $f_j = \frac{r^{j+1}-1}{r-1}$ bắt đầu từ $f_0 = 1$ và có $f_j - f_{j-1} = v_j$. (Khi đó nó đúng là $f_j = 1 + r + \cdots + r^j$ = tổng của một chuỗi hình học.[8])

1.2.41. Từ $f_j = (-1)^j$, tính v_j. Hỏi $v_1 + v_2 + \cdots + v_j$?

1.2.42. Ước lượng hệ số góc của $f(t) = e^t$ tại $t = 0$. Dùng một máy tính cầm tay đã có sẵn giá trị của e trong bộ nhớ (hoặc không lấy $e = 2.78$) để tính

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{e-1}{1}$$
$$\text{và } \frac{e^{.1}-1}{.1} \text{ và } \frac{e^{.01}-1}{.01}.$$

Các bài tập 1.2.43-1.2.47 là về $U(t)$ = hàm bậc thang từ 0 tới 1 tại $t = 0$.

1.2.43. Vẽ đồ thị bốn hàm số $U(t-1)$ và $U(t) - 2$, và $U(3t)$ và $4U(t)$. Sau đó vẽ đồ thị của $f(t) = 4U(3t-1) - 2$.

1.2.44. Vẽ đồ thị sóng vuông $U(t) - U(t-1)$. Nếu đây là vận tốc $v(t)$, vẽ đồ thị quãng đường $f(t)$. Nếu đây là quãng đường $f(t)$, vẽ đồ thị vận tốc.

1.2.45. Hai pha tăng tốc đột ngột kéo theo cùng quãng đường $f = 10$:

$v =$ ________ đến $t = .001$

$v = V$ đến $t =$ ________.

Khi $V \to \infty$, giới hạn của các $f(t)$ là ________.

1.2.46. Vẽ hàm bậc thang $U(t)+U(t-1)+U(t-2)$. Hệ số góc của nó là tổng của ba hàm số ________.

1.2.47. Những chữ cái in hoa nào như **L** là các đồ thị của các hàm số khi chúng ta có các bước nhảy? Hệ số góc của **L** là trừ một hàm delta. Vẽ đồ thị các hệ số góc của những chữ cái khác.

1.2.48. Viết chương trình con FINDV mà có đầu vào là một dãy $f_0, f_1, \ldots, f_N$ và đầu ra là $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Xuất ra đồ thị của các đầu ra nếu có thể. Kiểm tra trên $f_j = 2j$ và j^2 và 2^j.

1.2.49. Viết chương trình con FINDF mà có đầu vào là dãy $v_0, \ldots, v_N$ và f_0, và đầu ra là $f_0, f_1, \ldots, f_N$. Giá trị mặc định của f_0 là không. Xuất ra đồ thị của các đầu ra nếu có thể. Kiểm tra trên $v_j = j$.

1.2.50. Nếu FINDV được cho cho đầu ra của FINDF, dãy nhận được trả lại là gì? Nếu áp dụng FINDF cho đầu ra của FINDV, dãy được trả lại là gì? Theo dõi f_0.

1.2.51. Sắp xếp $2j$ và j^2 và $\sqrt{j}$ theo thứ tự tăng dần
(a) khi j lớn: $j = 9$
(b) khi j nhỏ: $j = \frac{1}{9}$.

1.2.52. Độ tuổi trung bình của gia đình của bạn từ năm 1970 là một hàm tuyến tính từng khúc $A(t)$. Nó là liên tục hay nó có bước nhảy? Hỏi hệ số góc của nó? Vẽ đồ thị của nó trong khả năng của mình.

1.3. Vận tốc tại một Thời điểm

Chúng ta bây giờ đến với những bài toán cần đến sự phát minh của giải tích để giải quyết. Có hai câu hỏi theo hai hướng đối lập nhau, và tôi hy vọng bạn có thể hiểu được chúng.

(1) Nếu vận tốc đang thay đổi, *làm thế nào để bạn tính được quãng đường đã đi được*?
(2) Nếu đồ thị của $f(t)$ không phải là đường thẳng, *hệ số góc của nó là bao nhiêu*?

[8]Nd: Chuỗi hình học còn được gọi là cấp số nhân.

Tìm khoảng cách từ vận tốc, tìm vận tốc từ khoảng cách. Mục tiêu của chúng ta là thực hiện cả hai việc này—nhưng sẽ không thực hiện chúng trong cùng một mục. Giải tích có thể là một khóa học tuyệt vời, nhưng nó không phải là ma thuật. Bước đầu tiên là cho vận tốc thay đổi theo cách ổn định nhất.

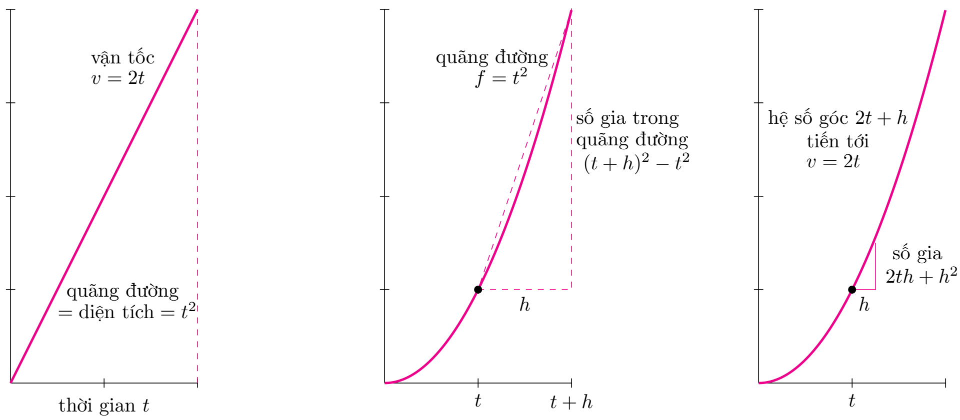
CÂU HỎI 1. ***Giả sử vận tốc tại từng thời điểm*** t ***là*** $v(t) = 2t$. Tìm $f(t)$.

Với $v(t) = 2t$, một nhà vật lý sẽ nói rằng gia tốc là hằng (nó luôn bằng 2). Người lái xe nhấn ga, chiếc xe tăng tốc, và tốc độ kệ tăng đều. Quãng đường cũng tăng lên—càng lúc càng tăng nhanh. Nếu chúng ta đo t theo giây và v theo feet trên giây , quãng đường đi được tính bằng feet. Sau 10 giây, tốc độ là 20 feet trên giây. Sau 44 giây, tốc độ là 88 feet/ giây (tức là 60 dặm/giờ). Chúng ta thấy rõ sự gia tốc, ***nhưng chiếc xe đã đi được bao xa***?

CÂU HỎI 2. ***Quãng đường đã đi được theo thời gian*** t ***là*** $f(t) = t^2$. Tìm vận tốc $v(t)$.

Đồ thị của $f(t) = t^2$ nằm bên phải của Hình 1.3.1. Nó là một *parabola*. Đường cong bắt đầu tại không tại không hay hành trình kế bắt đầu tại không; điều này nghĩa là chiếc xe là hoàn toàn mới. Tại $t = 5$, quãng đường là $f = 25$. Tại $t = 10$, f đạt đến 100.

Vận tốc bằng quãng đường bị chia bởi thời gian. Nhưng sẽ như thế nào khi tốc độ thay đổi? Chia $f = 100$ bởi $t = 10$, chúng ta thu được $v = 10$—*vận tốc trung bình* trên 10 giây đầu tiên. Chia $f = 121$ bởi $t = 11$, chúng ta thu được tốc độ trung bình trên 11 giây đầu tiên. Nhưng làm thế nào để chúng ta tìm thấy ***vận tốc tức thời***—giá trị được hiển thị tốc độ kế tại đúng thời điểm $t = 10$?



HÌNH 1.3.1. Vận tốc $v = 2t$ là một hàm tuyến tính. Quãng đường $f = t^2$ là một hàm bậc hai.

Tôi hy vọng bạn nhìn ra vấn đề ở đây. Khi chiếc xe chạy càng nhanh, đồ thị của t^2 càng dốc—bởi vì chiếc xe đi được quãng đường dài hơn trong từng giây. Vận tốc trung bình giữa $t = 10$ và $t = 11$ là một xấp xỉ tốt—nhưng nó cũng chỉ là một xấp xỉ mà thôi—tới tốc độ tại thời điểm $t = 10$. Các vận tốc trung bình được dễ dàng tìm thấy như sau:

quãng đường tại t là $f(10) = 10^2 = 100$ quảng đường tại t là $f(11) = 11^2 = 121$

$$\textit{vận tốc trung bình là } \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{121 - 100}{1} = 21$$

.

Chiếc xe đi được 21 feet trong 1 giây đó. Vận tốc trung bình của nó là 21 feet/giây. Bởi vì tốc độ tăng dần, nên vận tốc tại lúc bắt đầu của giây đó là nhỏ hơn 21.

Về mặt hình học, vận tốc trung bình là gì? Nó là hệ số góc, nhưng không phải là hệ số góc của đường cong. ***Vận tốc trung bình là hệ số góc của một đường thẳng***. Đường thẳng đi qua hai điểm trên đường cong trong Hình 1.3.1. Khi chúng ta tính vận tốc trung bình, chúng ta đã mặc dịnh vận tốc là hằng—nên chúng ta quay trở lại trường hợp dễ nhất. Nó chỉ đòi hỏi một phép chia đoạn đường bởi thời gian:

$$\text{(1.3.1)} \qquad \text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{độ biến thiên của } f}{\text{độ biến thiên của } v}.$$

GIẢI TÍCH VÀ LUẬT GIAO THÔNG. Bạn đi vào một xa lộ lúc 1:00 giờ. Nếu bạn rời khỏi xa lộ sau khi đã đi được 150 dặm lúc 3:00 giờ, tốc độ trung bình của bạn là 75 dặm trên mỗi giờ. Tôi không chắc cảnh sát có thể phạt bạn không.[9] Bạn có thể hỏi ngược lại thẩm phán rằng, "Tôi đã đi tại tốc độ 75 lúc nào?" Người cảnh sát sẽ phải thừa nhận rằng họ không biết bạn đã đi tại tốc độ 75 lúc nào—nhưng họ có cảm giác chắc chắn rằng bạn có đi tại tốc độ 75.[10]

Chúng ta quay lại vấn đề chính—tính $v(10)$ tại thời điểm $t = 10$. Vận tốc trung bình vượt trên giây tiếp theo là 21. Chúng ta cũng có thể tìm thấy vận tốc trung bình trên nửa giây giữa $t = 10.0$ và $t = 10.5$. Chia số gia trong quãng đường bởi số gia trong thời gian:

$$\frac{f(10.5) - f(10)}{10.5 - 10.0} = \frac{10.5^2 - 10.0^2}{.5} = \frac{110.25 - 100}{.5} = 20.5.$$

Vận tốc trung bình 20.5 đó là gần với tốc độ tại $t = 10$. Nhưng nó vẫn chưa phải là tốc độ ngay chính tại thời điểm đó.

Chúng ta có một cách để tìm $v(10)$ đó là rút ngắn khoảng thời gian. Đây là cơ sở cho Chương 2 và là nền tảng của giải tích vi phân. ***Tìm hệ số góc của các điểm càng lúc càng gần hơn trên đường cong***. "Giới hạn" là hệ số góc tại một điểm đơn.

Đại số đưa ra vận tốc trung bình giữa $t = 10$ và bất kỳ thời điểm $t = 10 + h$ sau đó. Quãng đường đi tăng từ 10^2 tới $(10 + h)^2$. Số gia trong thời gian là h. Vậy, chia số gia trong quãng đường bởi số gia trong thời gian:

$$\text{(1.3.2)} \qquad v_{\text{trung bình}} = \frac{(10 + h)^2 - 10^2}{h} = \frac{100 + 20h + h^2 - 100}{h} = 20 + h$$

Công thức này phù hợp với các tính toán trước đây của chúng ta. Khoảng từ $t = 10$ tới $t = 11$ có $h = 1$ và vận tốc trung bình là $20 + h = 21$. Khi bước thời gian là $h = \frac{1}{2}$, vận tốc trung bình là $20 + \frac{1}{2} = 20.5$. Trên một phần triệu của một giây, vận tốc trung bình sẽ là 20 cộng $1/1,000,000$—mà rất gần với 20.

CHÚ Ý. ***Vận tốc tại*** $t = 10$ ***là*** $v = 20$. *Đó là hệ số góc của đường cong*. Nó đồng thuận với v-đồ thị ở bên trái Hình 1.3.1, mà cũng có $v(10) = 20$.

Chúng ta bây giờ chứng tỏ rằng hai đồ thị này luôn khớp với nhau. Nếu $f(t) = t^2$, khi đó$v(t) = 2t$. Bạn đang nhìn thấy phép tính chính của giải tích, và chúng ta

[9]Nd: Đa số các Xa lộ Liên tiểu bang ở Hoa Kỳ có giới hạn tốc độ là 55 tới 65 mph (dặm trên mỗi giờ) đối với vùng đô thị và 40 tới 70 mph đối với vùn nông thôn.

[10]Đây là lần chạm trán đầu tiên của chúng ta với "Định lý Giá trị Trung bình", định lý này thường không được xem trọng. Bạn sẽ hết đường chối cãi nếu thẩm phán có thể chứng minh được định lý này. Một số các v-đồ thị và f-đồ thị sẽ làm đảo lộn tình huống này (một hàm Delta cũng được).

có thể phát biểu nó bằng lời trước khi đưa ra các phương trình. Tính quãng đường tại thời điểm $t+h$, *trừ* quãng đường tại thời điểm t, và chia bởi h. Điều đó đưa ra vận tốc trung bình:

(1.3.3)

$$v_{\text{trung bình}} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 = t^2}{h} = \frac{t^2+2th+h^2-t^2}{h} = 2t+h.$$

Công thức này phù hợp với tính toán trước đó, trong đó t là 10. Vận tốc trung bình là $20+h$. Bây giờ vận tốc trung bình là $2t+h$. Nó phụ thuộc vào bước thời gian h, bởi vì vận tốc đang thay đổi. Nhưng chúng ta có thể thấy điều sẽ xảy ra *khi h tiến tới không*. Vận tốc trung bình càng lúc càng gần với giá trị của $2t$ được hiển thị trên tốc độ kế, tại đúng thời điểm mà đồng hồ hiển thị t.

Phát biểu 1.3.1. Khi h tiến tới 0, vận tốc trung bình $2t+h$ tiến tới $v(t)=2t$.

Lưu ý. Phép tính trong (3) cho thấy cách giải tích cần tới đại số. Nếu chúng ta muốn toàn bộ v-đồ thị, chúng ta phải cho thời gian là một "*biến số*." Nó được ký hiệu chữ cái t. Cácsố là đủ để biển diễn vận tốc tại thời điểm cụ thể $t=10$ và bước thời gian cụ thể $h=1$—nhưng đại số còn vượt trội hơn. Vận tốc trung bình tại bất kỳ thời điểm t nào và bất kỳ $t+h$ nào đều là $2t+h$. Đừng ngần ngại đưa các số cụ thể thay cho các chữ cái để kiểm tra xem phần đại số của chúng ta có đúng không.

Ngoài ra, chúng ta cũng có bước liên quan đến kiến thức nằm ngoài bộ môn đại số! Giải tích đòi hỏi ***giới hạn của vận tốc trung bình***. Khi h tiến tới không, các điểm trên đồ thị càng gần nhau hơn. "Vận tốc trung bình trên một khoảng" trở thành "vận tốc tại một thời điểm". Lý thuyết tổng quát của giới hạn thực sự không đơn giản, nhưng chúng ta không cần đến nó ở đây. (Nó cũng không thực sự khó.) *Rất dễ xác định giá trị phép lấy giới hạn* trong ví dụ này. Vận tốc trung bình $2t+h$ tiến tới $2t$ khi $h \to 0$.

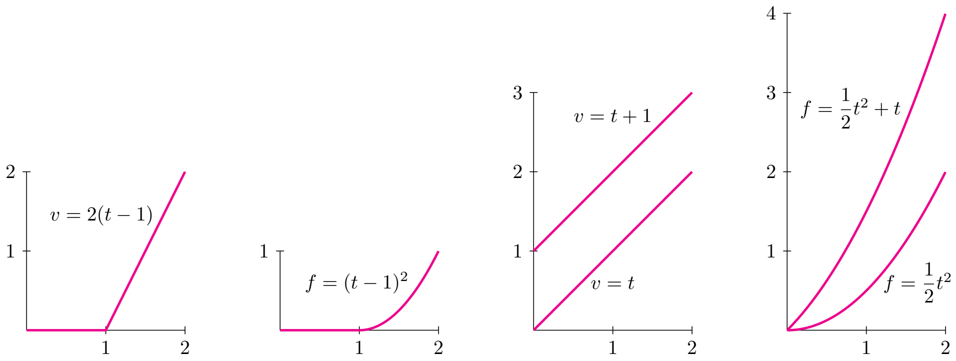
Chúng ta còn cần làm gì nữa trong mục này? Mặc dù chúng ta đã trả lời được Câu hỏi 2—để tìm vận tốc quãng đường. Nhưng chúng ta vẫn chưa trả lời Câu hỏi 1. Nếu $v(t)=2t$ tăng tuyến tính với thời gian t, quảng đường sẽ thế nào? Đây chính là bài toán ngược (nó là phép lấy tích phân).

Định lý Cơ sở của Giải tích nói rằng chúng ta không cần thực hiện điều gì mới cả. ***Nếu hệ số góc của $f(t)$ kéo theo $v(t)$, diện tích phía dưới v-đồ thị ngược lại kéo theo f-đồ thị***. Các giá trị $f=t^2$ được hiển thị trên hành trình kế sinh ra các giá trị $v=2t$ được hiển thị trên tốc độ kế. Theo Định lý Cơ sở này, diện tích phía dưới $2t$ sẽ là t^2. Nhưng chúng ta chưa chứng minh bất kỳ định lý cơ sở nào, nên tốt nhất là dùng cách tính an toàn—cách tính diện tích một cách thực sự.

May mắn thay, nó là diện tích của một tam giác. Đáy của tam giác là t và chiều cao là $v=2t$. Diện tích này đồng thuận với $f(t)$:

$$\text{diện tích} = \frac{1}{2}(\text{đáy})(\text{chiều cao}) = \frac{1}{2}(t)(2t) = t^2. \tag{1.3.4}$$

Ví dụ 1.3.1. Các đồ thị được *dịch chuyển theo thời gian*. Chiếc xe hơi không khởi hành cho đến khi $t=1$. Vì vậy, $v=0$ và $f=0$ trong suốt thời gian đó. Sau khi xe khởi hành, chúng ta có $v=2(t-1)$ và $f=(t-1)^2$. Chúng ta thấy được việc thời gian bị trễ 1 đơn vị thời gian được đưa vào các công thức như thế nào. Hình 1.3.2 cho thấy việc này ảnh hưởng đến các đồ thị như thế nào.



HÌNH 1.3.2. Vận tộc và quãng đường bị trễ. Các cặp $v = at + b$ và $f = \frac{1}{2}at^2 + bt$.

VÍ DỤ 1.3.2. Gia tốc thay đổi từ 2 sang một hằng số a khác. Vận tốc thay đổi từ $v = 2t$ sang $v = at$. ***Gia tốc là hệ số góc của đường cong vận tốc***! Quãng đường cũng tỷ lệ thuận với a, nhưng chú ý thừa số $\frac{1}{2}$:

$$\text{Gia tốc } a \Leftrightarrow \text{Vận tốc } v = at \Leftrightarrow \text{Quãng đường } f = \frac{1}{2}at^2.$$

Nếu $a = 1$, $v = t$ và $f = \frac{1}{2}t^2$. Đây là một trong những cặp công thức nổi tiếng nhất trong giải tích. Nếu a bằng hằng số gia tốc trọng trường g, $v = gt$ là vận tốc của một vật đang rơi tự do. Tốc độ không phụ thuộc vào khối lượng (đã được kiểm chứng bởi Galileo tại Tháp nghiêng Pisa). Có thể ông thấy sự thay đổi của quãng đường $f = \frac{1}{2}gt^2$ là dễ nhận thấy hơn sự thay đổi của tốc độ $v = gt$. Dù sao đi nữa, đây là cặp công thức nổi tiếng nhất trong vật lý.

VÍ DỤ 1.3.3. Giả sử $f(t) = 3t + t^2$. Vận tốc trung bình từ t tới $t + h$ là:

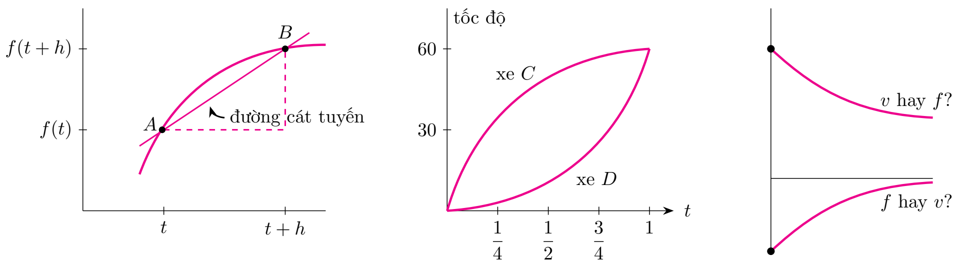
$$v_{\text{trung bình}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{3(t+h) + (t+h)^2 - 3t - t^2}{h}$$

Số gia trong quãng đường có thêm $3h$ (được sinh ra từ $3(t + h)$ trừ $3t$). Vận tốc chứa thêm 3 (được sinh ra từ $3h$ bị chia bởi h). Khi $3t$ được cộng vào quãng đường, 3 được cộng vào vận tốc. Nếu Galileo ném một vật thay vì thả rơi nó, vận tốc ban đầu v_0 sẽ cộng $v_0 t$ vào phương trình quãng đường.

CÁC HÀM SỐ VỚI BIẾN THỜI GIAN

Ý tưởng về hệ số góc là không khó đối với một đường thẳng. Chúng ta chia số gia trong f bởi số gia trong t. Trong Chương 2, chúng ta chia độ biện của f bởi độ biến thên của x. Kinh nghiệm cho thấy rằng phần khó nhất đó là nhìn thấy được những gì sẽ xảy ra với hệ số góc khi đường thẳng di chuyển.

Hình 1.3.3a cho thấy đường thẳng đi qua các điểm A và B trên đường cong. Đây là một "*cát tuyến*." Hệ số góc của nó là một vận tốc *trung bình*. Điều mà giải tích thực hiện đó chính là mang điểm B đi trên đường cong đó về phía A.



HÌNH 1.3.3. Hệ số góc cả đường thẳng, hệ số góc của đường cong. Hai đồ thị vận tốc. *Đồ thị nào là của hàm số nào*?

CÂU HỎI 3. *Điều gì sẽ xảy ra với "số gia trong f"—chiều cao của B phía trên A?*

CÂU TRẢ LỜI. Số gia trong f giảm về không. Vậy, số gia trong t cũng giảm về không.

CÂU HỎI 4. *Khi B tiến tới A, hệ số góc của đường thẳng là tăng hay giảm?*

CÂU TRẢ LỜI. Tôi sẽ không trả lời câu hỏi này. Câu hỏi này rất quan trọng và bạn nên tự tìm cách tự trả lời nó. Vẽ một cát tuyến khác với B gần A hơn. So sánh các hệ số góc.

Câu hỏi này đã được sáng tác bởi Steve Monk[11] tại Đại học Washington—ở đại học này, có 57% số sinh viên của lớp trả lời đúng. Có lẽ 97% số sinh viên sẽ tìm được hệ số góc đúng từ một công thức. Hình 1.3.3b cho thấy một bài toán ngược. Chúng ta biết vận tốc chứ không phải là quãng đường. Nhưng giải tích trả lời về cả hai hàm số này.

CÂU HỎI 5. *Chiếc xe nào đi nhanh hơn tại thời điểm $t = 3/4$?*

CÂU TRẢ LỜI. Xe C có tốc độ cao hơn. Xe D có gia tốc lớn hơn.

CÂU HỎI 6. *Nếu các xe khởi hành cùng lúc, liệu D có đuổi kịp C tại lúc kết thúc không? Giữa $t = \dfrac{1}{2}$ và $t = 1$, các xe càng lúc càng gần nhau hơn hay càng xa nhau hơn?*

CÂU TRẢ LỜI. Lúc này một nửa lớp trả lời sai. Bạn có thể không sai nhưng bạn vẫn có thể hiểu được tại sao họ lại sai. Bạn phải nhìn vào đồ thị tốc độ và tưởng tượng đồ thị đường đi. Khi xe C đang chạy nhanh hơn, quãng đường giữa chúng ________.

Nhắc lại: Các chiếc xe khởi hành cùng lúc, nhưng không kết thúc cùng lúc. Chúng đạt tới cùng tốc độ tại $t = 1$, chứ không phải là cùng quãng đường. Chiếc xe C đi nhanh hơn. Bạn thực sự nên vẽ các đồ thị đường đi của chúng, để thấy chúng cong như thế nào.

Những vấn đề này giúp nhấn mạnh thêm một điểm nữa. Việc tìm tốc độ (hay hệ số góc) là hoàn toàn khác với việc tìm quãng đường (hay diện tích):

(1) Tìm ***hệ số góc*** của f-đồ thị tại một thời điểm t cụ thể, bạn *không nhất thiết* phải biết toàn bộ lịch sử hành trình.

(2) Tìm ***diện tích*** phía dưới v-đồ thị cho đến một thời điểm cụ thể, bạn *nhất thiết* phải biết toàn bộ lịch sử hành trình.

---

[11]Nd: Steven G. Monk, Phó Giáo sư, Khoa Toán, Đại học Washington (tiếng Anh: University of Washington).

Một ghi chép ngắn về quãng đường là đủ để khôi phục lại $v(t)$. Điểm B di chuyển về phía điểm A. Bài toán về hệ số góc là mang tính *địa phương*—tốc độ được hoàn toàn xác định bởi $f(t)$ gần điểm A.

Ngược lại, một ghi chép ngắn về tốc độ là *không đủ* để khôi phục lại toàn bộ quãng đường. Chúng ta cần phải biết về số dặm đã đi được trước đó. Nếu không, chúng ta chỉ có thể biết mức tăng của quãng đường chứ không phải là toàn bộ quãng đường.

BÀI TẬP 1.3

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Giữa các quãng quãng $f(2) = 100$ và $f(6) = 200$, vận tốc trung bình là __a__. Nếu $f(t) = \frac{1}{4}t^2$, khi đó $f(6) =$ __b__ và $f(8) =$ __c__. Vận tốc trung ở giữa là __d__. Vận tốc tức thời tại $t = 6$ và $t = 8$ là __e__và __f__.

Vận tốc trung bình được tính từ $f(t)$ và $f(t+h)$ bởi $v_{\text{tb}} =$ __g__. Nếu $f(t) = t^2$, $v_{\text{tb}} =$ __h__. Từ $t = 1$ tới $t = 1.1$, vận tốc trung bình là __i__. Vận tốc tức thời là __j__ của v_{tb}. Nếu quãng đường là $f(t) = \frac{1}{2}at^2$, vận tốc là $v(t) =$ __k__ và gia tốc là __l__.

Trên đồ thị của $f(t)$, vận tốc trung bình giữa A và B là hệ số góc của __m__. Vận tốc tại A được tìm thấy bởi __n__. Vận tốc tại B được tìm thấy bởi __o__. Khi vận tốc là dương, quãng đường là __p__. Khi vận tốc tăng, chiếc xe __q__.

1.3.1. Tính vận tốc trung bình giữa $t = 5$ và $t = 8$:

(a) $f(t) = 6t$
(b) $f(t) = 6t + 2$
(c) $f(t) = \frac{1}{2}at^2$
(d) $f(t) = 1 - t^2$
(e) $f(t) = 6$
(f) $v(t) = 2t$

1.3.2. Đối với cùng các hàm số trên, tính $[f(t+h) - f(t)]/h$. Tỷ số này phụ thuộc vào t và h. Tìm giới hạn khi $h \to 0$.

1.3.3. Nếu hành trình kế hiển thj $f(t) = t^2 + t$ (f theo dặm hoặc kilomet, t theo giờ), tìm tốc độ trung bình giữa
(a) $t = 1$ và $t = 2$
(b) $t = 1$ và $t = 1.1$
(c) $t = 1$ và $t = 1 + h$
(d) $t = 1$ và $t = .9$ (lưu ý $h = -.1$)

1.3.4. Đối với $f(t) = t^2 + t$ tương tự như trên, tìm tốc độ trung bình giữa
(a) $t = 0$ và 1
(b) $t = 0$ và $\frac{1}{2}$
(c) $t = 0$ và h.

1.3.5. Trong câu trả lời cho 3(c), tìm giới hạn khi $h \to 0$. Giới hạn đó cho chúng ta biết điều gì?

1.3.6. Đặt $h = 0$ trong câu trả lời của bạn cho 4(c). Vẽ đồ thị của $f(t) = t^2 + t$ và chỉ ra hệ số góc của nó tại $t = 0$.

1.3.7. Vẽ đồ thị của $v(t) = 1 + 2t$. Từ hình học, tìm diện tích phía dưới đồ thị đó từ 0 tới t. Tìm hệ số góc của hàm diện tích $f(t)$ đó.

1.3.8. Vẽ các đồ thị của $v(t) = 3 - 2t$ và diện tích $f(t)$.

1.3.9. *Đúng hay sai*
(a) Nếu quãng đường $f(t)$ là dương, $v(t)$ cũng là dương.
(b) Nếu quãng đường $f(t)$ là tăng, $v(t)$ cũng là tăng.
(c) Nếu $f(t)$ là dương, $v(t)$ là tăng.
(d) Nếu $v(t)$ là dương, $f(t)$ là tăng.

1.3.10. Nếu $f(t) = 6t^2$, tìm hệ số góc của f-đồ thị và của v-đồ thị. Hệ số góc của v-đồ thị là ________.

1.3.11. Nếu $f(t) = t^2$, hỏi vận tốc trung bình giữa $t = .9$ và $t = 1.1$? Hỏi vận tốc trung bình giữa $t - h$ và $t + h$?

1.3.12. (a) Chứng tỏ rằng đối với $f(t) = \frac{1}{2}at^2$, vận tốc trung bình giữa $t - h$ và $t + h$ chính là vận tốc tại t.
(b) Diện tích phía dưới $v(t) = at$ từ $t - h$ đến $t + h$ chính là đáy $2h$ lần ________.

1.3.13. Tìm $f(t)$ từ $v(t) = 20t$ nếu $f(0) = 12$. Ngoài ra, nếu $f(1) = 12$.

1.3.14. *Đúng hay sai*, đối với bất kỳ đường cong quãng đường nào.

(a) Hệ số góc của đường thẳng từ A tới B là vận tốc trung bình giữa các điểm đó.

(b) Cát tuyến có các hệ số góc nhỏ hơn của đường cong.

(c) Nếu $f(t)$ và $F(t)$ cùng bắt đầu và cùng kết thúc, các vận tốc trung bình bằng nhau.

(d) Nếu $v(t)$ và $V(t)$ cùng bắt đầu và cùng kết thúc, các mức tăng của quãng đường là bằng nhau.

1.3.15. Khi bạn nhảy lên và ngã xuống, độ cao của bạn là $y = 2t - t^2$ theo các đơn vị đúng.

(a) Vẽ đồ thị parabola này và hệ số góc của nó.

(b) Tìm thời gian ở trên không và độ cao cực đại.

(c) *Chứng minh: Một nửa thời gian bạn ở phía trên* $y = \frac{3}{4}$.

Cầu thủ bóng rổ "treo" trên không một phần do (c).

1.3.16. Vẽ đồ thị $f(t) = t^2$, $g(t) = f(t) - 2$ và $h(t) = f(2t)$, tất cả đều từ $t = 0$ tới $t = 1$. Tìm các vận tốc.

1.3.17 (Được khuyến nghị). Một vận tốc lên và xuống là $v(t) = 2t$ đối với $t \leqslant 3$, $v(t) = 12 - 2t$ đối với $t \geqslant 3$. Vẽ parabola từng khúc $f(t)$. Kiểm tra rằng $f(6)$ = diện tích phía dưới đồ thị của $g(t)$.

1.3.18. Giả sử $v(t) = t$ đối với $t \leqslant 2$ và $v(t) = 2$ đối với $t \geqslant 2$. Vẽ đồ thị của $f(t)$ cho đến $t = 3$.

1.3.19. Vẽ $f(t)$ cho đến $t = 4$ khi $v(t)$ tăng tuyến tính từ

(a) 0 tới 2

(b) -1 tới 1

(c) -2 tới 0.

1.3.20 (Được khuyến nghị). Giả sử $v(t)$ là hàm sine tuyến tính từng khúc của Mục 1.2 (Trong Hình 1.2.2 nó là quãng đường.) Tìm diện tích phía dưới $v(t)$ giữa $t = 0$ và $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Vẽ các điểm $f(1), \dots, f(6)$ đó và vẽ parabola từng khúc $f(t)$ hoàn chỉnh.

1.3.21. Vẽ đồ thị của $f(t) = \left|1 - t^2\right|$ đối với $0 \leqslant t \leqslant 2$. Tìm một công thức ba phần đối với $v(t)$.

1.3.22. Vẽ các đồ thị của $f(t)$ đối với các vận tốc sau (cho đến $t = 2$):

(a) $v(t) = 1 - t$

(b) $v(t) = |1 - t|$

(c) $v(t) = (1 - t) + |1 - t|$.

1.3.23. Khi nào $f(t) = t^2 - 3t$ đạt đến 10? Tìm vận tốc trung bình cho đến thời điểm đó và vận tốc tức thời tại thời điểm đó.

1.3.24. Nếu $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, hỏi $v(t)$? Hỏi hệ số góc của $v(t)$? Hỏi thời điểm khi $f(t)$ bằng 41, nếu $a = b = c = 1$?

1.3.25. Nếu $f(t) = t^2$, khi đó $v(t) = 2t$. Hàm đã được tăng tốc $f(4t)$ có vận tốc $v(4t)$ hay $4v(t)$ hay $4v(4t)$?

1.3.26. Nếu $f(t) = t - t^2$, tìm $v(t)$ và $f(3t)$. Hệ số góc của $f(3t)$ bằng $v(3t)$ hay $3v(t)$ hay $3v(3t)$?

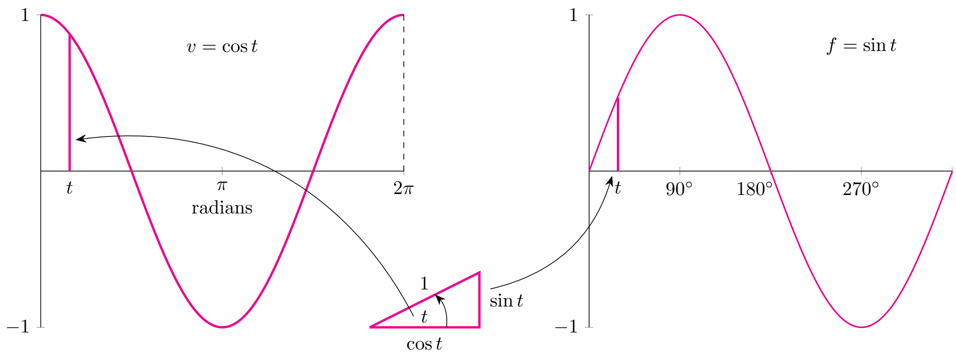
1.3.27. Đối với $f(t) = t^2$, tìm $v_{\text{tb}}(t)$ giữa 0 và t. Vẽ đồ thị $v_{\text{tb}}(t)$ và $v(t)$.

1.3.28. Nếu bạn biết vận tốc trung bình $v_{\text{tb}}(t)$, làm thế nào bạn có thể tìm thấy quãng đường $f(t)$? Bắt đầu từ $f(0) = 0$.

1.4. Chuyển động Tròn

Mục này giới thiệu các quãng đường và các vận tốc hoàn toàn mới—***các hàm sine và cosine từ lượng giác***. Khi tôi nhắc đến các hàm số này, tôi tự hỏi chúng ta cần biết bao nhiêu kiến thức lượng giác để tìm hiểu mục này. Chúng ta sẽ nhìn thấy một bức hình cơ bản về tam giác vuông với các cạnh $\cos t$ và $\sin t$ và 1. Ngoài ra, chúng ta sẽ gặp phải công thức cực kỳ quan trọng $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, đây chính là Định lý của Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$. Tổng các bình phương của các cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền (và 1 thực ra lại chính là 1^2). Chỉ nhiêu kiến thức đó thôi là quá đủ cho chúng ta trong lúc này. Đừng bỏ cuộc nếu bạn không biết gì về lượng giác—bạn có thể học được một phần kiến thức quan trọng của lượng giác ngay bây giờ.

Bạn sẽ nhận ra các đồ thị dạng sóng của các hàm sine và cosine. Chúng ta *dự định tìm tìm các hệ số góc của các đồ thị đó*. Điều này có thể được thực hiện mà



HÌNH 1.4.1. Khi góc t thay đổi, các đồ thị cho thấy các cạnh của tam giác vuông.

không cần dùng đến các công thức đối với $\sin(x + y)$ và $\cos(x + y)$—nhưng công thức này sau này đưa ra các hệ số góc tương tự theo một cách mang đậm tính đại số hơn. Ở đây, chúng ta chỉ cần những kiến thức cơ bản.[12] Và dù sao đi nữa, một tam giác còn có thể phức tạp đến mức như thế nào nữa chứ?

GHI CHÚ. Bạn có thể nghĩ lượng giác chỉ dành cho những người làm nghề trắc địa hoặc hoa tiêu (cần thông thạo các tam giác). Sai hoàn toàn! Các ứng dụng lớn nhất của lượng giác cho đến ngày nay là ***sự quay*** và ***sự rung động*** và ***sự dao động***. Thật là tuyệt vời là các hàm sine và cosine là quá hoàn hảo để mô tả "chuyển động lặp lại"—quanh một đường tròn hoặc lên và xuống.

Mục đích cơ bản của chúng ta là đưa ra thêm một ví dụ trong đó vận tốc được tính theo cảm quan thông thường. Giải tích chủ yếu là một sự mở rộng của cảm quan thông thường, nhưng ở đây sự mở rộng là không cần thiết. Chúng ta sẽ tìm hệ số góc của đường sine. Việc tìm hệ số góc của đường thẳng $f = vt$ là dễ nhưng việc tìm hệ số góc của parabola $f = \frac{1}{2}at^2$ là khó hơn. Ví dụ mới cũng liên quan đến động thực tế, được bắt gặp hằng ngày. Chúng ta bắt đầu với ***chuyển động tròn***, trong đó vị trí khởi hành được cho trước và vận tốc sẽ được tìm thấy.

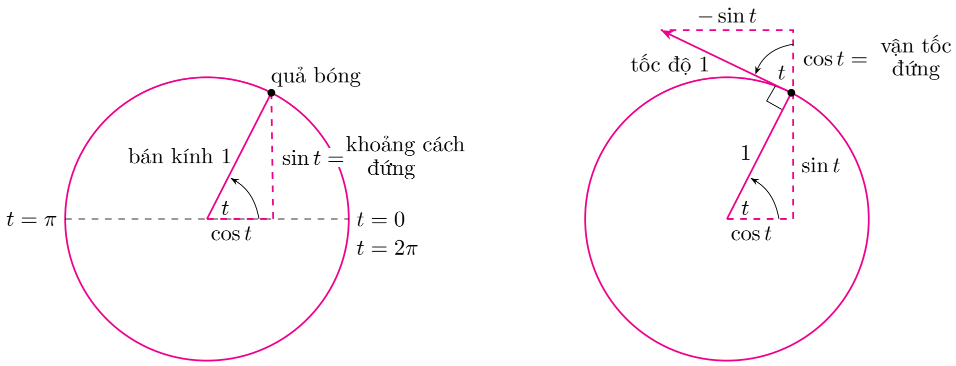
Một quả bóng đi quanh một đường tròn có bán kính bằng một. Tâm là tại $x = 0$, $y = 0$ (gốc tọa độ). Các toạ độ x và y thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$, để giữ quả bóng trên đường tròn. Chúng ta chỉ ra vị trí của nó trên Hình 1.4.2a bằng cách đưa ra góc so với trục hoành của nó. Và chúng ta làm cho quả bóng di chuyển với tốc độ hằng, bằng cách đòi hỏi rằng ***góc bằng với thời gian*** t. Quả bóng di chuyển ngược chiều kim đồng hồ. Tại thời điểm t, nó đạt đến một điểm nơi mà góc bằng t. Góc được đo theo ***radian*** chứ không phải theo độ, nên một vòng quay hoàn chỉnh được hoàn thành tại $t = 2\pi$ thay vì $t = 360$ độ.

Quả cầu bắt đầu trên trục x, nơi mà góc bằng không. Bây giờ ta tìm nó tại thời điểm t:

Quả bóng nằm tại điểm nơi mà $x = \cos t$ ***và*** $y = \sin t$.

Đây là nơi cần dùng lượng giác. Hàm cosine dao động giữa 1 và -1, khi quả bóng đi từ mép phải tới mép trái và ngược lại. Hàm sine cũng dao động giữa 1 và -1, bắt đầu từ $\sin 0 = 0$. Tại thời điểm $\pi/2$, sine (chiều cao) tăng tới một. Cosine bằng không và quả bóng đạt đến điểm đỉnh tại $x = 0$, $y = 1$. Tại thời điểm π, cosine bằng -1 và sine trở về không—các toạ độ là $(-1; 0)$. Tại $t = 2\pi$, quả bóng đi đủ một vòng (góc cũng là 2π) và $x = \cos 2\pi = 1$, $y = \sin 2\pi = 0$.

[12]Các hàm sine và cosine là quan trọng đến nỗi mà tôi đã phải thêm một phần ôn tập về lượng giác trong Mục 1.5. Nhưng các khái niệm trong mục này có thể có giá trị hơn các các công thức.



Hình 1.4.2. Chuyển động tròn với tốc độ 1, góc t, chiều cao $\sin t$, vận tốc hướng lên $\cos t$.

Điểm quan trọng: Quãng đường quanh đường tròn (chu vi của nó) là $2\pi r = 2\pi$, bởi vì bán kính bằng 1. Quả bóng đi được một quãng đường 2π trong thời gian 2π. ***Tốc độ bằng*** 1. Việc còn lại là tìm vận tốc, đại lượng này không chỉ là tốc độ mà còn có cả *hướng*.

Độ vs. radian Đúng một vòng tròn là 360 độ và là 2π radian. Vì vậy
$1\,\text{radian} = 360/2\pi$ độ ≈ 57.3 độ.
1 độ $= 2\pi/360\,\text{radian} \approx .01745\,\text{radian}$.

Radian được phát minh ra để tránh các số này! Tốc độ đúng bằng 1, đạt đến đến t radian tại thời điểm t. Tốc độ sẽ là .01745 nếu quả bóng dạt đến t độ. Quả bóng sẽ hoàn thành một vòng tại thời điểm $T = 360$. Chúng ta không thể chấp nhận được phép chia đường tròn thành 360 miếng (bởi ai?) mà sinh ra các số này.

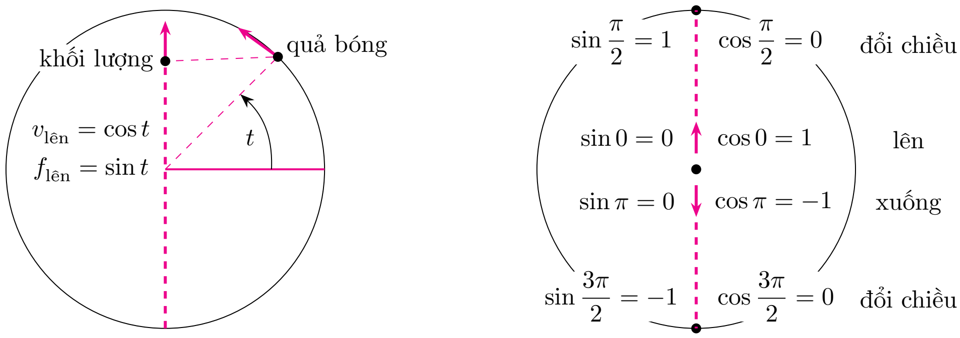
Để phân biệt độ với radian, xác minh rằng $\sin 1° = .017$ và $\sin 1 = .84$.

VẬN TỐC CỦA QUẢ BÓNG

Tại thời điểm t, quả bóng đang đi theo hướng nào? Giải tích chú trọng đến chuyển động giữa t và $t+h$. Đối với một quả bóng trên một sợi dây, chúng ta không cần giải tích—cứ thả cho quả bóng lăn. ***Hướng của chuyển động là tiếp với với đường tròn***. Nếu không có lực nào giữ cho nó trên đường tròn, *quả bóng đi thẳng ra ngoài theo phương tiếp tuyến*. Nếu quả cầu là mặt trăng, lực là trọng lực. Nếu đó là một cây búa quay vòng trên một sợi dây xích, lực là từ tâm. Khi người ném thả tay ra, búa bay thẳng ra ngoài—đó là nghệ thuật chọn đúng thời điểm. (Tôi đã từng nhìn thấy một người bạn bị đụng phải một cây búa tại MIT, ông ấy đã sống sót sau cú đụng, nhưng người ném đã chuồn êm.) Giải tích sẽ tìm thấy cùng hướng tiếp tuyến đó, khi các điểm tại t và $t + h$ đến gần nhau.

"***Tam giác vận tốc***" nằm trong Hình 1.4.2b. Nó tương tự như tam giác vị trí, nhưng bị quay một góc 90°. Cạnh huyền là tiếp tuyến với đường tròn, nằm theo hướng quả bóng đang di chuyển. Chiều dài của nó bằng 1 (tốc độ). Góc t vẫn xuất hiện, nhưng bây giờ nó là góc so với phương đứng. ***Thành phần hướng lên của vận tốc là*** $\cos t$, ***trong khi thành phần hướng lên của vị trí là*** $\sin t$. Đó là tính toán dựa theo cảm quan thông thường chúng ta, dựa trên một hình vẽ chứ không phải là một công thức. Phần còn lại của mục này phụ thuộc vào tính toán này—và chúng ta kiểm tra $v = \cos t$ tại các điểm đặc biệt.

Tại thời điểm bắt đầu $t = 0$, chuyển động đều hướng lên. Độ cao là $\sin 0 = 0$, và vector hướng lên là $\cos 0 = 1$. Tại thời điểm $\pi/2$, quả bóng đạt đến đỉnh. Độ cao là $\sin \pi/2 = 1$ và vector hướng lên là $\cos \pi/2 = 0$. Tại thời điểm đó, quả bóng không di chuyển lên hay xuống.



HÌNH 1.4.3. Chuyển động tròn của quá bóng và chuyển động điều hóa của khối lượng (cái bóng của nó).

Vận tốc theo phương ngang chứa một dấu trừ. Ban đầu, quả bóng di chuyển sang trái. Giá trị của x là $\cos t$, nhưng tốc độ theo phương x là $-\sin t$. Nửa đường tròn lượng giác nằm trong hình đó (nửa đẹp của đường tròn lượng giác), và bạn thấy được công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ là căn bản đến mức nào. Câu hỏi đó được áp dụng cho vị trí và vận tốc, tại mỗi thời điểm.

Ứng dụng của hình học phẳng: Các tam giác vuông trong Hình 1.4.2 có cùng kích cỡ và hình dáng. Chúng tương đẳng[13]—góc t nằm phía trên quả bóng bằng góc t tại tâm. Đó là bởi vì tổng của ba góc tại vị trí của quả bóng bằng $180°$.

DAO ĐỘNG: CHUYỂN ĐỘNG LÊN VÀ XUỐNG

Chúng ta bây giờ dùng chuyển động tròn để nghiên cứu chuyển động thẳng. Đường thẳng mà chúng ta xét là trục y. Thay vì một quả bóng di chuyển động quanh một đường tròn, một khối lượng sẽ di chuyển động lên và xuống. Nó dao động giữa $y = 1$ và $y = -1$. ***Khối lượng là*** "***cái bóng của quả cầu***," và chúng ta sẽ giải thích điều này trong chốc lát nữa thôi.

Có một dao động thất thường mà chúng ta không muốn chút nào, với $v = 1$ và $v = -1$. Cái vận tốc "bang-bang" đó giống như một quả bóng bi da, nảy giữa hai băng mà không bị chậm lại. Nếu khoảng cách giữa hai băng là 2, khi đó tại $t = 4$, quả bóng trở lại vị trí xuất phát. Đồ thị quãng đường đi là một đường zigzac (hoặc răng cưa) từ Mục 1.2.

Chúng ta thích một chuyển động mượt mà hơn. Thay vì các vận tốc nhảy giữa $+1$ và -1, một dao động thực tế chậm dần về không và từ từ tăng tốc trở lại. Chính là khối lượng trên đầu một lò xo đã kéo nó quay về tốc độ ban đầu. Vận tốc rớt về không khi lò xo bị kéo giãn hết cỡ. Sau đó v là âm, vì khối lượng đi cùng một quãng đường nhưng theo hướng ngược lại. ***Chuyển động điều hòa*** là chuyển động tới và lui quan trọng nhất, trong khi $f = vt$ và $f = \frac{1}{2}at^2$ là các chuyển động một chiều quan trọng nhất.

Làm thế nào để mô tả giao động này? Cách tốt nhất là nối nó và với quả bóng trên đường tròn. ***Độ cao của quả bóng sẽ là độ cao của khối lượng***. "Cái bóng của quả bóng" đi lên và xuống, ngang với quả bóng. Khi quả bóng vượt qua đỉnh của đường tròn, khối lượng dừng lại tại đỉnh và bắt đầu đi xuống. Khi quả bóng vòng qua đáy, khối lượng dừng lại và đi ngược lên theo trục y. Nửa đường lên (hoặc xuống) đều có tốc độ là 1.

Hình 1.4.3a cho thấy khối lượng tại một thời điểm điển hình t. Độ cao là $y = f(t) = \sin t$ ngang với quả bóng. Độ cao này dao động giữa $f = 1$ và $f = -1$.

[13]Nd: Trong hình học, hai hình được gọi là tương đẳng nếu chúng có cùng hình dáng và kích cỡ.

Nhưng chất điểm không di chuyển động với tốc độ hằng. ***Tốc độ của chất điểm là thay đổi mặc dù tốc độ của quả bóng luôn bằng*** 1. Thời gian để quả bóng đi một vòng hoàn chỉnh vẫn là 2π, nhưng trong khoảng thời gian đó, khối lượng lại tăng tốc và giảm tốc. Vấn đề ở đây là tìm vận tốc thay đổi v. Vì khoảng cách là $f = \sin t$, vận tốc sẽ là *hệ số góc của đường sine.*

HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG CONG SINE

Tại đỉnh và đáy ($t = \pi/2$ và $t = 3\pi/2$), quả bóng thay đổi hướng và $v = 0$. *Hệ số góc tại đỉnh và đáy của đường sine bằng không.*[14] Tại thời điểm $t = 0$, khi quả bóng đi thẳng lên, hệ số góc của đường sine là $v = 1$. Tại $t = \pi$, khi trái banh và chất điểm và đồ thị f đi xuống, vận tốc là $v = -1$. Chất điểm chuyển động nhanh nhất tại tâm. Chất điểm đi chậm lại (thậm chí dừng lại) khi tung độ đạt cực đại hay cực tiểu. Tam giác vận tốc sản sinh ra v tại mỗi thời điểm.

Để tìm vận tốc hướng lên của khối lượng, hãy để ý vận tốc hướng lên của quả bóng. Các vận tốc là như nhau! Khối lượng và quả cầu ở nhau, và chúng ta biết v từ chuyển động tròn: ***vận tốc hướng lên là*** $v = \cos t$.

Hình 1.4.4 cho thấy kết quả chúng ta muốn. Bên phía bên phải, $f = \sin t$ đưa ra độ cao. Bên phía bên trái là vận tốc $v = \cos t$. Vận tốc là hệ số góc của f-đường cong. Độ cao và vận tốc (các đường đỏ) là dao động cùng nhau, nhưng chúng lệch pha—giống như việc tam giác vị trí và tam giác vận tốc là vuông góc với nhau.[15] Điều này là hoàn toàn tuyệt vời, là việc trong giải tích hai hàm số nổi tiếng nhất của lượng giác tạo thành một cặp: ***Hệ số góc của đường sine được cho bởi đường cosine***.

Khi quảng đường là $f(t) = \sin t$***, vận tốc là*** $v(t) = \cos t$.

Lời nhận tội: Hệ số góc của $\sin t$ đã không được tính theo cách thường thấy. Trước đây, chúng ta đã so sánh $(t + h)^2$ với t^2, và đã chia quãng đường đó bởi h. Vận tốc trung bình này tiến tới hệ số góc $2t$ khi h trở nên nhỏ. Đối với $\sin t$ chúng ta có thể thực hiện tương tự:

$$\text{(1.4.1)} \qquad \text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{độ biến thiên của } \sin t}{\text{độ biến thiên của } t} = \frac{\sin(t + h) - \sin t}{h}.$$

Đây là nơi chúng ta cần công thức đối với $\sin(t + h)$, công thức này sẽ sớm xuất hiện. Bằng cách nào đó, tỷ số trong (1) sẽ tiến tới $\cos t$ khi $h \to 0$. Các hàm sine và cosine phù hợp với mô hình tương tự như các hàm số t^2 và $2t$—đường tắt của chúng ta là xét cái bóng của chuyển động quanh một đường tròn.

Câu hỏi 7. *Điều gì sẽ xảy ra nếu quả bóng đi nhanh gấp hai lần, để đạt đến góc $2t$ tại thời điểm t?*

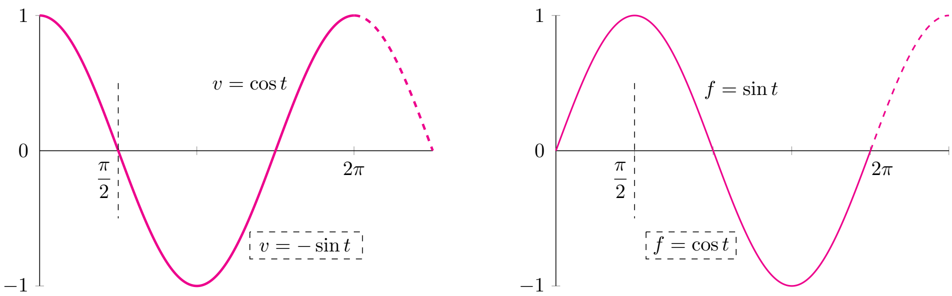
Câu trả lời. Tốc độ bây giờ là 2. Thời gian để đi hết một vòng hoàn chỉnh chỉ là π. Vị trí của quả bóng là $x = \cos 2t$ và $y = \sin 2t$. Vận tốc vẫn là tiếp tuyến với đường tròn—nhưng tiếp tuyến là tại góc 2π, nơi vị trí của quả bóng. Vì vậy, $\cos 2t$ xuất hiện trong vận tốc hướng lên và $-\sin 2t$ xuất hiện trong vận tốc theo phương ngang. Sự khác nhau là ***tam giác vận tốc bây giờ lớn gấp đôi***. Vận tốc hướng lên không phải là $\cos 2t$ mà là $2\cos 2t$, vận tốc theo phương ngang là $-\sin 2t$. Chú ý các số 2 này!

Câu hỏi 8. *Diện tích phía dưới đường cosine từ $t = 0$ tới $t = \pi/2$ là bao nhiêu?*

---

[14] Điều này trông có vẻ dễ nhưng sau này bạn sẽ thấy nó cực kỳ quan trọng. ***Tại một cực đại hoặc cực tiểu, hệ số góc bằng không***. Đường cong có tiếp tuyến nằm ngang tại đó.

[15] Nd: Hai vật là vuông góc với nhau khi hai vật đó được đặt sao cho chúng tạo thành một góc 90° tại nơi chúng chạm vào nhau.



HÌNH 1.4.4. $v = \cos t$ khi $f = \sin t$ (đỏ); $v = -\sin t$ khi $f = \cos t$ (đen).

Bạn có thể trả lời câu trả lời này, nếu bạn chấp nhận Định lý Cơ sở của Giải tích—***việc tính các diện tích là bài toán ngược của việc tính các hệ số góc***, nếu bạn chấp nhận định lý này. Hệ số góc của $\sin t$ là $\cos t$, nên diện tích phía dưới $\cos t$ là mức tăng của $\sin t$. Chúng ta vẫn chưa có lý do gì để tin vào định lý này, nhưng hãy cứ dùng nó đã.

Từ $\sin 0 = 0$ tới $\sin \pi/2 = 1$, mức tăng là 1. Hãy tận dụng sức mạnh của giải tích. Không có phương pháp nào có thể giúp chúng ta tính được diện tích dưới một đường cosine nhanh như vậy.

Chúng ta bắt tay ngay vào khám phá một cặp quãng đường và vận tốc khác (một cặp f-v khác) mà không mất thêm nhiều công sức. Lúc này f là hàm cosine. Thời điểm đồng hồ bắt đầu chạy là tại đỉnh của đường tròn. Thời điểm $t = \pi/2$ cũ bây giờ là $t = 0$. Các đường nét đứt trong Hình 1.4.4 cho thấy điểm bắt đầu mới. Nhưng cái bóng có cùng một chuyển động với quả bóng—quả bóng vẫn tiếp tục đi quanh đường tròn, và và khối lượng cứ theo nó lên và xuống. Đồ thị của f và đồ thị của v vẫn đúng, chỉ có điều thời gian đã bị dịch chuyển một lượng $\pi/2$.

Đồ thị của f mới là của một hàm cosine. Nhưng v-đồ thị mới là của ***hàm trừ sine***. Hệ số góc của đường cosine được suy ra từ *âm* của đường sine. Đó là một cặp hàm số nổi tiếng khác, cặp sinh đôi của cặp đầu tiên:

Khi quảng đường là $f(t) = \cos t$***, vận tốc là*** $v(t) = -\sin t$***.***

Bạn có thể hiểu điều đó bằng cách quan sát quả bóng di chuyển sang trái và sang phải (thay vì đi lên và đi xuống). Quãng đường là $f = \cos t$. Vận tốc là $v = -\sin t$. Cặp sinh đôi này hoàn thành khía cạnh giải tích trong Chương 1 (lượng giác ở mục sau). Chúng ta ôn tập các ý tưởng:

v là: ***vận tốc***
độ dốc của đường cong quãng đường
giới hạn của vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian ngắn
đạo hàm của f.

f là: ***đường đi***
diện tích phía dưới đường cong vận tốc
giới hạn của tổng quãng đường trên nhiều khoảng thời gian ngắn
tích phân của v.

Giải tích vi phân*: Tính v từ f.* ***Giải tích tích phân****: Tính f từ v.*

Với vận tốc hằng, f bằng vt. Với gia tốc hằng, $v = at$ và $f = \frac{1}{2}at^2$. Trong chuyển động điều hoà, $v = \cos t$ và $f = \sin t$. Một phần mục tiêu của chúng ta là phát triển danh sách gồm các cặp hàm số tương tự như vậy—để thực hiện điều này, chúng ta cần đến các công cụ của giải tích. Một phần quan trong khác là đưa các ý tưởng này vào sử dụng.

Trước khi chương này kết thúc chương này, liệu tôi có thể thêm một lưu ý về cuốn sách này và khóa học này được hay không? cuốn sách nay mang đậm chất cá nhân hơn thông thường, và tôi hy vọng người đọc sẽ chấp thuận điều này. Những gì tôi viết là rất sát với những gì tôi sẽ nói, nếu bạn đang ngồi trong lớp học này của tôi. Các câu văn được nói trước khi được viết ra.[16] Giải tích rất sống động và không ngừng phát triển—chúng ta cần dạy nó theo cách này.

Một phần mới của bộ môn này đã xuất hiện cùng với sự ra đời của máy tính. Máy tính thực hiện với một bước hữu hạn h, chứ không phải với một giới hạn "cực vi." Kết quả của những gì máy tính có thể làm sẽ được hiển thị ra ngay—ngay cả khi nó không thể tìm được các hệ số góc hoặc diện tích chính xác, nhưng nó vẫn đưa ra kết quả gần đúng. Điều này đã góp phần thúc đẩy mạnh việc giải quyết một loạt các vấn đề. Chúng ta đáp được lên mặt trăng bởi vì f và v đã được tính quá chính xác. (Quỹ đạo của mặt trăng có các sine và cosine, tàu vũ trụ khởi hành với $v = at$ và $f = \frac{1}{2}at^2$. Chỉ có máy tính mới có thể tính toán được về khí cuốn và lực hấp dẫn của mặt trời và khối lượng thay đổi của tàu vũ trụ). ***Toán học hiện đại là một tổ hợp của các công thức chính xác và các tính toán gần đúng***. Không thể bỏ qua phần nào trong hai phần này, và tôi mong bạn thấy được bản chất số của những như gì chúng ta rút ra bằng đại số. Các bài tập là để giúp bạn nắm vững cả hai phần.

Khóa học giải tích này đã có một khởi đầu chóng vánh—không phải bắt đầu với một thảo luận trừu tượng về các tập hợp hoặc các hàm số hoặc các giới hạn, mà với các câu hỏi cụ thể dẫn đến những ý tưởng đó. Bạn vừa bắt gặp ở trên một hàm quãng đường f và một giới hạn v của các vận tốc trung bình. Chúng ta sẽ gặp thêm nhiều hàm số và chạm trán thêm nhiều giới hạn (và các định nghĩa của chúng!) nhưng điều quan trọng là phải nghiên cứu các ví dụ quan trọng ngay từ sớm. Chúng ta còn rất nhiều việc phải làm, nhưng khóa học chắc chắn đã bắt đầu rồi.

BÀI TẬP 1.4

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Một quả bóng tại một góc t trên đường tròn đơn vị có các tọa độ $x =$ __a__ và $y =$ __b__. Nó hoàn thành một vòng quay hoàn chỉnh tại $t =$ __c__. Tốc độ của nó là __d__. Vận tốc của nó chỉ theo hướng của __e__, mà là __f__ với bán kính đi ra từ tâm. Vận tốc hướng lên là __g__ và vận tốc theo phương ngang là __h__.

Một khối lượng đi lên và đi xuống ngang bằng với quả bóng có độ cao $f(t) =$ __i__. Đây được gọi là chuyển động __j__ đơn. Vận tốc là $v(t) =$ __k__. Khi $t = \pi/2$, độ cao là $f =$ __l__ và vận tốc là $v =$ __m__. Nếu một khối lượng được tăng tốc đạt đến $f = \sin 2t$ tại thời điểm t, vận tốc của nó là $v =$ __n__. Một cái bóng di chuyển *phía dưới* quả bóng có $f = \cos t$ và $v =$ __o__. Khi f là quãng đường = diện tích = tích phân, v là __p__ = __q__ = __r__ .

1.4.1. Đối với một quả bóng đi quanh một đường tròn đơn vị với vận tốc 1,
(a) mất bao lâu để nó đi hết 5 vòng?
(b) tại thời điểm $t = 3\pi/2$, quả bóng ở đâu?
(c) tại $t = 22$, quả bóng ở đâu (xấp xỉ)?

1.4.2. Đối với cùng chuyển động trên, tìm các tọa độ x và y chính xác tại $t = 2\pi/3$. Tại thời điểm nào quả bóng sẽ chạm trục x, nếu nó đi ra khỏi đường tròn trên theo phương tiếp tuyến tại $t = 2\pi/3$?

1.4.3. Một quả bóng đi quanh một đường tròn có bán kính 4. Tại thời điểm t (khi nó đạt đến góc t), tìm
(a) các tọa độ x và y của nó

[16] Phụ đề trên truyền hình hoạt động theo cơ chế này. Có thể xem cuốn sách này là phụ đề cho bài giảng trên lớp của tôi.

(b) tốc độ và quãng đường đã đi được
(c) vận tốc theo phương đứng và theo phương ngang.

1.4.4. Trên một đường tròn có bán kính R, tìm các tọa độ x và y tại thời điểm t (và góc t). Vẽ tam giác vận tốc và tìm các vận tốc x và y.

1.4.5. Một quả bóng chuyển động quanh một đường tròn đơn vị (bán kính 1) với tốc độ 3, bắt đầu từ góc không. Tại thời điểm t,
(a) nó đạt đến góc nào?
(b) hỏi các tọa độ x và y của nó?
(c) hỏi các vận tốc x và y của nó? Phần này khó hơn.

1.4.6. Cho một quả bóng khác ở trước và cách quả bóng với tốc độ 3 trên đây một khoảng $\pi/2$ radian, tìm góc của nó, các tọa độ x và y của nó, và vận tốc theo phương đứng của nó tại thời điểm t.

1.4.7. Một khối lượng di chuyển trên trục x phía dưới hoặc phía trên quả bóng ban đầu (trên đường tròn đơn vị với tốc độ 1). Hỏi vị trí $x = f(t)$? Tìm x và v tại $t = \pi/4$. Vẽ đồ thị x và v cho đến khi $t = \pi$.

1.4.8. Liệu khối lượng mới (phía trên hoặc phía dưới quả bóng ban đầu) có gặp khối lượng cũ (ngang bằng với quả bóng) hay không? Hỏi khoảng cách giữa các khối lượng tại thời điểm t?

1.4.9. Vẽ các đồ thị của $f(t) = \cos 3t$ và $\cos 2\pi t$ và $2\pi \cos t$, đánh dấu các trục thời gian. Hỏi chu kỳ lặp lại của từng f?

1.4.10. Vẽ các đồ thị của $f = \sin(t+\pi)$ và $v = \cos(t+\pi)$. Dao động này ngang bằng với quả bóng nào?

1.4.11. Vẽ các đồ thị của $f = \sin(\frac{\pi}{2}-t)$ và $v = -\cos(\frac{\pi}{2} - t)$. Dao động này ngang bằng với một quả bóng đi theo hướng nào và bắt đầu ở đâu?

1.4.12. Vẽ đồ thị của $f(t) = \sin t + \cos t$. Ước lượng độ cao lớn nhất của nó (f cực đại) và thời điểm nó đạt đến độ cao đó. Kiểm tra ước lượng của bạn bằng cách tính f^2.

1.4.13. Bạn phải chạy xuyên qua đường tròn nhanh như thế nào để gặp quả bóng một lần nữa? Nó chuyển động với tốc độ 1.

1.4.14. Một khối lượng rơi từ đỉnh của đường tròn đơn vị khi quả bóng có tốc độ 1 đi qua. Cần gia tốc a bao nhiêu để gặp quả bóng tại đáy?

Tìm diện tích phía dưới $v = \cos t$ từ số gia trong $f = \sin t$:

1.4.15. từ $t = 0$ tới $t = \pi$

1.4.16. từ $t = 0$ tới $t = \frac{\pi}{6}$

1.4.17. từ $t = 0$ tới $t = 2\pi$

1.4.18. Từ $t = \frac{\pi}{2}$ đến $t = \frac{3\pi}{2}$.

1.4.19. Đường cong quãng đường $f = \sin 4t$ sinh ra đường cong vận tốc $v = 4\cos 4t$. Giải thích cả hai số 4 đó.

1.4.20. Đường cong quãng đường $f = 2\cos 3t$ sinh ra đường cong vận tốc $v = -6\sin 3t$. Giải thích số -6 đó.

1.4.21. Đường cong vận tốc $v = \cos 4t$ sinh ra đường cong quãng đường $f = \frac{1}{4}\sin 4t$. Giải thích số $\frac{1}{4}$ đó.

1.4.22. Vận tốc $v = 5\sin 5t$ sinh ra quãng đường nào?

1.4.23. Tìm hệ số góc của đường sine tại $t = \frac{\pi}{3}$ từ $v = \cos t$. Sau đó tìm hệ số góc trung bình bằng cách chia $\sin \pi/2 - \sin \pi/3$ bởi hiệu thời gian $\pi/2 - \pi/3$.

1.4.24. Hệ số góc của $f = \sin t$ tại $t = 0$ là $\cos 0 = 1$. Tính các hệ số góc trung bình $(\sin t)/t$ đối với $t = 1, .1, .01, .001$.

Quả bóng tại $x = \cos t$, $y = \sin t$ quay (1) ngược chiều kim đồng hồ (2) với bán kính 1 (3) bắt đầu từ $x = 1$, $y = 0$ (4) với tốc độ 1. Tìm (1)(2)(3)(4) đối với các chuyển động 25-30.

1.4.25. $x = \cos 3t$, $y = -\sin 3t$

1.4.26. $x = 3\cos 4t$, $y = 3\sin 4t$

1.4.27. $x = 5\sin 2t$, $y = 5\cos 2t$

1.4.28. $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$

1.4.29. $x = \cos(t+1)$, $y = \sin(t+1)$

1.4.30. $x = \cos(-t)$, $y = \sin(-t)$

Dao động $x = 0$, $y = \sin t$ đi (1) lên và xuống (2) giữa -1 và 1 (3) bắt đầu từ $x = 0$, $y = 0$ (4) tại vận tốc $v = \cos t$. Tìm (1)(2)(3)(4) đối với các dao động 1.4.31-1.4.36.

1.4.31. $x = \cos t$, $y = 0$

1.4.32. $x = 0$, $y = \sin 5t$

1.4.33. $x = 0$, $y = 2\sin(t+\theta)$

1.4.34. $x = \cos t$, $y = \cos t$

1.4.35. $x = 0$, $y = -2\cos\dfrac{1}{2}t$

1.4.36. $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$

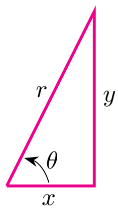
1.4.37. Nếu quả bóng trên đường tròn đơn vị đạt đến t *độ* tại thời điểm t, tìm vị trí, tốc độ và vận tốc hướng lên của nó.

1.4.38. Chọn số k để cho $x = \cos kt$, $y = \sin kt$ hoàn thành một vòng quay tại $t = 1$. Tìm tốc độ và vận tốc hướng lên.

1.4.39. Nếu một cầu thủ giao bóng[17] không tạm dừng trước khi bắt đầu ném bóng, trong tài sẽ hô một lỗi balk[18]. Liên đoàn Bóng chày Mỹ[19] đã quyết định một cách toán học rằng luôn có một khoảng dừng giữa chuyển động lui và tới, ngay cả khi khoảng thời gian đó quá ngắn để nhìn thấy được. (Vì vậy, không có lỗi balk.) Liệu điều đó có đúng hay không?

1.5. Ôn tập về Lượng giác

Lượng giác bắt đầu bằng một tam giác vuông. Kích thước của tam giác là không quan trọng như các góc. Chúng ta tập trung vào một góc cụ thể—gọi nó là θ—và vào các *tỷ số* giữa ba cạnh x, y, r. Những tỷ số này không thay đổi nếu các tam giác là đồng dạng. Ba cạnh đưa ra sáu tỷ số, chúng là các hàm cơ bản của lượng giác:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Hình 1.5.1

Tất nhiên, sáu tỷ số này là không độc lập với nhau. Ba tỷ số ở phía bên phải được suy ra từ ba tỷ số ở phía bên trái. Và tangent (tang) là sine bị chia bởi cosine:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}.$$

Lưu ý rằng trong tiếng Anh, từ "tangent (tang) của một góc" và "tangent (tiếp tuyến) với một đường tròn" và "tangent line (đường tiếp tuyến) với một đồ thị" là những cách sử dụng khác nhau của cùng một từ. Khi $\cos\theta$ tiến tới không, tangent của θ tiến tới vô cùng. Cạnh x trở thành không, θ tiến tới 90° và tam giác biến dạng thành đường thẳng đứng có độ dốc vô hạn. Sine của 90° là $\dfrac{y}{r} = 1$.

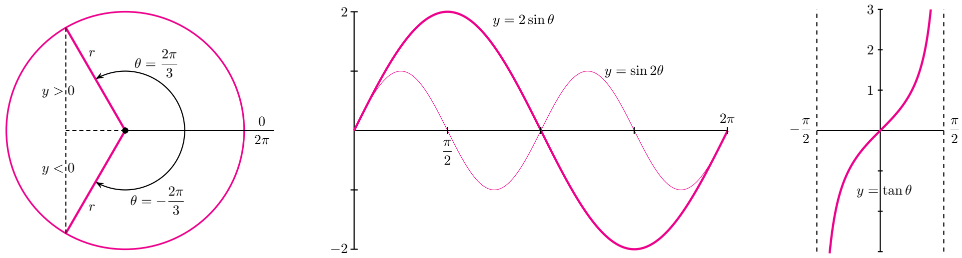
Các tam giác có một hạn chế nghiêm trọng. Mặc dù các tam giác là một công cụ khảo sát tuyệt vời đối với các góc không vượt quá 90°, và có thể sử dụng được đối với các không vượt quá 180°, nhưng chúng lại đưa ra các kết quả không chính xác đối với các góc lớn hơn nữa. Chúng ta không thể nào đặt được một góc 240° vào một tam giác. Vì vậy, chúng ta bây giờ chuyển sang một đường tròn.

---

[17]Nd: Cầu thủ giao bóng là một trong 9 cầu thủ của một đội bóng chày với tên tiếng Anh là "Pitcher".

[18]Nd: Trong môn bóng chày, một cầu thủ giao bóng có thể thực hiện một số chuyển động hoặc hành động bất hợp pháp tạo thành một lỗi balk. Hầu hết các vi phạm này liên quan đến việc cầu thủ giao bóng này giả vờ có hành đồng ném bóng trong khi thực ra người đó không có ý định làm như vậy.

[19]Nd: Liên đoàn Bóng chày Mỹ (tiếng Anh: American League).



HÌNH 1.5.2. Lượng giác trên một đường tròn. So sánh $2\sin\theta$ với $\sin 2\theta$ và $\tan\theta$ (các chu kỳ 2π,π,π).

Các góc được đo từ vị trí trục x dương (ngược chiều kim đồng hồ). Như vậy góc $90°$ có một cạnh thẳng đứng, góc $180°$ có hai cạnh đối nhau, góc $360°$ có các cạnh trùng với các cạnh của góc $0°$. (Sau đó, góc $450°$ có các cạnh trùng với các cạnh của góc $90°$). Mỗi góc tạo ra một điểm trên đường tròn có bán kính r. Các toạ độ x và y của các điểm đó có thể là âm (*nhưng không bao giờ là* r). Khi một điểm chạy quanh đường tròn, sáu tỷ số $\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta, \ldots$ vạch ra sáu đồ thị. Dạng sóng cosine giống như dạng sóng sine (chỉ bị dịch chuyển một góc $90°$).

Việc chuyển từ một tam giác sang một đường tròn cũng dẫn đến một sự thay đổi nữa. Đơn vị độ bị loại bỏ. Chúng ta sẽ chỉ dùng đơn vị radian. Quãng đường quanh toàn bộ đường tròn là $2\pi r$. Quãng đường quanh tới các điểm khác là θr. ***Chúng ta đo góc bởi bội số θ này***. Đối với một nửa đường tròn, quãng đường là πr, nên góc là π radian—tức là $180°$. Một phần tư đường tròn là $\pi/2$ radian hay $90°$. ***Quãng đường quanh tới góc θ là r lần θ.***

Khi $r = 1$, đây là bước đơn giản hóa sau cùng: *Quãng đường là* θ. Một góc $45°$ là $\frac{1}{8}$ của một đường tròn và là $2\pi/8$ radian—và chiều dài của cung tròn là $2\pi/8$. Tương tự đối với $1°$:

$$360° = 2\pi \,\text{radians} \qquad 1° = 2\pi/360 \,\text{radians} \qquad 1 \,\text{radian} = 360/2\pi \,\text{độ}.$$

Một góc quay theo chiều kim đồng hồ là *âm*. Góc $-\pi/3$ là $-60°$ chiếm $\frac{1}{6}$ đường tròn theo chiều *sai*.[20] Hỏi tác động của góc âm lên sáu hàm lượng giác trên?

Chắc chắn r là không đổi khi ta chuyển từ θ sang $-\theta$. Và x cũng là không đổi (xem Hình 1.5.2a). Nhưng y đổi dấu, bởi vì $-\theta$ nằm phía dưới trục hoành trong khi $+\theta$ nằm phía trên trục hoành. Sự thay đổi này trong y này ảnh hưởng đến y/r và y/x nhưng không ảnh hưởng đến x/r:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

Cosine là *chẵn* (không đổi dấu). Sine và tangent là *lẻ* (đổi dấu).

Góc chiếm $\frac{5}{6}$ đường tròn theo chiều *đúng* cũng đưa ra cùng một điểm với góc chiếm $\frac{1}{6}$ đường tròn theo chiều *sai* ở trên. Vì vậy, $\frac{5}{6}$ của 2π radian (hay $300°$) có cùng chiều như $-\pi/3$ radian hay $-60°$. ***Một sai khác 2π không làm thay đổi*** x, y, r. Như vậy $\sin\theta$ và $\cos\theta$ và bốn hàm khác đều có chu kỳ 2π. Chúng ta có thể đi quanh 5 lần hoặc 100 lần quanh đường tròn, cộng 10π hoặc 200π vào góc, và giá trị của sáu hàm số đó vẫn không thay đổi.

[20]Nd: chiều âm, cùng chiều kim đồng hồ, là chiều sai ngược với chiều dương, ngược chiều kim đồng hồ, là chiều đúng.

VÍ DỤ. Tính sáu hàm lượng giác tại $\theta = 2\pi/3$ (hay $\theta = -4\pi/3$).
Góc này được cho thấy trong Hình 1.5.2a (trong đó $r = 1$). Các tỷ số là:

$$3\cos\theta = x/r = -1/2 \qquad \sin\theta = y/r = \sqrt{3}/2 \qquad \tan\theta = y/x = -\sqrt{3}$$
$$\sec\theta = -2 \qquad \csc\theta = 2/\sqrt{3} \qquad \cot\theta = -1/\sqrt{3}$$

Những con số này minh họa bốn điều cơ bản về độ lớn của bốn hàm số:

$$|\cos\theta| \leqslant 1 \qquad |\sin\theta| \leqslant 1 \qquad |\sec\theta| \geqslant 1 \qquad |\csc\theta| \geqslant 1.$$

Tangent và cotangent có thể nhận bất kỳ giá trị nào, miễn là $\cot\theta = 1/\tan\theta$.

Những con số trên còn tiết lộ nhiều điều nữa. Giá trị tangent $-\sqrt{3}$ là tỷ số của sine với cosine. Giá trị secant -2 là $1/\cos\theta$. Các bình phương của chúng là 3 và 4 (khác nhau 1 đơn vị). Điều này dù rất quan trọng nhưng lại dễ bị phớt lờ. Có ba hệ thức về *bình phương* của sáu số này, và chúng là các đồng nhất thức quan trọng của lượng giác:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

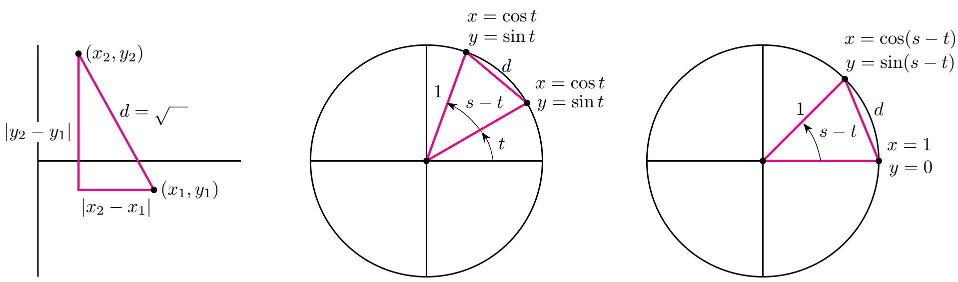
Tất cả các đồng nhất thức trên đều được suy ra từ định lý Pythagore $x^2 + y^2 = r^2$. Chia bởi r^2 đưa ra $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$. Đó là $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Chia bởi x^2 đưa ra đồng nhất thức thứ hai, đó là $1 + (y/x)^2 = (r/x)^2$. Chia bởi y^2 đưa ra đồng nhất thức thứ ba. Cả ba đồng nhất thức này đều rất cần thiết xuyên suốt cuốn sách này—và chúng ta nhất định không được quên đồng nhất thức thứ nhất.

KHOẢNG CÁCH VÀ CÁC CÔNG THỨC CỘNG

Để tính khoảng cách giữa các điểm, chúng ta dùng công thức Pythagore. Các điểm được cho thấy trong Hình 1.5.3a. Những điểm này được xác định bởi các toạ độ x và y của chúng, và d là khoảng cách giữa chúng. Cùng với điểm thứ ba tạo thành một tam giác vuông.

Chúng ta dễ dàng thu được khoảng cách x dọc theo đáy. Nó là $|x_2 - x_1|$. Khoảng cách theo phương đứng dọc theo cạnh bên là $|y_2 - y_1|$. Công thức Pythagore ngay lập lức đưa ra khoảng cách d:

(1.5.1) ***khoảng cách giữa hai điểm*** $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



HÌNH 1.5.3. Khoảng cách giữa các các điểm và các khoảng cách bằng nhau trong hai đường tròn.

Bằng cách áp dụng công thức khoảng cách trong hai đường tròn bằng nhau, chúng ta khám phá ra cosine của $s - t$. (Việc trừ các góc là cần thiết.) Trong Hình 1.5.3b, bình phương khoảng cách là

$$d^2 = (\text{độ biến thiên của } x)^2 + (\text{độ biến thiên của } y)^2$$
$$(1.5.2) \qquad = (\cos s - \cos t)^2 + (\sin s - \sin t)^2.$$

Hình 1.5.3c cho thấy cùng đường tròn và tam giác (nhưng đã bị quay). Bình phương khoảng cách tương tự là

$$(1.5.3) \qquad d^2 = (\cos(s-t) - 1)^2 + (\sin(s-t))^2.$$

Bây giờ khai triển các bình phương trong các phương trình (1.5.2) và (1.5.3). Bất cứ khi nào $(\text{cosine})^2 + (\text{sine})^2$ xuất hiện, thay nó bởi 1. Khoảng cách là như nhau, nên (1.5.2) = (1.5.3) :

$$(1.5.2) = 1 + 1 - 2\cos s \cos t - 2\sin s \sin t$$
$$(1.5.3) = 1 + 1 - 2\cos(s-t).$$

Sau khi triệt tiêu $1+1$ và tiếp đó triệt tiêu -2, chúng ta ta có "***công thức cộng***" đối với $\cos(s-t)$:

(1.5.4) Cosine của $s - t$ bằng $\cos s \cos t + \sin s \sin t$.

(1.5.5) Cosine của $s + t$ bằng $\cos s \cos t - \sin s \sin t$.

Dễ thấy nhất là khi $t = 0$. Khi đó $\cos 0 = 1$ và $\sin 0 = 0$. Các phương trình quy thành $\cos s = \cos s$.

Để đi từ 1.5.4 tới 1.5.5 trong mọi trường hợp, thay t bởi $-t$. Không có sự thay đổi nào trong $\cos t$, nhưng một "dấu trừ" xuất hiện với sine. Trong trường hợp đặc biệt $s = t$, chúng ta có $\cos(s+t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t$. Đây là một công thức được dùng nhiều đối với $\cos 2t$.

(1.5.6) ***Góc nhân đôi***: $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.

Tôi liên tục dùng công thức $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ để chuyển đổi giữa các sine và các cosine.

Chúng ta cũng cần các công thức cộng và các công thức góc nhân đôi đối với *sine* của $s - t$ và $s + t$ và $2t$. Chúng ta cần chúng để kết nối sine với cosine, thay vì $(\text{sine})^2$ và $(\text{cosine})^2$. Mối liên kết này quay về tỷ số y/r trong tam giác ban đầu. Đây là sine của góc θ và cũng là cosine của góc phụ $\pi/2 - \theta$:

$$(1.5.7) \qquad \sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ và } \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta).$$

Góc phụ với góc θ là góc $\pi/2 - \theta$ bởi vì hai góc này cộng lại với nhau bằng $\pi/2$ (một góc vuông). Bằng cách thực hiện liên kết này trong Bài tập 19, các công thức (1.5.4-1.5.5-1.5.6) của chuyển từ các cosine sang các sine:

$$(1.5.8) \qquad \sin(s-t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$$
$$(1.5.9) \qquad \sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$
$$(1.5.10) \qquad \sin 2t = \sin(t+t) = 2\sin s \sin t$$

Tôi muốn dừng lại với mười công thức này, mặc dù tôi có thể đưa ra nhiều hơn. Lượng giác có quá nhiều công thức liên quan đến sáu hàm cơ bản của nó—cơ bản là bởi vì tất cả các hàm số được sinh ra từ một tam giác vuông. Các tỷ số của x, y, r và phương trình $x^2 + y^2 = r^2$ có thể được viết lại theo nhiều cách. Nhưng bạn đã vừa thấy những công thức cần cho giải tích.[21] Chúng đưa ra các đạo hàm trong Chương 2 và các tích phân trong Chương 5. Nhưng chúng ta không thể không nhắc thêm về một đặc trưng riêng của giải tích—một giới hạn trong đó một góc tiến tới không. *Cốt lõi của giải tích chính là nằm trong giới hạn đó.*

Ôn tập về mười công thức Hình 1.5.4 cho thấy $d^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$.

$$\begin{array}{rlcrl}
3\cos\frac{\pi}{6} &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} & (s-t) & \sin\frac{\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} \\
\cos\frac{5\pi}{6} &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} & (s+t) & \sin\frac{5\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} \\
\cos\frac{2\pi}{3} &= \cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} & (2t) & \sin\frac{2\pi}{3} &= 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} \\
\cos\frac{\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & (\frac{\pi}{2} - \theta) & \sin\frac{\pi}{6} &= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}
\end{array}$$

HÌNH 1.5.4

BÀI TẬP 1.5

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Bắt đầu với một tam giác ___a___, sáu hàm cơ bản là ___b___ của các cạnh. Hai tỷ số (cosine x/r và ___c___) nhỏ hơn 1. Hai tỷ số (sec r/x và ___d___) lớn hơn 1. Hai tỷ số (___e___ và ___f___) có thể nhận bất kỳ giá trị nào. Sáu hàm số được xác định đối với mọi góc θ, bằng cách đổi từ một hình tam giác sang một ___g___.

Góc θ được đo theo ___h___. Một vòng hoàn chỉnh là $\theta =$ ___i___ khi quãng đường vòng quanh là $2\pi r$. Quãng đường tới góc θ là ___j___. Tất cả sáu hàm số đều có chu kỳ___k___. Việc đi cùng chiều kim đồng hồ làm đổi dấu của θ và ___l___ và ___m___. Vì $\cos(-\theta) = \cos\theta$, cosine là ___n___.

Ba đồng nhất thức được sinh ra từ $x^2 + y^2 = r^2$ đó là $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ và ___o___ và ___p___. (Chia bởi r^2 và ___q___ và ___r___). Khoảng cách từ $(2, 5)$ tới $(3, 4)$ là $d =$ ___s___. Khoảng cách từ $(1, 0)$ tới $(\cos(s-t), \sin(s-t))$ kéo theo công thức cộng $\cos(s-t) =$ ___t___. Việc đổi dấu của t đưa ra $\cos(s+t) =$ ___u___. Việc chọn $s = t$ đưa ra $\cos 2t =$ ___v___ hoặc ___w___. Vì vậy, $\frac{1}{2}(1 + \cos 2t) =$ ___x___, một công thức được cần trong giải tích.

1.5.1. Trong một tam giác 60-60-60 (tam giác đều), chứng tỏ tại sao $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

1.5.2. Chuyển đổi $\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{4}$ sang độ và $60^\circ, 90^\circ, 270^\circ$ sang radian. Những góc nào giữa 0 và 2π tương ứng với $\theta = 480^\circ$ và $\theta = -1^\circ$?

1.5.3. Vẽ các đồ thị của $\tan\theta$ và $\cot\theta$ từ 0 tới 2π. Hỏi chu kỳ (ngắn nhất) của chúng?

[21] Giải tích lại từ (6) rút ra được $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ và $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$.

1.5.4. Chứng tỏ rằng $\cos 2\theta$ và $\cos^2\theta$ cùng có chu kỳ π và vẽ chúng trên cùng một đồ thị.

1.5.5. Tại $\theta = 3\pi/2$, tính sáu hàm cơ bản và kiểm tra $\cos^2\theta + \sin^2\theta$, $\sec^2\theta - \tan^2\theta$, $\csc^2\theta - \cot^2\theta$.

1.5.6. Lập một bảng giá trị của sáu hàm cơ bản tại $\theta = 0, \frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{2}, \pi$.

1.5.7. Diện tích của hình tròn là πr^2. Hỏi diện tích của hình quạt có góc θ? Nó là một phần ________ của toàn bộ diện tích.

1.5.8. Tìm khoảng cách từ $(1, 0)$ tới $(0, 1)$ dọc theo (a) một đường thẳng (b) một phần tư đường tròn (c) một nửa đường tròn có tâm tại $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1.5.9. Tìm khoảng cách d từ $(1, 0)$ đến $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ và chỉ ra trên đường tròn tại sao $6d$ nhỏ hơn 2π.

1.5.10. Trong Hình 1.5.4, tính d^2 và (với máy tính cầm tay) $12d$. Tại sao $12d$ gần với và nhỏ hơn 2π?

1.5.11. Quyết định xem các phương trình sau là đúng hay sai:

(a) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

(b) $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

(c) $\cos\theta - \sec\theta = \sin\theta\tan\theta$

(d) $\sin(2\pi - \theta) = \sin\theta$

1.5.12. Đơn giản hóa $\sin(\pi-\theta)$, $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$.

1.5.13. Từ công thức đối với $\cos(2t+t)$, tìm $\cos 3t$ theo $\cos t$.

1.5.14. Từ công thức đối với $\sin(2t+t)$, tìm $\sin 3t$ theo $\sin t$.

1.5.15. Bằng cách lấy trung bình $\cos(s-t)$ và $\cos(s+t)$ trong 1.5.4-1.5.5, tìm một công thức đối với $\cos s \cos t$. Tìm một công thức tương tự đối với $\sin s \sin t$.

1.5.16. Chứng tỏ rằng $(\cos t + i\sin t)^2 = \cos 2t + i\sin 2t$, nếu $i^2 = -1$.

1.5.17. Vẽ $\cos\theta$ và $\sec\theta$ trên cùng một đồ thị. Tìm tất cả các điểm mà $\cos\theta = \sec\theta$.

1.5.18. Tìm tất cả các góc s và t giữa 0 và 2π mà $\sin(s+t) = \sin s + \sin t$.

1.5.19. Hai góc phụ nhau có $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$. Viết $\sin(s+t)$ dưới dạng $\cos(\frac{\pi}{2} - s - t)$ và áp dụng công thức 1.5.4 với $\pi/2 - s$ thay vì s. Bằng cách này, rút ra công thức cộng 1.5.9.

1.5.20. Nếu công thức 1.5.9 là đúng, làm thế nào bạn chứng minh 1.5.8?

1.5.21. Kiểm tra các công thức cộng 1.5.4-1.5.5 và 1.5.8-1.5.9 đối với $s = t = \pi/4$.

1.5.22. Dùng 1.5.5 và 1.5.9 để tìm một công thức đối với $\tan(s+t)$.

Trong 1.5.23-1.5.28 tìm *mỗi* θ mà thỏa mãn phương trình.

1.5.23. $\sin\theta = -1$

1.5.24. $\sec\theta = -2$

1.5.25. $\sin\theta = \cos\theta$

1.5.26. $\sin\theta = \theta$

1.5.27. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = 1$

1.5.28. $\tan\theta = 0$

1.5.29. Viết lại $\cos\theta + \sin\theta$ dưới dạng $\sqrt{2}\sin(\theta+\phi)$ bằng cách chọn "góc pha" đúng ϕ. (Làm cho phương trình đúng tại $\theta = 0$. Bình phương hai vế để kiểm tra.)

1.5.30. Đồng nhất $a\sin x + b\cos x$ với $A\sin(x+\phi)$. Từ phương trình 1.5.9 chứng tỏ rằng $a = A\cos\phi$ và $b = A\sin\phi$. Bình phương và cộng lại với nhau để tìm $A =$ ________. Chia để tìm $\tan\phi = \frac{b}{a}$.

1.5.31. Vẽ đáy của một tam giác từ gốc tọa độ $O = (0, 0)$ tới $P = (a, 0)$. Đỉnh thứ ba là tại $Q = (b\cos\theta, b\sin\theta)$. Hỏi các chiều dài cạnh bên OP và OQ? Từ công thức khoảng cách 1.5.1, chứng tỏ rằng cạnh PQ có chiều dài

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. (định luật cosine)

1.5.32. Mở rộng hình tam giác ở bài trước thành một hình bình hành với đỉnh thứ tư của nó tại $R = (a + b\cos\theta, b\sin\theta)$. Tìm bình phương chiều dài của đường chéo OR.

Vẽ các đồ thị đối với các phương trình 1.5.33-1.5.36 và đánh dấu ba điểm.

1.5.33. $y = \sin 2x$

1.5.34. $y = 2\sin\pi x$

1.5.35. $y = \frac{1}{2}\cos 2\pi x$

1.5.36. $y = \sin x + \cos x$

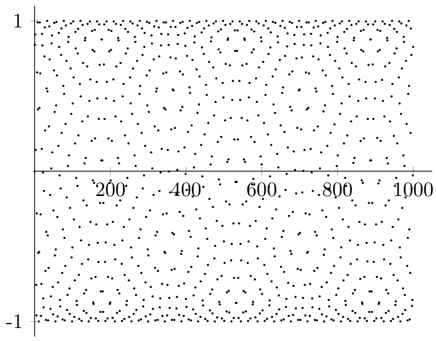
1.5.37. Trong sáu hàm lượng giác, hàm nào có giá trị vô hạn tại các góc nào?

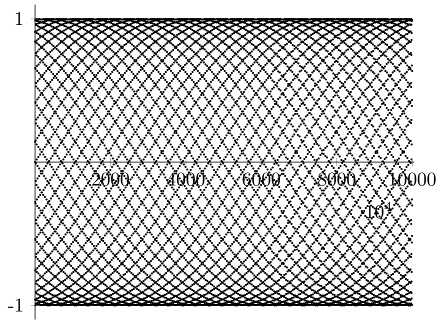
1.5.38. Vẽ các đồ thị thô hoặc các đồ thị máy tính của $t\sin t$ và $\sin 4t \sin t$ từ 0 đến 2π.

1.6. Hàng nghìn Điểm Sáng

Các đồ thị trên bìa sau của cuốn sách này cho thấy $y = \sin n$. Hàm số này rất khác với hàm số $y = \sin x$. Đồ thị của $\sin x$ là một đường cong liên tục. Vào lúc nó đạt đến $x = 10,000$, đường cong đã đi lên và và đi xuống $10,000/2\pi$ lần. 1591 dao động này là nhiều đến nỗi mà bạn không thể nhìn thấy bất kỳ thứ gì. Đồ thị của $\sin n$ lấy ra $10,000$ điểm từ đồ thị $\sin x$—và do nhiều lý do mà những điểm này dường như nằm trên hơn 40 đường sine riêng biệt.

Đồ thị thứ hai cho thấy 1000 điểm đầu tiên. Chúng dường như không nằm trên các đường sine. Hầu hết mọi người nhìn thấy các hình lục giác. Nhưng chúng chỉ là hàng nghìn điểm này mà thôi! Dù khó tin nhưng hai đồ thị này chỉ là là một. Nghiêng đồ thị thứ hai và nhìn từ bên dưới một góc hẹp. Chúng ta bây giờ thấy được đồ thị thứ nhất. Bạn sẽ nhìn thấy những "viên kim cương." Góc nhìn hẹp làm nén trục x—đưa chúng ta quay lại tỷ lệ của đồ thị thứ nhất.





Ảnh hưởng do tỷ lệ là điều chúng ta ít nghĩ đến mặc dù chúng ta hiểu ảnh hưởng của tỷ lệ đối với các bản đồ. Máy tính có thể phóng to hoặc thu nhỏ—đó là những thay đổi về tỷ lệ. Nhưng gì mắt của chúng ta nhìn thấy phụ thuộc vào những thứ gì là "gần nhau." Chúng ta nghĩ mình nhìn thấy các đường sine trong đồ thị $10,000$ điểm, và từ đó nảy sinh ra một số câu hỏi:

(1) Những điểm nào gần $(0,0)$?
(2) Có bao nhiêu đường sine ở đó?
(3) Đường cong chính giữa, đi lên từ $(0,0)$, đi về lại tới 0 ở đâu?

Một điểm gần $(0,0)$ thực sự có nghĩa rằng $\sin n$ gần với 0. Điều đó chắc chắn không đúng với $\sin 1$ (1 là một radian). Trong thực tế, $\sin 1$ có giá trị là 0.84 trên trục tung, tại điểm bắt đầu của đường sine thứ bảy. Tương tự, $\sin 2$ là 0.91 và $\sin 3$ là .14. (Các số 3 và .14 làm cho chúng ta nghĩ về π. Sine của 3 bằng sine của $\pi - 3$. Khi đó, $\sin .14$ là gần với 0.14.) Tương tự, $\sin 4, \sin 5, \ldots, \sin 21$ là không đặc biệt gần với 0.

Điểm đầu tiên tiến gần tới $(0,0)$ ***là*** $\sin 22$. Điều này là do $22/7$ là gần với π. Khi đó 22 là gần với 7π, mà có sine bằng không:

$$\sin 22 = \sin(7\pi - 22) \approx \sin(-.01) \approx .01.$$

Đó là điểm đầu tiên nằm bên phải của $(0,0)$ và hơi nằm dưới trục hoành. Bạn có thể nhìn thấy nó trên đồ thị 1, và rõ hơn trên đồ thị 2. Nó bắt đầu một đường cong đi xuống.

Điểm tiếp theo tiến gần tới $(0,0)$ là $\sin 44$. Điều này là do 44 chỉ vượt quá 14π một lượng khá bé.

$$44 \approx 14\pi + .02 \text{ nên } \sin 44 \approx \sin .02 \approx .02.$$

Điểm $(44, \sin 44)$ ***này bắt đầu đường sine ở giữa***. Tiếp đó là $(88, \sin 88)$.

Bây giờ chúng ta đã biết rồi. Có 44 đường cong. Chúng bắt đầu tại các độ cao gần với những độ cao của $\sin 0, \sin 1, \ldots, \sin 43$. Trong số 44 đường cong này, 22 bắt đầu đi lên và 22 bắt đầu đi xuống. Tôi đã bối rối ngay lúc đầu, vì tôi chỉ có thể tìm thấy 42 đường cong. Nguyên nhân là $\sin 11$ bằng -0.99999 và $\sin 33$ bằng 0.9999. Chúng rất sát với đáy và đỉnh nên bạn không thể nhìn thấy các đường cong của chúng. Sine của 11 gần bằng -1 bởi vì $\sin 22$ gần bằng không. Việc lần theo một đường cong đi ngang qua đỉnh—đi xuống trở lại là không thể, nó không phải là đường cong dễ thấy như bạn nghĩ.

Những điểm trên đường cong chính giữa là tại $n = 0$ và 44 và 88 và mỗi số có dạng $44N$. Đường cong này đi về lại tới 0 ở đâu? Nói cách khác, khi nào $44N$ tiến tới *rất gần* với một bội của π? Chúng ta biết rằng 44 là $14\pi + .02$. Chính xác hơn là $44 = 14\pi + .177$. Vậy, chúng ta nhân .177 cho đến khi chúng ta đạt đến π:

$$\text{nếu } N = \pi/.0177, \text{ khi đó } 44N = (14\pi + .0177)N = 14\pi N + \pi.$$

Điều này đưa ra $N = 177.5$. Tại điểm đó, $44N = 7810$. Đây là nửa chu kỳ của đường sine. Sine của 7810 gần bằng không.

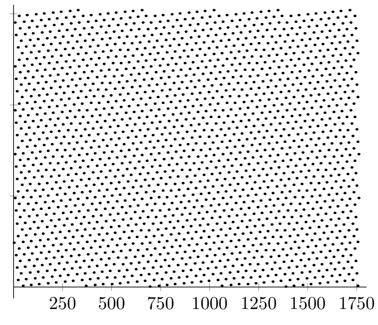
Nếu bạn đi theo đường sine chính giữa bạn sẽ thấy nó đi về lại tới không phía trên 7810. Các điểm thực sự trên đường cong đó có $n = 44{\cdot}177$ và $n = 44{\cdot}178$, với các sine nằm ngay phía trên và phía dưới không. Đường nằm giữa hai đường này ứng với $n = 7810$. ***Phương trình đối với đường sine chính giữa là*** $y = \sin(\pi x/7810)$. Chu kỳ của nó là 15.620—vượt quá đồ thị của chúng ta.

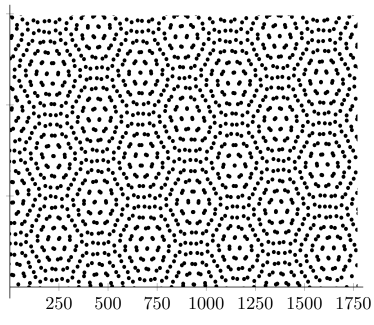
Câu hỏi 9. *Điểm thứ tư nằm trên đường cong chính giữa trông giống như điểm thứ tư đi xuống từ* $\sin 3$. *"Điểm kép" này là gì?*

Câu trả lời. 4 lần 44 là 176. Trên đường cong đi lên, điểm đó là $(176, \sin 176)$. Trên đường cong đi xuống, điểm đó là $(179, \sin 179)$. Các sine của 176 và 179 chỉ khác nhau một lượng .00003.

Đồ thị thứ hai trải rộng ra điểm kép này. Nhìn phía trên 176 và 179, tại tâm của một hình lục giác. Bạn có thể đi theo đường sine đến hết đường xuyên suốt đồ thị 2.

Chỉ còn một câu hỏi nhỏ. Tại sao đồ thị 2 có các hình lục giác? *Tôi không biết.* Vấn đề này là do mắt của bạn. Để hiểu các hình lục giác, Doug Hardin[22] đã vẽ đồ thị các điểm trên các đường thẳng cũng như các đường sine. Đồ thị 3 cho thấy $y =$ phần lẻ của $n/2\pi$. Sau đó ông đã làm một bản sao thứ hai, lật mặt trước ra mặt sau, và đặt chồng lên trên. Điều đó sinh ra đồ thị 4—với các hình lục giác. Các đồ thị 3 và 4 nằm ở trang tiếp theo.





[22]Nd: Douglas P. Hardin, Giáo sư, Khoa Toán, Đại học Vanderbilt (tiếng Anh: Vanderbilt University).

Đây được gọi là một mô hình ***Moiré***. Nếu bạn có một bản sao trong suốt của đồ thị 3, chồng bản sao đó lên trên bản gốc và xoay nó, bạn sẽ thấy những hình lục giác. Chúng được sinh ra từ sự giao thoa giữa các mô hình tuần hoàn—trong trường hợp của chúng ta, 44/7 và 25/4 và 19/3 là rất gần với 2π. Các máy in khó mà in được các hình ảnh của những sự giao thoa này. Những sự giao thoa này còn có thể gây ra các sọc đứng trên TV. Ngoài ra, trong quá trình làm ra các tấm vải, những công nhân vận hành bị chóng mặt khi thường xuyên thấy các mô hình Moiré di chuyển. Các mô hình Moiré có các ứng dụng hay trong kỹ thuật và quang học—nhưng chúng ta phải quay lại với giải tích.

1.7. Điện toán trong Giải tích

Có rất nhiều phần mềm sẵn có để hỗ trợ cho các khóa học giải tích. Các gói lệnh càng ngày càng hoàn thiện hơn. Việc dùng chương trình nào còn tuỳ thuộc vào chi phí, sự thuận tiện và mục đích. Nhưng làm thế nào để sử dụng chúng là một câu hỏi còn khó hơn nữa. Những trang sách này giới thiệu một số mục tiêu, cũng như các gói lệnh và những chiếc máy tính cầm tay cụ thể. Sau đó, chúng ta bắt đầu (đây vẫn là Chương 1) với những sự kết nối giữa điện toán và giải tích.

Thảo luận của mục này sẽ mang tính trao đổi là chủ yếu. Việc bê nguyên sách hướng dẫn sử dụng của các phần mềm, các gói lệnh hay các máy tính cầm tay vào đây là không có ý nghĩa gì cả. Mục tiêu của chúng tôi là bằng các ví dụ và thông tin được đưa ra hướng dẫn người học dùng điện toán để hỗ trợ quá trình học tập của chính mình.

Đối với giải tích, ***lợi thế lớn nhất của máy tính đó là cung cấp các đồ họa***. Bạn nhìn thấy hàm số, chứ không chỉ là công thức. Khi bạn nhìn một đồ thị, bạn sẽ thấy được $f(x)$ có đạt đến một cực đại hoặc một cực tiểu hay không. Nếu bạn muốn, máy tính thậm chí còn có thể đưa ra một đồ thị riêng biệt cho thấy đạo hàm của hàm số này. Nhưng những điều này không phải lúc nào cũng đúng 100%, mọi người sẽ biết ngay—ngay khi một vài hàm số đã được nhập vào. Mặc dù vậy sức hút tìm hiểu bộ môn này là rất lớn và chính khả năng tùy biến cao của điện toán đã tạo nên sức hút lớn như vậy. Nếu chúng ta không thích hình máy tính đưa ra, chúng ta có thể thay đổi sang một cửa sổ mới.Đây chính là đồ họa máy tính. Nó kết hợp tính toán mang tính chất ***số*** thuần túy với tính toán mang tính ***đồ họa***. Bạn nhận được hình cũng những các con số—một sự kết hợp mang nhiều ưu điểm. Máy tính cung cấp trải nghiệm thực tế trong quá trình làm việc với một hàm số. Miền xác định và vùng giá trị không chỉ là những ý tưởng trừu tượng. Với điện toán, *bạn có khả năng tự chọn chúng*. Dưới đây là một vài ví dụ.

Ví dụ 1.7.1. Chắc chắn x^3 bằng 3^x khi $x = 3$. ***Vậy những đồ thị này có giao nhau thêm một lần nữa hay không***? Tại thời điểm này, chúng ta không biết ý nghĩa đầy đủ của 3^x vì chúng ta đã học đến đâu, trừ khi x là một số nguyên, chúng ta còn biết chút ít. (Ngay cả máy tính cũng không biết.) Kiểm tra tại $x = 2$ và 4, hàm số x^3 là nhỏ hơn trong cả hai lần: 2^3 là nhỏ hơn 3^2 và $4^3 = 64$ là nhỏ hơn $3^4 = 81$. Nếu x^3 luôn nhỏ hơn 3^x, chúng ta cần phải biết và ghi nhớ điều này—những hàm số này là một trong những hàm cơ bản của toán học.

Máy tính sẽ đưa ra câu trả lời dưới dạng các con số hoặc đồ thị. Theo lệnh của chúng ta, máy tính giải $x^3 = 3^x$. Theo một lệnh khác, nó vẽ cả hai đồ thị—việc vẽ đồ thị này cho biết nhiều điều hơn. Những gì hiển thị trên màn hình máy tính chứng tỏ một điểm logic (hoặc toán học) mà chúng ta đã bỏ quả. Nếu các đồ thị này giao nhau một lần, chúng phải giao nhau thêm một lần nữa—vì 3^x lớn hơn x^3 tại 2 và 4. Chúng ta nhìn thấy một giao điểm gần với 2.5 khi phóng to. Tôi quan tâm đến vị trí của giao điểm nhiều hơn đến con số chính xác—x của giao điểm đó nằm trước $x = 3$.

Một vài kết luận từ ví dụ cơ bản như vậy:

(1) Một siêu máy tính là không cần thiết.
(2) Lập trình bậc cao là không cần thiết.
(3) Chúng ta có thể làm toán mà không hoàn toàn hiểu bản chất toán học.

Điểm thứ ba nghe không hay lắm. Nói một cách khác: ***Chúng ta học toán trong quá trình làm toán***. Điều khó nhất của việc dạy giải tích là biến bộ môn này từ một môn thể thao biểu diễn thành một môn thể dục, nghĩa là, biến người học từ khán giả thành vận động viên. Máy tính biến điều này trở thành hiện thực.

Ví dụ 1.7.2 (máy tính trí tuệ). So sánh x^2 với 2^x. Các hàm số này bằng nhau tại $x = 2$. Vậy chúng có bằng nhau tại một x nào khác hay không? Liệu x đó nằm trước hay sau 2?
Đây là điện toán trí tuệ bởi vì đáp án là một số nguyên (4). Bây giờ chúng ta đi theo một hướng mới. Liệu một tính huống ngẫu nhiên tương tự như $2^4 = 4^2$ có xảy ra thêm một lần nữa hay không? Liệu máy móc có thể cho chúng ta biết về các số nguyên có tính chất này hay không? Có lẽ nó có thể vẽ đồ thị các nghiệm của $x^b = b^x$. Tôi đã dùng *Mathematica* để tìm một công thức với hy vọng khám phá ra x là một hàm số như thế nào của b—nhưng chương trình chỉ trả lại phương trình tôi đã nhập vào. Đối với những lúc như vậy, chính chiếc máy đã nhập HELP chứ không phải người sử dụng.

Vâng, giải tích thật không vô ích chút nào. Tôi tự hào về giải tích. Có một bài tập mới ở phần cuối của Mục 6.4, để chưng tỏ rằng chúng ta không bao giờ nhìn thấy một số nguyên có tính chất như vậy thêm một lần nữa.

Ví dụ 1.7.3. Tìm số b để $x^b = b^x$ chỉ có duy nhất ***một*** nghiệm (tại $x = b$). Khi b là 3, nghiệm thứ hai nhỏ hơn 3. Khi b là 2, thứ hai (4) là lớn hơn 2. Nếu ta di chuyển b từ 2 tới 3, phải có một "điểm kép" đặc biệt—tại đó đồ thị gần chạm nhau nhưng không cắt ngang qua nhau. Đối với b cụ thể đó—và chỉ đối với một giá trị đó—đường x^b không bao giờ vượt lên nằm trên đường b^x.

Điểm b đặc biệt này có thể được tìm thấy với các đồ họa máy tính. Bằng nhiều cách, nó là "***trọng điểm của giải tích***." Vì các đường cong chạm nhau nhưng không cắt ngang qua nhau, nên chúng là tiếp xúc với nhau. Chúng có cùng hệ số góc tại điểm kép. Giải tích đã được tạo ra để làm việc với các hệ số góc, và chúng ta đã biết hệ số góc của x^2. Chúng ta cũng sẽ sơm biết hệ số góc của x^b. Cuối cùng, chúng ta khám phá hệ số góc của b^x, và xác định con số quan trọng nhất trong giải tích.

Quan trọng là còn số này có thể được khám phá ra trước tiên nhờ kinh nghiệm.

Ví dụ 1.7.4. Vẽ đồ thị $y = e^x - x^e$. Xác định vị trí cực tiểu của nó.

Ví dụ sau được đề xuất bởi Don Small[23]. Giải $x^4 - 11x^3 + 5x - 2 = 0$. Công cụ đầu tiên đó là đại số—cố gắng phân tích đa thức thành các nhân tử. Cách này thành công đối với phương trình bậc hai nhưng lại cực kỳ khó đối với các phương trình bậc lớn hơn. Ngay cả khi máy tính có thể thực hiện đại số tốt hơn khả năng của chúng ta, việc nhân tử hoá là cách ít khi được dùng. Trong thực tế, chúng ta có hai lựa chọn tốt hơn hẳn:

(1) (***Toán học***) Dùng đạo hàm. Giải bằng phương pháp của Newton.
(2) (***Đồ họa***) Vẽ đồ thị hàm số và phóng to.

Cả hai cách này đều sẽ được thực hiện bởi máy tính nhưng cũng đều chứa nhiều vấn đề tiềm ẩn. Phương pháp của Newton có thể đưa ra đáp án cực kỳ nhanh chóng, nhưng cũng đồng nghĩa với việc nó có thể nhanh sai. (Phương pháp này rất

[23]Nd: Don Small, Giáo sư, Khoa Khoa học Toán, Học viên Quân sự Hoa Kỳ (tiếng Anh: United States Military Academy) hay Westpoint.

tuyệt.)Việc vẽ đồ thị là cũng thể đưa ra đáp án rất nhanh—nhưng các nghiệm có thể nằm ngoài khung hình. Hàm cụ thể này chỉ bằng không một lần, nằm trong khung hình chuẩn từ -10 tới 10. Đồ thị có vẻ rời khỏi 0, nhưng toán học một lần nữa dự đoán có một điểm cắt thứ hai. Vậy chúng ta thu nhỏ trước khi chúng ta phóng to.

Việc dùng chức năng thu phóng là phần hữu dụng nhất của việc vẽ đồ thị. Chúng ta không chỉ *chọn* miền xác định và vùng giá trị, chúng ta còn *thay đổi* chúng. Khung hình được điều khiển bởi bốn số. Chúng có thể là các giới hạn $A \leqslant x \leqslant B$ và $C \leqslant y \leqslant D$. Chúng có thể là các toạ độ của hai góc đối diện nhau (A, C) và (B, D). Chúng có thể là vị trí trung tâm (a, b) và các hệ số thu phóng c và d. Nhấp vào các góc đối diện nhau của hộp thu phóng là cách nhanh nhất, trừ khi tâm là không đổi và chúng ta chỉ cần đưa ra các hệ số thu phóng. (Thậm chí còn nhanh hơn: Dùng hệ số thu phóng mặc định.) Mục 3.4 thảo luận về ***phép biến đổi căn giữa*** và ***phép biến đổi thu phóng***—một cách thay đổi ảnh trên màn hình và một cách đổi biến bên trong hàm số.

Ví dụ 1.7.5. Tìm tất cả nghiệm thực cho $x^4 - 11x^3 + 5x - 2 = 0$.

Ví dụ 1.7.6. Phóng to và thu nhỏ trên các đồ thị của $y = \cos 40x$ và $y = x \sin(1/x)$. Mô tả những gì bạn thấy.

Ví dụ 1.7.7. Hàm số $y = (\tan x - \sin x)/x^3$ sẽ như thế nào tại $x = 0$? Đối với x nhỏ, chúng ta khó mà phân biệt được $\tan x$ với $\sin x$ trên đồ thị. Máy tính có thể đưa ra $y = 0$ đối với sai số đủ lớn. Liệu bạn có thể nhìn đủ gần để thấy được giới hạn của y hay không?

Đối với những ví dụ này, và đối với hầu hết các bài tập máy tính trong cuốn sách này, một hệ thống dựa trên bảng chọn[24] là hoàn toàn đủ. Có một loạt các lệnh để chúng ta lựa chọn. Người dùng cung cấp một công thức đối với $y(x)$, và nhiều hàm được dựng sẵn[25]. Một phần mềm đi kèm với các gói lệnh bổ sung chuyên cho giải tích có thể rất hữu ích—*MicroCalc* hoặc *True BASIC* hoặc *Exploring Calculus* hoặc *MPP* (trong phạm vi công cộng[26]). Các phần mềm cụ thể cho đồ họa là *Surface Plotter* và *Master Grapher* và *Gyrograhics* (đầy sinh động). Phần mềm tốt nhất đối với đại số tuyến tính là *MATLAB*.

Các gói lệnh đầy sức mạnh càng ngày càng tiện dụng và rẻ hơn. Chúng có khả năng tính toán với ký hiệu—mà mở ra con đường thứ ba của điện toán trong giải tích.

ĐIỆN TOÁN KÝ HIỆU

Trong điện toán ký hiệu, các đáp án có thể là các *công thức* cũng như các *con số* và các *đồ thị*. Đạo hàm của $y = x^2$ được xem là "$2x$". Đạo hàm của $\sin t$ là "$\cos t$". Chương trình cũng biết hệ số góc của b^2. Máy tính làm được nhiều việc hơn chỉ là thế các con số vào các công thức—nó trực tiếp thao tác trên các công thức. Chúng ta cũng cần nghĩ đến việc điện toán ký hiệu có thể giúp được gì cho mình trong quá trình học giải tích.

Theo cách nào đó, điện toán ký hiệu là rất gần với những gì bản thân chúng ta thực hiện. Có lẽ rất gần—chúng ta đang học toán nhưng *tất cả* những gì chúng

[24]Nd: Hệ thống dựa trên bảng chọn là một phần mềm mà được vận hành bằng cách dùng các bảng chọn tập tin thay vì dùng các lệnh. Ví dụ, trong một chương trình đang được mở, người dùng nhấp vào tùy chọn File từ bảng chọn trên cạnh trên của màn hình và chọn Quit để đóng chương trình.

[25]Nd: Hàm được dựng sẵn là một hàm số mà được xây dựng trước trong chương trình và có thể được truy cập ngay bởi người dùng.

[26]Nd: Phạm vi Công cộng (Public Domain) bao gồm các kiến thức hay sự sáng tạo mà không một cá nhân hay một chủ thể luật pháp nào có thể thiết lập hay giữ quyền sở hữu.

thao làm chỉ là thao tác với ký hiệu, và điều này rất nguy hiểm. Với một ngôn ngữ bậc cao và đủ năng lượng, một máy tính có thể in ra đạo hàm của $\sin(x^2)$. Thế tại sao chúng ta lại học quy luật xích? Bởi vì toán học đi sâu hơn là "đại số với các công thức." Chúng ta làm việc với các ý tưởng.

Tôi muốn nói một cách rõ ràng là: Toán học không phải là các công thức, hay các tính toán, hay thậm chí các chứng minh cũng không phải là toán học, mà chính là các tư tưởng. Ký hiệu và hình ảnh là ngôn ngữ. Sách và người thầy và máy tính có thể kết hợp với nhau trong quá trình dạy toán. Máy tính sẽ không là sự cản trở quá trình tiếp thu của bạn (như cuốn sách này và người thầy của bạn)—bạn có thể học toán theo tốc độ của riêng mình. Việc của bạn đó là học toán bằng cách làm toán.

VÍ DỤ 1.7.8. Một hệ thống đại số máy tính nhanh chóng tính ra 100 giai thừa. Đây là $100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 1$. Số này có 158 chữ số (không được viết hết ra ở đây). 24 chữ số sau cùng đều là các chữ số không. Đối với $10! = 3628800$, có 7 chữ số và hai chữ số không. Giữa 10 và 100, và xa hơn nữa, là các câu hỏi đơn giản cần những ý tưởng:

1. Có (xấp xỉ) bao nhiêu chữ số trong số $N!$?
2. Có (chính xác) bao nhiêu chữ số không ở tận cùng của $N!$.

Đối với Câu hỏi 1, máy tính hiển thị nhiều hơn N chữ số khi $N = 100$. Nó không bao giờ hiển thị nhiều hơn N^2 chữ số, bởi vì không có thừa số nào trong số N thừa số có nhiều hơn N chữ số. Một cận chặt hơn sẽ là $2N$, nhưng cận này có đúng hay không? *Liệu $N!$ có luôn có ít hơn $2N$ chữ số hay không*?

Đối với Câu hỏi 2, các chữ số không trong 10! có thể được giải thích. Một chữ số không được sinh ra từ 10, và một chữ số không khác được sinh ra từ 5 lần 2. (10 cũng bằng 5 lần 2.) Liệu bạn có thể giải thích được việc có 24 chữ số không trong 100! hay không? Chúng ta áp dụng một ý tưởng từ trò chơi đánh bài blackjack cho vấn đề này: Đếm số lượng các số năm.

Câu hỏi khó: Có bao nhiêu chữ số không ở tận cùng của 200!?

Gói lệnh nổi bật đối với điện toán ký hiệu trên quy mô lớn chính là *Mathematica*. Nó được dùng để vẽ các đồ thị cho cuốn sách này, bao gồm $y = \sin n$ ở bìa sau. Lệnh đầy đủ là `ListPlot[Table[Sin[n], {n, 10000}]`. Hệ thống này có mặt mạnh cũng như mặt yếu, bao gồm cả giá cả. Mục đích ban đầu của nó, như *MathCAD* và *MACSYMA* và *REDUCE*, không phải là để dạy giải tích—nhưng nó hoàn toàn có thể bộ môn này. Hệ thống đại số máy tính như *MAPLE* cũng rất tốt.

Khi tôi viết cuốn sách này vào năm 1990, hệ thống đại số máy tính *DERIVE* dần trở nên phổ biến đối với PC. Đối với Masintosh, *Calculus T/L* lại bị "lảng quên" dù nó xứng đáng được dùng rộng rãi. Nó xây dựng trên *MAPLE* và dễ tiếp cận hơn đối với những người dùng học về giải tích. Một giải pháp thay thế quan trọng khác là *Theorist*. Đây đều là những hệ thống dựa trên bảng chọn (vì vậy, lúc mới bắt đầu sẽ dễ dùng hơn) và giá cũng không đắt chút nào.

Tôi đề nghị các bạn học hãy chia sẻ các thiết bị cuối[27] và cùng làm việc với nhau. Hai người dùng một thiết bị cuối và 3-5 người trong một nhóm làm việc có vẻ là một phương án tối ưu. Toán học có thể được học bằng cách *nói* và *viết*—toán học là một hoạt động của nhân loại. Mục tiêu của chúng ta không phải là để kiểm tra mà là để dạy và học.

HÀNH VĂN TRONG GIẢI TÍCH. Liệu tôi có thể nhấn mạnh tầm quan trọng của việc viết lách hay không? Chúng ta quên hẳn việc viết lách khi đáp án chỉ cần một con số. Việc bắt viết một báo cáo dài một trang đúng là làm khó người dạy cũng

[27]Nd: Thiết bị cuối (tiếng Anh: terminal) là một loại thiết bị phần cứng điện tử hoặc điện cơ được dùng để nhập dữ liệu vào và hiển thị hoặc in dữ liệu từ một hệ thống máy tính nhiều người dùng. Tại thời điểm những năm 90, các thiết bị đầu cuối vẫn chưa phổ biến.

như người học—nhưng lại rất có giá trị. Một trình xử lý văn bản sẽ làm cho bản báo cáo trở nên gọn gàng như cuốn sách này vậy. Bạn không thể viết ra các câu nếu bạn không thể tổ chức các ý tưởng—và một phần trong số những ý tưởng này là của riêng bạn.

Tôi sẽ đề xuất một bài tập viết với các tùy chọn. Nếu bạn có máy tính, tuân theo các Ví dụ 1.7.1-1.7.4 ở trên và viết báo cáo. Nếu không có máy tính, hãy chọn ra một đoạn văn bản trong cuốn sách này và viết lại đoạn văn bản đó cho *rõ hơn*. Hãy viết lại đoạn văn bản đó với các ví dụ. Xác định ý tưởng chủ đạo ngay từ đầu, giải thích nó, và quay lại diễn tả theo một cách khác ở phần cuối. Ý tưởng như giống như sáu mặt của xúc sắc—nó có thể được nhìn thấy theo nhiều cách khác nhau.

Mỗi người đọc đều sẽ thầy rằng không có từ "hết rồi" trong phần mềm. Những gói lệnh mới cứ liên tục ra đời (*Analyzer* và *Epic* là một trong số chúng). Những thách thức lớn nhất mà chúng ta gặp phải vào thời điểm này chính là các đồ thị ba chiều và các sách bài tập giải tích. Trong $3D$, vấn đề đó là vị trí của mắt—vì màn hình chỉ hiển thị được $2D$. Trong các sách bài tập, vấn đề đó là chúng ta phải vượt qua các thao tác với ký hiệu để đến với ý tưởng. Mỗi người dạy, kể cả tôi, đều biết đến những khó khăn mà người học gặp phải và hy vọng có thể giúp đỡ họ.

MÁY TÍNH CẦM TAY CÓ CHỨC NĂNG VẼ ĐỒ THỊ

Tính năng có giá trị nhất đối với giải tích—vẽ đồ thị máy tính—là có sẵn trên các máy tính cầm tay. Với chức năng lần theo vết[28] và chức năng thu phóng[29], các đồ thị của chúng là khá dễ đọc. Bằng cách tạo ra các đồ thị, bạn đã học về các hàm số trong tiềm thức. Những máy tính cầm tay này thực sự là máy tính *cá nhân*, và mục đích của các trang tiếp theo là nhằm hỗ trợ và khuyến khích người học dùng chúng.

Các chương trình đối với một máy tính cầm tay có hướng xu hướng đơn giản và ngắn gọn. Chúng ta tất nhiên không đếm các chữ số không trong 100 giai thừa (có lẽ chúng ta có thể làm được). Một máy tính cầm tay tìm các giao điểm và các điểm cực đại tới độ chính xác khá tốt. Trên hết, máy tính cầm tay cho phép bạn tự khám phá bộ môn giải tích. Bạn cài đặt khung hình và xác định hàm số. Sau đó bạn sẽ nhìn đồ thị trên màn hình.

Bạn cần lựa chọn một máy tính cầm tay—*nên mua loại nào*? Đối với cuốn sách này, tôi cùng cần lựa chọn—*nên mô tả loại nào*? Trước đó, tôi cũng đã lựa chọn—các chương trình điện toán hữu ích. May mắn là về mặt logic rõ ràng rằng bạn có thể dịch các hướng dẫn sang bất kỳ ngôn ngữ nào—đối với một máy tính như một máy tính cầm tay. Các chương trình điện toán được đã được cho trong mục này đều là "mẫu số chúng lớn nhất" của điện toán trong giải tích.

Phạm vi lựa chọn đầu tiên bắt đầu với Casio *fx* 7000G—sản phẩm đầu tiên và đơn giản nhất, với bộ nhớ rất khiêm tốn nhưng có một màn hình tốt. Các sản phẩm Casio 7500, 8000, 8500 có bộ nhớ tăng dần và thêm các tính năng. Sản phẩm Sharp *EL*-5200 (hay 9000 ở Canada và châu âu) là có thể so sánh với Casio 8000. Chúng ta có thể nhập *đầu vào dưới dạng đại số* trong các máy này—thứ tự thông thường như trong $y = x + 3$. Chúng không đắt và khá tốt. Đắt hơn và mạnh hơn chính là các máy tính cầm tay Hewlett-Packard—*HP*-28S và *HP*-48SX. Chúng có các bộ nhớ lớn và các bảng chọn mở rộng (và đại số với ký hiệu). Chúng dùng *ký hiệu Ba Lan ngược*—các số trước, rồi các lệnh sau. Chúng ta cần mất nhiều thời gian và nỗ lực, và những cuốn sách khác để thấy hết được các khả năng tuyệt với

[28]Nd: Chức năng lần theo vết (tiếng Anh: trace).
[29]Nd: Chức năng thu phóng (tiếng Anh: zoom).

của chúng . Có thể ước lượng rằng những sinh viên nào dùng những máy tính cầm tay này có thể đạt được 95 cho một bài kiểm tra giải tích điển hình.

Trong khi cuốn sách này đang được viết, hãng Texas Instrument đã sản xuất ra một máy tính cầm tay vẽ đồ thị mới: *TI*-81. Nó khá giống với các mẫu máy của Casio và Sharp (nhấn mạnh vào chức năng vẽ đồ thị, dễ sử dụng, không có đại số với ký hiệu, giá cả phải chăng). Từ khi máy tính cầm tay thế hệ đầu tiên ra đời, nhiều cải tiến đã được thêm vào. Đương nhiên, việc dựa vào cuốn sách này để chọn lựa một máy tính cầm tay tiềm ẩn rủi ro do những mẫu máy kể trên đều là những mẫu máy có mặt trên thị trường tại thời điểm cách Δt trước khi cuốn sách này được xuất bản, và tôi hy vọng rằng những lời khuyên mà các chuyên gia trong lĩnh vực này đưa ra cho chúng ta là đúng. *Dù sao, các chương trình của chúng ta là đối với TI-81.* Mẫu máy này thật là ấn tượng.

Vài trang sách ít ỏi này không thể thay thế cho sách hướng dẫn sử dụng đi kèm với một máy tính cầm tay. Một bổ sung có giá trị đó là một cuốn sách định hướng sử dụng vào một chủ đề nào đó đặc biệt là vào giải tích—cuốn sách yêu thích tuyệt đối của tôi đó là *Các Hoạt động Giải tích cho các Máy tính cầm tay Có chức năng Vẽ đồ thị*[30] của tác giả Dennis Pence (PWS-Kent, 1990 đối với Casio và Sharp và HP-285, 1991 đối với TI-81). Chuỗi sách *Máy tính cầm tay Nâng cao*[31], dùng các mẫu máy của *HP*, được xuất bản bởi Harcourt Brace Jovanovich. Tiếp theo là một phần giới thiệu về thực nghiệm giải tích. Sau đó trong cuốn sách này, chúng ta cung cấp các chương trình TI-81 gần gũi với toán học và các bài tập mà chúng ta đã chuẩn bị để dùng các chương trình này.

Vài lời để bắt đầu: Để chọn từ một bảng chọn, nhấn số thứ tự mục và `ENTER`. Chỉnh sửa một dòng lệnh dùng `DEL`(ete) và `INS`(ert). Mỗi hàng kết thúc với `ENTER`. Đối với giải tích, chọn radian trên màn hình `MODE`. Đối với các luỹ thừa, dùng $\wedge$. Đối với các luỹ thừa đặc biệt, chọn x^2, x^{-1}, $\sqrt{x}$. Phép nhân được ưu tiên, nên $(-)\mathtt{3}+\mathtt{2}\times\mathtt{2}$ sinh ra `1`. Dùng các phím đối với `SIN`, `IF`, `IS`, ... Khi bạn bấm các chữ cái, `I` nhân `S`.

Nếu một chương trình nói `3` $\to$ `C`, gõ `3 STO C ENTER`. Các vị trí lưu trữ là `A` tới `Z` hay các chữ cái Hy Lạp θ.

HÀM SỐ. Một máy tính cầm tay có chức năng vẽ đồ thị giúp bạn (buộc bạn?) hiểu khái niệm của một hàm số. Nó cũng giúp bạn hiểu các hàm cụ thể—đặc biệt khi thay đổi khung hình.

Để tính $y = x^2 - 2x$ đối với *việc chỉ dùng một lần*, dùng màn hình chủ. Để xác định $y(x)$ đối với *việc dùng lặp lại*, di chuyển sang màn hình chỉnh sửa hàm số: Nhấn `MODE`, chọn `FUNCTION`, và nhấn `Y` =. ***Mẹo quan trọng***: đối với `X` trên TI-81, phím `X|T` là nhanh hơn hai bước `AlphaX`. Màn hình chỉnh sửa `Y` = là cùng một nơi mà các công thức được cần cho việc vẽ đồ thị.

VÍ DỤ 1.7.9. Nhấn $\mathtt{Y}_1 = \mathtt{X}^2 - \mathtt{2X}$ `ENTER` trên màn hình `Y` =. Nhấn `4 STO X ENTER` trên màn hình chủ. $\mathtt{Y}_1$ `ENTER` trên màn hình `Y` $-$ `VARS`. Màn hình hiển thị `8`, mà chính là `Y`(4). Công thức vẫn còn được lưu khi máy tính cầm tay được tắt đi.

VẼ ĐỒ THỊ. Bạn chỉ định vùng giá trị X và vùng giá trị Y. (Chúng ta nên nói là miền xác định của X, nhưng chúng ta không nói như vậy.) Màn hình là một lưới gồm 96×64 hình chữ nhật nhỏ được gọi là các " *điểm ảnh*" (*pixel*). Cột thứ nhất của các điểm ảnh ký hiệu Xmin và cột sau cùng là `Xmax`. Nhấn `RANGE` để cài đặt lại. Với `Xres` = `1` hàm số được tính 96 lần khi nó được vẽ đồ thị. `Xscl` và `Yscl` đưa ra cá khoảng trống giữa các gạch trên các trục .

[30]Nd: Các Hoạt động Giải tích cho các Máy tính cầm tay Có chức năng Vẽ đồ thị (tiếng Anh: Calculus Activities for Graphic Calculators).
[31]Nd: Máy tính cầm tay Nâng cao (tiếng Anh: Calculator Enhancement).

Bảng chọn `ZOOM` là một cách nhanh chóng để cài đặt các vùng. `ZOOM Standard` đưa ra giá trị mặc định $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $-10 \leqslant y \leqslant 10$. `ZOOM Trig` đưa ra $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

Việc phím `GRAPH` bị kẹt làm cho màn hình hiển thị các hàm số hiện tại.

Ví dụ 1.7.10. Cài đặt các vùng giá trị $(-)2 \leqslant \mathtt{X} \leqslant 3$ và $(-)150 \leqslant \mathtt{Y} \leqslant 50$. Nhấn $\mathtt{Y} =$ và lưu trữ $\mathtt{Y}_1 = \mathtt{X}$ (trong `MATH`)$^3 - 28X^2 + 15X + 36$ `ENTER`. Nhấn `GRAPH`. Bạn sẽ không thấy được gì nhiều về đồ thị. Nhấn `RANGE` và cài đặt lại $(-)10 \leqslant \mathtt{X} \leqslant 30$, $(-)4000 \leqslant \mathtt{Y} \leqslant 2300$. Nhấn `GRAPH`. Bạn nhìn thấy một đa thức bậc ba.

Chức năng "Đồ thị Thông minh" ngay lập tức gọi lại đồ thị mà không vẽ lại nó, nếu không có cài đặt nào được thay đổi. Bảng chọn `DRAW` là dành cho các điểm, các đường thẳng, và các miền được tô đậm. Chức năng này là rất phù hợp để vẽ các hàm tuyến tính từng khúc của chúng ta—chỉ cần kết nối các điểm gãy với các đường thẳng. Trong Mục 3.6, các đường thẳng cho thấy một sự lặp lại theo "mạng nhện" của nó.

Lập trình. Cuốn sách này có chứa các chương trình mà bạn có thể nhập chúng vào chiếc máy tình cầm tay của bạn một lần và lưu lại. Chúng ta chọn ***Tự động định tỷ lệ*** , ***Phương pháp của Newton***, ***Phương pháp Cát tuyến***, ***Phép lặp Mạng nhện***, và ***Phép lấy Tích phân Số*** . Bạn sẽ tạo ra các chương trình khác nữa—để thực hiện các phép tính và thêm vào các tính năng mà không có sẵn dưới dạng nhấn một tổ hợp phím đơn. Máy tính cầm tay là giống như một máy tính, nhưng chỉ có rất ít các hướng dẫn trên màn hình. *Một sự khác biệt*: Bộ nhớ của máy tính cầm tay quả nhỏ để chứa các bình luận và mã. Bạn chỉ có thể hiểu tính logic của một chương trình khi đọc lại nó.

Để tiến vào chức năng lập trình, nhấn `PRGM`. Mỗi bảng chọn con `PRGM` liệt kê tất cả các chương trình theo *tên*—một chữ số, một chữ cái, hoăck θ (37 cái tên). *Tiêu đề* chương trình có không quá tám ký tự. Chọn bảng chọn con `EDIT` và nhấn `G` đối với màn hình chỉnh sửa. Nhập tiêu đề `GRAPHS` và nhấn `ENTER`. Hãy thực hành trên chương trình này:

$$
\begin{array}{l}
: "\mathtt{X}^2 + \mathtt{X}" \ \mathtt{STO}\ (\mathtt{Y-VARS})\ \mathtt{Y}_1\ \mathtt{ENTER} \\
: "\mathtt{X} - 1" \ \mathtt{STO}\ (\mathtt{Y-VARS})\ \mathtt{Y2}\ \mathtt{ENTER} \\
: (\mathtt{PRGM})\ \mathtt{I/O}\ (\mathtt{Y-VARS})\ \mathtt{DispGraph}
\end{array}
$$

Các bảng chọn để gọi đều nằm trong các dấu ngoặc. Thoát khỏi màn hình chỉnh sửa với `QUIT` (không phải `CLEAR`—chức năng này xoá hàng có con trỏ). Cài đặt cửa sổ mặc định bởi `ZOOM Standard`.

Để thực thi, nhấn `PRGM (EXEC) G ENTER`. Chương trình vẽ các đồ thị. Chương trình hiển thị $\mathtt{Y}_1$ và $\mathtt{Y}_2$ trên màn hình $\mathtt{Y} =$. Để xoá chương trình khỏi màn hình chủ, nhấn `(PRGM)(ERASE)G`. Thực hành một lần nữa bằng cách tạo ra `Prgm2 : FUNC`. Nhập : $\sqrt{}$ `X STO` và `(PRGM) (I/O)Disp Y`. Di chuyển sang màn hình chủ, lưu trữ X bằng `4 STOX ENTER`, và thực thi bởi `(PRGM) (EXEC) 2 ENTER`. Ngoài ra, thử $X = -1$. Khi chương trình không thể mường tượng về i, chọn `1 : Goto Error`.

Các hàm từng khúc và đầu vào. (để chạy một chương trình) Định nghĩa của một hàm từng khúc bao gồm *miền xác định của từng khúc*. Các phép thử logic như "`IF X` $\geqslant 7$", xác định giá trị đầu vào X ngã vào miền xác định nào. Một phát biểu `IF` chỉ ảnh hưởng đến dòng sau—mà được thực thi khi `TEST = 1` (nghĩa là *đúng*) và bỏ qua khi `TEST = 0` (nghĩa là *sai*). Các lệnh `IF` là nằm trong bảng chọn con `PRGM (CTL)`; `TEST` gọi bảng chọn gồm các bất đẳng thức.

Một giá trị đầu vào $X = 4$ không cần phải được lưu trữ trước. Chương trình `P` dừng lại trong khi chạy để yêu cầu cài đặt đầu vào. Thực hiện với `P ENTER` sau khi chọn bảng chọn `PRGM (EXC)`. Trả lời ? với `4` và `ENTER`. Sau khi hoàn thành, trở lại bằng cách nhấn ENTER một lần nữa. Hàm số là: $y = 14 - x$ nếu $x < 7$, $y = x$ nếu $x \geqslant 7$.

PrgmP : PIECES	
: Disp"x = "	PGRM (I/O) Yêu cầu đầu vào
: Input X	PGRM(I/O) Màn hình ? Enter X
: 14 − X → Y	Công thức thứ nhất đối với mọi X
: If 7 ⩽ X	PRGM (CTL) TEST
: X → Y	Ghi đè nếu TEST = 1
: Disp Y	Hiển thị $Y(X)$

Cách ghi đè là nhanh hơn cách kiểm tra cả hai mút $A \leqslant X \leqslant B$ đối với từng khúc. Cách thậm chí còn nhanh hơn: một công thức đầy đủ $(14-X)(X < 7)+(X)(7 \leqslant X)$ có thể được viết trên một dòng đơn bằng cách dùng 1 và 0 từ các phép thử. Hiển thị $Y(X)$ như ở trên, hoặc xác định $\mathtt{Y}_1$ trên màn hình chỉnh sửa.

BÀI TOÁN. Xác định khúc thứ ba $Y = 8+X$ nếu $X < 3$. Viết lại P dùng $\mathtt{Y}_1 =$. Một tích của các phép thử $(3 \leqslant \mathtt{X})(\mathtt{X} < 7)$ nhận giá trị 1 nếu *tất cả phép thử đều nhận giá trị đúng* và nhận giá trị 0 nếu *bất kỳ phép thử nào nhận giá trị sai.*

CHỨC NĂNG LẦN THEO VẾT VÀ CHỨC NĂNG THU PHÓNG. Tính năng ưu việt nhất của máy tính cầm tay có chức năng vẽ đồ thị chính là vẽ đồ thị. Nhưng toàn bộ một đồ thị giống như toàn bộ một cuốn sách—có quá nhiều dữ kiện xuất hiện cùng một lúc. Bạn chỉ muốn tập trung vào một phần mà thôi. Một máy tính hoặc một máy tính cầm tay sẽ lần theo vết dọc theo đồ thị, dừng lại tại một điểm, và phóng to.

Máy tính cầm tay cũng có chức năng ZOOM OUT, để làm rộng khung hình và hiển thị nhiều thứ hơn. Đôi mắt của chúng ta cũng làm việc theo cách tương tự—tùy thuộc vào vị trí của đôi mắt mà chúng ta thấy được nhiều hay ít thông tin hơn. Thật đáng kinh ngạc là việc nhìn quanh một căn phòng lại cần dùng đến một phần lớn bộ não con người. Với một chiếc máy tính đủ lớn, chúng ta có thể bắt chước đôi mắt—đây là vấn đề then chốt trong trí tuệ nhân tạo. Với một máy tính nhỏ và tính năng thu phóng, chúng ta có thể *dùng* đôi mắt của mình để hiểu được các hàm số.

Nhấn TRACE để xác định vị trí một điểm trên đồ thị. Một con trỏ nhấp nháy xuất hiện. Di chuyển sang trái hay sang phải—con trỏ vẫn nằm trên đồ thị. Các toạ độ của nó xuất hiện tại đáy của màn hình. Khi x thay đổi một điểm ảnh, máy tính cầm tay tính $y(x)$. Để giải $y(x) = 0$, ta đọc x tại điểm khi y là gần với không nhất. Để cực tiểu hóa hay và cực đại hóa $y(x)$, đọc y nhỏ nhất và lớn nhất của y. Trong các bài toán này, phóng to để có độ chính xác tốt hơn.

Để phóng đại hình ảnh đang hiển thị trên màn hình, chúng ta có thể chọn những vùng giá trị mới. Một cách nhanh chóng là dùng lệnh ZOOM. Đối với một miền được cài đặt sẵn, dùng ZOOM Standard hoặc ZOOM Trig. Để co lại hay giãn ra, dùng xFact hoặc yFact (các giá trị mặc định là 4), dùng ZOOM In hoặc ZOOM Out. Chọn tâm điểm và nhấn ENTER. Đồ thị mới xuất hiện. Thay đổi các hệ số tỷ lệ đó với ZOOM Set Factors. Cách tốt nhất là ***tự tạo ra cửa sổ của riêng bạn***. Nhấn ZOOM Box.

Để vẽ hộp, di chuyển con trỏ về một góc. Nhấn ENTER và điểm này là một hình vuông nhỏ. Dùng các phím điều hướng tương tự để di chuyển một hình vuông (nhấp nháy) thứ hai tới góc đối diện—hình hộp sẽ thành hình khi bạn di chuyển. Nhấn ENTER, và hình hộp chính là một cửa sổ mới. Các đồ thị cho thấy cùng một hàm số với một sự thay đổi của tỷ lệ. Mục 3.4 sẽ thảo luận bản chất toán học—ở đây chúng ta tập trung vào các đồ họa.

VÍ DỤ 1.7.11. Đặt $: \mathtt{Y}_1 = \mathtt{Xsin(1/X)}$ trong màn hình chỉnh sửa $\mathtt{Y} =$. Nhấn ZOOM Trig đối với đồ thị thứ nhất. Cài đặt XFact = 1 và yFact = 2.5. Nhấn ZOOM In với tâm tại $(0, 0)$. Để thấy một bức hình lớn hơn, dùng `XFact` = `10` và `yFact` = `1`. Sau đó `Zoom Out` một lần nữa. Khi X trở nên lớn, hàm $X \sin(1/X)$ tiến tới ________.

Bây giờ trở lại với `ZOOM Trig`. `ZOOM In` với hệ số phóng được cài đặt tới 4 (mặc định). Phóng to thêm một lần nữa bằng cách nhấn `ENTER`. Với tâm và hệ số phóng được giữ cố định, đây là cách nhanh hơn cách vẽ một cửa sổ mới.

Ví dụ 1.7.12. Lặp lại quá trình trên đối với hàm số $Y = \sin(1/X)$, hàm số này còn thất thường hơn nữa. Sau khi `ZOOM Trig`, tạo ra một cửa sổ để nhìn thấy hàm số này gần $X = 0.01$. Vùng giá trị Y bây giờ là ________.

Việc định tỷ lệ là rất quan trọng. Đối với một hàm mới, việc này có thể rất tẻ nhạt. Một công thức đối với $y(x)$ không dễ dàng tiết lộ vùng giá trị của các y, khi $A \leqslant x \leqslant B$ được cho trước. Chương trình sau thường thuận tiện hơn các chức năng thu phóng. Nó thử phóng to hàm số $L = 19$ lần qua x-miền xác định (mỗi 5 điểm ảnh). Các đầu vào `Xmin`, `Xmax`, $\mathtt{Y}_1$ đã được lưu trước đó trên các màn hình khác. Sau khi thử phóng, chương trình cài đặt y-vùng giá trị từ $C = Ymin$ tới $D = Ymax$ và vẽ đồ thị.

Chú ý *vòng lặp* với biến đếm K. Vòng lặp kết thúc với lệnh `IS` $>$ (`K`, `L`) mà tăng K thêm 1 và bỏ qua một hàng nếu K mới vượt quá L. Nếu không, lệnh `Goto 1` khởi động lại vòng lặp. Màn hình thể hiện dạng ngắn phía bên trái.

Ví dụ 1.7.13. $\mathtt{Y}_1 = x^3 + 10x^2 - 7x + 42$ với miền xác định `Xmin` $= -12$ và `Xmax` $= 10$. Cài đặt khoảng trống giữa các vạch trên các trục `Xscl` $= 4$ và `Yscl` $= 250$. Thực thi với `PRGM (EXEC) A ENTER`. Đối với chương trình này, chúng ta cũng liệt kê các vị trí và bình luận bảng chọn.

PrgmA : AUTOSCL	Bình luận Bảng chọn (Bảng chọn con)
: All − Off	Y − VARS(OFF) Tắt các hàm số
: Xmin + A	VARS (RNG) Lưu trữ Xmin bằng cách dùng STO
: 19 + L	Lưu trữ số lượng các phép tính (19)
: (Xmax − A)/L → H	Thiết lập khoảng trống giữa các phép tính
: A → X	Bắt đầu tại $x = A$
: $\mathtt{Y}_1$ → C	Y − VARS (Y) Tính hàm số
: C → D	Bắt đầu C và D với giá trị này
: 1 → K	Khởi động biến đếm $K = 1$
: Lbl 1	PRGM (CTL) Đánh đầu vòng lặp bắt đầu
: A + KH → X	Tính x tiếp theo
: $\mathtt{Y}_1$ → Y	Tính hàm số tại x
: IF Y < C	PRGM (CTL) Cực tiểu mới?
: Y → C	Cập nhật C
: IF D < Y	PRGM (CTL) Cực đại mới?
: Y → D	Cập nhật D
: IS > (K, L)	PRGM (CTL) Cộng 1 cho K, bỏ quả Goto nếu $> L$
: Goto 1	PRGM (CTL) Vòng lặp trở lại Lbl 1
: $\mathtt{Y}_1$ − On	Y − VARS(ON) Bật $\mathtt{Y}_1$
: C → Ymin	STO VARS (RNG) Cài đặt Ymin $=C$
: D → Ymax	STO VARS (RNG) Cài đặt Ymax $=D$
: DispGraph	PRGM(I/O) Tạo ra đồ thị

CHƯƠNG 2

Đạo hàm

2.1. Đạo hàm của một Hàm số

Chương này bắt đầu với định nghĩa của đạo hàm. Hãy nhớ lại hai ví dụ trong Chương 1. Khi quãng đường là t^2, vận tốc là $2t$. Khi $f(t) = \sin t$, chúng ta tìm thấy $v(t) = \cos t$. *Vận tốc bây giờ được gọi là* ***đạo hàm*** *của* $f(t)$. Khi chúng ta chuyển sang một định nghĩa chính thức hơn và các ví dụ mới, chúng ta dùng các ký hiệu mới f' và df/dt đối với đạo hàm.

PHÁT BIỂU 2.1.1. Tại thời điểm t, *đạo hàm* $f'(t)$ hoặc df/dt hoặc $v(t)$ là

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{2.1.1}$$

Tỷ số bên vế phải là vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian ngắn Δt. Đạo hàm, bên vế phải, là giới hạn của nó khi bước Δt (*delta t*) tiến tới không.

Hãy thận trọng nhìn vào từng biểu thức. Quãng đường tại thời điểm t là $f(t+\Delta t)$. Quãng đường tại thời điểm t là $f(t)$. Phép trừ đưa ra ***số gia trong quãng đường***, giữa hai thời điểm.Chúng ta thường viết Δf đối với sai phân này: $\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t)$. ***Vận tốc trung bình là tỷ số*** $\Delta f/\Delta t$—số gia trong quãng đường bị chia bởi số gia trong thời gian.

Giới hạn của vận tốc trung bình là đạo hàm, nếu giới hạn này tồn tại:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}. \tag{2.1.2}$$

Đây là ký hiệu gọn gàng mà Leiniz đã phát minh ra: $\Delta f/\Delta t$ *tiến tới* df/dt. Đằng sau từ "*giới hạn*" tưởng như đơn giản này là cả một quá trình mà giáo trình này sẽ giúp bạn hiểu được.

Lưu ý rằng Δf không phải là Δ lần f! ***Nó là số gia trong*** f. Tương tự, Δt không là Δ lần t. Nó là bước thời gian, có thể là dương hoặc âm nhưng nhất định phải là nhỏ. Để có một ký hiệu ngắn gọn chỉ gồm một chữ cái, chúng ta có thể thay Δt bởi h.

Các vế phải của (2.1.1) và (2.1.2) đều chứa tốc độ trung bình. Trên đồ thị của $f(t)$, khoảng cách theo *phương đứng* bị chia bởi khoảng cách theo *phương ngang*. Điều này đưa ra hệ số góc trung bình $\Delta f/\Delta t$.

Các vế trái của (1) và (2) đều là các tốc độ ***tức thời*** df/dt. Chúng đưa ra hệ số góc tại thời điểm t. Đây chính là đạo hàm df/dt (khi Δf và Δt co về 0). Nhìn một lần nữa vào phép tính đối với $f(t) = t^2$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t. \tag{2.1.3}$$

Điểm quan trọng: Những bước này được thực hiện trước khi Δt đi tới không. ***Nếu chúng ta đặt*** $\Delta t = 0$ ***quá sớm***, ***chúng ta sẽ không học được gì cả***. Tỷ số $\Delta f/\Delta t$ trở thành $0/0$ (mà là vô nghĩa). Các số Δf và Δt phải cùng nhau tiến tới không, chứ không phải tiến tới không một cách riêng rẽ. Ở đây tỷ số của chúng là $2t + \Delta t$, tốc độ trung bình.

Nhắc lại: Chúng ta thành công nhờ viết ra khai triển $(t+\Delta t)^2$ và trừ t^2 và chia bởi Δt. Khi đó và chỉ khi đó chúng ta mới cho $\Delta t = 0$. Giới hạn chính là đạo hàm $2t$.

Có một vài điều mới trong các công thức (2.1.1) và (2.1.2). Một số điều tuy là dễ nhưng lại khá quan trọng, một số điều khác lại là sâu sắc hơn. Đó chính là ý tưởng về một hàm số mà chúng ta sẽ trở lại thảo luận sau cùng với định nghĩa của một giới hạn. Nhưng chúng ta có thể ngay lập tức thảo luận về các ký hiệu của chúng. Các ký hiệu này được dùng liên tục và bạn cũng cần phải biết cách đọc chúng:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \text{“}f \text{ của } t\text{”} = \text{giá trị của hàm số tại thời điểm } t \\
\Delta t &= \text{“delta } t\text{”} = \text{bước thời gian đi tới hoặc đi lui từ } t \\
f(t+\Delta t) &= \text{“}f \text{ của } t\text{cộng delta } t\text{”} = \text{giá trị của } f \text{ tại thời điểm } t+\Delta t \\
\Delta f &= \text{“delta } f\text{”} = \text{số gia } f(t+\Delta t) - f(t) \\
\Delta f/\Delta t &= \text{“delta } f \text{ trên delta } t\text{”} = \text{vận tốc trung bình} \\
f'(t) &= \text{“}f \text{ phẩy của } t\text{”} = \text{giá trị của đạo hàm tại thời điểm } t \\
df/dt &= \text{“}d\,f\,d\,t\text{”} = \text{tương tự như } f' \text{ (vận tốc tức thời)} \\
\lim_{\Delta t \to 0} &= \text{“giới hạn khi delta } t \text{ đi tới không”} = \text{“quá trình mà bắt đầu với} \\
&\qquad \text{các số } \Delta f/\Delta t \text{ và sinh ra số } df/dt.
\end{aligned}$$

Từ những từ sau cùng vừa được nói đến vừa rồi, bạn thấy được điều gì nằm phía sau ký hiệu df/dt. Ký hiệu Δt biểu thị một chiều dài thời gian (thường ngắn) khác không. Ký hiệu dt biểu thị một chiều dài thời gian (thậm chí ngắn hơn nữa) cực nhỏ. Một số nhà toán học làm việc một cách riêng rẽ với df và dt, và df/dt là tỷ số của chúng. Đối với chúng ta, df/dt là một ký hiệu đơn (không được triệt tiêu d hay Δ). Đạo hàm df/dt là giới hạn của $\Delta f/\Delta t$. *Khi chúng ta cảm thấy việc dùng ký hiệu df/dt là rất bất tiện, hãy dùng f' hoặc v.*

Ghi chú. Ký hiệu này giấu đi một điều mà chúng ta nên đề cập đến. Bước thời gian có thể âm cũng như có thể như dương. Chúng ta có thể tính vận tốc trung bình $\Delta f/\Delta t$ trên một khoảng thời gian *trước* thời điểm t, thay vì sau thời điểm t. Tỷ số này cũng tiến tới df/dt.

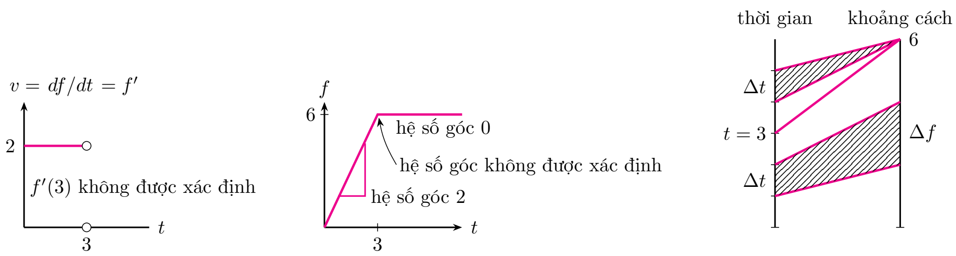
Ký hiệu này cũng giấu đi một điều khác: ***Đạo hàm có thể không tồn tại***. Các vận tốc trung bình $\Delta f/\Delta t$ có thể không tiến tới một giới hạn (nó phải có cùng giới hạn khi đi tới và đi lui tại thời điểm t). Trong trường hợp đó, $f'(t)$ là không được xác định. Tại thời điểm đó, giá trị trên tốc độ kế rất nhập nhằng để có thể đọc được. Điều này sẽ xảy ra trong Ví dụ 2.

Ví dụ 2.1.1 (Vận tốc hằng $V = 2$). Quãng đường f là $f(t) = Vt$. Quãng đường tại thời điểm $t + \Delta t$ là V lần $t + \Delta t$. ***Sai phân Δf là V lần*** Δt.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{V\Delta t}{\Delta t} = V \text{ nên giới hạn là } \frac{df}{dt} = V.$$

Đạo hàm của Vt là V. Đạo hàm của $2t$ là 2. Vận tốc trung bình $\Delta f/\Delta t$ luôn là $V = 2$, trong trường hợp đặc biệt có vận tốc hằng này.

Ví dụ 2.1.2. Đi với vận tốc hằng 2 cho tới thời điểm $t = 3$, ***sau đó dừng***. Đối với khoảng thời gian nhỏ, chúng ta vẫn có $f(t) = 2t$. Nhưng sau thời điểm dừng, quãng đường được cố định tại $f(t) = 6$. Đồ thị là đường nằm ngang sau thời



HÌNH 2.1.1. Đạo hàm bằng 2 rồi bằng 0. Nó không tồn tại tại $t = 3$.

điểm $t = 3$. Khi đó $f(t + \Delta t) = f(t)$ và $\Delta f = 0$ và ***đạo hàm của một hàm hằng bằng không***:

$$(2.1.4) \qquad t > 3: \qquad f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0}{\Delta t} = 0.$$

Trong ví dụ này, ***đạo hàm không được xác định tại thời điểm*** $t = 3$. Vận tốc giảm đột ngột từ 2 về không. Tỷ số $\Delta f/\Delta t$, vào thời điểm đặc biệt đó, phụ thuộc vào việc Δt là dương hay là âm. Vận tốc trung bình *sau* thời điểm $t = 3$ là không. Vận tốc trung bình trước thời điểm đó là 2. Khi đồ thị của f có một điểm góc, đồ thị của v có một ***bước nhảy***. Nó là một ***hàm bậc thang***.

Một phần mới của ví dụ này đó là khái niệm (df/dt hoặc f' thay vì v). Vui lòng nhìn vào hình thứ ba. Nó cho thấy cách hàm số biến t (phía bên trái) thành $f(t)$. Đặc biệt nó cho thấy Δt và Δf. Khi bắt đầu, $\Delta f/\Delta t$ bằng 2. Sau khi dừng tại $t = 3$, mọi t đều đi vào $f(t) = 6$. Vậy $\Delta f = 0$ và $df/dt = 0$.

ĐẠO HÀM CỦA $1/t$

Sau đây là một hệ số góc hoàn toàn khác biệt, đối với "hàm nhu cầu" $f(t) = 1/t$. Nhu cầu là $1/t$ khi giá là t. Một sản phẩm có giá t cao đồng nghĩa với việc nhu cầu tiêu thụ $1/t$ thấp. Việc tăng giá làm giảm nhu cầu. Câu hỏi thuộc giải tích đó là: $1/t$ ***thay đổi nhanh như thế nào khi*** t ***thay đổi***. "Nhu cầu biên" là hệ số góc của đường cong nhu cầu.

Điều quan trọng là phải tìm được đạo hàm của $1/t$, một lần và mãi mãi. Nó chính là $-1/t^2$.

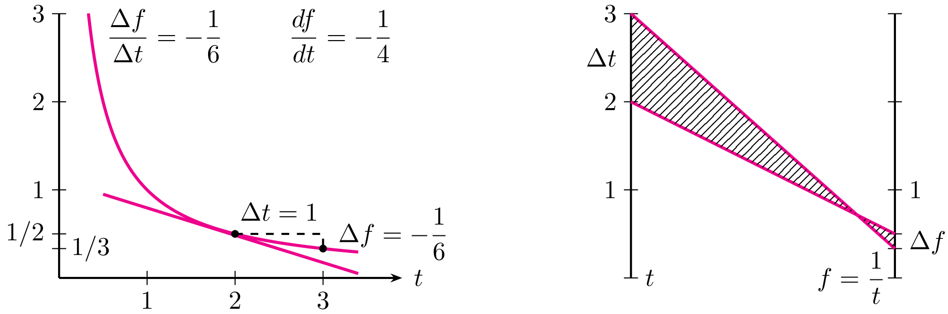
VÍ DỤ 2.1.3. $f(t) = \dfrac{1}{t}$ có $\Delta f = \dfrac{1}{t + \Delta t} - \dfrac{1}{t}$. Nó bằng $\dfrac{t - (t + \Delta t)}{t}(t + \Delta t) = \dfrac{-\Delta t}{t(t + \Delta t)}$.

Chia bởi Δt và cho $\Delta t \to 0$: $\quad \dfrac{\Delta f}{\Delta t} = \dfrac{-1}{t(t + \Delta t)} \quad$ tiến tới $\quad \dfrac{df}{dt} = \dfrac{-1}{t^2}$.

Hàng 1 là đại số, hàng 2 là giải tích. Bước thứ nhất của hàng 1 trừ $f(t)$ khỏi $f(t + \Delta t)$. Hiệu là $1/(t + \Delta t)$ trừ $1/t$. Mẫu số chung đó là t lần $t + \Delta t$—điều này cho phép chúng ta thực hiện các phép toán đại số. Chúng ta chỉ có thể đặt $\Delta t = 0$ trong hàng 2, sau khi chúng ta đã chia bởi Δt.

Vận tốc trung bình là $\Delta f/\Delta t = -1/t(t + \Delta t)$. Bây giờ đặt $\Delta t = 0$. Đạo hàm là $-1/t^2$. Mục 2.4 sẽ thảo luận trường hợp đầu tiên trong nhiều trường hợp khi việc thế $\Delta t = 0$ là không thể, và ý tưởng về một giới hạn phải được làm rõ hơn nữa.

Kiểm tra về mặt đại số tại $t = 2$ và $t + \Delta t = 3$. Nhu cầu $1/t$ giảm từ $1/3$ về $1/2$. Sai phân là $\Delta f = -1/6$, mà chính là $-1/(2)(3)$ trong hàng 1. Khi các bước Δf và Δt càng trở nên nhỏ hơn, tỷ số của chúng tiến tới $-1/(2)(2) = -1/4$.



HÌNH 2.1.2. Hệ số góc trung bình là $-\frac{1}{6}$, vận tốc đúng là $-\frac{1}{4}$. Việc t tăng kéo theo việc f giảm.

Đạo hàm này là âm. Hàm số $1/t$ là một *hàm giảm* và Δf nhỏ hơn không. Đồ thị đi *xuống* trong Hình 2.1.2, và hệ số góc của nó là âm.

Một hàm tăng $f(t)$ có hệ số góc dương.Một hàm giảm $f(t)$ có hệ số góc âm.

Hệ số góc $-1/t^2$ âm có giá trị tuyệt đối rất lớn khi t rất nhỏ. Giá tăng làm giảm nhu cầu.

Hình tiếp theo đưa ra một điểm tuy nhỏ nhưng quan trọng. Không có gì đặc biệt về chữ cái t. Những chữ cái khác có thể được dùng—đặc biệt là chữ cái x. Một đại lượng có thể phụ thuộc vào ***vị trí thay vì thời gian***. Độ cao thay đổi khi chúng ta đi về phía tây. Diện tích của một hình vuông thay đổi khi cạnh thay đổi. Những thay đổi này không bị ảnh hưởng bởi thời gian, nên chúng ta không có lý do gì để dùng t cả. Bạn sẽ thường thấy $y = f(x)$, với x thuộc trục hoành và y thuộc trục tung—được kết nối bởi một hàm số f.

Tương tự, f không phải là chữ cái duy nhất có thể được dùng. Không phải tất cả các hàm số đều có tên là f! Chữ cái này thông dụng bởi vì nó là viết tắt của từ hàm số[1]—nhưng chúng ta hoàn toàn có quyền viết $y(x)$ hoặc $y(t)$ thay vì $f(x)$ hoặc $f(t)$. Kheo cách theo phương đứng là một hàm số của khoảng cách theo phương ngang. Mối quan hệ "y của x" này là tối quan trọng trong toán học.

Hệ số góc cũng là một hàm số. Giải tích nghiên cứu về hai hàm số, $y(x)$ và dy/dx.

CÂU HỎI. *Nếu ta chúng cộng 1 vào $y(x)$, điều gì sẽ xảy ra với hệ số góc?*

CÂU TRẢ LỜI. Hệ số góc không thay đổi.

CÂU HỎI. *Nếu chúng ta cộng 1 vào hệ số góc, điều gì sẽ xảy ra với tung độ?*

CÂU TRẢ LỜI. ________

Các ký hiệu t và x đại diện cho các ***biến độc lập***—chúng nhận bất kỳ giá trị nào chúng muốn (trong miền xác định). Khi chúng đã nhận giá trị, $f(t)$ và $y(x)$ được xác định. Như vậy f và y đại diện cho các ***biến phụ thuộc***—chúng *phụ thuộc* vào t và x. Một số gia Δt sinh ra một số gia Δf. Một số gia Δx sinh ra Δy. Biến độc lập nằm trong dấu ngoặc trọng trong $f(t)$ và $y(x)$. Chữ cái nào đều không quan trọng, quan trọng là ý tưởng:

[1]Nd: Hàm số (tiếng Anh: function).

biến độc lập t hoặc x

biến phụ thuộc f hoặc g hoặc y hoặc z hoặc u

đạo hàm df/dt hoặc df/dx hoặc dy/dx hoặc $\cdots$

Đạo hàm dy/dx được sinh ra từ [số gia trong y] bị chia bởi [số gia trong x]. Bước thời gian trở thành bước không gian, đi tới hoặc đi lui. Hệ số góc là tốc độ y thay đổi theo x. ***Đạo hàm của một hàm số là* "*tốc độ thay đổi*" *của nó***.

Chúng ta phải chú ý rằng các sách vật lý thường dùng $x(t)$ đối với đường đi.

Để nhấn mạnh định nghĩa của một đạo hàm, chúng ta xác định lại nó một lần nữa với y và x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Ký hiệu $y'(x)$ cho biết điểm x mà tại đó hệ số góc được tính. Trong dy/dx, chúng ta bỏ qua chi tiết đó. Cuốn sách này sẽ cố gắng dung hoà giữa sự hoàn hảo hợp lý và sự đơn giản thông thường. Ký hiệu $dy/dx(x)$ là không tốt chút nào; $y'(x)$ là tốt hơn nhiều; khi x đã được ngầm hiểu là biến số, chúng ta không cần phải viết x trong dấu ngoặc tròn.

Bạn được phép nói rằng hàm số là $y = x^2$ và đạo hàm là $y' = 2x$—dù ký hiệu đầy đủ đòi hỏi $y(x) = x^2$ và $y'(x) = 2x$. Bạn thậm chí có thể nói rằng hàm số là x^2 và đạo hàm của nó là $2x$ và ***đạo hàm cấp hai*** của nó là 2—miễn là mọi người đều hiểu được.

Dưới đây là một ví dụ. Bài toán này được đưa ra hơi sớm và không bắt buộc bạn phải thực hiện nhưng khá quan trọng. Bạn có được cơ hội thực hành tuyệt vời với các chữ và các ký hiệu, và tự tay tính các đạo hàm mới.

Ví dụ 2.1.4. Nếu $u(x)$ có hệ số góc du/dx, hỏi hệ số góc của $f(x) = (u(x))^2$? Từ đạo hàm của x^2, chúng ta sẽ biết được đạo hàm của x^4. Trong trường hợp đó, $u = x^2$ và $f = x^4$. Điểm cần lưu ý thứ nhất: ***Đạo hàm của*** u^2 ***không phải là*** $(du/dx)^2$. Chúng ta không bình phương đạo hàm $2x$. Để tìm "quy tắc bình phương," chúng ta bắt đầu như đã làm—với $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = [u(x+\Delta x) + u(x)][\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}] \text{ tiến tới } 2u(x)\,\frac{du}{dx}. \tag{2.1.5}$$

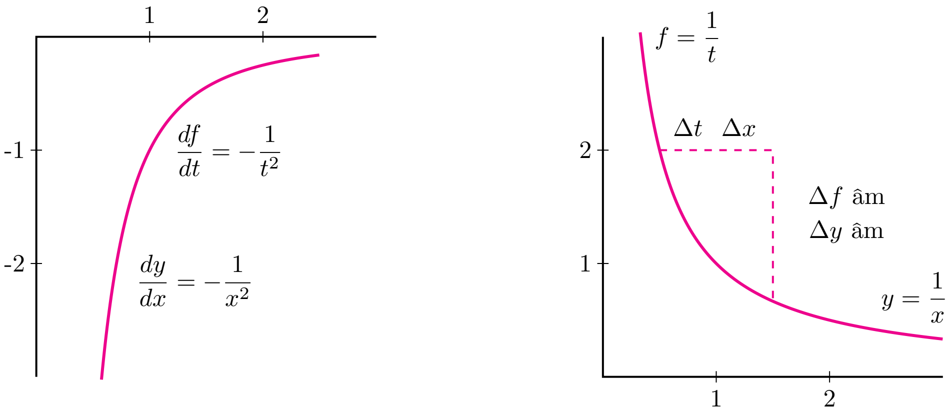
Đây là quy tắc *bình phương*: ***Đạo hàm của*** $(u(x))^2$ ***là*** $2u(x)$ ***lần*** du/dx. Từ các đạo hàm của x^2 và $1/x$ và $\sin x$ (và mọi thứ đã biết), các ví dụ sau đưa ra các đạo hàm mới.

Ví dụ 2.1.5 ($u = x^2$). Đạo hàm của x^4 là $2u\,du/dx = 2(x^2)(2x) = 4x^3$.

Ví dụ 2.1.6 ($u = 1/x$). Đạo hàm của $1/x^2$ là $2u\,du/dx = (2/x)(-1/x^2) = -2x^3$.

Ví dụ 2.1.7 ($u = \sin x$, $du/dx = \cos x$). Đạo hàm của $u^2 = \sin^2 x$ là $2\sin x \cos x$.

Toán học thực sự là về các ý tưởng. Các ký hiệu được sáng tạo ra để biểu diễn các ý tưởng đó. Newton và Leibniz đã độc lập phát minh ra giải tích, và những người bạn của Newton đã tốn nhiều thời gian để chứng minh rằng chính Newton mới là người đầu tiên phát mính ra giải tích. Mặc dù Newton là người đầu tiên phát minh ra giải tích, nhưng chính Leibniz mới là người đã nghĩ ra cách viết dy/dx—mà chúng ta đang dùng. Nó đúng là cách hoàn hảo để biểu thị giới hạn của $\Delta y/\Delta x$. Newton là một trong những nhà khoa học vĩ đại của mọi thời đại, và giải tích



HÌNH 2.1.3. Đạo hàm của $1/t$ là $-1/t^2$. Hệ số góc của $1/x$ là $-1/x^2$.

là một trong những phát minh vĩ đại nhất của mọi thời đại—nhưng ký hiệu của Leibniz cũng góp phần vào sự vĩ đại đó. Nhờ đó mà bạn bây giờ có thể nói và viết về đạo hàm. Những gì chúng ta cần tiếp theo đây là một loạt các hàm số và đạo hàm của chúng.

BÀI TẬP 2.1

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đạo hàm là $\underline{\quad a \quad}$ của $\Delta f/\Delta x$ khi Δt tiến tới $\underline{\quad b \quad}$. Ở đây Δf bằng $\underline{\quad c \quad}$. Bước Δt có thể là dương hoặc $\underline{\quad d \quad}$. Đạo hàm được viết là v hoặc $\underline{\quad e \quad}$ hoặc $\underline{\quad f \quad}$. Nếu $f(x) = 2x + 3$ và $\Delta x = 4$, khi đó $\Delta f = \underline{\quad g \quad}$. Nếu $\Delta x = -1$, khi đó $\Delta f = \underline{\quad h \quad}$. Nếu $\Delta x = 0$, khi đó $\Delta f = \underline{\quad i \quad}$. Hệ số góc không phải là $0/0$ mà là $df/dx = \underline{\quad j \quad}$.

Đạo hàm không tồn tại tại nơi $f(t)$ có một $\underline{\quad k \quad}$ và $v(t)$ có một $\underline{\quad l \quad}$. Đối với $f(t) = 1/t$, đạo hàm là $\underline{\quad m \quad}$. Hệ số góc của $y = 4/x$ là $dy/dx = \underline{\quad n \quad}$. Một hàm giảm có một đạo hàm $\underline{\quad o \quad}$. Biến $\underline{\quad p \quad}$ là t hoặc x và biến $\underline{\quad q \quad}$ là f hoặc y. Hệ số góc của y^2 (là) (không phải là) $(dy/dx)^2$. Hệ số góc của $(u(x))^2$ là $\underline{\quad r \quad}$ theo quy tắc bình phương. Hệ số góc của $(2x+3)^2$ là $\underline{\quad s \quad}$.

2.1.1. Số nào trong những số sau (nguyên trạng) đưa ra df/dt tại thời điểm t? Nếu nghi ngờ, hãy kiểm tra với $f(t) = t^2$.

(a) $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+2h) - f(t)}{2h}$

(c) $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{f(t-\Delta t) - f(t)}{-\Delta t}$

(d) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

2.1.2. Giả sử $f(x) = x^2$. Tính từng tỷ số sau và đặt $h = 0$:

(a) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $\dfrac{f(x+5h) - f(x)}{5h}$

(c) $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

(d) $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{h}$

2.1.3. Đối với $f(x) = 3x$ và $g(x) = 1+3x$, tìm $f(4+h)$, $g(4+h)$, $f'(4)$ và $g'(4)$. Vẽ các đồ thị của f và g—tại sao chúng có cùng hệ số góc?

2.1.4. Tìm ba hàm số có cùng hệ số góc với $f(x) = x^2$.

2.1.5. Đối với $f(x) = 1/x$, vẽ đồ thị của $f(x)+1$ và $f(x+1)$. Hàm số nào có đạo hàm $-1/x^2$?

2.1.6. Chọn c để đường thẳng $y = x$ là tiếp tuyến với parabola $y = x^2+c$. Chúng có cùng hệ số góc tại nơi chúng tiếp xúc nhau.

2.1.7. Vẽ đường cong $y(x) = 1 - x^2$ và tính hệ số góc của nó tại $x = 3$.

2.1.8. Nếu $f(t) = 1/t$, hỏi vận tốc trung bình giữa $t = \dfrac{1}{2}$ và $t = 2$? Hỏi vận tốc trung bình giữa $t = \frac{1}{2}$ và $t = 1$? Hỏi vận tốc trung bình (với một chữ số thập phân) giữa $t = \frac{1}{2}$ và $t = 101/200$?

2.1.9. Tìm $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ đối với $y(x) = x + x^2$. Sau đó tìm dy/dx.

2.1.10. Tìm $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ và dy/dx đối với $y(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

2.1.11. Khi $f(t) = 4/t$, đơn giản hóa sai phân $f(t + \Delta t) - f(t)$, chia bởi Δt, và đặt $\Delta t = 0$. Kết quả là $f'(t)$.

2.1.12. Tìm đạo hàm của $1/t^2$ từ $\Delta f(t) = 1/(t + \Delta t)^2 - 1/t^2$. Viết Δf dưới dạng một phân số với mẫu số $t^2(t + \Delta t)^2$. Chia tử số bởi Δt để tìm $\Delta f/\Delta t$. Đặt $\Delta t = 0$.

2.1.13. Giả sử $f(t) = 7t$ tới $t = 1$. Sau đó $f(t) = 7 + 9(t - 1)$.

(a) Tìm df/dt tại $t = \frac{1}{2}$ và $t = \frac{3}{2}$.

(b) Tại sao $f(t)$ không có đạo hàm tại $t = 1$?

2.1.14. Tìm đạo hàm của đạo hàm (*đạo hàm cấp hai*) của $y = 3x^2$. Hỏi đạo hàm cấp ba là gì?

2.1.15. Tìm các số A và B sao cho đường thẳng $y = x$ khớp một cách trơn tru với đường cong $Y = A + Bx + x^2$ tại $x = 1$. Trơn tru nghĩa là $y = Y$ và $dy/dx = dY/dx$ tại $x = 1$.

2.1.16. Tìm các số A và B để đường thẳng ngang $y = 4$ khớp trơn tru với đường cong $y = A + Bx + x^2$ tại điểm $x = 2$.

2.1.17. *Đúng* (với lý do) hay *sai* (với ví dụ):

(a) Nếu $f(t) < 0$, khi đó $df/dt < 0$.

(b) Đạo hàm của $\left(f(t)\right)^2$ là $2\,df/dt$.

(c) Đạo hàm của $2f(t)$ là $2\,df/dt$.

(d) Đạo hàm là giới hạn của Δf được chia bởi giới hạn của Δt.

2.1.18. Đối Với $f(x) = 1/x$, *sai phân giữa* $f(x+h) - f(x-h)$ là $1/(x+h) - 1/(x-h)$. Thực hiện phép trừ bằng cách dùng mẫu chung $(x + h)(x - h)$. Sau đó chia bởi $2h$ và đặt $h = 0$. Tại sao phải chia bởi $2h$ để thu được đạo hàm đúng?

2.1.19. Giả sử $y = mx + b$ đối với x âm và $y = Mx + B$ đối với $x \geqslant 0$. Các đồ thị cắt nhau nếu ________. Hai hệ số góc là ________. Hệ số góc tại $x = 0$ là ________ (điều gì là có thể?).

2.1.20. Hệ số góc của $y = 1/x$ tại $x = 1/4$ là $y' = -1/x^2 = -16$. Tại $h = 1/12$, tỷ số nào trong những tỷ số sau gần với -16 nhất?

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

2.1.21. Tìm hệ số góc trung bình của $y = x^2$ giữa $x = x_1$ và $x = x_2$. Hệ số góc trung bình này tiến tới đâu khi x_2 tiến tới x_1?

2.1.22. Vẽ lại Hình 2.1.1 khi $f(t) = 3 - 2t$ đối với $t \leqslant 2$ và $f(t) = -1$ đối với $t \geqslant 2$. Vẽ luôn df/dt.

2.1.23. Vẽ lại Hình 2.1.3 đối với hàm số $y(x) = 1 - (1/x)$. Vẽ luôn dy/dx.

2.1.24. Giới hạn của $0/\Delta t$ khi $\Delta t \to 0$ không phải là $0/0$. Giải thích.

2.1.25. Dự đoán các giới hạn bằng một quy tắc thực hiện được nhưng không chính thức. Đặt $\Delta t = 0.1$ và -0.1 và tưởng tượng Δt dần trở nên nhỏ hơn:

(a) $\frac{1 + \Delta t}{2 + \Delta t}$

(c) $\frac{\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t - (\Delta t)^2}$

(b) $\frac{|\Delta t|}{\Delta t}$

(c) $\frac{t + \Delta t}{t - \Delta t}$

2.1.26 (*). Giả sử $\frac{f(x)}{x} \to 7$ khi $x \to 0$. Suy luận rằng $f(0) = 0$ và $f'(0) = 7$. Đưa ra một ví dụ khác ngoài $f(x) = 7x$.

2.1.27. Hỏi giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3 + x) - f(3)}{x}$$

nếu nó tồn tại? Chuyện gì sẽ xảy ra nếu $x \to 1$?

Các bài tập 2.1.28-2.1.31 dùng quy tắc bình phương: $d(u^2)/dx = 2u(du/dx)$.

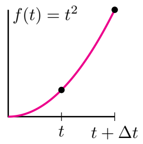
2.1.28. Lấy $u = x$ và tìm đạo hàm của x^2 (một các mới).

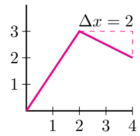
2.1.29. Lấy $u = x^4$ và tìm đạo hàm của x^8 (dùng $du/dx = 4x^3$).

2.1.30. Nếu $u = 1$, khi đó $u^2 = 1$. Khi đó $d1/dx$ là 2 lần $d1/dx$. Sao có thể như thế được?

2.1.31. Lấy $u = \sqrt{x}$. Đạo hàm của $u^2 = x$ là $1 = 2u(du/dx)$. Vậy hỏi du/dx, đạo hàm của $\sqrt{x}$?

2.1.32. Hình bên trái cho thấy $f(t) = t^2$. Ký hiệu các khoảng cách $f(t + \Delta t)$, Δt và Δf. Vẽ các đường thẳng mà có hệ số góc là $\Delta f/\Delta t$ và $f'(t)$.





2.1.33. Hình vẽ bên phải cho thấy $f(x)$ và Δx. Tìm $\Delta x/\Delta x$ và $f'(2)$.

2.1.34. Vẽ $f(x)$ và Δx để $\Delta f/\Delta x = 0$ nhưng $f'(x) \neq 0$.

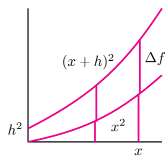
2.1.35. Nếu $f = u^2$, khi đó $df/dx = 2u\,du/dx$. Nếu $g = f^2$, khi đó $dg/dx = 2f\,df/dx$. Chúng cùng nhau đưa ra $g = u^4$ và $dg/dx =$ ________.

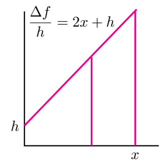
2.1.36. ***Đúng hay sai***, giả định $f(0) = 0$:

(a) Nếu $f(x) \leqslant x$ đối với mọi x, khi đó $df/dx \leqslant 1$.

(b) Nếu $df/dx \leqslant 1$ đối với mọi x, khi đó $f(x) \leqslant x$.

2.1.37. Các đồ thị sau cho thấy Δf và $\Delta f/h$ đối với $f(x) = x^2$. Tại sao $2x + h$ là phương trình đối với $\Delta f/h$? Nếu h bị cắt đi một nửa, vẽ các đồ thị mới.





2.1.38. Vẽ các đồ thị tương ứng đối với $f(x) = \frac{1}{2}x$.

2.1.39. Vẽ $1/x$ và $1/(x + h)$ và $\Delta f/h$—có thể vẽ bằng tay với $h = \frac{1}{2}$ hoặc vẽ bằng máy tính để cho thấy khi $h \to 0$.

2.1.40. Đối với $y = e^x$, chứng tỏ trên đồ thị máy tính rằng $dy/dx = y$.

2.1.41. *Giải thích đạo hàm theo cách riêng của bạn.*

2.2. Lũy thừa và Đa thức

Mục này có hai mục đích chính. Một là tìm đạo hàm của $f(x) = x^3$ và x^4 và x^5 (và tổng quát hơn, $f(x) = x^n$). Chúng ta trước tiên xét trường hợp *luỹ thừa* hay *mũ* n là một số nguyên dương. Sau đó chúng ta xét x^π và $x^{2,2}$ và mọi x^n.

Mục đích kia lại rất khác. Trong khi tính toán các đạo hàm này, chúng ta hướng tới các ứng dụng của chúng. Trong quá trình dùng giải tích, chúng ta gặp các phương trình có chứa các đạo hàm của nó—"***phương trình vi phân***." Vẫn còn quá sớm để giải học cách giải phương trình này. Nhưng không quá sớm để thấy mục đích của những gì chúng ta đang làm. Các ví dụ của chúng ta đến từ lĩnh vực kinh tế và sinh học.

Với $n = 2$, đạo hàm của x^2 là $2x$. Với $n = -1$, hệ số góc của x^{-1} là $-1x^{-2}$. Đó là hai mảnh ghép trong một xu thế rất đẹp, mà xứng đáng để chúng ta khám phá. Chúng ta bắt đầu với x^3 và đạo hàm của nó $3x^2$, trước khi nhảy sang x^n.

Ví dụ 2.2.1. Nếu $f(x) = x^3$, khi đó $\Delta f = (x+h)^3 - x^3 = (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3$.

Bước 1: Triệt tiêu x^3 **Bước 2:** Chia bởi h **Bước 3:** h tiến tới 0

$$\frac{\Delta f}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \text{ tiến tới } \frac{df}{dx} = 3x^2.$$

Điều này rất đơn giản, và chúng ta thấy được bước chính. Luỹ thừa $(x + h)^3$ đưa ra bốn số hạng riêng biệt $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. (Chú ý $1, 3, 3, 1$.) Sau khi x^3 bị trừ đi, chúng ta chia bởi h. Tại giới hạn ($h = 0$), chúng ta có $3x^2$.

Đối với $f(x) = x^n$, các bước thực hiện cũng tương tự. Một bước cỡ h kéo theo $f(x + h) = (x + h)^n$. Người ta dùng đại số để tính các luỹ thừa như $(x + h)^n$, và nếu bạn đã quên công thức nhị thức, chúng ta vẫn có thể nắm bắt lại những điểm chính của nó. Bắt đầu với $n = 4$:

(2.2.1) $$(x+h)(x+h)(x+h)(x+h) = x^4 + \quad ??? \quad + h^4$$

Nhân x với nhau bốn lần được x^4, nhân h với nhau bốn lần được h^4. Đó là các số hạng dễ, nhưng không phải là các số hạng chính. Phép trừ $(x+h)^4 - x^4$ sẽ làm triệt tiêu x^4, và bước lấy giới hạn $h \to 0$ sẽ đơn giản h^4 (ngay cả sau phép chia bởi h). ***Các tích chính là các tích có đúng một*** h. Trong Ví dụ 2.2.1 với $(x+h)^3$, số hạng chính này là $3x^2h$. Phép chia bởi h đưa ra $3x^2$.

Với chỉ một h, có n vị trí có thể sinh ra nó. Phương trình (2.2.1) có bốn h trong các dấu ngoặc, và bốn cách nhân để sinh ra x^3h. Vì vậy số hạng chính là $4x^3h$ (Phép chia bởi h đưa ra $4x^3$). Trong trường hợp tổng quát, có n dấu ngoặc và có n cách nhân để sinh ra $x^{n-1}h$, nên công thức nhị thức chứa $nx^{n-1}h$:

(2.2.2) $$(x+h)^n = x^n + \underline{nx^{n-1}.h} + \cdots + h^n.$$

Phát biểu 2.2.1. Đối với $n = 1, 2, 3, 4\ldots$, đạo hàm của x^n là nx^{n-1}.

Trừ x^n khỏi (2.2.2). Chia bởi h. Số hạng chính trong (2) trở thành nx^{n-1}. Các số hạng còn lại biến mất khi $h \to 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1} + \cdots + h^n}{h} \text{ nên } \frac{df}{dx} = nx^{n-1}.$$

Các số hạng được thay bằng các dấu chấm chứa h^2 và h^3 và các luỹ thừa cao hơn của h. Sau khi chia bởi h, chúng vẫn còn ít nhất một thừa số h. Tất cả các thừa số hạng này biến mất khi $h \to 0$.

Ví dụ 2.2.2. $(x+h)^4 = x^4 + \underline{4x^3h} + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$. Khai triển đầy đủ khi $n = 4$.
Trừ x^4, Chia bởi h, cho $h \to 0$. Đạo hàm là $4x^3$. Các hệ số $1, 4, 6, 4, 1$ nằm trong tam giác Pascal dưới đây. Đối với $(x+h)^5$, hàng tiếp theo là $1, 5, 10, \underline{?}$.

Ghi chú. Các số hạng bị thiếu trong công thức nhị thức (được thay bằng các dấu chấm) chứa tất cả các tích $x^{n-j}h^j$. Một x hay một h được sinh ra từ mỗi dấu ngoặc. Hệ số nhị thức n chọn j" là ***số cách chọn ra*** j ***chữ cái*** h ***trong*** n ***dấu ngoặc***. Nó chứa n *giai thừa*, mà là $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$. Như vậy $5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

Đây là những con số mà các con bạc biết rất rõ và yêu rất nhiều:

$$\text{"}n \text{ chọn } j\text{"} = \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$\begin{array}{ccccccccc|l} & & & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & n=3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & n=4 \end{array}$$

Tam giác của Pascal

Trong hàng cuối cùng, hệ số của x^3h là $4!/1!3! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1/1\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4$. Đối với số hạng x^2h^2, với $j = 2$, có $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1/2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 6$ cách để chọn hai h. Chú ý rằng $1+4+6+4+1$ bằng 16, mà là 2^4. Tổng mỗi hàng của tam giác Pascal là một luỹ thừa của 2 .

Chọn 6 số từ 49 số trong một cuộc sổ xố, tỷ lệ cược là $49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44/6!$ ăn 1. Con số đó là $N =$ "49 chọn 6"$= 13,983,816$. Nó là hệ số của $x^{43}h^6$ trong khai triển của $(x+h)^{49}$. Nếu λ lần N vé được mua, số kỳ vọng của người thắng là λ. Khả năng không có người thắng là $e^{-\lambda}$. Khả năng có *một* người thắng là $\lambda e^{-\lambda}$. Xem Mục 8.4.

Cuộc xổ số của Florida vào tháng 9 năm 1990 (theo quy tắc này) có 6 người thắng trong số $109,163,978$ vé.

ĐẠO HÀM CỦA ĐA THỨC

Bây giờ chúng ta có một liệt kê vô hạn gồm các hàm số và các đạo hàm của chúng:

$$x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad \cdots \qquad\qquad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \quad 4x^3 \quad 5x^4 \quad \cdots$$

Đạo hàm của x^n ***là*** n ***lần*** x ***luỹ thừa thấp hơn một đơn vị*** x^{n-1}. ***Quy tắc này mở rộng từ các số nguyên*** $1, 2, 3, 4, 5$ ***sang tất cả các luỹ thừa***:

$f = 1/x$	có	$f' = -1/x^2$:	Ví dụ (2.1.3) của Mục (2.1)	$(n = -1)$
$f = 1/x^2$	có	$f' = -2/x^3$:	Ví dụ (**??**) của Mục (2.1)	$(n = -2)$
$f = \sqrt{x}$	có	$f' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$:	đúng nhưng chưa được kiểm tra	$(n = \frac{1}{2})$

Nhớ rằng x^{-2} có nghĩa là $1/x^2$ và $x^{-\frac{1}{2}}$ có nghĩa là $1/\sqrt{x}$. Các luỹ thừa âm kéo theo các hàm giảm, tiến tới 0 khi x tiến tới vô cùng. Các hệ số góc của chúng có dấu trừ.

Câu hỏi. *Hỏi đạo hàm của* x^{10} *và* x^{22} *và* $x^{-\frac{1}{2}}$*?*

Câu trả lời. Câu trả lời $10x^9$ và $22x^{21}$ và $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. Có lẽ $(x+h)^{22}$ hơi lạ lẫm. Tam giác Pascal không sử dụng được với luỹ thừa phân số này, nhưng công thức vẫn đúng: ***Sau*** $x^{2,2}$ ***là đến*** $2,2x^{2,1}h$. Công thức nhị thức đầy đủ được xét trong Mục 10.5.

Danh sách trên là một khởi đầu tốt, nhưng còn rất nhiều hàm số vẫn chưa được nhắc đến. Chúng ta tiếp theo đến với những hàm số khá đơn giản. Một số lượng lớn các hàm số mới là "những tổ hợp tuyến tính" như:

$$f(x) = 6x^3 \text{ hoặc } 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 \text{ hoặc } 6x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Đạo hàm của chúng là gì? Chúng ta đã biết câu trả lời đối với x^3 và x^2, và chúng ta muốn nhân bởi 6 hoặc chia bởi 2 hoặc cộng hoặc trừ. Thực hiện tương tự với các đạo hàm:

$$f'(x) = 18x^2 \text{ hoặc } 18x^2 + x \text{ hoặc } 18x^2 - x.$$

Phát biểu 2.2.2. Đạo hàm của c lần $f(x)$ là c lần$f'(x)$.

Phát biểu 2.2.3. Đạo hàm của $f(x) + g(x)$ là $f'(x) + g'(x)$.

Số c có thể là bất kỳ hằng số nào. Chúng ta có thể cộng (hoặc trừ) bất kỳ hàm số nào với nhau. Các quy tắc trên được áp dụng cho bất kỳ tổ hợp nào của f và g. ***Đạo hàm của*** $9f(x) - 7g(x)$ ***là*** $9f'(x) - 7g'(x)$.

Chúng ta lý luận rất trực tiếp. Khi $f(x)$ được nhân bởi c, $f(x+h)$ cũng được nhân bởi c. Sai phân Δf cũng được nhân bởi c. Tất cả các trung bình $\Delta f/h$ đều chứa c, nên giới hạn của chúng là cf'. Bước duy nhất chưa được hoàn thành chính là bước cuối cùng (giới hạn). Chúng ta vẫn phải nói "giới hạn" có nghĩa là gì.

Quy tắc 2D cũng tương tự. Cộng $f + g$ có nghĩa là cộng $\Delta f + \Delta g$. Bây giờ chia bởi h. Trong giới hạn, khi $h \to 0$, chúng ta đạt được $f' + g'$—bởi vì một giới hạn của các tổng là tổng của các giới hạn. Bất kỳ ví dụ và chứng minh nào cho điều này đều dễ hiểu—chúng ta chỉ cần đến định nghĩa của giới hạn.

Bạn bây giờ có thể tìm thấy đạo hàm của mỗi đa thức. Một "đa thức" là một tổ hợp tuyến tính của $1, x, x^2, x^3, \cdots x^n$—ví dụ $9 + 2x - x^5$. Đa thức cụ thể này có hệ số góc $2 - 5x^4$. Lưu ý rằng đạo hàm của 9 bằng không! Một hằng số chỉ làm đồ thị được nâng lên hay bị hạ xuống, mà không làm thay đổi hệ số góc. Điều này làm thay đổi giá trị trên hành trình kế trước khi chiếc xe hơi khởi hành.

Sự biến mất của các hằng số là một trong những điều tuyệt vời của giải tích vi phân. Sự xuất hiện trở lại của các hằng số đó lại là một trong những thứ gây đau đầu nhất trong giải tích tích phân. Khi bạn tìm v từ f, giá trị trên hành trình kế lúc khởi hành là không quan trọng. Hằng số trong f không ảnh hưởng đến v. (Δf *được đo bởi hành trình kế cá nhân*[2]; Δt *được đo bởi đồng hồ bấm giờ.*) Để tính quãng đường đi từ vận tốc, chúng ta cần biết giát trị của hành trình kế lúc khởi hành.

NHÌN QUA CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (TÌM y TỪ dy/dx)

Chúng ta biết rằng $y = x^3$ có đạo hàm $dy/dx = 3x^2$. Bắt đầu với hàm số, chúng ta tìm được hệ số góc của nó. Bây giờ đảo ngược quá trình đó. ***Bắt đầu với hệ số góc và tìm hàm số*** . Đây là những gì mà khoa học luôn thực hiện—và thật hợp lý khi nói như vậy.

Bắt đầu với $dy/dx = 3x^2$. Hệ số góc được cho trước, hàm số y chưa được biết.

Câu hỏi 10. *Liệu chúng ta có thể đi ngược lại để đạt được $y = x^3$?*

Câu trả lời. Chúng ta gần như đạt được nhưng không hoàn toàn đúng như vậy. Chúng ta chỉ có quyền nói rằng $y = x^3 + C$. Hằng số C là giá trị khởi đầu của y (khi $x = 0$). Khi đó phương trình vi phân $dy/dx = 3x^2$ được giải.

Mỗi khi bạn tìm thấy một đạo hàm, chúng ta có thể đi ngược lại để giải một phương trình vi phân. Hàm số $y = x^2 + x$ có hệ số góc $dy/dx = 2x + 1$. Theo hướng ngược lại, hệ số góc $2x + 1$ sinh ra $x^2 + x$—và tất cả các hàm số $x^2 + x + C$ khác, chính là hàm số $x^2 + 2$ được dời lên và dời xuống. Sau khi đi từ quãng đường f tới vận tốc v, chúng ta quay trở lại $f + C$. Nhưng còn nhiều điều nữa về các phương trình vi phân. Dưới đây là hai điểm chính:

(1) Chúng ta đạt được dy/dx bằng $\Delta x/\Delta y$, nhưng chúng ta không có hệ thống nào để giúp đi ngược lại. Với $dy/dx = (\sin x)/x$, chúng ta bị mất phương hướng. Hàm số nào nhận hàm số vừa rồi làm đạo hàm?

(2) Nhiều phương trình có cùng nghiệm $y = x^3$. Kinh tế học có $dy/dx = 3y/x$. Hình học có $dy/dx = 3y^{2/3}$. Các phương trình iên quan đến y cũng như dy/dx. Hàm số và hệ số góc được trộng lẫn với nhau! Đây là đặc trưng của các phương trình vi phân.

Để tóm tắt: Các Chương 2-4 thực hiện tính toán và dùng các đạo hàm. Chương 5 làm ngược lại. Giải tích tích phân khám phá hàm từ hệ số góc của nó. Cho trước dy/dx, chúng ta tìm $y(x)$. Sau đó Chương 6 giải phương trình vi phân $dy/dt = y$, hàm số được trộn lẫn với hệ số góc. Giải tích di chuyển từ các *đạo hàm* sang các *tích phân* và tới các *phương trình vi phân.*

Thảo luận này về mục đích của giải tích sẽ đề cập đến một ví dụ cụ thể. Các phương trình vi phân được áp dụng để nghiên cứu một dịch bênh (như AIDS). Trong phần lớn các dịch bệnh, số lượng ca bênh phát triển theo hàm lũy thừa. Đỉnh điểm của dịch bệnh sẽ nhanh chóng được đạt đến bởi e^θ, và dịch bệnh giảm dần. Thật ngạc nhiên, bệnh AIDS không phát triển theo hàm luỹ thừa—xấp xỉ tốt nhất cho dữ liệu cho đến năm 1988 là một ***hàm đa thức bậc ba*** (Tạp chí Khoa học Los Alamos[3], 1989).

[2]Nd: Hành trình kế cá nhân (trip meter) ghi lại quãng đường đi được bởi cá nhân người lái xe, có thể thay đổi giá trị, khác với hành trình kế (odo meter) ghi lại quãng đường đi được bởi chiếc xe, không thể thay đổi giá trị.

[3]Nd: Tạp chí Khoa học Los Alamos (tiếng Anh: Los Alamos Science).

> Số lượng các ca bệnh khớp một hàm đa thức bâc ba trong sai số không vượt quá 2%: $y = 174.6(t - 1981.2)^3 + 340$.

Điều này là khác biệt đáng kể so với các dịch bệnh khác. Thay vì $dy/dt = y$, chúng ta có $dy/dt = 3y/t$. Trước khi cuốn sách này được in, chúng ta có thể biết được cái gì đã ngăn cản dịch bệnh AIDS phát triển theo hàm lũy thừa e^t (thật là may mắn quá). Cuối cùng đường cong sẽ không còn là đồ thị của một hàm đa thức bậc ba nữa—Tôi hy vọng rằng các mô hình toán học dẫn đến kiến thức về thứ gì đã ngăn không cho dịch bệnh AIDS tăng nhanh chóng theo hàm lũy thừa và cứu nhiều mạng sống.

Thêm vào trong chứng minh: Vào năm 1989, đường cong đối với Hoa Kỳ giảm từ t^3 xuống t^2.

CHI PHÍ BIÊN VÀ ĐỘ CO GIÃN TRONG KÍNH TẾ HỌC

Điểm cần biết thứ nhất về kinh tế học: Chi phí ***biên*** và thu nhập ***biên*** là hết sức quan trọng. Chi phí trung bình để sản xuất xe hơi có thể là $10, 000. Nhưng chi phí sản xuất sẽ là $8000 cho chiếc xe tiếp theo nếu hàng Ford quyết định tiếp tục sản xuất nó. "*Giá trị trung bình mô tả quá khứ, giá trị biên dự báo tương lai.* Đối với khoản tiền gửi ngân hàng hoặc số giờ lao động hoặc sản lượng lúa mì, mà được đo theo các đơn vị nhỏ, các lượng này là một biến liên tục. Khi đó từ "biên" chỉ có nói về đúng một thứ mà thôi: ***Hãy lấy đạo hàm***.[4]

Mức lương trung bình trên tất cả các giờ lao động của chúng ta có thể rất thấp. Chúng ta chắc chắn sẽ không làm thêm giờ đối với một cộng việc như vậy. Mức lương trung bình này đang tăng, nhưng mức lương đối với mỗi giờ làm thêm tăng nhanh hơn—có thể nó tăng theo các bước nhảy. Khi $10/giờ tăng lên $15/giờ sau mỗi 40 giờ trong một tuần, mức lương là $550 đối với một tuần làm việc 50 giờ. Thu nhập trung bình là $11/giờ. Thu nhập biên là $25/giờ—tỷ suất làm ngoài giờ.

Chúng ta tiếp theo tập trung vào chi phí. Cho $y(x)$ là chi phí để sản xuất x tấn thép. Chi phí của $x + \Delta x$ tấn là $y(x + \Delta x)$. Chi phí vượt thêm là hiệu Δy. Chia bởi Δx, số tấn vượt thêm. Tỷ số $\Delta y/\Delta x$ là ***chi phí trung bình trên mỗi tấn vượt thêm***. Khi Δx được đo theo ounce thay vì tấn, chung ta rất gần với chi phí biên dy/dx.

Ví dụ: Khi chi phí là x^2. Chi phí trung bình là $x^2/x = x$. Chi phí biên là $2x$. Hình 2.2.1 có hệ số góc tăng—một ví dụ về việc "năng suất cận biên giảm dần do quy mô.[5]"

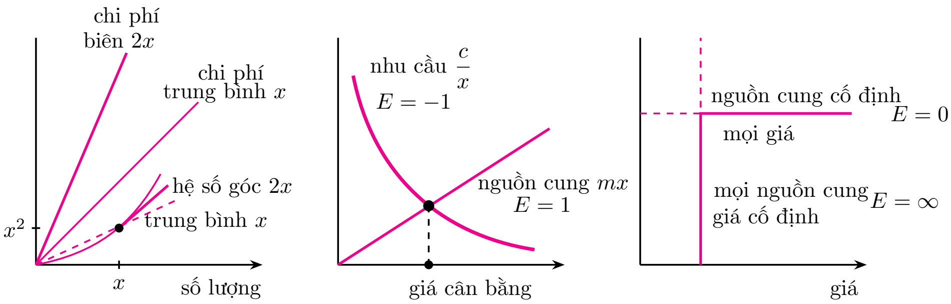
Điều này đưa ra một điểm cần biết khác về kinh tế học. Các đơn vị là tuỳ ý. Theo yên trên kilogam, con số có vẻ khác. Cách để khắc phục các giá trị khác nhau đối với các đơn vị đó là làm việc với *độ số gia phần trăm* hay ***số gia tương đối***. Một độ tăng Δx tấn là một độ tăng tương đối $\Delta x/x$. Một độ tăng chi phí Δy là một độ tăng tương đối $\Delta y/y$. Đây là các đại lượng *không có thứ nguyên*, giá trị của đại lượng này là như nhau trong tấn/tấn hoặc dollars/dollars hoặc yen/yen.

Một ví dụ thứ ba là *nhu cầu y tại giá x*. Bây giờ dy/dx là âm. Nhưng một lần nữa các đơn vị là tùy ý. Nhu cầu được đo theo liter hoặc gallon, giá được đo theo dollars hay pesos. Tốt hơn là hãy làm việc số gia tương đối. Khi giá tăng 10%, nhu cầu có thể giảm 5%. Nếu tỷ số này vẫn nguyên khi giá tăng nhẹ, độ co giãn *sẽ* là $\frac{1}{2}$.

---

[4]Các đoạn này cho thấy cách chúng ta áp dụng giải tích đối với kinh tế học. Bạn không cần thiết phải là một nhà kinh tế học để hiểu chúng. Chắc chắn tác giả không phải, có lẽ người dạy cũng và sinh viên cũng không phải là một nhà kinh tế học. Chúng ta đều có thể dùng dy/dx.

[5]Nd: Năng suất cận biên giảm dần do quy mô (tiếng Anh: diminishing returns to scale.



HÌNH 2.2.1. Giá trị biên vượt quá giá trị trung bình. Độ co giãn hằng $E=\pm 1$. Hoàn toàn co giãn đến hoàn toàn không co giản.

Trên thực tế số này phải là $-\frac{1}{2}$. Giá tăng, nhu cầu giảm. Trong định nghĩa của chúng ta, độ co giãn là $-\frac{1}{2}$. Trong cuộc trò chuyện giữa các nhà kinh tế học, dấu trừ bị bỏ ra ngoài (Tôi hy vọng bạn đừng quên việc này).

ĐỊNH NGHĨA. Độ co giãn của hàm nhu cầu $y(x)$ là

$$E(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y/y}{y/x} = \frac{dy/dx}{y/x} \tag{2.2.3}$$

Độ co giãn là "giá trị biên" bị chia bởi "giá trị trung bình." $E(x)$ cũng là số gia tương đối theo y bị chia bởi số gia tương đối theo x. Đôi khi $E(x)$ là như nhau tại tất cả các giá—trường hợp quan trọng này được thảo luận dưới đây.

VÍ DỤ 2.2.3. Giả sử nhu cầu là $y=c/x$ khi giá là x. Đạo hàm $dy/dx=-c/x^2$ được suy ra từ giải tích. Phép chia $y/x=c/x^2$ được tính chỉ bằng đại số. *Tỷ số là* $E=-1$.

$$\textbf{\textit{Đối với nhu cầu }} y=x,\ \textbf{\textit{độ co giãn là }} (-c/x^2)/(c/x^2)=-1.$$

Tất cả các đường cong nhu cầu đều được so sánh với đường cong nhu cầu này. Nhu cầu là không co giãn khi $|E|<1$. Nó co giãn khi $|E|>1$. Nhu cầu $20\sqrt{x}$ là không co giãn ($E=-\frac{1}{2}$), trong khi x^{-3} là co giãn ($E=-3$). ***Hàm luỹ thừa*** $y=cx^n$, ***mà có đạo hàm chúng ta đã biết, là hàm số với độ co giãn hằng*** n:

$$\text{nếu } y=cx^n,\ \text{khi đó } dy/dx=cnx^{n-1} \text{ và } cnx^{n-1}/(cx^n/x)=n.$$

Đó là bởi vì $y=cx^n$ đặt tiêu chuẩn mà chúng ta mới có thể sớm làm quen với kinh tế học.

Trong trường hợp đặc biệt khi $y=c/x$, nhu cầu của khách hàng là không đổi dù có giá nào đi nữa. Giá x lần đại lượng y không đổi tại $xy=c$.

VÍ DỤ 2.2.4. Đường cong cung ứng có $E>0$—cung ứng tăng với giá. Bây giờ trường hợp cơ bản là $y=cx$. Hệ số góc là c và giá trị trung bình là $y/x=c$. *Độ co giãn là* $E=c/c=1$.

So sánh $E=1$ với $E=0$ và $E=\infty$. Một cung ứng hằng là "hoàn toàn không co giãn." Luỹ thừa n bằng không và hệ số góc bằng không: $y=c$. Cung ứng sẽ không còn khi mùa thu hoạch kết thúc. Dù giá là bao nhiêu đi nữa, người nông dân cũng không thể đột ngột trông thêm nhiều lúa mạch để tăng cung ứng ngay được. Việc thiếu độ co giãn làm cho kinh tế nông nghiệp tràn đầy khó khăn.

Thái cực $E=\infty$ còn lại là "co giãn hoàn toàn." Cung ứng là không giới hạn tại một giá cố định x. Điều này dường như đúng với nước và gỗ. Trong thực tế, đường thẳng đứng $x =$ hằng số nghiêng bằng thành một đường thẳng ngang $y =$ hằng số. Giá cố định được thay đổi thành cung ứng cố định, $E = \infty$ trở thành $E = 0$, và cung ứng của nước đi theo một "đường gamma" có hình dáng giống Γ.

Ví dụ 2.2.5. Nhu cầu là một hàm tăng của *thu nhập*—thu nhập càng cao, nhu cầu càng lớn. *Độ co giãn thu nhập* là $E(I) = (dy/dI)/(y/I)$. Một xa xỉ phẩm có $E > 1$ (co giãn). Việc tăng gấp đôi thu nhập của bạn làm tăng gấp đôi nhu cầu đối với trứng cá muối. Một nhu yếu phẩm có $E < 1$ (không co giãn). Nhu cầu đối với bánh mỳ không tăng gấp đôi dù thu nhập của bạn có được tăng gấp đôi hay không đi nữa. Xin hãy nhận ra cách các ý tưởng trọng tâm của giải tích cung cấp một ngôn ngữ cho các ý tưởng trọng tâm của kinh tế học.

Lưu ý quan trọng về cung = cầu. Đây là phương trình cơ bản của kinh tế học vi mô. Đây là nơi đường cong cung ứng giao đường cong nhu cầu, nền kinh tế đạt được giá cân bằng. *Cung=cầu đảm bảo sự cạnh tranh lành mạnh.* Với nhiều nhà cung cấp, không một nhà cung cấp nào có thể tăng giá. Nếu nhà cung cấp nào đó tăng giá, các khách hàng sẽ chuyển sang nhà cung cấp khác.

Trường hợp ngược lại chính là ***sự độc quyền***—không có sự cạnh tranh. Thay vì có nhiều nhà sản xuất nhỏ như trong ngành lúa mì, chỉ có một nhà sản xuất trong ngành điện. Một sân bay là một nhà độc quyền (và có thể là cả Liên đoàn Bóng bầu dục Quốc gia Hoa Kỳ[6]). Nếu giá tăng, nhu cầu nào đó vẫn giữ nguyên.

Việc giữ giá xảy ra khi một vài nhà sản xuất hành động như một kẻ độc quyền—các luật chống độc quyền cố gắng bảo vệ nền kinh tế khỏi tình trạng này. Giá không được thiết lập bởi cung=cầu. Bài toán giải tích phải giải quyết lại khác hẳn—làm sao ***để tối đa hóa lợi nhuận***. Mục 3.2 xác định vị trí cực đại nơi mà lợi nhuận biên (hệ số góc!) bằng không.

Câu hỏi 11 (Về độ co giãn của thu nhập). *Từ một khoản thu nhập \$10.000, bạn tiết kiệm được \$500. Độ co giãn thu nhập của khoản tiết kiệm là $E = 2$. Hỏi bạn tiết kiệm được bao nhiêu phần trên mỗi dollar tiếp theo bạn kiếm được?*

Câu trả lời. Khoản tiết kiệm là $y = cx^2$ bởi vì $E = 2$. Số c phải cho $500 = c(10,000)^2$, nên c bằng 5.10^{-6}. Khi đó hệ số góc dy/dx là $2cx = 10\cdot 10^{-6}\cdot 10^4 = \frac{1}{10}$. Đây là giá trị tiết kiệm biên, 10 cent trên mỗi dollar. ***Giá trị tiết kiệm trung bình là*** 5%, ***giá trị tiết kiệm biên là*** 10%, ***và*** $E = 2$.

BÀI TẬP 2.2

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đạo hàm của $f = x^4$ là $f' =$ __a__. Nó được suy từ việc khai triển $(x+h)^4$ thành năm số hạng __b__. Sau khi trừ x^4 và chia bởi h, chúng ta còn bốn số hạng __c__. Đây là $\Delta f/h$, và giới hạn của nó là __d__.

Đạo hàm của $f = x^n$ là $f' =$ __e__. Bây giờ $(x+h)^n$ được suy ra từ định lý __f__. Các số hạng cần tìm là $x^{n-1}h$, chỉ chứa một __g__. Có __h__ số hạng đó, nên $(x+h)^n = x^n +$ __i__ $+ \cdots$. Sau khi trừ __j__ và chia bởi h, giới hạn của $\Delta f/h$ là __k__. Hệ số của $x^{n-j}h^j$, không cần thiết ở đây, là "n chọn j"= __l__, trong đó $n!$ có nghĩa là __m__.

[6]Nd: Liên đoàn Bóng bầu dục Quốc gia Hoa Kỳ (National Football League), được viết tắt là NFL, đã bắt đầu tổ chức giải bóng bầu dục Mỹ dành cho nam ở Hoa Kỳ kể từ năm 1920. Giải NFL đã trải qua hai lần sát nhập với giải được tổ chức bởi Hiệp hội Bóng bầu dục Toàn nước Mỹ (All-America Football Conference), được viết tắt là AAFC, và giải được tổ chức bởi Hiệp hội Bóng bầu dục Mỹ (American Football Conference), được viết tắt là AFC.

Đạo hàm của x^{-2} là __n__. Đạo hàm của $x^{1/2}$ là __o__. Đạo hàm của $3x + (1/x)$ là __p__, nhờ dùng các quy tắc sau: Đạo hàm của $3f(x)$ là __q__ và đạo hàm của $f(x) + g(x)$ là __r__. Giải tích tích phân khôi phục__s__ từ dy/dx. Nếu $dy/dx = x^4$, khi đó $y(x) =$__t__.

2.2.1. Bắt đầu với $f = x^6$, viết ra f và f' và sau đó f''. (Đây là "f hai phẩy," đạo hàm của f'.) Sau ________ đạo hàm của x^6, bạn nhận được một hằng số. Hằng số nào?

2.2.2. Tìm một hàm số mà nhận x^6 là đạo hàm của nó.

Tìm đạo hàm của các hàm số trong 2.2.3-2.2.10. Ngay cả khi n là âm hoắc là một phân số, đạo hàm của x^n vẫn là nx^{n-1}.

2.2.3. $x^2 + 7x + 5$

2.2.4. $1 + (7/x) + (5/x^2)$

2.2.5. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

2.2.6. $(x^2 + 1)^2$

2.2.7. $x^n + x^{-n}$

2.2.8. $x^n/n!$

2.2.9. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

2.2.10. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2}$

2.2.11. Kể tên hai hàm số có $df/dx = 1/x^2$.

2.2.12. ***Tìm lỗi sai***: x^2 là $x + x + \cdots + x$ (với x số hạng). Đạo hàm của nó là $1 + 1 + \cdots + 1$ (cũng có x số hạng). Vậy nên đạo hàm của x^2 có vẻ như chính là x.

2.2.13. Hỏi đạo hàm của $3x^{1/3}$ và $-3x^{-1/3}$ và $(3x^{1/3})^{-1}$?

2.2.14. Hệ số góc của $x + (1/x)$ bằng không khi $x =$ ________. Hành vi của đồ thị tại điểm đó như thế nào?

2.2.15. Vẽ đồ thị của $y = x^3 - x$. Hệ số góc bằng không ở đâu?

2.2.16. Nếu df/dx là âm, liệu $f(x)$ có luôn là âm hay không? Liệu $f(x)$ có là âm đối với x lớn hay không? Nếu bạn có ý nghĩ ngược lại, hãy đưa ra ví dụ.

2.2.17. Một viên đá được ném lên với vận tốc 16 ft/giây đạt độ cao $f = 16t - 16t^2$ tại thời điểm t.

(a) Tìm tốc độ trung bình $\Delta f/\Delta t$ của nó từ $t = 0$ tới $t = \frac{1}{2}$.

(b) Tìm tốc độ trung bình $\Delta f/\Delta t$ của nó từ $t = \frac{1}{2}$ tới $t = 1$.

(c) Hỏi giá trị df/dt tại $t = \frac{1}{2}$?

2.2.18. Khi f được đo theo đơn vị là feet và t theo giây, hỏi các đơn vị của f' và f''? Trong $f = 16t - 16t^2$, số 16 thứ nhất là theo ft/giây nhưng số 16 thứ hai là ________.

2.2.19. Vẽ đồ thị $y = x^3 + x^2 - x$ từ $x = -2$ tới $x = 2$ và ước lượng nơi mà nó giảm. Kiểm tra điểm chuyển tiếp bằng cách giải $dy/dx = 0$.

2.2.20. Tại điểm mà $dy/dx = 0$, có điều gì đặc biệt về đồ thị của $y(x)$? Trường hợp kiểm thử: $y = x^2$.

2.2.21. Tìm hệ số góc của $y = \sqrt{x}$ bằng đại số (sau đó cho $h \to 0$):

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

2.2.22. Bắt chước Bài toán 2.2.21 để tìm hệ số góc của $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2.2.23. Hoàn thành tam giác của Pascal đối với $n = 5$ và $n = 6$. Tại sao các số ở mỗi hàng (thứ n) cộng lại bằng 2^n?

2.2.24. Hoàn thành $(x + h)^5 = x^5 +$ ________. Hỏi các hệ số nhị thức $\binom{5}{1}$ và $\binom{5}{2}$ và $\binom{5}{3}$?

2.2.25. Tính $(x + h)^3 - (x - h)^3$, chia ởi $2h$, và đặt $h = 0$. *Tại sao phải chia bởi $2h$ để tìm hệ số góc này*?

2.2.26. Giải phương trình vi phân $y'' = x$ để tìm $y(x)$.

2.2.27. Đối với $f(x) = x^2 + x^3$, viết ra $f(x + \Delta x)$ và $\Delta f/\Delta x$. Giới hạn tại $\Delta x = 0$ bằng bao nhiêu và quy tắc nào về các tổng được xác nhận?

2.2.28. Đạo hàm của $(u(x))^2$ là ________ từ Mục 2.1. Kiểm thử quy tắc này với $u = x^n$.

2.2.29. Hỏi các đạo hàm của $x^7 + 1$ và $(x + 1)^7$? Dịch chuyển đồ thị của x^7.

2.2.30. Nếu dy/dx là $v(x)$, hàm số nào có các đạo hàm sau?

(a) $4v(x)$ (c) $v(x+1)$
(b) $v(x)+1$ (d) $v(x)+v'(x)$

2.2.31. Hàm số $f(x)$ nào có đạo hàm cấp bốn bằng 1?

2.2.32. Hàm số $f(x)$ nào có đạo hàm cấp n bằng 1?

2.2.33. Giả sử $df/dx = 1+x+x^2+x^3$. Tìm $f(x)$.

2.2.34. Giả sử $df/dx = x^{-2}-x^{-3}$. Tìm $f(x)$.

2.2.35. *$f(x)$ có thể là đạo hàm của chính nó*. Trong đa thức vô hạn $f = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 +$ ________, những số nào nhân x^4 và x^5 nếu df/dx bằng f?

2.2.36. Viết ra phương trình vi phân $dy/dx =$ ________ mà có nghiệm là $y = x^2$. Làm cho vế phải chứa y (chứ không chỉ chứa $2x$).

2.2.37. *Đúng hay sai*:
(a) Đạo hàm của x^π là πx^π.
(b) Đạo hàm của ax^n/bx^n là a/b.
(c) Nếu $df/dx = x^4$ và $dg/dx = x^4$, khi đó $f(x) = g(x)$.
(d) $(f(x)-f(a))/(x-a)$ tiến tới $f'(a)$ khi $x \to a$.
(e) Hệ số góc của $y = (x-1)^3$ là $y' = 3(x-1)^2$.

Các bài toán 2.2.38-2.2.44 **là về giải tích trong kinh tế học.**

2.2.38. Khi chi phí là $y = y_0 + cx$, tìm $E(x) = (dy/dx)/(y/x)$. Nó tiến tới ________ khi x lớn.

2.2.39. Từ khoản thu nhập $x = \$10,000$, bạn chi $y = \$1200$ cho chiếc xe hơi của mình. Nếu $E = \frac{1}{2}$, bao nhiêu phần của mỗi dollar tiếp theo xe được chi cho chiếc xe của bạn? So sánh dy/dx (giá trị biên) với y/x (giá trị trung bình).

2.2.40. Kể tên một sản phẩm có độ co giãn giá là
(a) cao
(b) thấp
(c) âm (?)

2.2.41. Nhu cầu $y = c/x$ có $dy/dx = -y/x$. Chứng tỏ rằng $\Delta y/\Delta x$ *không* phải là $-y/x$. (Dùng các con số hoặc đại số.) Các bước hữu hạn bỏ qua đặc trưng của các bước vô cùng bé.

2.2.42. Nhu cầu $y = x^n$ có $E =$ ________. Doanh thu xy (giá lần nhu cầu) có độ co giãn $E =$ ________.

2.2.43. $y = 2x+3$ tăng với chi phí biên 2 từ chi phí cố định 3. Vẽ đồ thị của $E(x)$.

2.2.44. Từ khoản thu nhập I, chúng ta tiết kiệm $S(I)$. Khuynh hướng tiết kiệm *biên* là ________. Độ co giãn là không cần thiết bởi vì S và I có cùng ________. Áp dụng cho toàn bộ nền kinh tế, đây là (kinh tế học vi mô) (kinh tế học vĩ mô).

2.2.45. 2^t được tăng gấp đôi khi t tăng thêm ________. t^3 được tăng gấp đôi khi t tăng tới ________t. Thời gian quy mô tăng gấp đôi đối với dịch bệnh AIDS là tỷ lệ thuận với t.

2.2.46. Sinh học cũng kéo theo phương trình $dy/dx = n\,dx/x$, tăng trưởng tương đối đối với đầu dy/y và thân dx/x. Hỏi $n > 1$ hay $n < 1$ đối với mộ đứa trẻ?

2.2.47. Những hàm số nào có $df/dx = x^9$ và $df/dx = x^n$? Tại sao $n = -1$ lại làm rối mọi thứ?

2.2.48. Hệ số góc của $y = x^3$ được suy ra từ công thức:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = (x+h)^2 + (x+h)x + x^2.$$

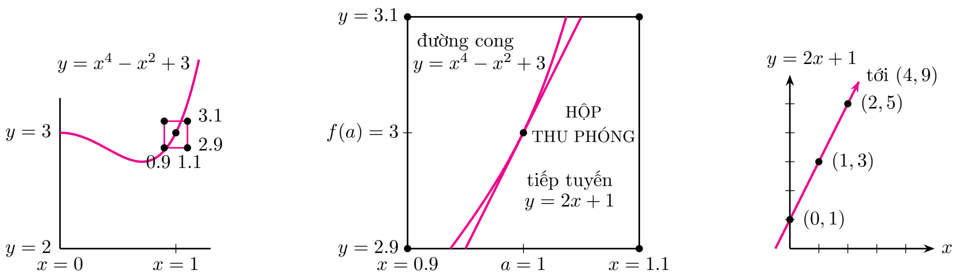
(a) Kiểm tra phần đại số. Tìm dy/dx khi $h \to 0$.
(b) Viết đồng nhất thức tương tự đối với $y = x^4$.

2.2.49 (Đồ họa máy tính). Tìm tất cả các điểm nơi mà $y = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3 = 0$ và nơi mà $dy/dx = 0$.

2.2.50. Đồ thị của $y_1(x) = x^4 + x^3$ và $y_2(x) = 7x - 5$ tiếp xúc nhau tại điểm nơi mà $y_3(x) =$ ________ $= 0$. Vẽ đồ thị $y_3(x)$ để thấy được điều đặc biệt. Hỏi hành vi của $y(x)$ tại một điểm nơi mà $y = y' = 0$?

2.2.51. Trong giải xổ số Massachusetts, bạn chọn 6 số từ trong 36 số. Hỏi khả năng để bạn giành chiến thắng?

2.2.52. Trong hoàn cảnh nào bạn sẽ có lời nếu bạn mua một vé xổ số cho mỗi tổ hợp có thể có, để một trong số các vé sẽ thắng?



HÌNH 2.3.1. Tiếp tuyến và đường cong có cùng hệ số góc 2 (điều này được đặc biệt thấy rõ sau khi phóng to).

2.3. Hệ số góc và Tiếp tuyến

Chương 1 đã bắt đầu với các đồ thị đường thẳng. Vận tốc là hằng (ít nhất hằng từng khúc). Hàm quãng đường là tuyến tính. Bây giờ chúng ta đang phải đối mặt với các đa thức như $x^3 - 2$ hoặc $x^4 - x^2 + 3$, các hàm số khác sẽ được xét sau. Đồ thị của chúng chắc chắn là những đường cong. Hầu hết các hàm số có đồ thị không gần giống với đồ thị của các hàm tuyến tính—trừ khi bạn tập trung vào gần một một điểm đơn. Đó là những gì chúng ta sẽ làm.

Trên một đoạn rất ngắn, một đường cong trông giống như một đường thẳng. Nhìn qua một chiếc kính hiển vi, hoặc dùng chức năng phóng to của một máy tính, chúng ta sẽ thấy rõ điều này. Đồ thị của quãng đường với thời gian trở nên gần như tuyến tính. Hệ số góc của nó là vận tốc tại tthời điểm đó. Chúng ta muốn tìm đường thẳng mà gần với đồ thị nhất—"***tiếp tuyến***"—trước khi đồ thị trở nên cong hơn và xa dần đường thẳng.

Rất dễ mô tả tiếp tuyến. Chúng ta đang xét một điểm cụ thể trên đồ thị của $y = f(x)$. Tại điểm đó, $x = a$ và y bằng $f(a)$ và hệ số góc bằng $f'(a)$. ***Tiếp tuyến đi qua điểm*** $x = a, y = f(a)$ ***đó với có hệ số góc*** $m = f'(a)$ ***đó***. Hình 2.3.1 biểu diễn đường thẳng rõ hơn bất kỳ phương trình nào, nhưng chúng ta phải chuyển hình học thành đại số. Chúng ta cần phương trình của đường thẳng.

VÍ DỤ 2.3.1. Giả sử $y = x^4 - x^2 + 3$. Tại điểm $x = a = 1$, tung độ là $y = f(a) = 3$. Hệ số góc là $dy/dx = 4x^3 - 2x$. Tại $x = 1$, hệ số góc là $4 - 2 = 2$. Đó là $f'(a)$:

Các số $x = 1$, $y = 3$, $dy/dx = 2$ ***xác định tiếp tuyến***.

Phương trình tiếp tuyến là $y - 3 = 2(x - 1)$, *và mục này giải thích tại sao lại như vậy.*

PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Một đường thẳng được xác định bởi hai điều kiện. Chúng ta sẽ nhận biết được một đường thẳng nếu chúng ta biết được hai điểm bất kỳ của nó. (Chúng ta vẫn phải viết ra phương trình của đường thẳng này.) Ngoài ra, nếu chúng ta biết ***một điểm và hệ số góc*** của một đường thẳng, chúng ta cũng thiết lập được phương trình của đường thẳng đó. Đây là tình huống diễn ra đối với tiếp tuyến, trong đó chúng ta đã biết được một hệ số góc tại một điểm được cho trước:

(1) Phương trình của một đường thẳng có dạng $y = mx + b$.
(2) Số m là hệ số góc của đường thẳng, bởi vì $dy/dx = m$.
(3) Số b điều chỉnh đường thẳng sao cho nó đi qua điểm được cho trước.

Tôi sẽ lần lượt đánh giá những điều trên—trước tiên viết ra $y = mx + b$, sau đó tính m, rồi xác định b.

1. Đồ thị của $y = mx + b$ không phải là một đường cong. Làm sao để chúng ta biết được điều này! Đối với ví dụ cụ thể $y = 2x + 1$, lấy hai điểm mà có các toạ độ x, y thoả mãn phương trình:

$$x = 0, y = 1 \text{ và } x = 4, y = 9 \text{ đều thoả mãn } y = 2x + 1.$$

Các điểm $(0, 1)$ và $(4, 9)$ đó đều nằm trên đồ thị. *Trung điểm của hai điểm này có $x = 2$ và $y = 5$.* Điểm đó cũng thoả mãn $y = 2x + 1$. ***Trung điểm cũng nằm trên đồ thị***. Nếu chúng ta phân đôi một lần nữa, trung điểm của $(0, 1)$ và $(2, 5)$ là $(1, 3)$. Điểm này cũng có $y = 2x + 1$. Đồ thị chứa tất cả các trung điểm và nó phải là một đường thẳng.

2. Hệ số góc đúng m đối với tiếp tuyến có giá trị nào? Trong ví dụ của chúng ta, nó là $m = f'(a) = 2$. ***Đường cong và tiếp tuyến của nó có cùng hệ số góc tại tiếp điểm***: $dy/dx = 2$.

Cho phép tôi giải thích theo một cách khác tại sao đường thẳng $y = mx + b$ có hệ số góc m. Tại $x = 0$, tung độ của nó là $y = b$. Tại $x = 1$, tung độ nó là $y = m + b$. *Đồ thị đã đi theo phương ngang một đơn vị trục hoành* (0 tới 1) *và đi theo phương đứng m đơn vị trục tung* (b tới $b + m$). Toàn bộ ý tưởng là:

$$\text{(2.3.1)} \qquad \text{hệ số góc} = \frac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} = \frac{m}{1}.$$

Từng đơn vị trục hoành đồng nghĩa với m đơn vị trục tung, tới $2m + b$ hoặc $3m + b$. Một đường thẳng luôn giữ một hệ số góc hằng, trong khi đó hệ số góc của $y = x^4 - x^2 + 3$ bằng 2 chỉ tại $x = 1$.

3. Cuối cùng chúng ta xác định b. Tiếp tuyến $y = 2x + b$ phải đi qua $z = 1, y = 3$. Vì vậy $b = 1$. Với các chữ cái thay vì các chữ số, $y = mx + b$ kéo theo $f(a) = ma + b$. Vậy chúng ta biết b:

Phát biểu 2.3.1. Phương trình của tiếp tuyến có $b = f(a) - ma$:

$$\text{(2.3.2)} \qquad y = mx + f(a) - ma \text{ hay } y - f(a) = m(x - a).$$

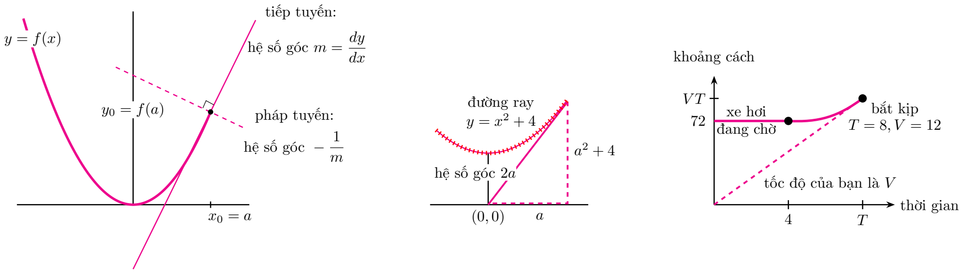
Phương trình của tiếp tuyến được viết ở dạng trên là tốt nhất. Bạn ngay lập tức thấy được những gì xảy ra tại $x = a$. Thừa số $x - a$ bằng không. Vì vậy $y = f(a)$ như được yêu cầu. Đây là ***dạng hệ số góc-điểm*** của phương trình, và chúng ta sẽ liên tục dùng nó:

$$y - 3 = 2(x - 1) \text{ hay } \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} = \text{hệ số góc 2.}$$

Ví dụ 2.3.2. Đường cong $y = x^3 - 2$ đi qua $y = 6$ khi $x = 2$. Tại điểm đó, $dy/dx = 3x^2 = 12$. Phương trình hệ số góc-điểm của tiếp tuyến dùng 2 và 6 và 12:

$$y - 6 = 12(x - 2), \text{ mà cũng là } y = 12x - 18.$$

Còn có một đường thẳng quan trọng khác mà chúng ta cần quan tâm. Đường thẳng *vuông góc* với tiếp tuyến và *vuông góc* với đường cong. Đây là ***pháp tuyến*** trong Hình 2.3.2. Đặc tính mới của đường thẳng này là hệ số góc của nó. Khi tiếp tuyến có hệ số góc m, pháp tuyến có hệ số góc $-1/m$ (Quy tắc: Tích của hai hệ số góc của hai đường thẳng vuông góc với nhau bằng -1). Ví dụ 2.3.2 có hệ số góc $m = 12$, nên pháp tuyến có hệ số góc $m = -1/2$:



HÌNH 2.3.2. Tiếp tuyến $y - y_0 = m(x - x_0)$. Pháp tuyến $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$. Chúng ta chuyển từ bài toán tàu lượn siêu tốc trong Ví dụ (2.3.3) sang bài toán xe hơi trong Ví dụ.

$$\text{tiếp tuyến: } y - 6 = 12(x - 2) \qquad \text{pháp tuyến: } y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 2).$$

Các tia sáng đi theo hướng pháp tuyến. Các đám cháy bụi[7] cũng như vậy—chúng di chuyển vuông góc với mép lửa. Hãy dùng dạng hệ số góc-điểm! Tiếp tuyến là $y = 12x - 18$, nhưng pháp tuyến không phải là $y = -\frac{1}{12}x - 18$.

VÍ DỤ 2.3.3. Bạn đang ngồi trên một chiếc tàu lượn siêu tốc mà chạy theo đường ray $y = x^2 + 4$. Bạn thấy một người bạn đang đứng tại $(0, 0)$ và muốn đến đó một nhanh chóng. Chọn vị trí để bạn bước ra khỏi chiếc tàu lượn và bay thẳng về vị trí của người đó?[8]

LỜI GIẢI. Đường bay của bạn sẽ là tiếp tuyến (tại tốc độ cao). Vấn đề là ***chọn*** $x = a$ ***sao cho đường tiếp tuyến đi qua*** $(0, 0)$. Khi bạn bước ra tại $x = a$,

tung độ là $y = a^2 + 4$ và hệ số góc là $2a$

phương trình của tiếp tuyến là $y - (a^2 + 4) = 2a(x - a)$

đường thẳng này đi qua $(0, 0)$ nếu $-(a^2 + 4) = -2a^2$ hay $a = \pm 2$.

Những người điều khiển tàu vũ trụ và những cầu thủ ném bóng trong môn bóng chày cũng phải giải quyết bài toán tương tự. Việc ném một quả bóng vào đúng thời điểm để trúng một mục tiêu cách đó 60 feet là một màn thể hiện đáng kinh ngạc của giải tích. Những ai chơi vị trí trung phong trong bóng chày mà có một mục tiêu di chuyển nên đọc Chương 4 về các tỷ lệ tương đối.

Dưới đây là một ví dụ thực tế hơn ví dụ về tàu lượn siêu tốc ở trên. Việc dừng đèn đỏ làm lãng phí nhiên liệu. Người ta giảm tốc độ từ xa, và sau đó tăng tốc. Khi có một chiếc xe hơi đang đứng đợi đen đó phía trước xe hơi của bạn, bạn phải dùng đến giải tích để tiên liệu thời gian để không đâm vào chiếc xe phía trước:

VÍ DỤ 2.3.4. Bạn phải đi chậm bao nhiêu thời gian khi cách đèn đỏ 72 meter? Trong 4 giây, nó sẽ xanh. Chiếc xe hơi đứng đợi đèn đỏ sẽ gia tốc tại 3 meters/giây^2. Bạn không thể vượt qua chiếc xe hơi phía trước.

---

[7]Nd: Đám cháy bụi là một đám cháy trong khu vực có nhiều bụi cây, hoặc bụi rậm, khác với đám cháy trong rừng cây, hoặc rừng rậm được gọi là đám cháy rừng.

[8]Nd: Đừng thử điều này trừ khi bạn là một siêu nhân và có thể bay.

Chiến thuật. Bạn ngay lập tức giảm tốc độ xuống tốc độ V, tốc độ vừa đủ để bạn bắt kịp chiếc xe đợi đèn đỏ phía trước. (Nếu bạn đợi rồi lúc sau mới phanh, tốc độ của bạn sẽ thấp hơn V.) Tại thời điểm T bắt kịp chiếc xe kia, cả hai chiếc xe đều có cùng tốc độ và cùng vị trí. Đủ ***hai điều kiện***, nên các hàm quãng đường trong Hình 2.3.2d là tiếp tuyến với nhau.

Lời giải. Tại thời điểm T, tốc độ của chiếc xe kia là $3(T-4)$. Điều này cho thấy việc trễ 4 giây. Các tốc độ bằng nhau khi $3(T-4) = V$ hay $T = \frac{1}{3}V + 4$. Bây giờ chúng ta cần quãng đường bằng nhau. Quãng đường của bạn là VT. Quãng đường của chiếc xe kia là $72 + \frac{1}{2}at^2$:

$$72 + \frac{1}{2} \cdot 3(T-4)^2 = VT \text{ trở thành } 72 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}V^2 = V(\frac{1}{3}V + 4).$$

Đáp án là $V = 12$ meters/giây. Đây là 43 km/hr hay 27 dặm trên mỗi giờ.

Nếu không có chiếc xe phía trước bạn, bạn chỉ cần giảm tốc độ xuống $V = 72/4 = 18$ meters/giây. Khi đèn tín hiệu giao thông chuyển sang màu xanh, bạn vượt qua đèn tín hiệu giao thông tại 65 km/hr hay 40 dặm trên mỗi giờ. Hãy thử đi!

CÁT TUYẾN NỐI HAI ĐIỂM TRÊN MỘT ĐƯỜNG CONG

Thay vì tiếp tuyến qua một điểm, chúng ta hãy xét ***cát tuyến qua hai điểm***. Đối với tiếp tuyến, hai điểm này trùng nhau. Bây giờ chúng ta tách chúng ra xa. Dạng hệ số góc-điểm của một phương trình tuyến tính được thay bởi ***dạng hai điểm***.

Phương trình của đường cong vẫn là $y = f(x)$. Điểm đầu tiên vẫn nằm tại $x = a, y = f(a)$. Điểm còn lại là tại $x = c, y = f(c)$. Đường cát tuyến đi qua hai điểm đó, và chúng ta muốn biết phương trình của nó. Líu này, chúng ta không bắt đầu với hệ số góc—nhưng rất dễ tìm thấy m.

Ví dụ 2.3.5. Đường cong $y = x^3 - 2$ đi qua $2 = 3, y = 6$. Nó cũng đi qua $x = 3, y = 25$. Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm đó là:

$$m = \frac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} = \frac{25-6}{3-2} = 19.$$

Dạng hệ số góc-điểm (tại điểm thứ nhất) là $y - 6 = 19(x-2)$. Đường thẳng này tự động đi qua điểm thứ hai $(3, 25)$. Kiểm tra: $25 - 6$ bằng $19(3-2)$. Cát tuyến có hệ số góc đúng 19 để đi qua điểm thứ hai. Nó là *hệ số góc trung bình* $\Delta y/\Delta x$.

Nhìn về tương lai. Điểm thứ hai tiến về điểm thứ nhất. Hệ số góc cát tuyến $\Delta y/\Delta x$ tiến về hệ số góc tiếp tuyến dy/dx. Chúng ta khám phá ra đạo hàm (theo thuật ngữ giới hạn). Vào lúc này, đây đúng là điểm then chốt—nhưng không phải khi nào cũng vậy.

Chẳng bao lâu nữa bạn sẽ nhanh chóng quen thuộc các đạo hàm. Bạn sẽ cảm thấy làm việc với chính dy/dx dễ chịu hơn với $\Delta y/\Delta x$. Tình huống này sẽ được thấy ngay khi bạn biết rằng x^9 có hệ số góc $9x^8$. Gần $x = 1$,khaongr cách theo *phương đứng* gấp 9 lần khoảng cách theo *phương ngang*. Để tìm $\Delta y = 1.001^9 - 1^9$, chúng ta chỉ cần nhân $\Delta x = .001$ bởi 9. Xấp xỉ nhanh đưa ra kết quả là .009, máy tính cầm tay đưa ra $\Delta y = .009036$. Việc tính theo đường tiếp tuyến dễ hơn việc tính theo đường cong.

Trở lại với cát tuyến, và thay đổi các chữ số thành các chữ cái. Đường thẳng nào nối hai điểm $x = a, y = f(a)$ với $x = c, y = f(c)$? Một nhà toán học luôn viết ra công thức trước khi thế các con số vào, và luôn viết ra lập luận trước khi thiết lập các công thức trước, và luôn phác thảo các ý tưởng trước khi viết ra lập luận:

(1) Hệ số góc là $m = \dfrac{\text{khoảng cách theo phương đứng}}{\text{khoảng cách theo phương ngang}} = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$
(2) Tung độ là $y = f(a)$ tại $x = a$
(3) Tung độ là $y = f(c)$ tại $x = c$ (tự động có được với hệ số góc đúng).

PHÁT BIỂU 2.3.2. ***Dạng hai-điểm*** dùng hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm:

$$\textbf{\textit{cát tuyến}}: y - f(a) = (\frac{f((c) - f(a)}{c - a})(x - a), \tag{2.3.3}$$

Tại $x = a$, vế phải bằng không. Vậy $y = f(a)$ bên vế trái. Tại $x = c$, vế phải có hai thừa số $x - c$. Chúng triệt tiêu và để lại $y = f(c)$. Với phương trình (2.3.2) đối với tiếp tuyến và phương trình (2.3.3) đối với cát tuyến, chúng ta đã sẵn sàng để biết được sự thật.

CÁT TUYẾN TIẾN TỚI TIẾP TUYẾN

Sau đây là những điều khá cơ bản. Chúng tương tự với những gì chúng ta đã làm với các vận tốc:

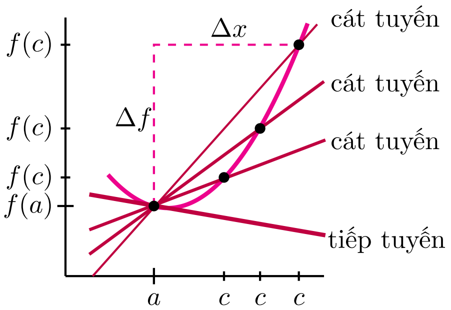
$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\Delta\text{quãng đường}}{\Delta\text{thời gian}} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Giới hạn là df/dt. Chúng ta thực hiện hoàn toàn tương tự với các hệ số góc. ***Cát tuyến trở thành tiếp tuyến khi*** c ***tiến tới*** a:

$$\text{hệ số góc của cát tuyến:} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

$$\text{hệ số góc của tiếp tuyến:} \quad \frac{df}{dx} = \text{giới hạn của } \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Đây chính là ý tưởng cơ sở của của giải tích vi phân! Bạn phải tưởng tượng ra nhiều cát tuyến hơn số cát tuyết được tôi vẽ trong Hình 2.3.3, khi c đến gần a. Ai cũng xem $c - a$ như Δx. Liệu bạn có xem $f(c) - f(a)$ như $f(x + \Delta x) - f(x)$ hay không? Nó đúng là Δf, số gia trong tung độ. Tất cả các đường thẳng đều đi qua $x = a, y = f(a)$. ***Giới hạn của chúng là tiếp tuyến***.



cát tuyến $\quad y - f(a) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$

tiếp tuyến $\quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$

HÌNH 2.3.3. Các cát tuyến tiến tới tiếp tuyến khi các hệ số $\Delta f/\Delta x$ của chúng tiến tới df/dx.

Một cách trực quan, giới hạn khá là rõ. Hai điểm tiến tới với nhau, và tiếp tuyến tiếp xúc với đường cong tại *một* điểm. (Nó có thể tiếp xúc với đường cong tại một điểm rất xa khác). Về mặt toán học, giới hạn này có thể khó—nó đưa chúng ta từ đại số sang giải tích. Đại số cố tránh dạng 0/0, nhưng giải tích lại càng muốn xáp vào dạng này.

Giới hạn mới đối với df/dx trông có vẻ khác, nhưng thực chất cũng giống như trước:

$$f'(a) = \lim_{c \to a} \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \tag{2.3.4}$$

Ví dụ 2.3.6. Tìm cát tuyến và tiếp tuyến đối với $y = f(x) = \sin x$ tại $x = 0$. Điểm bắt đầu là $x = 0, y = \sin 0 = 0$. Đây chính là gốc toạ độ $(0, 0)$. Tỹ số giữa khoảng cách theo phương đứng và khoảng cách theo phương ngang là $(\sin c)/c$:

$$\textit{phương trình cát tuyến } y = \frac{\sin c}{c}x \qquad \textit{phương trình tiếp tuyến } y = 1x.$$

Khi c tiến tới 0, cát tuyến trở thành tiếp tuyến. Giới hạn của $(\sin c)/c$ không phải là 0/0, dạng vô nghĩa, mà bằng 1, chính là df/dx tại $x = 0$.

Ví dụ 2.3.7. Lượng vàng bạn sỡ hữu sẽ có giá trị $\sqrt{t}$ triệu dollars trong t năm. Hỏi thời điểm tốc độ tăng tỷ giá giảm xuống còn 10% giá trị hiện hành, đây là thời điểm bạn nên bán vàng và mua trái phiếu? Tại $t = 25$, giá trị trái phiếu của bạn nhiều hơn như thế nào so với $\sqrt{t} = 5$?

Lời giải. Tốc độ tăng tỷ giá là đạo hàm của $\sqrt{t}$, mà bằng $1/2\sqrt{t}$. Nghĩa là 10% của giá trị hiện hành $\sqrt{t}$ khi $\sqrt{t} = \sqrt{t}/10$. Vì vậy $2t = 10$ hay $t = 5$. Tại thời điểm đó bạn bán vàng, rời khỏi đường cong, và đi theo tiếp tuyến:

$$y - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{10}(t - 5) \text{ trở thành } y - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \text{ tại } t = 25.$$

Với lãi suất không đổi trên trái phiếu, chứ không phải lãi suất kép, bạn đạt được $y = 3\sqrt{5} = 6.7$ triệu dollars. Vàng chỉ có giá trị 5 triệu dollars.

BÀI TẬP 2.3

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Một đường thẳng được xác định bởi __a__ điểm, hoặc một điểm và __b__. Hệ số góc của tiếp tuyền bằng hệ số góc của __c__. Dạng điểm-hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $y - f(a) =$ __d__.

Tiếp tuyến của $y = x^3 + x$ tại $x = 1$ có hệ số góc __e__. Phương trình của nó là __f__. Nó cắt trục y tại __g__ và trục x tại __h__. Đường pháp tuyến tại điểm $(1, 2)$ này có hệ số góc __i__. Phương trình của nó là $y - 2 =$ __j__. Cát tuyến từ $(1, 2)$ tới $(2,$ __k__$)$ có hệ số góc __l__. Phương trình của nó là $y - 2 =$ __m__.

Điểm $(c, f(c))$ nằm trên đường thẳng $y - f(a) = m(x - a)$ nếu $m =$ __n__. Khi c tiến tới a, hệ số góc m tiến tới __o__. Cát tuyến tiến tới __p__.

2.3.1. (a) Tìm hệ số góc của $y = 12/x$.
(b) Tìm phương trình của tiếp tuyến tại $(2, 6)$.
(c) Tìm phương trình của pháp tuyến tại $(2, 6)$.
(d) Tìm phương trình của cát tuyến qua $(4, 3)$.

2.3.2. Đối với $y = x^2 + x$, tìm các phương trình đối với
(a) tiếp tuyến và pháp tuyến tại $(1, 2)$;
(b) cát tuyến qua $x = 1 + h$, $y = (1 + h)^2 + (1 + h)$.

2.3.3. Một đường thẳng đi qua $(1, -1)$ và $(4, 8)$. Viết phương trình của nó dưới dạng điểm-hệ số góc. Sau đó viết nó dưới dạng $y = mx + b$.

2.3.4. Tiếp tuyến của $y = x^3 + 6x$ tại gốc tọa độ là $y =$ ________. Liệu nó có cắt đường cong một lần nữa hay không?

2.3.5. Tiếp tuyến của $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại gốc tọa độ là $y =$ ________. Nó cũng là cát tuyến đi qua điểm ________.

2.3.6. Tìm tiếp tuyến của $x = y^2$ tại $x = 4$, $y = 2$.

2.3.7. Đối với $y = x^2$ cát tuyến từ (a, a^2) tới (c, c^2) có phương trình ________. Thực hiện phép chia bởi $c - a$ để tìm tiếp tuyến khi c tiến tới a.

2.3.8. Xây dựng một hàm số có cùng hệ số góc tại $x = 1$ và $x = 2$. Sau đó tìm hai điểm mà tại đó $y = x^4 - 2x^2$ có cùng tiếp tuyến (vẽ đồ thị).

2.3.9. Tìm một đường cong mà tiếp xúc với $y = 2x - 3$ tại $x = 5$. Tìm pháp tuyến của đường cong đó tại $(5, 7)$.

2.3.10. Đối với $y = 1/x$, cát tuyến từ $(a, 1/a)$ tới $(c, 1/c)$ có phương trình ________. Đơn giản hệ số góc của nó và tìm giới hạn khi c tiến tới a.

2.3.11. Hỏi phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của $y = \sin x$ tại $x = \pi/2$?

2.3.12. Nếu c và a cùng tiến tới một giá trị $x = b$ nằm giữa chúng , khi đó hệ số góc cát tuyến $(f(c) - f(a))/(c - a)$ tiến tới ________.

2.3.13. Tại $x = a$ trên đồ thị của $y = 1/x$, tính

(a) phương trình của tiếp tuyến

(b) các điểm mà tại đó tiếp tuyến cát các trục tọa độ.

Tam giác nằm giữa tiếp tuyến và các trục tọa độ luôn có diện tích ________.

2.3.14. Giả sử $g(x) = f(x) + 7$. Tiếp tuyến của f và g tại $x = 4$ là ________. *Đúng hay sai*: Khoảng cách giữa các đường thẳng đó bằng 7.

2.3.15. Chọn c để $y = 4x$ tiếp xúc với $y = x^2 + c$. Khớp các độ cao cũng như các hệ số góc.

2.3.16. Chọn c để $y = 5x - 7$ tiếp xúc với $y = x^2 + cx$.

2.3.17. Đối với $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, tìm tất cả các điểm mà tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

2.3.18. $y = 4x$ không thể tiếp xúc với $y = cx^2$. Hãy thử khớp các tung độ và hệ số góc, hoặc vẽ các đường cong.

2.3.19. Xác định c để đường thẳng nối $(0, 3)$ và $(5, -2)$ tiếp xúc với đường cong $y = c/(x + 1)$.

2.3.20. Chọn b, c, d để hai parabola $y = x^2 + bx + c$ và $y = dx - x^2$ tiếp xúc với nhau tại $x = 1$, $y = 0$.

2.3.21. Đồ thị của $f(x) = x^3$ đi qua $(1, 1)$.

(a) Một điểm khác là $x = c = 1 + h$, $y = f(c) =$ ________.

(b) Số gia trong f là $\Delta f =$ ________.

(c) Hệ số góc của cát tuyến là $m =$ ________.

(d) Khi h tiến tới không, m tiến tới ________.

2.3.22. Xây dựng một hàm số $y = f(x)$ mà có tiếp tuyến tại $x = 1$ trùng với cát tuyến mà giao đường cong một lần nữa tại $x = 3$.

2.3.23. Vẽ hai đường cong cong ra xa nhau. Đánh dấu các điểm P và Q nơi mà hai đường cong gần nhau nhất. Tại các điểm đó, các tiếp tuyến là ________ và các pháp tuyến là ________.

2.3.24 (*). Nếu các parabola $y = x^2 + 1$ và $y = x - x^2$ đến gần nhau nhất tại $(a, a^2 + 1)$ và $(c, c - c^2)$, thiết lập hai phương trình đối với a và c.

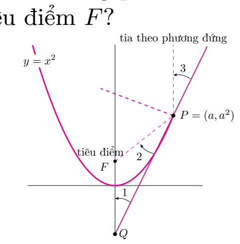
2.3.25. Một tia sáng chiếu xuống đường thẳng $x = a$. Nó chạm gương phản xạ hình parabola $y = x^2$ tại $P = (a, a^2)$.

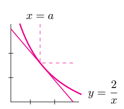
(a) Tìm tiếp tuyến tại P. Xác định vị trí điểm Q nơi mà tiếp tuyến đó cắt trục y.

(b) Kiểm tra rằng P và Q có cùng khoảng cách đến tiêu điểm $F = (0, \frac{1}{4})$.

(c) Chúng tỏ rừ (b) rằng đường thẳng có hình có các góc bằng nhau.

(d) Định luật nào của vật lý làm cho mỗi tia sáng phản xạ khỏi parabola để tới tiêu điểm F?





2.3.26. Đối với một gương phản xạ kém chất lượng $y = 2/x$, một tia sáng chiếu xuống một đường thẳng đặc biệt $x = a$, bị phản xạ theo phương ngang. Tìm a?

2.3.27. Đối với parabola $4py = x^2$, hệ số góc bằng 1 tại đâu? Tại điểm đó một tia sáng chiếu xuống theo phương đứng sẽ bị phản xạ theo phương ngang. Ví thế tiêu điểm nằm tại $(0,$ ________$)$.

2.3.28. Tại sao các khẳng định sau là sai? Sửa lại cho đúng.

(a) Nếu $y = 2x$ là tiếp tuyến tại $(1, 2)$, khi đó $y = -\frac{1}{2}x$ là pháp tuyến.

(b) Khi c tiến tới a, hệ số góc cát tuyến $(f(c) - f(a))/(c - a)$ tiến tới $(f(a) - f(a))/(a - a)$.

(c) Đường thẳng qua $(2, 3)$ với hệ số góc 4 là $y - 2 = 4(x - 3)$.

2.3.29. Một quả bóng đi quanh một đường tròn: $x = \cos t$, $y = \sin t$. Tại $t = 3\pi/4$, quả bóng bay khỏi đường tròn theo phương tiếp tuyến. Tìm phương trình của tiếp tuyến đó và điểm tại đó quả bóng chạm đất ($y = 0$).

2.3.30. Nếu tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = a$ trùng với tiếp tuyến của $y = g(x)$ tại $x = b$, tìm hai phương trình mà phải được thỏa mãn bởi a và b.

2.3.31. Vẽ một đường tròn có bán kính 1 nằm yên trong parabola $y = x^2$. Tại điểm tiếp xúc (a, a^2), phương trình pháp tuyến là ________. Pháp tuyến đó đó có $x = 0$ khi $y =$ ________. Khoảng cách tới (a, a^2) bằng bán kính 1 khi $a =$ ________. Điều này xác định vị trí điểm tiếp xúc.

2.3.32. Thực hiện theo Bài tập 2.3.31 đối với parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ phẳng hơn và giải thích đường tròn nằm yên tại đâu.

2.3.33. Bạn đang nộp đơn xin một học bổng \$1000 và thời gian của bạn đáng giá \$10 một giờ. Nếu cơ hội thành công là $1 - (1/x)$ từ x giờ viết đơn để nộp, khi nào bạn nên dừng viết đơn?

2.3.34. Giả sử $|f(c) - f(a)| \leqslant |c - a|$ đối với mỗi cặp điểm a và b. Chứng minh rằng $|df/dx| \leqslant 1$.

2.3.35. Từ điểm $x = a$ nào, tiếp tuyến của $y = 1/x^2$ cắt trục x tại $x = 3$?

2.3.36. Nếu $u(x)/v(x) = 7$, tìm $u'(x)/v'(x)$. Tìm $(u(x)/v(x))'$.

2.3.37. Tìm $f(c) = 1.001^{10}$ theo hai cách—bằng máy tính cầm tay và bằng $f(c) - f(a) \approx f'(a)(c - a)$. Chọn $a = 1$ và $f(x) = x^{10}$.

2.3.38. Tại một khoảng cách Δx từ $x = 1$, đường cong $y = 1/x$ nằm cách phía trên tiếp tuyến của nó bao xa?

2.3.39. Tại một khoảng cách Δx từ $x = 2$, đường cong $y = x^3$ nằm cách phía trên tiếp tuyến của nó bao xa?

2.3.40. Dựa trên Bài tập 2.3.38 hoặc 2.3.39, khoảng cách giữa đường cong và tiếp tuyến gần như tăng theo lũy thừa $(\Delta x)^p$ nào?

2.3.41. Tiếp tuyến của $f(x) = x^2 - 1$ tại $x_0 = 2$ cắt trục x tại $x_1 =$ ________. Tiếp tuyến tại x_1 cắt trục x tại $x_2 =$ ________. Vẽ đường cong và hai đường thẳng, đây là khởi đầu của *phương pháp của Newton* để giải $f(x) = 0$

2.3.42. (Câu đố) Phương trình $y = mx + b$ cần *hai* con số, dạng điểm-hệ số góc $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ cần *ba* con số, và dạng hai-điểm cần *bốn* con số: a, $f(a)$, c, $f(c)$. Sao có thể như vậy được nhỉ?

2.3.43. Tìm thời điểm T tại điểm tiếp xúc trong Ví dụ 4, khi bạn bắt kịp chiếc xe ở phía trước.

2.3.44. Nếu chiếc xe đứng chờ chỉ gia tốc tại $2\,\mathrm{m/sec}^2$, bạn phải giảm tốc độ xuống tốc độ V nào?

2.3.45. Một tên trộm cách 40 mét chạy về phía bạn tại tốc độ 8 mét trên giây. Bạn phải có gia tốc nhỏ nhất là bao nhiêu để $v = at$ giúp bạn chạy trước tên trộm?

2.3.46. Với 8 mét để chạy trong một cuộc chạy tiếp sức, bạn phải chạy thật chậm lại ($f = -8 + 6t - \frac{1}{2}t^2$). Người chạy tiếp theo phải bắt đầu chạy tại tốc độ thế nào (chọn v trong $f = vt$) để bạn vừa đủ thời gian chuyền gậy?

2.4. Đạo hàm của Sine và Cosine

Mục này thực hiện hai việc. Một là tính đạo hàm của $\sin x$ và $\cos x$. Việc còn lại là giải thích tại sao các hàm số này lại rất quan trọng. Chúng mô tả ***dao động***, mà sẽ được biểu diễn bằng lời và bằng các phương trình. Bạn sẽ bắt gặp một "***phương trình vi phân***." Nó chứa đạo hàm của một hàm $y(x)$ chưa được biết.

Phương trình vi phân sẽ nói rằng đạo hàm *cấp hai*—***đạo hàm của đạo hàm***—bằng với số đối của y. Về mặt ký hiệu, điều này là $y'' = -y$. Quãng đường theo một hướng kéo theo gia tốc theo hướng khác. Điều này làm cho y, và y', và y''

đều dao động. Các nghiệm cho $y'' = -y$ là $\sin x$ và $\cos x$ và tất cả các tổ hợp của chúng.

Chúng ta bắt đầu với hệ số góc. Đạo hàm của $y = \sin x$ là $y' = \cos x$. Không có lý do gì để xem những điều này là huyền bí, nhưng tôi vẫn thấy chúng thật đẹp. Chương 1 mô tả một quả bóng di chuyển quanh một đường tròn; cái bóng của của nó đi lên và đi xuống. Tung độ của nó là $\sin t$ và vận tốc của nó là $\cos t$.

Chúng ta bây giờ thấy rằng đạo hàm theo *phương pháp tiêu chuẩn của giới hạn*, khi $y(x) = \sin x$ là:

$$\frac{dy}{dx} = \text{giới hạn của } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}. \tag{2.4.1}$$

Việc lấy đạo hàm với với sine là khó hơn việc lấy đạo hàm với x^2 hay x^3. Khi đó chúng ta có $(x+h)^2$ hoặc $(x+h)^3$, còn bây giờ chúng ta lại có $\sin(x+h)$. Biểu thức này đòi hỏi một trong những "công thức cộng" cơ bản từ lượng giác, đã ôn tập trong Mục 1.5:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \tag{2.4.2}$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h. \tag{2.4.3}$$

Phương trình (2.4.2) đặt $\Delta y = \sin(x+h) - \sin x$ vào một dạng mới:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right). \tag{2.4.4}$$

Tỷ số tách thành tổng của hai số hạng. Đại số và lượng giác đã đưa chúng ta đi đến được bước này, và bây giờ đến phiên vấn đề của giải tích. ***Điều gì xảy ra khi*** $h \to 0$? Vấn đề không còn đơn giản là chỉ việc chia bởi h nữa rồi. (Tôi thậm chí còn không dám nghĩ đến việc viết $(\sin h)/h = \sin .$). Có hai giới hạn quan trọng—giới hạn thứ nhất bằng 0 và giới hạn thứ hai bằng 1:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \text{ và } \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \tag{2.4.5}$$

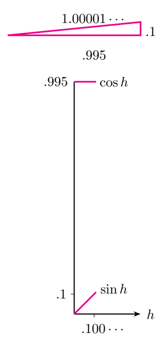
Người đọc nào cẩn thận cũng đều sẽ nhận thấy rằng các giới hạn này chưa được xác định! Bạn cũng để ý thấy rằng các giới hạn này được tính riêng biệt, trước khi được kết vào trong phương trình (2.4.4). Tuy nhiên, chúng ta cứ theo nguyên lý *ý tưởng trước*, *thực hiện sau*. Việc giới hạn của (2.4.4) được suy ra từ hai giới hạn trong (2.4.5) là hoàn toàn đúng:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x(\text{giới hạn thứ nhất}) + \cos x(\text{giới hạn thứ hai}) = 0 + \cos x. \tag{2.4.6}$$

Hệ số góc cát tuyến $\Delta y/\Delta x$ tiến tới hệ số góc cát tuyến dy/dx.

PHÁT BIỂU 2.4.1. Đạo hàm của $y = \sin x$ là $dy/dx = \cos x$.

Chúng ta không thể cứ thể mà bỏ qua bước quan trọng—hai giới hạn trong (2.4.5). Chúng chứa những ý tưởng thực tế đặc biệt quan trọng. ***Cả hai tỷ số đều trở thành*** $0/0$ ***nếu chúng ta cứ để vậy mà thế*** $h = 0$. Nhớ rằng cosine của không bằng 1 và sine của không bằng 0. Hình 2.4.1a cho thấy một góc nhỏ h (gần với không nhất chúng ta có thể vẽ). Cạnh đối có chiều dài $\sin h$ gần với không, cạnh kề có chiều dài $\cos h$ gần với 1. Hình 2.4.1b cho thấy cách *tỷ số* của $\sin h$ với h (cả hai đều tiến tới không) đưa ra hệ số góc của đường sine tại gốc.



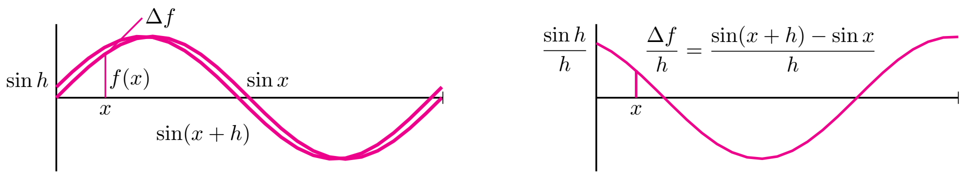
HÌNH 2.4.1

Khi hai hàm số tiến tới không, chúng ta không chắc tỷ số của chúng sẽ nhận giá trị nào. Chúng ta có thể có:

$$\frac{h^2}{h} \to 0 \text{ hoặc } \frac{h}{h} \to 1 \text{ hoặc } \frac{\sqrt{h}}{h} \to \infty.$$

Chúng ta không nhận thấy được manh mối gì từ 0/0. Điều quan trong là *tử số hay mẫu số tiến tới không nhanh hơn*. Nói nôm na là chúng tỏ muốn chứng tỏ rằng $(\cos h - 1)/h$ là giống như h^2/h và $(\sin h)/h$ là giống như h/h.

HẾT GIỜ. Đồ thị của $\sin x$ là trong Hình 2.4.2 (màu đen). Đồ thị của $\sin(x+\Delta x)$ nằm ngay bên cạnh nó (màu đỏ). Hiệu tung độ là Δf khi khoảng cách theo phương ngang là Δx.



HÌNH 2.4.2. $\sin(x+h)$ với $h = 10° = \pi/18$ radian. $\Delta f/\Delta x$ gần với $\cos x$.

Bây giờ chia bởi con số nhỏ đó Δx (hay h) . Hình thứ hai cho thấy $\Delta f/\Delta x$. Nó gần với $\cos x$. (Nhìn cách nó bắt đầu—nó không không hẳn là là $\cos x$). Toán học sẽ chứng minh rằng giới hạn đúng là $\cos x$, khi $\Delta x \to 0$. Thật tò mò là lập luận chỉ tập trung vào một điểm ($x = 0$). Hệ số góc tại điểm đó là $\cos 0 = 1$.

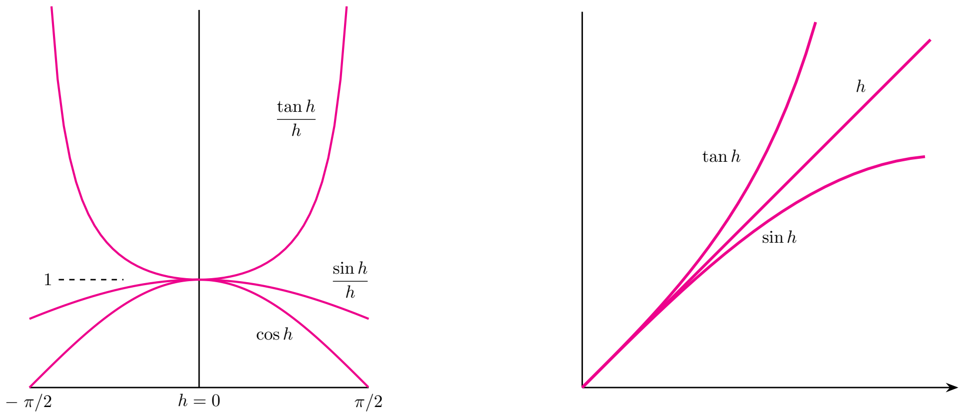
Chúng ta bây giờ chứng minh điều này: $\sin(\Delta x)/\Delta x$ tiến tới 1. Đường sine bắt đầu với hệ số góc 1. Bằng công thức cộng đối với $\sin(x+h)$, câu trả lời tại một điểm này lại kéo theo hệ số góc $\cos x$ tại tất cả các điểm.

CÂU HỎI. *Tại sao đồ thị của $f(x+h)$ dịch chuyển sang bên* trái *$f(x)$ khi $\Delta x > 0$?*

CÂU TRẢ LỜI. Khi $x = 0$, đồ thị được dịch chuyển đã cho thấy $f(\Delta x)$. Trong Hình 2.4.2a, đồ thị màu đỏ được dịch chuyển sang bên trái đồ thị đen. Đồ thị màu đỏ cho thấy $\sin h$ khi đồ thị đen cho thấy$\sin 0$.

GIỚI HẠN CỦA $(\sin h)/h$ LÀ 1

Có nhiều cách để tìm giới hạn này. Cách tiếp cận trực tiếp là dùng một máy tính để vẽ đồ thị. Hình 2.4.3a rất thuyết phục. ***Hàm số*** $(\sin h)/h$ ***tiến tới*** 1 ***tại điểm then chốt*** $h = 0$. Hàm số $(\tan h)/h$ cũng như vậy. Trong thực tế, mối nguy hiểm duy nhất đối với cách này đó là bạn có thể nhận được một thông báo như "hàm không được xác định" và không có đồ thị. (Chiếc mày có thể từ chối chia bởi 0 tại $h = 0$. Có thể bạn có cách vượt qua trở ngại này.) Do tầm quan trọng của giới hạn này, nên tôi muốn đưa ra một chứng minh toán học về việc nó bằng 1.



HÌNH 2.4.3. $(\sin h)/h$ bị kẹp giữa $\cos x$ và 1; $(\tan h)/h$ giảm tới 1.

Hình 2.4.3b, về mặt đồ thị, chỉ ra rằng $\sin h$ *nằm phía dưới* h. (Đồ thị đầu tiên cũng cho thấy điều đó; $\sin h/h$ nằm phía dưới 1). Chúng ta cũng thấy rằng $\tan h$ nằm phía trên h. Nhớ rằng tangent là tỷ số của sine với cosine. Việc chia bởi cosine là đủ để đẩy tangent lên nằm phía trên h. Các bất đẳng thức quan trong (sẽ được chứng minh khi h là nhỏ và dương) là

$$\sin h < h \text{ và } \tan h > h. \tag{2.4.7}$$

Vì $\tan h = (\sin h)/(\cos h)$, nên những bất đẳng thức này là tương đương với:

$$\frac{\sin h}{h} < 1 \text{ và } \frac{\sin h}{h} > \cos h. \tag{2.4.8}$$

Điều gì xảy ra khi h tiến tới 0? ***Tỷ số*** $(\sin h)/h$ ***bị kẹp giữa*** $\cos h$ ***và*** h. Nhưng $\cos h$ lại tiến tới 1! Việc kẹp khi $h \to 0$ kéo theo một khả năng duy nhất cho $(\sin h)/h$, mà bị kẹp ở giữa.

Hình 2.4.3 cho thấy trò "kẹp hàm" đó. ***Nếu hai hàm số tiến tới cùng một giới hạn, bất kỳ hàm số nào bị kẹp giữa cũng có cùng giới hạn đó***. Điều này được chứng minh ở phần cuối của Mục 2.6.

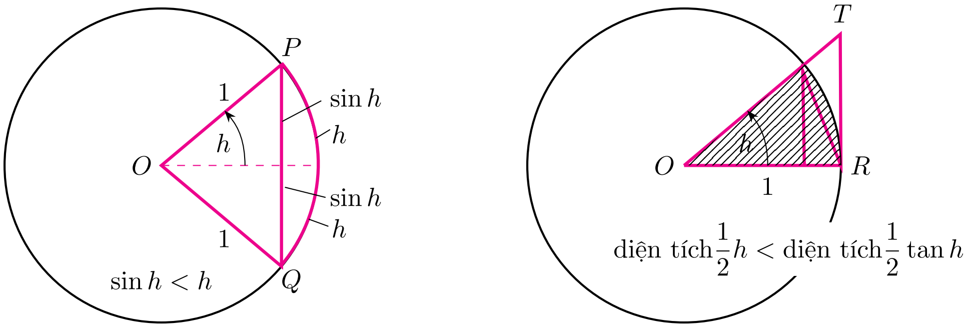
Đối với các gia trị âm của h, mà hoàn toàn được cho phép, kết quả cũng tương tự. Về phía bên rái của không, h đổi dấu và $\sin x$ đổi dấu. Tỷ số $\sin h/h$ là không đổi. (Sine là một hàm lẻ: $\sin(-h) = -\sin h$.) Tỷ số là một hàm *chẵn*, đối xứng qua không và tiến tới 1 từ hai phía.

Chứng minh phụ thuộc vào $\sin h < h < \tan h$, mà được thể hiện bởi đồ thị nhưng không được giải thích. Chúng ta quay lại với các tam giác vuông.

Hình 2.4.4a cho thấy tại sao $\sin h < h$. Đường thẳng PQ có chiều dài $2\sin h$. Cung tròn phải dài hơn, bởi đường đi ngắn nhất qua hai điểm là một đoạn thẳng[9]. Cung PQ có chiều dài $2h$. (Quan trọng: *Khi bán kính là* 1, *chiều dài cung bằng độ lớn góc*. Một cung hoàn chỉnh là 2π và một góc hoàn chỉnh là 2π.) ***Khoảng cách được đo theo đường thẳng*** $2\sin h$ ***là nhỏ hơn khoảng cách được đo theo cung tròn*** $2h$, ***nên*** $\sin h < h$.

Hình 2.4.4b cho thấy tại sao $h < \tan h$. Llần này chúng ta lại nhìn vào các ***diện tích***. Diện tích hình tam giác là $\frac{1}{2} \cdot (\text{đáy}) \cdot (\text{chiều cao}) = \frac{1}{2}(1)(\tan h)$. Bên trong hình tam giác là hình quạt được tô đậm của hình tròn. Diện tích của nó là $h/2\pi$ lần diện tích của toàn bộ hình tròn (bởi vì góc của hình quạt đó cũng có cùng tỷ số

[9]Nếu chúng ta cố gắng chứng minh điều này, chúng ta sẽ mất cả đêm. Hãy chấp nhận nó là đúng.



HÌNH 2.4.4. Đường thẳng ngắn hơn cung tròn: $2\sin h < h$. Các diện tích đưa ra $h < \tan h$.

như vậy với góc của toàn bộ hình tròn). Hình tròn có diện tích $\pi r^2 = \pi$, nên phép nhân bởi $h/2\pi$ đưa ra $h/2$ đối với diện dích của hình quạt đó. So sánh với hình tam giác quanh nó, $\frac{1}{2}(\tan h) > \frac{h}{2}$.

Các bất đẳng thúc $\sin h < h < \tan h$ bây giờ đã được chứng minh. Việc kẹp trong phương trình 2.4.8 sinh ra $(\sin h)/h \to 1$. Q.E.D. Bài toán 2.4.13 cho thấy cách chứng minh $\sin h < h$ từ các diện tích.

LƯU Ý. Tất cả các góc x và h đều được đo theo radian. *Khi đo theo độ*, $\cos x$ *không còn là đạo hàm của* $\sin x$. Một độ nhỏ hơn một radian rất nhiều, và dy/dx bị triệt tiêu bởi thừa số $2\pi/360$.

GIỚI HẠN CỦA $(\cos h - 1)/h$ LÀ 0

Giới hạn thứ hai này khác với giới hạn vừa rồi. Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng $1 - \cos h$ tiến tới không *nhanh hơn h*. Các cosine được liên hệ với các sine bởi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Chúng ta bắt đầu từ điều đã biết $\sin h < h$ và đưa nó qua dạng có liên quan đến các cosine:

$$(2.4.9)\qquad (1 - \cos h)(1 + \cos h) = 1 - \cos^2 h = \sin^2 h < h^2.$$

Lưu ý rằng mọi thứ đều dương. Chia bất đẳng thức trên bởi $h(1 + \cos h)$:

$$(2.4.10)\qquad 0 < \frac{1 - \cos h}{h} < \frac{h}{1 + \cos h}.$$

Tỷ số của chúng ta nằm ở giữa. *Vế phải tiến tới* 0 *bởi vì* $h \to 0$. Đây là một trường hợp "*kẹp*" khác—không tránh đi đâu được. Tỷ số của chúng ta tiến tới không.

Đối với $\cos h - 1$ hoặc đối với h âm, các dấu có thể thay đổi nhưng trừ không vẫn là không. Điều này khẳng định phương trình (2.4.6). Hệ số góc của $\sin x$ là $\cos x$.

GHI CHÚ. Phương trình (2.4.10) cũng chứng tỏ rằng $1 - \cos h$ xấp xỉ $\frac{1}{2}h^2$. Số 2 được sinh ra từ $1 + \cos h$. Đây là mục đích cơ bản của giải tích—để tìm ra các xấp xỉ đơn giản như $\frac{1}{2}h^2$. Một "tiếp tuyến parabole" $1 - \frac{1}{2}h^2$ là nằm gần với đỉnh của đường cosine.

ĐẠO HÀM CỦA COSINE

Việc tìm đạo hàm của cosine sẽ dễ dàng thôi. Cách nhanh nhất để lấy đạo hàm $\cos x$ là dịch chuyển đường sine bởi một lượng $\pi/2$. Việc này sẽ sinh ra đường cosine (đường nét liền trong Hình (2.4.5)b). Đạo hàm cũng được dịch chuyển bởi một lượng $\pi/2$ (đường nét chấm). ***Đạo hàm của*** $\cos x$ ***là*** $-\sin x$.

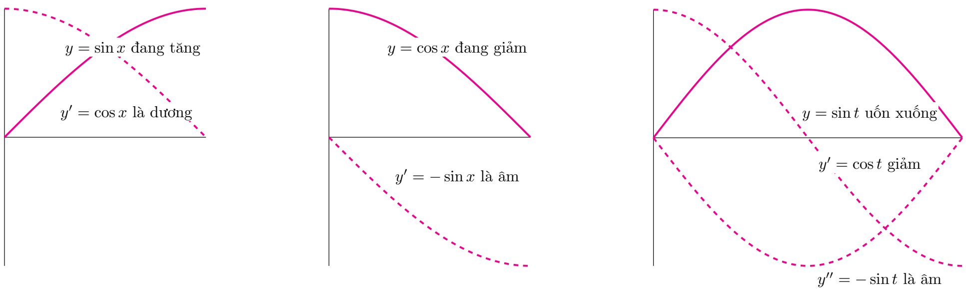
Lưu ý đường nét chấm (hệ số góc) đi phía dưới trục hoành khi đường nét liền chuyển hướng đi xuống. Hệ số góc bằng không khi đường nét liền lên cao nhất hoặc xuống thấp nhất. ***Các hàm tăng có hệ số góc dương***. ***Các hàm giảm có hệ số góc âm***. Điều đó rất quan trọng, và chúng ta trở lại sau.

Biểu thức dy/dx chứa nhiều thông tin hơn chỉ là việc "hàm tăng" hay "hàm giảm." Hệ số góc cho biết hàm đi lên hay đi xuống *nhanh như thế nào*. Nó đưa ra *tốc độ thay đổi*. Hệ số góc của $y = \cos x$ có thể được tính theo cách chuẩn mực, dưới dạng giới hạn ư

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x\Big(\frac{\cos h - 1}{h}\Big) - \sin x\Big(\frac{\sin h}{h}\Big)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)0 - (\sin x). \tag{2.4.11}$$

Hàng đầu tiên là được sinh ra từ công thức (2.4.3) đối với $\cos(x+h)$. Hàng thứ hai lấy các giới hạn, mà đạt tới 0 và 1 như đoạn trước. Điều này khẳng định này chứng minh bằng đồ thị rằng hệ số góc của $\cos x$ là $-\sin x$.



HÌNH 2.4.5. $y(x)$ tăng nơi y' là dương. $y(x)$ uốn lên nơi y'' là dương.

ĐẠO HÀM CẤP HAI CỦA SINE VÀ COSINE

Bây giờ ta giới thiệu ***đạo hàm của đạo hàm***. Nghĩa là ***đạo hàm cấp hai*** của hàm ban đầu. Nó cho biết hệ số góc, thay đổi nhanh như thế nào, chứ không phải là y thay đổi nhanh như thế nào. Đạo hàm cấp hai là "tốc độ thay đổi của vận tốc." Một đường thẳng có hệ số góc hằng (vận tốc hằng), nên đạo hàm cấp hai của nó bằng 0.

$$f(t) = 5t \text{ có } df/dt = 5 \text{ và } d^2f/dt^2 = 0.$$

Parabola $y = x^2$ có hệ số góc $2x$ (tuyến tính) mà có hệ số góc 2 (hằng). Tương tự:

$$f(t) == \frac{1}{2}at^2 \text{ có } df/dt = at \text{ và } d^2f/dt^2 = a.$$

Chúng ta ký hiệu d^2f/dt^2 (hoặc d^2y/dt^2) đối với đạo hàm cấp hai. Dạng ký hiệu ngắn là f'' hoặc y''. (Chúng ta đọc là f *hai phẩy* hoặc y *hai phẩy*). Ví dụ: Đạo hàm cấp hai của $y = x^3$ là $y'' = 6x$.

Trong bài toán quãng đường-vận tốc, f'' là *gia tốc*. Nó cho biết sự thay đổi của vận tốc, trong khi v cho biết sự thay đổi của quãng đường f. Trong đó df/dt là (quãng đường)/(thời gian), đạo hàm cấp hai là (quãng đường đi)/(thời gian)^2. Gia tốc do trọng lực là khoảng 32 ft/sec hay 9.8 m/sec^2, điều này có nghĩa là v tăng 32 ft/sec trong một giây. Nó không có nghĩa là quãng đường tăng 32 feet!

Đồ thị của $y = \sin t$ tăng ngay từ đầu. Đạo hàm của nó$\cos t$ là dương. Tuy nhiên đạo hàm cấp hai là $-\sin t$. ***Đường cong võng xuống trong khi đi lên***. Cung đó là "***lõm dưới***" bởi vì $y'' = -\sin t$ là âm.

Tại $t = \pi$ hàm số bằng không và đồ thị đi xuống phía dưới trục hoành. Đạo hàm cấp hai trở thành dương. Bây giờ đường cong uốn lên. Cung thấp hơn là "***lõm trên***."

$$y'' > 0 \text{ nghĩa là } y' \text{ tăng nên } y \text{ uốn lên (lõm trên)}$$
$$y'' < 0 \text{ nghĩa là } y' \text{ giảm nên } y \text{ uốn xuống (lõm dưới).}$$

Chương 3 nghiên cứu những thứ này một cách cặn kẽ—ở đó chúng ta sẽ có được một cái nhìn sâu hơn đối với$\sin t$.

Điểm đáng chú ý về sine và cosine đó là $y'' = -y$. Điều này là không tầm thường và là rất đặc biệt: *gia tốc*$= -$*quãng đường*. Quãng đường càng lớn, lực kéo lại càng lớn:

$$\begin{array}{llllll} y = \sin t & \text{có} & dy/dt = +\cos t & \text{và} & d^2y/dt^2 = -\sin t = -y. \\ y = \cos t & \text{có} & dy/dt = -\sin t & \text{và} & d^2y/dt^2 = -\cos t = -y. \end{array}$$

Câu hỏi. *Liệu $d^2y/dt^2 < 0$ có nghĩa là quãng đường $y(t)$ giảm đi hay không?*

Câu trả lời. Không. Tuyệt đối không! Nó có nghĩa là dy/dt giảm, không nhất thiết y phải giảm. Tại điểm bắt đầu của đường sine, y vẫn tăng nhưng $y'' < 0$.

Các hàm sine và cosine đưa ra *chuyển động điều hoà đơn giản*—lên và xuống, tới và lui, ra và vào, nén và giãn. Kéo giãn một lò xo, và lực hồi phục kéo nó lại. Đưa một con lắc lên cao, và trọng lực đưa nó xuống lại. Các chuyển động này được điều khiển bởi một ***phương trình vi phân***:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y \qquad (2.4.12)$$

Tất cả các nghiệm đều là tổ hợp tuyến tính của sine và cosine: $y = A\sin t + B\cos t$.

Đây không phải là một khóa học về phương trình vi phân. Nhưng bạn phải thấy được mục đích của giải tích. Nó mô hình hóa các sự kiện bằng các phương trình. Nó mô hình hóa dao động bởi phương trình (2.4.12). Sự co bóp của trái tim. Sự nảy lên của quả bóng. Sự đổi chiều của dòng điện. Sự lên xuống của nền kinh tế:

$$\text{giá tăng} \to \text{tăng sản xuất} \to \text{giá giảm} \to \cdots$$

Chúng ta không thể sống mà thiếu các dao động (hay các phương trình vi phân).

BÀI TẬP 2.4

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đạo hàm của $y = \sin x$ là $y' = $ __a__. Đạo hàm cấp hai (__b__ của đạo hàm) là $y'' = $ __c__. Đạo hàm cấp bốn là $y'''' = $ __d__. Như vậy $y = \sin x$ thỏa mãn các phương trình vi phân $y'' = $ __e__ và $y'''' = $ __f__. $y = \cos x$ cũng vậy, hàm số này có đạo hàm cấp hai là __g__.

Tất cả các đạo hàm này đều được sinh ra từ một giới hạn cơ bản: $\sin h/h$ tiến tới __h__. Sine của .01 radian là rất gần với __i__. __j__ của .01 cũng vậy. Cosine của .01 không phải là .99, bởi vì $1 - \cos h$ là __k__ hơn h nhiều. Tỷ số $(1 - \cos h)/h^2$ tiến tới __l__. Vì vậy $\cos h$ là gần với $1 - \frac{1}{2}h^2$ và $\cos .01 \approx$ __m__. Chúng ta có thể thay h bởi x.

Phương trình vi phân $y'' = -y$ kéo theo __n__. Khi y là dương, y'' là __o__. Vì vậy y' là __p__. Cuối cùng y đi xuống phía dưới không và y'' trở thành __q__. Khi đó y' là __r__. Các ví dụ về dao động trong đời thực là __s__ và __t__.

2.4.1. Tỷ số nào tiến tới 1 khi $h \to 0$?

(a) $\dfrac{h}{\sin h}$ (c) $\dfrac{\sin h}{\sin 2h}$

(b) $\dfrac{\sin^2 h}{h^2}$ (d) $\dfrac{\sin(-h)}{h}$

2.4.2 (Máy tính cầm tay). Tìm $\sin h/h$ tại $h = 0.5$ và 0.1 và .01. Hàm số $\sin h/h$ lớn hơn .99 ở đâu?

2.4.3. Tìm các giới hạn khi $h \to 0$ của

(a) $\dfrac{\sin^2 h}{h}$ (c) $\dfrac{\sin 5h}{h}$

(b) $\dfrac{\sin 5h}{5h}$ (d) $\dfrac{\sin h}{5h}$

2.4.4. Hàm số $\tan h = 1.01h$ ở đâu? Hàm số $\tan h = h$ ở đâu?

2.4.5. $y = \sin x$ có chu kỳ 2π, có nghĩa là $\sin x =$ ________. Giới hạn của $(\sin(2\pi+h) - \sin 2\pi)/h$ là 1 bởi vì ________. Điều này đưa ra dy/dx tại $x =$ ________.

2.4.6. Vẽ $\cos(x + \Delta x)$ bên cạnh $\cos x$. Đánh dấu hiệu độ cao Δy. Sau đó vẽ $\Delta y/\Delta x$ như trong Hình 2.4.2.

2.4.7. Điều mất chốt đối với lượng giác là $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$. Đặt $\sin\theta \approx \theta$ để tìm $\cos^2\theta \approx 1 - \theta^2$. *Căn bậc hai là* $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Lý do: Bình phương hai vế đưa ra $\cos^2\theta \approx$ ________ và biến điều chỉnh ________ là rất nhỏ gần $\theta = 0$.

2.4.8. (Máy tính cầm tay) So sánh $\cos\theta$ với $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ đối với

(a) $\theta = 0.1$ (c) $\theta = 30^\circ$

(b) $\theta = 0.5$ (d) $\theta = 3^\circ$.

2.4.9. Lượng giác đưa ra $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$. Xấp xỉ $\sin\frac{1}{2}\theta \approx$ ________ trực tiếp kéo theo $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

2.4.10. Tìm các giới hạn khi $h \to 0$:

(a) $\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ (c) $\dfrac{1-\cos^2 h}{\sin^2 h}$

(b) $\dfrac{1-\cos^2 h}{h^2}$ (d) $\dfrac{1-\cos 2h}{h}$

2.4.11. Tìm giới hạn bằng máy tính cầm tay hoặc bằng giải tích:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin 3h}{\sin 2h}$

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos 2h}{1-\cos h}$.

2.4.12. Trực tiếp tính hệ số góc tại $x = 0$ từ các giới hạn:

(a) $y = \tan x$

(b) $y = \sin(-x)$

2.4.13. Các điểm không được đánh dấu trong Hình 2.4.4 là P và S. Tìm chiều cao PS và diện tích của tam giác OPR. Chứng minh bằng các diện tích rằng $\sin h < h$.

2.4.14. Hệ số góc của $\cos x$ và $1 - \frac{1}{2}x^2$ là $-\sin x$ và ________. Hệ số góc của $\sin x$ và ________ là $\cos x$ và $1 - \frac{1}{2}x^2$.

2.4.15. Chương 10 đưa ra một chuỗi vô hạn đối với $\sin x$:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \cdots.$$

Từ đạo hàm, tìm chuỗi số đối với $\cos x$. Sau đó lấy đạo hàm *của nó* để quay trở lại $-\sin x$.

2.4.16. Một *sai phân trung tâm* của $f(x) = \sin x$ là

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\\ =&\frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}\\ =&?\end{aligned}$$

Dùng công thức cộng (2.4.2). Sau đó cho $h \to 0$.

2.4.17. Lặp lại Bài tập 2.4.16 để tìm hệ số góc của $\cos x$. Dùng công thức (2.4.3) để đơn giản $\cos(x+h) - \cos(x-h)$.

2.4.18. Tìm tiếp tuyến của $y = \sin x$ tại

(a) $x = 0$

(b) $x = \pi$

(c) $x = \dfrac{\pi}{4}$

2.4.19. Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có hệ số góc bằng không ở đâu?

2.4.20. Tìm đạo hàm của $\sin(x+1)$ theo hai cách:

(a) Khai triển thành $\sin x \cos 1 + \cos x \sin 1$. Tính dy/dx.

(b) Chia $\Delta y = \sin(x+1+\Delta x) - \sin(x+1)$ bởi Δx. Viết X thay vì $x+1$. Cho Δx tiến tới không.

2.4.21. Chứng minh rằng $\tan h/h$ bị kẹp giữa 1 và $1/\cos h$. Khi $h \to 0$ giới hạn là ________.

2.4.22. Đối với $y = \sin 2x$, tỷ số $\Delta y/h$ là

$$\frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$
$$= \frac{\sin 2x(\cos 2h - 1) + \cos 2x \sin 2h}{h}.$$

Giải thích tại sao giới hạn dy/dx là $2\cos 2x$.

2.4.23. Vẽ đồ thị của $y = \sin \frac{1}{2}x$. Phát biểu hệ số góc của nó tại $x = 0$, $\pi/2$, π, và 2π. Liệu $\frac{1}{2}\sin x$ có cùng hệ số góc hay không?

2.4.24. Vẽ đồ thị của $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Giá trị cực đại của nó là $y =$ ________ tại $x =$ ________. Hệ số góc tại điểm đó là ________.

2.4.25. Bằng cách kết hợp $\sin x$ và $\cos x$, tìm một tổ hợp mà bắt đầu tại $x = 0$ từ $y = 2$ với hệ số góc 1. Tổ hợp này cũng thỏa mãn $y'' =$ ________.

2.4.26. ***Đúng hay sai***, với lý do:
(a) Đạo hàm của $\sin^2 x$ là $\cos^2 x$
(b) Đạo hàm của $\cos(-x)$ là $\sin x$
(c) Một hàm dương có đạo hàm cấp hai âm.
(d) Nếu y' là tăng, khi đó y'' là dương.

2.4.27. Tìm nghiệm của $dy/dx = \sin 3x$ và $dy/dx = \cos 3x$.

2.4.28. Nếu $y = \sin 5x$, khi đó $y' = 5\cos 5x$ và $y'' = -25\sin 5x$. Vậy hàm số này thỏa mãn phương trình vi phân $y'' =$ ________.

2.4.29. Nếu h được đo theo độ, tìm $\lim_{h\to 0}(\sin h)/h$. Bạn có thể đặt máy tính cầm tay của bạn ở chế độ độ.

2.4.30. Viết ra một tỷ số mà tiến tới dy/dx tại $x = \pi$. Đối với $y = \sin x$ và $\Delta x = .01$, tính tỷ số đó.

2.4.31. Bằng quy tắc bình phương, đạo hàm của $(u(x))^2$ là $2u\,du/dx$. Lấy đạo hàm của từng số hạng trong $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2.4.32. Đưa ra một ví dụ về dao động không đến từ vật lý. Liệu nó có phải là chuyển động điều hòa đơn giản (chỉ có một tần số) hay không?

2.4.33. Giải thích đạo hàm cấp hai theo cách của bạn.

2.5. Quy tắc Tích và Thương và Luỹ thừa

Các đạo hàm của và $x\sin x$ và $1/\sin x$ và $\sin^n x$ là gì ? Những hàm số này được tạo thành từ những hàm số quen thuộc x và $\sin x$, nhưng chúng ta cần các quy tắc mới. May mắn là những quy tắc này vẫn có thể được áp dụng cho mỗi hàm số, nên chúng ta chỉ cần thiết lập chúng một lần mà thôi. Nếu chúng ta biết được các đạo hàm riêng rẽ của hai hàm số u và v, khi đó chúng ta tính ngay được các đạo hàm của $u + v$ và uv và $1/v$ và u/v và u^n. Đây là một mục đơn giản, với năm quy tắc để tìm hiểu. Nó cũng là một mục quan trọng, vì nó chứa hầu hết các công làm việc của phép tính vi phân. Nhưng tôi e ngại rằng năm quy luật và mười ba ví dụ (mà chúng ta cần—chỉ các công thức của chúng thôi cũng đủ làm mờ đôi mắt của chúng ta) tạo thành một danh sách dài. Ít nhất chúng ta cũng bắt đầu với quy tắc dễ nhất. ***Khi chúng ta cộng các hàm số, chúng ta cộng các đạo hàm của chúng***.

Quy tắc Tổng

(2.5.1) Đạo hàm của tổng $u(x) + v(x)$ là $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$.

Ví dụ 2.5.1. Đạo hàm của $x + \sin x$ là $1 + \cos x$. Kết quả đó thật đơn giản, nhưng rất cơ bản. Lời giải thích về các quãng đường có thể khó hiểu hơn (nhưng thú vị hơn) bản thân quy tắc:

> Giả sử một tàu lửa di chuyển động với vận tốc 1. Quãng đường tại thời điểm t là t. Trên tàu lửa, một vị giáo sư đi qua và đi lại (theo một dao động điều hoà đơn giản). Quãng đường từ vị trí của

ông ấy tới chỗ ngồi của mình là $\sin t$. Khi đó tổng quãng đường từ điểm khởi hành của ông ấy là $t + \sin t$, và vận tốc của ông ấy (tốc độ xe lửa cộng tốc độ đi bộ) là $1 + \cos t$.

Nếu bạn cộng các khoảng cách, khi đó bạn cộng các vận tốc. Trên thực tế ví dụ đó thật là vô lý, bởi vì vận tốc cực đại của vị giáo sư bằng tốc độ tàu lửa. Ông ấy đang chạy như điên, chứ không phải là đang đi bộ. Thỉnh thoảng ông ấy đứng yến so với mặt đất.

Quy tắc tổng là một trường hợp đặc biệt của một quy tắc lớn hơn được gọi là "***tuyến tính***." Nó áp dụng khi chúng ta cộng hoặc trừ các hàm số hay nhân chúng bởi một hằng số—như trong $3x - 4\sin x$. Theo tuyến tính, đạo hàm là $3 - 4\cos x$. Quy tắc đúng đối với tất cả các hàm số $u(x)$ và $v(x)$. Một *tổ hợp tuyến tính* là $y(x) = au(x) + bv(x)$, trong đó a và b là bất kỳ số thực nào. Khi đó $\Delta y/\Delta x$ là:

$$\frac{au(x+\Delta x) + bv(x+\Delta x) - au(x) - bv(x)}{\Delta x} = a\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + b\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Giới hạn bên vế trái là dy/dx. Giới hạn bên vế phải là $a\,du/dx + b\,dv/dx$. Chúng ta được phép lấy giới hạn một cách riêng rẽ và cộng lại. Kết quả là những gì ta kỳ vọng:

Quy tắc Tuyến tính

(2.5.2) Đạo hàm của $au(x) + bv(x)$ là $\dfrac{d}{dx}(au + bv) = a\dfrac{du}{dx} + b\dfrac{dv}{dx}$.

Tiếp theo là ***quy tắc tích***. Nó không đơn giản như vừa rồi—các tích là không tuyến tính. Không cần đến quy tắc tổng, bạn vẫn có thể đoán ra được đạo hàm của các tổng, nhưng các tích lại đưa ra một vài thứ mới mẻ. ***Đạo hàm của*** u ***lần*** v ***không phải là*** du/dx ***lần*** dv/dx. Ví dụ: Đạo hàm của x^5 là $5x^4$. Đừng nhân các đạo hàm của x^3 và x^2. ($3x^2$ lần $2x$ không phải là $5x^4$). *Đối với một tích của hai hàm số, đạo hàm có hai số hạng.*

Quy tắc Tích (mấu chốt đối với mục này)

(2.5.3) Đạo hàm của $u(x)v(x)$ là $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$.

VÍ DỤ 2.5.2. $u = x^3$ lần $v = x^2$ là $uv = x^5$. Quy tắc tích kéo theo đạo hàm của x^5 là $5x^4$:

$$x^3\frac{dv}{dx} + x^2\frac{du}{dx} = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4.$$

VÍ DỤ 2.5.3. Trong hệ số góc của $x\sin x$, tôi không viết $dx/dx = 1$, nhưng nó đúng là như vậy:

$$\frac{d}{dx}(x\sin x) = x\cos x + \sin x.$$

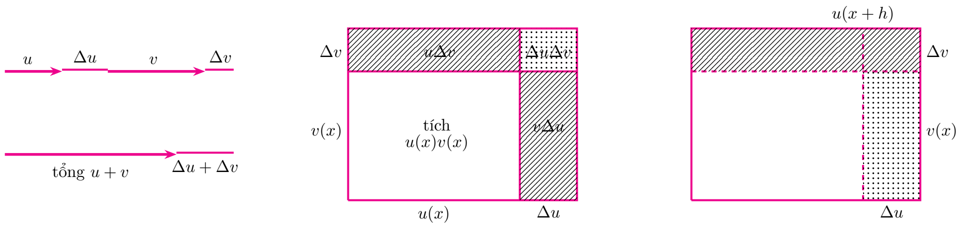
VÍ DỤ 2.5.4. Nếu $u = \sin x$ và $v = \sin x$, khi đó $uv = \sin^2 x$. Chúng ta nhận được hai số hạng bằng nhau:

$$\sin x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(\sin x) = 2\sin x\cos x.$$

Điều này xác nhận "quy tắc bình phương" $2u\,du/dx$, khi đó u và v là giống nhau. Tương tự hệ số góc của $\cos^2 x$ là $-2\cos x\sin x$ (dấu trừ là do hệ số góc của cosine).

CÂU HỎI. *Các đáp án đối với* $\sin^2 x$ *và* $\cos^2 x$ *có dấu đối nhau, nên đạo hàm của* $\sin^2 x + \cos^2 x$ *bằng không (quy tắc tổng). Có cách nào để bạn nhận thấy điều này nhanh hơn hay không?*

VÍ DỤ 2.5.5. Đạo hàm của uvw là $u'vw + uv'w + uvw'$—từng đạo hàm lần lượt xuất hiện. Đạo hàm của xxx là $xx + xx + xx$.



HÌNH 2.5.1. Số gia trong chiều dài $= \Delta u + \Delta v$. Số gia trong diện tích $= u\Delta u + v\Delta u + \Delta u\Delta v$.

Sau những ví dụ vừa rồi chúng ta chứng minh quy tắc tích. Hình 2.5.1 giải thích nó rõ nhất. Diện tích của hình chữ nhật lớn là uv. ***Sự thay đổi chủ yếu trong diện tích là hai dải*** $u\Delta v$ ***và*** $v\Delta u$. Diện tích của miếng nằm ở góc $\Delta u\Delta v$ là rất nhỏ. Khi chúng ta chia những diện tích này bởi Δx, hai dải cho chúng ta $u\,\Delta v/\Delta x$ và $v\,\Delta u/\Delta x$. Miếng nằm ở góc cho chúng ta $\Delta u\Delta v/\Delta x$, mà tiến tới không.

Chú ý quy tắc tổng là trong một chiều, quy tắc tích là trong hai chiều. Quy tắc cho uvw sẽ là trong ba chiều.

Diện tích dư ra là tổng của diện tích của dải trên đỉnh và diện tích của dải bên hông. Bằng đại số,

(2.5.4)
$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)[v(x+h) - v(x)] + v(x)[u(x+h) - u(x)].$$

Diện tích tăng thêm là $u(x+h)\Delta v + v(x)\Delta u$—diện tích của dải trên đỉnh cộng diện tích của dải bên hông. *Bây giờ chia bởi h (hay Δx) và cho* $h \to 0$. Vế trái của phương trình (4) trở thành đạo hàm của $u(x)v(x)$. Vế phải trở thành $u(x)$ lần dv/dx*—chúng ta có thể nhân hai giới hạn—* cộng $v(x)$ lần du/dx. Điều này chứng minh quy tắc tích—một quy tắc chắc chắn hữu ích.

Chúng ta có thể đi ngay tới quy tắc thương đối với $u(x)/v(x)$. Nhưng chúng ta sẽ không làm như vậy mà bắt đầu với $u = 1$. Đạo hàm của $1/x$ là $-1/x^2$ (đã được biết). Đạo hàm của $1/v(x)$ là gì?

Quy tắc Nghịch đảo

(2.5.5)
$$\text{Đạo hàm của } \frac{1}{v(x)} \text{ là } \frac{-dv/dx}{v^2}.$$

Chứng minh bắt đầu với $(v)(1/v) = 1$. Đạo hàm của 1 bằng 0. Áp dụng quy tắc tích:

(2.5.6)
$$v\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = 0 \text{ từ đó } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{-dv/dx}{v^2}.$$

Việc kiểm tra các đơn vị—trong quy tắc nghịch đảo và những quy tắc khác—là rất đáng giá. Phép kiểm tra thứ nguyên là điều bắt buộc trong các ngành khoa học và kỹ thuật, và là một thói quen tốt trong toán học. Phép kiểm tra thứ nguyên bỏ qua các hằng số và các dấu cộng hoặc trừ, nhưng nó ngăn ngừa những sai lầm tồi tệ. Nếu v được tính bằng dollars và x được tính bằng giờ, dv/dx được tính bằng dollars trên giờ. Khi đó các thứ nguyên là phù hợp:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{v} \approx \frac{(1/\text{dollars})}{\text{giờ}} \text{ và đồng thời } \frac{-dv/dx}{v^2} \approx \frac{\text{dollars/giờ}}{(\text{dollars})^2}.$$

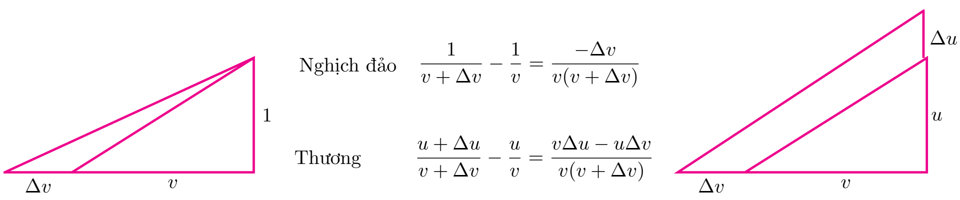
Từ phép thử này, đạo hàm của $1/v$ không thể là $1/(dv/dx)$. Một phép kiểm tra tương tự chứng tỏ rằng công thức của Einstein $e = mc^2$ là có thể đúng về mặt thứ nguyên. Lý thuyết tương đối có lẽ đúng! Cả hai vế đều có thứ nguyên (khối lượng)(khoảng cách)^2/(thời gian)^2, khi khối lượng được chuyển đổi thành năng lượng lượng.[10]

Ví dụ 2.5.6. Các đạo hàm của x^{-1}, x^{-2}, x^{-n} là $-1x^{-2}, -2x^{-3}, -nx^{-n-1}$. Những kết quả này đều được sinh ra từ quy tắc nghịch đảo với $v = x$ và x^2 và bất kỳ x^n nào:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x^n}) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

Điều đẹp đẽ đó là kết quả $-nx^{-n-1}$ này phù hợp với cách lấy đạo hàm của x^n. ***Nhân bởi luỹ thừa và giảm lũy thừa một đơn vị.***

(2.5.7) ***Đối với các lũy thừa âm và dương đạo hàm của x^n là nx^{n-1}.***



HÌNH 2.5.2. Quy tắc nghịch đảo đến từ $(-\Delta v)/v^2$. Quy tắc thương đến từ $(v\,\Delta u - u\,\Delta v)/v^2$.

Ví dụ 2.5.7. Các đạo hàm của $\dfrac{1}{\cos x}$ và $\dfrac{1}{\sin x}$ là $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ và $\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$. Những kết quả này được trực tiếp sinh ra từ quy tắc nghịch đảo. Trong lượng giác, $2/\cos x$ là ***secant*** của góc x và $1/\sin x$ là ***cosecant*** của x. Bây giờ chúng ta có các đạo hàm của chúng:

(2.5.8) $$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x.$$

(2.5.9) $$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x.$$

Những công thức này thường được thấy trong giải tích. Nếu bạn có trí nhớ tốt, bạn nên ghi nhớ chúng. Giống như hầu hết các nhà toán học, tôi đều phải kiểm tra chúng mỗi lần trước khi dùng (có thể là mỗi năm một lần). Chính những quy tắc mới là những điều cơ bản chúng ta cần nhớ chứ không phải là các công thức.

Quy tắc tiếp theo áp dụng cho thương $u(x)/v(x)$. Nghĩa là u lần $1/v$. Việc kết hợp quy tắc tích và quy tắc nghịch đảo cho chúng ta được một điều gì đó mới và quan trọng.

Quy tắc Thương

(2.5.10) Đạo hàm của $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ là $\dfrac{1}{v}\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv/dx}{v^2} = \dfrac{v\,du/dx - u\,dv/dx}{v^2}$.

[10]Nhưng chỉ có Einstein biết rằng hằng số là 1.

Bạn *phải* ghi công thức sau cùng. Chúng ta đã quen thuộc với v^2. Những thứ còn lại tuy mới nhưng không quá mới. Nếu $v = 1$, kết quả là du/dx (tất nhiên). Đối với $u = 1$, chúng ta có quy tắc nghịch đảo. Hình 2.5.2b cho thấy hiệu $(u + \Delta u)/(v + \Delta v) - (u/v)$. Chính mẫu số $v(v + \Delta v)$ đã sinh ra v^2.

Ví dụ 2.5.8 (chỉ dùng cho mục đích luyện tập). Nếu $u/v = x^5/x^3$ (tức là x^2), quy tắc thương cho chúng ta $2x$.

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^5}{x^3}) = \frac{x^3(5x^4) - x^5(3x^2)}{x^6} = \frac{5x^7 - 3x^7}{x^6} = 2x.$$

Ví dụ 2.5.9 (quan trọng). Đối với $u = \sin x$ và $v = \cos x$, thương là $\tan x$. ***Đạo hàm của*** $\tan x$ ***là*** $\sec^2 x$. Dùng quy tắc thương và $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{2.5.11}$$

Một lần nữa ghi nhớ: $(\tan x)' = \sec^2 x$. Tại $x = 0$, hệ số góc này bằng 1. Các đồ thị của $\sin x$ và x và $\tan x$ đều bắt đầu với hệ số góc này (sau đó chúng tách nhau). Tại $x = \pi/2$ đường sine nằm ngang ($\cos x = 0$) và đường cong tang dựng đứng ($\sec^2 x = \infty$).

Hệ số góc thường bùng nổ[11] nhanh hơn hàm số. Mẫu số của tangent là $\cos x$ trong khi mẫu số của hệ số góc của nó là $\cos^2 x$. Hệ số góc của $1/x$ là $-1/x^2$. Hệ số góc dễ bị ảnh hưởng hơn hàm số ,vì nó có bình phương ở mẫu.

Ví dụ 2.5.10.

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

.

Tôi ngần ngại trong việc xét đạo hàm số này tại $x = 0$. Một cách hình thức, nó trở thành $0/0$. Trong thực tế, đúng hơn là $0^3/0^2$, và đạo hàm đúng là không. Hình 2.4.3 cho thấy bằng đồ thị rằng đồ thị của $(\sin x)/x$ nằm ngang tại điểm nằm chính giữa. Hàm số là hàm chẵn (đồ thị đối xứng qua trục y) nên đạo hàm của nó chỉ có thể là không.

Mục này toàn nói về các quy tắc, và tôi hy vọng bạn sẽ cho phép tôi đề cập đến thêm một quy tắc nữa. Chúng ta đi từ x^n tới $[u(x)]^n$. Một luỹ thừa của x thay đổi thành một luỹ thừa của $u(x)$—như trong $(\sin x)^6$ hoặc $(\tan x)^7$ hoặc $(x^2+1)^8$. Đạo hàm chứa nu^{n-1} (sao chép từ nx^{n-1}), ***nhưng có thêm một nhân tử bổ sung*** du/dx ***nữa***. Quan sát nhân tử đó trong $6(\sin x)^5 \cos x$ và $7(\tan x)^6 \sec^2 x$ và $8(x^2+1)^7(2x)$:

Quy tắc Lũy thừa

$$\text{Đạo hàm của } [u(x)]^n \text{ là } n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}. \tag{2.5.12}$$

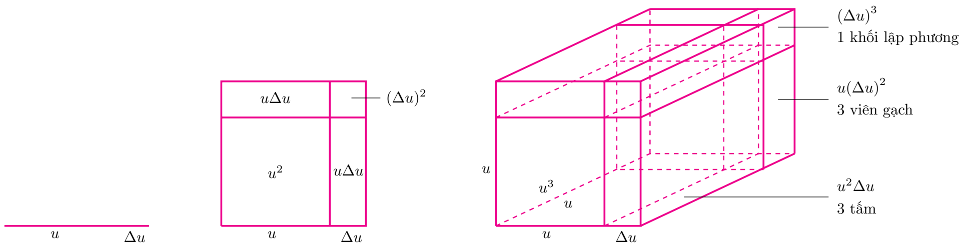
Đối với $n = 1$, biểu thức này rút gọn thành $du/dx = du/dx$. Đối với $n = 2$, chúng ta nhận được quy tắc bình phương $2u\,du/dx$. Tiếp đó là u^3. Cách tiếp cận tốt nhất là dùng ***phép quy nạp toán học***, mà đi từ từng n đến luỹ thừa $n + 1$ tiếp theo bằng quy tắc tích:

$$\frac{d}{dx}(u^{n+1}) = \frac{d}{dx}(u^n u) = u^n\frac{du}{dx} + u(nu^{n-1}\frac{du}{dx}) = (n+1)u^n\frac{du}{dx}.$$

Biểu thức này chính là phương trình (12) đối với lũy thừa $n + 1$. Chúng ta nhận được tất cả các lũy thừa dương theo cách này, đi từ $n = 1$—sau đó các lũy thừa âm được sinh ra từ quy tắc nghịch đảo.

[11]Nd: Bùng nổ là cách nói không chính thức về việc một hàm số tiến tới vô cùng.

Hình 2.5.3 cho thấy quy tắc luỹ thừa đối với $n = 1, 2, 3$. Khối lập phương làm cho quy tắc lũy thừa sáng tỏ nhất. Ba tấm mỏng có kích thước là u nhân u nhân Δu. Số gia trong thể tích về cơ bản là $3u^2\Delta u$. Từ việc khai triển $(u+\Delta u)^3$, sự thay đổi chính xác trong thể tích là $3u^2\Delta u + 3u(\Delta u)^2 + (\Delta u)^3$—mà cũng bao gồm luôn cả ba khối hộp hẹp và một khối lập phương rất nhỏ trên đỉnh góc hình lập phương ban đầu. Đây là một biểu diễn của công thức nhị thức bằng hình vẽ.



HÌNH 2.5.3. Sự thay đổi chiều dài $= \Delta u$; sư thay đổi diện tích$\approx$ $2u\,\Delta u$; sự thay đổi thể tích $\approx 3u^2\,\Delta u$.

VÍ DỤ 2.5.11. $\dfrac{d}{dx}(\sin x)^n = n(\sin x)^{n-1}\cos x$. Nhân tử bổ sung $\cos x$ là du/dx.

Chúng ta còn một bước cuối cùng phải thực hiện đó là thoát khỏi một ràng buộc rất khó chịu—đó là n phải là một số nguyên. Chúng ta muốn thực hiện việc lấy đạo hàm của các lũy thừa phân số $n = p/q$, mà vẫn giữ nguyên công thức cũ. *Đạo hàm của* x^n *vẫn là* nx^{n-1}.

Để thực hiện với các căn bậc hai, tôi ta có thể viết $(\sqrt{x})^2 = x$. Đạo hàm của nó là $2\sqrt{x}(\sqrt{x})' = 1$. Vì vậy $(\sqrt{x})'$ là $1/2\sqrt{x}$, mà phù hợp với công thức khi $n = \dfrac{1}{2}$. Bây giờ thử $n = p/q$.

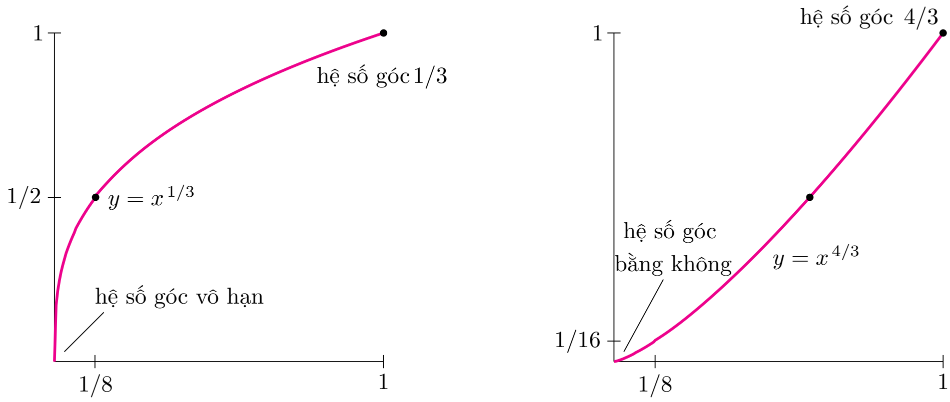
LŨY THỪA HỮU TỶ. Viết $u = x^{p/q}$ dưới dạng $u^q = x^p$. Lấy các đạo hàm, giả định chúng tồn tại:

(quy tắc lũy thừa trên cả hai vế)

$$
\begin{aligned}
qu^{q-1}\frac{du}{dx} &= px^{p-1} && () \\
\frac{du}{dx} &= \frac{px^{-1}}{qu^{-1}} && (\text{khử } x^p \text{ với } u^q) \\
\frac{du}{dx} &= nx^{n-1} && (\text{thay } p/q \text{ bởi } n \text{ và } u \text{ bởi } x^n)
\end{aligned}
$$

VÍ DỤ 2.5.12. Hệ số góc của $x^{1/3}$ là $\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$. Hệ số góc là vô cùng tại $x = 0$ và bằng không tại $x = \infty$. Nhưng đường cong trong Hình 2.5.4 vẫn tiếp tục đi lên. Nó không nằm bên dưới một “đường tiệm cận.”

VÍ DỤ 2.5.13. Hệ số góc của $x^{4/3}$ là $\dfrac{4}{3}x^{1/3}$. Hệ số góc bằng không tại $x = 0$ và là vô cùng tại $x = \infty$. Đồ thị đi lên nhanh hơn một đường thẳng và chậm hơn một parabola ($\dfrac{4}{3}$ nằm giữa 1 và 2). Hệ số góc của nó có đồ thị là đường cong căn bậc ba (lần $\dfrac{4}{3}$).



HÌNH 2.5.4. Hệ số góc bằng vô cùng của x^n so với hệ số góc bằng không: sự khác nhau giữa $0 < n < 1$ và $n > 1$.

CHÚNG TA DỪNG TẠI ĐÂY! Tôi xin lỗi vì có quá nhiều quy tắc. Một chiếc máy tính có thể ghi nhớ tất cả những quy tắc này, nhưng nó không hiểu những quy tắc này có nghĩa là gì nhưng bạn lại hiểu. Cùng với quy tắc xích mà baoŨY THỪA HỮU TỶ quát Chương 4, chúng thực hiện được hầu như tất cả các đạo hàm từng được tính toán bởi nhân loại. Chúng ta liệt kê chúng vào cùng một nơi để tiện tra cứu.

Quy tắc Tuyến tính	$(au + bv)' = au' + bv'$
Quy tắc Tích	$(uv)' = uv' + vu'$
Quy tắc Nghịch đảo	$(1/v)' = -v'/v^2$
Quy tắc Thương	$(u/v)' = (vu' - uv')/v^2$
Quy tắc Lũy thừa	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Quy tắc luỹ thừa áp dụng khi n là *âm*, hoặc *phân số*, hoặc ***bất kỳ số thực nào***. Đạo hàm của x^π là $\pi.x^{\pi-1}$, theo Chương 6. Đạo hàm của $(\sin x)^n$ là ________. Và bây giờ các đạo hàm của tất cả sáu hàm lượng giác được thiết lập:

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\sec x)' = \sec x \tan x$$
$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

BÀI TẬP 2.5

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đạo hàm của $\sin x \cos x$, $1/\cos x$, $\sin x/\cos x$ và $\tan^3 x$ được sinh ra từ quy tắc __a__, quy tắc __b__, quy tắc __c__, và quy tắc __d__. Tích của $\sin x$ lần0 $\cos x$ có $(uv)' = uv' +$ __e__ $=$ __f__. Đạo hàm của $1/v$ là __g__, nên hệ số góc của $\sec x$ là __h__. Đạo hàm của u/v là __i__, nên hệ số góc của $\tan x$ là __j__. Đạo hàm của $\tan^3 x$ là __k__. Hệ số góc của x^n là __l__ và hệ số góc của $(u(x))^n$ là __m__. Đối với $n = -1$, đạo hàm của $(\cos x)^{-1}$ là __n__, mà phù hợp với quy tắc đối với $\sec x$.

Thậm chí đơn giản hơn nữa là quy tắc __o__, mà áp dụng cho $au(x) + bv(x)$. Đạo hàm là __p__. Hệ số góc của $3\sin x + 4\cos x$

là __q__. Đạo hàm của $(3\sin x + 4\cos x)^2$ là __r__. Đạo hàm __s__ là $4\sin^3 x\cos x$.

Tìm đạo hàm của các hàm số trong 2.5.1-2.5.26.

2.5.1. $(x+1)(x-1)$

2.5.2. $(x^2+1)(x^2-1)$

2.5.3. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+\sin x}$

2.5.4. $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1-\sin x}$

2.5.5. $(x-1)(x-2)(x-3)$

2.5.6. $(x-1)^2(x-2)^2$

2.5.7. $x^2\cos x + 2x\sin x$

2.5.8. $x^{1/2}(x+\sin x)$

2.5.9. $\dfrac{x^3+1}{x+1} + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2.5.10. $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2.5.11. $x^{1/2}\sin^2 x + (\sin x)^{1/2}$

2.5.12. $x^{3/2}\sin^3 x + (\sin x)^{3/2}$

2.5.13. $x^4\cos x + x\cos^4 x$

2.5.14. $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)$

2.5.15. $\dfrac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \sin x$

2.5.16. $(x-6)^{10} + \sin^{10} x$

2.5.17. $\sec^2 x - \tan^2 x$

2.5.18. $\csc^2 x - \cot^2 x$

2.5.19. $\dfrac{4}{(x-5)^{2/3}} + \dfrac{4}{(5-x)^{2/3}}$

2.5.20. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

2.5.21. $(\sin x\cos x)^3 + \sin 2x$

2.5.22. $x\cos x\csc x$

2.5.23. $u(x)v(x)w(x)z(x)$

2.5.24. $[u(x)]^2[v(x)]^2$

2.5.25. $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\cot x}$

2.5.26. $x\sin x + \cos x$

2.5.27. Một hình hộp to dần lên có chiều dài t, chiều rộng $1/(1+t)$, và chiều cao $\cos t$.

(a) Hỏi tốc độ thay đổi của thể tích?

(b) Hỏi tốc độ thay đổi của diện tích bề mặt?

2.5.28. Bằng cách áp dụng của quy tắc tích hai lần, chứng tỏ rằng đạo hàm của uvw là $uvw' + uv'w + u'vw$. Khi một hình hộp với các cạnh u, v w to lên thêm bởi một lượng Δu, Δv, Δw, ba tấm được thêm vào với thể tích $uv\Delta w$, ________ và ________.

2.5.29. Tìm vận tốc nếu quãng đường là

$$f(t) = \begin{cases} 5t^2 & \text{đối với } t \leqslant 10, \\ 500 + 100\sqrt{t-10} & \text{đối với } t \geqslant 10. \end{cases}$$

2.5.30. Một hình trụ có bán kính $r = \dfrac{t^{3/2}}{1+t^{3/2}}$ và chiều cao $h = \dfrac{t}{1+t}$.

(a) Hỏi tốc độ thay đổi của thể tích của nó?

(b) Hỏi tốc độ thay đổic của diện tích bề mặt (bao gồm cả hai đáy) của nó?

2.5.31. Chiều cao của một tên lửa mô hình là $f(t) = t^3/(1+t)$.

(a) Hỏi vận tốc $v(t)$?

(b) Hỏi gia tốc dv/dt?

2.5.32. Áp dụng quy tắc tích cho $u(x)u^2(x)$ để tìm quy tắc lũy thừa đối với $u^3(x)$.

2.5.33. Tìm đạo hàm *cấp hai* của tích $u(x)v(x)$. Tìm đạo hàm *cấp ba*. Kiểm thử các công thức của bạn trên $u = v = x$.

2.5.34. Tìm các hàm số $y(x)$ mà có các đạo hàm là

(a) x^3 (c) $(1-x)^{3/2}$

(b) $1/x^3$ (d) $\cos^2 x\sin x$.

2.5.35. Tìm quãng đường $f(t)$, bắt đầu từ $f(0) = 0$, để khớp với những vận tốc sau:

(a) $v(t) = \cos t\sin t$

(b) $v(t) = \tan t\sec^2 t$

(c) $v(t) = \sqrt{1+t}$.

2.5.36. Áp dụng quy tắc thương cho$(u(x))^3/(u(x))^2$ và $-v'/v^2$. Hàm thứ hai đưa ra đạo hàm cấp hai của ________.

2.5.37. Vẽ một hình giống như 2.13 để giải thích *quy tắc bình phương*.

2.5.38. Đưa ra một ví dụ trong đó $u(x)/v(x)$ tăng nhưng $du/dx = dv/dx = 1$.

2.5.39. ***Đúng hay sai***, với một lý do hợp lý:

(a) Đạo hàm của x^{2n} là $2nx^{2n-1}$.

(b) Theo tính tuyến tính, đạo hàm của $a(x)u(x) + b(x)v(x)$ là $a(x)\,du/dx + b(x)\,dv/dx$.

(c) Đạo hàm của $|x|^3$ là $3\,|x|^2$.

(d) $\tan^2 x$ và $\sec^2 x$ có cùng đạo hàm.

(e) $(uv)' = u'v'$ là đúng khi $u(x) = 1$.

2.5.40. Giá của u cổ phiếu tại v dollars trên mỗi cổ phiếu là uv dollars. Kiểm tra thứ nguyên của $d(uv)/dt$ và $u\,dv/dt$ và $v\,du/dt$.

2.5.41. Nếu $u(x)/v(x)$ là một tỷ số của hai đa thức bậc n, đạo hàm của nó có bậc bao nhiêu?

2.5.42. Đối với $y = 5x + 3$, liệu $(dy/dx)^2$ có giống như d^2y/dx^2 hay không?

2.5.43. Nếu bạn thay đổi từ $f(t) = t\cos t$ sang tiếp tuyến của nó tại $t = \dfrac{\pi}{2}$, tìm hàm số hai khoảng df/dt.

2.5.44. Giải thích theo cách của bạn tại sao đạo hàm của $u(x)v(x)$ có hai số hạng.

2.5.45. Một máy bay bắt đầu giảm độ cao từ độ cao $y = h$ tại $x = -L$ để hạ cánh tại $(0, 0)$. Chọn a, b, c, d để quỹ đạo hạ cánh $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ của nó là **trơn**. Với $dx/dt = V =$ hằng số, tìm dy/dt và d^2y/dt^2 tại $x = 0$ và $x = -L$. (Để giữ d^2y/dt^2 nhỏ, một máy bay từ bờ đông (tây) sang bờ tây (đông) của nước Mỹ bắt đầu hạ độ cao từ khoảng cách $L > 100$ dặm tính từ sân bay.)

2.6. Giới hạn

Bạn đã nhìn thấy đủ nhiều các giới hạn để có thể đưa ra một định nghĩa. Chúng ta đúng là đã đi được một đoạn khá xa mà không dùng đến một định nghĩa nào của giới hạn, và chúng ta có thể cứ tiếp tục như vậy. Nhưng bây giờ dường như là thời điểm hợp lý để định nghĩa các giới hạn một cách cẩn thận hơn. Mục đích của chúng ta là đạt được sự chặt chẽ mà không có sự cứng nhắc.

Trước tiên, bạn nên biết rằng các giới hạn của $\Delta y/\Delta x$ không phải là các giới hạn duy nhất trong toán học. Dưới đây là năm ví dụ hoàn toàn khác nhau. Chúng liên quan đến $n \to \infty$, chứ không phải là $\Delta x \to 0$:

(1) $a_n = (n-3)/(n+3)$ (đối với n lớn, bỏ qua các số 3 và thấy $a_n \to 1$)

(2) $a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + 4$ (bắt đầu với bất kỳ a_1 nào và luôn có $a_n \to 8$)

(3) $a_n =$ xác suất sống đến năm thứ n (không may là $a_n \to 0$)

(4) $a_n =$ tỷ lệ số lượng các số không trong số n chữ số đầu tiên của π ($a_n \to \dfrac{1}{10}$?)

(5) $a_1 = .4 a_2 = .49, a_3 = .493; \ldots$ *Bất kể các chữ số thập phân còn lại là gì, các số a đều hội tụ tới một giới hạn.* Có thể $a_n \to .493000\ldots$, nhưng khả năng đó không cao.

Vấn đề là nói được ký hiệu giới hạn → thực sự có nghĩa là gì.

Để có một khởi đầu tốt đẹp chúng ta bắt đầu hỏi về sự hội tụ tới *không*. Một dãy số gồm các số dương tiến tới không khi nào? Ký hiệu $a_n \to 0$ có nghĩa là gì? Các số $a_1, a_2, a_3, \ldots$, phải trở nên "nhỏ", nhưng điều này quá mơ hồ. Chúng ta sẽ đề xuất bốn định nghĩa của ***sự hội tụ tới không***, và tôi hy vọng chúng ta thấy ngay được định nghĩa nào đúng.

1.: *Tất cả các số a_n đều nằm dưới* 10^{-10}. Định nghĩa này là đủ dùng cho các mục đích thực hành, nhưng nó chắc chắn không không làm cho a_n tiến tới không.

2.: *Dãy số càng lúc càng tiến gần tới không*—từng a_{n+1} nhỏ hơn a_n đứng trước. Phép thử này được đáp ứng bởi $1.1, 1.01, 1.001, \ldots$, nhưng dãy số này hội tụ tới 1 thay vì 0.

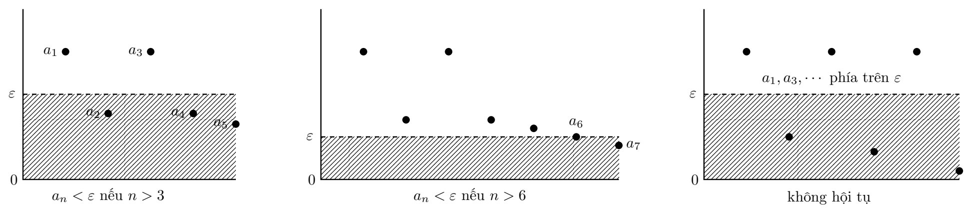
3.: *Đối với bất kỳ số nhỏ tùy ý nào, ít nhất một trong các a_n là nhỏ hơn số đó.* Định nghĩa này làm cho thừ gì đó tiến tới không, nhưng không nhất thiết làm cho toàn bộ dãy số tiến tới không. Điều kiện này sẽ được thoả mãn bởi $1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{1}{4}, \ldots$, nhưng dãy số này tiến tới không.

4.: *Đối với bất kỳ số nhỏ tùy ý nào, các số a_n rốt cuộc đi xuống dưới số đó và **tiếp tục nằm dưới** số đó.* Đây là định nghĩa đúng.

Tôi muốn lặp lại định nghĩa đúng vừa rồi. Để kiểm tra sự hội tụ tới không, bắt đầu với một số nhỏ—chẳng hạn 10^{-10}. Các số a_n phải đi xuống *dưới số đó*. Chúng có thể tiến lên trên và tiến xuống dưới lần nữa—một triệu số hạng đầu tiên cũng hoàn toàn không làm nên sự khác biệt. Một tỷ số hạng tiếp theo cũng không làm nên sự khác biệt, nhưng rốt cuộc tất cả các số hạng phải tiến xuống dưới 10^{-10}. Sau khi chờ lâu hơn (có thể lâu hơn rất nhiều), tất cả các số hạng rớt xuống dưới 10^{-20}. Đuôi của dãy số mới lá thứ quyết định mọi thứ.

Câu hỏi 12. *Liệu* $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-9}, 10^{-8}, \ldots$ *có tiến tới* 0 *hay không?*

Câu trả lời. Có. Những con số lên và xuống này rốt cuộc nằm dưới bất kỳ ϵ nào.



Hình 2.6.1. Sự hội tụ có nghĩa: Chỉ có một số lượng hữu hạn các a nằm ngoài bất kỳ dải nào quanh $\mathbf{L}$.

Câu hỏi 13. *Liệu* $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-4}, 10^{-10}, \ldots$ *có tiến tới* 0 *hay không?*

Câu trả lời. Không. Dãy số này đi xuống dưới 10^{-4} nhưng không tiếp tục nằm dưới số đó.

Có một ký hiệu được công nhận cho thuật ngữ "một số dương nhỏ tuỳ ý." Theo thỏa thuận khắp thế giới, ký hiệu đó chính là chữ cái Hy Lạp ϵ (***epsilon***). Sự hội tụ tới không có nghĩa rằng ***dãy số rốt cuộc đi xuống dưới dưới*** ϵ ***và tiếp tục nằm dưới*** ϵ ***đó***. ϵ càng nhỏ, độ khó của phép kiểm tra sự hội tụ càng tăng và thời gian phải chờ càng lâu. Nghĩ về ϵ như độ dung sai, và tiếp tục làm giảm nó.

Để nhấn mạnh rằng ϵ được sinh ra từ bên ngoài chứ không phải bên trong bản thân dãy số, Socrates cũng có khả năng chọn nó. Dù ϵ mà ông ấy đề xuất là gì đi nữa, các a phải rốt cuộc phải nhỏ hơn. *Sau a_N nào đó, tất cả các a đều nằm dưới dung sai* ϵ. Dưới đây là phát biểu chính xác:

đối với bất kỳ ϵ ***nào, đều có một*** N ***sao cho*** $a_n < \epsilon$ ***nếu*** $n > N$.

Một khi bạn thấu hiệu ý tưởng này, phần còn lại dễ ợt. Hình 2.6.1 có $N = 3$ và sau đó $N = 6$.

Ví dụ 2.6.1. Dãy số $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \ldots$ bắt đầu tăng lên nhưng đi tới không. Chú ý rằng $1, 4, 9, \ldots, 100, \ldots$là các bình phương của các số nguyên dương, và $2, 4, 6, 8, \ldots, 1024, \ldots$ là các luỹ thừa của 2. 2^n rốt cuộc tăng nhanh hơn n^2, như trong $a_{10} = 100/1024$. Tỷ số đi xuống dưới bất kỳ ϵ nào.

Ví dụ 2.6.2. $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$ tiến tới 0. Những a này không giảm đều (thuật ngữ toán học cho từ đều là "đơn điệu"), nhưng giới hạn của chúng vẫn là 0. Sự lựa chọn $\epsilon = 1/1000$ sinh ra đáp án đúng: *Tất cả các số hạng đứng sau* a_{2001} *đều nhỏ hơn* $1/1000$. Vì vậy $N = 2001$ cho ϵ này.

Dãy số $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ là chậm hơn nhiều—nhưng nó cũng hội tụ tới 0.

Tiếp theo chúng ta cho phép các a_n là *âm* cũng như dương. Chúng có thể hội tụ về không từ một phía hay hai phía của không. Phép kiểm tra sự hội tụ vẫn đòi hỏi phần đuôi của dãy a_n đi vào trong bất kỳ dải nào gần không (và nằm ở trong đó). Nhưng bây giờ dãy bắt đầu tại $-\epsilon$.

Khoảng cách từ không là giá trị tuyệt đối $|a_n|$. *Vì vậy* $a_n \to 0$ *có nghĩa là* $|a_n| \to 0$. Phép kiểm tra sự hội tụ trước đó có thể được áp dụng cho $|a_n|$:

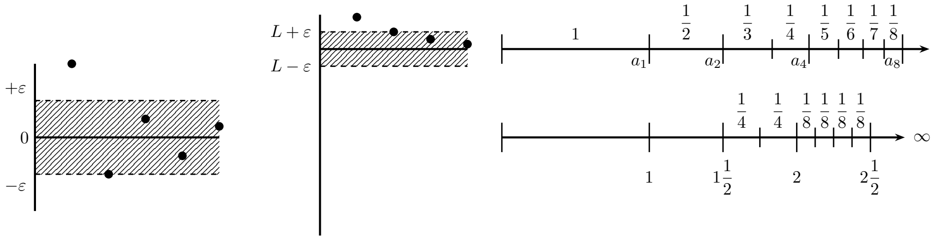
> ***đối với bất kỳ*** ϵ ***nào, đều có một*** N ***sao cho*** $|a_n| < \epsilon$ ***nếu*** $n > N$.

Ví dụ 2.6.3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ hội tụ tới không bởi vì $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ hội tụ tới không.

Chúng ta chỉ cần một bước nhỏ để tiến sang các giới hạn khác không. ***Giới hạn là*** L ***nếu các số*** $a_n - L$ ***hội tụ tới không***. Phép kiểm tra sự hội tụ vừa rồi của chúng ta áp dụng cho giá trị tuyệt đối $|a_n - L|$:

> ***đối với bất kỳ*** ϵ ***nào, đều có một*** N ***sao cho*** $|a_n - L| < \epsilon$ ***nếu*** $n > N$.

Đây là định nghĩa của sự hội tụ! Chỉ có một số lượng hữu hạn các a nằm bên ngoài bất kỳ dải nào quanh L (Hình 2.6.2). Chúng ta viết $a_n \to L$ hay $\lim a_n = L$ hay $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.



Hình 2.6.2. $a_n \to 0$ trong Ví dụ 2.6.3; $a_n \to 1$ trong Ví dụ 4; $a_n \to \infty$ trong Ví dụ 5 (nhưng $a_{n+1} - a_n \to 0$).

Ví dụ 2.6.4. Các số $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \ldots$ hội tụ tới $L = 1$. Sau khi trừ 1, các hiệu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ hội tụ tới không. Những hiệu này là $|a_n - L|$.

Ví dụ 2.6.5. ***Dãy số*** $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$ ***không hội tụ***.

Khoảng cách giữa các số hạng trở nên nhỏ hơn. Nhưng các số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ đó đi vượt quá bất kỳ giới hạn L được đề xuất nào. Số hạng thứ hai là $1\frac{1}{2}$. Số hạng thứ tư cộng thêm $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, nên a_4 đi vượt quá 2. Số hạng thứ tám có bốn phân số mới $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, có tổng lớn hơn $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Vì vậy a_8 vượt quá $2\frac{1}{2}$. Thêm tám số hạng sẽ có tổng nhiều hơn tám lần $\frac{1}{16}$, nên a_{16} vượt quá 3. Các đường thẳng trong Hình 2.6.2c là dài vô hạn, không dừng tại bất kỳ L nào.

Theo ngôn ngữ của Chương 10, chuỗi điều hoà $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ *không hội tụ*. Tổng là vô hạn, bởi vì các "tổng riêng" a_n đi quá mỗi giới hạn L (a_{5000} là vượt quá $L=9$). Chúng ta sẽ quay trở lại các chuỗi vô hạn, nhưng ví dụ này đưa ra một điểm vi diệu: Các bước giữa a_n có thể tiến tới không trong khi vẫn có $a_n \to \infty$.

Như vậy điều kiện $a_{n+1}-a_n \to 0$ là ***không đủ*** cho sự hội tụ. Tuy thế, điều kiện này là ***cần***. Nếu chúng ta có sự hội tụ, khi đó $a_{n+1}-a_n \to 0$. Đây là một bài tập tốt về tính logic của sự hội tụ, nhấn mạnh sự khác nhau giữa "điều kiện đủ" và "điều kiện cần." Chúng ta thảo luận logic này dưới đây, sau khi chứng minh rằng [mệnh đề A] kéo theo [mệnh đề B]:

(2.6.1) Nếu [a_n hội tụ tới L], khi đó [$a_{n+1}-a_n$ hội tụ tới không].

CHỨNG MINH. Bởi vì a_n hội tụ nên có một số N sao cho $|a_n - L| < \epsilon$ và $|a_{n+1} - L| < \epsilon$ đối với mọi $n > N$. Vì $a_{n+1}-a_n$ là tổng của $a_{n+1}-L$ và $L-a_n$, nên giá trị tuyệt đối của nó không thể vượt quá $\epsilon+\epsilon = 2\epsilon$. Vì vậy $a_{n+1}-a_n$ tiến tới không. □

Sự phản đối bởi Socrates: Chúng ta chỉ thu được kết quả nằm phía dưới 2ϵ trong khi Socrates yêu câu chúng ta đưa ra kết quả nằm phía dưới ϵ. *Câu trả lời của chúng ta*: Nếu Socrates đặc biết muốn $|a_{n+1}-a_n| < 1/10$, chúng ta bắt đầu với $\epsilon = 1/20$. Khi đó $2\epsilon = 1/10$. Nhưng mánh khóe này là không cần thiết. Việc nhỏ hơn 2ϵ cũng thuyết phục như nhỏ hơn ϵ.

TÍNH LOGIC CỦA "KHI" VÀ "CHỈ KHI"

Trang sau được thêm vào để hỗ trợ chúng ta với ngôn ngữ toán học. Trong ngôn ngữ thông thường, chúng ta có thể nói "Tôi sẽ đi nếu bạn gọi." Hay chúng ta có thể nói "Tôi sẽ đi chỉ khi bạn gọi." Hai cách nói này là khác nhau! Một nhà toán học thậm chí có thể nói "Tôi sẽ đi *khi và chỉ khi* bạn gọi." Mục đích của chúng ta là tư duy thông qua logic vì nó quan trọng và không quá quen thuộc với chúng ta.[12].

Mệnh đề A ở trên kéo theo mệnh đề B. Mệnh đề A là $a_n \to L$; mệnh đề B là $a_{n+1}-a_n \to 0$. Toán học có ít nhất năm cách viết $A \Rightarrow B$, và tôi nghĩ bạn có thể thích chúng được đặt cùng nhau. Việc có quá nhiều cách biểu diễn cho cùng một ý tưởng dường như là thừa thải, nhưng việc ít đa dạng còn làm cho các tác giả cảm thấy khó chịu hơn. Dưới đây là năm cách viết mà chúng ta sẽ nghĩ đến:

$A \Rightarrow B$

A kéo theo B

nếu A, ***khi đó*** B

A là một điều kiện ***đủ*** đối với B

B là đúng ***nếu*** A là đúng

VÍ DỤ 2.6.6. ***Nếu*** [các số dương là giảm], ***khi đó*** [chúng hội tụ tới một giới hạn].

Nếu[các dãy số a_n và b_n hội tụ], ***khi đó*** [dãy số $a_n + b_n$ hội tụ].

Nếu[$f(x)$ là tích phân của $v(x)$], ***khi đó*** [$v(x)$ là đạo hàm của $f(x)$].

Tất cả những điều trên đều là đúng, nhưng chưa được chứng minh. A là giả thiết, B là kết luận.

Bây giờ chúng ta đi theo hướng ngược lại. (Nó được gọi là "mệnh đề đảo," chứ không phải là mệnh đề ngược.) *Chúng ta hoán đổi A và B.* Tất nhiên việc phát biểu theo chiều ngược lại không có nghĩa là mệnh đề đảo là đúng! B có thể kéo theo A, hoặc không thể. Trong hai ví dụ đầu tiên, mệnh đề đảo là sai—a_n có thể hội tụ mà

[12]Tư duy logic quan trọng hơn nhiều so với ϵ và δ.

không cần phải là giảm, và $a_n + b_n$ có thể hội tụ khi các dãy số a_n và b_n không hội tụ. Mệnh đề đảo của phát biểu thứ ba là đúng—và có thêm năm cách để phát biểu nó:

$A \Leftarrow B$

A được kéo theo bởi B

nếu B, ***khi đó*** A

A là một điều kiện ***cần*** đối với B

B là đúng ***chỉ khi*** A là đúng

Chúng ta không phải lúc nào cũng làm chủ được các từ "cần" và "đủ" cũng như cụm từ "khi và chỉ khi." Hai phát biểu $A \Rightarrow B$ và $A \Leftarrow B$ là hoàn toàn khác nhau, và *cả hai đều cần được chứng minh*. Điều đó có nghĩa là phải có hai chứng minh riêng biệt. Nhưng chúng có thể được cùng phát biểu để thuận tiện (khi cả hai đều đúng):

$A \Leftrightarrow B$

A kéo theo B và B kéo theo A

A là ***tương đương*** với B

A là một điều kiện ***cần và đủ*** đối với B

A là đúng ***khi và chỉ khi*** B là đúng

Ví dụ. $[a_n \to L] \Leftrightarrow [2a_n \to 2L] \Leftrightarrow [a_n + 1 \to L + 1] \Leftrightarrow [a_n - L \to 0]$.

CÁC QUY TẮC ĐỐI VỚI GIỚI HẠN

Bộ môn giải tích cần một *định nghĩa của giới hạn*, để xác định dy/dx. Đạo hàm số này chứa hai giới hạn: $\Delta x \to 0$ và $\Delta y/\Delta x \to dy/dx$. Bộ môn giải tích cũng cần các *quy tắc đối với các giới hạn*, để chứng minh quy tắc tổng và quy tắc tích đối với các đạo hàm. Chúng ta đã bắt đầu với định nghĩa, và bây giờ chúng ta bắt đầu với các quy tắc.

Cho trước *hai dãy hội tụ*, $a_n \to L$ và $b_n \to M$, các dãy số sau cũng hội tụ:

Phép cộng: $a_n + b_n \to L + M$ Phép trừ: $a_n - b_n \to L - M$

Phép nhân: $a_n b_n \to LM$ Phép chia: $a_n/b_n \to L/M$ (với điều kiện $M \neq 0$)

Chúng ta kiểm tra quy tắc nhân bằng cách dùng một đồng nhất thức thích hợp:

(2.6.2) $$a_n b_n - LM = (a_n - L)(b_n - M) + M(a_n - L) + L(b_n - M).$$

Giả sử $|a_n - L| < \epsilon$ đối với mọi $n > N$ nào đó, và $|b_n - M| < \epsilon$ đối với mọi $n > N'$ nào đó khác. Khi đó, đối với mọi n lớn hơn cả N lẫn N', vế phải của (2) là nhỏ, nó nhỏ hơn $\epsilon \cdot \epsilon + M\varepsilon + L\varepsilon$.Điều này chứng minh rằng (2) đưa ra $a_n b_n \to LM$.

Một trường hợp đặc biệt quan trọng đó là $ca_n \to cL$. (Dãy số gồm các b là $c, c, c, c, \ldots$). Như vậy một hằng số có thể được mang "ra ngoài" giới hạn, để đưa ra $\lim ca_n = c \lim a_n$.

GIỚI HẠN CỦA $f(x)$ KHI $x \to a$

Bước cuối cùng đó là thay các dãy số bằng các hàm số. Thay vì $a_1, a_2, a_3, \ldots$, có một continuum[13] gồm các giá trị của $f(x)$. Giới hạn được lấy khi x tiến tới một điểm cụ thể a (thay vì $n \to \infty$). Ví dụ: Khi x tiến tới $a = 0$, hàm số $f(x) = 4 - x^2$ tiến tới $L = 4$. Khi x tiến tới $a = 2$, hàm $5x$ tiến tới $L = 10$. Những phát biểu này

[13]Nd: Trong lý thuyết tập hợp, continumm có nghĩa các số thực, hoăc số lực lượng (vô hạn) tương ứng.

khá là hiển nhiên, nhưng chúng ta phải nói chúng có nghĩa là gì. Không hiểu sao chúng phải có nghĩa như sau:

nếu** x **là gần với** a**, khi đó** $f(x)$ **là gần với** L**.

Nếu $x - a$ là nhỏ, khi đó $f(x) - a$ cũng phải là nhỏ. Như trước đây, từ *nhỏ* không nói lên được mọi thứ. Chúng ta thực sự muốn nói "nhỏ tuỳ ý" hoặc "nhỏ hơn bất kỳ ϵ nào." Hiệu $f(x) - L$ phải trở nên *nhỏ bao nhiêu cũng được*, khi x càng gần a. Trong trường hợp đó, $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Hay chúng ta viết $f(x) \to a$ khi $x \to a$.

Phát biểu này khá là rắc rối vì nó liên quan đến hai giới hạn. Giới hạn $x \to a$ đang buộc $f(x) \to L$. (Trước đây, $n \to \infty$ buộc $a_n \to L$.) Nhưng nếu bạn hy vọng đạt được ϵ giống nhau trong cả hai giới hạn, bạn đã nhầm rồi. Chúng ta không và không thể đòi hỏi rằng $|x - a| < \epsilon$ kéo theo $|f(x) - L| < \epsilon$. ***Chúng ta có thể cần phải đẩy** x **đến cực gần** a* (gần hơn ε). Chúng ta phải đảm bảo rằng nếu x đủ gần a, khi đó $|f(x) - L| < \epsilon$.

Chúng ta vừa đến với "***định nghĩa epsilon-delta***" của giới hạn. Trước tiên, Socrates chọn ϵ. Ông yêu cầu người ta phải chứng tỏ rằng $f(x)$ cách L không quá ϵ, đối với mỗi x gần a. Khi đó, một ai đó khác (có thể là Plato) đáp lại với một số δ. Điều này đưa ra nghĩa của việc "gần a." Mục đích của Plato đó là để giữ $f(x)$ cách L không quá ϵ, bằng cách giữ x cách a không quá δ:

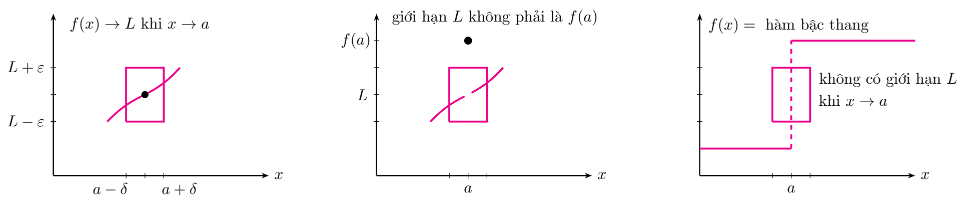
$$\text{(2.6.3)} \qquad \textbf{\textit{nếu}}\ 0 < |x - a| < \delta(\epsilon),\ \textbf{\textit{khi đó}}\ \ |f(x) - K| < \epsilon.$$

Dung sai đầu vào là δ (delta), dung sai đầu ra là ϵ. Khi Plato có thể tìm được một δ đối với mỗi ϵ, Socrates thừa nhận rằng giới hạn là L.

Ví dụ 2.6.7. Chứng minh rằng $\lim_{x\to 2} 5x = 10$. Trong trường hợp này, $a = 2$ và $L = 10$.

Socrates yêu cầu $|5x - 10| < \epsilon$. Plato đáp lại với đòi hỏi $|x - 2| < \delta$. Ông nên chọn δ nào? Trong trường hợp này, $|5x - 10|$ đúng bằng 5 lần $|x - 2|$. Vì vậy Plato lấy δ nhỏ hơn $\epsilon/5$ (một δ nhỏ hơn nữa cũng OK thôi). Bất cứ khi nào $|x - 2| < \epsilon/5$, phép nhân bởi 5 chứng tỏ rằng $|5x - 10| < \epsilon$.

Ghi chú 2.6.1. Trong Hình 2.6.3, Socrates chọn chiều cao của hình hộp. Nó mở rộng lên phía trên và phía dưới L, bởi số nhỏ ϵ. Thứ hai, Plato chọn chiều rộng. Ông phải làm cho hình hộp đủ hẹp để đồ thị ***cắt các cạnh bên***. Khi đó $|f(x) - L| < \epsilon$.



Hình 2.6.3. S chọn chiều cao 2ϵ, khi đó P chọn chiều rộng 2δ. Đồ thị phải cắt các cạnh bên.

Khi $f(x)$ có một điểm nhảy, hình hộp không thể giữ cho đồ thị cắt qua nó được. Một hàm bậc thang không có giới hạn khi x tiến tới điểm nhảy, bởi vì đồ thị đi qua phía trên hoặc phía dưới hình hộp—dù hình hộp đó có hẹp thế nào đi nữa.

Ghi chú 2.6.2. Hình thứ hai có $f(x) \to L$, bởi vì khi lấy giới hạn, ***chúng ta không để ý đến điểm cuối cùng** $x = a$*. Giá trị $f(a)$ có thể là bất kỳ giá trị nào, mà không ảnh hưởng đến L. Hình thứ nhất còn có thêm một điều nữa: $f(a) = L$. Khi đó chúng ta áp dụng một cái tên đặc biệt—f là ***liên tục***. Hình bên trái cho thấy một hàm liên tục, những hình khác lại không cho thấy điều tương tự.

Chúng ta sẽ sớm quay trở lại các hàm liên tục.

GHI CHÚ 2.6.3. Trong ví dụ với $f = 5x$ và $\delta = \epsilon/5$, con số 5 là *hệ số góc*. Sự lựa chọn là vừa đủ để giữ cho đồ thị nằm trong hình hộp—nó cắt tại các góc. Một hình hộp hẹp hơn một chút, cụ thể là $\delta = \epsilon/10$, và đồ thị chắc chắn cắt các cạnh bên. *Một sự lựa chọn hợp lý đó là chia ϵ bởi* $2\,|f'(a)|$. (Chúng ta nhân đôi hệ số góc cho chắc.) Tôi muốn nói lý do tại sao δ này lại được—ngay cả khi phép kiểm tra ϵ-δ hiếm khi được dùng trong thực tế.

Tỷ số của $f(x) - L$ với $x - a$ là khoảng cách theo phương đứng trên khoảng cách theo phương ngang. Đó là $\Delta f/\Delta x$, gần với hệ số góc $f'(a)$. Khi khoảng cách theo phương ngang là δ, khoảng cách theo phương đứng là gần bằng $\delta\,|f'(a)|$. Giá trị này bằng $\epsilon/2$ đối với "sự lựa chọn hợp lý" của δ—nên chúng ta chắc chăn nằm dưới ϵ. Sự lựa chọn này giải quyết hầu hết các bài tập. Nhưng ví dụ 7 cho thấy rằng một giới hạn vẫn có thể tồn tại ngay cả khi hệ số góc là vô hạn.

VÍ DỤ 2.6.8. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ (***một giới hạn một phía***).

CHÚ Ý DẤU CỘNG TRONG KÝ HIỆU $x \to 1^+$. Số x tiến tới $a = 1$ *chỉ từ phía trên*. Một giới hạn thông thường $x \to 1$ đòi hỏi chúng ta nhận x từ hai phía của 1 (giá trị chính xác $x = 1$ không được xét). Vì căn bậc hai của các số âm là không có nghĩa, nên chúng ta có một *giới hạn một phía*. Nó là $L = 0$.

Giả sử $\epsilon = 1/10$. Khi đó sự đáp lại có thể là $\delta = 1/100$. Một số nằm dưới $1/100$ có một căn bậc nằm dưới $1/10$. Trong trường hợp này, hình hộp phải được làm vô cùng hẹp, δ phải nhỏ hơn ϵ rất nhiều, bởi vì hàm căn bậc hai bắt đầu (tại gốc toạ độ) với hệ số góc vô hạn.

Những ví dụ trên cho thấy điểm then chốt của định nghĩa ϵ-δ. (Cho trước ϵ, tìm kiếm δ. Điều này được đưa ra bởi Cauchy ở Pháp, chứ không phải là Socrates ở Hy Lạp.) Chúng ta cũng thấy điểm hạn chế của điều này: Phép thử này là không thuận tiện. Các nhà toán học không đi quanh chỉ để đưa ra các ϵ và đáp lại bằng các δ. Chúng tôi, những nhà toán học, có thể sống một cuộc sống lập dị nhưng không đến nỗi lập dị như vậy.

Sẽ dễ dàng hơn nhiều nếu chúng ta thiết lập một lần và mãi mãi rằng $5x$ tiến tới giới hạn hiển nhiên $5a$ của nó. Điều tương tự cũng đúng đối với các hàm quen thuộc khác: $x^n \to a^n$ và $\sin x \to \sin a$ và $(1-x)^{-1} \to (1-a)^{-1}$—ngoại trừ tại $a = 1$. ***Giới hạn đúng L được sinh ra bằng cách thế $x = a$ vào hàm số***. Điều này chính là tính chất của một ***hàm liên tục***. Trước khi bước vào mục về các hàm liên tục, chúng ta chứng minh Định lý Kẹp bằng cách dùng ϵ và δ.

PHÁT BIỂU 2.6.1 (Định lý Kẹp). Giả sử $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ đối với x gần a. Nếu $f(x) \to L$ và $h(x) \to L$ khi $x \to a$, khi đó giới hạn của $g(x)$ cũng là L.

CHỨNG MINH. $g(x)$ bị kẹp giữa $f(x)$ và $h(x)$. Sau khi trừ L, $g(x) - L$ nằm giữa $f(x) - L$ và $h(x) - L$. Vì vậy

$$|g(x) - L| < \epsilon \text{ nếu } |f(x) - L| < \epsilon \text{ và } |h(x) - L| < \epsilon.$$

Đối với bất kỳ ϵ nào, hai bất đẳng thức sau cùng đúng trong một miền $0 < |x - a| < \delta$ nào đó. Vì vậy bất đẳng thức đầu tiên cũng đúng. Điều này chứng minh $g(x) \to L$. Các giá trị tại $x = a$ không liên quan ở đây—cho đến khi chúng ta đến với các hàm liên tục. □

BÀI TẬP 2.6

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Giới hạn của $a_n = (\sin n)/n$ là __a__. Giới hạn của $a_n = n^4/2^n$ là __b__. Giới hạn của $a_n = (-1)^n$ là __c__. Ký hiệu $a_n \to 0$ có nghĩa là: Chỉ __d__ các số $|a_n|$ có thể __e__. Ký hiệu $a_n \to L$ có nghĩa là: Đối với mỗi __f__, có một __g__ sao cho __h__ nếu $n >$ __i__. Dãy số $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \dots$ không là __j__ bởi vì rốt cuộc các tổng đó cũng đi vượt quá __k__.

Giới hạn của $f(x) = \sin x$ khi $x \to a$ là __l__ . Giới hạn của $f(x) = x/|x|$ khi $x \to -2$ là __m__, nhưng giới hạn khi $x \to 0$ không __n__. Hàm số này chỉ có giới hạn __o__ phía. Ký hiệu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ có nghĩa là: Đối cới mỗi ϵ, có một δ sao cho $|f(x) - L| < \epsilon$ bất cứ khi nào __p__.

Hai quy tắc đối với giới hạn, khi $a_n \to L$ và $b_n \to M$, là $a_n + b_n \to$ __q__ và $a_n b_n \to$ __r__. Các quy tắc tương ứng đối với các hàm số, khi $f(x) \to L$ và $g(x) \to M$ khi $x \to a$, là __s__ và __t__. Trong tất cả các giới hạn, $|a_n - L|$ hoặc $|f(x) - L|$ rốt cuộc phải đi xuống dưới và __u__ bất kỳ số dương __v__ nào.

$A \Rightarrow B$ có nghĩa rằng A là một điều kiện __w__ của B. Khi đó B là đúng __x__ A đúng. $A \Leftrightarrow B$ có nghĩa rằng A là một điều kiện __y__ của B. Khi đó B là đúng __z__ A đúng.

2.6.1. Hỏi a_4 và hỏi giới hạn L? Đối với tất cả các n sau số N nào, $|a_n - L| < \frac{1}{10}$? (Được phép dùng máy tính cầm tay)

(a) $-1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$
(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \dots$
(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \dots, a_n = n/2^n$
(d) $1.1, 1.11, 1.111, \dots$
(e) $a_n = \sqrt[n]{n}$
(f) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$
(g) $(1+1), (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, \dots$

2.6.2. Chứng tỏ bằng ví dụ rằng các phát biểu sau đây là sai:

(a) Nếu $a_n \to L$ và $b_n \to L$, khi đó $a_n/b_n \to 1$
(b) $a_n \to L$ khi và chỉ khi $a_n^2 \to L^2$
(c) Nếu $a_n < 0$ và $a_n \to L$, khi đó $L < 0$
(d) Nếu có vô hạn các a_n nằm trong mỗi dải quanh không, khi đó $a_n \to 0$.

2.6.3. Mệnh đề nào sau đây là tương đương với $B \Rightarrow A$?

(a) Nếu A là đúng, B cũng là đúng
(b) A là đúng khi và chỉ khi B là đúng
(c) B là điều kiện đủ của A
(d) A là điều kiện cần của B.

2.6.4. Mệnh đề nào sau đây là tương đương với $B \Rightarrow A$?

(a) Nếu A là đúng, B cũng là đúng
(b) A là đúng khi và chỉ khi B là đúng
(c) B là điều kiện đủ của A
(d) A là điều kiện cần của B.

2.6.5 (*). Nếu dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots$ tiến tới không, chứng minh rằng chúng ta có thể sắp các số đó theo bất kỳ thứ tự nào và dãy số mới vẫn tiến tới không.

2.6.6 (*). Giả sử $f(x) \to L$ và $g(x) \to M$ khi $x \to a$. Chứng minh từ các định nghĩa rằng $f(x) + g(x) \to L + M$ khi $x \to a$.

Tìm các giới hạn 2.6.7-2.6.24 nếu chúng tồn tại. Không đòi hỏi phải dùng ϵ-δ.

2.6.7. $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t+3}{t^2-2}$

2.6.8. $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t^2+3}{t-2}$

2.6.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (cẩn thận)

2.6.10. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2.6.11. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin^2 h \cos^2 h}{h^2}$

2.6.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\tan x}{\sin x}$

2.6.13. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ (một phía)

2.6.14. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ (một phía)

2.6.15. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin x}{x}$

2.6.16. $\lim\limits_{c\to a} \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$

2.6.17. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2+25}{x-5}$

2.6.18. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

2.6.19. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (kiểm tra $x = .01$)

2.6.20. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{6+x}}$

2.6.21. $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]$(?)

2.6.22. $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$

2.6.23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x/2}$

2.6.24. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

2.6.25. Chọn δ để $|f(x)| < \dfrac{1}{100}$ nếu $0 < x < \delta$.
$f(x) = 10x$
$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \sin 2x$
$f(x) = x\sin x$

2.6.26. Khẳng định nào sau đây là định nghĩa của giới hạn?
(1)

$$|f(x)-L| < \epsilon$$
$$\Rightarrow 0 < |x-a| < \delta$$

(2)

$$|f(x)-L| < \epsilon$$
$$\Leftarrow 0 < |x-a| < \delta$$

(3)

$$|f(x)-L| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta$$

2.6.27. Định nghĩa của "$f(x) \to L$ khi $x\to\infty$" đó là: Đối với bất kỳ ϵ nào, đều có một X sao cho ________ $< \epsilon$ nếu $x > X$. Đưa ra một ví dụ mà $f(x)\to 4$ khi $x\to\infty$.

2.6.28. Đưa ra một định nghĩa đúng của "$f(x)\to 0$ khi $x\to-\infty$."

2.6.29. Giới hạn của $f(x) = \sin x/x$ khi $x\to\infty$ là ________. Đối với $\epsilon = .01$, tìm một điểm X mà sao cho đối với mọi $x > X$, $|f(x)| < \epsilon$.

2.6.30. Giới hạn của $f(x) = 2x/(1+x$ khi $x\to\infty$ là $L = 2$. Đối với $\epsilon = .01$, tìm một điểm X mà sao cho đối với mọi $x > X$, $|f(x)-2| < \epsilon$.

2.6.31. Giới hạn của $f(x) = \sin x$ khi $x\to\infty$ không tồn tại. Giải thích lý do tại sao lại không tồn tại.

2.6.32 (Máy tính cầm tay). Ước lượng giới hạn của $(1+\dfrac{1}{x})^x$ khi $x\to\infty$.

2.6.33. Đối với đa thức $f(x) = 2x - 5x^2 + 7x^3$, tìm

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$
(c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

2.6.34. Đối với $f(x) = 6x^3 + 1000x$, tìm

(a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
(b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$
(c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$
(d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+1}$

QUY TẮC QUAN TRỌNG. Khi $x\to\infty$ tỷ số của các đa thức $f(x)/g(x)$ có cùng giới hạn với tỷ số của các *số hạng dẫn đầu* của chúng. $f(x) = x^3 - x + 2$ có số hạng dẫn đầu x^3 và $g(x) = 5x^6 + x + 1$ có số hạng dẫn đầu $5x^6$. Vì vậy $f(x)/g(x)$ hành xử như $x^3/5x^6 \to 0$, $g(x)/f(x)$ hành xử như $5x^6/x^3 \to \infty$, $(f(x))^2/g(x)$ hành xử như $x^6/5x^6 \to 1/5$.

2.6.35. Tìm giới hạn khi $x\to\infty$ nếu nó tồn tại:

$\dfrac{3x^2+2x+1}{3+2x+x^2}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+1000}{x^3-1000}$

$\dfrac{x^4}{x^3+x^2}$ $\qquad$ $x\sin\dfrac{1}{x}$.

2.6.36. Nếu có một δ cụ thể để $|f(x)-L| < \epsilon$, tại sao việc chọn một δ nhỏ hơn là OK.

2.6.37. Tổng của $1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$ là $a_n = (1-r^n)/(1-r)$. Hỏi giới hạn của a_n khi $n\to\infty$? Hỏi giới hạn tồn tại đối với r nào?

2.6.38. Nếu $a_n\to L$, chứng minh rằng có một số N với tính chất sau: Nếu $n > N$ và $m > N$, khi đó $|a_n - a_m| < 2\epsilon$. Đây là phép kiểm tra của Cauchy đối với sự hội tụ.

2.6.39. Dù chữ số thập phân nào xuất hiện tiếp theo sau đi nữa, $a_1 = .4, a_2 = .49.a_3 = .493,\ldots$ cũng vẫn tiến tới một giới hạn L. Làm thế nào để chúng ta biết được điều này (khi chúng ta không thể biết L)?

Chúng ta dùng *phép kiểm tra của Cauchy*: các a tiến gần hơn với nhau.

(a) Từ a_4 trở lên, chúng ta có $|a_n - a_m| <$ ________.

(b) $|a_n - a_m| < 10^{-7}$ kể từ a_N nào trở lên?

2.6.40. Chọn các số thập phân trong Bài toán 39 để giới hạn là $L = .494$. Chọn các số thập phân để giáo sư của bạn không thể tìm thấy L.

2.6.41. Nếu mỗi số thập phân trong $.abcde\cdots$ được chọn ngẫu nhiên từ $0, 1, \ldots, 9$, hỏi giới hạn "trung bình" của L?

2.6.42. Nếu mỗi số thập phân là 0 hoặc 1 (ngẫu nhiên), hỏi giới hạn trung bình của L?

2.6.43. Giả sử $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 4$ và bắt đầu từ $a_1 = 10$. Tìm a_2 và a_3 và một sự liên hệ giữa $a_n - 8$ và $a_{n-1} - 8$. Suy luận rằng $a_n \to 8$.

2.6.44. "Đối với mỗi δ, đều có một ϵ sao cho $|f(x)| < \epsilon$ nếu $|x| < \delta$." Phép kiểm tra sự hội tụ được biến đổi quanh. Tìm ϵ khi $f(x) = \cos x$, hàm số này không hội tụ tới không.

2.6.45. Chứng minh Định lý Kẹp đối với dãy số bằng cách dùng ϵ: Nếu $a_n \to L$ và $c_n \to L$ và $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ đối với $n > N$, khi đó $b_n \to L$.

2.6.46. Giải thích trong vòng 110 từ sự khác nhau giữa "chúng ta sẽ đến đó nếu bạn vội" và "chúng ta sẽ đến đó chỉ khi bạn vội" và "chúng ta sẽ đến nó khi và chỉ khi bạn vội."

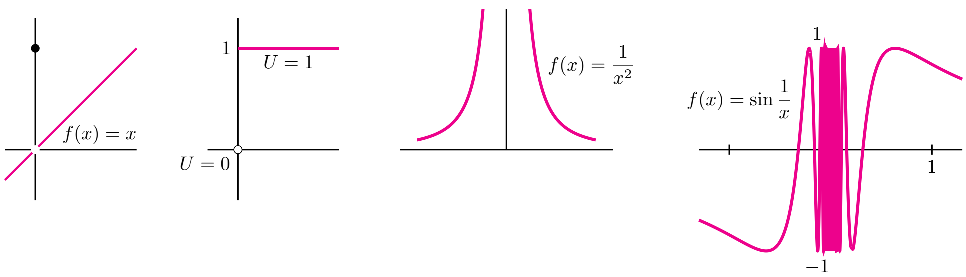
2.7. Hàm Liên tục

Đây sẽ là một mục ngắn gọn. Mục này ban đầu bao gồm cả các giới hạn, nhưng sự kết hợp như vậy làm cho nó trở nên quá dài. Chúng ta vẫn quan tâm đến các giới hạn của $f(x)$ khi $x \to a$, nhưng bây giờ có thêm một con số mới. Con số đó là $f(a)$, *giá trị của f tại $x = a$*. Đối với một "giới hạn," x tiến tới a nhưng không bao giờ bằng a—nên $f(a)$ đã được bỏ qua. Đối với một "hàm liên tục," con số cuối cùng mà chúng ta phải quan tâm trong chương này $f(a)$ phải đúng bằng giới hạn của $f(x)$ khi $x \to a$.

Liệu tôi có thể tóm tắt tình huống thông thường (tốt đẹp) khi x tiến tới a?

(1) Số $f(a)$ tồn tại (f được xác định tại a)
(2) Giới hạn của $f(x)$ tồn tại (nó đã được gọi là L)
(3) Giới hạn L bằng $f(a)$ ($f(a)$ là giá trị đúng)

Trong một trường hợp như vậy, $f(x)$ là ***liên tục*** tại $x = a$. Nhưng điều kiện này thường được viết trong chỉ một hàng: $f(x) \to f(a)$ khi $x \to a$. Bằng cách phản chứng, chúng ta hãy bắt đầu với bốn hàm số mà *không* liên tục tại $x = 0$.



HÌNH 2.7.1. Bốn kiểu gián đoạn (vẫn còn những kiểu khác) tại $x = 0$.

Trong Hình 2.7.1, hàm đầu tiên sẽ là liên tục nếu có $f(0) = 0$. Nhưng nó lại có $f(0) = 1$. Sau khi thay đổi $f(0)$ về giá trị đúng, vấn đề sẽ được giải quyết xong. Điểm gián đoạn là *bỏ được*. Các ví dụ 2, 3, 4 là quan trọng hơn và khó hơn. Không có giá trị "đúng" nào đối với $f(0)$:

2. $f(x) =$ hàm bậc thang (nhảy từ 0 tới 1 tại $x = 0$)
3. $f(x) = 1/x^2$ (giới hạn vô hạn khi $x \to 0$)
4. $f(x) = \sin(1/x)$ (giao động vô hạn khi $x \to 0$).

Các đồ thị cho thấy các giới hạn không thể tồn tại như thế nào. Hàm bậc thang có một ***điểm gián đoạn nhảy***. Nó có các ***giới hạn một phía***, từ bên trái và bên phải. Nó không có một giới hạn thông thường (hai phía). Giới hạn từ phía trái ($x \to 0^-$) là 0. Giới hạn từ phía phải ($x \to 0^+$) là 1. Một hàm bậc thang khác đó là $x/|x|$, mà nhảy từ -1 tới 1.

Trong đồ thị của $1/x^2$, giới hạn hợp lý duy nhất là $L = +\infty$. Tôi không thể nói một cách chính thức rằng giới hạn này tồn tại. Một cách chính thức, giới hạn này không tồn tại—nhưng chúng ta thường viết nó như thể là nó tồn tại: $1/x^2 \to \infty$ khi $x \to 0$. Điều này có nghĩa rằng $1/x^2$ tiến tới (và ở trên) mỗi L khi $x \to 0$.

Bằng cách dùng cách viết không chính thức tương tự, chúng ta viết giới hạn một phía đối với $f(x) = 1/x$:

$$\text{(2.7.1)} \qquad \text{Từ phía trái, } \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \text{ Từ phía phải, } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Ghi chú. $1/x$ có một "***cực điểm***" tại $x = 0$. $1/x^2$ cũng có một cực điểm (một cực điểm bội kép). Hàm số $1/(x^2 - x)$ có các cực điểm tại $x = 0$ và $x = 1$. Trong từng trường hợp, mẫu số đi tới 0 và hàm số đi tới $+\infty$ hoặc$-\infty$. Tương tự $1/\sin x$ có một cực điểm tại mỗi bội số của π (tại đó $\sin x$ bằng không). Tất cả các cực điểm vừa kể trừ cực điểm của $1/x^2$đều là "*đơn giản*"—các hàm số là hoàn toàn trơn tại $x = 0$ khi chúng ta nhân chúng bởi x:

$$(x)(\frac{1}{x}) = 1 \text{ và } (x)(\frac{1}{x^2 - x}) = \frac{1}{x-1} \text{ và } (x)(\frac{1}{\sin x}) \text{ là liên tục tại } x = 0.$$

$1/x^2$ có một cực điểm bội kép, vì nó cần phép nhân bởi x^2 (chứ không chỉ là x). Một tỷ số của các đa thức $P(x)/Q(x)$ có cực điểm tại nơi $Q = 0$, với điều kiện bất kỳ các nhân tử chung nào như $(x + 1)/(x + 1)$ đều bị khử trước tiên.

Các điểm nhảy và các cực điểm là các kiểu điểm gián đoạn cơ bản nhất, nhưng những kiểu điểm gián đoạn khác vẫn có thể xảy ra. Đồ thị thứ tư cho thấy rằng $\sin(1/x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$. Hàm số này không bùng nổ; vì hàm sine không bao giờ vượt quá 1. Tại $x = \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{1000}$, nó bằng $\sin 3$ và $\sin 4$ và $\sin 1000$. Những số này là dương và âm và (?). Khi x trở nên nhỏ, $1/x$ trở nên lớn, hàm sine dao động càng lúc càng nhanh. Đồ thị của nó không bao giờ nằm yên trọng một hình hộp nhỏ có chiều cao ϵ, dù hình hộp đó có hẹp như thế nào đi nữa.

HÀM LIÊN TỤC

Định nghĩa. f là "***liên tục tại*** $x = a$" nếu $f(a)$ được xác định và $f(x) \to f(a)$ khi $x \to a$. Nếu f là liên tục tại mỗi điểm mà tại đó nó được xác định, nó là một ***hàm liên tục***.

Sự phản đối. Định nghĩa này làm cho hàm số $f(x) = 1/x$ là một hàm liên tục! Nó không được xác định tại $x = 0$, nên tính liên tục của nó không thể sai. Logic đòi hỏi chúng ta chấp nhận điều này, nhưng ta không cần phải thích nó. Chắc chắn là không có $f(0)$ nào mà sẽ làm cho $1/x$ liên tục tại $x = 0$.

Thật kinh ngạc nhưng đúng là định nghĩa của "hàm liên tục" vẫn là một chủ đề gây tranh luận (*tạp chí Giáo viên Toán học*[14], tháng 5 năm 1989). Bạn sẽ thấy được lý do cho sự tranh cãi này—chúng ta đã nói về một điểm gián đoạn của hàm số $1/x$, nhưng đồng thời cũng gọi nó là một hàm liên tục. Định nghĩa của hàm liên

[14]Tạp chí Giáo viên Toán học (tiếng Anh: Mathematics Teacher).

tục ở trên thiếu sự khác nhau giữa $1/x$ và $(\sin x)/x$. H*àm số* $(\sin x)/x$ *có thể được làm thành liên tục tại mọi* x. Chỉ cần đặt $f(0) = 1$.

Chúng ta gọi một hàm số là "***khả liên tục***" nếu sự xác định của nó có thể được mở rộng cho *mọi* x theo cách mà làm cho hàm đó liên tục. Như vậy $(\sin x)/x$ và $\sqrt{x}$ là khả liên tục. Các hàm số $1/x$ và $\tan x$ là không khả liên tục. Đề xuất này có thể không đủ để kết thúc cuộc tranh luận, nhưng tôi hy vọng nó phần nào giúp bạn hiểu rõ định nghĩa của hàm liên tục.

VÍ DỤ 2.7.1. $\sin x$ và $\cos x$ và tất cả các đa thức $P(x)$ đều là các hàm liên tục.

VÍ DỤ 2.7.2. Hàm giá trị tuyệt đối $|x|$ là liên tục. Hệ số góc của nó có nhảy (không khả liên tục).

VÍ DỤ 2.7.3. Bất kỳ hàm hữu tỷ $P(x)/Q(x)$ nào đều là liên tục tại mọi nơi ngoại trừ tại nơi $Q = 0$.

VÍ DỤ 2.7.4. Hàm số mà nhảy giữa 1 tại các số hữu tỷ và 0 tại các số vô tỷ là ***gián đoạn khắp nơi***. Giữa hai số vô tỷ bất kỳ luôn có một số hữu tỷ và ngược lại. (Không hiểu sao có nhiều số vô tỷ hơn số hữu tỷ.)

VÍ DỤ 2.7.5. Hàm số 0^{x^2} bằng 0 đối với mỗi x, ngoại trừ tại $x = 0$ nơi mà tại đó 0^0 không được xác định. Vậy nếu 0^0 được xác định bằng không, khi đó hàm số này là liên lục. Nhưng hãy nhìn vào thảo luận trong đoạn sau trong đó 0^0 được xác định bằng 1.

Chúng ta có thể dành toàn bộ nội dung của cuốn sách này để đề cập đến các chứng minh của tính liên tục, nhưng tình huống diễn ra thường khá rõ ràng. Một hàm số là liên tục nếu bạn có thể vẽ đồ thị của nó mà không cần nhấc bút rời khỏi phần đồ thị vừa được vẽ." Tại một điểm gián đoạn nhảy, hoặc tại một giới hạn vô hạn, hoặc tại một dao động vô hạn, không có cách nào để đi ngang qua qua điểm gián đoạn trừ khi bắt đầu ở phía bên kia của điểm gián đoạn. Hàm số x^n là liên tục đối với $n > 0$. Nó không khả liên tục đối với $n < 0$. Hàm x^0 bằng 1 đối với mỗi x, ngoại trừ tại $x = 0$ nơi mà tại đó 0^0 không được xác định. Lần này tính liên tục đòi hỏi $0^0 = 1$.

Các ví dụ thú vị nhất lại chính là những ví dụ gần gũi nhất—chúng ta đã thấy hai trong số chúng:

VÍ DỤ 2.7.6. $\dfrac{\sin x}{x}$ và $\dfrac{1-\cos x}{x}$ đều là khả liên tục tại $x = 0$.

Những hàm số này rất quan trọng vì chúng là những thành phần không thể thiếu để tính hệ số góc của $\sin x$. Hàm số thứ nhất tiến tới 1 và hàm số thứ hai tiến tới 0. Nói một cách chính xác, chúng ta phải đưa cho những hàm số này các giá trị đúng (1 và 0) tại điểm giới hạn $x = 0$—tất nhiên chúng ta đã làm vậy.

Việc biết được điều gì sẽ xảy ra khi các mẫu số được thay đổi thành x^2 cũng rất quan trọng.

VÍ DỤ 2.7.7. $\dfrac{\sin x}{x^2}$ bùng nổ nhưng $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ có giới hạn $\dfrac{1}{2}$ tại $x = 0$.

Vì $(\sin x)/x$ tiến tới 1, nên việc chia hàm số này bởi một x nữa sẽ cho chúng ta một hàm số tương tự như $1/x$. Có một cực điểm đơn. Nó là một ví dụ có dạng $0/0$, trong đó x^2 tiến tới không nhanh hơn $\sin x$ tiến tới không. "Cuộc chạy đua tới không" tạo ra hầu như tất cả các vấn đề thú vị về giới hạn.

Đối với $1 - \cos x$ và x^2, cuộc chay đua tới không gần như ngang nhau. Tỷ số của chúng là 1 so với 2:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{1+1} \text{ khi } x \to 0.$$

Đáp án $\frac{1}{2}$ này sẽ được tìm thấy một lần nữa (nhưng dễ hơn nhiều) bởi "quy tắc l'Hôpital." Ở đây tôi nhấn mạnh không phải là đáp án mà chính là bản thân bài toán. Một câu hỏi trọng tâm của giải tích vi phân đó là *biết được giới hạn được tiến tới nhanh như thế nào*. ***Tốc độ tiến tới giới hạn chính là thông tin trong đạo hàm***.

Ba ví dụ sau đều là liên tục tại $x = 0$. Cuộc chạy đua tới không bị kiểm soát bởi hệ số góc—bởi vì $f(x) - f(0)$ là gần bằng $f'(0)$ lần x:

$$\begin{aligned}
\text{đạo hàm của } \sin x \text{ là } 1 \quad &\leftrightarrow \quad \sin x \text{ giảm như } x\\
\text{đạo hàm của } \sin^2 x \text{ là } 0 \quad &\leftrightarrow \quad \sin^2 x \text{ giảm nhanh hơn } x\\
\text{đạo hàm của } x^{1/3} \text{ là } \infty \quad &\leftrightarrow \quad x^{1/3} \text{ giảm chậm hơn } x \text{ khá nhiều}
\end{aligned}$$

HÀM KHẢ VI

Hàm giá trị tuyệt đối $|x|$ là liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó. Điều tương tự cũng xảy ra đối với $x^{\frac{1}{3}}$. ***Để một hàm số có đạo hàm, nó phải thỏa mãn nhiều điều kiện hơn để nó là liên tục***. Lý do khá là cơ bản, và đưa chúng ta trở lại các các định nghĩa then chốt:

$$\textbf{\textit{Liên tục}} \text{ tại } x : f(x+\Delta x) - f(x) \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

$$\textbf{\textit{Đạo hàm}} \text{ tại } x : \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f(x) \to f'(x) \text{ khi } \Delta x \to 0$$

Trong trường hợp thứ nhất, Δf tiến tới không (có lẽ tiến tới không một cách chậm rãi). Trong trường hợp thứ hai, Δf tiến tới không *nhanh như* Δx tiên tới không (bởi vì $\Delta f / \Delta x$ có một giới hạn). Yêu cầu có đạo hàm là mạnh hơn yêu cầu liên tục:

PHÁT BIỂU 2.7.1. Tại một điểm mà tại đó $f(x)$ có đạo hàm, hàm số phải liên tục. Nhưng $f(x)$ có thể là liên tục mà không cần phải có đạo hàm.

CHỨNG MINH. Giới hạn của $\Delta f = (\Delta x)(\Delta f/\Delta x)$ là $(0)(df/dx) = 0$. Vậy $f(x+\Delta x) - f(x) \to 0$. □

Hàm số $x^{1/3}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, bởi vì $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ bùng nổ. Hàm giá trị tuyệt đối $|x|$ không có đạo hàm bởi vì hệ số góc của nó nhảy. Hàm số đáng chú ý $\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 9x + \cdots$ là liên tục tại *mọi điểm* nhưng lại không có đạo hàm tại bất kỳ điểm nào cả. Bạn có thể vẽ đồ thị của nó mà không cần nhấc bút rời khỏi phần đồ thị vừa được vẽ (nhưng để làm như vậy lại không dễ chút nào—đồ thị đổi hướng tại mỗi điểm). Với hầu hết mọi người, hàm số này có quan hệ với các đường cong phủ kín không gian và các diện tích không đo được—tất cả những điều này tạo nên một cái hộp với đầy những thứ mới lạ. Các Fractal thường được đặt chung vào một cái hộp như vậy! Chúng có hình dạng đẹp, với các đường biên không có các tiếp tuyến. Lý thuyết về fractal là rất sống động do những suy luận toán học đẹp đẽ, và chúng ta sẽ tiếp xúc với nó trong Mục 3.7.

Tôi hy vọng bạn có một nhận định rõ ràng về các định nghĩa cơ bản sau của giải tích:

(1) ***Giới hạn ($n \to \infty$ hoặc $x \to a$)***
(2) ***Tính liên tục (tại $x = a$)***
(3) ***Đạo hàm (tại $x - a$).***

Những định nghĩa này đưa chúng ta quay trở lại ϵ và δ, nhưng hiếm khi chúng ta phải dùng đến chúng quá nhiều. Tương tự như việc kinh tế học mô tả nhiều giao dịch, hay sử học mô tả nhiều sự kiện, một hàm số cũng được mô tả bởi nhiều giá trị $f(x)$. Một vài điểm có thể mang trong mình sự đặc biệt chẳng hạn như những cuộc khủng hoảng thị trường hay các cuộc chiến hay các điểm gian đoạn. Tại các điểm khác, df/dx lại là kim chỉ nam tốt nhất để tiếp cận hàm số.

Chương này kết thúc với hai việc chính yếu về ***một hàm liên tục trên một khoảng đóng***. Xét khoảng $a \leqslant x \leqslant b$, được viết đơn giản là $[a, b]$.[15]. Tại các điểm mút a và b, chúng ta đòi hỏi $f(x)$ tiến tới $f(a)$ và $f(b)$.

TÍNH CHẤT GIÁ TRỊ CỰC TRỊ. Một hàm liên tục trên một khoảng đóng hữu hạn $[a, b]$ có một giá trị cực đại M và một giá trị cực tiểu m. Có các điểm $x_{\max}$ và $x_{\min}$ thuộc $[a, b]$ mà tại đó hàm số đạt được giá trị cực đại và giá trị cực tiểu này:

$$f(x_{\max}) = M \geqslant f(x) \geqslant f(x_{\min}) = m \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } [a, b].$$

TÍNH CHẤT GIÁ TRỊ TRUNG GIAN. Nếu số F nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, có một điểm c giữa a và b để $f(c) = F$. Như vậy nếu F nằm giữa cực tiểu m và cực đại M, có một điểm c giữa $x_{\min}$ và $x_{\max}$ để $f(c) = F$.

Các ví dụ cho chúng ta thấy lý do tại sao chúng ta yêu cầu phải có các đoạn đóng và các hàm liên tục. Đối với $0 < x \leqslant 1$, hàm số $f(x) = x$ không bao giờ đạt được cực tiểu (không) của nó. Nếu chúng ta làm cho khoảng trở thành khoảng đóng bằng cách xác định $f(0) = 3$ (gián đoạn), cực tiểu vẫn không được đạt tới. Do điểm gián đoạn nhảy, nên giá trị trung gian $F = 2$ cũng không được đạt tới. Chúng ta không thể lờ đi ý tưởng về tính liên tục, nhất là sau khi Cauchy xác định ý tưởng về một giới hạn.

BÀI TẬP 2.7

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Tính liên tục đòi hỏi __a__ của $f(x)$ tồn tại khi $x \to a$ và bằng __b__. Lý do $x/|x|$ không liên tục tại $x = 0$ là __c__. Hàm số này có các giới hạn __d__. Lý do $1/\cos x$ gián đoạn tại __e__ là __f__. Lý do $\cos(1/x)$ gián đoạn tại $x = 0$ là __g__. Hàm số $f(x) =$ __h__ có một cực điểm đơn tại $x = 3$, tại đó f^2 có một cực điểm __i__.

Lũy thừa x^n là liên tục tại mọi x với điều kiện n là __j__. Nó không có đạo hàm tại $x = 0$ khi n là __k__. $f(x) = \sin(-x)/x$ tiến tới __l__ khi $x \to 0$, nên đây là một hàm __m__ với điều kiện chúng ta xác định $f(0) =$ __n__. Một "hàm liên tục" phải là liên tục tại tất cả __o__. Một "hàm số khả liên tục" có thể được mở rộng cho mỗi x để __p__.

Nếu f có một đạo hàm tại $x = a$, khi đó f nhất thiết là __q__ tại $x = a$. Đạo hàm kiểm soát tốc độ $f(x)$ tiến tới __r__. Trên một khoảng đóng $[a, b]$, một f liên tục có tính chất giá trị __s__ và tính chất giá trị __t__. Nó đạt __u__ M của nó và __v__ m của nó, và nó nhận tất cả các giá trị __w__.

Trong Bài tập 2.7.1-2.7.20, tìm các số c để $f(x)$ trở thành (A) một hàm liên tục và (B) một hàm khả vi. Trong một trường hợp này, $f(x) \to f(a)$ tại mỗi điểm, trong trường hợp kia $\Delta f/\Delta x$ có một giới hạn tại mỗi điểm.

2.7.1. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 1 \\ c & x \geqslant 1 \end{cases}$

2.7.2. $f(x) = \begin{cases} \cos^3 x & x \neq \pi \\ c & x = \pi \end{cases}$

2.7.3. $f(x) = \begin{cases} cx & x < 0 \\ 2cx & x \geqslant 0 \end{cases}$

2.7.4. $f(x) = \begin{cases} cx & x < 1 \\ 2cx & x \geqslant 1 \end{cases}$

[15]Khoảng $[a, b]$ là ***đóng*** (gồm cả các điểm mút). Khoảng (a, b) là ***mở*** (không tính hai điểm mút a và b). Khoảng vô hạn $[0, \infty)$ chứa mọi $x \geqslant 0$.

2.7.5. $f(x)=\begin{cases} c+x & x<0 \\ c^2+x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$

2.7.6. $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\neq c \\ -8 & x=c \end{cases}$

2.7.7. $f(x)=\begin{cases} 2x & x<c \\ x+1 & x\geqslant c \end{cases}$

2.7.8. $f(x)=\begin{cases} x^c & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

2.7.9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2} & x\neq 0 \\ c & x=0 \end{cases}$

2.7.10. $f(x)=\begin{cases} x+c & x\leqslant c \\ 1 & x>c \end{cases}$

2.7.11. $f(x)=\begin{cases} c & x\neq 4 \\ \dfrac{1}{x^3} & x=4 \end{cases}$

2.7.12. $f(x)=\begin{cases} c & x\leqslant 0 \\ \sec x & x\geqslant 0 \end{cases}$

2.7.13. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+c}{x-1} & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$

2.7.14. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-c}{x-c} & x\neq c \\ 2c & x=c \end{cases}$

2.7.15. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & x\neq 0 \\ c & x=0 \end{cases}$

2.7.16. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant c \\ 2x & x>c \end{cases}$

2.7.17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{c+\cos x}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

2.7.18. $f(x)=|x+c|$

2.7.19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(\sin x-x)}{x^c} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

2.7.20. $f(x)=\left|x^2+c^2\right|$

Xây dựng hàm số $f(x)$ của riêng bạn với những sự gián đoạn sau tại $x=1$.

2.7.21. Gián đoạn bỏ được

2.7.22. Dao động vô hạn

2.7.23. Giới hạn khi $x\to 1^+$ tồn tại, giới hạn khi $x\to 1^-$ không tồn tại

2.7.24. Một cực điểm bội hai

2.7.25. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=4+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

2.7.26. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ nhưng $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=0$

2.7.27. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=5$

2.7.28. Phát biểu "$3x\to 7$ khi $x\to 1$" là sai. Chọn một số ϵ mà đối với nó, chúng ta không tìm được giá trị δ nào. Phát biểu "$3x\to 3$ khi $x\to 1$" là đúng. Đối với $\epsilon=\dfrac{1}{2}$, chọn một δ phù hợp.

2.7.29. Có bao nhiêu đạo hàm $f', f'', \ldots$ là các hàm khả liên tục?
(a) $f=x^{3/2}$
(b)$f=x^{3/2}\sin x$
(c)$f=(\sin x)^{5/2}$

2.7.30. Tìm các giới hạn một bên tại những điểm mà tại đó không có giới hạn hai bên. Đưa ra công thức ba-khoảng đối với hàm số (c).
(a) $\dfrac{|x|}{7x}$
(b) $\sin|x|$
(c) $\dfrac{d}{dx}\left|x^2-1\right|$

2.7.31. Cho $f(1)=1$ và $f(-1)=1$ và $f(x)=(x^2-x)/(x^2-1)$ trong trường hợp còn lại. Quyết định liệu f có là liên tục hay không tại

(a) $x=1$
(b) $x=0$
(c) $x=-1$.

2.7.32 (*). Cho $f(x)=x^2\sin 1/x$ đối với $x\neq 0$ và $f(0)=0$. Nếu các giới hạn tồn tại, tìm
(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
(b) df/dx tại $x=0$
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

2.7.33. Nếu $f(0)=0$ và $f'(0)=3$, sắp xếp các hàm số sau từ nhỏ nhất đến lớn nhất khi x giảm về không:

$$f(x),\qquad x,\qquad xf(x),$$
$$f(x)+2x,\qquad 2(f(x)-x),\qquad (f(x))^2.$$

2.7.34. Tạo ra một hàm không liên tục $f(x)$ mà $f^2(x)$ lại là liên tục.

2.7.35. ***Đúng hay Sai***, với một ví dụ để minh hoạ:
(a) Nếu $f(x)$ là liên tục tại mọi x, nó có một giá trị cực đại M.
(b) Nếu $f(x)\leqslant 7$ đối với mọi x, khi đó f đạt cực đại của nó.

(c) Nếu $f(1) = 1$ và $f(2) = -2$, khi đó $f(x) = 0$ tại đâu đó.

(d) Nếu $f(1) = 1$ và $f(2) = -2$ và f là liên tục trên $[1, 2]$, khi đó $f(x) = 0$ tại đâu đó trong khoảng đó.

2.7.36. Các hàm số $\cos 2x$ và $2x$ là liên tục. Chứng tỏ bằng tính chất ________ rằng $\cos x = 2x$ tại điểm nào đó giữa 0 và 1.

2.7.37. Chứng tỏ bằng ví dụ rằng các phát biểu sau là sai:

(a) Nếu một hàm số đạt cực đại và cực tiểu, khi đó nó là liên tục.

(b) Nếu $f(x)$ đạt cực đại và cực tiểu và nhận mọi giá trị giữa $f(0)$ và $f(1)$, nó liên tục tại $x = 0$.

(c) (chủ yếu dành cho người dạy) Nếu $f(x)$ có tính chất giá trị trung gian giữa tất cả các điểm a và b, nó phải là liên tục.

2.7.38. Giải thích bằng lời và bằng một đồ thị lý do tại sao $f(x) = x \sin(1/x)$ là liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$. Đặt $f(0) = 0$.

2.7.39. Hàm số nào sau đây là *khả liên tục*, và tại sao?

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \cos x & x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin 1/x & x < 0 \\ \cos 1/x & x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \frac{x}{\sin x} \text{ khi } \sin x \neq 0$$

$$f_4(x) = x^0 + 0^{x^2}$$

2.7.40. Giải thích sự khác nhau giữa một hàm liên tục và một hàm khả liên tục. Liệu một hàm liên tục có phải luôn là khả liên tục hay không?

2.7.41. $f(x)$ là bất kỳ hàm liên tục nào với $f(0) = f(1)$.

(a) Vẽ một $f(x)$ điển hình. Đánh dấu nơi $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

(b) Giải thích lý do tại sao $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ có $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$.

(c) Suy ra từ (b) rằng (a) là luôn có thể: *Phải* có một điểm mà tại đó $g(x) = 0$ và $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

2.7.42. Tạo ra một $f(x)$ mà chỉ liên tục tại $x = 0$.

2.7.43. Nếu $f(x)$ là liên tục và $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ đối với mọi x, khi đó có một điểm mà tại đó $f(x^*) = x^*$. Giải thích bằng một đồ thị và chứng minh bằng định lý giá trị trung gian.

2.7.44. Trong định nghĩa ϵ-δ của một giới hạn, thay đổi $0 < |x - a| < \delta$ thành $|x - a| < \delta$. Tại sao $f(x)$ bây giờ lại là *liên tục* tại $x = a$?

2.7.45. Một hàm số có ________ tại $x = 0$ khi và chỉ khi $(f(x) - f(0))/x$ là ________ tại $x = 0$.

CHươNG 3

Các Ứng dụng của Đạo hàm

Chương 2 tập trung vào việc tính toán các đạo hàm. Chương này tập trung vào việc *dùng* chúng. Các tính toán của chúng ta sinh ra dy/dx đối với các hàm số được xây dựng từ x^n và $\sin x$ và $\cos x$. Biết được hệ số góc, và nếu cần thiết biết luôn đạo hàm cấp hai, chúng ta có thể trả lời những câu hỏi về $y = f(x)$, nhưng câu hỏi này đã đặt nền móng của giải tích :

(1) y thay đổi như thế nào khi x thay đổi ?
(2) Giá trị nào là giá trị cực đại của y? Hoặc cực tiểu?
(3) Bạn làm thế nào để phân được một cực đại và một cực tiểu, bằng cách dùng đạo hàm?

Thông tin trong dy/dx là hoàn toàn mang tính *địa phương*. Nó cho biết những gì đang xảy ra lân cận điểm đang xét chứ không thể giúp chúng ta ở những điểm khác. Trong Chương 2, Δx và Δy tiến tới 0. Bây giờ chúng ta muốn chúng tiến tới không nữa. Thông tin địa phương giải thích bức tranh lớn hơn, ***bởi vì*** Δy ***xấp xỉ*** dy/dx ***lần*** Δx.

Bài toán được đặt ra ở đây là kết nối cái hữu hạn với cái cực vi—hệ số góc trung bình với hệ số góc tức thời. Những hệ số góc này gần bằng nhau, và đôi khi chúng thực sự bằng nhau. Sự tồn tại của các điểm dấu bằng xảy ra được đảm bảo bởi Định lý Giá trị Trung bình—định lý này là sự kết nối địa phương-toàn cục nằm tại tâm điểm của giải tích vi phân. Nhưng chúng ta không thể dự đoán nơi dy/dx bằng $\Delta y/\Delta x$. Vì vậy chúng ta bây giờ tìm những cách khác để khôi phục một hàm số từ các đạo hàm của nó—hay để ước lượng quãng đường từ vận tốc và gia tốc.

Việc chúng ta tìm hiểu về y từ dy/dx có vẻ khá gây ngạc nhiên. Tất cả những gì chúng ta đã và đang làm cho đến nay đều đi theo cách khác chứ không đi theo hướng này! Chúng ta đã phải vật lộn với y để rút ra được dy/dx. Bây giờ chúng ta lại dùng dy/dx để nghiên cứu y. Đời là thế. Có lẽ đây chính là cuộc đời, phải dựa vào những thế hệ sau để hiểu thế hệ trước.

3.1. Xấp xỉ Tuyến tính

Chúng ta đã bắt đầu cuốn sách này với một đường thẳng $f = vt$. Quãng đường là tuyến tính khi vận tốc là hằng. Ngay khi v bắt đầu thay đổi, $f = vt$ không còn đúng nữa. Chúng ta sẽ chọn vận tốc nào, khi $v(t)$ là không hằng nữa? Giải pháp là lấy những khoảng thời gian rất ngắn, trong những khoảng này v gần như là hằng:

$$\begin{aligned} f &= vt && \textit{là hoàn toàn sai} \\ \Delta f &= v\Delta t && \textit{là gần đúng} \\ df &= vdt && \textit{là hoàn toàn đúng.} \end{aligned}$$

Trong một khoảnh khắc ngắn ngủi, hàm số $f(t)$ là tuyến tính—và nằm khá sát tiếp tuyến của nó.

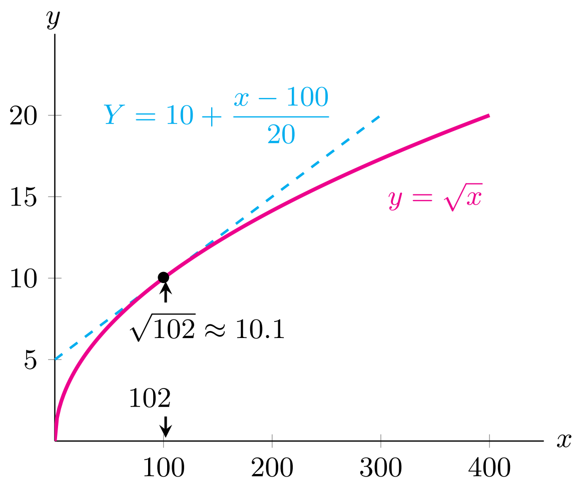
Trong Mục 2.3, chúng ta đã tìm thấy tiếp tuyến của $y = f(x)$. Tại $x = a$, hệ số góc của đường cong và hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(a)$. Đối với các điểm trên tiếp tuyến, bắt đầu tại $f(a)$. Cộng với hệ số góc lần "sự thay đổi" $x - a$:

(3.1.1) $$Y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Chúng ta viết một chữ cái in hoa Y đối với tiếp tuyến và một chữ cái in thường y đối với đường cong. Ý nghĩa của việc dùng tiếp tuyến tại một điểm a là các điểm trên tiếp tuyến và các điểm trên đường thẳng rất gần với nhau (*với điều kiện là chúng ta không di chuyển quá xa điểm* a):

(3.1.2) $$y \approx Y \text{ hay } f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Đây là toàn bộ mục đích của ***xấp xỉ tuyến tính***. Hình 3.1.1 cho thầy hàm căn bậc hai $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến của nó tại $x = a = 100$. Tại điểm $y = \sqrt{100} = 10$, hệ số góc là $1/2\sqrt{x} = 1/20$. Bảng bên cạnh hình vẽ so sánh $y(x)$ với $Y(x)$.



x	Y	$y = \sqrt{x}$
100	10	10
$\longrightarrow$ 102	10.1	10.0995
110	10.5	10.49
200	15	14.1
400	25	20

Hình 3.1.1. $Y(x)$ là xấp xỉ tuyến tính đối với $\sqrt{x}$ gần $x = a = 100$.

Độ chính xác sẽ kém dần khi x dần rời xa 100. Tiếp tuyến dần tách khỏi đường cong. Mũi tên trỏ tới một xấp xỉ khá tốt tại 102, và tại 1001 xấp xỉ thậm chí còn tốt hơn nữa. Trong ví dụ này, Y lớn hơn y—đường thẳng nằm phía trên đường cong. Hệ số góc của đường thẳng vẫn là hằng, và hệ số góc của đường cong giảm dần. Một đường cong như vậy sẽ sớm được gọi là "lõm dưới," và tiếp tuyến của nó nằm phía trên nó.

Nhìn lại một lần nữa tại $x = 102$, tại đó xấp xỉ là tốt. Trong Chương 2, khi chúng ta tiếp cận dy/dx, chúng ta đã bắt đầu với $\Delta y/\Delta x$:

(3.1.3) $$\text{hệ số góc} \approx \frac{\sqrt{102} - \sqrt{100}}{102 - 100}.$$

Bây giờ đổi ngược lại! Hệ số góc là $1/20$. ***Thứ mà chúng ta không biết là*** $\sqrt{102}$:

(3.1.4) $$\sqrt{102} \approx \sqrt{100} + (\text{hệ số góc}).(102 - 100).$$

Bạn thực hiện với những gì bạn có. Trước đây, chúng ta không biết dy/dx, nên chúng ta đã dùng 3.1.3. Bây giờ khi đã thành thạo với dy/dx, chúng ta dùng 3.1.4. Sau khi đã hoàn toàn tính được $y' = 1/20$, tiếp tuyến nằm gần $\sqrt{x}$ đối với mỗi số gần 100. Khi đó những số gần 100 có dạng $100 + \Delta x$, chú ý sai số trong xấp xỉ là một bình phương:

$$\left(\sqrt{100} + \frac{1}{20}\Delta x\right)^2 = 100 + \Delta x + \frac{1}{400}(\Delta x)^2.$$

Đáp án được mong muốn là $100 + \Delta x$, và chỉ sai khác số hạng sau cùng có liên quan đến $(\Delta x)^2$. Ý nghĩa của xấp xỉ tuyến tính là bỏ qua tất cả các số hạng sau Δx.

Không có điều gì kỳ diệu về $x = 100$, ngoại trừ việc căn bậc hai của nó là một số nguyên. Những điểm khác và những hàm số khác cho phép $y \approx Y$. Tôi muốn diễn đạt ý tưởng này theo những ký hiệu khác. Thay vì bắt đầu từ a và đi đến x, chúng ta bắt đầu từ a và đi một quãng đường Δx đến $x + \Delta x$. Các chữ cái tuy khác nhau nhưng ý nghĩa toán lại giống nhau.

PHÁT BIỂU 3.1.1. Tại bất kỳ điểm x nào, và đối với bất kỳ hàm trơn $y = f(x)$ nào,

$$\text{hệ số góc tại } x \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.1.5}$$

Đối với xấp xỉ của $f(x + \Delta x)$, nhân cả hai vế bởi bởi Δx và cộng $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + (\text{hệ số góc tại } x)(\Delta x). \tag{3.1.6}$$

VÍ DỤ 3.1.1. ***Một xấp xỉ tuyến tính quan trọng***: $(1+x)^n \approx 1 + nx$ đối với x gần 0.

VÍ DỤ 3.1.2. ***Một xấp xỉ tuyến tính quan trọng thứ hai***: $1/(1+x)^n \approx 1 - nx$ đối với x gần 0.

THẢO LUẬN. Những ví dụ này thực sự tương tự nhau. Bằng cách thay đổi n thành $-n$ trong Ví dụ 1, chúng ta thu được Ví dụ 3.1.2. Đây là những xấp xỉ tuyến tính dùng các hệ số góc n và $-n$ tại $x = 0$:

$$(1+x)^n \approx 1 + (\text{hệ số góc tại } 0) \times (x - 0) = 1 + nx.$$

Đây là điều tương tự xảy ra đối với $f(x) = x^n$. Điểm cơ sở (điểm x) trong phương trình 3.1.6 bây giờ là 1 hoặc x:

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \qquad\qquad (x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

Để thấy rõ hơn, dưới đây là những con số cụ thể. Đối vớ $n = 3$ và -1 và 100, lấy $\Delta x = .01$:

$$(1.01)^3 \approx 1.03 \qquad\qquad \frac{1}{1.01} \approx 0.99 \qquad\qquad (1+\frac{1}{100})^{100} \approx 2.$$

Trên thực tế, con số sau cùng không chính xác mấy. Luỹ thừa thứ 100 là quá nhiều. Xấp xỉ tuyến tính đưa ra $1 + 100\Delta x = 2$, nhưng một chiếc máy tính cầm tay lại đưa ra $(1.01)^{100} = 2.7\ldots$. Con số này gần bằng với e, con số quan trọng nhất trong Chương 6. Công thức nhị thức cho thấy lý do tại sao xấp xỉ lại thất bại:

$$(1+\Delta x)^{100} 1 + 100\Delta x + \frac{100.99}{2}(\Delta x)^2 + \cdots.$$

Xấp xỉ tuyến tính bỏ qua số hạng chứa $(\Delta x)^2$. Đối với $\Delta x = 1/100$, sai số đó gần bằng $1/2$. Sai số này quá lớn để bỏ đi. Sai số chính xác là $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(c)$, tại đó Định lý Giá trị Trung bình trong Mục 3.8 đặt c giữa x và $x + \Delta x$. Bạn đã thấy ý nghĩa của toàn bộ sự việc:

> $y - Y$ ***có cùng bậc với*** $(\Delta x)^2$***. Xấp xỉ tuyến tính có sai số bậc hai.***

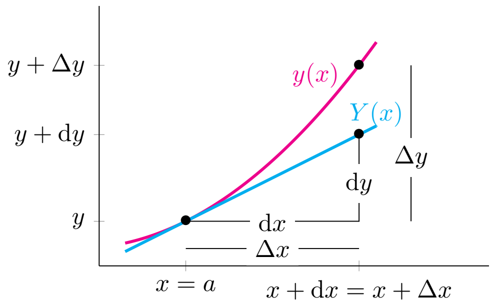
Vi phân

Còn một ký hiệu nữa cần được quan tâm đối với xấp xỉ tuyến tính. Chúng ta phải đề cập đến ký hiệu này, bởi vì nó thường được dùng. Ký hiệu này vừa gợi mở vừa khó hiểu—nó giữ cùng các ký hiệu dx và dy xuất hiện trong đạo hàm. Trước đó chúng ta đã nhấn mạnh đi nhấn mạnh lại rằng dy/dx không là một phân số thông thường[1]. Cho đến đoạn này, chúng ta vẫn xem dx và dy không có ý nghĩa gì cả nếu chúng đứng độc lập với nhau. Tuy nhiên, bây giờ chúng lại trở thành các biến riêng biệt, tương tự như x và y nhưng với những tên gọi khác. Những đại lượng dx và dy này được gọi là các ***vi phân***.

Các ký hiệu dx và dy đo sự thay đổi dọc theo tiếp tuyến. Chúng thực hiện đối với xấp xỉ $Y(x)$ đúng những gì Δx và Δy thực hiện đối với $y(x)$. Như vậy cả dx và Δx đều đo khoảng cách theo phương ngang.

Hình 3.1.2 có $\Delta x = dx$. Nhưng số gia trong y và số gia trong Y là không bằng nhau. Một cái có sự thay đổi là Δy (chính xác đối với hàm số). Cái còn lại có sự thay đổi là dy (chính xác đối với tiếp tuyến). ***Vi phân*** dy ***bằng với*** Δy, ***sự thay đổi dọc theo tiếp tuyến***. Nơi nào Δy là sự thay đổi thực sự, dy là xấp xỉ tuyến tính $(dy/dx)dx$ của nó.

Bạn thường thấy dy được viết dưới dạng $f'(x)dx$.



$\Delta y =$ số gia trong y (cùng đồ thị)

$\mathrm{d}y =$ số gia trong Y (cùng tiếp tuyến)

HÌNH 3.1.2. Xấp xỉ tuyến tính cho Δy là $dy = f'(x)dx$.

VÍ DỤ 3.1.3. $y = x^2$ có $dy/dx = 2x$ nên $dy = 2x\,dx$. Bảng dưới đây có điểm cơ sở $x = 2$. Dự đoán dy sai khác với giá trị Δy thực bởi một lượng đúng bằng $(\Delta x)^2 = 0.01$ và 0.04 và 0.09.

	dx	dy	Δx	Δy	
$y = x^2$	.1	0.4	.1	0.41	$\Delta y = (2+\Delta x)^2 - 2^2 dy$
$dy = 4\,dx$	.2	0.8	.2	0.84	$\Delta y = 4\Delta x + (\Delta x)^2$
	.3	1.2	.3	1.29	

Vi phân $dy = f'(x)dx$ là phù hợp với đạo hàm $dy/dx = f'(x)$. Chúng ta cuối cùng có $dy = (dy/dx)dx$, nhưng điều này không thực sự rõ ràng như vẻ bề ngoài! Nó giống như một sự triệt tiêu—theo sự xác định, quả thật đúng là như vậy. Chúng ta hoàn toàn có thể dùng các ký hiệu mới, nhưng dx và dy có hai ưu điểm: chúng dẫn dắt chúng ta đi theo những bước nhỏ và chúng thoả mãn $dy = f'(x)dx$. Dưới đây là ba ví dụ và ba quy tắc:

[1] Có là phân số hay không, đều không được triệt tiêu d.

$$3d(x^n) = nx^{n-1}dx \qquad\qquad d(f+g) = df + dg$$
$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad\qquad d(cf) = c\,df$$
$$d(\tan x) = \sec^2 x \qquad\qquad d(fg) = f\,dg + g\,df$$

Khoa học và kỹ thuật và hầu như tất cả các ứng dụng của toán học đều phụ thuộc vào xấp xỉ tuyến tính. Hàm thực sự được "***tuyến tính hóa***," bằng cách dùng hệ số góc v của nó:

Việc tăng thời gian một lượng Δt sẽ làm tăng tăng quãng đường một lượng $\approx v\Delta t$

Việc tăng lực một lượng Δf sẽ làm tăng sự đổi dạng một lượng $\approx v\Delta f$

Việc tăng sản phẩm một lượng Δp sẽ làm tăng giá trị của nó một lượng $\approx v\Delta p$.

Mục tiêu của động học hay tĩnh học hay kinh tế học đều là để dự báo nhân tử v này—đây là đạo hàm mà bằng hệ số góc của tiếp tuyến. Nhân tử đưa ra một *dự báo địa phương* về sự thay đổi trong hàm số. Định luật chính xác phải là phi tuyến—nhưng định luật của Ohm và định luật của Hooke và định luật của Newton đều là những xấp xỉ tuyến tính.

SỰ THAY ĐỔI TUYỆT ĐỐI, SỰ THAY ĐỔI TƯƠNG ĐỐI, SỰ THAY ĐỔI PHẦN TRĂM

Sự thay đổi Δy hay Δx có thể được đo theo ba cách. Sự thay đổi Δx cũng vậy:

Sự thay đổi tuyệt đối	Δf	Δx
Sự thay đổi tương đối	$\dfrac{\Delta f}{f(x)}$	$\dfrac{\Delta x}{x}$
Sự thay đổi phần trăm	$\dfrac{\Delta f}{f(x)} \times 100$	$\dfrac{\Delta x}{x} \times 100$

Sự thay đổi tương đối thường mang nhiều ý nghĩa thực tế hơn sự thay đổi tuyệt đối. Nếu chúng ta đo được quãng đường tới mặt trăng với sai số không quá ba dặm, điều này sẽ ấn tượng hơn nhiều so với việc đo được chiều cao của ta với sai số không quá một inch. Dưới góc nhìn các giá trị tuyệt đối, một inch ngắn hơn ba dặm. Nhưng dưới góc nhìn các gia trị tương đối, sai số của ba dặm là nhỏ hơn nhiều:

$$\frac{3\,\text{miles}}{300,000\,\text{miles}} < \frac{1\,\text{inch}}{70\,\text{inches}} \text{ hay } .001\% < 1.4\%.$$

Ví dụ 3.1.4. Bán kính của trái đất là $r = 4000$ mile với sai số không quá 80 mile.

(a) Tìm biến phân dV trong thể tích $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, bằng cách dùng xấp xỉ tuyến tính, .

(b) Tính biến phân tương đối dr/r và dV/V và $\Delta V/V$.

Chứng minh. Nhiệm vụ của giải tích là sinh ra đạo hàm. Sau khi $dV/dr = 4\pi r^2$, nhiệm vụ của giải thích đã hoàn thành. biến phân theo thể tích là $dV = 4\pi(4000)^2(80)$ mile khối. Một biến phân tương đối 2% trong r sẽ kéo theo một biến phân tương đối 6% trong V:

$$\frac{dr}{r} = \frac{80}{4000} = 2\% \qquad\qquad \frac{dV}{V} = \frac{4\pi(4000)^2(80)}{4\pi(4000)^3/3} = 6\%.$$

Nếu không có giải tích, chúng phải cần đến thể tích chính xác tại $r = 4000 + 80$ (đồng thời tại $r = 3920$):

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi(4080)^3/3 - 4\pi(4000)^3/3}{4\pi(4000)^3/3} \approx 6.1\%.$$

Một bình luận về $dV = 4\pi r^2 dr$. Đây là (điện tích hình cầu) lần (số gia trong bán kính). Nó là thể tích của một lớp vỏ mỏng quanh một hình cầu. Lớp vỏ được cộng dồn thêm khi bán kính tăng thêm một lượng dr. Giá trị chính xác của $\Delta V/V$ là 3917312/640000%, nhưng giải tích chỉ cần lấy giá trị 6%. □

BÀI TẬP 3.1

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Trên đồ thị, một xấp xỉ tuyến tính được cho bởi __a__ tuyến. Tại $x = a$, phương trình đối với đường thẳng đó là $Y = f(a) +$ __b__. Gần $x = a = 10$, xấp xỉ tuyến của $y = x^3$ là $Y = 1000 +$ __c__. Tại $x = 11$, giá trị chính xác là $(11)^3 =$ __d__. Xấp xỉ là $Y =$ __e__. Trong trường hợp này, $\Delta y =$ __f__ và $dy =$ __g__. Nếu chúng ta biết $\sin x$, khi đó để ước lượng $\sin(x + \Delta x)$ chúng ta cộng với __h__.

Biểu diễn theo x và Δx, xấp xỉ tuyến tính là $f(x + \Delta x) \approx f(x) +$ __i__. Sai số có bậc $(\Delta x)^p$ hay $(x - a)^p$ với $p =$ __j__. Vi phân dy bằng __k__ lần vi phân __l__. Những sự biến động này diễn ra dọc theo __m__ tuyến, trong khi Δy diễn ra dọc theo __n__.

Tìm xấp xỉ tuyến tính Y của $y = f(x)$ gần $x = a$:

3.1.1. $f(x) = x + x^4$, $a = 0$

3.1.2. $f(x) = 1/x$, $a = 2$

3.1.3. $f(x) = \tan x$, $a = \pi/4$

3.1.4. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/2$

3.1.5. $f(x) = x \sin x$, $a = 2\pi$

3.1.6. $f(x) = \sin^2 x$, $a = 0$

Tính 3.1.7-3.1.12 với sai số không quá .01 bằng cách chọn $f(x)$, lựa điểm cơ sở a, và tính $f(a) + f'(a)(x - a)$. Một máy tính cầm tay sẽ cho thấy sai số.

3.1.7. $(2.001)^n$

3.1.8. $\sin(.02)$

3.1.9. $\cos(.03)$

3.1.10. $(15.99)^{1/4}$

3.1.11. $1/.98$

3.1.12. $\sin(3.14)$

Tính sai số trong các xấp xỉ tuyến tính sau và so sánh với $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(x)$:

3.1.13. $(1.01)^3 \approx 1 + 3(.01)$

3.1.14. $\cos(.01) \approx 1 + 0(.01)$

3.1.15. $(\sin .01)^2 \approx 0 + 0(.01)$

3.1.16. $(1.01)^3 \approx 1 - 3(.01)$

3.1.17. $(1 + \frac{1}{10})^{10} \approx 2$

3.1.18. $\sqrt{8.99} \approx 3 + \frac{1}{6}(-.01)$

Xác nhận các xấp xỉ 3.1.19–3.1.21 bằng cách tính $f'(0)$:

3.1.19. $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

3.1.20. $1/\sqrt{1 - x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$ (dùng $f = 1/\sqrt{1 - u}$, rồi đặt $u = x^2$)

3.1.21. $\sqrt{c^2 + x^2} \approx c + \frac{1}{2}\frac{x^2}{c}$ (dùng $f(u) = \sqrt{c^2 + u}$, rồi đặt $u = x^2$)

3.1.22. Viết ra vi phân df đối với $f(x) = \cos x$ và $(x + 1)/(x - 1)$ và $(x^2 + 1)^2$.

Trong 23-27 tìm sự thay đổi tuyến tính dV trong thể tích hay dA trong diện tích bề mặt.

3.1.23. dV nếu các cạnh của hình lập phương thay đổi từ 10 thành 10.1.

3.1.24. dA nếu các cạnh của hình lập phương thay đổi từ x thành $x + dx$.

3.1.25. dA nếu bán kính của hình cầu thay đổi một lượng dr.

3.1.26. dV nếu một hình trụ tròn với $r = 2$ thay đổi chiều cao từ 3 thành 3.05 (nhắc lại $V = \pi r^2 h$).

3.1.27. dV nếu một hình trụ có chiều cao 3 thay đổi từ $r = 2$ thành $r = 1.9$. **Điểm cộng:** Hỏi dV nếu cả r và h đều thay đổi (dr và dh)?

3.1.28. Trong thuyết tương đối, khối lượng là $m_0/\sqrt{1-(v/c)}$ tại vận tốc v. Theo Bài toán 3.1.20, giá trị này gần bằng $m_0 +$ ________ đối với v nhỏ. Chứng tỏ rằng động năng $\frac{1}{2}mv^2$ và số gia trong khối lượng thỏa mãn phương trình Einstein $e = (\Delta m)c^2$.

3.1.29. Nhập 1.1 vào chiếc máy tính của bạn. Nhấn phím căn bậc hai 5 lần (chậm thôi). Điều gì xảy ra sau mỗi lần nhấn với chữ số đứng sau dấu thập phân? Điều này là bởi vì $\sqrt{1+x} \approx$ ________.

3.1.30. Trong Bài toán 3.1.29, những số bạn thấy nhỏ hơn $1.05, 1.025, \ldots$. Đạo hàm cấp hai của $\sqrt{1+x}$ là ________ nên xấp xỉ tuyến tính nằm phía trên đường cong.

3.1.31. Nhập 0.9 vào chiếc máy tính cầm tay của bạn và nhấn phím căn bậc hai 4 lần. Dự đoán điều gì sẽ xuất hiện ở lần nhấn thứ năm và nhấn thêm lần nữa. Bây giờ bạn có căn bậc ________ của 0.9. Có bao nhiêu chữ số thập phân trùng với $1 \cdot \frac{1}{32}(0.1)$?

3.2. Bài toán Cực đại và Bài toán Cực tiểu

Mục tiêu của chúng ta là tìm hiểu về $f(x)$ từ df/dx. Chúng ta bắt đầu với hai câu hỏi nhanh? Nếu df/dx dương, điều này nói lên điều gì về f? Nếu hệ số góc là âm, điều này được phản ánh trong hàm số như thế nào? Sau đó chúng ta tiếp tục với câu hỏi thứ ba, đây là một câu hỏi quan trọng:

Làm thế nào để nhận biết một ***cực đại*** hoặc ***cực tiểu***? Câu trả lời thông thường: ***Hệ số góc bằng không***.

Đây có thể là ứng dụng quan trọng nhất của giải tích, để đạt được $df/dx = 0$.

Chúng ta hãy chọn trả lời những câu hỏi dễ trước. Giả sử df/dx là *dương* đối với mỗi x nằm giữa a và b. Tất cả các đường tiếp tuyến đều đi từ dưới lên khi đi từ trái sang phải. *Hàm số $f(x)$ là **tăng** khi x đi từ a tới b.*

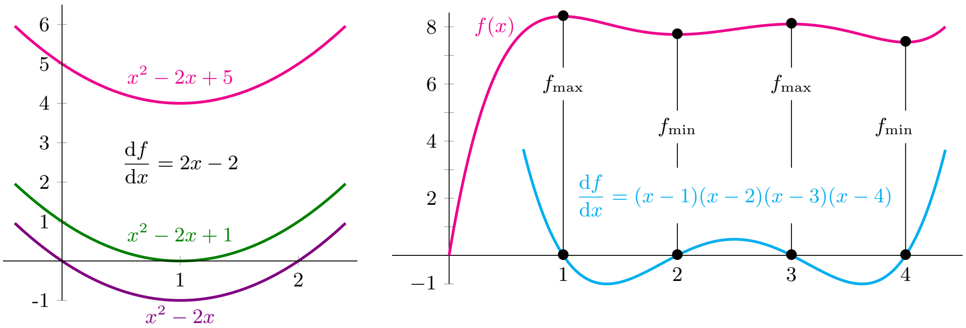
Phát biểu 3.2.1. Nếu $df/dx > 0$, khi đó $f(x)$ là *tăng*. Nếu $df/dx < 0$, khi đó $f(x)$ là *giảm*.

Để định nghĩa sự tăng và sự giảm, hãy nhìn vào bất kỳ hai điểm $x < X$ nào. "Sự tăng" đòi hỏi $f(x) < f(X)$. "Sự giảm" đòi hỏi $f(x) > f(X)$. ***Hệ số góc của một hàm số là dương không có nghĩa là hàm số đó phải là dương***. Bản thân hàm số có thể là dương hoặc âm.

Ví dụ 3.2.1. $f(x) = x^2 - 2x$ có hệ số góc $2x - 2$. Hệ số góc này là dương khi $x > 1$ và âm khi $x < 1$. Hàm số tăng sau khi $x = 1$, và giảm trước khi $x = 1$. Chúng ta nói rằng không cần tính $f(x)$ tại bất kỳ điểm nào! Parabola trong Hình 3.2.1 đi xuống tới cực tiểu của nó tại $x = 1$ và sau đó đi lên lại.

Ví dụ 3.2.2. Hàm $y = x^2 - 2x + 5$ có cùng hệ số góc. Đồ thị của nó là phép dời đồ thị của $y = 2x^2 - 2x$ lên trên 5 đơn vị, số 5 này biến mất hiện trong df/dx. Tất cả các hàm có hệ số góc $2x - 2$ đều là các parabola $y = x^2 - 2x + C$, những đồ thị này đều là các phép dời đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ lên trên hoặc xuống dưới tuỳ theo C. Một vài parabola cắt trục x (những giao điểm này đều có tọa độ x là các nghiệm của $f(x) = 0$). Các parabola khác nằm phía trên trục hoành. Các nghiệm cho $x^2 - 2x + 5 = 0$ là các số phức và chúng ta không thấy được chúng trên đồ thị. Parabole đặc biệt $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$. Nó có một "không điểm kép," trong đó $df/dx = 0$.

Ví dụ 3.2.3. Giả sử $df/dx = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Hệ số góc này là dương khi $x > 4$ và khi $x < 1$ ($df/dx = 24$ tại $x = 0$). Và df/dx là dương một lần nữa giữa khi x nằm giữa 2 và 3. Tại $x = 1, 2, 3, 4$ hệ số góc này bằng không và đồ thị của $f(x)$ đổi hướng.



HÌNH 3.2.1. Các hệ số góc là $-+$. Hệ số góc là $+-+-+$ nên f đi lên-xuống-lên-xuống-lên.

Ở đây $f(x)$ là một đa thức bậc năm, vì $f'(x)$ là đa thức bậc bốn. Đồ thị của f đi lên-xuống-lên-xuống-lên. Nó có thể cắt trục hoành năm lần. Nó phải cắt trục hoành ít nhất một lần (chẳng hạn như hàm số được cho). Khi cả những nghiệm phức cũng được chấp nhận, mỗi đa thức bậc năm đều có năm nghiệm.

Bạn có thể cảm thấy rằng "*hệ số góc dương kéo theo hàm tăng*" là hiển nhiên—có lẽ đúng là vậy. Nhưng vẫn còn điều tinh tế hơn nữa. Bắt đầu từ $df/dx > 0$ tại mỗi điểm *đơn*, chúng ta phải suy ra $f(X) > f(x)$ tại các *cặp* điểm. Đây là một câu hỏi "địa phương đến toàn cục," câu hỏi này sẽ được trả lời bởi Định lý Giá trị Trung bình. Câu hỏi này cũng có thể được để lại cho đến khi chúng ta biết đến Định lý Cơ sở của Giải tích: ***Hiệu*** $f(X) - f(x)$ ***bằng diện tích phía dưới của đồ thị của*** df/dx. Diện tích đó là dương, nên $f(X)$ lớn hơn $f(x)$.

CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

Giá trị x nào làm cho $f(x)$ lớn nhất có thể? Hàm số $f(x)$ là nhỏ nhất tại đâu? Khi chưa biết về giải tích, chúng ta quy những câu hỏi này về bài toán tính các giá trị của $f(x)$ và so sánh. Khi đã biết về giải tích, câu trả lời của những câu hỏi này lại nằm trong df/dx.

Giả sử cực đại hoặc cực tiểu nằm tại một điểm x cụ thể. Việc đồ thị có góc—và không có đạo hàm tại x là hoàn toàn có khả năng xảy ra. *Nhưng nếu df/dx tồn tại tại x, nó phải bằng không.* Tiếp tuyến song song với trục hoành. Các parabola trong Hình 3.2.1 thay đổi từ giảm sang tăng. Hệ số góc thay đổi từ âm sang dương. Tại điểm quan trọng này *hệ số góc bằng không*.

PHÁT BIỂU 3.2.2 (***Cực đại Địa phương hoặc Cực tiểu Địa phương***). Giả sử cực đại hoặc cực tiểu xảy ra tại một điểm x nằm bên trong một khoảng mà trong đó $f(x)$ và df/dx được xác định. Khi đó $f'(x) = 0$.

Từ "*địa phương*" nhấn mạnh khả năng $f(x)$ là lớn hơn hoặc nhỏ hơn trong một các khoảng khác. *Nhưng chúng ta chỉ chăm chăm nhìn vào khu vực lân cận x mà thôi*, và chúng ta dùng định nghĩa của df/dx.

Bắt đầu với $f(x + \Delta x) - f(x)$. Nếu $f(x)$ là cực đại, hiệu này là âm hoặc bằng không. Bước Δx có thể được tính bằng cách lấy x sau trừ x trước hoặc ngược lại:

$$\text{nếu } \Delta x > 0: \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\text{âm}}{\text{dương}} \leqslant 0 \text{ và trong giới hạn } \frac{df}{dx} \leqslant 0.$$
$$\text{nếu } \Delta x < 0: \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\text{âm}}{\text{âm}} \geqslant 0 \text{ và trong giới hạn } \frac{df}{dx} \geqslant 0.$$

Áp dụng cả hai lập luận. Cả hai kết luận $df/dx \leqslant 0$ và $df/dx \geqslant 0$ đều đúng. Như vậy $df/dx = 0$.

Có lẽ Richard Feynman là người đã trình bày điều trên một cách rõ ràng nhất. Ông ấy đã chỉ cho bạn bè thấy một đường cong bằng nhựa mà đã được tạo ra theo một cách đặc biệt—"dù bạn có xoay nó như thế nào đi nữa, tiếp tuyến tại điểm thấp nhất luôn song song với trục hoành." Người ta đã kiểm tra phát biểu này. Phát biểu này là đúng.

Chuyện thật như đùa của ngài Feynman![2] là một cuốn sách hay (nhưng khá thô về mặt toán học).

Ví dụ 3.2.4 (tiếp tục Ví dụ 3.2.3). Nhìn lại Hình 3.2.1b. Những điểm được chỉ ra không phải là các "điểm lên" hoặc "điểm xuống" mà là các "điểm uốn." Chúng là những ***điểm dừng***, tại đó $df/dx = 0$. Chúng ta thấy hai cực đại và hai cực tiểu. Không điểm nào trong số chúng là cực đại tuyển đối hoặc cực tiểu tuyệt đối, bởi vì $f(x)$ bắt đầu tại $-\infty$ và kết thúc tại $+\infty$.

Ví dụ 3.2.5. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ có hệ số góc $12x^2 - 12x^3$. Đạo hàm đó bằng không khi x^2 bằng x^3 , tại hai điểm $x = 0$ và $x = 1$. Để xem thử điểm nào là cực đại hay cực tiểu (địa phương hay toàn cục), bước đầu tiên là tính $f(x)$ tại các điểm dừng. Chúng ta thấy $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$.

Bây giờ nhìn vào đồ thị tại những điểm x có $|x|$ lớn. Đồ thị đi xuống tới $-\infty$ theo cả hai hướng. (Bạn có thể tính nhẩm tại $x = 1000$ và $x = -1000$ để dễ hình dung). Đối với x lớn, giá trị tuyệt đối của $-3x^4$ lớn hơn rất nhiều so với giá trị tuyệt đối của $4x^3$.

Chú ý. $f = 1$ là một cực đại tuyệt đối. $f = 0$ không là cực đại hoặc cực tiểu (địa phương hoặc toàn cục). Chúng ta phải chấp nhận trường hợp hợp ngoại lệ này, đó là một đường cong (hoặc một chiếc xe hơi) có thể dừng lại một lúc ($f' = 0$) và tiếp tục chạy cùng hướng với trước đó. Lý do là "không điểm kép" trong $12x^2-12x^3$, từ thừa số kép x^2.

Ví dụ 3.2.6. Xác định $f(x) = x + x^{-1}$ đối với $x > 0$. Đạo hàm $1 - 1/x^2$ của nó bằng không tại $x = 1$. Tại điểm đó, $f(1) = 2$ là giá trị cực tiểu. Mỗi tổng như $\frac{1}{3} + 3$ hoặc $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ đều lớn hơn $f_{\min} = 2$. Hình 3.2.2 cho thấy rằng *cực đại của $x + x^{-1}$ là* $+\infty$.[3]

Quan trọng. Cực đại luôn xảy ra tại một ***điểm dừng*** (tại đó $df/dx = 0$) hoặc một ***điểm nghi ngờ*** (không có đạo hàm) hoặc một ***điểm biên*** của miền xác định. Đây là ba loại ***điểm tới hạn***. Tất cả các cực đại và cực tiểu xảy ra tại các điểm tới hạn! Tại mỗi điểm khác $df/dx > 0$ hoặc $df/dx < 0$. Sau đây là quy trình phân loại các điểm tới hạn:

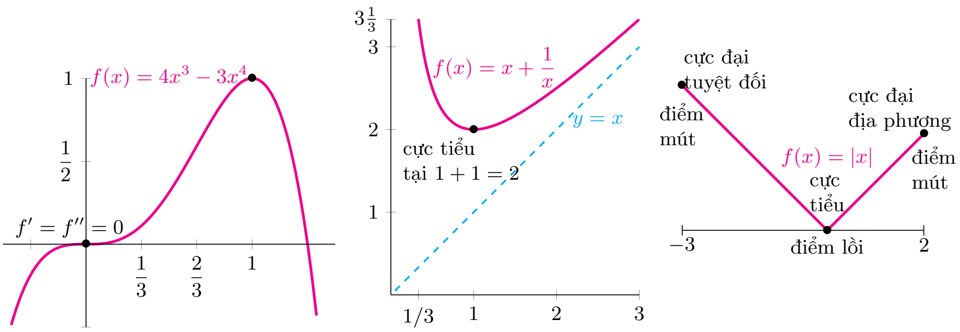
(1) Giải $df/dx = 0$ để tìm các điểm dừng của $f(x)$.
(2) Tính $f(x)$ tại các điểm tới hạn - điểm dừng, điểm nghi ngờ, điểm biên.
(3) Lấy cực đại hay cực tiểu của các giá trị tới hạn đó của $f(x)$.

Ví dụ 3.2.7 (***Giá trị tuyệt đối*** $f(x) = |x|$). Cực tiểu bằng không tại một điểm nghi ngờ. Cực đại là tại một điểm biên. Không có các điểm dừng.

Đạo hàm của $y = |x|$ không bao giờ bằng không. Hình 3.2.2 cho thấy cực đại và cực tiểu trên đoạn $[-3, 2]$. Đây là điển hình của các hàm tuyến tính tuyến tính từng khúc.

---

[2]Nd: Chuyện thật như đùa của ngài Feynman! (tiếng Anh: Surely You're Joking, Mr. Feynman!).
[3]Từ chính xác hơn được dùng là *tiến tới* khi $f(x) \to \infty$. Chúng ta không đạt được vô hạn. Nhưng tôi vẫn nói là "cực đại là vô cùng."



Hình 3.2.2. Các đồ thị của $4x^3 - 3x^4$ và $x - x^{-1}$. Kiểm tra các điểm nghi ngờ và các điểm biên.

Câu hỏi. *Liệu cực tiểu có bằng không khi hàm số không bao giờ đạt được* $f(x = 0)$ *hay không?*

Câu trả lời. Có, $f(x) = 1/(1+x)^2$ tiến tới không, nhưng không đạt được không khi $x \to \infty$.

Ghi chú 3.2.1. $x \to \pm\infty$ và $f(x) \to \pm\infty$ không xảy ra khi f là ***liên tục trên một khoảng đóng*** $a \leqslant x \leqslant b$. Khi đó $f(x)$ đạt được cực đại và cực tiểu của nó trên khoảng đó (*Định lý Giá trị Cực trị*). Nhưng trường hợp $x \to \infty$ và $f(x) \to \infty$ là quá quan trọng để bị bỏ qua. Bạn kiểm tra $x \to \infty$ bằng cách xét x lớn. Bạn nhận thấy $f(x) \to \infty$ khi đối với mỗi giá trị hữu hạn, đều tồn tại một x sao cho $f(x)$ lớn hơn giá trị hữu hạn đó.

Ghi chú 3.2.2. Lưu ý sự khác nhau giữa các *điểm* tới hạn (được chỉ định bởi x) và các *giá trị* tới hạn (được chỉ định bởi $f(x)$). Ví dụ $+x^{-1}$ có *điểm* cực tiểu $x = 1$ và *giá trị* cực tiểu là $f(1) = 2$.

CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU TRONG CÁC ỨNG DỤNG

Để tìm cực đại hoặc cực tiểu, chúng ta giải phương trình $f'(x) = 0$. Hệ số góc bằng không tại đỉnh và đáy của đồ thị. Ý tưởng là rất rõ—và sau đó kiểm tra các điểm nghi ngờ và các điểm biên. Nhưng thành thật mà nói, đây không phải là nơi bài toán bắt đầu.

Trong một ứng dụng thực tế, bước đầu tiên (thường là khó nhất) là chọn các ẩn số và *tìm hàm số*. Chính chúng ta mới là người quyết định x là gì và $f(x)$ là gì. Phương trình $df/dx = 0$ xuất hiện ở giai đoạn giữa trong quá trình giải quyết bài toán, chứ không phải là ở giai đoạn bắt đầu. Tôi sẽ bắt đầu một ví dụ mới, bằng một câu hỏi thay cho một hàm số.

Ví dụ 3.2.8. Bạn nên đi vào đường cao tốc ở đâu để có thời gian lái xe là ít nhất, nếu tốc độ cho phép của đường cao tốc là 60 mph và tốc độ cho phép của đường dẫn vào đường cao tốc là 30 mph?

Tôi biết rõ vấn đề này—sáng nào tôi chả gặp phải. Đường cao tốc Mass Pike[4] chạy thẳng tới MIT và tôi phải đi vào đường cao tốc này ở đâu đó. Có một ngõ vào gần đường Route 128 và còn một ngõ vào khác nữa. Tôi thường chọn đi vào từ ngõ thứ hai, nhưng bây giờ tôi lại chọn đi vào từ ngõ thứ nhất. Toán học sẽ giúp tôi quyết định xem đi vào từ ngõ nào sẽ nhanh hơn—có vài buổi sáng tôi lái xe đến MIT, tôi cảm thấy dài ơi là dài, dài đến nỗi mà tôi nghĩ chúng là các cực đại.

[4]Nd: Xa lộ thu phí Masachusetts (tiếng Anh: Massachusetts Turnpike, viết tắt: “Mas Pike” hoặc “the Pike”).

Hầu hết các mô hình đều được đơn giản hóa để giúp chúng ta tập trung vào ý tưởng then chốt. Chúng ta sẽ cho đi vào đường cao tốc được vào tại mọi điểm x (Hình 3.2.3). Thay vì chỉ có hai ngõ vào (một bài toán rời rạc), chúng ta sẽ có một sự lựa chọn liên tục (một bài toán giải tích). Hành trình có hai phần, tôi lần lượt đi trong phần thứ nhất và phần thứ hai tại tốc độ 30 và 60:

một quãng đường dài $\sqrt{a^2+x^2}$ từ nhà tôi cho đến ngõ vào đường cao tốc, được đi trong thời gian $\sqrt{a^2+x^2}/30$ giờ

một quãng đường dài $b-x$ từ ngõ vào đường cao tốc cho đến MIT, được đi trong thời gian $\dfrac{b-x}{60}$ giờ

Bài toán.

Cực tiểu hoá hàm số $f(x) = \text{tổng thời gian đi} = \dfrac{1}{30}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{1}{60}\dfrac{b-x}{60}$.

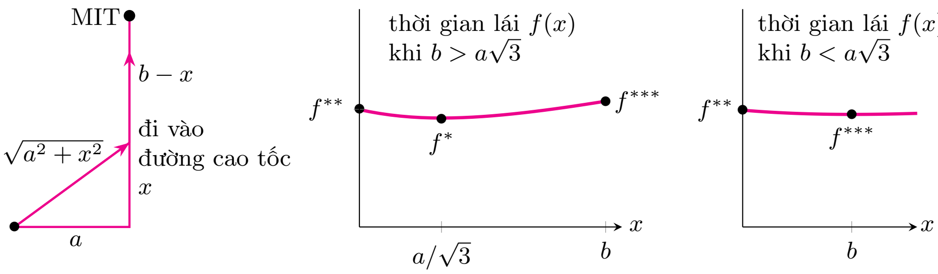
Chúng ta đã có hàm số $f(x)$. Bây giờ hãy dùng đến giải tích. Để tính đạo hàm của số hạng đầu tiên, chúng ta dùng quy tắc luỹ thừa: *đạo hàm của* $u^{1/2}$ *là* $\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du/dx$. Ở đây $u = a^2 + x^2$ có $du/dx = 2x$:

$$f'(x) = \frac{1}{30}\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - \frac{1}{60}. \tag{3.2.1}$$

Để giải $f'(x) = 0$, nhân bởi 60 và bình phương hai vế:

$$(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = 1 \text{ đưa ra } 2x = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ và } 4x^2 = a^2+x^2. \tag{3.2.2}$$

Như vậy $3x^2 = a^2$. Phương trình này có hai nghiệm, $x = a/\sqrt{3}$ và $x = -a/\sqrt{3}$. Nhưng một x âm sẽ có nghĩa là chiếc xe không đi vào đường cao tốc. Thực ra, f' *không bằng không* tại $x = -a/\sqrt{3}$. Nghiệm ngoại lai này xuất hiện khi chúng ta bình phương $2x$.



Hình 3.2.3. Đi vào đường cao tốc tại x cực tiểu hóa thời gian lái xe $f(x)$.

Tôi nhận thấy một điều đáng ngạc nhiên. Điểm dừng $x = a/\sqrt{3}$ không phụ thuộc vào b. Hằng số $b/60$ có xuất hiện trong tổng thời gian, nhưng lại biến mất trong df/dx. Bằng cách nào đó b phải xuất hiện trong đáp án, và đây là một lời nhắc nhở chúng ta phải hết sức thận trọng. Cực tiểu có thể xảy ra tại một điểm nghi ngờ hoặc một điểm biên. Những điểm mà là những điểm tới hạn khác của f, và đồ thị của ta có thể không thực tế. Chắc chắn ta kỳ vọng $x \leqslant b$, nếu không chúng ta chưa kịp đi vào đường cao tốc, chúng ta đã đi quá MIT rồi.

Chúng ta tiếp tục với giải tích. Tính thời gian lái xe $f(x)$ đối với một cửa ngỏ đi vào đường cao tốc tại $x^* = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$:

$$f(x) = \frac{1}{30}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} + \frac{1}{60}\Big(b - \frac{a}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{3}.a}{60} + \frac{b}{60} = f^*.$$

Căn bậc hai của $4a^2/3$ là $2a/\sqrt{3}$. Chúng ta kết hợp $2/30 - 1/60 = 3/60$ và chia bởi $\sqrt{3}$. ***Liệu giá trị dừng f^* này có là một cực tiểu hay không***? Bạn cũng phải nhìn vào các *điểm biên*:

$$\text{Bắt đầu tại } x = 0\text{: thời gian đi là: } a/30 + b/60 = f^{**},$$
$$\text{Bắt đầu tại } x = b\text{: thời gian đi là: } \sqrt{a^2 + b^2}/30 = f^{***}.$$

Phép so sánh $f^* < f^{**}$ là khá hiển nhiên. Chúng ta có thể đi vào đường cao tốc tại $x = 0$ nhưng hiển nhiên giải tích đã không chọn phương án này. Đạo hàm không bằng không tại $x = 0$. Thật không khôn ngoan khi đi vuông góc vào đường cao tốc.

Phép so sánh thứ hai có $x = b$. Chúng ta đi trực tiếp tới MIT tại tốc độ 30. Phương án cần phải được cân nhắc hết sức cẩn thận. Trong thực tế, phương án này là tối ưu khi b là nhỏ và a là lớn.

Phương án $x = b$ này có thể phát sinh bằng toán học theo hai cách. Nếu tất cả các cửa ngõ đều nằm giữa 0 và b, khi đó b là một ***điểm biên***. Nếu chúng ta đi vào đường cao tốc khi đã đi quá MIT, khi đó b là một ***điểm nghi ngờ***. Đồ thị trong Hình 3.2.3c có một góc tại $x = b$, tại đó đạo hàm nhảy. Lý do là quãng đường trên đường cao tốc là *giá trị tuyệt đối* $|b - x|$—không bao giờ âm.

Dù $x = b$ là điểm biên hay điểm nghi ngời, nó cũng là điểm tới hạn. x tối ưu nhỏ hơn $a/\sqrt{3}$ và b.

$$\text{nếu } \frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant b\text{: điểm dừng thắng, chúng ta đi vào tại } x = \frac{a}{\sqrt{3}}\text{, tổng thời gian là } f^*$$
$$\text{nếu } \frac{a}{\sqrt{3}} \geqslant b\text{: không có điểm dừng, chúng ta đi trực tiếp tới MIT, tổng thời gian là } f^{***}.$$

Trọng tâm của bộ môn giải tích nằm ở các "bài toán có lời." Tất cả kiến thức giải tích liên quan chỉ gói gọn trong vài hàng, tính f' và giải $f'(x) = 0$. Việc thiết lập công thức sẽ mất nhiều thời gian hơn. Bước 1 thường là như vậy:

(1) Biểu diễn đại lượng cần cực tiểu hóa hoặc cực đại hóa dưới dạng một hàm số $f(x)$. *Biến số x phải được chọn.*

(2) Tính $f'(x)$, giải $f'(x) = 0$, kiểm tra các điểm tới hạn để thu được $f_{\min}$ và $f_{\max}$.

Một bức hình minh họa của bài toán (và đồ thị của $f(x)$) sẽ giúp ích rất nhiều.

Ví dụ 3.2.9 (tiếp tục Ví dụ 3.2.8). Chọn x là một *góc* thay vì một quãng đường. Hình 3.2.4 cho thấy tam giác với góc x và cạnh a. Quãng đường lái xe tới đường cao tốc là $a \sec x$. Quãng đường lái xe trên đường cao tốc là $b - a\tan x$. Chia bởi các tốc độ 30 và 60, tổng thời gian lái xe có dạng đẹp:

$$f(x) = \text{Tổng thời gian đi} = \frac{a\sec x}{30} - \frac{b - a\tan x}{60}. \tag{3.2.3}$$

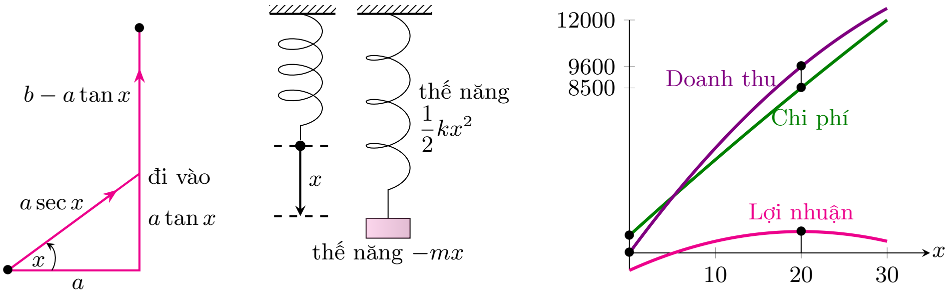
Đưa các đạo hàm của $\sec x$ và $\tan x$ vào df/dx:

$$\frac{df}{dx} = \frac{a}{30}\sec x \tan x - \frac{a}{60}\sec^2 x. \tag{3.2.4}$$

Bây giờ đặt $df/dx = 0$, chia bởi a, và nhân bởi $30\cos^2 x$:

$$\sin x = \frac{1}{2}. \tag{3.2.5}$$

Đáp án này là đẹp! Góc x là $30°$! Góc tối ưu ($\pi/6$ radian) có $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Tam giác cạnh bên a và cạnh huyền $a/\sqrt{3}$ là một tam giác vuông 30 60 90.
Tôi không biết bạn thích dạng $\sqrt{a^2+x^2}$ hay dạng lượng giác. Nhưng cực tiểu là như nhau—hoặc là tại $30°$ hoặc là đi trực tiếp tới MIT.



HÌNH 3.2.4. (a) Lái xe tại góc x. (b) Các năng lượng của lò xo và khối lượng. (c) Lợi nhuận = doanh thu − chi phí.

VÍ DỤ 3.2.10. Trong cơ học, *tạo hóa chọn năng lượng cực tiểu*. Một lò xo bị kéo xuống bởi một khối lượng, năng lượng là $f(x)$, và $df/dx = 0$ đưa ra điểm cân bằng. Câu hỏi tại sao rất nhiều định luật của vật lý lại liên quan đến năng lượng cực tiểu hoặc thời gian cực tiểu là một câu hỏi mang tính triết lý cao—câu hỏi này làm cho toán học trở nên dễ dàng hơn.

Năng lượng có hai thành phần—thành phần đối với lò xo và thành phần đối với khối lượng. Năng lượng lò xo là $\frac{1}{2}kx^2$—dương trong quá trình giãn ra ($x > 0$ là hướng xuống) và trong trình nén lại ($x < 0$). Thế năng của khối lượng được lấy là $-mx$—giảm khi khối lượng đi xuống. Cân bằng xảy ra tại cực tiểu của $f(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mx$.
Tôi lấy làm tiếc vì phải đưa ra cho bạn một ví dụ nhỏ như vậy, nhưng ví dụ này làm nổi bật lên một điểm quan trọng. Khi $f(x)$là bậc hai, phương trình cân bằng $df/dx = 0$ là tuyến tính.

$$\frac{df}{dx} = kx - m = 0$$

Về phương diện đồ thị, $x = m/k$ là hoành độ đỉnh của parabola. Về phương diện vật lý, $kx = m$ là một phương trình cân bằng của các lực—lực lò xo chống lại trọng lực. *Định luật của Hooke* đối với lực lò xo là hệ số đàn hồi k lần độ dời x.

VÍ DỤ 3.2.11. ***Đạo hàm của chi phí = chi phí biên*** (ví dụ đầu tiên của chúng ta về lĩnh vực quản trị).
Chi phí dành cho giấy dùng để in x bản in của cuốn sách là $C = 1000 + 3x$ dollars. Đạo hàm là $dC/dx = 3$. Đây là *chi phí biên* của dành cho giấy đối với từng cuốn sách được in thêm. Nếu x tăng thêm một cuốn sách, chi phí C tăng thêm \$3. Chi phí biên có ý nghĩa tương tự như vận tốc và tổng chi phí có ý nghĩa như quãng đường.

Chi phí biên được tính theo dollars trên một cuốn sách. Chi phí toàn phần được tính theo dollars. Doanh thu là $I(x)$ và doanh thu biên là dI/dx. Để áp dụng giải tích, chúng ta cụ thể hoá mọi thứ bằng số.

Giả sử số lượng các cuốn sách tăng thêm một lượng dx.[5] Chi phí tăng thêm một lượng $(dC/dx)dx$. Thu nhập tăng thêm một lượng $(dI/dx)dx$. Nếu chúng ta bỏ qua tất cả các chi phí khác, khi đó ***lợi nhuận*** $P(x)$ =***doanh thu*** $I(x)-$***chi phí*** $C(x)$. Trong hầu hết các trường hợp, P tăng tới một cực đại rồi sau đó giảm xuống.

Tại đỉnh trên đường cong doanh thu, ***doanh thu biên bằng không***:

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ hay } \frac{dI}{dx} = \frac{dC}{dx} \tag{3.2.6}$$

Lợi nhuận là được cực đại khi doanh thu biên I' ***bằng chi phí biên*** C'.

Quy luật cơ bản này của kinh tế học được trực tiếp suy ra từ giải tích, và chúng ta xét một ví dụ:

$$\begin{aligned} C(x) &= \textit{chi phí của x quảng cáo} = 900 + 400x - x^2 \\ &\qquad \text{chi phí lắp đặt } 900, \text{ chi phí in } 400x, \text{ volume saving } x^2 \\ I(x) &= \textit{doanh thu do x quảng cáo} = 600x - 6x^2 \\ &\qquad \text{bán 600 trên mỗi quảng cáo, trừ } 6x^2 \text{ đối với lợi tức giảm dần} \end{aligned}$$

$$\textit{quyết định tối ưu } dC/dx = dI/dx \text{ hay } 400 - 2x \text{ hay } x = 20$$

$$\textit{lợi nhuận} = \textit{doanh thu} - \textit{chi phí} = 9600 - 8500 = 1100.$$

Mục tiếp theo cho thấy cách xác minh lợi nhuận này là cực đại mà không là cực tiểu.

Các bài tập đầu yêu cầu bạn giải $df/dx = 0$. Các bài tập sau đó còn yêu cầu bạn tìm $f(x)$.

BÀI TẬP 3.2

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Nếu $df/dx > 0$ trong một khoảng, khi đó $f(x)$ là __a__. Nếu một cực đại hoặc cực tiểu xảy ra tại x, khi đó $f'(x) =$ __b__. Các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ được gọi là các điểm __c__. Hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ có một (cực đại)(cực tiểu) tại $x =$ __d__. Một điểm dừng mà không phải là cực đại hoặc cực tiểu xảy ra đối với $f(x) =$ __e__.

Các giá trị cực trị cũng có thể xảy ra tại nơi mà __f__ không được xác định hoặc tại __g__ của miền xác định. Các cực tiểu của $|x|$ và $5x$ đối với $-2 \leqslant x \leqslant 2$ nằm tại $x =$ __h__ và $x =$ __i__, mặc dù df/dx không bằng không tại những điểm đó. x^* là một __j__ tuyệt đối khi $f(x^*) \geqslant f(x)$ đối với mọi x. Một cực tiểu __k__ xảy ra khi $f(x^*) \leqslant f(x)$ đối với mọi x gần x^*.

Cực tiểu của $\frac{1}{2}ax^2 - bx$ là __l__ tại $x =$ __m__.

Tìm các điểm dừng và các điểm nghi ngờ và các điểm biên. Quyết định xem mỗi điểm là một cực đại hay cực tiểu, địa phương hay tuyệt đối.

3.2.1. $f(x) = x^2+4x+5$, $-\infty < x < \infty$

3.2.2. $f(x) = x^3 - 12x$, $-\infty < x < \infty$

3.2.3. $f(x) = x^2 + 3$, $-1 \leqslant x \leqslant 4$

3.2.4. $f(x) = x^2 + (2/x)$, $1 \leqslant x \leqslant 4$

3.2.5. $f(x) = (x - x^2)^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

3.2.6. $f(x) = 1/(x - x^2)^2$, $0 < x < 1$

[5]Có lẽ dx là một cuốn sách giải tích vi phân. Tôi xin lỗi nếu bạn cảm thấy có quá nhiều sách giải tích phải học.

3.2.7. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2$, $-\infty < x < \infty$

3.2.8. $f(x) = \{x^2 - 4x$ đối với $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 - 4$ đối với $1 \leqslant x \leqslant 2\}$

3.2.9. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$, $1 \leqslant x \leqslant 9$

3.2.10. $f(x) = x + \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

3.2.11. $f(x) = x^3(1-x)^6$, $-\infty < x < \infty$

3.2.12. $f(x) = x/(1+x)$, $0 \leqslant x \leqslant 100$

3.2.13. $f(x) =$ khoảng cách từ $x \geqslant 0$ đến số nguyên gần nhất

3.2.14. $f(x) =$ khoảng cách từ $x \geqslant 0$ đến số nguyên tố gần nhất

3.2.15. $f(x) = |x+1| + |x-1|$, $-3 \leqslant x \leqslant 2$

3.2.16. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

3.2.17. $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$

3.2.18. $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

3.2.19. $f(x) = x + \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

3.2.20. $f(\theta) = \cos^2\theta \sin\theta$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

3.2.21. $f(\theta) = 4\sin\theta - 3\cos\theta$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

3.2.22. $f(x) = \{x^2 + 1$ đối với $x \leqslant 1$, $x^2 - 4x + 5$ đối với $x \geqslant 1\}$

Trong các bài tập được áp dụng, chọn các đơn vị thuộc hệ meter nếu bạn muốn.

3.2.23. Các hãng hàng không chấp nhận một kiện hành lý hình hộp nếu chiều dài + chiều rộng + chiều cao $= l + w + h \leqslant 62''$ hay 158 cm. Nếu h được cố định, chứng tỏ rằng rằng thể tích cực đại $(62 - w - h)wh$ là $V = h(31 - \frac{1}{2}h)^2$. Chọn h để cực đại hóa V. Hình hộp với thể tích lớn nhất là một ________.

3.2.24. Nếu mạch của một bệnh nhân được đo được là 70, rồi 80, rồi 120, hỏi giá trị bình phương nhỏ nhất nào cực tiểu hóa $(x-70)^2 + (x-80)^2 + (x-120)^2$? Nếu bệnh nhân lo lắng, gán 120 làm một trọng số thấp hơn và cực tiểu hóa $(x-70)^2 + (x-80)^2 + \frac{1}{2}(x-120)^2$.

3.2.25. Tại tốc độ v, một chiếc xe tải dùng $av + (b/v)$ gallon xăng trên một mile. Hỏi chiếc xe đi được bao nhiêu mile trên một gallon ở tốc độ v? Cực tiểu hóa mức tiêu thụ xăng. Cực đại hóa số dặm trên mỗi gallon.

3.2.26. Một chiếc limousine đạt được $(120 - 2v)/5$ mile trên một gallon. Việc thuê tài xế tốn \$10/giờ, nhiên liệu tốn \$1/gallon.

(a) Tìm chi phí trên một dặm tại tốc độ v.

(b) Tìm tốc độ lái xe để chi phí là rẻ nhất.

3.2.27. Bạn muốn ném một quả bóng vào rổ tại góc θ sao cho tốc độ ném là cực tiểu. Tránh những cú ném thẳng[6] và những cú ném vòng cung[7]. Ném từ $(0,0)$ với rổ nằm tại (a,b), cực tiểu hóa $f(\theta) = 1/(a\sin\theta - b\cos^2\theta)$.

(a) Nếu $b = 0$, bạn đứng ngang hàng với rổ. Chứng minh rằng góc $\theta = 45^\circ$ là tốt nhất (cú sky hook của huyền thoại bóng rổ Jabbar).

(b) Đơn giản $\frac{df}{d\theta} = 0$ thành $\tan 2\theta = -\frac{a}{b}$. Giải khi $a = b$.

(c) Ước lượng góc tốt nhất cho một cú ném tự do.

Cũng góc đó cho chúng ta biên sai số lớn nhất (kết luận được đưa ra trong cuốn sách *Khoa học Thể thao* [8]của tác giả Peter Brancazio). Mục 12.2 đưa ra đường bay.

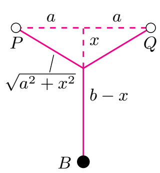
3.2.28. Vào những ngày dài nhất và ngắn nhất, trong tháng 6 và tháng 12, tại sao độ dài của ngày thay đổi ít nhất?

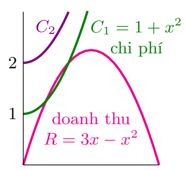
3.2.29. Tìm **Y** ngắn nhất nối P, Q, và B trong hình. Ban đầu, B là một máng đựng thức ăn của chim. Chiều dài của **Y** là $L(x) = (b-x) + 2\sqrt{a^2+x^2}$.

(a) Chọn x để cực tiểu hóa L (x không được phép lớn hơn b).

(b) Chứng tỏ rằng tâm của **Y** có các góc 120°.

(c) **Y** tốt nhất trở thành **V** khi $a/b =$ ________.





[6] Nd: Cú ném thẳng trong bóng rổ (tiếng Anh: line drive).

[7] Nd: Cú ném vòng cung trong môn bóng rổ (tiếng Anh: rainbow).

[8] Nd: Khoa học Thể thao (tiếng Anh: Sports Science).

3.2.30. Nếu hàm quãng đường là $f(t) = (1+3t)/(1+3t^2)$, hỏi khi nào chuyển động tiến về phía trước kết thúc khi nào? Bạn đã đi được bao xa? Điểm cộng: Vẽ đồ thị $f(t)$ và df/dt.

Trong 3.2.31-3.2.34, chúng ta làm và bán x chiếc bánh pizza. Doanh thu là $R(x) = ax + bx^2$ và chi phí là $C(x) = c + dx + ex^2$.

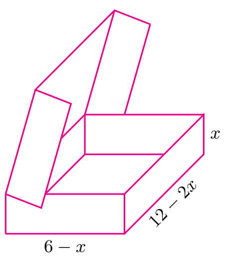
3.2.31. Lợi nhuận là $\Pi(x) =$ ________. Lợi nhuận trung bình trên một chiếc bánh pizza là = ________. Lợi nhuận biên trên một chếc bánh pizza được làm thêm là $d\Pi/dx =$ ________. Chúng ta nên cực đại hóa (lợi nhuận) (lợi nhuận trung bình) (lợi nhuận biên).

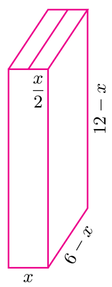
3.2.32. Chúng ta nhận được $R(x) = ax + bx^2$ khi giá một chiếc bánh pizza là $p(x) =$ ________. Ngược lại: Khi giá là p, chúng ta bán được $x =$ ________ chiếc bánh pizza (một hàm số của p). Chúng ta kỳ vọng $b < 0$ vì ________.

3.2.33. Tìm x để cực đại hóa lợi nhuận $\Pi(x)$. Tại x đó, lợi nhuận biên là $d\Pi/dx =$ ________.

3.2.34. Hình B cho thấy $R(x) = 3x - x^2$ và $C_1(x) = 1 + x^2$ và $C_2(x) = 2 + x^2$. Với chi phí C_1, cần x bao nhiêu để có lợi nhuận? x nào có lợi nhuận nhiều nhất? Với chí phí được cố định cao hơn trong C_2, kế hoạch tốt nhất là ________.

Hộp bánh quy và hộp bỏng ngô hình hộp dưới dây được tạo ra bởi Kay Dundas từ một hình vuông $12'' \times 12''$. Các bài toán liên quan đến một chiếc hộp không có mặt trên là cổ điển trong giải tích.





3.2.35. Chọn x để tìm thể tích cực đại của hộp bánh quy.

3.2.36. Chọn x để cực đại hóa thể tích của hộp bỏng ngô.

3.2.37. Một hộp chocolate cao cấp có hình dạng tương tự như hộp bánh quy chỉ khác là nó có thêm một dải với chiều rộng x dọc xuống mặt trước. Tìm thể tích mới $V(x)$ và x mà cực đại hóa nó. Điểm cộng: Chứng tỏ rằng $V_{\max}$ đã bị giảm hơn 20%.

3.2.38. Đối với một chiếc hộp không có mặt trên, cắt bốn hình vuông có cạnh x từ các góc của hình vuông $12''$. Gấp các cạnh để chiều cao là x. Cực đại hóa thể tích.

Hình học cho chúng ta nhiều bài tập có tính ứng dụng hơn bạn tưởng.

3.2.39. Một sợi dây dài bốn feet được cắt thành hai khúc. Một khúc tạo hình thành một hình tròn có bán kính r, khúc còn lại được tạo hình thành một hình vuông cạnh x. Chọn r để cực tiểu hóa tổng các diện tích của chúng. Sau đó chọn r để cực đại hóa.

3.2.40. Một bức tường cố định được tận dùng rào một cạnh của một mảnh đất hình chữ nhật. Chúng ta có 200 feet hàng rào để rào ba cạnh còn lại. Cực đại hóa diện tích A theo 4 bước:

1 Vẽ hình minh họa tình huống.

2 Chọn một đại lượng chưa được biết và ký hiệu nó là x (nhưng đừng chọn A!).

3 Tìm tất cả các đại lượng còn lại theo x.

4 Giải $dA/dx = 0$ và kiểm tra các điểm biên.

3.2.41. Không có bức tường cố định, các cạnh của mảnh đất hình chữ nhật được rào thỏa mãn $2x + 2y = 200$. Cực đại hóa diện tích. So sánh với diện tích của mảnh đất hình tròn được rào bởi cùng hàng rào.

3.2.42. Thêm 200 mét hàng rào vào 100 mét hàng rào thẳng có sẵn để tạo nên một hình chữ nhật với diện tích cực đại (được sáng tác bởi Giáo sư. Klee).

3.2.43. Một hình chữ nhật xếp vừa vào hình tam giác với các cạnh $x = 0$, $y = 0$, và $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ có thể lớn đến mức nào? Tìm điểm trên cạnh thứ ba mà cực đại hóa diện tích xy.

3.2.44. Hình chữ nhật lớn nhất trong Bài tập 3.2.43 có thể không nhất thiết phải nằm thẳng. Đặt một cạnh trên $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ và cực đại hóa diện tích.

3.2.45. Chu vi hình chữ nhật trong Bài tập 3.2.43 là $P = 2x + 2y$. Thế đối với y để tìm $P(x)$. Hình chữ nhật nào có $P_{\max} = 12$?

3.2.46. Tìm hình trụ tròn có thể tích lớn nhất mà nằm vừa vặn trong hình cầu bán kính 1.

3.2.47. Một hình trụ nằm vừa vặn trong một hình nón có bán kính đáy R và chiều cao H có kích cỡ như thế nào? Đối với hình trụ, chọn r và h trên mặt dốc $r/H + h/H = 1$ để cực đại hóa thể tích $V = \pi r^2 h$.

3.2.48. Hình trụ trong Bài tập 3.2.47 có diện tích mặt bên $A = 2\pi rh$. Cực đại hóa A thay vì V.

3.2.49. Tính cả mặt trên và mặt đáy, hình trụ có diện tích

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi rH(1 - \frac{r}{R}) + 2\pi r^2.$$

Cực đại hóa A khi $H > R$. Cực đại hóa A khi $R > H$.

3.2.50 (*). Một bức tường cao 8 feet cách một căn nhà 1 foot. Tìm chiều dài L của cái thang ngắn nhất được dừng từ mặt đất chống vào bức tường tựa vào căn nhà. Vẽ một tam giác với chiều cao y, đáy $1 + x$, và cạnh huyền L.

3.2.51. Tìm hình trụ đóng có thể tích $V = \pi r^2 h = 16\pi$ mà có diện tích bề mặt nhỏ nhất.

3.2.52. Vẽ một con diều hình tam giác với các cạnh 1, 1, $2x$ bên cạnh một hình tam giác với các cạnh $2x$, 2, 2. Tìm diện tích A và x cực đại hóa diện tích đó. *Gợi ý*: Trong dA/dx, đơn giản hóa $\sqrt{1-x^2} - x^2/\sqrt{1-x^2}$ thành $(1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$.

Trong 3.2.53- 3.2.56, x và y là các số không âm thỏa $x + y = 10$. Cực đại hóa và cực tiểu hóa:

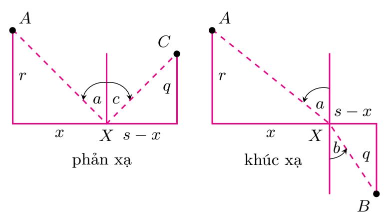
3.2.53. xy

3.2.54. $x^2 + y^2$

3.2.55. $y - (1/x)$

3.2.56. $\sin x \sin y$

3.2.57. Tìm tổng khoảng cách $f(x)$ từ A đến X đến C. Chứng tỏ rằng $df/dx = 0$ kéo theo $\sin a = \sin c$. Ánh sáng phản xạ tại góc bằng góc tới để cực tiểu hóa thời gian đi.



3.2.58. Nguyên lý của Fermat nói rằng ánh sáng đi từ A đến B theo đường nhanh nhất. Vận tốc của nó phía trên trục x là v và phía dưới trục x là w.

(a) Tìm thời gian $T(x)$ từ A đến X đến B. Trên AX, thời gian = quãng đường/vận tốc = $\sqrt{r^2 + x^2}/v$.

(b) Tìm phương trình đối với x cực tiểu hóa.

(c) Suy ra định luật của Snell $\sin a/v = \sin b/w$.

Các "bài toán điểm gần nhất" là các mô hình đối với nhiều ứng dụng.

3.2.59. Điểm nào trên parabola $y = x^2$ gần với điểm $x = 0$, $y = 2$ nhất?

3.2.60. Điểm nào trên đường thẳng $y = 5 - 2x$ gần với điểm $(0, 0)$ nhất?

3.2.61. Điểm nào trên $y = -x^2$ gần với điểm nào trên $y = 5 - 2x$ nhất? Tại các điểm gần nhất, các đồ thị có cùng hệ số góc. Vẽ các đồ thị.

3.2.62. Điểm nào trên $y = x^2$ gần với $(0, \frac{1}{3})$ nhất? Cực tiểu hóa $x^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = y + (y - \frac{1}{3})^2$ đưa ra $y < 0$. Có gì sai?

3.2.63. Vẽ đường thẳng $y = mx$ đi qua gần $(2, 3)$, $(1, 1)$, và $(-1, 1)$. Với khớp bình phương nhỏ nhất, cực tiểu hóa

$$(3 - 2m)^2 + (1 - m)^2 + (1 + m)^2.$$

3.2.64. Một tam giác có các đỉnh $(-1, 1)$, (x, x^2), và $(3, 9)$ nằm trên parabola $y = x^2$. Tìm diện tích cực đại của nó đối với x nằm giữa -1 và 3. *Gợi ý*: Khoảng cách từ (X, Y) tới đường thẳng $y = mx + b$ là $|Y - mX - b|/\sqrt{1 + m^2}$.

3.2.65. Hai chiếc tàu ngầm được định vị tại $(2, 0)$ và $(1, 1)$. Chọn hệ số góc m để đường thẳng $y = mx$ đi giữa hai tàu ngầm nhưng cách chiếc gần nhất xa nhất có thể.

Bài tập 3.2.66-3.2.72 quay trở lại lý thuyết.

3.2.66. Để tìm điểm trên đồ thị của $y(x)$ có hệ số góc lớn nhất, giải ________. Đối với $y = 1/(1 + x^2)$, điểm này là ________.

3.2.67. Khi giá trị tuyệt đối của hiệu giữa $f(x)$ và $g(x)$ là nhỏ nhất, các hệ số góc của chúng là ________. Chỉ ra điểm này trên các đồ thị của $f = 2 + x^2$ và $g = 2x - x^2$.

3.2.68. Giả sử y được cố định. Cực tiểu của $x^2 + xy - y^2$ (một hàm số của x) là $m(y) =$ ________. Tìm cực đại của $m(y)$.

Bây giờ x được cố định. Cực đại của $x^2 + xy - y^2$ (một hàm số của y) là $M(x) =$ ________. Tìm cực tiểu của $M(x)$.

3.2.69. Đối với từng m, giá trị cực tiểu của $f(x) - mx$ xảy ra tại $x = m$. $f(x)$ là gì?

3.2.70. $y = x + 2x^2 \sin(1/x)$ có hệ số góc 1 tại $x = 0$. Nhưng chứng tỏ rằng y không tăng trên một *khoảng* quanh $x = 0$, bằng cách tìm các điểm mà tại đó $dy/dx = 1 - 2\cos(1/x) + 4x\sin(1/x)$ là âm.

3.2.71. *Đúng hay sai*, với một một lý do: Giữa hai cực tiểu địa phương của một hàm trơn $f(x)$, có một cực đại địa phương.

3.2.72. Xây dựng hàm số $y(x)$ mà có cực đại của nó nằm tại một điểm thô và cực tiểu của nó nằm tại một điểm biên.

3.2.73. Vẽ một hồ bơi hình tròn với một người cứu hộ ở một phía và một người đuối nước ở phía đối diện. Người cứu hộ bơi với vận tốc v theo một đường thẳng cho đến khi anh ta đến được rìa hồ bơi và chạy quanh phần còn lại của hồ với vận tốc $w = 10v$. Nếu hướng bơi tạo thành góc θ với đường bơi đường bơi trực tiếp đến người đuối nước, chọn θ để cực tiểu hóa và cực đại hóa thời gian đến.

3.3. Đạo hàm Cấp hai: Độ võng và Gia tốc

Khi $f'(x)$ là dương, $f(x)$ là tăng. Khi dy/dx là âm, $y(x)$ là giảm. Chúng ta nhận thấy khá rõ ý nghĩa này của các đạo hàm cấp một, nhưng các đạo hàm *cấp hai* lại nói lên điều gì? Bằng cách nhìn vào đồ thị đường cong, liệu bạn có thể quyết định được dấu của $f''(x)$ hay d^2y/dx^2 hay không? Câu trả lời là *có* và là cốt lõi của câu trả lời này là nằm ở ***độ võng***.

Một đường thẳng là không lồi lõm. Hệ số góc của $y = mx + b$ là m (một hằng số). Đạo hàm cấp hai là không. Không gì đáng nhắc đến khi nói đến hệ số góc không đổi của một đường thẳng, chúng ta phải xét các đường cong mới thấy được những hệ số góc có sự thay đổi. Những sự thay đổi của đạo hàm được biểu thị thông qua $f''(x)$:

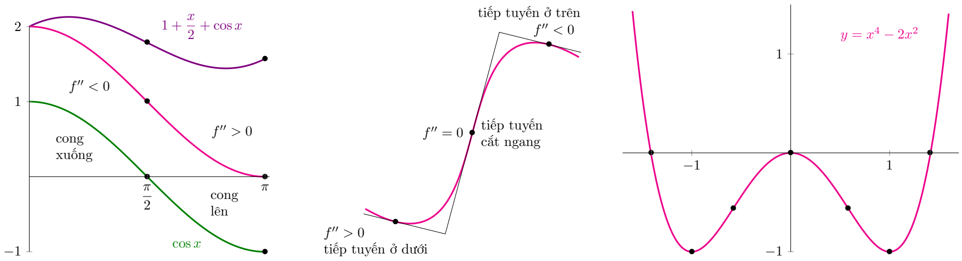
$$f = x^2 \text{ có } f' = 2x \text{ và } f'' = 2 \text{ (parabola này võng } \textit{lên}\text{)}$$

$$y = \sin x \text{ có } dy/dx = \cos x \text{ và } d^2y/dx^2 = -\sin x \text{ (đường sine võng } \textit{xuống}\text{)}$$

Giá trị của hệ số góc $2x$ càng lúc càng trở nên lớn hơn ngay cả khi giá trị của parabole *đang tụt giảm*. Dấu của f hoặc f' không được tiết lộ bởi f''. Đạo hàm cấp hai cho chúng ta biết về ***số gia trong hệ số góc***.

Một hàm số với $f''(x) > 0$ là ***lõm trên***. Nó võng lên khi hệ số góc tăng. Nó còn được gọi là *lồi*. Một hàm với hệ số góc giảm—điều này nghĩa là $f''(x) < 0$—là ***lõm dưới***. Lưu ý cách các hàm số $\cos x$ và $1 + \cos x$ và ngay cả hàm số $1 + \frac{1}{2}x + \cos x$ thay đổi từ lõm dưới sang lõm trên tại $x = \pi/2$. Tại điểm đó $f'' = -\cos x$ thay đổi từ âm sang dương khi đi qua điểm đó. Số hạng phụ $1 + \frac{1}{2}x$ làm nghiêng đồ thị nhưng độ võng vẫn như cũ.

Dưới đây là một cách khác để nhận biết dấu của $f''(x)$. ***Hãy nhìn vào đường tiếp tuyến***. Khi đường cong là lõm trên, tiếp tuyến nằm phía dưới đường cong. Giá trị của một xấp xỉ tuyến tính là quá thấp so với giá trị thực của hàm số. Thay vì dùng đến một xấp xỉ tuyến tính, mục này sẽ tính một xấp xỉ bậc hai—xấp xỉ này bao gồm cả số hạng với $f'' > 0$. Khi đường cong võng xuống ($f'' < 0$), điều ngược lại xảy ra—tiếp tuyến nằm phía trên đường cong. Giá trị của xấp xỉ tuyến tính là cao hơn nhiều so với giá trị thực của hàm số, và một xấp xỉ bao gồm số hạng với f'' sẽ tiệm cận giá đúng của hàm số.



Hình 3.3.1. Hệ số góc tăng=lõm trên ($f'' > 0$). Lõm dưới là $f'' < 0$. Điểm uốn $f'' = 0$.

Trong chuyển động vật lý, $f''(x)$ là *gia tốc*—theo các đơn vị của đường đi/(thời gian)^2. Gia tốc là tốc độ thay đổi của vận tốc. Dao động $\sin 2t$ có vận tốc $v = 2\cos 2t$ (tốc độ cực đại 2) và gia tốc $a = -4\sin 2t$ (gia tốc cực đại 4).

Một sự tăng dân số có nghĩa là $f' > 0$. ***Một tốc độ gia tăng dương có nghĩa là*** $f'' > 0$. Hai điều này khác nhau. Tốc độ có thể chậm xuống trong khi sự tăng trưởng vẫn tiếp tục.

CỰC ĐẠI VS. CỰC TIỂU

Nhớ lại rằng $f'(x) = 0$ xảy ra tại một điểm dừng. Điểm này có thể là một *cực đại* hoặc một *cực tiểu*. ***Đạo hàm bậc hai sẽ quyết định một điểm dừng là một cực đại hay một cực tiểu***! Thay vì tính $f(x)$ tại nhiều điểm, chúng ta tính $f''(x)$ tại một điểm—điểm dừng. Nó là một cực đại nếu $f''(x) > 0$.

Phát biểu 3.3.1. Khi $f'(x) = 0$ và $f''(x) > 0$, có một **cực tiểu địa phương** tại x.

Khi $f'(x) = 0$ và $f''(x) < 0$, có một **cực đại địa phương** tại x.

Ở bên trái của một cực tiểu, đường cong đi xuống. Sau khi đạt cực tiểu, đường cong đi lên. Hệ số góc đã thay đổi từ âm sang dương. Đồ thị võng lên và $f''(x) > 0$.

Tại một cực đại, hệ số góc thay đổi từ dương sang âm. Trong trường hợp ngoại lệ, khi $f'(x) = 0$ và đồng thời $f''(x) = 0$, mọi thứ đều có thể xảy ra. Một ví dụ là x^3 có đồ thị đi lên và tạm dừng tại $x = 0$ và tiếp tục đi lên (hệ số góc của nó là $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$). Tuy nhiên, x^4 có đồ thị của x^4 có đồ thị đi xuống và tạm dừng tại $x = 0$ và đi lên (với một đoạn đồ thị rất phẳng có tiếp tuyến gần như cùng phương với trục hoành).

Chúng ta nhấn mạnh rằng, thông tin từ $f'(x)$ và $f''(x)$ chỉ mang tính "*địa phương*." Để khẳng định một điểm là một cực đại hay cực tiểu *tuyệt đối*, chúng ta cần thông tin trên toàn miền xác định.

Ví dụ 3.3.1. $f(x) = x^3 - x^2$ có $f'(x) = 3x^2 - 2x$ và $f''(x) = 6x - 2$.
Để tìm cực đại và/hoặc cực tiểu, giải $3x^2 - 2x = 0$. Các điểm dừng là $x = 0$ và $x = \dfrac{2}{3}$. Tại những điểm này, chúng ta cần các đạo hàm cấp hai. Nó là $f''(0) = -2$ (cực đại địa phương) và $f''(\dfrac{2}{3}) = +2$ (cực tiểu địa phương).

Giữa cực đại và cực tiểu là ***điểm uốn***. Đó là điểm mà tại đó $f''(x) = 0$. Đường cong thay đổi từ lõm dưới sang lõm trên. Ví dụ này có $f''(x) = 6x - 2$, nên điểm uốn là $x = \dfrac{1}{3}$.

ĐIỂM UỐN

Trong toán học, việc một hàm số triệt tiêu có giá trị bằng không tại một điểm nào đó là một sự kiện đặc biệt. Khi hàm số này là f , đồ thị của nó cắt trục hoành. Khi hàm số này là f' , tiếp tuyến có cùng phương với trục hoành. Khi hàm số này là f'', chúng ta có một *điểm uốn*.

Hướng võng của đồ thị thay đổi tại điểm uốn. Sự thay đổi này dễ dàng được nhận thấy bằng mắt thường. Chúng ta sẽ thấy rằng ngay tại điểm uốn, đồ thị là một đường thẳng (đường thẳng có $f'' = 0$). Thật dễ dàng nhận biết những điểm cắt trục hoành và những điểm dừng và những điểm uốn. Rất ít người có thể nhận ra $f''' = 0$ hoặc $f'''' = 0$ tại đâu. Tôi không chắc liệu những điểm này có tên gọi riêng dành cho chúng hay không.

Có một cực đại hoặc cực tiểu thực sự khi $f'(x)$ đổi dấu. Tương tự, có một điểm uốn thực sự khi $f''(x)$ đổi dấu. ***Đồ thị là lõm dưới ở một bên của một điểm uốn và lõm trên ở bên còn lại***.[9] Các tiếp tuyến nằm ở phía trên đường cong ở một bên của một điểm uốn và nằm ở phía dưới ở bên còn lại. Tại một điểm uốn, *tiếp tuyến đi cắt đường cong* (Hình 3.3.1b).

Chú ý rằng một parabole $y = ax^2 + bx + c$ không có các điểm uốn: y'' là hằng. Một đường cong bậc ba có một điểm uốn, bởi vì f'' là tuyến tính. Một đường cong bậc bốn có thể hoặc có thể không có các điểm uốn—đồ thị của hàm bậc hai $f''(x)$ có thể hoặc có thể không cắt trục x.

Ví dụ 3.3.2. Đồ thị của $x^4 - 2x^2$ có hình chữ W, đồ thị của $4x^3 - 4x$ có hai cái bướu, đồ thị của $12x^2 - 4$ có hình chữ U. Bảng sau cho thấy các dấu tại các giá trị quan trọng của x:

x	$-\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$
$f(x)$	0	$-$	$-$	$0,0$	$-$	$-$	0
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	0	
$f''(x)$			0	$-$	0		

Giữa không điểm của $f(x)$ xuất hiện các không điểm của $f'(x)$ (các điểm dừng). Giữa các không điểm của $f'(x)$ xuất hiện các không điểm của $f''(x)$ (các điểm uốn). Trong ví dụ này, $f(x)$ có một không điểm kép tại gốc tọa độ, nên chúng ta bắt được một không điểm đơn của f' ở đó. Nó là cực đại địa phương, vì $f''(0) < 0$.

Các điểm uốn là quan trọng—không chỉ đối với toán học. Chúng ta biết dân số thế giới sẽ tiếp tục tăng. Chúng ta không biết liệu tốc độ gia tăng sẽ giảm xuống hay không. Nhớ rằng: ***Tốc độ gia tăng dừng tăng trưởng tại điểm uốn***. Dưới đây là báo cáo năm 1990 theo tường trình của Quỹ Dân số Liên Hợp Quốc[10].

> Mười năm tới sẽ quyết định liệu dân số thế giới tăng gấp ba hay chỉ tăng gấp hai lần trước khi nó dừng tăng trưởng. Điều này có thể định đoạt liệu tương lai của trái đất có còn là một nơi cư trú phù hợp của nhân loại hay không. Dân số, hiện nay là 5.3 tỷ, đang tăng thêm một phần tư triệu người mỗi ngày. Từ 90 đến 100 triệu người được sẽ được thêm vào mỗi năm trong thập niên 1990: một tỷ người—tương đương với dân số Trung Quốc—được thêm vào qua một thập niên. Những nước nghèo nhất sẽ có mức gia tăng dân số cao nhất.

[9]Hàm số $f(x) = x^4$ không thể hiện điều này, hàm số này có $f''(x) = 12x^2 > 0$ ở cả hai bên của điểm $(0, 0)$. Tiếp tuyến của nó là trục x. Tiếp tuyến nằm ở phía dưới đồ thị—nên $(0, 0)$ không là điểm uốn.

[10]Nd: Quỹ Dân số Liên hợp quốc (tiếng Anh: UN Population Fund, viết tắt: UNFPA).

> Mới chỉ mấy năm trước, dường như tốc độ gia tăng dân số đã chậm lại [11] ở khắp nơi ngoại trừ ở châu Phi và một phần của Nam Á. Dân số thế giới có vẻ sẽ ổn định trong khoảng 10.2 tỷ đến hết thế kỷ sau.
>
> Tình hình này xem ra ít hứa hẹn. Dân số thế giới đã vượt quá mức những dự báo của phương án trung bình “khả năng cao nhất” được tiến hành năm 1984. Dân số thế giới giờ đây đang tiến dần đến tổng số là gần 11 tỷ chứ không phải là 10 tỷ.
>
> Nếu như việc giảm mức sinh tiếp tục thấp hơn dự kiến, có thể chỉ tiêu đặt ra một lần lại không đạt. Trong trường hợp đó, tổng dân số thế giới có thể lên hơn 14 tỷ.

Bắt đầu với một cuộc điều tra dân số, UN[12] thống kê theo từng nhóm tuổi tại từng quốc gia. Họ ước lượng tỷ lệ tử vong và tỷ lệ sinh—các ước lượng trung bình được công bố. Báo cáo này đang nói rằng ước lượng của chúng ta là không chính xác.

Mục 6.5 sẽ trở lại vấn đề dân số, với một phương trình mà nó dự báo dân số thế giới sẽ là 10 tỷ. Nó giả định chúng ta đang đứng tại điểm uốn của đồ thị dân số thế giới. Nhưng cuộc điều tra dân số thứ hai của Trung Quốc mới bắt đầu vào ngày 1 tháng 7 năm 1990. Khi cuộc điều tra này kết thúc, chúng ta sẽ biết liệu chúng ta đang đứng tại điểm uốn hay vẫn còn chưa đến điểm uốn.

Bây giờ bạn đã hiểu ý nghĩa của $f''(x)$. Dấu của nó cho biết hướng võng—số gia trong hệ số góc. *Phần còn lại của mục này tính* ***mức*** *võng của đường cong*—dùng cả *độ lớn* của $f''(x)$ nữa chứ không riêng gì dấu của nó. Chúng ta cũng tìm thấy các xấp xỉ bậc hai dựa trên $f''(x)$. Trong một số kháo học, những xấp xỉ này là tùy chọn—các điểm chính được làm nổi bật trong mục này.

SAI PHÂN TRUNG TÂM VÀ SAI PHÂN BẬC HAI

Giải tích bắt đầu với các vận tốc trung bình, được tính ở hai phía của x:

(3.3.1) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ và } \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x} \text{ gần bằng } f'(x).$$

Mặc dù không được đề cập đến, nhưng chúng ta cần phải biết rằng mình có thể nhận được một xấp xỉ $f'(x)$ có độ chính xác tốt hơn nữa bằng cách *lấy trung bình của hai trung bình này*. Điều này sinh ra một ***sai phân trung tâm***, dựa trên $x+\Delta x$ và $x-\Delta x$. Đối với sai phân trung tâm, mẫu số là $2\Delta x$:

(3.3.2)
$$f'(x) \approx \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}.$$

Chúng ta tuyên bố sai phân trung tâm có độ chính xác tốt hơn sai phân một phía. Hãy kiểm tra điều này với luỹ thừa của x.

Đối với $f(x)=x$, tất cả các tỷ số trên đều đưa ra $f'=1$ (chính xác). Đối với $f(x)=x^2$, chỉ có sai phân trung tâm chính xác đưa ra $f'=2x$. Tỷ số một phía đưa ra $2x+\Delta x$ (trong Chương 1, tỷ số này là $2t+h$). Nó chỉ có “độ chính xác bậc nhất.” Nhưng sai phân trung tâm lại không có sai số. Đối với sai phân trung tâm, chúng ta lấy trung bình của $2x+\Delta x$ với $2x-\Delta x$. Như vậy sai phân trung tâm có “độ chính xác bậc hai.”

Bây giờ tôi hỏi: *Tỷ số nào hội tụ tới đạo hàm bậc hai*? Một câu trả lời dành cho câu hỏi này là lấy các sai phân của đạo hàm bậc một. Chắc chắn $\Delta f'/\Delta x$ tiến

---

[11] Liên Hợp Quốc nhìn vào đạo hàm cấp hai!

[12] Nd: Liên Hợp Quốc (tiếng Anh: United Nations, viết tắt: UN).

tới f''. Nhưng chúng ta muốn một tỷ số có chứa f. Một ý tưởng tự nhiên là lấy *sai phân của sai phân*, điều này sẽ đưa chúng ta đến các "***sai phân bậc hai***":

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\to\frac{d^2f}{dx^2}. \tag{3.3.3}$$

Trên tử số, sai phân của sai phân được là $\Delta(\Delta f)=\Delta^2 f$. Nó tương ứng với $d^2 f$. Dưới mẫu số, $(\Delta x)^2$ tương ứng với dx^2. Điều này giải thích cách chúng ta đặt các số 2 trong d^2f/dx^2. Nói cách khác: dx được bình phương, df không được bình phương—như trong đường đi/(thời gian)^2.

Lưu ý rằng $(\Delta x)^2$ trở nên nhỏ hơn nhiều so với Δx. Nếu chúng ta chia Δf bởi $(\Delta x)^2$, tỷ số này bùng nổ. Chính là nhờ có thêm một triệt tiêu trong sai phân cấp hai $\Delta^2 f$ nên mới cho phép giới hạn tồn tại. Giới hạn này là $f''(x)$.

ỨNG DỤNG. Phần lớn các phương trình vi phân không thể được giải để tìm nghiệm chính xác. Một trường hợp điển hình là $f''(x)=-\sin f(x)$ (phương trình con lắc). Để tính một nghiệm, tôi sẽ thay $f''(x)$ bởi sai phân cấp hai trong phương trình (3.3.3). Các xấp xỉ tại các điểm cách nhau Δx chiếm một phần rất lớn trong lĩnh vực điện toán khoa học.

Để kiểm tra độ chính xác của các sai phân này, dưới đây là một thực nghiệm trên $f(x)=\sin x+\cos x$. Bảng sau cho thấy các sai số tại $x=0$ từ các công thức (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3):

độ dài bước Δx	các sai số một phía	các sai số trung tâm	các sai số sai phân bậc hai
1/4	.1347	.0101	$-.0052$
1/8	0650	.0026	$-.0013$
1/16	.0319	.0007	$-.0003$
1/32	.0158	.0002	$-.0001$

Các sai số một phía được giảm một nửa khi Δx được giảm một nửa. Các cột khác giảm tương tự như $(\Delta x)^2$. Mỗi sự giảm đi này chia các sai số đó bởi 4. ***Các sai số từ các sai phân một phía là $O(\Delta x)$ và các sai số từ các sai phân trung tâm là $O(\Delta x)^2$.***

KÝ HIỆU "*O* LỚN". Khi sai số theo bậc của Δx, chúng ta viết $E=O(\Delta x)$. Điều này có nghĩa là $E\leqslant C\Delta x$ đối với hằng số C nào đó. Chúng ta không tính C—trong thực tế, chúng ta không muốn dính dáng tới hằng số này. Tất cả những gì chúng ta cần quan tâm được gói gọn trong câu phát biểu "các sai số một phía là Oh của delta x." Đối với các cột khác, chúng ta chỉ cần biết là $E=O(\Delta x)^2$.

XẤP XỈ TUYẾN TÍNH VS. XẤP XỈ BẬC HAI

Đạo hàm bậc hai đưa ra một cải tiến to lớn trên các xấp xỉ tuyến tính $f(a)+f'(a)(x-a)$. Một tiếp tuyến lúc đầu nằm rất gần đường cong, nhưng *vì là đường thẳng nên nó không thể võng theo đường cong được.* Sau một đoạn, nó nằm quá cao hoặc nằm quá thấp so với đồ thị thực của hàm số (xem Hình 3.3.2). Điều này được thể hiện đặc biệt rõ đối với trường hợp của hàm số mẫu $f(x)=x^2$, trong trường hợp này, tiếp tuyến là trục hoành và đường cong parabole quay bề lõm lên trên.

Bạn hầu như có thể đoán được số hạng nào làm cho đồ thị võng. *Số hạng này phải chứa f''*, và chứa cả $(\Delta x)^2$ nữa. Nó có thể đúng bằng $f''(x)$ lần $(\Delta x)^2$, nhưng nó không phải vậy. Hàm số mẫu x^2 có $f''=2$. Phải có một nhân tử $\frac{1}{2}$ để triệt tiêu 2 này.

PHÁT BIỂU 3.3.2. ***Xấp xỉ bậc hai*** tới một hàm trơn $f(x)$ gần $x=a$ là

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \tag{3.3.4}$$

Tại điểm đáy, xấp xỉ này đưa ra $f(a) = f(a)$. Các đạo hàm cũng trùng khớp tại $x = a$. Hơn nữa *các đạo hàm cấp hai cũng trùng khớp*. Trên cả hai vế của (3.3.4), đạo hàm cấp hai tại $x = a$ là $f''(a)$.

Đồ thị của xấp xỉ bậc hai võng theo đồ thị của hàm số. Chúng ta không hoàn toàn thỏa mãn với xấp xỉ bậc hai, bởi vì còn có một số hạng bậc ba $\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$ và một số hạng bậc bốn $\frac{1}{24}f''''(a)(x-a)^4$ và vân vân. Toàn bộ tổng vô hạn là một "chuỗi Taylor." Phương trình (3.3.4) đưa tới một chuỗi như vậy nhưng chỉ dừng lại tại số hạng bậc hai—chừng này thôi cũng đủ để đưa ra một xấp xỉ tuyệt vời đối với những mục đích thực hành.

Có hai điều cần đề cập. Thứ nhất, phương trình (3.3.4) cho thấy tại sao $f'' > 0$ lại làm cho đường cong nằm phía trên tiếp tuyến. Phần tuyến tính cho chúng ta tiếp tuyến, trong khi phần bậc hai là dương và chịu trách nhiệm cho việc võng lên. Thứ hai, phương trình (3.3.4) đến từ (3.3.2) và (3.3.3). Nơi vi phân một phía đưa ra $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)(x - \Delta x)$, sai phân trung tâm lại đưa ra hàm bậc hai:

$$\text{từ (3.3.2)}: f(x + \Delta x) \approx f(x - \Delta x) + 2f'(x)\Delta x$$
$$\text{từ (3.3.3)}: f(x - \Delta x) \approx 2f(x) - f(x - \Delta x) + f''(x)(\Delta x)^2$$

Cộng và chia bởi 2. Kết quả là $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2$. Điều này đúng đến $(\Delta x)^2$ và bỏ qua $(\Delta x)^3$, như các ví dụ đã cho thấy:

Ví dụ 3.3.3. $(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2\Delta x + \frac{1}{2}(6x)(\Delta x)^2 + \text{sai số } (\Delta x)^3$.

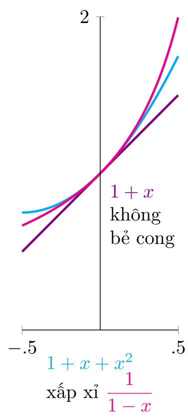
Ví dụ 3.3.4. $(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$.

Đạo hàm bậc nhất tại $x = 0$ là n. Đạo hàm bậc hai tại $x = 0$ là $n(n-1)$. Số hạng lập phương sẽ là $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^3$. Ta chỉ ra kết quả của khai triển nhị thức!

Ví dụ 3.3.5. $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$ =phần đầu của một chuỗi hình học.

$1/(1-x)$ có đạo hàm $1/(1-x)^2$. Đạo hàm cấp hai của nó là $2/(1-x)^3$. Tại $x = 0$, những đạo hàm số này bằng 1, 1, 2. Nhân tử $\frac{1}{2}$ triệt tiêu 2, và để lại cho chúng ta 1, 1, 1. Điều này giải thích $1 + x + x^2$.

Các số hạng tiếp theo là x^3 và x^4. Toàn bộ chuỗi là $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$.



Hình 3.3.2

Thực hành số. $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ được kiểm tra về độ chính xác. Chia x bởi 2 gần như chia sai số bởi 8. Nếu chúng ta chỉ giữ phần tuyến tính $1 - \frac{1}{2}x$, sai số chỉ bị chia bởi 4. Dưới đây là các sai số tại $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$, và $\frac{1}{16}$:

$$\text{phép xấp xỉ tuyến tính (sai số} \approx \tfrac{3}{8}x^2) : .0194 \qquad .0053 \qquad .0014$$

$$\text{phép xấp xỉ bậc hai (sai số} \approx \tfrac{-5}{16}x^3) : . -.00401 \qquad -.00055 \qquad -.00007$$

BÀI TẬP 3.3

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Hướng võng được cho bởi dấu của __a__. Nếu đạo hàm cấp hai là __b__ trong một khoảng, hàm số là lõm trên (hay lồi). Đồ thị võng __c__. Các tiếp tuyến nằm phía __d__ đồ thị. Nếu $f''(x) < 0$, khi đó đồ thị lõm __e__, và hệ số góc là __f__.

Tại một điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ và $f''(x) > 0$, hàm số có một __g__. Tại một điểm mà tại đó __h__, hàm số có một cực đại. Một điểm mà $f''(x) = 0$ là mổ điểm __i__, với điều kiện f'' đổi dấu. Tiếp tuyến __j__ đồ thị.

Xấp xỉ trung tâm tới $f'(x)$ là [__k__]$/2\Delta x$. Xấp xỉ 3-điểm tới $f''(x)$ là [__l__]$/(\Delta x)^2$. Xấp xỉ bậc hai tới $f(x+\Delta x)$ là $f(x)+f'(x)\Delta x+$__m__. Nếu không có số hạng mới được thêm vào, đây chỉ là xấp xỉ __n__. Với số hạng đó, sai số là $O($__o__$)$.

3.3.1. Một đồ thị mà là lõm trên được nói nôm na là "giữ được nước." Vẽ đồ thị với $f''(x) > 0$ mà không giữ được nước.

3.3.2. Tìm một hàm số mà là lõm dưới đối với $x < 0$ và lõm trên đối với $0 < x < 1$ và lõm dưới đối với $x > 1$.

3.3.3. Liệu một hàm số có thể luôn là lõm dưới và không bao giờ cắt trục hoành được hay không? Liệu nó có thể luôn là lõm dưới và dương được hay không? Giải thích.

3.3.4. Tìm một hàm số với $f''(2) = 0$ và không có điểm uốn nào khác.

Đúng hay sai, khi $f(x)$ là một đa thức bậc 9 với $f'(1) = 0$ và $f'(3) = 0$. Đưa ra (hoặc vẽ) một lý do.

3.3.5. $f(x) = 0$ ở đâu đó giữa $x = 1$ và $x = 3$.

3.3.6. $f''(x) = 0$ ở đâu đó giữa $x = 1$ và $x = 3$.

3.3.7. Không có cực đại tuyệt đối tại $x = 3$.

3.3.8. Có bảy điểm uốn.

3.3.9. Nếu $f(x)$ có chín không điểm, nó có bảy điểm uốn.

3.3.10. Nếu $f(x)$ có bảy điểm uốn, nó có chín không điểm.

Trong 3.3.11-3.3.16, quyết định xem điểm dừng nào là cực đại hay cực tiểu.

3.3.11. $f(x) = x^2 - 6x$

3.3.12. $f(x) = x^3 - 6x^2$

3.3.13. $f(x) = x^4 - 6x^3$

3.3.14. $f(x) = x^{11} - 6x^{10}$

3.3.15. $f(x) = \sin x - \cos x$

3.3.16. $f(x) = x + \sin 2x$

Định vị các điểm uốn và miền mà tại đó $f(x)$ là lõm trên hay lõm dưới.

3.3.17. $f(x) = x + x^2 - x^3$

3.3.18. $f(x) = \sin x + \tan x$

3.3.19. $f(x) = (x-2)^2(x-4)^2$

3.3.20. $f(x) = \sin x + (\sin x)^3$

3.3.21. Nếu $f(x)$ làm một hàm chẵn, sai phân trung tâm $[f(\Delta x) - f(-\Delta x)]/2\Delta x$ đúng bằng $f'(0) = 0$. Tại sao?

3.3.22. Nếu $f(x)$ là một hàm lẻ, sai phân cấp hai $[f(\Delta x) - 2f(0) + f(-\Delta x)]/(\Delta x)^2$ đúng bằng $f''(0) = 0$. Tại sao?

Viết ra biểu thức bậc hai $f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2$ trong 3.3.23–3.3.26.

3.3.23. $f(x) = \cos x + \sin x$

3.3.24. $f(x) = \tan x$

3.3.25. $f(x) = (\sin x)/x$

3.3.26. $f(x) = 1 + x + x^2$

Trong 3.3.26, tìm $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$ quanh $a = 1$.

3.3.27. Tìm A và B trong $\sqrt{1-x} \approx 1 + Ax + Bx^2$.

3.3.28. Tìm A và B trong $1/(1-x)^2 \approx 1 + Ax + Bx^2$.

3.3.29. Thế xấp xỉ bậc hai vào $[f(x+\Delta x) - f(x)]/\Delta x$, để ước lượng sai số trong xấp xỉ một phía của $f'(x)$.

3.3.30. Hỏi xấp xỉ bậc hai tại $x = 0$ của $f(-\Delta x)$?

3.3.31. Thế đối với $f(x+\Delta x)$ và $f(x-\Delta x)$ trong xấp xỉ trung tâm $[f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)]/2\Delta x$, để nhận được $f'(x)$+sai số. Tìm các số hạng Δx và $(\Delta x)^2$ trong sai số này. Kiểm tra trên $f(x)=x^3$ tại $x=0$.

3.3.32. Dự đoán một xấp xỉ bậc ba $f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(0)(\Delta x)^2+$ ________. Kiểm tra nó trên $f(x)=x^3$.

Xây dựng một bảng như trong phần lý thuyết ở trên, chỉ ra các sai số thực sự tại $x=0$ trong các sai phân một phía, các sai phân trung tâm, các sai phân bậc hai, và các xấp xỉ bậc hai. Tính hai giá trị của Δx bằng tay, tính ba giá trị bằng máy tính cầm tay, tính bốn giá trị bằng máy tính.

3.3.33. $f(x)=x^3+x^4$

3.3.34. $f(x)=1/(1-x)$

3.3.35. $f(x)=x^2+\sin x$

3.3.36. Ví dụ 3.3.5 cho biết $1/(1-x)\approx 1+x+x^2$. Hỏi sai số tại $x=0.1$? Hỏi sai số tại $x=2$?

3.3.37. Thế $x=.01$ và $x=-0.1$ vào chuỗi hình học $1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$ để tìm $1/.99$ và $1/1.1$—trước tiên là tới bốn chữ số thập phân và sau đó tới tất cả các chữ số thập phân.

3.3.38. Tính $\cos 1^\circ$ bằng phương trình (3.3.4) với $a=0$. Có thể kiểm tra trên một chiếc máy tính cầm tay. Ngoài ra tính $\cos 1$. Tại sao hai giá trị này lại cách xa nhau đến vậy?

3.3.39. Tại sao $\sin x\approx x$ không chỉ là một xấp xỉ tuyến tính mà còn là một xấp xỉ bậc hai? $x=0$ là một điểm ________.

3.3.40. Nếu $f(x)$ là một hàm chẵn, tìm xấp xỉ bậc hai của nó tại $x=0$. Hỏi phương trình tiếp tuyến?

3.3.41. Đối với $f(x)=x+x^2+x^3$, hỏi sai phân trung tâm $[f(3)-f(1)]/2$, và hỏi hệ số góc thực sự $f'(2)$?

3.3.42. Đối với $f(x)=x+x^2+x^3$, hỏi sai phân cấp hai $[f(3)-2f(2)+f(1)]/1^2$, và hỏi giá trị thực $f'(2)$?

3.3.43. Sai số trong $f(a)+f'(a)(x-a)$ xấp xỉ $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$. Sai số này là dương khi hàm số là ________. Khi đó tiếp tuyến nằm phía ________ đường cong.

3.3.44. Vẽ một hàm tuyến tính từng khúc $y(x)$ mà là lõm trên. Định nghĩa "lõm trên" mà không dùng phép thử $d^2y/dx^2\geqslant 0$. Nếu các đạo hàm không tồn tại, chúng ta phải cần đến một định nghĩa mới.

3.3.45. Những câu sau nói gì về f hoặc f' hoặc f'' hoặc f'''?

1. Dân số đang tăng chậm hơn.
2. Máy bay đang hạ cánh một cách trơn tru.
3. Nền kinh tế đang tăng tốc.
4. Thuế suất không đổi.
5. Một chiếc xe đạp tăng tốc nhanh hơn nhưng một chiếc xe hơi lại đi nhanh hơn.
6. Giá cổ phiếu đã chạm trần.
7. Tốc độ thay đổi của gia tốc đang giảm xuống.
8. Khóa học này sắp kết thúc.

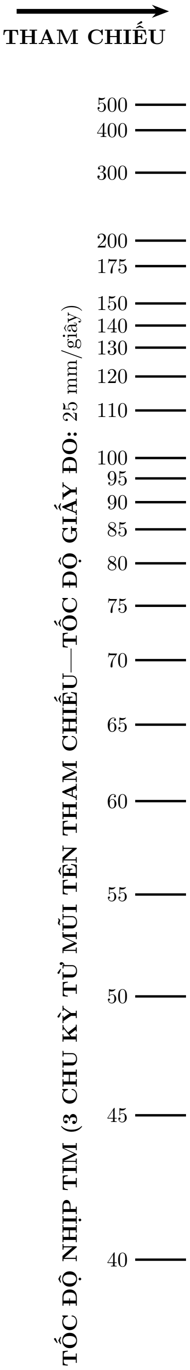
3.3.46 (Được khuyến nghị). Vẽ một đường cong mà đi lên-xuống-lên. Ở bên dưới nó đó vẽ đạo hàm của nó. Sau đó vẽ đạo hàm cấp hai. *Đánh dấu các điểm giống nhau trên các đường cong*—các cực đại, các cực tiểu, và các điểm uốn của đường cong thứ nhất.

3.3.47. Lặp lại Bài tập 3.3.46 nhưng trình bày $y(x)=x^3-4x^2+x+2$ và dy/dx và d^2y/dx^2 trên cùng một đồ thị.

3.4. Đồ thị

Việc đọc một đồ thị cũng tương tự như việc thưởng thức một bức tranh. Mọi thứ đều hiện ra trước mắt, nhưng bạn phải biết mình đang tìm gì. Một cách để tìm hiểu các đồ thị là bằng cách tự vẽ lại chúng, và trong quá khứ đây gần như là phương pháp duy nhất. Ngày nay, viêc dành hàng tuần để vẽ các đường cong đã trở thành dĩ vãng—một chiếc máy tính hoặc một chiếc máy tính cầm tay có chức năng vẽ đồ thị có thể thực hiện điều này một cách nhanh hơn và tốt hơn. Nhưng điều này không xoá đi được nhu cầu thưởng thức một đồ thị (hay một bức tranh), vì một đường cong thể hiện một lượng thông tin khổng lồ.

Mục này kết hợp hai cách tiếp cận. Một cách là nghiên cứu các đồ thị thực sự được tạo ra bởi máy móc (đặc biệt là các điện tâm đồ). Một cách khác là tìm hiểu ý nghĩa toán học của các đồ thị—hệ số góc, độ võng, các đường tiệm cận, các phép

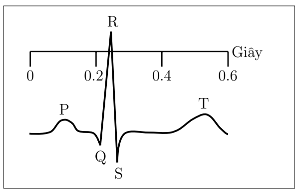


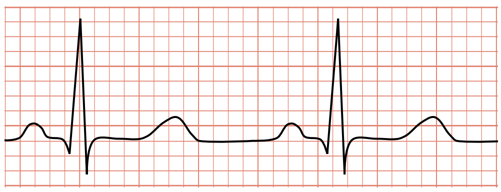
tịnh tiến, và tỷ lệ thu phóng. Chúng ta giới thiệu ***phép biến đổi căn giữa*** và ***phép biến đổi thu phóng***. Hai cách tiếp cận này tương tự như phần còn lại của giải tích, trong đó các đạo hàm và các tích phân đặc biệt được thực hiện bằng tay và các ứng dụng thường nhật được thực hiện bằng dụng máy tính. Cả hai cách tiếp cận này đều quan trọng—máy móc có thể thực hiện các thử nghiệm mà chúng ta không bao giờ có thể làm được. Nhưng nếu không có toán học, chúng ta sẽ không hiểu được ý nghĩa của các lệnh được nhập vào máy tính. Để tạo ra các đồ thị tốt, bạn phải tự mình hiểu về một vài đồ thị được xem là tốt.

ĐỌC MỘT ĐIỆN TÂM ĐỒ (ECG hay EKG)

Các đồ thị của một ECG[13] cho thấy hiệu điện thế của dòng điện trong tim trong suốt một nhịp tim. Có mười hai đồ thị—sáu đồ thị từ dữ liệu của các điện cực được gắn liền với ngực, và sáu đồ thị từ dữ liệu của các điện cực được gắn liền với hai cánh tay và chân trái. (Việc đo điện tâm đồ không đau, nhưng ai rồi cũng đều lo lắng cả. Bạn phải nằm yên, vì sự co giãn của các cơ khác sẽ làm nhiễu dữ liệu đọc từ tim.) Các đồ thị ghi lại các xung điện, khi các tế bào khử cực và tim co lại.

Tôi có thể giải thích được gì về vấn đề phức tạp này trong hai trang đây? Đồ thị dưới đây cho thấy mẫu hình cơ sở của ECG. ***Lưu ý sóng*** P, ***phức bộ*** QRS, ***và sóng*** T. Những mẫu hình này, được thấy khác nhau trong mười hai đồ thị, cho biết liệu tim là bình thường hay loạn nhịp—hay bị nhồi máu cơ tim (một cơn đau tim).





Trước hết tất cả các đồ đều cho thấy ***tốc độ nhịp tim***. Những đường thẳng đứng đậm theo quy ước cách nhau $\frac{1}{5}$ giây. Những đường thẳng đứng nhạt cách nhau $\frac{1}{25}$ giây. Nếu tim đập mỗi $\frac{1}{5}$ giây (một đường thẳng đứng đậm) nhịp tim là 5 nhịp trên mỗi giây hay 300 nhịp trên mỗi phút. Nghĩa là tim đang trải qua *chứng nhịp tim nhanh* rất trầm trọng—khó mà sống được. Nhịp tim bình thường là nằm trong khoảng giữa ba đường thẳng đứng đậm trên mỗi nhịp ($\frac{3}{5}$ giây, hay 100 nhịp trên mỗi phút) và năm đường thẳng đứng đậm (một giây giữa hai nhịp, 60 nhịp trên mỗi phút). Trẻ em có nhịp tim nhanh hơn người lớn, trên 100 nhịp trên mỗi phút. Trong hình trên, nhịp tim là ____. Nhịp tim dưới 60 nghĩa là tim đang trải qua *chứng nhịp tim chậm*, bản thân chứng nhịp tim chậm không gây nguy hiểm. Đối với một vận động viên khi đang ở trạng thái nghỉ, điều này là bình thường.

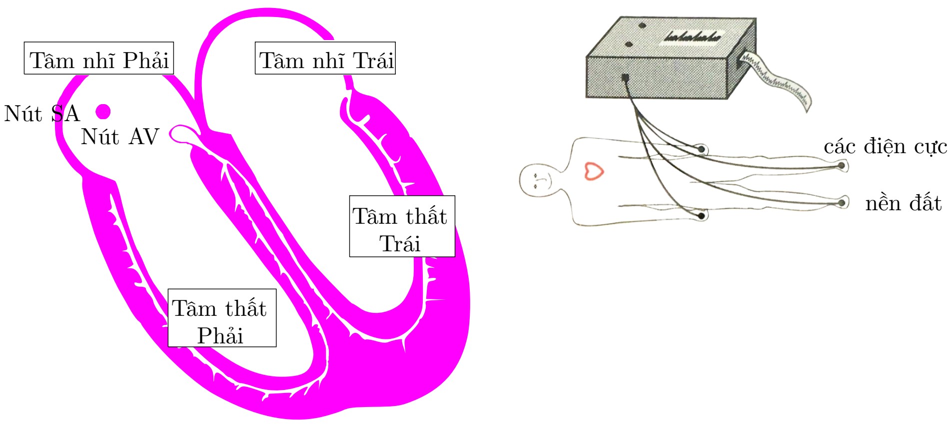
Các bác sĩ nhớ sáu giá trị nhịp 300, 150, 100, 75, 60, 50. Những giá trị này tương ứng với điều này tương ứng với 1, 2, 3, 4, 5, 6 đường thẳng đứng đập giữa các nhịp tim. Khoảng cách là dại lượng dễ nhất để đo giữa các đỉnh nhọn (các đỉnh của sóng R). Nhiều bác sĩ đặt một thang đo được in sẵn cạnh biểu đồ. Một giáo trình y học nhấn mạnh rằng "Để xác định tốc độ nhịp tim, chúng ta để ý nơi sóng tiếp theo bắt đầu đi xuống. Không cần đến bất kỳ tính toán mang tính toán học nào cả." Nhưng bạn sẽ thấy những con số này đến từ đâu.

Thứ tiếp theo cần tìm hiểu là ***loại nhịp tim***. Nhịp tim bình thường được thiết lập bởi tế bào mãnh có khả năng phát nhịp, tế bào này này sinh ra sóng P. Một khoảng cách hằng giữa các sóng thường sẽ mang ý nghĩa là tốt—và sau đó người ta

[13]Nd: Điện tâm đồ (tiếng Anh: electrocardiogram).

sẽ kiểm tra từng nhịp đập. Khi có một sự tắc nghẽn xung động lan truyền từ các tâm nhĩ xuống các tâm thất, chúng ta sẽ thấy một sự chậm trễ trong đồ thị. Đôi khi các tế bào mãnh có khả năng phát nhịp kích tim một cách bất thường. Hình 3.4.2 cho thấy *chứng loạn nhịp xoang* [14] (khá bình thường). Trong tình huống này, thời gian giữa các đỉnh đang thay đổi. Khi bị bệnh hay có tình trạng cấp cứu, có thể có tế bào mãnh nảo đó, ẩn đâu đó trong bất kỳ bộ phận nào của quả tim, đang có tình trạng bất thường.

Tôi nên chỉ ra những phần chính. Tim của chúng ta có bốn buồng, một cặp tâm nhĩ-thất bên trái và bên phải. Nút SA[15] sẽ là các tế bào mãnh có khả năng phát nhịp. Sự xung điện lan truyền từ các tâm nhĩ đến các tâm thất—từ những buồng nhỏ mà có chức năng “mồi máu vào bơm” đến các buồng có công suất lớn để đưa máu đi khắp cơ thể. Sóng P xuất hiện do sự co bóp của các tâm nhĩ. Có sự tạm dừng khoảng $\frac{1}{10}$ giây tại nút AV[16] . Sau đó sóng QRS bắt đầu khi có sự co bóp của các tâm thất, và sóng T bắt đầu khi tâm thất nghỉ. Các tế bào trở lại mang điện tích âm và và chu kỳ tim là hoàn tất.

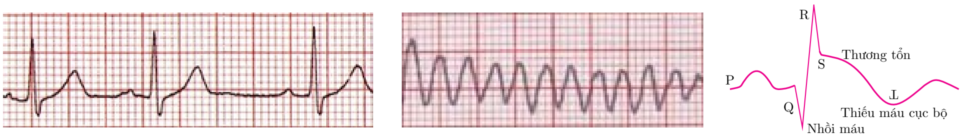


HÌNH 3.4.1. Người cảm thấy hạnh phúc với một trái tim và một điện tâm đồ bình thường.

Điện tâm đồ cho thấy khi tế bào mãnh có khả năng phát nhịp hoạt động sai. Các tế bào mãnh có khả năng phát nhịp khác điều hoà tim khác sẽ chịu trách nhiệm thế chỗ—nút AV sẽ có nhịp 60/phút. Một sự kích tim sớm trong tâm thất có thể tạo ra một đỉnh khá rộng trong phức bộ QRS, đi theo sau đó là một sự tạm dừng dài. Các xung động lan truyền từ các tâm nhĩ xuống các tâm thất chậm lại. Ngoài ra, tế bào mãnh có khả năng phát nhịp có thể đột ngột tăng tốc (chứng nhịp tim nhanh kịch phát trên thất là 150-250/phút). Nhưng nguy hiểm nhất là *chứng rung*. 25 mm/giây

Hình 3.4.2b cho thấy một quả tim sắp chết. ECG chỉ ra các cơn co thắt bất thường—không có sự hiện diện của dãy PQRST bình thường. Còn có thể là loại tim nào nữa nếu như không phải là một quả tim sắp chết sẽ sinh ra một nhịp tim như vậy? Các cơ tim đang run rẩy hay “rung” một cách độc lập. Hoạt động bơm gần như biến mất, điều này có nghĩa là cần cấp cứu. Bệnh nhân cần CPR[17] ngay lập tức—người ta thực hiện điều này nhằm mục đích thay thế cho việc bơm máu

[14]Nd: Chứng loạn nhịp xoang (tiếng Anh: sinus arrhythmia).
[15]Nd: Nút xoang nhĩ (tiếng Anh: Sinoatrial node, viết tắt: SA node).
[16]Nd: Nút nhĩ thất (tiếng Anh: Atrioventricular node, viết tắt: AV node).
[17]Nd: Hồi sức tim phổi (tiếng Anh: Cardiopulmonary resuscitation, viết tắt: CPR).



Hình 3.4.2. Nhịp tim đáng nghi. Rung nghiêm trọng. Các dấu hiệu của một cơn đau tim.

mà tim đã không thể thực hiện được nữa. Hồi sức tim phổi là một tổ hợp các thao tác cấp cứu bao gồm ấn lồng ngực và hô hấp nhân tạo (bằng tay và miệng) để khởi động lại nhịp tim. CPR có thể được thực hiện ngay trên đường phố. Trong bệnh viện, người ta dùng một máy khử rung tim để tạo ra những cú sốc nhằm mục đích làm cho quả tim đập trở lại. Nó khử cực *tất cả* các tế bào tim; để thiết lập lại nhịp tim. Khi đó các xung động lan truyền từ nút SA đến các tâm nhĩ đến nút AV và đến các tâm thất.

Thảo luận này không dùng đến tất cả mười hai đồ thị để xác định vấn đề mà môt bệnh nhân có bệnh lý về tim mạch có thể mắc phải. Lý do là vì để hiểu tất cả mười đồ thị này chúng ta cần đến các *vector*, nhưng khái niệm này chưa được giới thiệu. Hãy xem trước Mục 11.1 để hiểu về vector tim, và đặc biệt đọc Mục 11.2 để hiểu *mười hai phép chiếu* của nó. Những nội dụng đó phân biệt giữa tâm nhĩ và tâm thất, phía trái và phía phải, mặt trước và mặt sau của quả tim. Thông tin này rất quan trọng trong trường hợp xảy ra một cơn đau tim. Một "cơn đau tim" là một *cơn nhồi máu cơ tim*[18] (MI).

Một MI xảy ra khi một phần của động mạch đến tim bị tắc nghẽn (tắc nghẽn mạch vành). Một khu vực nào đó không được cung cấp máu—vì vấy thiếu oxygen hoặc glucose. Thường cơn đau tim diễn ra trong tâm thất trái dày, phần này cần nhiều máu nhất. Các tế bào trước tiên xảy ra *thiếu máu cục bộ*[19], sau đó bị *tổn thương*[20] và cuối cùng bị *nhồi máu*[21] (chết). Các tín hiệu điện tâm đồ cổ điển liên quan đến ba chữ I[22]:

> Thiếu máu cục bộ: Lượng máu cung cấp bị giảm, sóng T đảo ngược trong dữ liệu của các điện cực ở ngực.
>
> Tổn thương: Một đoạn bị nâng cao giữa S và T có nghĩa là vừa mới có một cơn đau tim.
>
> Nhồi máu: Sóng Q, thường tạo ra một cú hụp nhỏ hoặc không được nhìn thấy, rộng bằng một hình vuông nhỏ ($\frac{1}{25}$ giây). Nó có thể chiếm một phần ba của toàn bộ phức bộ QRS.

Sóng Q đưa ra các chẩn đoán. Bạn có thể tìm thấy cả ba chữ I trong Hình 3.4.2c.

Thật là tuyệt vời khi thấy một đồ thị tốt có thể làm được rất nhiều thứ.

CƠ CHẾ CỦA CÁC ĐỒ THỊ

Từ ý nghĩa của các đồ thị, chúng ta giảm xuống các cơ chế. Bây giờ một công thức được cho đối với $f(x)$. Vấn đề được đặt ra là *tạo ra một đồ thị*. Cách đánh giá $f(x)$ một cách thủ công và và vẽ một đường cong đi qua hàng tá điểm đã trở nên quá lỗi thời rồi. Một máy tính sẽ vẽ một parabola tốt hơn một nghệ sĩ (người nghệ sĩ có xu hướng làm cho nó tiệm cận một đường thẳng). Có vài điều mà chỉ máy tính mới

[18]Nd: Cơn nhồi máu cơ tim (tiếng Anh: myocardial infarction, viết tắt: MI).
[19]Nd: Thiếu máu cục bộ (tiếng Anh: ischemia).
[20]Nd: Tổn thương (tiếng Anh: injury).
[21]Nd: Nhồi máu (tiếng Anh: infraction).
[22]Nd: Ba chữ I của I*schemia*, I*njury*, I*nfarction*.

hiểu được, và có vài điều khác mà chỉ những người nghệ sĩ mới cảm nhận được, và vẫn còn có những điều khác mà chỉ bạn và tôi mới biết được—vì chúng ta là những người thấu hiểu được các đạo hàm.

Công việc của chúng ta là áp dụng giải tích. Chúng ta trích xuất thông tin từ f' và f'' cũng như f. Chúng ta có thể vô tình không chú ý các biến động nhỏ trong, nhưng điều này cũng đồng nghĩa với việc chúng ta có thể đã bỏ lỡ một vài tính chất quan trọng.

(1) Dấu của $f(x)$ (phía trên hoặc phía dưới trục hoành: $f = 0$ tại các *giao điểm* với trục hoành)
(2) Dấu của $f'(x)$ (tăng hoặc giảm: $f' = 0$ tại các *điểm dừng*)
(3) Dấu của $f''(x)$ (lõm trên hoặc lõm dưới: $f'' = 0$ tại các điểm uốn)
(4) Hành vi của $f(x)$ khi $x \to \infty$ và $x \to -\infty$
(5) Các điểm mà tại đó $f(x) \to +\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$
(6) Chẵn hay lẻ? Tuần hoàn? Các bước nhảy trong f hoặc f'? Các điểm biên? $f(0)$?

Ví dụ 3.4.1.

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \qquad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \qquad f''(x) = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}$$

Dấu của $f(x)$ phụ thuộc vào $1 - x^2$. Như vậy $f(x) > 0$ trong khoảng trong mà tại đó $x^2 < 1$. Đồ thị võng lên ($f''(x) > 0$) trong cùng khoảng đó. Không có các điểm uốn, vì f'' không bao giờ bằng không. Điểm dừng mà tại đó f' triệt tiêu có $x = 0$. Chúng ta có một *cực tiểu địa phương* tại $x = 0$.

Các ***đường tiệm cận*** cắt đồ thị tại vô cùng. Đối với x lớn, các số hạng quan trọng là x^2 và $-x^2$. Tỷ số của chúng là $+x^2/-x^2 = -1$—đây là giới hạn khi $x \to \infty$ và $x \to -\infty$. Đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Hàm số f tiến tới vô cùng, hay việc f bùng nổ, diễn ra khi $1 - x^2 = 0$. Điều này xảy ra khi $x = +1$ và $x = -1$. Đường tiệm cận đứng là các đường $x = 1$ và $x = -1$. Đồ thị trong Hình 3.4.3a tiệm cận những đường thẳng này.

nếu $f(x) \to b$ khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$, đường thẳng $y = b$ là một *đường tiệm cận ngang*
nếu $f(x) \to +\infty$ hoặc $-\infty$ khi $x \to a$, đường thẳng $x = a$ là một *đường tiệm cận đứng*
nếu $f(x) - (mx + b) \to 0$ khi $x \to +\infty$ hoặc $-\infty$, đường thẳng $y = mx + b$ là một *đường tiệm cận xiên*.

Cuối cùng điều quan trong cần biết là hàm số này là ***chẵn***: $f(x) = f(-x)$ bởi vì bình phương của x không phụ thuộc vào dấu của x. Đồ thị đối xứng qua trục y.

Để tóm tắt ảnh hưởng của việc chia bởi $1 - x^2$: Không có ảnh hưởng gần $x = 0$. Bùng nổ tại 1 và -1 do mẫu số bằng không. Hàm số tiến tới -1 khi $|x| \to \infty$.

Ví dụ 3.4.2.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Ví dụ này có mẫu số là $x - 1$. Vì vậy $x = 1$ là một đường tiệm cận đứng, tại đó $f(x)$ trở thành vô cùng. Đường tiệm cận đứng chủ yếu được rút ra từ việc *mẫu số bằng không*.

Nhìn xa hơn về phía bên phải của $x = 1$. Cả hai $f(x)$ và $f''(x)$ đều là dương đối với $x > 1$. Hệ số góc bằng không tại $x = 2$. Nó phải là một cực tiểu địa phương.

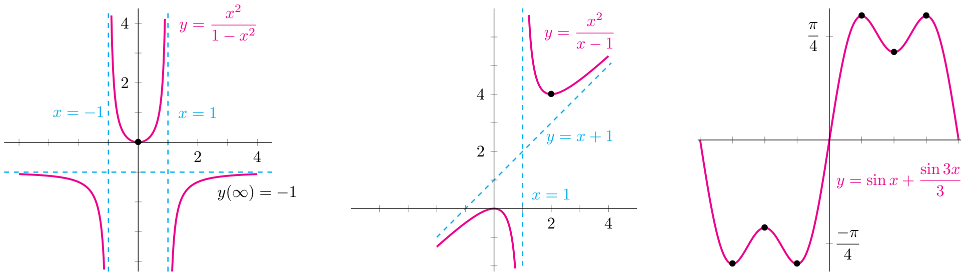
Điều gì xảy ra khi $x \to \infty$? Chia x^2 bởi $x - 1$, số hạng dẫn đầu là x. Hàm số trở nên khá lớn. Nó tăng tuyến tính—chúng ta kỳ vọng sự tồn tại của một ***đường***

tiệm cận xiên. Để tìm nó, chúng ta thực hiện phép chia một cách chính xác:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}. \tag{3.4.1}$$

Số hạng sau cùng tiến tới không. Đường thẳng $y = x + 1$ có thể được xem là một một đường tiệm cận của hàm số đã cho.

Hàm số này là không lẻ và là không chẵn. Đồ thị của nó nằm trong Hình 3.4.3b. Với ***chức năng thu nhỏ***, bạn sẽ thấy các đường tiệm cận. ***Chức năng phóng to*** đối với $f = 0$ hoặc $f' = 0$ hay $f'' = 0$.



HÌNH 3.4.3. Các đồ thị của $x^2/(1-x^2)$ và $x^2/(x-1)$ và $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

VÍ DỤ 3.4.3. $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ có hệ số góc $f'(x) = \cos x + \cos 3x$.

Trên hết, những hàm số này đều là ***tuần hoàn***. Nếu x tăng thêm 2π, không có gì thay đổi. Các đoạn đồ thị từ 2π tới 4π là sự lặp lại của các đoạn đồ thị từ 0 tới 2π. Như vậy $f(x + 2\pi) = f(x)$ và chu kỳ là 2π. Bất kỳ khoảng nào có độ dài 2π đều sẽ thể hiện một bức tranh đầy đủ về hàm số, và Hình 3.4.3c chọn ngay khoảng từ $-\pi$ tới π.

Tính chất nổi bậc thứ hai là f là ***lẻ***. Hàm sine thoả mãn $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ. Bằng cách lấy đối xứng nửa bên phải qua gốc tọa độ, bạn nhận được nửa bên trái. Ngược lại, hàm cosine trong $f'(x)$ là chẵn.

Để tìm các không điểm của $f(x)$, $f'(x)$ và $f''(x)$, viết lại các hàm số này dưới dạng:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x \quad f'(x) = -2\cos x + 4\cos^3 x \quad f''(x) = -10\sin x + 12\sin^3 x.$$

Chúng ta đã thay đổi $\sin 3x$ thành $3\sin -4\sin^3 x$. Đối cới các đạo hàm, dùng $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Bây giờ hãy tìm các không điểm—các *giao điểm* với trục hoành, các *điểm dừng*, và các *điểm uốn*.

$$\begin{array}{lll} f = 0 & 2\sin x = \frac{4}{5}\sin^3 x \Rightarrow \sin x = 0 \text{ hoặc } \sin^2 x = \frac{3}{2} & \Rightarrow x = 0, \pm\pi \\ f' = 0 & 2\cos x = 4\cos^3 x \Rightarrow \cos x = 0 \text{ hoặc } \cos^2 x = \frac{1}{2} & \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4} \\ f'' = 0 & 5\sin x = 6\sin^3 x \Rightarrow \sin x = 0 \text{ hoặc } \sin^2 x = \frac{5}{6} & \Rightarrow x = 0, \pm 66^\circ, \pm 114^\circ, \pm\pi \end{array}$$

Chừng này thông tin là quá đủ để phác họa đồ thị. Các điểm dừng $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ cách đều nhau. Tại các điểm này $f(x)$ bằng $\sqrt{8}/3$ (cực đại), $2/3$ (cực tiểu địa phương), $\sqrt{8/3}$ (cực đại). Hình 3.4.3c cho thấy đồ thị.

Tôi muốn đề cập đến một sự tiếp nối của cùng mẫu hình này:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots \qquad f''(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$$

Nếu chúng ta dừng lại sau mười số hạng, $f(x)$ cực gần với một ***hàm bậc thang***. Nếu chúng ta không dừng lại, *hàm bậc thang đúng chứa vô hạn các sine*. Nó nhảy từ $-\pi/4$ tới $+\pi/4$ khi x đi ngang qua 0. Nói một cách chính xác hơn, nó là một "***sóng bậc hai***," vì đồ thị nhảy xuống trở lại tại π và lặp lại. Hệ số góc $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots$ cũng có chu kỳ 2π. ***Vô hạn các hàm cosine cộng lại với nhau thành một hàm delta***! (Hệ số góc tại bước nhảy là vô hạn). Các tổng của các sine và các cosine này là các ***chuỗi Fourier***.

ĐỒ THỊ ĐƯỢC VẼ BỞI MÁY TÍNH VÀ MÁY TÍNH CẦM TAY

Chúng ta đang đến với một chủ đề vô cùng quan trọng. Nếu bạn có ***phần mềm vẽ đồ thị*** trên một chiếc một máy tính, hoặc nếu bạn có một ***máy tính cầm tay có chức năng vẽ đồ thị***, bạn có thể mang giải tích đến với cuộc sống. Một đồ thị trình bày $y(x)$ theo một cách mới—khác với cách trình bày nó dưới dạng công thức. Thông tin bị che giấu trong công thức sẽ được thấy rõ trên đồ thị. *Nhưng đừng vì thế mà vứt bỏ các công thức của $y(x)$ và dy/dx.* Đạo hàm còn lâu mới lỗi thời.

Những trang sách này thảo luận về việc giải tích và các đồ thị kết hợp với nhau như thế nào. Chúng ta làm việc trên một bài toán quan trọng của toán học ứng dụng—tìm nơi $y(x)$ đạt được cực tiểu của nó. Bạn chắc không cần phải để tôi nói cho biết về hàng trăm ứng dụng của bài toán này. Bắt đầu với công thức. Làm thế nào bạn tìm được điểm x^* mà tại đó $y(x)$ là nhỏ nhất ?

Đầu tiên, hãy vẽ đồ thị. Điều này cho thấy những đặc tính chính của hàm số. Chúng ta sẽ thấy (một cách đại khái) vị trí của x^*. Có thể có vài cực tiểu, hoặc có thể không có. Nhưng những gì chúng ta thấy phụ thuộc vào một quyết định do chính chúng ta đưa ra—*miền của x và y trong cửa sổ nhìn.*

Nếu chúng ta không biết gì về $y(x)$, chúng ta khó mà chọn được miền. Chúng ta có thể chấp nhận một miền mặc định, và phóng to hoặc thu nhỏ. Chúng ta có thể dùng chương trình tự động định tỷ lệ trong Mục 1.7. Bằng cách nào đó x^* có thể được quan sát trên màn hình. Sau đó chúng ta chỉ việc tính giá trị của hàm tại đó.

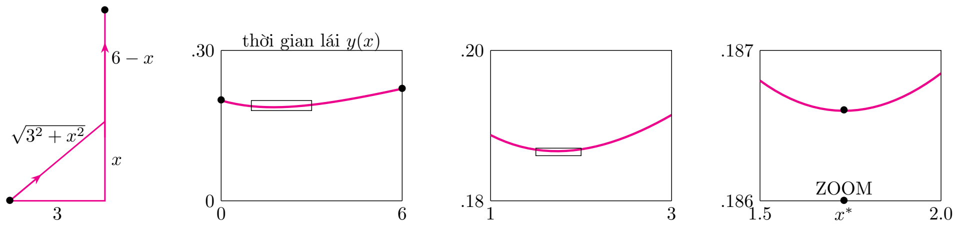
Tôi muốn làm việc với một ví dụ cụ thể. Chúng ta đã giải bài toán này bằng giải tích—tìm điểm x^* tốt nhất để đi vào đường cao tốc. Các tốc độ trong Mục 3.2 là 30 và 60. Chiều dài của đường cao tốc sẽ là $b = 6$. *Miền của các giá trị hợp lý đối với điểm đi vào vào đường cao tốc là* $0 \leqslant x \leqslant 6$. Khoảng cách tới đường cao tốc trong Hình 3.4.4 là $a = 3$. Chúng ta lái xe trên một đoạn đường dài $\sqrt{3^2 + x^2}$ tại vận tốc 30 và trên đoạn đường còn lại dài $6 - x$ tại vận tốc 60:

(3.4.2) *thời gian đi* $$y(x) = \frac{1}{30}\sqrt{3^2 + x^2} + \frac{1}{60}(6 - x).$$

Đây là hàm số cần được cực tiểu hoá. Đồ thị của nó cực kỳ phẳng.

Việc đồ thị quá phẳng dường như hơi bất thường. Thực ra là ngược lại, việc này khá phổ biến. *Một đồ thị phẳng luôn có $dy/dx = 0$ tại mọi x.*

Phần đồ thị gần cực tiểu trông giống như $y = Cx^2$. Nó là một parabola ngồi trên một tiếp tuyến ngang. Tại một khoảng cách $\Delta x = .01$ theo phương ngang, chúng ta chỉ đi lên thêm $C(\Delta x)^2 = .0001C$ theo phương đứng. Trừ khi C là một số lớn, nếu không Δy này khó có thể được nhìn thấy.



Hình 3.4.4. Đi vào tại x. Đồ thị của thời gian lái xe $y(x)$. Các hộp thu phóng định vị x^*.

Giải pháp là thay đổi tỷ lệ. ***Phóng to tại*** x^*. Tiếp tuyến vẫn phẳng , vì dy/dx vẫn bằng không. Nhưng độ võng từ C được tăng lên. Hình 3.4.4 cho thấy hộp *thu phóng* phóng to thành một đồ thị mới của $y(x)$.

> Một máy tính cầm tay luôn có một hoặc nhiều cách để tìm x^*. Với chế độ `TRACE`, bạn sẽ điều hướng một con trỏ dọc theo đồ thị. Từ hiện thị của các giá trị y, chiếc máy đọc $y_{\max}$ và x^* với độ chính xác một điểm ảnh. Một lần phóng to sẽ đưa ra độ chính xác tốt hơn, vì nó làm giãn các trục—từng điểm ảnh biểu diễn một Δx và Δy nhỏ hơn. Máy TI-81 làm giãn 4 lần với tùy chỉnh mặc định. Một cách thậm chí tốt hơn nữa, hãy mô phỏng lại toàn bộ quá trình của chức năng thu phóng—*vẽ* `ZOOM BOX` *trên trên màn hình.* Chọn hai hai góc đối diện nhau, nhấn `ENTER`, và hộp trở thành cửa sổ nhìn mới (Hình 3.4.4).

Lần phóng to thứ nhất thu hẹp phạm vi tìm kiếm đối với x^*. Nó nằm giữa $x = 1$ và $x = 3$. Chúng ta xây dựng một `ZOOM BOX` mới và phóng to lần nữa. Bây giờ $1.5 \leqslant x \leqslant 2$. Độ chính xác hợp lý sẽ được nhanh chóng đưa ra. Độ chính xác cao khó mà được đưa ra một cách nhanh chóng. Chúng ta cần thời gian để tạo ra hộp thu phóng và thực hiện phóng to.

Câu hỏi 14. *Điều gì xảy ra khi chúng ta phóng to,nếu tất cả các hộp thu phóng đều là hình vuông (tỷ lệ bằng nhau)?*

Câu trả lời. Hình càng ngày càng phẳng hơn. Chúng ta đang phóng to vào tiếp tuyến. Đổi x thành $\frac{X}{4}$ và y thành $\frac{Y}{4}$, parabola $y = x^2$ trở nên phẳng hơn thành $Y = X^2/4$. Để thấy bất kỳ chỗ võng nào, *chúng ta phải dùng một hộp thu phóng hẹp dài.*

Tôi muốn đổi sang một cách tiếp cận hoàn toàn khác. Giả sử chúng ta có một công thức đối với dy/dx. *Bạn có thể thấy được đạo hàm đó bằng cách phóng to đồ thị một cách vô hạn*! Nhưng việc phóng to đồ thị một cách vô hạn là không thể nên bạn chỉ có thể tính giới hạn của $\Delta y/\Delta x$ bằng trí lực của mình mà thôi:

(Gọi biểu thức này là) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{30\sqrt{3^2+x^2}} - \frac{1}{60}. \qquad f(x).$$

Hàm số này bằng không tại x^*. Vấn đề cần điện toán giải quyết đã hoàn toàn thay đổi: Giải $f(x) = 0$. *Việc tìm một nghiệm của $f(x)$ là dễ hơn việc tìm một cực tiểu của $y(x)$.* Đồ thị của $f(x)$ cắt trục x. Đồ thị của $y(x)$ trở nên phẳng—điều này làm cho việc xác định cực tiểu trở nên khó hơn.

Lấy hàm số mẫu $y = x^2$ đối với $|x| < .01$. Hệ số góc $f = 2x$ thay đổi từ $-.02$ tới $+.02$. Giá trị của x^2 chỉ thay đổi một lượng .0001—khó mà nhìn thấy được điểm cực tiểu.

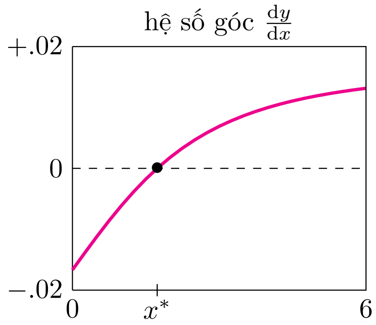
Nhắc lại: phép cực tiểu hóa là dễ hơn với dy/dx. Màn hình hiển thị một cải thiện bậc độ lớn, khi chúng ta lần theo vết hoặc phóng to trên $f(x) = 0$. Trong giải tích, chúng ta luôn mặc định nghĩ đến đạo hàm. Không lạ gì nếu chúng ta cảm thấy blasé[23] với việc hầu như lúc nào cũng gặp phải $dy/dx = 0$. Gặp nhiều đến nỗi chúng ta đã quên mất lý do tại sao chúng ta lại làm việc với hệ số góc thay vì hàm số.

Câu hỏi 15. *Làm thế nào để bạn có được một cái thiện bậc độ lớn khác?*

Câu trả lời. Dùng đạo hàm tiếp theo! Với một cộng đối với df/dx, mà là d^2f/dx^2, sự hội tụ thậm chí còn nhanh hơn nữa. Trong hai bước, sai số đi từ $0,01$ tới $.0001$ tới $.00000001$. Trong trường hợp này, bạn có thể thấy được đạo hàm của df/dx bằng cách phóng to đồ thị của df/dx một cách vô hạn, và *phương pháp của Newton* chính là xem xét đến điều này. Mục 3.6 và 3.7 nghiên cứu $f(x) = 0$.

Ví dụ đường cao tốc đến MIT là một ví dụ trong đó chúng ta nhận được độ chính xác hoàn hảo. Chúng ta có thể giải $dy/dx = 0$ bằng đại số. Phương trình được đơn giản thành $60x = 30\sqrt{3^2 + x^2}$. Chia bởi 30 và bình phương đưa ra $4x^2 = 3^2 + x^2$. Khi đó $3x^2 = 3^2$. Nghiệm chính xác là $x^* = \sqrt{3} = 1.73205\ldots$

Một mô hình như thế này là một mô hình chuẩn, để kiểm tra sự ưu khuyết của các phương pháp. Nó cũng cho thấy điều chúng ta chưa bao giờ đánh giá cao—sự vô cùng phẳng của đồ thị. Sự khác biệt trong thời gian lái xe giữa việc đi vào đường cao tốc tại $x^* = \sqrt{3}$ và $x = 2$ là *một giây*.



hệ số góc bằng không tại điểm cực tiểu

Hình 3.4.5

PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN GIỮA VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI THU PHÓNG

Để chụp một tấm ảnh, chúng ta làm hai việc—nhắm đúng hướng và đứng đúng khoảng cách. Sau đó chụp hình. Chúng ta cũng thực hiện những bước tương tự đối với một đồ thị. Trước tiên chúng ta chọn ra tâm điểm mới. Đồ thị được *dịch chuyển*, để di chuyển điểm đó từ (a, b) tới $(0, 0)$. Sau đó chúng ta quyết định đồ thị nên đi xa tới đâu. Nó nằm vừa vặn trong một hình chữ nhật, giống như tấm ảnh. Việc *định tỷ lệ* thành x/c và y/d đặt phần đồ thị chúng ta muốn vào hình chữ nhật.

Một nhiếp ảnh gia giỏi thậm chí còn thực hiện nhiều việc hơn nữa (như một nghệ sĩ). Nhắm vào các đối tượng và lấy nét. Để có được các các đồ thị tốt, chúng ta cũng nhất thiết phải thực hiện những điều này. Nhưng một chiếc máy tính cầm tay quen thuộc hoặc máy tính hoặc máy ảnh được xây dựng để thực hiện những điều này mà không cần bạn phải là một nghệ sĩ—chỉ cần nhắm và chụp. Tối muốn giải thích cách nhắm tại $y = f(x)$.

Chúng ta đang thực hiện đúng như những gì một chiếc máy tính cầm tay thực hiện, với một khác biệt lớn. *Máy tính cầm tay không đổi toạ độ. Chúng ta lại có thay đổi.* Khi $x = 1$, $y = -2$ di chuyển tới tâm của cửa sổ nhìn, máy tính cầm tay vẫn hiện thị điểm đó là $(1, -2)$. Khi ***phép biến đổi căn giữa*** tác động lên $y + 2 = m(x - 1)$, những con số này biến mất. *Điều này sẽ gây nhầm lẫn trừ khi x và y cũng thay đổi. Các toạ độ mới là $X = x - 1$ và $Y = y + 2$. Khi đó phương trình mới là $Y = mX$.*

[23] Nd: Chán ngấy (tiếng Pháp: blasé).

Nguyên nhân chính (đối với con người) của việc này là để làm cho các thao tác đại số trở nên dễ dàng hơn. Đối với máy tính, không có sự khác biệt giữa $Y = mX$ và $y - y_0 = m(x - x_0)$. Nó thao tác trên $2x^2 - 4x$ dễ dàng như trên x^2. Nhưng chúng ta ưa thao tác hơn với $Y = mX$ và $y = x^2$, một phần vì đồ thị của chúng đi qua $(0, 0)$. Kể từ khi số không được minh, nó là con số được ưa thích nhất của các nhà toán học.

Phát biểu 3.4.1 (3F). Một ***phép biến đổi căn giữa*** dời sang trái a đơn vị và dời xuống dưới b đơn vị:

$$X = x - a \text{ và } Y = y - b \text{ biến đổi } y = f(x) \text{ thành } Y + b = f(X + a).$$

Ví dụ 3.4.4. Parabol $y = 2x^2 - 4x$ có cực tiểu của nó khi $dy/dx = 4x - 4 = 0$. Như vậy $x = 1$ và $y = -2$. Di chuyển điểm đáy này này tới tâm: $y = 2x^2 - 4x$ là

$$Y + 2 = 2(X - 1)^2 - 4(X - 1) \text{ hay } Y = 2X^2.$$

Parabola mới $Y = 2X^2$ có đáy tại $(0, 0)$. Cùng đường cong, nhưng được dời ngang và dời lên. $y = x^2$ chẳng qua là parabola ít rườm rà hơn. Sau cùng chúng ta dùng đến chức năng thu phóng.

Tiếp đến là định tỷ lệ. Chúng ta có thể muốn biết thêm thông tin (phóng to để thấy tiếp tuyến). Chúng ta có thể muốn một bức hình lớn (thu nhỏ để kiểm tra các đường tiệm cận). Chúng ta có thể co giãn một trục nhiều hơn trục còn lại, nếu bức hình trông phẳng như một chiếc bánh kếp hoặc dựng đứng như một toà nhà chọc trời.

Phát biểu 3.4.2 (3G). Một ***phép biến đổi thu phóng*** định tỷ lệ các trục X và Y theo các hệ số thu phóng[24] c và d:

$$\mathbf{x} = cX \text{ và } \mathbf{y} = dY \text{ biến đổi } Y = F(X) \text{ thành } y = dF(\mathrm{x}/c).$$

Các từ x và y mới, và đồ thị được tỷ lệ lại. Thường $c = d$.

Ví dụ 3.4.5. Bắt đầu với $Y = 2X^2$. Áp dụng một lần thu phóng hình vuông với $c = d$. Trong các toạ độ **xy** mới, phương trình là $\mathrm{y}/c = 2(\mathbf{x}/c)^2$. Số 2 sẽ biến mất nếu $c = d = 2$. Với phép biến đổi căn giữa đúng và phép biến đổi thu phóng đúng, mỗi parabola lõm trên đều sẽ là $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$.

Câu hỏi 16. *Điều gì sẽ xảy ra với các đạo hàm (*hệ số góc và độ võng*) sau một lần thu phóng?*

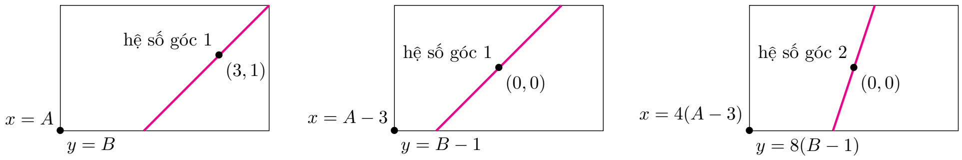
Câu trả lời. Hệ số góc (đạo hàm bậc nhất) được nhân bởi d/c. Áp dụng quy tắc xích cho $\mathrm{y} = dF(\mathrm{x}/c)$. Một lần thu phóng hình vuông có $d/c = 1$—*các đường thẳng giữ nguyên hệ số góc của chúng.* Đạo hàm bậc hai được nhân bởi d/c^2, điều này thay đổi độ võng. Một lần thu nhỏ chia bởi các con số nhỏ , nên bức hình lớn trở nên cong hơn.

Kết hợp các phép biến đổi căn giữa và các phép biến đổi thu phóng, như chúng ta thực hiện trong thực tế, đưa ra y theo x:

$$y = f(x) \text{ trở thành } Y = f(X + a) \text{ và khi đó } \mathrm{y} = d[f(\frac{\mathbf{x}}{c} + a) - b].$$

Câu hỏi 17. *Tìm các miền x và y sau hai phép biến đổi. Bắt đầu giữa* -1 *và* 1.

[24]Nd: Hệ số thu phóng (tiếng Anh: zoom factor) được dùng thay thế lẫn nhau với hệ số tỷ lệ (tiếng Anh: scaling factor) trong giáo trình này.



HÌNH 3.4.6. Thay đổi các tọa độ bằng căn giữa và thu phóng. Các máy tính cầm tay vẫn hiển thị (x, y).

CÂU TRẢ LỜI. Cửa sổ sau lần căn giữa là $-1 \leqslant x - a \leqslant 1$ và $-1 \leqslant y - b \leqslant 1$. Cửa sổ sau lần thu phóng là $-1 \leqslant c(x - a) \leqslant 1$ và $-1 \leqslant d(y - b) \leqslant 1$. Điểm $(1, 1)$ ban đầu nằm trong góc. Điểm $(c^{-1} + a, d^{-1} + b)$ bây giờ nằm trong góc.

Các số a, b, c, d được chọn để tạo ra một hàm số đơn giản hơn (chẳng hạn như $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$). Hay nói cách khác—điều này là quan trọng trong toán ứng dụng—chúng được chọn để làm cho x và y "không thứ nguyên." Một ví dụ là $y = \frac{1}{2}\cos 8t$. Tần số 8 có thứ nguyên 1/thời gian. Biên độ $\frac{1}{2}$ có thứ nguyên của một đường đi. Với $d = 2\,\mathrm{cm}$ và $c = 8\,\mathrm{sec}$, các đơn vị được loại bỏ và $\mathrm{y} = \cos t$.

Liệu tôi có thể đề cập đến một phép biến đổi mà *có* làm thay đổi hệ số góc được hay không? Nó là một ***phép quay***. Toàn mặt phẳng được quay. Một nhiếp ảnh gia có thể dùng góc chụp nghiêng—nhưng mọi người thường đứng thẳng khi tạo dáng. Bạn dùng phép quay khi bạn xem một tấm bản đồ hoặc làm thẳng một một bức ảnh. Trong mục sau, một hyperbola không thể nhận ra được chuyển thành $Y = 1/X$.

BÀI TẬP 3.4

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Vị trí, hệ số góc, và độ võng của $y = f(x)$ được quyết định bởi ___a___, ___b___ và ___c___. Nếu $|f(x)| \to \infty$ khi $x \to a$, đường thẳng $x = a$ là một ___d___ đứng. Nếu $f(x) \to b$ đối với x lớn, khi đó $y = b$ là một ___e___. Nếu $f(x) - mx \to b$ đối với x lớn, khi đó $y = mx + b$ là một ___f___. Các đường tiệm cận của $y = x^2/(x^2 - 4)$ là ___g___. Hàm số này là chẵn vì $y(-x) =$ ___h___. Hàm số $\sin kx$ có chu kỳ ___i___.

Gần một điểm mà tại đó $dy/dx = 0$, đồ thị cực kỳ ___j___. Đối với hàm số mẫu $y = Cx^2$, $x = .1$ đưa ra $y =$ ___k___. Một hộp thu phóng quanh một đồ thị có vẻ dài và ___l___. Chúng ta ___m___ vào trong hộp thu phóng đó để thu được độ chính xác đối với thêm một chữ số thập phân khác của x^*. Nhưng việc giải $dy/dx = 0$ lại đưa ra độ chính xác cao hơn, bởi vì đồ thị của nó ___n___ trục x. Hệ số góc của dy/dx là ___o___. Mỗi đạo hàm giống như một lần phóng to ___p___.

Để di chuyển từ (a, b) tới $(0, 0)$, dịch chuyển các biến thành $X =$ ___q___ và $Y =$ ___r___. Phép biến đổi ___s___ này biến $y = f(x)$ thành $Y =$ ___t___. Hệ số gốc ban đầu tại (a, b) bằng hệ số góc mới tại ___u___. Để co giãn các trục ra theo các hệ số c và d, đặt $\mathrm{x} = cX$ và ___v___. Phép biến đổi ___w___ biến $Y = F(X)$ thành $\mathrm{y} =$ ___x___. Các hệ số góc được nhân bởi ___y___. Các đạo hàm cấp hai được nhân bởi ___z___.

3.4.1. Tìm nhịp mạch khi tim đập mỗi $\frac{1}{2}$ giây hoặc mỗi hai đường thẳng đứng đậm hoặc mỗi x giây.

3.4.2. Một cách khác để tính nhịp tim là dùng các khoảng 6 giây. Các bác sĩ đếm các chu kỳ trong một khoảng.

(a) Có bao nhiêu đường thẳng đứng đậm trong 6 giây?

(b) Với 8 nhịp đập trên mỗi khoảng, tìm nhịp tim.

(c) Quy tắc: Nhịp tim=các chu kỳ trên mỗi khoảng lần ________.

Hàm số nào trong 3.4.3-3.4.18 là chẵn hay lẻ hoặc tuần hoàn? Tìm tất cả các đường tiệm cận: $y = b$ hoặc $x = a$ hoặc $y = mx+b$. Vẽ phác thảo bằng tay hoặc vẽ một cách mượt mà bằng máy tính.

3.4.3. $f(x) = x - (9/x)$

3.4.4. $f(x) = x^n$ (bất kỳ số nguyên n nào)

3.4.5. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

3.4.6. $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

3.4.7. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$

3.4.8. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

3.4.9. $f(x) = (\sin x)(\sin 2x)$

3.4.10. $f(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$

3.4.11. $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2 - 1}$

3.4.12. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

3.4.13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2}$

3.4.14. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} - 2x$

3.4.15. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

3.4.16. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

3.4.17. $f(x) = x - \sin x$

3.4.18. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$

Trong 3.4.19-3.4.24, xây dựng $f(x)$ có đúng các đường tiệm cận sau.

3.4.19. $x = 1$ và $y = 2$

3.4.20. $x = 1$, $x = 2$, $y - 0$

3.4.21. $y = x$ và $x = 4$

3.4.22. $y = 2x + 3$ và $x = 0$

3.4.23. $y = x$ $(x \to \infty)$, $y = -x$ $(x \to \infty)$

3.4.24. $x = 1$, $x = 3$, $y = x$

3.4.25. Để $P(x)/Q(x)$ có nhận $y = 2$ làm đường tiệm cận, các đa thức P và Q phải là ________.

3.4.26. Để$P(x)/Q(x)$ có một đường tiệm cận xiên, các bậc của P và Q phải là ________.

3.4.27. Để $P(x)/Q(x)$ có đường tiệm cận $y = 0$, các bậc của P và Q phải là ________. Đồ thị của $x^4/(1 + x^2)$ có những đường tiệm cận nào?

3.4.28. Cả $1/(x-1)$ và $1/(x-1)^2$ đều nhận $x = 1$ *và* $y = 0$ làm các đường tiệm cận. Sự khác nhau hiển nhiên nhất giữa hai đồ thị là ________.

3.4.29. Nếu $f'(x)$ có các đường tiệm cận $x = 1$ và $y = 3$, khi đó $f(x)$ có các đường tiệm cận ________.

3.4.30. **Đúng** (với lý do) hay **sai** (với ví dụ).

(a) Mỗi tỷ số của hai đa thức đều có các đường tiệm cận

(b) Nếu $f(x)$ là chẵn, $f''(x)$ cũng vậy

(c) Nếu $f''(x)$ là chẵn, $f(x)$ cũng vậy

(d) Giữa các tiệm cận đứng, $f'(x)$ có thể nhận giá trị không.

3.4.31. Xây dựng một $f(x)$ mà là "chẵn quanh $x = 3$."

3.4.32. Xây dựng một $g(x)$ mà là "lẻ quanh $x = \pi$."

Vẽ đồ thị của 3.4.33-3.4.38 trên một máy vi tính hoặc máy tính cầm tay.

3.4.33. $y(x) = (1+1/x)^x$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$

3.4.34. $y(x) = x^{1/x}$, $0.1 \leqslant x \leqslant 2$

3.4.35. $y(x) = \sin(x/3) + \sin(x/5)$ 3

3.4.36. $y(x) = (2 - x)/(2 + x)$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$

3.4.37. $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ trên $[-3, 3]$ và $[2.9, 3.1]$

3.4.38. $100[\sin(x + .1)] - 2\sin x + \sin(x - .1)]$

Trong 3.4.39-3.4.40 chỉ ra các tiệm cận trên đồ thị máy tính tỷ lệ lớn.

3.4.39.

(a) $y = \dfrac{x^3 + 8x - 15}{x^2 - 2}$

(b) $y = \dfrac{x^4 - 6x^3 + 1}{2x^4 + x^2}$

3.4.40.

(a) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 + 8x - 15}$

(b) $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

3.4.41. Định lại tỷ lệ đồ thị $y = \sin x$ để X được đo theo độ, chứ không phải là radian, và Y chuyển đổi từ từ meter sang centimeter.

Các bài tập 3.4.42-3.4.46 cực tiểu hóa thời gian lái xe $y(x)$ của ví dụ được đề cập trong phần bài học. Một số câu hỏi có thể không phù hợp với phần mềm của bạn.

3.4.42. Lần theo vết dọc theo đồ thị của $y(x)$ để ước lượng x^*. Chọn một vùng xy hoặc dùng mặc định.

3.4.43. Phóng to theo các hệ số tỷ lệ $c = d = 4$. Bạn phải phóng bao nhiêu lần trước khi đạt được $x^* = 1.73205$ hoặc 1.7320508?

3.4.44. Yêu cầu chương trình của bạn tìm cực tiểu của $y(x)$ và nghiệm của $dy/dx = 0$. Hai kết quả này có giống nhai hay không?

3.4.45. Các hệ số tỷ lệ c và d đối với hai lần phóng trong Hình 3.4.4 là bao nhiêu? Chúng đưa ra sự co giãn của các trục x và y.

3.4.46. Chứng tỏ rằng $dy/dx = -1/60$ và $d^2y/dx^2 = 1/90$ tại $x = 0$. Xấp xỉ tuyến tính đưa ra $dy/dx \approx -1/60 + x/90$. Vậy hệ số góc bằng không gần $x =$ ________. Đây là phương pháp của Newton, dùng đạo hàm tiếp theo.

Thay đổi hàm số thành $y(x) = \sqrt{25 + x^2}/30 + (10 - x)/60$**.**

3.4.47. Tìm x^* bằng cách chỉ dùng đồ thị của $y(x)$.

3.4.48. Tìm x^* bằng cách dùng thêm đồ thị của dy/dx.

3.4.49. Các phương trình xy và XY và xy đối với đường thẳng trong Hình 3.4.6 là gì?

3.4.50. Xác định $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}\sin 5x + \cdots$ (n số hạng). Vẽ đồ thị f_5 và f_{10} từ $-\pi$ tới π. Phóng to và mô tả *hiện tượng Gibbs* tại $x = 0$.

Trên các đồ thị của 3.4.51-3.4.56, phóng to vào các cực đại và cực tiểu (3 chữ số có nghĩa). *Ước lượng các điểm uốn.*

3.4.51. $y = 2x^5 - 16x^4 + 5x^3 - 37x^2 + 21x + 683$

3.4.52. $y = x^4 - x^4 - \sqrt{3x+1} - 2$

3.4.53. $y = x(x-1)(x-2)(x-4)$

3.4.54. $y = 7\sin 2x + 5\cos 3x$

3.4.55. $y = (x^3 - 2x + 1)/(x^4 - 3x^2 - 15)$, $-3 \leqslant x \leqslant 5$

3.4.56. $y = x\sin(1/x)$, $0.1 \leqslant x \leqslant 1$

3.4.57. Một máy tính có khả năng hiện thị tới 10 chữ số thập phân cho thấy $y = 0$ và $dy/dx = .01$ tại $x^* = 1$. Nghiệm này phải có độ chính xác tới khoảng (8 chữ số thập phân) (10 chữ số thập phân) (12 chữ số thập phân). *Gợi ý*: Giả sử $y = .01(x-1+$ sai số). Sai số nào không có trong 10 chữ số thập phân của y?

3.4.58. Cái nào khó được tính toán một cách chính xác hơn: Điểm cực đại hay điểm uốn? Đạo hàm cấp một hay đạo hàm cấp hai?

3.5. Parabola, Ellipse, Hyperbola

Dưới đây là danh sách những đường cong quan trọng nhất trong toán học, nên bạn có thể đoán được chúng ta sắp học về thứ gì. Thật không dễ gì xếp hạng được bốn đường cong đứng đầu:

(1) các đường thẳng
(2) các hàm sine và các hàm cosine (dao động)
(3) các hàm mũ (tăng trưởng và sụt giảm)
(4) các parabola, các ellipse, và các hyperbole (dùng 1, x, y, x^2, xy, y^2).

Những đường cong mà tôi đã viết sau cùng, người Hy Lạp là những người đầu tiên biết đến chúng. Chúng ta thật tự nhiên đi từ các phương trình tuyến tính sang các phương trình bậc hai. Các đường thẳng dùng 1, x, y. Các đường cong bậc hai lại bao gồm x^2, xy, y^2. Nếu chúng ta tiếp tục với x^3 và y^3, toán học trở nên phức tạp. Chúng ta bây giờ nghiên cứu các phương trình có bậc hai, và các đường cong mà chúng tạo ra.

Việc thấy được cả ***phương trình*** lẫn ***đường cong*** là khá quan trọng. Mục này kết nối hai phần lớn của toán học—*giải tích* của phương trình và *hình học* của các đường cong. Chúng cùng tạo ra "***hình học giải tích***." Bạn đã biết về các hàm số và các đồ thị. Điều thậm chí còn cơ bản hơn nữa: Các số tương ứng với các điểm. Chúng a nói về "*điểm* $(5, 2)$." Euclid có thể không hiểu điều chúng ta vừa nói.

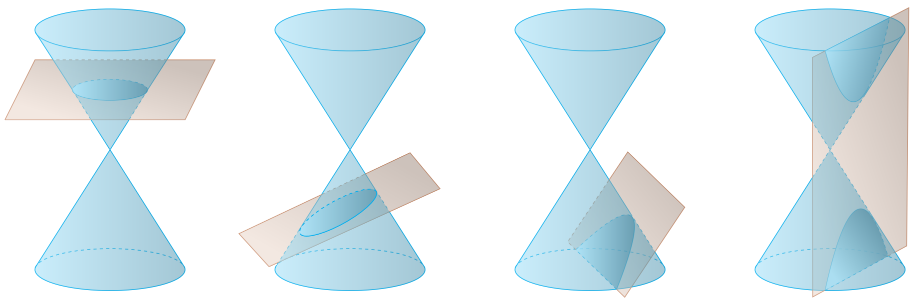
Nơi nào Euclid vẽ một đường thẳng $45°$ qua gốc, nơi đó Descartes viết $y = x$. Hình học giải tích đã trở thành trung tâm của toán học—chúng ta bây giờ nhìn vào một phần của nó.

ĐƯỜNG CONIC

Parabola, ellipse và hyperbola có các tính chất đáng chú ý. Người Hy Lạp đã phát hiện ra rằng tất cả những đường cong này đều được sinh ra từ việc ***cắt một mặt nón bởi một mặt phẳng***. Những đường cong này là các "đường conic"[25]. Một nhát cắt vuông góc với trục của mặt nón đưa ra một ***đường tròn***, và một nhát cắt đi qua trục mặt nón và cắt đường sinh tạo ra một ***ellipse***. Một nhát cắt song song với trục của mặt nón đưa ra hai nhánh của một ***hyperbola*** (Hình 3.5.1d). Một nhát cắt song song với đường sinh đưa ra một ***parabola***. Nó chỉ có một nhánh ellipse, nhưng nó lại mở tới vô cùng tương tự như một hyperbola.

Trong suốt lịch sử toán học, parabola luôn được xem là dạng chuyển tiếp giữa giữa các ellipse và các hyperbole.

Nhắc lại: Chúng ta có thể cắt xuyên qua các mặt nón để thấy được các đường conic hoặc chúng ta có thể tìm kiếm các phương trình của chúng. Đối với một nón cho phép ánh sáng chiếu xuyên qua, chúng ta có thể nhìn thấy một ellipse trên tường (tường cắt vào nón ánh sáng). Đối với một phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, chúng ta sẽ làm cho nó đơn giản hơn. Đồ thị sẽ được căn giữa và được định lại tỷ lệ (và được quay nếu cần), nhằm thu được một phương trình tương tự như $y = x^2$. Độ lệch tâm và các toạ độ cực được để lại cho Chương 9.



Hình 3.5.1. Mặt phẳng cắt trở nên dốc hơn: đường tròn tới ellipse tới parabola tới hyperbola.

PARABOLA $y = ax^2 + bx + c$

Bạn đã biết đến hàm số này từ lâu trước khi đến với giải tích. Đồ thị cắt trục x khi $y = 0$. Công thức bậc hai $y = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, và do đó nhân tử hoá thành $(x - 1)(3x - 1)$. Các giao điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{3}$ hoàn toàn được sinh ra từ đại số.

[25]Nd: Mặt nón (tiếng Anh: conic).

Điều quan trọng khác lại được tìm thấy bằng giải tích. Đó là điểm *cực tiểu*, mà tại đó $dy/dx = 6x - 4 = 0$. Toạ độ x là $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, nằm chính giữa hai giao điểm của. Tung độ là $y_{\min} = -\frac{1}{3}$. Đây là ***đỉnh*** V trong Hình 3.5.2a—tại đáy của parabola.

Parabola không có các đường tiệm cận. Hệ số góc $6x - 4$ không tiến tới một hằng số.

CĂN GIỮA ĐỈNH. Dời qua trái $\frac{2}{3}$ đơn vị và lên trên $\frac{1}{3}$ đơn vị. Vì thế giới thiệu các biến mới $X = x - \frac{2}{3}$ và $Y = y + \frac{1}{3}$. Khi đó $x = \frac{2}{3}$ và $y = -\frac{1}{3}$ tương ứng với $X = 0$ và $Y = 0$—đây là đỉnh mới:

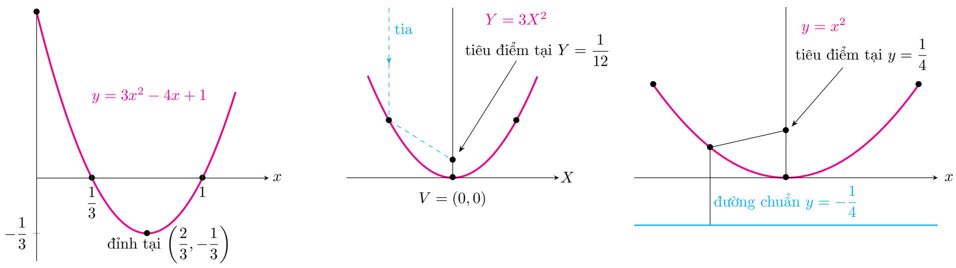
$$y = 3x^2 - 4x + 1 \text{ trở thành } Y = 3X^2. \tag{3.5.1}$$

Kiểm tra về mặt đại số. $Y = 3X^2$ cũng chính là $y + \frac{1}{3} = 3(x - \frac{2}{3})^2$. Phương trình được đơn giản hóa thành phương trình ban đầu $y = 3x^2 - 4x + 1$. Đồ thị thứ hai cho thấy parabola được căn giữa $Y = 3X^2$, với đỉnh được dời về gốc tọa độ.

PHÓNG TO VÀO ĐỈNH. Định lại tỷ lệ X và Y bằng hệ số thu phóng a:

$$Y = 3X^2 \text{ trở thành } \mathbf{y}/a = 3(\mathbf{x}/a)^2$$

Phương trình sau cùng có $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ được in đậm. Với $a = 3$, chúng ta tìm thấy $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$—đồ thị được phóng đại gấp 3 lần. Trong hai bước vừa rồi, chúng ta đạt được parabola mẫu mở lên trên.



HÌNH 3.5.2. Parabola với cực tiểu tại V. Các tia phản xạ tới tiêu điểm. Đồ thị được căn giữa trong (b), được định lại tỷ lệ trong (c).

Parabola còn có một điểm quan trọng khác—***tiêu điểm***. Khoảng cách từ tiêu điểm tới đỉnh được gọi là p. Parabola đặc biệt $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$ có $p = 1/4$, và các parabola $y = ax^2$ khác có $p = 1/4a$. Bạn phóng đại theo một hệ số thu phóng a để nhận được $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$. Một tính chất đẹp của một parabola là ***mọi tia đi thẳng xuống đều bị phản xạ đến tiêu điểm***.

Bài tập 2.3.25 xác định vị trí tiêu điểm F—ở đây chúng ta đề cập đến hai áp dụng. Một bộ thu nhiệt mặt trời và một chảo TV có hình parabola. Chúng tập trung các tia mặt trời và các tín hiệu TV vào một điểm—một tế bào nhiệt hoặc một bộ thu tiếp thu chúng tại tiêu điểm. *Tạp chí UMAP*[26] năm 1982 giải thích cách radar và sonar hoạt động theo cùng ý tưởng. Đèn pha xe hơi hoạt động theo cơ chế ngược lại, và chiếu ánh sáng ra xa.

Sau đây là một điều khá cổ điển về các parabola. ***Từ mỗi điểm trên đường cong, khoảng cách đến tiêu điểm bằng khoảng cách đến "đường chuẩn."***

[26] Nd: Tạp chí Toán Đại học và các Ứng dụng Của nó (tiếng Anh: Undergraduate Mathematics and Its Applications, viết tắt: The UMAP Journal).

Đường chuẩn là đường thẳng $y = -p$ nằm phía dưới đỉnh (nên định nằm chính giữa tiêu điểm và đường chuẩn). Với $p = \frac{1}{4}$, khoảng cách chiếu xuống dưới từ bất kỳ (x, y) nào đều là $y + \frac{1}{4}$. Khớp giá trị này với khoảng cách đến tiêu điểm at $(0, \frac{1}{4})$—đây là căn bậc hai phía dưới. Kết quả nhận được là parabola đặc biệt $y = x^2$:

$$(3.5.2) \qquad y + \frac{1}{4} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} \quad \longrightarrow \quad \text{trở thành} \quad \longrightarrow \quad y = x^2.$$

Các bài tập đưa ra thực hành với tất cả các bước chúng ta đã thực hiện—căn giữa parabola thành $Y = aX^2$, cài định lại tỷ lệ nó thành y = x^2, xác định vị trí đỉnh và tiêu điểm và đường chuẩn.

TÓM TẮT ĐỐI VỚI CÁC PARABOLA KHÁC. $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh của nỏ nằm tại nơi dy/dx bằng không. Như vậy $2ax + b = 0$ và $x = -b/2a$. Dời xiên tới điểm "bình phương đúng":

$$(3.5.3) \qquad ax^2 + bx + c \text{ bằng } a(x + \frac{b}{2a})^2 + C.$$

Ở đây, $C = c - (b^2/4a)$ là tung độ của đỉnh. Phép biến đổi căn giữa $X = x + (b/2a)$, $Y = y - C$ tạo ra $Y = aX^2$. Nó di chuyển đỉnh tới $(0, 0)$, đỉnh nên nằm ở điểm này.

Đối với các ellipse và các hyperbola, kế hoạch khảo sát của chúng ta cũng tương tự như vậy:

(1) Căn giữa đường cong để khử bất kỳ số hạng tuyến tính Dx và Ey nào.
(2) Xác định vị trí từng tiêu điểm và khám phá các tính chất phản xạ.
(3) Quay để khử Bxy nếu phương trình có chứa nó.

ELLIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ĐƯỜNG TRÒN CÓ $a = b$)

Phương trình này làm cho ellipse đối xứng qua $(0, 0)$—tâm của nó. Đổi x thành $-x$, và y thành $-y$ vẫn thu được cùng một phương trình. Không cần thêm phép biến đổi căn giữa và phép quay.

Phương trình cũng cho thấy rằng x^2/a^2 và y^2/b^2 không thể lớn hơn một. (Chúng cộng lại bằng một và không thể là âm.) Vì vậy $x^2 \leqslant a^2$, và x nằm giữa $-a$ và a. Tương tự y nằm giữa $-b$ và b. Ellipse nằm bên trong một hình chữ nhật.

Bằng cách giải đối với y, chúng ta nhận được một phương trình (hoặc hai phương trình!) theo x:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ kéo theo } \frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ hay } y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - x^2}.$$

Các đồ thị là nằm nửa trên (+) và nửa dưới (−) của ellipse. Để vẽ ellipse, chúng ta vẽ chúng cùng nhau. Chúng gặp nhau khi $y = 0$, tại $x = a$ ở phía xa bên phải (Hình 3.5.3), và tại $x = -a$ ở phía xa bên trái. Cực đại $y = b$ và cực tiểu $y = -b$ nằm tại đỉnh và đáy của ellipse, nơi ellipse tiếp xúc với hình chữ nhật bao quanh.

Một đường tròn là một trường hợp đặc biệt của một ellipse, khi $a = b$. Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$ là một phương trình ellipse với $a = b = r$. Đường tròn này có tâm tại $(0, 0)$, những đường tròn khác có tâm tại $x = h$, $y = k$. Đường tròn được xác định bởi *bán kính* r và *tâm* (h, k):

$$(3.5.4) \qquad \textbf{\textit{Phương trình của đường tròn}} : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Bằng lời, khoảng cách từ (x, y) trên đường tròn tới (h, k) tại tâm là r. Phương trình có các số hạng tuyến tính $-2hx$ và $-2kx$—chúng biến mất khi tâm là $(0, 0)$.

Ví dụ 3.5.1. Tìm đường tròn có đường kính từ $(1, 7)$ tới $(5, 7)$.

Lời giải. Tâm nằm chính giữa tại $(3, 7)$. Vì thế $r = 2$ và phương trình là $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 2^2$.

Ví dụ 3.5.2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn $x^2 - 6x + y^2 - 14y = -54$.

Lời giải. Áp dụng phần bù bình phương đối với $x^2 - 6x$ để thu được bình phương $(x-3)^2$ bằng cách cộng thêm 9. Áp dụng phần bù bình phương đối với $x^2 - 14y$ để thu được $(x-7)^2$ bằng cách cộng thêm 49. Cộng 9 và 49 vào hai vế của phương trình, chúng ta nhận được $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 4$.. Điều cùng một đường tròn như trong Ví dụ 1.

Lời giải (Nhanh hơn). Khớp phương trình đã cho với (3.5.4). Khi đó $h = 3$, $k = 7$ và $r = 2$:

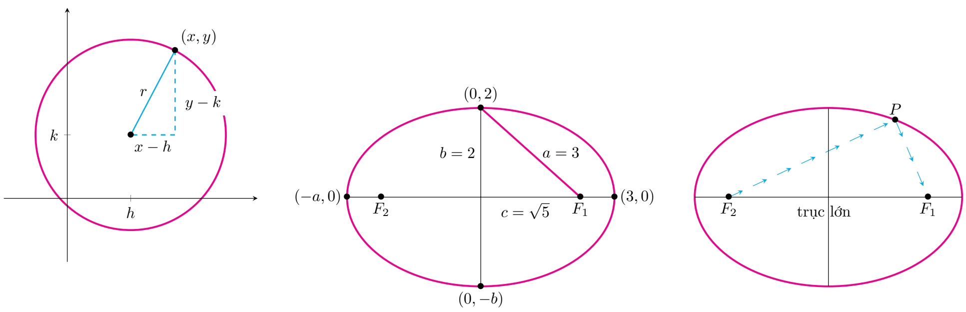
$$x^2 - 6x + y^2 - 14y = -54 \text{ phải khớp với } x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2.$$

Phép đổi biến $X = x - h$ và $Y = y - k$ di chuyển tâm của đường tròn từ (h, k) tới $(0, 0)$. Đây là đẳng thức đúng cho một ellipse:

$$\textit{Ellipse } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \textit{ trở thành } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Khi chúng định lại tỷ lệ theo $x = X/a$ và $y = Y/b$, chúng ta nhận được đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Đường tròn đơn vị có diện tích π. ***Ellipse có diện tích*** πab (được chứng minh sau trong cuốn sách này). Chu vi của đường tròn đơn vị là 2π. Chu vi của một ellipse không phụ thuộc vào a và b—công thức của nó không đơn giản chút nào.



Hình 3.5.3. Đường tròn chưa được căn giữa. Ellipse đã được căn giữa $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$. *Khoảng cách từ tâm đến phía xa bên phải cũng là* $a = 3$. Tất cả các tia bắt đầu từ F_2 phản xạ đến F_1.

Bây giờ chúng ta dời sự chú ý của mình khỏi các đường tròn và tập trung vào các ellipse. Chúng có ***hai tiêu điểm***[27] (được phát âm là *fo-sight*). Đối với một parabola, tiêu điểm thứ hai nằm tại vô cùng. Đối với một đường tròn, cả hai tiêu điểm đều nằm tại tâm. Các tiêu điểm của ellipse nằm trên trục dài hơn của nó (trục *chính* của nó), một tiêu điểm trên mỗi phía của tâm:

$$F_1 \text{ nằm tại } x = c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ và } F_2 \text{ nằm tại } x = -c$$

[27]Nd: Các tiêu điểm (tiếng Anh: foci).

Tam giác vuông trong Hình 3.5.3 có các cạnh a, b, c. Khoảng cách từ đỉnh của ellipse tới từng tiêu điểm là a. Khoảng cách từ điểm biên $x = a$ tới tiêu điểm là $a + c$ và $a - c$. Cộng $(a + c) + (a - c)$ đưa ra $2a$. *Khi bạn đi quanh ellipse, khoảng cách đến* F_1 *cộng khoảng cách đến* F_2 *là hằng* (luôn luôn là $2a$).

PHÁT BIỂU 3.5.1. Tại tất cả các điểm trên ellipse, tổng của các khoảng cách đến hai tiểu điểm là $2a$. Dưới đây là một phương khác đối với ellipse:

$$\text{từ } (x, y) \text{ đến } F_1 \text{ và } F_2 : \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.5.5}$$

Để vẽ một ellipse, quàng chặt một sợi dây có chiều dài $2a$ vào các tiêu điểm. Giữ cho sơi dây căng và đặt đầu bút chì vào trong vòng dây rồi căng ra để vòng dây trở thành hình tam giác. Di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn căng. Khi đó đầu bút chì sẽ vạch ra đường ellipse. Mô tả này dùng a và c—dạng khác dùng a và b (nhớ rằng $b^2 + c^2 = a^2$). Bài tập 3.5.24 yêu cầu bạn đơn giản hóa phương trình (3.5.5) cho đến khi bạn đạt được $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

"Hành lang thì thầm" của Thượng viện Hoa Kỳ là một ellipse. Nếu bạn đứng ở một tiêu điểm và thì thầm, giọng nói của bạn có thể được nghe rõ tại tiêu điểm còn lại (còn ở những nơi khác lại không nghe được). Giọng nói của bạn bị phản xạ bởi bức tường tới tiêu điểm còn lại—theo quỹ đạo của dây cung. Đối với một parabola, các tia đi vào tới tiêu điểm từ vô cùng—đó là vị trí của tiêu điểm thứ hai.

Bệnh viện dùng tính chất phản xạ này để tán sỏi thận. Bệnh nhân ngồi vào một ellipse sao cho viên sỏi trong thận nằm đúng vào một tiêu điểm. Tại một tiêu điểm khác, một thiết bị chịu trách nhiệm thực hiện tán sỏi bắn ra hàng trăm cú sốc nhỏ. Bạn được gây mê tủy sống (ý tôi là người bệnh) và viên sỏi vỡ thành các mảnh nhỏ.

Tiêu điểm quan trọng nhất là Mặt trời. Ellipse là quỹ đạo của Trái đất. Xem Mục 12.4 để thấy được một lỗi in ấn tệ hại của Sở Đúc tiền Hoàng gia[28], trên tờ một bảng của nước Anh. Họ đã đặt Mặt trời tại tâm.

CÂU HỎI 18. *Tại sao những lời thì thầm (và các sóng xung kích) lại hội tụ tại tiêu điểm thứ hai?*

CÂU TRẢ LỜI. Cho dù chúng đi theo con đường nào đi nữa, quãng đường vẫn là $2a$. Ngoại lệ: đường đi thẳng là $2c$.

CÂU HỎI 19. *Xác định vị trí ellipse với phương trình* $4x^2 + 9y^2 = 36$.

CÂU TRẢ LỜI. Chia bởi 36 để thay đổi hằng số thành 1. Bây giờ đồng nhất a và b:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ nên } a = \sqrt{9} \text{ và } b = \sqrt{5}. \text{ Tiêu điểm tại } \pm\sqrt{9-4} = \pm\sqrt{5}.$$

CÂU HỎI 20. *Dời tâm của ellipse theo phương ngang và xuống dưới tới* $x = 1$, $y = -5$.

CÂU TRẢ LỜI. Thay x thành $x - 1$. Thay y thành $y + 5$. Phương trình trở thành $(x-1)^2/9 + (y+5)^2/4 = 1$. Trong thực tế, chúng ta bắt đầu với ellipse không được căn giữa này này và đi theo cách khác để căn giữa nó.

HYPERBOLA $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Lưu ý dấu trừ đối với một hyperbola. Dấu trừ này tạo ra tất cả sự khác biệt. Không giống như một ellipse, cả x và y đều có thể là lớn. Đường cong đi ra xa tới

[28]Nd: Sở Đúc tiền Hoàng gia (tiếng Anh: Royal Mint).

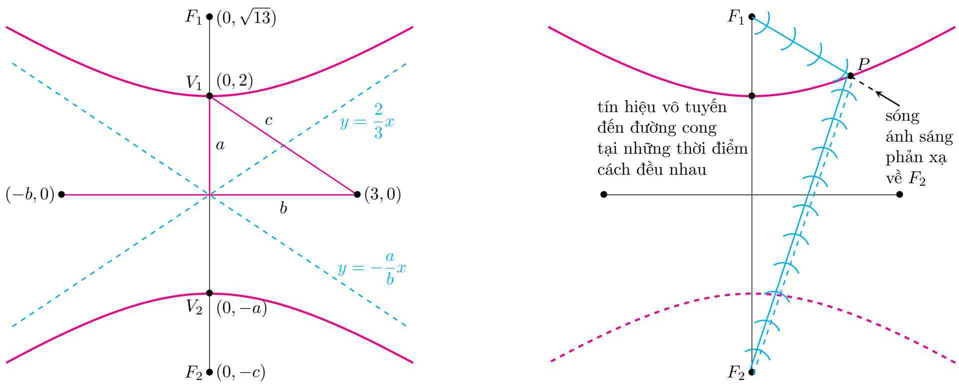
vô cùng. Nó vẫn còn đối xứng, vì x có thể thay đổi thành $-x$ và y thành $-y$ mà không àm thay đổi phương trình.

Tâm nằm tại $(0,0)$. Giải đối với y một lần nữa cho hai phương trình:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ kéo theo } \frac{y}{a} = \pm\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}} \text{ hay } y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + x^2}. \tag{3.5.6}$$

Hyperbola có hai nhánh mà không bao giờ gặp nhau. Nhánh trên, với một dấu cộng, có $y \geqslant a$. ***Đỉnh*** V_1 tại $x = 0$, $y = a$—điểm thấp nhất trên nhánh. Xa hơn nữa, khi độ lớn của x là lớn, hyperbola đi lên bên cạnh các ***đường tiệm cận xiên*** của nó:

$$\text{nếu } \frac{x^2}{b^2} = 1000, \text{ khi đó } \frac{y^2}{a^2} = 1001. \text{ Nên } \frac{y}{a} \text{ là gần với } \frac{x}{b} \text{ hoặc } -\frac{x}{b}.$$



HÌNH 3.5.4. Hyperbola $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}x^2 = 1$ có $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{4+9}$. Các khoảng cách đến F_1 và F_2 sai khác một lượng $2a = 4$.

Tiệm cận là các đường thẳng $y/a = x/b$ hoặc $y/a = -x/b$. Hệ số góc của chúng là a/b và $-a/b$. Bạn không thể bỏ qua chúng trong Hình 3.5.4.

Với một hyperbole các tiêu điểm nằm phía bên trong hai nhánh. Khoảng cách của chúng đến tâm vẫn được gọi là c. Nhưng bây giờ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, mà là lớn hơn a và b. Khoảng cách từ đỉnh đến một tiêu điểm là $c - a$ và đến tiêu điểm còn lại là $c + a$. *Hiệu* (chứ không phải tổng) là: $(c + a) - (c - a) = 2a$.

Tất cả các điểm trên hyperbola có tính chất này: ***Hiệu giữa các khoảng cách đến các tiêu điểm là một hằng số bằng*** $2a$. Một tia bắt đầu từ một tiêu điểm được phản xạ đến tiêu điểm còn lại. Tia phản xạ nằm ở *phía bên ngoài* đối với hyperbola, và nằm ở *phía bên trong* đối với ellipse.

Sau đây là một ứng dụng cho hệ thống dẫn đường. Các tín hiệu radio được phát đi cùng lúc từ hai trạm phát sóng. Một con tàu nhận được các tín hiệu cách nhau một mili giây. Con tàu đang ở đâu? *Câu trả lời*: Con tàu đang nằm trên một hyperbola với các tiêu điểm tại các trạm phát sóng. Các tín hiệu radio di chuyển 186 dặm trong một mili giây, nên $186 = 2a$. Điều này xác định đường cong. Trong Hệ thống Dẫn đường Tầm xa[29] (LORAN), một trạm phát sóng thứ ba đưa ra thêm một hyperbola khác. Khi đó con tàu được định vị một cách chính xác.

CÂU HỎI 21. *Hyperbola và parabola khác nhau như thế nào, khi xa tâm?*

[29]Nd: Hệ thống Dẫn đường Tầm xa (tiếng Anh: Long Range Navigation, viết tắt: LORAN).

Câu trả lời. Các hyperbola có tiệm cận, các parabola lại không có.

Hyperbola có một phép định lại tỷ lệ hết sức tự nhiên. Sự xuất hiện của x/b là một dấu hiệu để thành X. Tương tự y/a trở thành Y. Khi đó $Y = 1$ tại đỉnh, và chúng ta có một hyperbola tiêu chuẩn:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ trở thành } Y^2 - X^2 = 1.$$

Một phép quay một góc $90°$ đưa ra $X^2 - Y^2 = 1$—hyperbola mở về hai bên. Một phép quay một góc $45°$ đưa ra $2XY = 1$. Chúng ta cho thấy dưới đây cách để nhận ra $x^2 + xy + y^2 = 1$ là một ellipse và $x^2 + 3xy + y^2 = 1$ là một hyperbole. (Chúng không phải là một đường tròn vì do sự xuất hiện của số hạng xy). Khi hệ số của xy tăng quá 2, $x^2 + y^2$ không còn biểu thị một ellipse nữa.

Câu hỏi 22. *Xác định vị trí hyperbola với phương trình* $9y^2 - 4x^2 = 36$.

Câu trả lời. Chia bởi 36. Khi đó $y^2/4 - x^2/9 = 1$. Nhận diện $a = \sqrt{4}$ và $b = \sqrt{9}$.

Câu hỏi 23. *Xác định vị trí hyperbola không được tâm hoá* $9y^2 - 18y - 4x^2 - 4x = 28$.

Câu trả lời. Áp dụng phần bù bình phương đối với $9y^2 - 18y$ để thu được $9(y-1)^2$ bằng cách cộng 9. Áp dụng phần bù bình phương đối với $4x^2 + 4x$ để thu được $4(x + \frac{1}{2})^2$ bằng cách cộng $4(\frac{1}{2})^2 = 1$. Phương trình được viết lại dưới dạng $9(y-1)^2 - 4(x - \frac{1}{2})^2 = 28 + 9 - 1$. Đây là một hyperbola trong Câu hỏi 22—có tâm là $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Để tóm tắt: Tìm tâm bằng bằng cách áp dụng các phần bù bình phương. Sau đó nêu ra a và b.

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Phương trình này có bậc hai, chứa bất kỳ và tất cả các số hạng có liên quan đến 1, x, y, x^2, xy, y^2. Hãy cắt một mặt nón bằng một mặt phẳng. ***Liệu đường cong nhận được là một parabola hay ellipse hay hyperbola***? Bắt đầu với trường hợp quan trọng nhất $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$.

Phát biểu 3.5.2. Phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ sinh ra một hyperbola nếu $B^2 > 4AC$ và một ellipse nếu $B^2 < 4AC$ và một parabole nếu $B^2 = 4AC$.

Để nhận dạng đường cong, chúng ta khử Bxy bằng cách *quay mặt phẳng*. Điều này cũng thay đổi A và C—nhưng biểu thức $B^2 - 4AC$ không thay đổi (chứng minh được bỏ qua). Một ví dụ là $2xy = 1$, với $B^2 = 4$. Nó quay tới $y^2 - x^2 = 1$, với $-4AC = 4$. Số dương4 đó báo hiệu một hyperbola—vì $A = -1$ và $C = 1$ có dấu đối nhau.

Một ví dụ khác là $x^2 + y^2 = 1$. Nó là một đường tròn (một ellipse đặc biệt). Dù chúng ta có quay như thế nào đi nữa, nhưng phương trình vẫn như cũ. Biểu thức $B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1$ là âm, dấu hiệu dự báo đối với các ellipse.

Để quay một góc α, đổi x và y thành các biến mới x' và y':

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \quad \text{và} \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -y\sin\alpha + x\cos\alpha \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Phép thế đối với x và y thay đổi $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ thành $A'x'^2 + B'x'y' + C'y^2 = 1$. Các công thức đối với A', B', C' rất đau đầu nên tôi đi ngay đến điểm then chốt:

B' ***bằng không nếu phép quay góc*** α ***có*** $\tan 2\alpha = B/(A-C)$.

Với $B' = 0$, đường cong dễ dàng được nhận ra từ $A'x'^2 + C'y'^2 = 1$. Nó là một hyperbola nếu A' và C' có dấu đối nhau. Khi đó $B'^2 - 4A'C'$ là dương. Biểu thức gốc $B^2 - 4AC$ cũng là dương, bởi vì biểu thức đặc biệt này không thay đổi trong phép quay.

Sau khi số hạng xy biến mất, chúng ta đối mặt với x và y—bằng ***phép biến đổi căn giữa***. Để tìm tâm, áp dụng các phần bù bình phương như trong các Câu hỏi 20 và 23. Để hoàn thiện, định lại tỷ lệ thành một trong các phương trình mẫu $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$ hoặc $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1$ hoặc $\mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2 = 1$.

Câu hỏi còn lại là về $F = 0$. Đồ thị của $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ là gì? Ellipse-hyperbola- parabola không còn xuất hiện trong trường hợp này nữa. Nhưng nếu những người Hy Lạp đã đúng, mặt nón vẫn bị cắt bởi một mặt phẳng này. Trường hợp suy biến $F = 0$ xảy ra khi mặt phẳng cắt ***ngay qua đỉnh của mặt nón***.

Một nhát cắt vuông góc với trục của mặt nón mà chỉ chạm một điểm $(0, 0)$ đó. Phương trình co lại thành $x^2 + y^2 = 0$, một đường tròn bán kính không. Một nhát cắt song song với trục của mặt nón đưa ra hai đường thẳng. Hyperbola trở thành $y^2 - x^2 = 0$ chính là các đường tiệm cận $y = \pm x$. Một nhát cắt song song với đường sinh chỉ đưa ra một đường thẳng, như trong $x^2 = 0$. Một ***điểm đơn***, ***hai đường thẳng***, và ***một đường thẳng*** là các trường hợp cực trị của một ellipse, hyperbola, và parabola.

Tất cả những "đường conic này đều được sinh ra từ các mặt phẳng và các mặt nón. Vẻ đẹp của hình học, mà Archimedes đã thấy, là xứng đôi với tầm quan trọng của các phương trình. Galileo đã phát hiện ra rằng các vật phóng đi dọc theo các quỹ đạo parabola (Chương 12). Kepler đã phát hiện ra rằng Trái đất di chuyển trên một quỹ đạo ellipse (cũng trong Chương 12). Cuối cùng Einstein đã khám phát hiện ra rằng ánh sáng đi theo quỹ đạo hyperbola. Nghĩa là trong bốn chiều, và không được đề cập đến trong Chương 12.

	phương trình	***đỉnh***	***tiêu điểm***
P	$y = ax^2 + bx + c$	$(-\frac{b}{2a} c - \frac{b^2}{4a})$	$\frac{1}{4a}$ ở trên đỉnh, ngoài ra ở vô cùng
E	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b$	$(a, 0)$ và $(-a, 0)$	$(c, 0)$ và $(-c, 0)$: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
H	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$(a, 0)$ và $(0, -a)$	$(0, c)$ và $(0, -c)$: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

BÀI TẬP 3.5

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đồ thị của $y = x^2 + 2x + 5$ là một __a__. Điểm thấp nhất (đỉnh) của nó là $(x, y) =$ (__b__). Phép biến đổi căn giữa theo $X = x + 1$ và $Y =$ __c__ di chuyển đỉnh tới $(0, 0)$. Phương trình trở thành $Y =$ __d__. Tiêu điểm của parabola được căn giữa này là __e__. Tất cả các tia sáng đi thẳng xuống đều được __f__ tới tiêu điểm.

Đồ thị của $x^2 + 4y^2 = 16$ là một __g__. Phép chia bởi __h__ đưa ra $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ với $a =$ __i__ và $b =$ __j__. Đồ thị nằm trong hình chữ nhật có các cạnh là __k__. Diện tích là $\pi ab =$ __l__. Các tiêu điểm nằm tại $x = \pm c =$ __m__. Tổng của các khoảng cách từ một điểm trên ellipse đến các tiêu điểm luôn là __n__. Nếu chúng ta định lại tỷ lệ thành $X = x/4$ và $Y = y/2$, phương trình trở thành __o__ và đồ thị trở thành một __p__.

Đồ thị của $y^2 - x^2 = 9$ là một __q__. Phép chia bởi 9 đưa ra $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ với $a =$ __r__ và $b =$ __s__. Ở nhánh phía trên $y \geqslant$ __t__. Các đường tiệm cận là các đường thẳng __u__. Các tiêu điểm nằm tại $y = \pm c =$ __v__. __w__ của các khoảng cách từ một điểm trên hyperbola này đến các tiêu điểm là __x__.

Tất cả các đường cong này đều là các các đường conic—giao của một __y__ và một __z__. Một nhát cắt song song với trục của mặt nón đưa ra một __A__. Một nhát cắt song song với đường sinh đưa ra một __B__. Phương trình tổng quát là $Ax^2 +$ __C__ $+ F = 0$. Nếu $D = E = 0$, tâm của đồ thị nằm tại __D__. Phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ đưa ra một ellipse khi __E__. Đồ thị của $4x^2 + 5xy + 6y^2 = 1$ là một __F__.

3.5.1. Đỉnh của $y = ax^2 + bx + c$ nằm tại $x = -b/2a$. Có điều gì đặc biệt về x này? Chứng tỏ rằng nó đưa ra $y = c - (b^2/4a)$.

3.5.2. Parabola $y = 3x^2 - 12x$ có $x_{\min} =$ ________. Tại cực tiểu này, $3x^2$ lớn bằng ________ so với $12x$. Việc đặt $X = x - 2$ và $Y = y + 12$ căn giữa phương trình thành ________.

Vẽ các đường cong 3.5.3-3.5.14 bằng tay hoặc bằng máy tính cầm tay hoặc bằng máy tính. Xác định vị trí các đỉnh và các tiêu điểm.

3.5.3. $y = x^2 - 2x + 3$

3.5.4. $y = (x-1)^2$

3.5.5. $4y = -x^2$

3.5.6. $4x = y^2$

3.5.7. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

3.5.8. $x^2 + 9y^2 = 9$

3.5.9. $9x^2 + y^2 = 9$

3.5.10. $x^2/4 - (y-1)^2 = 1$

3.5.11. $y^2 - 4x^2 = 1$

3.5.12. $(y-1)^2 - 4x^2 = 1$

3.5.13. $y^2 - x^2 = 0$

3.5.14. $xy = 0$

Các bài tập 3.5.15 -3.5.20 là về các parabola, 3.5.21-3.5.34 là về các ellipse, 3.5.35-3.5.41 là về các hyperbola.

3.5.15. Tìm parabole $y = ax^2 + bx + c$ mà đi qua $(0,0)$, $(1,1)$ và $(2,12)$.

3.5.16. $y = x^2 - x$ có đỉnh tại ________. Để di chuyển đỉnh tới $(0,0)$, đặt $X =$ ________ và $Y =$ ________. Khi đó $Y = X^2$.

3.5.17. (a) Trong phương trình (3.5.2), thay $\frac{1}{4}$ thành p. Bình phương và đơn giản hóa.

(b) Xác định vị trí các tiêu điểm và đường chuẩn của $Y = 3X^2$. Điểm nào cùng cách đường chuẩn và tiêu điểm 1 đơn vị?

3.5.18. Parabola $y = 9 - x^2$ mở ________ với đỉnh tại ________. Phép biến đổi căn giữa theo $Y = y - 9$ đưa ra $Y = -x^2$.

3.5.19. Tìm các phương trình đối với tất cả parabola mà

(a) mở sang phải với đỉnh tại $(0,0)$

(b) mở lên với tiêu điểm tại $(0,0)$

(c) mở xuống và đi qua $(0,0)$ và $(1,0)$.

3.5.20. Một vật phóng nằm tại $x = t$, $y = t - t^2$ tại thời điểm t. Tìm dx/dt và dy/dt khi bắt đầu, độ cao cực đại, và một phương trình xy đối với đường bay.

3.5.21. Tìm phương trình của ellipse với các điểm cực trị tại $(\pm 2, 0)$ và $(0, \pm 1)$. Khi đó di chuyển tâm về $(t, 1)$ và tìm phương trình mới.

3.5.22. Trên ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, giải đối với y khi $x = c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Độ cao phía trên tiêu điểm này sẽ rất giá trị trong việc chứng minh định luật thứ ba của Kepler.

3.5.23. Tìm các phương trình đối với các ellipse với những tính chất sau:

(a) đi qua $(5,0)$ với các tiêu điểm tại $(\pm 4, 0)$

(b) với tổng các khoảng cách đến $(1,1)$ và $(5,1)$ bằng 12.

(c) với cả hai tiêu điểm đều nằm tại $(0,0)$ và tổng các khoảng cách$= 2a = 10$.

3.5.24. Chuyển một căn bậc hai sang vế phải của phương trình (3.5.5) và bình phương hai vế. Sau đó đưa căn bậc hai còn lại về một vế và bình phương một lần nữa. Đơn giản hỏa để đạt được phương trình của một ellipse.

3.5.25. Quyết định xem các đường cong sau là đường cong nào giữa đường tròn-ellipse-parabola-hyperbola, dựa trên phương trình XY với $X = x - 1$ và $Y = y + 3$.

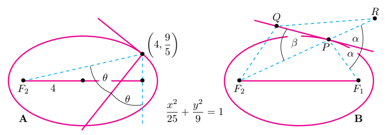
(a) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$
(b) $x^2 - 2x - y^2 - 6y = 6$
(c) $x^2 - 2x + 2y^2 + 12y = 6$
(d) $x^2 - 2x - y = 6$

3.5.26. Một hình trụ nghiêng có phương trình $(x-2y-2z)^2+(y-2x-2z)^2 = 1$. Chứng tỏ rằng mặt nước tại $z = 0$ là một ellipse. Phương trình của nó là gì và $B^2 - 4AC$ là gì?

3.5.27. $(4, 9/5)$ nằm phía trên trên tiêu điểm thuộc ellipse $x^2/25 + y^{2/9} = 1$. Tìm dy/dx tại điểm đó và phương trình của tiếp tuyến.

3.5.28. (a) Kiểm tra rằng đường thẳng $xx_0 + yy_0 = r^2$ tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$ tại (x_0, y_0).

(b) Đối với ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, chứng tỏ rằng phương trình tiếp tuyến là $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$. (Kiểm tra hệ số góc.)



3.5.29. Hệ số góc của pháp tuyến trong Hình A là $s = -1/$(hệ số góc tiếp tuyến). Hệ số góc của đường thẳng bắt đầu từ F_2 là $S =$ ________. Theo tính chất phản xạ,

$$S = \cot 2\theta = \frac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta) = \frac{1}{2}(s - \frac{1}{s}).$$

Kiểm tra các số s và S của bạn theo phương trình này.

3.5.30. Hình B chứng minh tính chất phản xạ của một ellipse. R là ảnh tạo bởi gương của F_1 qua tiếp tuyến; Q là bất kỳ điểm nào khác trên tiếp tuyến. Suy luận các bước 2, 3, 4 từ 1, 2, 3:

1. $PF_1 + PF_2 < QF_1 + QF_2$ (*vế trái*$=$ $2a$, *Q nằm phía bên ngoài*)
2. $PR + PF_2 < QR + QF_2$
3. P nằm trên đường thẳng từ F_2 tới R
4. $\alpha = \beta$: tính chất phản xạ được chứng minh.

3.5.31. Ellipse $(x-3)^2/4+(y-1)^2/4 = 1$ thật sự là một ________ với tâm nằm tại ________ và bán kính ________. Chọn X và Y để tạo ra $X^2 + Y^2 = 1$.

3.5.32. Tính diện tích của một hình vuông nằm vừa vặn trong ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

3.5.33. Quay các trục của $x^2 + xy + y^2 = 1$ bằng cách dùng phương trình (3.5.7) với $\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$. Phương trình $x'y'$ sẽ thể hiện một ellipse.

3.5.34. Các giá trị của a, b, c đối với quỹ đạo của Trái đất quanh mặt trời là gì?

3.5.35. Tìm một phương trình đối với hyperbola với

(a) đỉnh $(0, \pm 1)$, các tiêu điểm $(0, \pm 2)$
(b) đỉnh $(0, \pm 3)$, các đường tiệm cận $y = \pm 2x$
(c) $(2, 3)$ nằm trên đường cong, các đường tiệm cận $y = \pm x$

3.5.36. Tìm hệ số góc của $y^2 - x^2 = 1$ tại (x_0, y_0). Chứng tỏ rằng $yy_0 - xx_0 = 1$ đi qua điểm này với hệ số góc đúng (nó phải là tiếp tuyến).

3.5.37. Nếu các khoảng cách từ (x, y) đến $(8, 0)$ và $(-8, 0)$ khác nhau 10 đơn vị, hyperbola nào chứa (x, y)?

3.5.38. Nếu Napoleon nghe thấy một tiếng đại bác và một giây sau đó Công tước của Wellington cũng nghe thấy tiếng đại bác đó, đại bác nằm đâu đó trên một ________ với các tiêu điểm nằm tại ________.

3.5.39. $y^2 - 4y$ là một phần của $(y-2)^2 =$ ________ và $2x^2 + 12x$ là một phần của $2(x+3)^2 =$ ________. Vì vậy $y^2 - 4y - 2x^2 - 12x = 0$ đưa ra hyperbola $(y-2)^2 - 2(x+3)^2 =$ ________. Tâm của nó là ________ và nó mở sang ________.

3.5.40. Thực hiện theo Bài tập 39 để đưa $y^2 + 2y = x^2 + 10x$ về $Y^2 = X^2 + C$ với X, Y, và C bằng ________.

3.5.41. Vẽ hyperbola $x^2 - 4y^2 = 1$ và tìm các tiêu điểm và các đường tiệm cận của nó.

Các bài tập 3.5.42-3.5.46 là về các đường cong bậc hai (các đường conic).

3.5.42. $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ không có nghiệm (đồ thị rỗng) đối với A, C, F nào?

3.5.43. Chứng tỏ rằng $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ là phương trình (được bình phương) của một đường thẳng.

3.5.44. Cho trước bất kỳ ________ điểm trong mặt phẳng, một đường cong bậc hai $Ax^2 + \cdots + F = 0$ đi qua các điểm đó.

3.5.45. (a) Khi mặt phẳng $z = ax + by + c$ cắt mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, khử z bằng cách bình phương phương trình mặt phẳng. Viết lại dưới dạng $Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Dx + Ey + F = 0$.

(b) Tính $B^2 - 4AC$ theo a và b.

(c) Chứng tỏ rằng mặt phẳng cắt mặt nón theo một ellipse nếu $a^2 + b^2 < 1$ và theo một hyperbola nếu $a^2 + b^2 > 1$ (*dốc hơn*).

3.5.46. Các nghiệm của $ax^2 + bx + c = 0$ cũng chứa biểu thức đặc biệt $b^2 - 4ac$. Phương trình bậc hai này có hai nghiệm thực nếu ________ và không có nghiệm thực nếu ________. Các nghiệm giống nhau khi $b^2 = 4ac$, tương tương tự như trong trường hợp của một parabola.

3.6. Phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$

Phép lặp có nghĩa là lặp đi lặp lại cùng một hàm số . Giả sử hàm số là $F(x) = \cos x$. Chọn bất kỳ giá trị bắt đầu nào, chẳng hạn $x_0 = 1$. Lấy cosine của nó: $x_1 = \cos x_0 = .54$. ***Sau đó lấy cosine của*** x_1. Điều này tạo ra $x_2 = \cos .54 = .86$. *Phép lặp là* $x_{n+1} = \cos x_n$. Chiếc máy tính cầm tay tôi dùng được đặt về chế độ radian rồi tôi nhấn "cos" từng lần một. Các số ban đầu không quan trọng, thứ quan trọng là đầu ra sau 12 hoặc 30 hoặc 100 bước.

Ví dụ 3.6.1. $x_{12} = .75, x_{13} = .73, x_{14} = .74, \ldots, x_{29} = .7391, x_{30} = .7391$. Mục tiêu là giải thích tại sao các x tiến tới $x^* = .739085\ldots$. Mỗi giá trị ban đầu x_0 đều kéo theo cùng một số x^* này. ***Có điều gì đặc biệt về*** .7391?

Lưu ý về phép lặp. Liệu $x_1 = \cos x_0$, $x_2 = \cos x_1$ có nghĩa là $x_2 = \cos^2 x_0$ hay không? Tuyệt đối không! Phép lặp tạo ra một hàm $\cos(\cos x)$ mới và khác hẳn. Hàm này dùng nút cos, chứ không phải là nút bình phương, Bước thứ ba tạo ra $F(F(F(x)))$. Ngay khi có thể, hãy thực hiện phép lặp với $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$. Các x tiến tới giới hạn nào? Liệu đó có phải là $\frac{1}{2}(.7931)$ hay không?

Hãy để tôi giải thích chậm lại để hiểu những câu hỏi này. ***Ý tưởng chính được biểu diễn bởi phương trình*** $x_{n+1} = F(x_n)$. Việc thế x_0 vào F đưa ra x_1. Đầu ra x_1 này là đầu vào mà kéo theo x_2. Đến lượt của nó, x_2 là đầu vào và đầu ra $x_3 = F(x_2)$. Đây là ***phép lặp***, và nó tạo ra dãy $x_0, x_1, x_3, \ldots$.

Các x có thể tiến tới một giới hạn x^*, tùy thuộc vào hàm số F. Đôi khi x^* cũng phụ thuộc vào giá trị ban đầu x_0. Đôi khi *không* có giới hạn. Nhìn vào một ví dụ thứ hai, chúng ta không cần đến một chiếc máy tính cầm tay đối với ví dụ này.

Ví dụ 3.6.2. $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{2}x_n + 4$. Bắt đầu với $x_0 = 0$, dãy số là:

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + 4 = 4, \quad x_2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + 4 = 6, \quad x_3 = \frac{1}{2}\cdot 6 + 4 = 7, \quad x_4 = \frac{1}{2}\cdot 7 + 4 = 7\frac{1}{2}, \quad \ldots$$

Các số $0, 4, 6, 7, 7\frac{1}{2}, \ldots$. đó dường như đang tiến tới $x^* = 8$. Một máy tính sẽ thuyết phục chúng ta điều này là đúng. Toán học cũng sẽ vậy, khi ta thấy những gì đặc biệt về 8:

$$\text{Khi các } x \text{ tiến tới } x^*,\ \text{giới hạn của } x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4 \text{ là}$$

$$x^* = \frac{1}{2}x^* + 4. \text{ Phương trình giới hạn này đưa ra } x^* = 8.$$

8 là "trạng thái ổn định" trong đó *đầu vào bằng đầu ra*: $8 = F(8)$. Nó là ***điểm bất động***.

Nếu chúng ta bắt đầu tại $x_0 = 8$, dãy số là $8, 8, 8, \ldots$. Khi chúng ta bắt đầu tại $x_0 = 12$, dãy số đi lùi về 8:

$$x_1 = \frac{1}{2}.12 + 4 = 10, \qquad x_2 = \frac{1}{2}.10 + 4 = 9, \qquad x_3 = \frac{1}{2}.9 + 4 = 8, \qquad \ldots$$

Phương trình đối với giới hạn*: *Nếu các phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ hội tụ tới x^*, khi đó $x^* = F(x^*)$.

Nhắc lại: 8 là đặc biệt bởi vì nó bằng $\frac{1}{2} \cdot 8 + 4$. Số $.7391\ldots$ đặc biệt bởi vì nó bằng $\cos .7391\ldots$. ***Đồ thị của $y = x$ và đồ thị của $y = F(x)$ giao nhau tại x^*.*** Việc giải thích *lý do tại sao* các x hội tụ (hay lý do tại sao chúng không hội tụ) là công việc của giải tích.

Ví dụ 3.6.3. $x_{n+1} = x_n^2$ có hai điểm bất động: $0 = 0^2$ và $1 = 1^2$. Ở đây $F(x) = x^2$.

Bắt đầu với $x_0 = \frac{1}{2}$, dãy số $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256} \cdots$ nhanh chóng đi tới $x^* = 0$. Chúng ta có một dãy số tiến tới $x^* = 1$ chỉ khi bắt đầu từ $x_0 = 1$ (tất nhiên) và bắt đầu từ $x_0 = -1$. Bắt đầu từ $x_0 = 2$, chúng ta nhận được $4, 16, 256, \ldots$ và *dãy số phân kỳ tới* $+\infty$.

Mỗi giới hạn x^* có "***một lưu vực hút***." Lưu vực hút chứa tất cả các điểm bắt đầu x_0 mà kéo theo x^*. Đối với các Ví dụ 1 và 2, mọi x_0 đều kéo theo .7391 và 8. Các lưu vực hút này là toàn bộ trục số (điều này vẫn cần được chứng minh). Ví dụ 3 có 3 lưu vực hút—khoảng trong $-1 < x_0 < 1$, hai điểm $x_0 = \pm 1$, và tất cả các điểm còn lại. Lưu vực hút ngoài $|x_0| > 1$ kéo theo $\pm\infty$. Tôi thách bạn tìm được các giới hạn và các lưu vực hút (bằng mày tính cầm tay) đối với $F(x) = x - \tan x$.

Trong Ví dụ 3.6.3, $x^* = 0$ là ***hút***. Các điểm gần x^* di chuyển về phía x^*. Điểm bất động $x^* = 1$ là ***đẩy***. Các điểm gần 1 di chuyển ra xa. Chúng ta bây giờ tìm quy tắc mà quyết định liệu x^* là hút hay đẩy. ***Thứ then chốt là hệ số góc dF/dx tại x^*.***

Phát biểu 3.6.1. Bắt đầu từ bất kỳ x_0 nào gần một điểm bất động $x^* = F(x^*)$:

x^* là ***hút*** nếu $|dF/dx|$ nhỏ hơn 1 tại x^*

x^* là ***đẩy*** nếu $|dF/dx|$ lớn hơn 1 tại x^*.

Trước tiên tôi sẽ đưa ra một chứng minh bằng giải tích. Sau đó đưa ra một bức tranh về sự hội tụ, được thể hiện bằng các "*mạng nhện*." Cả hai phương pháp đều làm sáng tỏ phép thử đối với sự hút: $|dF/dx| < 1$.

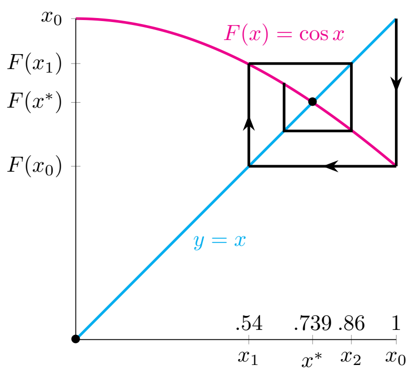
Chứng minh thứ nhất: Trừ $x^* = F(x^*)$ khỏi $x_{n+1} = F(x_n)$. Hiệu $x_{n+1} - x^*$ bằng với $F(x_n) - F(x^*)$. Đây là Δf. ***Ý tưởng cơ bản của giải tích là ΔF gần bằng với $F'\Delta x$***:

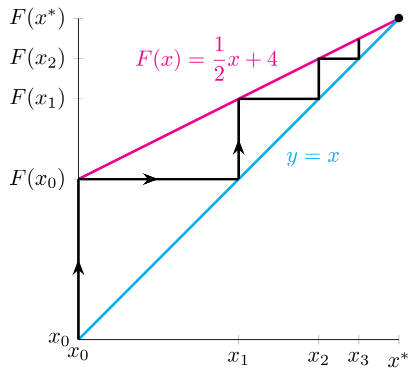
$$x_{n+1} - x^* = F(x_n) - F(x^*) \approx F'(X^*)(x_n - x^*) \tag{3.6.1}$$

"Sai số" $x_n - x^*$ được nhân bởi hệ số góc dF/dx. Sai số tiếp theo $x_{n+1} - x^*$ là nhỏ hơn hoặc lớn hơn, tùy thuộc vào $|F'| < 1$ hay $|F'| > 1$ tại x^*. Mỗi bước nhân xấp xỉ bởi $|F'(x^*)|$. ***Độ lớn của nó điều khiển tốc độ của sự hội tụ.***

Trong Ví dụ 3.6.1, $F(x)$ là $\cos x$ và $F'(x)$ là $-\sin x$. Có sự hút về .7391 bởi vì $|\sin x^*| < 1$. Trong Ví dụ 3.6.2, F là $\frac{1}{2}x + 4$ và F' là $\frac{1}{2}$. Có sự hút về 8. Trong Ví dụ 3.6.3, F là x^2 và F' là $2x$. Có sự siêu hút về $x^* = 0$ (trong đó $F' = 0$). Có một sự đẩy từ $x^* = 1$ (trong đó $F' = 2$).

Tôi thừa nhận chúng ta phải đối mặt với một khó khăn lớn. Xấp xỉ trong phương trình (3.6.1) chỉ đúng *gần* x^*. Nếu x_0 ở xa, liệu dãy số có còn tiến tới x^* nữa hay không? Khi có một vài điểm hút, chúng ta đạt được x^* nào? Mục này





HÌNH 3.6.1. Các mạng nhện từ (x_0, x_0) tới (x_0, x_1) tới (x_1, x_1)—đường thẳng đến đường cong đường thẳng.

khởi đầu với các phép lặp tốt, những phép lặp này giải phương trình $x^* = F(x^*)$ hoặc $f(x) = 0$. Lúc khép lại mục này, chúng ta sẽ khám phá ***phương pháp của Newton***. Mục tiếp theo tạo ra các phép lặp điên rồ nhưng tuyệt vời, các phép lặp này không hội tụ và cũng không bùng nổ. Chúng dẫn đến các "*fractal*" và các "*tập Cantor*" và các "*hỗn độn*."

Toán học nghiên cứu về các phép lặp vẫn chưa hoàn thiện. Chúng ta có thể không bao giờ hoàn thiện được lĩnh vực này, nhưng ít ra chúng ta đang đi đúng hướng. Hãy tự chọn một hàm cụ thể và tiếp tục nghiên cứu về nó.

ĐỒ THỊ CỦA MỘT PHÉP LẶP: CÁC MẠNG NHỆN

Phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ liên quan đến hai đồ thị cùng một lúc. Một là đồ thị của $y = F(x)$. Cái còn lại là đồ thị của $y = x$ (đường thẳng 45°). Phép lặp nhảy tới và lui giữa những đồ thị này. Đây là một cách rất thuận tiện để thấy toàn bộ quá trình.

Ví dụ 1 là $x_{n+1} = \cos x_n$. Hình 3.6.1 cho thấy đồ thị của $\cos x$ và "*mạng nhện*." Bắt đầu tại (x_0, x_0) trên đường thẳng 45°, quy tắc dựa trên $x_1 = f(x_0)$:

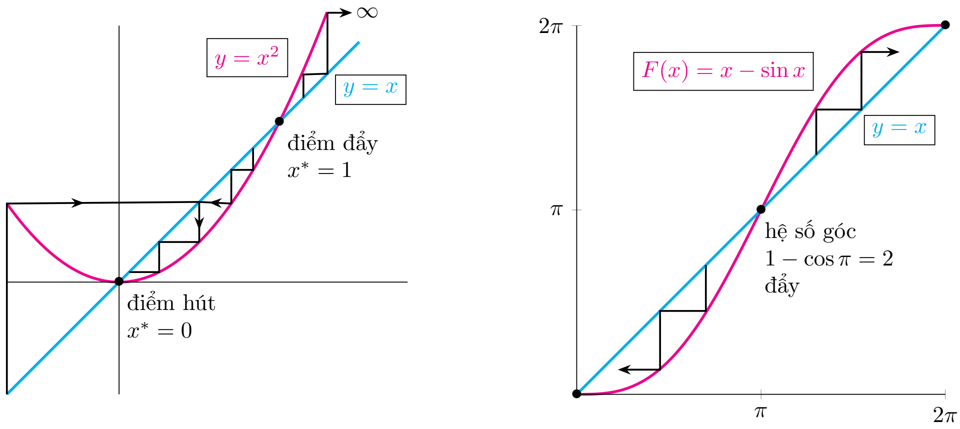
Từ (x_0, x_0) đi lên hoặc đi xuống tới (x_0, x_1) ***trên đường cong***.

Từ (x_0, x_1) đi ngang tới (x_1, x_1) ***trên đường thẳng*** 45°.

Các bước này được lặp đi lặp lại mãi mãi. Từ x_1 đi lên tới đường cong tại $F(x_1)$. Tung độ này là x_2. Bây giờ băng ngang cắt qua đường thẳng 45° tại (x_2, x_2). Các phép lặp đang nhắm đến $(x^*, x^*) = (.7391, .7391)$. Đây là *giao điểm* của hai đồ thị $y = F(x)$ và $y = x$.

Ví dụ 3.6.2 là $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4$. Cả hai đồ thị đều là những đường thẳng. Mạng nhện chỉ kết về một phía, từ $(0, 0)$ tới $(0, 4)$ tới $(4, 4)$ tới $(4, 6)$ tới $(6, 6)$. Chú ý cách y thay đổi (đường thẳng đứng) và sau đó x thay đổi (đường thẳng ngang). Hệ số góc của $F(x)$ là $\frac{1}{2}$, nên khoảng cách đến 8 được nhân bởi $\frac{1}{2}$ tại mỗi bước.

Ví dụ 3.6.3 có $x_{n+1} = x_n^2$. Đồ thị của $y = x^2$ cắt đường thẳng 45° tại hai điểm bất động: $0^2 = 0$ và $1^2 = 1$. Hình 3.6.2a bắt đầu phép lặp tại nơi gần với 1, nhưng nó nhanh chóng đi ra xa. Điểm bất động này là đẩy vì $F'(1) = 2$. Khoảng cách đến $x^* = 1$ được gấp đôi (tại điểm bắt đầu). Một đường đi di chuyển xuống tới $x^* = 0$—điểm này là *siêu hút* vì $F' = 0$. Đường đi từ $x_0 > 1$ phân kỳ tới vô cùng.



HÌNH 3.6.2. Các mạng nhện hội tụ và phân kỳ: $F(x) = x^2$ và $F(x) = x - \sin x$.

VÍ DỤ 3.6.4. $F(x)$ có hai điểm hút x^* (một điểm đẩy x^* luôn nằm ở giữa hai điểm hút).
Hình 3.6.2b cho thấy hai giao điểm với hệ số góc không. Các phép lặp và các mạng nhện hội tụ một cách nhanh chóng. Ở giữa, đồ thị của $F(x)$ phải cắt đường thẳng $45°$ từ dưới. Điều này đòi hỏi một hệ số góc lớn hơn một. Các mạng nhện phân kỳ từ điểm bất ổn định này, điểm này phân tách các lưu vực hút. Điểm bất động $x = \pi$ bản thân nó là một lưu vực hút.

LƯU Ý. Để vẽ các mạng nhện trên một máy tính cầm tay, vẽ đồ thị $y = F(x)$ nằm phía trên của $y = x$. Trên một máy tính cầm tay Casio, một cách để thực hiện điều này là vẽ (x_0, x_0) và đưa ra lệnh `LINE` : `PLOT X, Y` và theo sau đó là `EXE`. Bây giờ di chuyển con trỏ theo phương đứng tới $y = F(x)$ và nhấn `EXE`. Sau đó di chuyển theo phương ngang tới $y = x$ và nhấn `EXE`. Tiếp tục. Mỗi bước vẽ một đường thẳng.

Đối với TI-81 (và cả Casio nữa), một chương trình ngắn cũng có thể tạo ra một mạng nhện. Lưu $F(x)$ dưới cái tên $\mathtt{Y}_1$ trên màn hình soạn thảo hàm `Y =`. Cài đặt miền (cửa sổ vuông hoặc tự động định tỷ lệ). Chạy chương trình và đáp lại lời nhắc được hiện thỉ với x_0:

```
PrgmC : COBWEB    : Disp "INITIAL XØ"    : Input X    : All − Of
: Y1 − On    "X" → Y4    : Lbl 1    : X → S    : Y1 → T    : Line(S, S, S, T)
: Line(S, S, S, T)    : T → S    : Pause    : Go to 1
```

LƯU Ý. Các x tiến tới x^* từ một phía khi $0 < dF/dx < 1$.

LƯU Ý. Một lưu vực hút có thể bao gồm các x ở rất xa (lưu vực này có thể chứa vô hạn các x như vậy). Điều này làm cho bài toán trở nên thú vị. Nếu không có những điểm bất động nào là hút, xem Mục 3.7 để thấy các "chu trình" và các "hỗn độn."

PHÉP LẶP $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$

Tới điểm này, chúng tôi tạo điều kiện để người đọc tự lựa chọn. Người đọc có thể quyết định nhảy thẳng tới mục tiếp theo về "Phương pháp của Newton." Phương pháp này là một phép lặp để giải $f(x) = 0$. Hàm số $F(x)$ kết hợp với x_n và $f(x_n)$

và $f'(x_n)$ vào một công thức tối ưu đối với x_{n+1}. Chúng ta sẽ thấy phương pháp của Newton hoạt động nhanh như thế nào (khi nó hoạt động). Nó *là chứ không phải là một trong những* thuật toán nổi bậc để giải các phương trình, và nó hoàn toàn được xây dựng trên các xấp xỉ tiếp tuyến.

Người đọc cũng có thể quyết định tìm hiểu (thông qua giải tích) một họ phép lặp hoàn chỉnh. Họ này phụ thuộc vào một số c, số này được chọn theo ý của chúng ta. ***Sự lựa chọn tốt nhất của*** c ***tạo ra phương pháp của Newton***. Tôi nhấn mạnh rằng phép lặp không khi nào là một ý tưởng mới và lập dị. *Nó là một kỹ thuật cơ sở trong điện toán khoa học.*

Chúng ta bắt đầu với việc nhận ra rằng có rất nhiều cách để đạt được $f(x^*) = 0$. (Tôi viết x^* để ký hiệu nghiệm.) Một thuật toán tốt có thể chuyển sang phương pháp của Newton khi nó tiến đến gần nghiệm. Phép lặp dùng $f(x_n)$ để quyết định điểm tiếp theo x_{n+1}:

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - cf(x_n). \tag{3.6.2}$$

Chú ý cách $f(x)$ được xây dựng từ $f(x)$—hai hàm số này là khác nhau! Chúng ta di chuyển f sang vế phải và nhân bởi một "số tiền đề" c. *Sự lựa chọn của c* (hoặc c_n, nếu nó thay đổi qua từng bước) *là tuyệt đối quan trọng*. Việc đoán điểm bắt đầu x_0 cũng quan trọng—nhưng độ chính xác của nó không phải lúc nào cũng nằm trong tầm kiểm soát của chúng ta.

Giả sử x_n hội tụ tới x^*. Khi đó giới hạn của phương trình (2) là

$$x^* = x^* - cf(x^*). \tag{3.6.3}$$

Biểu thức này đưa ra $f(x^*) = 0$. Nếu các x_n có một giới hạn, nó là nghiệm đúng của phương trình. Nó là điểm bất động của F (chúng ta có thể giả định $c_n \to c \neq 0$ và $f(x_n) \to f(x^*)$). Có hai câu hỏi quan trọng, và cả hai câu hỏi này đều được trả lời nhờ hệ số góc $F'(x^*)$:

(1) x_n tiến tới x^* (hoặc phân kỳ) nhanh như thế nào?
(2) Một sự lựa chọn tốt của c (hoặc c_n) là gì?

VÍ DỤ 3.6.5. $f(x) = ax - b$ bằng không tại $x^* = b/a$. Phép lặp $x_{n+1} = x_n - c(ax_n - b)$ dự định tìm b/a mà không thực sự dùng đến phép chia. (Các máy tính thời kỳ đầu không thể thực hiện được phép chia; chúng dùng đến các phép lặp). Việc trừ x^* khỏi hai vế đưa ra một phương trình đối với sai số:

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - c(ax_n - b).$$

Thay b bởi ax^*. Vế phải là $(1 - ca)(x_n - x^*)$. "Phương trình sai số" này là:

$$(\text{sai số})_{n+1} = (1 - ca)(\text{sai số})_n. \tag{3.6.4}$$

Tại mỗi bước sai số được nhân bởi $(1 - ca)$, mà chính là F'. Sai số đi tới không nếu $|F'|$ nhỏ hơn 1. Giá trị tuyệt đối $|1 - ca|$ quyết định mọi thứ:

$$x_n \textbf{ hội tụ tới } x^* \textbf{ khi và chỉ khi } -1 < 1 - ca < 1. \tag{3.6.5}$$

Sự lựa chọn hoàn hảo (nếu chúng ta đã biết nó) là $c = 1/a$, sự lựa chọn này sẽ biến nhân tử $1 - ca$ thành không. Khi đó một phép lặp đưa ra đáp án chính xác: $x_1 = x_0 - (1/a)(ax_0 - b) = -b/a$. Đây là đường thẳng ngang trong Hình 3.6.3a, hội tụ ngay trong một bước. Nhưng hãy nhìn vào những đường thẳng khác.

Ví dụ này không cần đến giải tích. Các phương trình tuyến tính không cần đến các phép lặp để xấp xỉ các nghiệm. Ý tưởng then chốt là *phương trình phi tuyến tính $f(x) = 0$ gần như tuyến tính khi gần với x^**. Chúng ta áp dụng các xấp xỉ tiếp tuyến. Bạn đang nhìn thấy cách giải tích được ứng dụng, trong một bài toán mà không bắt đầu với việc yêu cầu tìm đạo hàm.

SỰ LỰA CHỌN TỐT NHẤT CỦA c

Mục tiêu trước mắt là nghiên cứu các sai số $x_n - x^*$. Chúng nhanh chóng đi tới không, nếu nhân tử là nhỏ. Để hiểu $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$, lấy phương trình này trừ phương trình $x^* = x^* - cf(x^*)$:

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - c(f(x_n) - f(x^*)). \tag{3.6.6}$$

Bây giờ giải tích nhập cuộc. ***Khi bạn thấy một hiệu của các f, hãy nghĩ về df/dx***. Thay $f(x_n) - f(x^*)$ bởi $A(x_n - x^*)$, trong đó A ký hiệu cho df/dx tại x^*:

$$x_{n+1} - x^* \approx (1 - cA)(x_n - x^*). \tag{3.6.7}$$

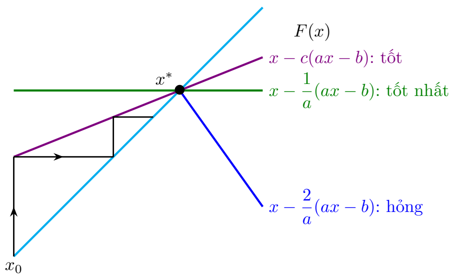
Đây là ***phương trình sai số*** . Sai số mới tại bước $n+1$ xấp xỉ với sai số cũ được nhân bởi $m = 1 - cA$. Điều này tương ứng với $m = 1 - ca$ trong ví dụ tuyến tính. Chúng ta tiếp tục trở lại phép thử cơ bản $|m| = |F'(x^*)| < 1$:

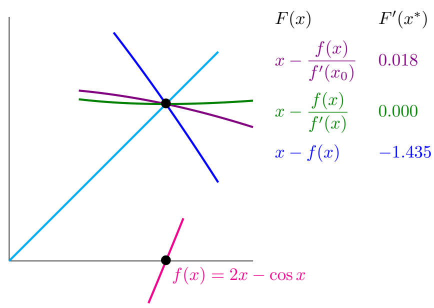
PHÁT BIỂU 3.6.2. Bắt đầu gần x^*, các sai số $x_n - x^*$ đi tới không nếu nhân tử có $|m| < 1$. Sự lựa chọn hoàn hảo là $c = 1/A = 1/f'(x^*)$· Khi đó $m = 1 - cA = 0$.

Chỉ có một khó khăn: *Chúng ta không biết x^**. Vì vậy chúng ta không biết được c nào là hoàn hảo. Nó phụ thuộc vào hệ số góc $A = f'(x^*)$ tại nghiệm chưa được biết. Tuy nhiên chúng ta có thể đoán gần đúng, bằng cách dùng hệ số góc tại x_n:

Chọn $c_n = 1/f'(x_n)$. Khi đó $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = F(x_n)$.

Đây là phương pháp của Newton. Chùng ta có thể làm cho nhân tử $1 - cA$ càng gần với 0. Bằng cách xây dựng df/dx vào $F(x)$, Newton đã tăng tốc sự hội tụ của phép lặp.





HÌNH 3.6.3. Nhân tử sai số là $m = 1 - cf'(x^*)$. Newton có $c = 1/f'(x_n)$ và $m \to 0$.

VÍ DỤ 3.6.6. Giải $f(x) = 2x - \cos x = 0$ với các phép lặp khác nhau (các c khác nhau).

Đường thẳng $y = 2x$ cắt đường cong cosine ở đâu đó gần $x = \frac{1}{2}$. Giao điểm mà tại đó $2x^* = \cos x^*$ có công thức không hề đơn giản chút nào. Chúng ta bắt đầu từ $x_0 = \frac{1}{2}$ và lặp $x_{n+1} = x_n - c(2x_n - \cos x_n)$ với *ba sự chọn khác nhau của c.*

Lấy $c = 1$ hoặc $c = 1/f'(x_0)$ hoặc cập nhật c bởi quy tắc của Newton $c_n = 1/f'(x_n)$:

$x_0 = .50$	$c = 1$	$c = 1/f'(x_0)$	$c_n = 1/f'(x_n)$
$x_1 =$	.38	.45063	.45062669
$x_2 =$	.55	.45019	.45018365
$x_3 =$	.30	.45018	.45018361 . . .

Cột với $c = 1$ đang phân kỳ (bị đẩy khỏi x^*). Cột thứ hai cho thấy sự hội tụ (bị hút về x^*). Cột thứ ba (phương pháp của Newton) tiến tới x^* nhanh đến nỗi mà .4501836 và bảy chữ số thập phân sau đó nữa trùng với x_3.

Sự hội tụ này khớp với dự đoán như thế nào? Lưu ý rằng $f'(x) = 2 + \sin x$ nên $A = 2.435$. Nhìn xem liệu các sai số $x_n - x'$ thực sự, nhìn xuống từng cột, có được nhân bởi m được dự đoán bên dưới cột đó hay không:

	$c = 1$	$c = 1/(2 + \sin \frac{1}{2})$	$c_n = 1/(2 + \sin x_n)$
$x_0 - x^*$	0.05	$4.98 \cdot 10^{-2}$	$4.98 \cdot 10^{-2}$
$x_1 - x^*$	-0.07	$4.43 \cdot 10^{-4}$	$4.43 \cdot 10^{-3}$
$x_2 - x^*$	0.10	$7.88 \cdot 10^{-6}$	$3.63 \cdot 10^{-8}$
$x_3 - x^*$	-0.15	$1.41 \cdot 10^{-7}$	$2.78 \cdot 10^{-16}$
nhân tử	$m = -1.4$	$m = .018$	$m \to 0$ (Newton)

Cột thứ nhất cho thấy một nhân tử nhỏ hơn -1. Các sai số tăng qua từng bước. Bởi vì m là âm, nên các sai số đổi dấu—mạng nhện hướng ra ngoài.

Cột thứ hai cho thấy sự hội tụ với $m = .018$. Bước đầu tiên của nó giống với phương pháp của Newton, sau đó c được cố định. Sau n bước, sai số gần như tỷ lệ thuận với $m^n = (.018)^n$—đó là "***sự hội tụ tuyến tính***" với một nhân tử tốt.

Cột thứ ba cho thấy sự "***hội tụ bình phương***" của phương pháp của Newton. Việc nhân sai số bởi m là hút hơn bao giờ hết, bởi vì $m \to 0$. Trong thực tế, m tự nó là tỷ lệ thuận với sai số, nên ***tại từng bước sai số được bình phương***. Bài toán 3.8.31 sẽ chứng tỏ rằng $(\text{sai số})_{n+1} \leqslant M(\text{sai số})_n^2$. Bình phương này đưa chúng ta từ 10^{-2} tới 10^{-4} tới 10^{-8} tới "một ϵ mang tính rập khuôn" trong ba bước. Số lượng các chữ số thập phân chính xác được gấp đôi tại mỗi bước khi phương pháp của Newton hội tụ.

Lưu ý. Sự lựa chọn $c = 1$ sinh ra $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$. Đây là "phép thế liên tiếp." Phương trình $f(x) = 0$ được viết lại dưới dạng $x = x - f(x)$, và mỗi x_n được thế trở lại để sinh ra x_{n+1}. Phép lặp với $c = 1$ không phải lúc nào cũng thất bại!

Lưu ý. Phương pháp của Newton là phép thế liên tiếp đối với f/f', chứ không phải là đối với f. Khi đó $m \approx 0$.

Lưu ý. Edwards và Penney[30] cũng ngẫu nhiên chọn cùng ví dụ $2x = \cos x$ cho cuốn sách giải tích của họ. Nhưng họ khéo léo viết nó dưới dạng $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos x_n$, mà có $|F'| = \frac{1}{2} |\sin x| < 1$. Phép lặp này phù hợp với họ của chúng ta với $c = \frac{1}{2}$, và nó thành công. Chúng ta trước đó đã hỏi liệu giới hạn của nó có là $\frac{1}{2}(.7391)$ hay không. *Không*, giới hạn của nó là $x^* = .450\ldots$.

Lưu ý. Sự lựa chọn $c = 1/f'(x_0)$ là "***một biến thể của phương pháp của Newton***.". Bước đầu tiên của nó giống với phương pháp của Newton, sau đó c được cố định. Các bước của phương pháp này được thực hiện nhanh chóng hơn, bởi vì chúng không đòi hỏi một $f'(x_0)$ mới. Nhưng chúng ta lại cần nhiều bước hơn. Hàng triệu dollars đã được chi cho việc nghiên cứu phương pháp của Newton, để cải thiện tốc độ của phương pháp này. Trong tất cả các dạng của nó, $f(x) = 0$ là bài toán chính của điện toán.

BÀI TẬP 3.6

---

[30] Nd: Charles Henry Edwards, Cựu Giáo sư, Khoa Toán, Đại học Georgia (tiếng Anh: University of Georgia). David Emroy Penney, Phó Giáo sư, Khoa Toán, Đại học Georgia.

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

$x_{n+1} = x_n^3$ mô tả một __a__. Sau một bước $x_1 =$ __b__. Sau hai bước $x_2 = F(x_1) =$ __c__. Nếu ngẫu nhiên mà đầu vào=đầu ra, hay $x^* =$ __d__, khi đó x^* là một điểm __e__. $F = x^3$ có __f__ điểm bất động, tại $x^* =$ __g__. Bắt đầu gần một điểm bất động, x_n sẽ hội tụ tới nó nếu __h__ < 1. Đó là bởi vì $x_{n+1} - x^* = F(x_n) - F(x^*) \approx$ __i__. Điểm bất động này được gọi là __j__. x_n bị đẩy nếu __k__. Đối với $F = x^3$, các điểm bất động có $F' =$ __l__. Mạng nhện đi từ (x_0, x_0) tới (,) tới (,) và hội tụ tới $(x^*, x^*) =$ __m__. Đây là một giao điểm của $y = x^3$ và $y =$ __n__, và nó là siêu hút vì __o__.

$f(x) = 0$ có thể được giải bằng phép lặp với $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$, trong trường hợp này $F'(x^*) =$ __p__. Trừ $x^* = x^* - cf(x^*)$, phương trình sai số là $x_{n+1} - x^* \approx m($__q__$)$. Nhân tử là $m =$ __r__. Các sai số tiến tới không nếu __s__. Sự lựa chọn $c_n =$ __t__ sinh ra phương pháp của Newton. Sự lựa chọn $c = 1$ là "__u__ liên tiếp" và $c =$ __v__ là một biến thể của phương pháp của Newton. Sự hội tụ tới x^* là __w__ nhất định.

Chúng ta có ba cách để nghiên cứu các phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$: (**1**) tính $x_1, x_2, \ldots$ từ x_0 khác nhau (**2**) tìm các điểm bất định x^* và kiểm tra $|dF/dx| < 1$ (**3**) vẽ các mạng nhện.

Trong các Bài tập 3.6.1-3.6.8, bắt đầu từ $x_0 = .6$ và $x_0 = 2$. Tính $x_1, x_2, \ldots$ để kiểm tra sự hội tụ:

3.6.1. $x_{n+1} = x_n^2 - \frac{1}{2}$

3.6.2. $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$

3.6.3. $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$

3.6.4. $x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$

3.6.5. $x_{n+1} = 3x_n(1 - x_n)$

3.6.6. $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 2$

3.6.7. $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$

3.6.8. $x_{n+1} = |x_n|$

3.6.9. Kiểm tra dF/dx tại tất cả các điểm bất động trong các các Bài tập 3.6.1-3.6.6. Chúng là hút hay là đẩy?

3.6.10. Từ $x_0 = -1$, tính dãy số $x_{n+1} = -x_n^3$. Vẽ mạng nhện với "chu trình" của nó. Hai bước sinh ra $x_{n+2} = x_n^9$, mà có các điểm bất động ________.

3.6.11. Vẽ mạng nhện đối với $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$ và $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}x_n$ bắt đầu từ $x_0 = 2$. Quy tắc: Mạng nhện kết về hai phía khi dF/dx là ________.

3.6.12. Vẽ mạng nhện đối với $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ bắt đầu từ điểm tuần hoàn $x_0 = 0$. Một điểm tuần hoàn khác là ________. Bắt đầu gần tại $x_0 = .1$ để thấy liệu các phép lặp có bị hút tới $0, -1, 0, -1, \ldots$ hay không.

Giải các phương trình 3.6.13-3.6.16 với sai số không quá 1% bằng phép lặp.

3.6.13. $x = \cos\frac{1}{2}x$

3.6.14. $x = \cos^2 x$

3.6.15. $x = \cos\sqrt{x}$

3.6.16. $x = 2x - 1$ (??)

3.6.17. $x_{n+1} = a(x_n - x_n^2)$ hội tụ tới $x^* = 0$ với số a nào?

3.6.18. $x_{n+1} = a(x_n - x_n^2)$ hội tụ tới $x^* = (a-1)/a$ với số a nào?

3.6.19. $x_{n+1} = 4(x_n - x_n^2)$ để thấy sự hỗn độn. Tại sao x_n không tiến tới $x^* = \frac{3}{4}$?

3.6.20. Một điểm bất động của $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ là hút, điểm còn lại là đẩy. Bằng thực nghiệm hoặc các mạng nhện, tìm lưu vực hút của các x_0 mà đi tới tới điểm hút.

3.6.21 (quan trọng). Tìm điểm bất động đối với $F(x) = ax + s$. Nó là hút khi nào?

3.6.22. Điều gì xảy ra trong trường hợp tuyến tính $x_{n+1} = ax_n + 4$ khi $a = 1$ và khi $a = -1$?

3.6.23. Bắt đầu với \$1000, bạn tiêu một nửa số tiền của bạn mỗi năm và một người dì giàu có nhưng hào phóng cho bạn \$1000 nữa. Số dư trạng thại ổn định x^* của bạn là bao nhiêu? x^* là bao nhiêu nếu bạn bắt đầu với một triệu dollars?

3.6.24. Nợ quốc gia của Mỹ đã từng là \$1 nghìn tỷ. Lạm phát làm giảm giá trị thực của nó 5% mỗi năm (nên nhân bởi $a = .95$), nhưng bội chi làm tăng thêm \$100 tỷ. Hỏi số nợ trạng thái ổn định x^* là bao nhiêu?

3.6.25. $x_{n+1} = b/x_n$ có điểm bất động $x^* = \sqrt{b}$. Chứng tỏ rằng $|dF/dx| = 1$ tại điểm đó—hỏi dãy số bắt đầu từ x_0?

3.6.26. Chứng tỏ rằng cả hai điểm bất động của $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 3$ đều là đẩy. Các phép lặp làm những gì?

3.6.27. Một máy tính cầm tay có giá $5 lấy được căn bậc hai nhưng không lấy được căn bậc ba. Giải thích tại sao $x_{n+1} = \sqrt{2/x_n}$ hội tụ tới $\sqrt[3]{2}$.

3.6.28. Bắt đầu các mạng nhện đối với $x_{n+1} = \sin x_n$ và $x_{n+1} = \tan x_n$. Trong cả hai trường hợp $dF/dx = 1$ tại $x^* = 0$. (a) Liệu các phép lặp có hội tụ hay không? (b) Đề xuất một lý thuyết dựa trên F'' đối với trường hợp khi $F' = 1$.

Giải $f(x) = 0$ trong 3.6.29-3.6.32 bằng phép lặp $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$, để tìm một c mà thành công và một c mà thất bại.

3.6.29. $f(x) = x^2 - 4$

3.6.30. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3.6.31. $f(x) = (x-2)^9 - 1$

3.6.32. $f(x) = (1-x)^{-1} - 3$

3.6.33. Phương pháp của Newton tính một $c = 1/f'(c_n)$ mới tại từng bước. Viết ra công thức phép lặp đối với $f(x) = x^3 - 2 = 0$ và $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2} = 0$.

3.6.34. Áp dụng Bài toán 3.6.33 để tìm sáu chữ số thập phân đầu tiên của $\sqrt[3]{2}$ và $\pi/6$.

3.6.35. Bằng thực nghiệm, tìm từng x^* và lưu vực hút của nó, khi phương phápn của Newton được áp dụng đối với $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

3.6.36. Kiểm tra phương pháp của Newton trên $x^2 - 1 = 0$, bắt đầu từ khá xa tại $x_0 = 10^6$. Lúc đầu, sai số được giảm đi bởi khoảng $m = \dfrac{1}{2}$. Gần $x^* = 1$ nhân tử tiến tới $m = 0$.

3.6.37. Tìm nhân tử m tại từng điểm bất động của $x_{n+1} = x_n - c(x_n^2 - x_n)$. Dự đoán sự hội tụ đối với các c khác (hội tụ tới x^* nào?).

3.6.38. Làm một bảng gồm các phép lặp đối với $c = 1$ và $c = 1/f'(x_0)$ và $c = 1/f'(x_n)$, khi $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ và $x_0 = 1$.

3.6.39. (a) Trong phép lặp đối với $x^2 - 2 = 0$, tìm dF/dx tại x^*:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

(b) Phép lặp Newton có $F(x) = x - f(x)/f'(x)$. Chứng tỏ rằng $F' = 0$ khi $f(x) = 0$. *Nhân tử đối với Newton là* $m = 0$.

3.6.40. Nghiệm của $f(x) = x^2 + 2 = 0$ là gì và tại sao phương pháp Newton chắc chắn thất bại? Nhưng cứ tiến hành phép lặp để thấy $x_n \to \infty$.

3.6.41. ***Dự án máy vi tính*** $F(x) = x - \tan x$ có các điểm bất động mà tại đó $\tan x^* = 0$. Vậy x^* là bất kỳ bội nào của π. Từ $x_0 = 2.0$ và 1.8 và 1.9, bạn đạt được bội nào? Kiểm tra các điểm trong $1.7 < x_0 < 1.9$ để tìm lưu vực hút của π, 2π, 3π, 4π.

Giữa bất kỳ hai lưu vực hút nào đều có các lưu vực hút đối với *mỗi* bội của π. Và thậm chí còn có nhiều lưu vực hút hơn giữa lưu vực hút này (***một fractal***). Đánh dấu chúng trên trục số từ 0 tới π. Phóng đại hình ảnh xung quanh $x_0 = 1.9$ (có nên thể hiện bằng màu hay không?).

3.6.42. Vẽ đồ thị $\cos x$ và $\cos(\cos x)$ và $\cos(\cos(\cos x))$. Ngoài ra vẽ đồ thị $(\cos)^8 x$. Các đồ thị này tiến tới cái gì?

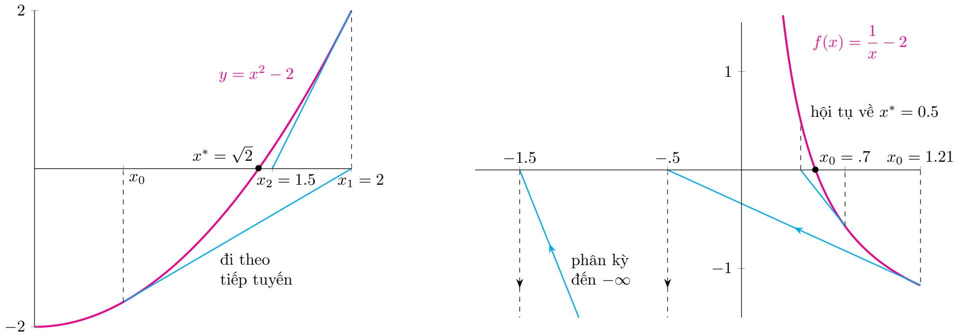
3.6.43. Vẽ đồ thị $\sin x$ và $\sin(\sin x)$ và $(\sin)^8 x$. Các đồ thị này tiến tới cái gì? Tại sao lại chậm như vậy?

3.7. Phương pháp của Newton (và Hỗn độn)

Phương trình cần được giải là $f(x) = 0$. Nghiệm x^* của nó là điểm mà tại đó đồ thị cắt trục x. Hình 3.7.1 cho thấy x^* và một điểm được ước đoán ban đầu x_0. Mục tiêu của chúng ta là tiến tới x^* gần nhất có thể, *dựa trên thông tin* $f(x_0)$ *và* $f'(x_0)$.

Mục 3.6 đã đưa ra công thức của Newton đối với x_1 (điểm được ước đoán tiếp theo). Chúng ta bây giờ thực hiện điều này một cách trực tiếp.

Chúng ta thấy gì tại x_0? Đồ thị có tung độ $f(x_0)$ và hệ số góc $f'(x_0)$. Chúng ta biết mình đang ở đâu, và đường cong đang đi theo hướng nào. Chúng ta không



HÌNH 3.7.1. Phương pháp của Newton dọc theo các tiếp tuyến từ x_0 tới x_1 tới x_2.

biết liệu đường cong có võng háy không (chúng ta không có f''). Kế hoạch tốt nhất là ***đi theo tiếp tuyến***, tiếp tuyến dùng tất cả các thông tin chúng ta có.

Newton thay $f(x)$ bởi xấp xỉ tuyến tính của nó (=xấp xỉ tiếp tuyến):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.7.1}$$

Chúng ta muốn vế trái bằng không. Điều tốt nhất chúng ta có thể thực hiện là làm cho vế phải bằng không! Tiếp tuyến cắt trục x tại x_1, trong khi đường cong cắt tại x^*. Điểm được ước đoán mới x_1 đến từ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Chia bởi $f'(x_0)$ và giải đối với x_1, đây là bước 1 của phương pháp của Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.7.2}$$

Tại điểm mới này, tính $f(x_1)$ và $f'(x_1)$—tung độ và hệ số góc tại x_1. Chúng đưa ra một tiếp tuyến mới, mà cắt trục x tại x_2. ***Tại mỗi bước chúng muốn*** $f(x_{n+1}) = 0$ ***và chúng ta lại thực hiện các bước như trên đối với*** $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$. Sau khi chia bởi $f'(x_n)$, công thức đối với x_{n+1} là phương pháp của Newton:

PHÁT BIỂU 3.7.1. Tiếp tuyến tại x_n cắt trục x tại x_{n+1}:

$$\textbf{\textit{Phương pháp của Newton}} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.7.3}$$

Thông thường phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ này nhanh chóng hội tụ tới x^*.

Xấp xỉ tuyến tính liên quan đến ba số. Chúng là Δx (phương ngang) và Δy (phương đứng) và hệ số góc $f'(x)$. Nếu chúng ta biết hai trong ba số này, chúng ta có thể ước lượng số thứ ba. Thật đáng nhớ khi nhận ra rằng giải tích đến thời điểm này đã đến cả ba phép tính sau—chúng đóng vai trò chủ chốt trong môn học này:

(1) Ước lượng hệ số góc $f'(x)$ từ $\Delta f/\Delta x$ (Mục 2.1)
(2) Ước lượng số gia Δf từ $f'(x).\Delta x$ (Mục 3.1)
(3) Ước lượng số gia Δx từ $\Delta f/f'(x)$ (Phương pháp của Newton)

Δf được mong muốn là $-f(x_n)$. Công thức (3.7.3) chính xác là $\Delta x = -f(x_n)/f'(x_n)$.

VÍ DỤ 3.7.1 (Các căn bậc hai). $f(x) = x^2 - b$ bằng không tại $x^* = \sqrt{b}$ và cũng tại $-\sqrt{b}$. Phương pháp của Newton là một cách nhanh để tìm các căn bậc hai—phương pháp có thể đã được tích hợp vào chiếc mày tính cầm tay của bạn.

Hệ số góc là $f'(x_n) = 2x_n$, và công thức (3.7.3) đối với điểm được ước đoán mới trở thành:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - b}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{b}{2x_n}. \tag{3.7.4}$$

Biểu thức này rút gọn thành $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + b/x_n)$. ***Dự đoán nghiệm của phương trình**, **chia** b **bởi nghiệm được ước đoán này**, **và lấy trung bình cộng của nghiệm được ước đoán và tỷ số vừa được tính***. Người Babylon cổ đại cũng đã có ý tưởng này, mặc dù họ không biết đến các hàm số hay các hệ số góc. Họ đã lặp $x_{n+1} = F(x_n)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{b}{x}) \text{ và } F'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{b}{x^2}\Big). \tag{3.7.5}$$

Người Babylon đã thực hiện chính xác những gì mà chúng ta xem là đúng. Hệ số góc F' bằng không *tại nghiệm*, khi $x^2 = b$. Điều này làm cho phương pháp của Newton có tốc độ hội tụ cao. Phép thử hội tụ là $|F'(x)| < 1$. Phương pháp của Newton đạt được $F'(x) = 0$—nghĩa là *siêu hội tụ*.

Để tìm $\sqrt{4}$, bắt đầu phép lặp $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 4/x_n)$ tại $x_0 = 1$. Khi đó $x_1 = \frac{1}{2}(1 + 4)$:

$$x_1 = 2.5 \qquad x_2 = 2.05 \qquad x_3 = 2.0006 \qquad x_4 = 2.000000009.$$

Số lượng chữ số có nghĩa ở phần thập phân sai số tăng gấp hai lần sau mỗi bước. ***Sai số được bình phương***. Việc trừ $x^* = 2$ khỏi cả hai vế của $x_{n+1} = F(x_n)$ đưa ra một *phương trình sai số* mà thể hiện bình phương đó:

$$x_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{4}{x_n}\Big) - 2 = \frac{1}{2x_n}(x_n - 2)^2. \tag{3.7.6}$$

Đây là$(\textit{sai số}\,)_{n+1} \approx \frac{1}{4}(\textit{sai số}\,)_n^2$. Biểu thức này giải thích tốc độ hội tụ của phương pháp của Newton.

Ghi chú. Bạn không thể bắt đầu phép lặp này tại $x_0 = 0$. Bước đầu tiên tính $4/0$ và bùng nổ. Hình 3.7.1a cho thấy lý do tại sao—-tiếp tuyến tại không nằm ngang. Nó không bao giờ cắt trục x.

Ghi chú. Bắt đầu $x_0 = -1$, phương pháp của Newton hội tụ tới $-\sqrt{2}$ thay vì $\sqrt{2}$. Đây là một x^* khác. Thường khó mà đoán được phương pháp của Newton sẽ chọn x^* nào. Quanh mỗi nghiệm là một "lưu vực hút," nhưng các phần khác của lưu vực hút có thể nằm rất xa. Càn có các thực nghiệm số, với nhiều điểm bắt đầu x_0 khác nhau. Việc tìm lưu vực hút là một trong những bài toán dẫn đến sự ra đời của các fractal.

Ví dụ 3.7.2. *Giải* $\frac{1}{x} - a = 0$ *để tìm* $x^* = \frac{1}{a}$ *mà không thực hiện phép chia bởi* a.

Ở đây $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Phương pháp của Newton dùng $f'(x) = -1/x^2$. Thật ngạc nhiên, chúng ta không thực hiện phép chia bởi a:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(1/x_n) - a}{-1/x_n^2} = x_n + x_n - ax_n^2. \tag{3.7.7}$$

Liệu những phép lặp này có hội tụ hay không? Tôi sẽ lấy $a = 2$ và nhắm đến $x^* = \frac{1}{2}$. Việc trừ $\frac{1}{2}$ khỏi hai vế của (3.7.7) biến phép lặp thành phương trình sai số:

$$x_{n+1} = 2x_n - 2x_n^2 \text{ trở thành } x_{n+1} - \frac{1}{2} = -2(x_n - \frac{1}{2})^2. \tag{3.7.8}$$

Tại mỗi bước sai số được bình phương. Điều này sẽ rất tuyệt (khi và chỉ khi) bạn chọn điểm bắt đầu gần với $x^* = \frac{1}{2}$. Nếu không, việc bình phương một sai số lớn và nhân bởi -2 là không tốt chút nào:

$x_0 = .70$	$x_1 = .42$	$x_3 = .4997$	$x_4 = .4999998$
$x_0 = 1.21$	$x_1 = -.5$	$x_2 = -1.5$	$x_4 = -127.5$

Các thao tác đại số trong Bài tập 18 xác nhận những kinh nghiệm này. Có sự hội tụ nhanh nếu $0 < x_0 < 1$. Có sự phân kỳ nếu x_0 là âm hoặc $x_0 > 1$. Tiếp tuyến đi tới một x_1 âm. Sau đó Hình 3.7.1 cho thấy một tiến trình lui lại khá dài.

Trong mục trước, chúng ta đã vẽ $F(x)$. Phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ đã hội tụ tới một điểm trên đường 45°, mà tại đó $x^* = F(x^*)$. Trong mục này, chúng ta đang vẽ $f(x)$. Bây giờ x^* là điểm trên trục x mà tại đó $f(x^*) = 0$.

Để nhắc lại: Chính x^* để $f(x^*) = 0$ là những gì chúng ta nhắm đến. Nhưng chính hệ số góc $F'(x^*)$ mới quyết định liệu có hay không một x^* như vậy. Ví dụ 3.7.2 có $f(x) = 2x - 2x^2$. Các điểm bất động là $x^* = \frac{1}{2}$ (nghiệm của chúng ta) và $x^* = 0$ (không hút). Các hệ số góc $F'(x^*)$ là không (Newton điển hình) và 2 (đẩy điển hình). *Điểm then chốt cho phương pháp của Newton là $F' = 0$ tại nghiệm*:

Hệ số góc của** $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ **là** $\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$**. Khi đó** $F'(x) = 0$ **khi** $f(x) = 0$**.

Các ví dụ $x^2 = b$ và $1/x = a$ cho thấy sự hội tụ có thể là nhanh hoặc có thể không hội tụ. Trong Chương 13, và trong thực tế, phương pháp của Newton giải nhiều phương trình còn khó hơn nhiều. Ở đây tôi sẽ chọn một ví dụ thứ ba chỉ để thỏa mãn sự tò mò thuần túy về những gì có thể xảy ra. Các kết quả hoàn toàn rất đáng ngạc nhiên. Phương trình chúng ta sẽ xét là $x^2 = -1$.

VÍ DỤ 3.7.3. ***Điều gì xảy ra khi dùng phương pháp của Newton để giải** $f(x) = x^2 + 1 = 0$?*
Các nghiệm duy nhất là các số ảo $x^* = i$ và $x^* = -i$. Không có số thực nào là căn bậc hai của -1. Phương pháp của Newton có thể thất bại. Nhưng nó không có cách nào để biết rằng nó có khả năng thất bại! Tiếp tuyến vẫn cắt trục x tại một điểm mới x_{n+1}, ngay cả khi đường cong $y = x^2 + 1$ không bao giờ cắt. Phương trình (3.7.5) vẫn đưa ra phép lặp đối với $b = -1$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{x_n}\right) = F(x_n). \tag{3.7.9}$$

Các x không thể tiến tới i hoặc $-i$ (không có bất kỳ x nào là ảo cả). Vậy chúng làm gì?

Điểm bắt đầu được ước đoán $x_0 = 1$ khá là thú vị. Nó kéo theo $x_1 = 0$. Sau đó trong biểu thức của x_2 có xuất hiện phép chia bởi không và bùng nổ. Tôi kỳ vọng những dãy khác cũng đi tới đi tới vô cùng. Nhưng các thực nghiệm lại cho thấy khác (và có phần bí ẩn). Khi x_n là lớn, x_{n+1} nhỏ hơn một nửa. Sau $x_n = 10$ là đến $x_{n+1} = \frac{1}{2}(10 - \frac{1}{10}) = 4.95$. Sau khi trải qua nhiều do dự và sự chờ đợi khá lâu, chúng ta cuối cùng cũng thấy một số gần bằng không xuất hiện. Sau đó, trong biểu thức của điểm được ước đoán tiếp theo có xuất hiện phép chia bởi con số này nên làm cho giá trị của điểm này lại trở nên khá lớn. Điều này khiến tôi liên tưởng về các "hỗn độn."

Ví dụ này có vẻ phức tạp đến nỗi chúng ta chỉ muốn rút lui về các ví dụ thông thường, những vì dụ mà phương pháp Newton nhất định sẽ thành công. Bằng cách thử giải các bài tập từ cuốn sách này hoặc các phương trình của riêng bạn, bạn sẽ thấy sự hội tụ nhanh chóng đến $\sqrt{4}$ là rất điển hình. Hàm số được xét có thể có thể phức tạp hơn x^2+4 rất nhiều (trong thực tế chắc chắn là như vậy). Chẳng hạn như phép lặp đối với $2x = \cos x$ trong mục trước, phép lặp này có sai số được bình phương tại mỗi bước. Nếu phương pháp của Newton bắt đầu tại điểm gần với x^*, sự hội tụ của nó là rất nhanh. Đây cũng chính là điểm chính của mục này: ***Đi theo tiếp tuyến***.

Thay vì những hàm số đẹp đẽ này, liệu tôi có nên tiếp tục với ví dụ $x^2+1=0$ khá kỳ quái này hay không? Ví dụ này không dễ đoán được chút nào, và có lẽ cũng không mấy quan trọng, nhưng không hiểu sao nó lại thú vị hơn những ví dụ khác. Không có nghiệm thực x^*, và phương pháp của Newton $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - 1/x_n)$ cứ nảy tới nảy lui. Chúng ta bây giờ khám phá x_n.

MỘT CÔNG THỨC ĐỐI VỚI x_n

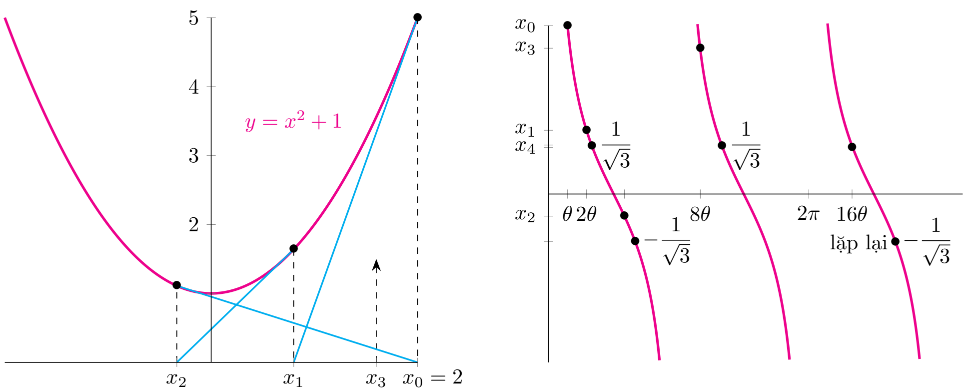
Then chốt cho ví dụ kỳ quái này nằm trong một bài tập từ các cuốn sách lượng giác. Hầu hết các bài tập này chỉ đưa ra thực hành với các hàm sine và các hàm cosine, nhưng biểu thức này đúng là có dạng $\frac{1}{2}(x_n - 1/x_n)$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{2}\left(\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \cot 2\theta$$

Trong phương trình bên trái, mẫu số chung là $2\sin\theta\cos\theta$ (mà chính là $\sin 2\theta$). Tử số là $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (mà chính là $\cos 2\theta$). Thay cosine/sine bởi cotangent và đồng nhất thức cho chúng ta biết như sau:

Nếu $\quad x_0 = \cot\theta,\quad$ khi đó $\quad x_1 = \cot 2\theta.\quad$ Sau đó $\quad x_2 = \cot 4\theta.\quad$ Sau đó $\quad x_n = \cot 2^n\theta.$

Đây là công thức cần dùng. Các điểm của chúng ta nằm trên đường cong cotangent. Hình 3.23 bắt đầu từ $x_0 = 2 = \cot\theta$, và mỗi phép lặp đều làm tăng góc lên gấp đôi.



HÌNH 3.7.2. Phương pháp của Newton đối với $x^2+1=0$. Phép lặp đưa ra $x_n = \cot 2^n\theta$.

VÍ DỤ 3.7.4. Dãy số $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$ khớp với cotangent của các góc $\pi/4$, $\pi/2$, và π. Dãy số này bùng nổ bởi vì trong biểu thức của x_2 có một phép chia bởi $x_1 = 0$.

VÍ DỤ 3.7.5. Dãy số $1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ khớp BÀIvới các cotangent của $\pi/3$, $2\pi/3$, và $4\pi/3$. Dãy số này *có chu trình kéo dài mãi mãi* bởi vì $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$.

VÍ DỤ 3.7.6. Bắt đầu với một x_0 lớn (θ nhỏ). Khi đó x_1 (tại 2θ) lớn bằng khoảng một nửa so với x_0. Cuối cùng, một trong các góc $4\theta, 8\theta, \ldots$ sẽ chạm đến một cotangent rất lớn, và các x lại đi ra xa một lần nữa. *Đây là điển hình.* Các ví dụ A và B là đặc biệt, khi θ/π là $\dfrac{1}{4}$ hoặc $\dfrac{1}{3}$.

Những gì chúng ta có ở đây là ***hỗn độn***. Các x không thể hội tụ. Chúng bị đẩy một cách mãnh liệt bởi tất cả các điểm. Chúng cũng cực kỳ nhạy cảm với giá trị của θ. Sau mười bước, θ được nhân bởi $2^{10} = 1024$. Các góc bắt đầu 60° và 61°có vẻ gần nhau, nhưng bây giờ chúng sai khác đến 1024°. Nếu các góc bắt đầu là một bội của 180°, các cotangent của chúng vẫn khá gần nhau. Trong thực tế, các x_{10} là 0.6 và 14.

Hỗn độn này trong toán học cũng được nhìn thấy trong tự nhiên. Ví dụ quen thuộc nhất chính là thời tiết, hiện tượng khí tượng này là tinh tế hơn nhiều so với bạn nghĩ. Tiêu đề "Ngành dự báo thời tiết Đã đẩy đi Quá Xa[31]" đã xuất hiện trong Tạp chí Khoa học[32] (1989). Bài báo đã nói rằng hiệu ứng hòn tuyết lăn[33] làm tích tụ các lỗi nhỏ thành những vấn đề nghiêm trọng đến nỗi mà các dự báo lâu hơn sáu ngày không còn một chút chính xác nào nữa. Chúng ta không thể dùng các phương trình thời tiết để dự báo trước một tháng—sự chuyển động của một máy bay trên bầu trời có thể thay đổi mọi thứ. Đây là một ý tưởng cách mạng, ý tưởng này nói rằng một quy tắc đơn giản có thể dẫn đến các đáp án mà quá nhạy để có thể tính được.

Chúng ta đã quen nhìn thấy các bài toán với các công thức phức tạp (hoặc không có công thức nào cả). Tuy vậy chúng ta lại không quen nhìn thấy các công thức trông có vẻ đơn giản như $\cot 2^n\theta$, nhưng việc tiếp tục lặp nó là hoàn toàn vô vọng sau 100 bước.

HỖN ĐỘN TỪ MỘT PARABOLA

Bây giờ tôi sẽ nói với bạn về một ngành toán học mới. Trước tiên tôi sẽ thay đổi phép lặp $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - \dfrac{1}{x_n})$ thành một phép lặp thậm chí còn đơn giản hơn. Bằng cách chuyển từ x sang $z = 1/(1 + x^2)$, từng z mới quay ra chỉ liên quán đến z cũ và z^2:

$$z_{n+1} = 4z_n - 4z_n^2. \tag{3.7.10}$$

Đây là phép lặp bậc hai nổi tiếng nhất trên thế giới. Có nhiều sách đề cập về nó, và Bài tập 28 cho thấy nó được sinh ra từ đâu. Công thức của chúng ta đối với x_n kéo theo z_n:

$$z_n = \frac{1}{1 + x_n^2} = \frac{1}{1 + (\cot 2^n\theta)^2} = (\sin 2^n\theta)^2. \tag{3.7.11}$$

Sine cũng không dễ đoán được như cotangent, khi $2^n\theta$ trở nên lớn hơn. Điểm mới mẻ ở đây là xác định phương trình bậc hai này dưới dạng phần tử sau cùng (khi a = 4) của họ:

---

[31]Nd: Ngành dự báo thời tiết Đã đẩy đi Quá Xa (tiếng Anh: Forecasting Pushed Too Far)

[32]Nd: Tạp chí Khoa học (tiếng Anh: Science).

[33]Nd: Hiệu ứng hòn tuyết lăn (tiếng Anh: snowball effect) là một quá trình bắt đầu từ một trạng thái ban đầu có ý nghĩa nhỏ và tự nó phát triển, trở nên lớn hơn và nghiêm trọng hơn.

$$(3.7.12) \qquad z_{n+1} = az_n - az_n^2, \qquad 0 \leqslant a \leqslant 4.$$

Ví dụ 3.7.2 ngẫu nhiên xác dịnh phần tử nằm chính giữa $a = 2$, ví dụ này hội tụ tới $\frac{1}{2}$. Tôi muốn đưa ra một bào cáo ngắn gọn và mang tính rất tùy ý về phép lặp này, đối với các a khác nhau.

Nguyên lý chung là bắt đầu với một số z_0 nằm giữa 0 và 1, và tính $z_0, z_1, z_2, \ldots$. Thật hấp dẫn khi xem sự thay đổi hành vi khi a tăng. ***Bạn có thể thấy nó trên chiếc máy tính của bạn***. Ở đây chúng ta mô tả một số điều cần tìm. Tất cả các số đều nằm giữa 0 và 1 và chúng có thể tiến tới một giới hạn. Điều này xảy ra khi a nhỏ:

$$\text{đối với } 0 \leqslant a \leqslant 1, z_n \text{ tiến tới } z^* = 0$$
$$\text{đối với } 1 \leqslant a \leqslant 3, z_n \text{ tiến tới } z^* = (a-1)/a$$

Các điểm giới hạn nayf là các nghiệm của $z = F(z)$. Chúng là các điểm bất động mà tại đó $z^* = az^* - a(z^*)^2$. Nhưng hãy nhớ lại phép thử đối với việc tiến tới một giới hạn: *Hệ số góc tại z^* không được lớn hơn một.* Ở đây $f(z) = az - az^2$ có $F'(z) = a - 2az$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $|F'(z)| \leqslant 1$ tại các điểm giới hạn được dự đoán ở trên. Vấn đề khó—đôi khi không thể—dự báo được những gì xảy ra phía trên $a = 3$. Trường hợp của chúng ta là $a = 4$.

Các z không thể tiến tới một giới hạn khi $|F'(z^*)| > 1$. Một điều gì đó phải xảy ra, và có ít nhất ba khả năng:

Các z_n có thể lặp lại theo chu trình hoặc lấp đầy khoảng $(0, 1)$
hoặc tiến đến một tập Cantor.

Tôi bắt đầu với một số ngẫu nhiên z_0, lấy 100 bước, và viết ra các bước 101 đến 105:

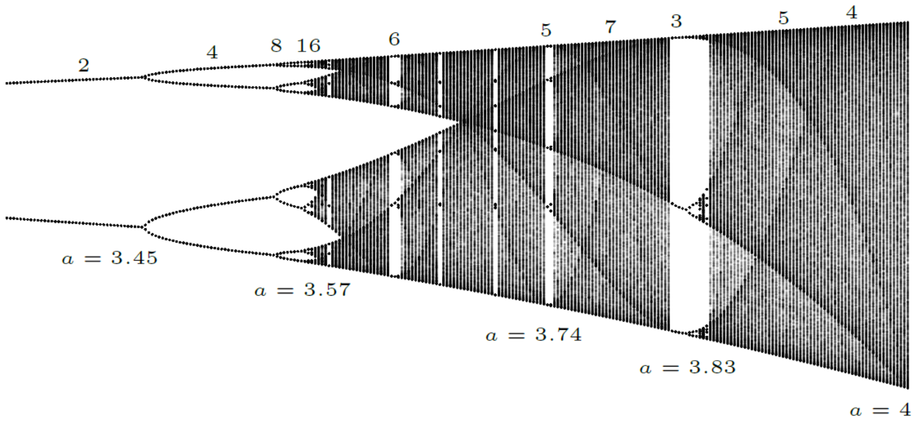
	$a = 3.4$	$a = 3.5$	$a = 3.8$	$a = 4.0$
$z_{101} =$	$.\underline{842}$	$.\underline{875}$	.336	.169
$z_{102} =$	.452	.383	.848	.562
$z_{103} =$	$.\underline{842}$	.827	.491	.985
$z_{104} =$	.452	.501	.950	.060
$z_{105} =$	$.\underline{842}$	$.\underline{875}$	.182	.225

Cột đầu tiên đang hội tụ tới một "2-chu trình." Nó thay đổi giữa $x = .842$ và $y = .452$. Những giá trị này thoả mãn $y = F(x)$ và $x = F(y) = F(F(x))$. Nếu chúng ta nhìn vào một *bước kép* khi $a = 3.4$, x và y là các điểm bất động của phép lặp kép $x_{n+2} = F(F(x_n))$. Khi a tăng quá 3.45, chu trình này trở nên không ổn định.

Tại điểm đó chu kỳ tăng gâp đôi từ* 2 *bước thành* 4 *bước. Với $a = 3.5$, bạn thấy một "4-chu trình" trong bảng—nó lặp lại sau bốn bước. Dãy số nảy từ .875 tới .383 tới .827 tới .501 *và quay lại* .875. Chu trình này phải là hút nếu không chúng ta sẽ không thấy nó. Nhưng nó cũng trở nên không ổn định khi a tăng. Tiếp theo là một 8-chu trình, chu kỳ này ổn định trong một cửa sổ nhỏ (bạn có thể tính được nó) quanh $a = 3.55$. ***Các chu trình là ổn định đối với các khoảng ngắn hơn gồm các a***. Các cửa sổ ổn định này bị giảm đi bởi *thừa số co Feigenbaum* 4.6692 .... Các chu trình có độ dài 16 và 32 và 64 có thể được thấy trong các thí nghiệm vật lý, nhưng tất cả chúng đều không ổn định phía trước $a = 3.57$. Điều gì xảy ra sau đó?

Hành vi mới và bất ngờ xảy ra giữa 3.75 và 4. Phía dưới từng đường thẳng của Hình 3.7.3, máy tính đã vẽ đồ thị các giá trị của z_{1001} đến z_{2000}—bỏ qua một

Các chu kỳ $2, 4, \ldots$ là số lượng các z trong một chu trình.



HÌNH 3.7.3. Chù kỳ tăng gấp đôi và hỗn độn từ việc lặp $F(z)$ (được lấy đi với sự cho phép đặc biệt từ *Nhập môn Toán học Ứng dụng* (tiếng Anh: Introduction to Applied Mathematics) của Gilbert Strang, Wellesley-Cambridge Press).

nghìn điểm đầu tiên để cho một chu kỳ ổn định (hoặc hỗn độn) được thiết lập. Không có điểm nào xuất hiện trong hình nêm màu trắng lớn. Tôi không biết tại sao. Trong cửa sổ đối với chu kỳ 3, bạn chỉ thấy ba z. Theo sau chu kỳ 3 là chu kỳ $6, 12, 24, \ldots$. Có xuất hiện việc chu kỳ tăng gấp đôi tại cuối của mỗi cửa sổ (bao gồm tất cả các cửa sổ quá nhỏ để thấy được). Bạn có tái tạo lại hình này bằng cách lặp $z_{n+1} = az_n - az_n^2$ từ bất kỳ z_0 nào và vẽ đồ thị các kết quả.

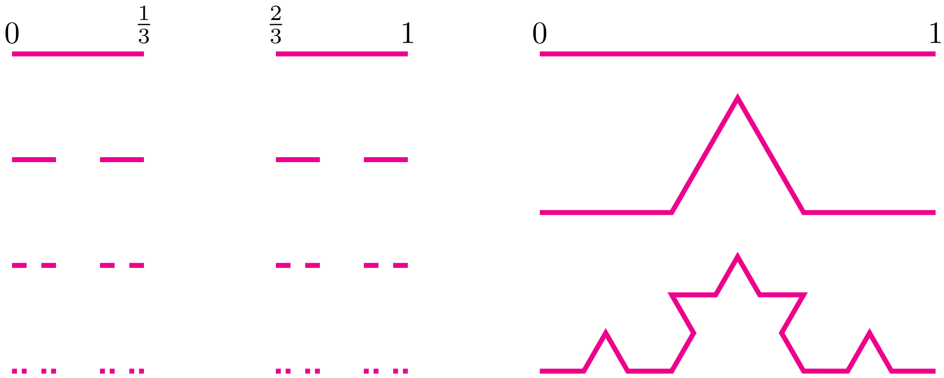
TẬP CANTOR VÀ FRACTAL

Tôi không thể nói được điều gì xảy ra tại $a = 3.8$. Có thể có một chu trình ổn định mà có chu kỳ khá dài. Các z có thể xuất hiện gần với mỗi điểm nằm giữa 0 và 1. Một khả năng thứ ba là các z_n tiến tới một tập giới hạn rất thưa, tập hợp này trông giống như ***tập Cantor***.

> Để xây dựng tập Cantor, chia $[0, 1]$ thành ba phần bằng nhau và bỏ đi khoảng mở $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sau đó bỏ đi $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ và $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ trong hai phần còn lại. Tại từng bước, ***lấy ra các phần ba ở giữa***. Các điểm còn lại tạo thành tập Cantor.

Tại các điểm mút $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots$ đều thuộc tập Cantor. Điểm $\frac{3}{4}$ cũng vậy (Bài tập 42). Tuy nhiên tổng chiều dài của các đoạn bị lấy ra bằng 1 và tập Cantor có "độ đo không." Điều đặc biệt nổi bậc chính là ***tính tự đồng dạng*** của nó: *Giữa* 0 *và* $\frac{1}{3}$ *bạn thấy cùng một tập Cantor nhưng nhỏ hơn ba lần.* Từ 0 tới $\frac{1}{9}$ tập Cantor xuất hiện ở đó một lần nữa, nhưng được thu nhỏ bởi hệ số 9. Mỗi đoạn, khi bị chia tách, lại là bản sao thu nhỏ của đoạn lớn hơn.

FRACTAL. Tính tự đồng dạng đó là một thuộc tính điển hình của một *fractal.* Các hệ số thu phóng của nó tạo thành một dãy vô hạn. Một bông tuyết toán học bắt đầu với một tam giác và thêm vào một hình tam giác mới tại đoạn giữa của từng cạnh. Tại mỗi bước tam giác mới làm cho tổng chiều dài của từng cạnh dài thêm gấp 4/3 lần. Biên cuối cùng là tự đồng dạng, như một bờ biển dài vô tận.



HÌNH 3.7.4. Tập Cantor (phần ba ở giữa bị bỏ đi). Bông tuyết fractal (biên vô hạn).

Từ fractal bắt nguồn từ từ ***chiều phân đoạn***.[34] Biên bông tuyết có chiều lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2. Tập Cantor có chiều lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1. Phủ một đoạn thẳng thông thường với các hình tròn có bán kính r sẽ cần đến c/r hình tròn. Đối với các fractal, chúng ta cần đến c/r^D hình tròn—và D là số chiều.

Phép lặp $z_{n+1} = 4z_n - 4z_n^2$ của chúng ta có $a = 4$, ở cuối Hình 3.7.3. Dãy số $z_0, z_1, \ldots$ xuất hiện khắp nơi và không đi theo một quy luật nào cả. Hành vi của nó là hỗn loạn, và các phép thử thống kê không tìm thấy mẫu hình nào cả. Đối với tất cả mục đích thực tế, các số là ngẫu nhiên.

Thử nghĩ xem điều này có nghĩa là gì trong một thí nghiệm (hoặc trong thị trường chứng khoán). Nếu các quy luật đơn giản sinh ra hỗn độn, *hoàn toàn không có cách nào* để dự đoán được các kết quả. Không có phép đo nào là đủ chính xác cả. Các tờ báo báo cáo rằng quỹ đạo của Sao Diêm vương là hỗn loạn—mặc dù nó tuân theo định luật hấp dẫn. Chuyển động là hoàn toàn không dễ đoán được Nó chuyển động không thể dự báo được trong thời gian dài. Tôi không hiểu điều này sẽ có tác động như thế nào đối với thiên văn học (hoặc chiêm tinh học).

Cuốn sách dễ đọc nhất về chủ đề này có thể đọc nhiều nhất về chủ đề này là cuốn sách thuộc danh sách bán chạy nhất của Gleick *Hỗn độn*: *Làm nên một Ngành khoa học Mới*.[35] Những cuốn sách hoa mắt nhất là *Vẻ đẹp của các Fractal*[36] và *Khoa học về các Ảnh Fractal*[37], trong đó Peitgen và Richter và Saupe cho thấy những bức ảnh đã được trưng bày trong các bảo tàng nghệ thuật trên khắp thế giới. Những cuốn sách nguồn gốc nhất là *Các Fractal* và *Hình học Fractal*[38] của Mandelbrot. Bìa của chúng ta có một fractal từ Hình 13.11.

Chúng ta trở lại các bài toán thân thiện hơn trong đó giải tích có đất dụng võ.

PHƯƠNG PHÁP CỦA NEWTON VS. PHƯƠNG PHÁP CÁT TUYẾN: CHƯƠNG TRÌNH MÁY TÍNH CẦM TAY

Phần khó của phương pháp của Newton là tìm df/dx. Chúng ta cần nó đối với hệ số góc của tiếp tuyến. Nhưng giải tích có thể xấp xỉ bởi $\Delta f/\Delta x$—dùng các giá trị của $f(x)$ đã được tính tại x_n và x_{n+1}.

Phương pháp cát tuyến đi theo đường cát tuyến thay vì tiếp tuyến:

[34] Nd: Chiều phân đoạn (tiếng Anh: fractional dimension).
[35] Nd: Hỗn độn: Làm nên một Ngành khoa học Mới (tiếng Anh: Chaos: Making a New Science).
[36] Nd: Vẻ đẹp của các Fractal (tiếng Anh: The Beauty of Fractals).
[37] Nd: Khoa học về các Ảnh Fractal (tiếng Anh: The Science of Fractal Images).
[38] Nd: Hình học Fractal (tiếng Anh: Fractal Geometry).

(3.7.13)

$$\textbf{\textit{Cát tuyến}}:\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{(\Delta f/\Delta x)_n} \quad \text{trong đó} \quad (\frac{\Delta f}{\Delta x})_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Cát tuyến nối hai điểm sau cùng nhất trên đồ thị của $f(x)$. Phương trình của nó là $y - f(x_n) = (\Delta f/\Delta x)(x - x_n)$. Đặt $y = 0$ để tìm phương trình (3.7.13) đối với giá trị mới $x = x_{n+1}$, mà tại đó đường thẳng cắt trục x.

Dự đoán: *Ba* bước trong phương pháp cát tuyến cũng tốt như *hai* bước trong phương pháp của Newton. Cả hai cho nhiều gấp bốn lần những chữ số thập phân đúng: (*sai số*) $\to$ (*sai số*)^4. Có lẽ phương pháp cát tuyến cũng trở nên hỗn loạn đối với $x^2 + 1 = 0$.

Các chương trình sau về phương pháp của Newton và phương pháp cát tuyến là danh cho TI-81. Đặt công thức của $f(x)$ vào khe nhớ `Y1` và công thức của $f'(x)$ vào khe nhớ `Y2` trên màn hình soạn thảo hàm `Y =`. Hồi đáp yêu cầu vừa xuất hiện với giá trị ban đầu x_0 = `X∅`. Chương trình tạm dừng để hiển thị từng xấp xỉ x_n, giá trị $f(x_n)$, và sai phân $x_n - x_{n-1}$. Nhấn `ENTER` để tiếp tục hoặc nhấn `ON` và chọn mục 2 : `Quit` để thoát. Nếu $f(x_n) = 0$, các chương trình hiển thị `ROOT AT` và cho nghiệm x_n.

```
PrgmN : NEWTON
: Disp "X∅ = "
: Input X
: X → S
: Y1 → Y
: Lbl 1
: X − Y/Y2 → X
: X − S → D
: X → S
: Y1 → Y
: Disp "ENTER FOR MORE"
: Disp "ON 2 TO BREAK"
: Disp " "
: Disp "XN FXN XN − XNM1"
: Disp X
: Disp Y
: Disp D
: Pause
: If Y ≠ 0
: Go to 1
: Disp "ROOT AT"
: Disp X
```

```
Prgm : SECANT
: Disp "X∅ = "
: Input X
: X → S
: Y1 → Y
: Disp "X1 = "
: Input X
: Y1 → Y
: Lbl 1
: X − S → D
: X → S
: X − YD/(Y − T) → X
: Y → T
: Y1 → Y
: Disp "ENTER FOR MORE"
: Disp "XN FXN XN − XNM1"
: Disp X
: Disp Y
: Disp D
: Pause
: If Y ≠ 0
: Go to 1
: Disp "ROOT AT"
: Disp X
```

BÀI TẬP 3.7

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Khi $f(x) = 0$ được tuyến tính hóa thành $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, nghiệm x = ___a___ là x_{n+1} trong phương pháp của Newton. ___b___ của đường cong cắt trục x tại x_{n+1}, trong khi ___c___ cắt tại x^*. Các sai số tại x_n và x_{n+1} thường được liên hệ bởi $(\text{sai số})_{n+1} \approx M$ ___d___. Đây là hội tụ ___e___. Số lượng các số thập phân đúng ___f___ tại mỗi bước.

Đối với $f(x) = x^2 - b$, phép lặp của Newton là x_{n+1} = ___g___. x_n hội tụ đến ___h___ nếu $x_0 > 0$ và đến ___i___ nếu $x_0 < 0$. Đối với $f(x) = x^2 + 1$, phép lặp trở thành x_{n+1} = ___j___. Phép lặp không thể hội tụ đến ___k___. Thay vào đó nó kéo theo hỗn độn. Việc đổi hàm số thành $z = 1/(x^2 + 1)$ đưa ra phép lặp parabola z_{n+1} = ___l___.

Đối với $a \leqslant 3$, $z_{n+1} = az_n - az_n^2$ hội tụ đến một ___m___ đơn. Sau $a = 3$, giới hạn là một 2-chu kỳ, điều này có nghĩa là ___n___. Sau đó nữa, giới hạn là một tập Cantor, đây là một ví dụ về một ___o___ trong một chiều. Tập Cantor là tự ___p___.

3.7.1. Để giải $f(x) = x^3 - b = 0$, phép lặp nào được sinh ra từ phương pháp của Newton?

3.7.2. Đối với $f(x) = (x-1)/(x+1)$, công thức của Newton là $x_{n+1} = F(x_n) =$ ________. Giải $x^* = F(x^*)$ và tìm $F'(x^*)$. Các x_n tiến tới giới hạn nào?

3.7.3. Tôi tin rằng Newton đã áp dụng công khai phương pháp của mình với chỉ một phương trình $x^3 - 2x - 5 = 0$. Raphson[39] có công phát triển ý tưởng này nhưng cũng chỉ được đồng ghi nhận với Newton. Sau hai bước từ $x_0 = 2$, có bao nhiêu số thập phân trong $x^* = 2.09455148$ là đúng?

3.7.4. Chứng tỏ rằng phương pháp của Newton đối với $f(x) = x^{1/3}$ đưa ra công thức kỳ quái $x_{n+1} = -2x_n$. Vẽ một đồ thị để chỉ ra các phép lặp.

3.7.5. Tìm x_1 nếu (a) $f(x_0) = 0$; (b) $f'(x_0) = 0$.

3.7.6. Vẽ đồ thị $f(x) = x^3 - 3x - 1$ và ước lượng các nghiệm x^* của nó. Chạy phương pháp của Newton bắt đầu từ 0, 1, $-\dfrac{1}{2}$, và 1.1. Dùng thực nghiệm để xem x_0 nào hội tụ đến nghiệm nào?

3.7.7. Giải $x^2 - 6x + 5 = 0$ bằng phương pháp của Newton với $x_0 = 2.5$ và 3. Vẽ đồ thị để chỉ ra x_0 nào kéo theo nghiệm nào?

3.7.8. Nếu $f(x)$ tăng và lõm trên ($f' > 0$ và $f'' > 0$), chứng tỏ bằng một đồ thị rằng phương pháp của Newton hội tụ. Hội tụ từ phía nào?

Giải 3.7.9-3.7.17 đến bốn chữ số thập phân bằng phương pháp Newton với một máy tính hoặc máy tính cầm tay. Chọn bất kỳ x_0 nào ngoại trừ x^*.

3.7.9. $x^2 - 10 = 0$

3.7.10. $x^4 - 100 = 0$ (nhanh hơn hay chậm hơn Bài tập 9?)

3.7.11. $x^2 - x = 0$ (x_0 nào kéo theo nghiệm nào?)

3.7.12. $x^3 - x = 0$ (x_0 nào kéo theo nghiệmon. Cả hai cho nhiều gấp bốn lần những chữ số thập phân đúng: (*sai số*) $\to$ (*sai số*)^4. Có lẽ phương pháp cát tuyến cũng trở nên hỗn loạn đối với $x^2 + 1 = 0$. nào?)

3.7.13. $x + 5\cos x = 0$ (phương trình này có ba nghiệm)

3.7.14. $x + \tan x = 0$ (tìm hai nghiệm) (còn nhiều nghiệm khác hay không?)

3.7.15. $1/(1-x) = 2$

3.7.16. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 2$

3.7.17. $x^3 + (x+1)^3 = 10^3$

3.7.18. (a) Chứng tỏ rằng $x_{n+1} = 2x_n - 2x_n^2$ trong Ví dụ 2 là giống với $(1 - 2x_{n+1}) = (1 - 2x_n)^2$.
(b) Chứng minh sự phân kỳ nếu $|1 - 2x_0| > 1$. Chứng minh sự hội tụ nếu $|1 - 2x_0| < 1$ hoặc $0 < x_0 < 1$.

3.7.19. Với $a = 3$ trong Ví dụ 2, thực nghiệm với phép lặp Newton $x_{n+1} = 2x_n - 3x_n^2$ để quyết định xem x_0 nào kéo theo $x^* = \dfrac{1}{3}$.

3.7.20. Viết lại $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ dưới dạng $(1 - ax_{n+1}) = (1 - ax_n)^2$. Dãy số $1 - ax_n$ tiến tới không (nên $x_n \to \dfrac{1}{a}$) đối với x_0 nào?

3.7.21. Phương pháp của Newton là gì để tìm căn bậc k của 7? Tính $\sqrt[7]{7}$ đến 7 chữ số thập phân.

3.7.22. Tìm tất cả các nghiệm của $x^3 = 4x - 1$ (đến 5 chữ số thập phân).

Các bài tập 3.7.23-3.7.29 **là về** $x^2 + 1 = 0$ **và hỗn độn.**

3.7.23. Đối với $\theta = \pi/16$, khi nào $x_n = \cot 2^n\theta$ bùng nổ? Đối với $\theta = \pi/7$, khi nào $\cot 2^n\theta = \cot\theta$? (Các góc $2^n\theta$ và θ sai khác một bội của π.)

3.7.24. Đối với $\theta = \pi/9$, đi theo dãy số cho đến khi $x_n = x_0$.

3.7.25. Đối với $\theta = 1$, x_n không bao giờ trở về $x_0 = \cot 1$. Các góc 2^n và 1 không bao giờ sai khác một bội của π vì ________.

3.7.26. Nếu z_0 bằng $\sin^2\theta$, chứng tỏ rằng $z_1 = 4z_0 - 4z_0^2$ bằng $\sin^2 2\theta$.

3.7.27. Nếu $y = x^2 + 1$, từng y mới là

$$y_{n+1} = x_{n+1}^2 + 1 = \frac{1}{4}(x_n - \frac{1}{x_n})^2 + 1.$$

Chứng tỏ rằng nó bằng $y_n^2/4(y_n - 1)$.

3.7.28. Lật ngược biểu thức trong Bài tập 27, $1/y_{n+1} = 4(y_n - 1)/y_n^2$, để tìm phép lặp bậc hai (3.7.10) đối với $z_n = 1/y_n = 1/(1 + x_n^2)$.

3.7.29. Nếu $f(z) = 4z - 4z^2$, hỏi $F(F(z))$? Phương trình $z = F(F(z))$ có bao nhiêu nghiệm? Trong số những nghiệm này, có bao nhiêu nghiệm không phải là nghiệm của $z = F(z)$?

[39]Nd: Joseph Raphson là một nhà toán học người Anh nổi tiếng nhất với phương pháp Newton-Raphson, còn được gọi là phương pháp của Newton.

3.7.30. Áp dụng phương pháp của Newton cho $x^3 - .64x - .36 = 0$ để tìm lưu vực hút của $x^* = 1$. Ngoài ra, tìm một cặp điểm mà đối với cặp điểm này, $y = F(z)$ và $z = F(y)$. Trong ví dụ này, phương pháp Newton không phải lúc nào cũng tìm được nghiệm.

3.7.31. Phương pháp của Newton giải $x/(1-x) = 0$ bằng $x_{n+1} =$ ________. Nó hội tụ từ x_0 nào? Khoảng cách đến $x^* = 0$ đúng là được bình phương.

Các bài tập 3.7.33-3.7.41 là về các các cải tiến trong phương pháp Newton.

3.7.32. Tại một nghiệm kép, phương pháp của Newton chỉ hội tụ tuyến tính. Phép lặp nào để giải $x^2 = 0$?

3.7.33. Để tăng tốc phương pháp của Newton, tìm bước Δx từ $f(x_n) + \Delta x f'(x_n) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(x_n) = 0$. Kiểm tra trên $f(x) = x^2 - 1$ từ $x_0 = 0$ và giải thích.

3.7.34. Phương pháp của Halley dùng $f_n + \Delta x f'_n + \frac{1}{2}\Delta x(-f_n/f'_n)f''_n = 0$. Đối với $f(x) = x^2 - 1$ và $x_0 = 1 + \epsilon$, chứng tỏ rằng $x_1 = 1 + O(\epsilon^3)$—hội tụ *bậc ba*.

3.7.35. Áp dụng phương pháp cát tuyến cho $f(x) = x^2 - 4 = 0$, bắt đầu từ $x_0 = 1$ và $x_1 = 2.5$. Tìm $\Delta f/\Delta x$ và điểm tiếp theo x_2 bằng tay. Phương pháp của Newton dùng $f'(x_1) = 5$ để đạt được $x_2 = 2.05$. Cái nào gần với $x^* = 2$ hơn?

3.7.36. Vẽ một đồ thị của $f(x) = x^2 - 4$ để cho thấy cát tuyến trong Bài tập 35 và điểm x_2 mà tại đó nó cắt trục x.

Phương pháp chia đôi **Nếu $f(x)$ đổi dấu giữa x_0 và x_1, tìm dấu của nó tại trung điểm $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Quyết định xem liệu $f(x)$ có đổi dấu giữa x_0 và x_2 hoặc x_2 và x_1 hay không. Lặp lại trên nửa khoảng (đã được chia đôi) .** Tiếp tục. **Chuyển sang một phương pháp nhanh hơn khi khoảng là đủ nhỏ.**

3.7.37. $f(x) = x^2 - 4$ là âm tại $x = 1$, dương tại $x = 2.5$, và âm tại trung điểm $x = 1.75$. Vậy x^* nằm trong khoảng nào? Thực hiện một bước thứ hai để tiếp tục cắt nửa khoảng ra làm đôi một lần nữa.

3.7.38. Viết một mã đối với phương pháp chia đôi. Tại mỗi bước in ra một khoảng chứa x^*. Các đầu vào là x_0 và x_1; mã gọi $f(x)$. Dừng nếu $f(x_0)$ và $f(x_1)$ có cùng dấu.

3.7.39. Ba bước chia đôi làm giảm độ lớn của khoảng xuống bao nhiêu lần? Bắt đầu từ $x_0 = 0$ và $x_1 = 8$, lấy ba bước đối với $f(x) = x^2 - 10$.

3.7.40. Một phương pháp trực tiếp để tìm nghiệm của một phương trình là *phóng to* nơi đồ thị cắt trục x. Giải $10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - .21141 = 0$ bằng vài lần phóng to.

3.7.41. Nếu hệ số thu phóng là 10, khi đó số lượng các chữ số thập phân đúng là ________ đối với mỗi lần phóng. So sánh với phương pháp của Newton.

3.7.42. Số $\frac{3}{4}$ bằng $\frac{2}{3}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \cdots)$. Chứng tỏ rằng nó nằm trong tập Cantor. Nó vẫn nằm trong tập hợp đang được xét khi các phần ba ở giữa bị gỡ bỏ.

3.7.43. Nghiệm của $f(x) = (x - 1.9)/(x - 2.0) = 0$ là $x^* = 1.9$. Thử phương pháp của Newton từ $x_0 = 1.5$, 2.1, và 1.95. Điểm cộng: x_0 nào đưa ra sự hội tụ?

3.7.44. Áp dụng phương pháp cát tuyến để giải $\cos x = 0$ từ $x_0 = .308$.

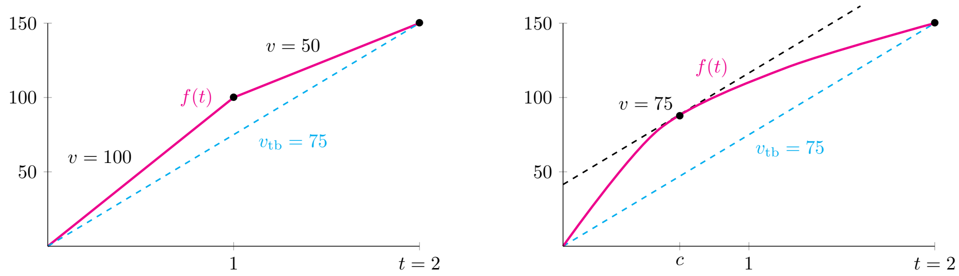
3.7.45. Thử phương pháp của Newton trên $\cos x = 0$ từ $x_0 = .308$. Nếu $\cot x_0$ đúng bằng π, chứng tỏ rằng $x_1 = x_0 + \pi$ (và $x_2 = x_1 + \pi$). Từ $x_0 = .308169071$, liệu phương pháp Newton có bao giờ dừng lại được hay không?

3.7.46. Dùng chương trình của phương pháp của Newton và chương trình của phương pháp cát tuyến để giải $x^3 - 10x^2 + 22x + 6 = 0$ từ $x_0 = 2$ và 1.39.

3.7.47. Phương pháp của Newton đối với $\sin x = 0$ là $x_{n+1} = x_n - \tan x$. Vẽ đồ thị $\sin x$ và ba phép lặp từ $x_0 = 2$ và $x_0 = 1.8$. Dự đoán kết quả đối với $x_0 = 1.9$ và kiểm tra. Điều này kéo theo *dự án máy tính* trong Bài toán 3.6.41, dự án này tìm các fractal.

3.7.48. Vẽ đồ thị $Y_1(x) = 3.4(x - x^2)$ và $Y_2(x) = Y_1(Y_1(x))$ trong cửa sổ hình vuông $(0,0) \leqslant (x,y) \leqslant (1,1)$. Sau đó vẽ đồ thị $Y_3(x) = Y_2(Y_1(x))$ và $Y_4, \ldots, Y_9$. Chu trình là từ .842 tới .452.

3.7.49. Lặp lại Bài tập 3.7.48 với 3.4 được đổi thành 2 hoặc 3.5 hoặc 4.



HÌNH 3.8.1. (a) v nhảy lên phía trên $v_{\text{trung bình}}$. (b)v bằng $v_{\text{trung bình}}$.

3.8. Định lý Giá trị Trung bình và quy tắc của L'Hôpital

Bây giờ chúng ta đến với một phần quan trọng khác của giải tích: *Định lý Giá trị Trung bình*. Định lý này kết nối bức tranh mang tính địa phương (hệ số góc tại một điểm) với bức tranh mang tính toàn cục (hệ số góc trung bình qua một khoảng). Nói cách khác, nó liên hệ df/dx với $\Delta f/\Delta x$. Giải tích dựa trên mối liên hệ này, chúng ta đã nhìn thấy mối liên hệ này lần đầu tiên đối các với vận tốc. Nếu vận tốc trung bình là 75, liệu có thời điểm nào đó mà vận tốc tức thời là 75 hay không?

Nếu không có thêm thông tin nào nữa, câu trả lời cho câu hỏi trên là *không*. Vận tốc có thể là 100 và sau đó là 50—vận tốc trung bình là 75 nhưng không bao giờ có vận tốc tức thời bằng 75. Nếu chúng ta chấp nhận có xuất hiện một bước nhảy trong vận tốc, vận tốc tức thời có thể nhảy ngay lên cao hơn vận tốc trung bình của nó. Tại thời điểm đó vận tốc không tồn tại. (Hàm quãng đường trong Hình 3.8.1a không có đạo hàm tại $x = 1$). Ta sẽ tránh xa lối thoát rẻ tiền này bằng yêu cầu hàm có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng.

Trong Hình 3.8.1b quãng đường tăng thêm 150 đơn vị khi t tăng thêm 2 đơn vị. Có một đạo hàm df/dt tại tất cả các điểm trong (nhưng có một hệ số góc vô cùng tại $t = 0$). Vận tốc trung bình là

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{150}{2} = 75.$$

Kết luận của định lý là $df/dt = 75$ ***tại một điểm nào đó nằm trong khoảng được xét***. Có ít nhất một điểm mà tại đó $f'(c) = 75$.

Đây không là một định lý mang tính xây dựng. Chúng ta không biết giá trị của c. Chúng ta không tìm c, mà chúng ta chỉ tuyên bố (với chứng minh) rằng một điểm như vậy là có tồn tại.

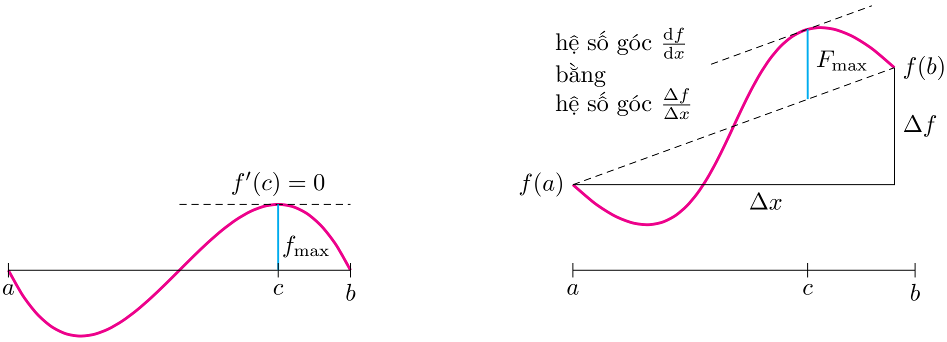
PHÁT BIỂU 3.8.1 (Định lý Giá trị Trung Bình[40]). Giả sử $f(x)$ là liên tục trong khoảng đóng $a \leqslant x \leqslant b$ và có đạo hàm khắp nơi trong khoảng mở $a < x < b$. Khi đó

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ tại một điểm } c \text{ nào đó thỏa mãn } a < c < b. \tag{3.8.1}$$

Vế trái là hệ số góc trung bình $\Delta f/\Delta x$. Nó bằng df/dx tại c. Ký hiệu đối với một khoảng đóng [với các điểm mút] là $[a, b]$. Đối với một khoảng mở (không kể các điểm mút) chúng ta viết (a, b). Như vậy f' được xác định trên (a, b), và f tiếp tục liên tục tại a và b. Một đạo hàm cũng được cho phép tồn tại tại những điểm mút này—nhưng định lý không đòi hỏi điều này.

Chứng minh được dựa trên một trường hợp đặc biệt—khi $f(a) = 0$ và $f(b) = 0$. *Giả sử hàm số bắt đầu tại không và trở về không*. Hệ số góc hoặc vận tốc trung bình

[40]Nd: Định lý Giá trị Trung bình (tiếng Anh: Mean Value Theorem, viết tắt: MVT).



HÌNH 3.8.2. Định lý của Rolle là khi $f(a) = f(b) = 0$ trong Định lý Giá trị Trung bình.

bằng không. Chúng ta phải chứng minh rằng $f'(c) = 0$ tại một điểm nằm giữa. Trường hợp đặc biệt này (giữ các giả định trên $f(x)$) được gọi là *định lý của Rolle*.

Về mặt hình học, nếu f rời khỏi không và quay lại, khi đó $f' = 0$ *tại điểm nó quay lại*.

PHÁT BIỂU 3.8.2 (Định lý của Rolle). Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ (bằng không tại các điểm mút). Khi đó $f'(c) = 0$ tại một điểm nào đó với $a < c < b$.

CHỨNG MINH. Tại một điểm nằm trong khoảng mà tại đó $f(x)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu, df/dx phải bằng không. Đó là một điểm c có thể chấp nhận được. Hình 3.8.2a cho thấy sự khác nhau giữa $f = 0$ (được giả định tại a và b) và $'f' = 0$ (được chứng minh tại c). □

Bài toán nhỏ: Cực đại có thể đạt được tại các điểm mút a và b, nếu $f(x) < 0$ tại các điểm nằm giữa. Tại những điểm mút này df/dx có thể không bằng không. Nhưng trong trường hợp đó, *cực tiểu* được đạt được tại một điểm trong c, điều này được xem là tương đường. Then chốt cho chứng minh của chúng ta là ***một hàm liên tục trên*** $[a, b]$ ***đạt cực đại và cực tiểu của nó trên đó***. Đây là Định lý Giá trị Cực trị.[41]

Thật mỉa mai rằng bản thân Rolle lại không tin vào logic đằng sau giải tích. Ông ấy có thể đã không tin vào định lý của chính mình! Có lẽ ông ấy đã không biết định lý này có nghĩa là gì—ngôn ngữ của "các đại lượng nhất thời" (Newton) và "các đại lương vô cùng bé" (Leibniz) là rất thú vị nhưng cũng rất dễ làm nản lòng. Giới hạn là gần nhưng không bao giờ đạt được. Các đường cong được tạo thành từ vô hạn các cạnh phẳng. Rolle không chấp nhận lập luận này, và nghiêm trọng hơn, ông đã không chấp nhận các kết luận của Newton và Leibniz. Viện Hàn lâm Khoa học[42] đã phải đứng ra để ngưng lại các tranh cãi của ông (ông ấy tranh cãi với các các nhà toán học thông thường lúc bấy giờ, chứ không phải là Newton và Leibniz). Cho nên ông ấy đã quay lại với lý thuyết số, nhưng trường hợp đặc biệt của ông khi trực tiếp dẫn đến một định lý lớn.

CHỨNG MINH. (Định lý Giá trị Trung bình) Chúng ta đang tìm kiếm một điểm mà tại đó df/dx bằng $\Delta f/\Delta x$. Ý tưởng là *đưa đồ thị về trường hợp đặc biệt của Rolle* (khi Δf bằng không). Trong Hình 3.8.2b khoảng cách $F(x)$ giữa đường cong và cát

[41]Nếu $f(x)$ không đạt giá trị cực đại M của nó, khi đó $1/(M - f(x))$ sẽ là liên tục nhưng cũng tiến tới vô cùng. Điều thiết yếu: ***Một hàm liên tục trên*** $[a, b]$ ***không thể tiến tới vô cùng***.
[42]Nd: Viện Hàn lâm Khoa học Pháp (tiếng Pháp: Académie des sciences).

tuyến nét đứt được đưa ra từ phép trừ:

$$F(x) = f(x) - [f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x-a)]. \tag{3.8.2}$$

Tại a và b, khoảng cách này là $F(a) = F(b) = 0$. *Định lý của Rolle áp dụng cho* $F(x)$. Có một điểm trong mà tại đó $F'(c) = 0$. Tại điểm đó, lấy đạo hàm của phương trình (3.8.2): $0 = f'(c) - (\Delta f/\Delta x)$. Điểm c được mong muốn được tìm thấy, định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.8.1. Hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ đi từ không tại $x = 0$ đến mười tại $x = 100$. Hệ số góc trung bình của nó là $\Delta f/\Delta x = 10/100$. Đạo hàm $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ tồn tại trong khoảng mở $(0, 100)$, mặc dù nó bùng nổ tại điểm mút $x = 0$. Theo Định lý Giá trị Trung bình, phải có một điểm mà tại đó $10/100 = f'(c) = 1/2\sqrt{c}$. Điểm đó là $c = 25$.

Sự thật là không ai quan tâm đến giá trị chính xác của c. Sự tồn tại của nó mới là điều được quan tâm. Lưu ý cách nó ảnh hưởng đến xấp xỉ tuyến tính $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$, xấp xỉ tuyến tính là kiến thức cơ bản cho chương này. Gần bằng trở thành đúng bằng ($\approx$ trở thành $=$) khi f' được tính tại c thay vì tại a:

Phát biểu 3.8.3. Đạo hàm tại c đưa ra một dự đoán chính xác của $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a). \tag{3.8.3}$$

Định lý Giá trị Trung bình được viết lại ở đây dưới dạng $\Delta f = f'(c)\Delta x$. Bây giờ $a < c < x$.

Ví dụ 3.8.2. Hàm số $f(x) = \sin x$ bắt đầu từ $f(0) = 0$. Dự đoán tuyến tính (tiếp tuyến) dùng hệ số $\cos 0 = 1$. Dự đoán chính xác dùng hệ số góc $\cos c$, c chưa biết nằm giữa 0 và x:

$$(\textit{xấp xỉ})\sin x \approx x \qquad\qquad (\textit{chính xác})\sin x = (\cos c)x. \tag{3.8.4}$$

Xấp xỉ là hữu ích, bởi vì mọi thứ đều được tính tại $x = a = 0$. Công thức chính xác là khá thú vị, bởi vì $\cos c \leqslant 1$ một lần nữa chứng minh rằng $\sin x \leqslant x$. Hệ số góc là nhỏ hơn 1, nên đồ thị sine nằm phía dưới đường thẳng 45°.

Ví dụ 3.8.3. ***Nếu** $f'(c) = 0$ **tại tất cả các điểm trên một khoảng**, **khi đó** $f(x)$ **là hằng trên khoảng đó***.

Chứng minh. Khi f' bằng không khắp nơi, Định lý Giá trị Trung bình đưa ra $\Delta f = 0$. Mỗi cặp điểm đều có $f(a) = f(b)$. Đồ thị là một đường nằm ngang. Trường hợp tưởng chừng như đơn giản này lại là một điều then chốt dẫn đến Định lý Cơ sở của Giải tích.

Hầu hết các áp dụng của $\Delta f = f'(c)\Delta x$ không phải là chỉ để đưa ra một con số cụ thể nào cả. Chúng được dùng để xây dựng những định lý khác (như định lý này). Mục đích là kết nối các đạo hàm (mang tính địa phương) với các sai phân (mang tính toàn cục). Nhưng ứng dụng tiếp theo—***Quy tắc l'Hôpital***—lại tìm cách khử dạng vô định 0/0 để đưa ra một con số. □

QUY TẮC CỦA L'HÔPITAL

Khi cả** $f(x)$ **và** $g(x)$ **đều tiến tới không**, **điều gì sẽ xảy ra với tỷ số** $f(x)/g(x)$ **của chúng?

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x} \text{ hoặc } \frac{\sin x}{x} \text{ hoặc } \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \text{ đều trở thành } \frac{0}{0} \text{ tại } x = 0.$$

Vì 0/0 là vô nghĩa, chúng ta không thể làm việc một cách riêng rẽ với $f(x)$ và $g(x)$. Đây là một "*cuộc đua về không*," trong đó hai hàm số trở nên nhỏ trong khi tỷ số của chúng có thể lớn cũng có thể nhỏ. Vấn đề là tìm cho được giới hạn của $f(x)/g(x)$.

Chúng ta đã nghiên cứu một giới hạn như vậy. *Nó chính là đạo hàm*! $\Delta f/\Delta x$ tự động tạo nên một cuộc đua về không, cuộc đua này có giới hạn là df/dx:

$$\text{(3.8.5)} \qquad \begin{array}{r} f(x) - f(a) \to 0 \\ x - a \to 0 \end{array} \text{ nhưng } \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Ý tưởng của l'Hôpital là dùng f'/g' để xử lý f/g. Đạo hàm là trường hợp đặc biệt $g(x) = x - a$ với $g' = 1$. Theo sau quy tắc này là các ví dụ và các chứng minh.

Phát biểu 3.8.4 (Quy tắc của l'Hôpital). Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ đều tiến tới không khi $x \to a$. Khi đó $f(x)/g(x)$ tiến tới cùng một giới hạn với $f'(x)/g'(x)$, nếu giới hạn thứ hai tồn tại:

$$\text{(3.8.6)} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ Thông thường, giới hạn này là } \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Đây không phải là quy tắc thương! Các đạo hàm của $f(x)$ và $g(x)$ được lấy một cách riêng rẽ. Về mặt hình học, quy tắc của l'Hôpital nói rằng *khi các hàm số đi tới không các hệ số góc của chúng kiểm soát độ lớn của chúng.* Một trường hợp dễ thấy là $f = 6(x - a)$ và $g = 2(x - a)$. Tỷ số f/g chính xác là $6/2 = 3$, đây cũng chính là tỷ số của các hệ số góc của chúng. Hình 3.8.3 cho thấy việc ba đường thẳng này rớt về không, bị kiểm soát bởi 6 và 2.

Hình cạnh đó cho thấy cùng một giới hạn 6/2, khi các đường cong ***tiếp tuyến***[43] với với các đường thẳng. Hình ảnh này là chìa khóa mở ra quy tắc của l'Hôpital.

Một cách tổng quát, giới hạn của f/g có thể là một số hữu hạn L hoặc $+\infty$ hoặc $-\infty$. (Ngoài ra, điểm giới hạn $x = a$ có thể biểu thị một số hữu hạn hoặc $+\infty$ hoặc $-\infty$. Nhưng chúng ta sẽ chỉ xét khi nó là hữu hạn). Một đòi hỏi tuyệt đối phải có đó là $f(x)$ và $g(x)$ phải tiến tới không một cách riêng rẽ—chúng ta nhấn mạnh vào dạng 0/0. Nếu không, không có lý do gì để phương trình (3.8.6) phải là đúng. Với $f(x) = x$ và $g(x) = x - 1$, ***đừng*** dùng Quy tắc của L'Hôpital:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{a-1} \text{ nhưng } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1}.$$

Các tỷ số thông thường tiến tới giá trị $\lim f(x)$ bị chia bởi $\lim g(x)$. Quy tắc của L'Hôpital chỉ được dùng đối với trường hợp 0/0.

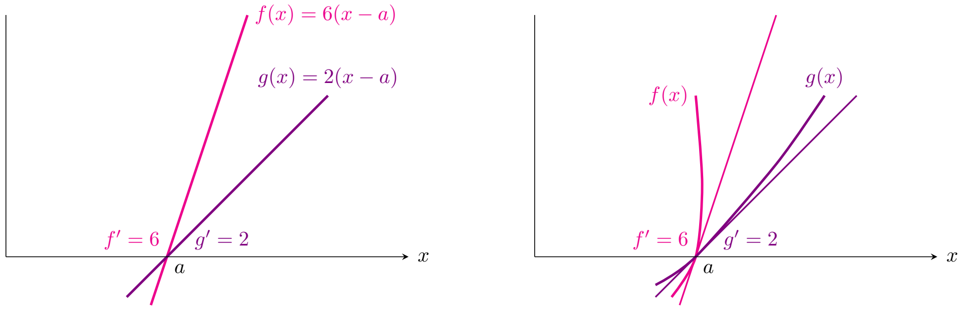
Ví dụ 3.8.4 (một bài toàn cũ). $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ bằng $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1}$. Giới hạn này bằng không.

Ví dụ 3.8.5. $\dfrac{f}{g} = \dfrac{\tan x}{\sin x}$ kéo theo $\dfrac{\sec^2 x}{\cos x}$. Tại $x = 0$ giới hạn là $\dfrac{1}{1} = 1$.

Ví dụ 3.8.6. $\dfrac{f}{g} = \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ kéo theo $\dfrac{f'}{g'} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$. Tại $x = 0$ tỷ số này vẫn là $\dfrac{0}{0}$.

Lời giải. ***Áp dụng Quy tắc của L'Hôpital cho*** f'/g'. Nó có cùng giới hạn với $\dfrac{f''}{g''}$:

[43]Nd: Có thể hiểu ngược lại là các đường thẳng tiếp tuyến với các đường cong.



HÌNH 3.8.3. (a) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ chính là $\dfrac{f'(a)}{g'(a)} = 3$. (b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiến tới $\dfrac{f'(a)}{g'(a)} = 3$.

$$\text{nếu } \frac{f}{g} \to \frac{0}{0} \text{ và } \frac{f'}{g'} \to \frac{0}{0} \text{ khi đó tính } \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{0}{1} = 0.$$

Lý luận đằng sau Quy tắc của L'Hôpital đó là các phân thức sau là như nhau:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Big/ \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \tag{3.8.7}$$

Đẳng thức này mới chỉ mới chỉ liên quan đến đại số, chứ chưa dính dàng gì đến giới hạn cả. Các thừa số $x - a$ bị triệt tiêu, và các số $f(a)$ và $f(b)$ đều bằng không theo giả thiết. Bây giờ lấy giới hạn của (3.8.7) khi x tiến tới a.

Điều thường xảy ra là tử số của (3.8.7) tiến tới $f'(a)$. Mẫu số của (3.8.7) tiến tới $g'(a)$. Chúng ta hy vọng rằng $g'(a)$ khác không. Trong trường hợp này chúng ta có thể chia giới hạn của tử bởi giới hạn của mẫu. Cách này đưa ra đáp án "chuẩn"

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \text{ của } (3.8.7) = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{3.8.8}$$

Đây cũng là đáp án của L'Hôpital. Khi $f'(x) \to f'(a)$ và $g'(x) \to g'(a)$ một cách riêng rẽ, giới hạn toàn thể của ông ấy là $f'(a)/g'(a)$. Ông ấy đã công bố quy tắc này trong giáo trình đầu tiên từng được viết về phép tính vi phân. (Đó là vào năm 1696—giới hạn thực ra đã được khám phá ra bởi người thầy của ông ấy, Bernoulli). Ba trăm năm sau chúng ta áp dụng quy tắc mang tên của ông ấy cho những trường hợp được cho phép khác trong (3.8.6), khi mà f'/g' có thể tiến tới một giới hạn ngay cả khi tử số và mẫu số của nó không tiến tới bất kỳ giới hạn nào cả.

Để chứng minh dạng tổng quát hơn này của Quy tắc L'Hôpital, chúng ta cần một Định lý Giá trị Trung bình tổng quát hơn. Tôi xem thảo luận dưới đây là tùy chọn trong một khóa học vi tích phân (nhưng lại là bắt buộc trong một quyển sách viết về vi tích phân). Ý tưởng quan trọng đã xuất hiện đến trong phương trình (3.8.8).

GHI CHÚ. ***Dạng "vô định cơ bản là*** $\infty - \infty$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ tiến tới vô cùng, bất kỳ chuyện gì cũng đều có thể xảy ra đối với $f(x) - g(x)$. Chúng ta có thể có $x^2 - x$ hoặc $x - x^2$ hoặc $(x + 2) - x$. Các giới hạn của chúng là $\infty, -\infty$ và 2.

Dạng vô định có độ khó cao hơn một chút là $\dfrac{0}{0}$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$ và $0 \cdot \infty$. Để tìm giới hạn trong những trường hợp này, hãy thử dùng Quy tắc của L'Hôpital. Xem Bài toán 3.8.24 khi $f(x)/g(x)$ tiến tới ∞/∞. Khi $f(x) \to 0$ và $g(x) \to \infty$, hãy áp dụng quy tắc 0/0 cho $f(x)/(1/g(x))$.

Dạng vô định có độ khó cao hơn nữa là 0^0 và 1^∞ và ∞^0. Những dạng này được sinh ra từ giới hạn của $f(x)^{g(x)}$. Nếu $f(x)$ tiến tới $0, 1$ hoặc ∞ trong khi $g(x)$ tiến tới $0, \infty$ hoặc 0, chúng ta cần thêm thông tin. Một ví dụ thực sự gây tò mò là $x^{1/\ln x}$, ví dụ này cho thấy cả ba khả năng 0^0 và 1^∞ và ∞^0. Hàm số này thực sự là một hằng số! Nó bằng e.

Để quay lại dạng vô định có độ khó thấp hơn một cấp, hãy lấy các logarithm. Khi đó $g(x)\ln f(x)$ trở về $\frac{0}{0}$ và $0 \cdot \infty$ và hãy áp dùng Quy tắc của L'Hôpital. Nhưng chúng ta phải đợi đến Chương 6 để tìm hiểu về các logarithm và e.

ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH TỔNG QUÁT

MVT có thể được mở rộng cho *hai hàm số*. Sự mở rộng này được đưa ra theo ý tưởng của Cauchy, người đã làm sáng tỏ toàn bộ ý tưởng về các giới hạn. Bạn sẽ nhận ra trường hợp đặc biệt $g = x$ là Định lý Giá trị Trung bình Thông thường.

PHÁT BIỂU 3.8.5 (MVT tổng quát). Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), có một điểm $c \in (a, b)$ trong đó

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \tag{3.8.9}$$

Chứng minh của định lý này được đưa ra bằng cách xây dựng một hàm mới mà có $F(a) = F(b)$:

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Định lý Giá trị Trung bình thông thường kéo theo $F'(c) = 0$—đây chính là phương trình (3.8.9).

ỨNG DỤNG 1. (Chứng minh của Quy tắc của L'Hôpital) Quy tắc này đối mặt với $f(a)/g(a) = 0/0$. Việc thay $f(a) = g(a) = 0$ vào phương trình (3.8.9) để lại $f(b)g'(c) = g(b)f'(c)$. Vì vậy

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3.8.10}$$

Khi b tiến tới a, c cũng vậy. Điểm c bị kẹp giữa a và b. Giới hạn phương trình (3.8.10) khi $b \to a$ và $c \to a$ chính là Quy tắc của L'Hôpital.

ỨNG DỤNG 2. (Sai số trong xấp xỉ tuyến tính) Mục 3.2 đã phát biểu rằng khoảng cách giữa một đường cong và tiếp tuyến của nó tăng như $(x - a)^2$. Bây giờ chúng ta có thể chứng minh được điều này, và tìm hiểu thêm nhiều điều nữa. Xấp xỉ tuyến tính là

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \textit{sai số } \; e(x). \tag{3.8.11}$$

Mẫu hình này cho thấy một sai số liên quan đến $f''(x)$ và $(x - a)^2$. Ví dụ cơ bản $f = x^2$ cho thấy cần phải có một nhân tử $\frac{1}{2}$ (để triệt tiêu $f'' = 2$). ***Sai số trong xấp xỉ tuyến tính là***

$$e(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - a)^2 \text{ với } a < c < b \tag{3.8.12}$$

Ý TƯỞNG CHỦ CHỐT. So sánh sai số $e(x)$ với $(x - a)^2$. Cả hai đều bằng không tại $x = a$:

$$\begin{array}{lll} e = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) & e' = f'(x) - f'(a) & e'' = f''(x) \\ g(x) = (x - a)^2 & g' = 2(x - a) & g'' = 2 \end{array}$$

Định lý Giá trị Trung bình Tổng quát tìm một điểm C nằm giữa a và x mà tại đó $e(x)/g(x) = e'(C)/g'(C)$. Đây chính là phương trình (3.8.10) được viết lại bằng các chữ cái khác mà thôi. Sau khi kiểm tra $e'(a) = g'(a) = 0$, áp dụng cùng định lý cho $e'(x)$ và $g'(x)$. Điều này tạo ra một điểm c nằm giữa a và C—điểm này chắc chắn nằm giữa a và x—mà tại đó

$$\frac{e'(C)}{g'(C)} = \frac{e''(c)}{g''(c)} \text{ và vì vậy } \frac{e(x)}{g(x)} = \frac{e''(c)}{g''(c)}.$$

Với $g = (x-a)^2$ và $g'' = 2$ và $e'' = f''$, phương trình bên phải là $e(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$. Công thức sai số đã được chứng minh. Một xấp xỉ rất tốt là $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$.

Ví dụ 3.8.7. $f(x) = \sqrt{x}$ gần $x = 100$: $\sqrt{102} \approx 10 + (\frac{1}{20})2 + \frac{1}{2}(\frac{-1}{4000})^2$. Số hạng sau cùng dự đoán $e = -.0005$. Sai số thực sự là $\sqrt{102} - 10.1 = -.000496$.

BÀI TẬP 3.8

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Định Lý Giá Trị Trung Bình san bằng sự khác biệt giữa hệ số góc trung bình $\Delta f/\Delta x$ trên một __a__ $[a, b]$ với hệ số góc df/dx tại một __b__ chưa biết. Phát biểu của định lý này là __c__. Nó yêu cầu $f(x)$ phải là __d__ trên khoảng __e__ $[a, b]$, với một __f__ trên khoảng mở (a, b). Định lý của Rolle là trường hợp đặc biệt của định lý này khi $f(a) = f(b) = 0$, và điểm c thỏa mãn __g__. Chứng minh chọn c làm điểm mà tại đó f đạt __h__.

Các hệ quả của Định Lý Giá Trị Trung Bình bao gồm: Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm trong một khoảng, khi đó $f(x) =$ __i__. Dự đoán $f(x) = f(a) +$ __j__ $(x-a)$ là chính xác đối với c nào đó nằm giữa a và x. Dự đoán bậc hai $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) +$ __k__ $(x-a)^2$ là chính xác đối với một c khác. Sai số trong $f(a) + f'(a)(x-a)$ là nhỏ hơn $\frac{1}{2}M(x-a)^2$ trong đó M là cực đại của __l__.

Một hệ quả chính của Định lý Giá trị Trung Bình chính là Quy tắc của l'Hôpital, quy tắc này áp dụng được khi $f(x)$ và $g(x)$ $\to$ __m__ khi $x \to a$. Trong trường hợp đó giới hạn của $f(x)/g(x)$ bằng giới hạn của __n__, với điều kiệu giới hạn này tồn tại. Thông thường giới hạn này là $f'(a)/g'(a)$. Nếu phân thức này cũng là $0/0$, chúng ta tiếp tục đến với giới hạn của __o__.

Tìm tất cả các điểm c thoả mãn $0 < c < 2$ mà $f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$.

3.8.1. $f(x) = x^3$

3.8.2. $f(x) = \sin \pi x$

3.8.3. $f(x) = \tan 2\pi x$

3.8.4. $f(x) = 1 + x + x^2$

3.8.5. $f(x) = (x-1)^{10}$

3.8.6. $f(x) = (x-1)^9$

Trong các bài tập 3.8.7-3.8.10, chứng tỏ rằng không có điểm c nào cho chúng ta $f(1) - f(-1) = f'(c)(2)$. Giải thích tại sao Định Lý Giá Trị Trung Bình không áp dụng được.

3.8.7. $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$

3.8.8. $f(x) =$ hàm bước nhảy đơn vị

3.8.9. $f(x) = |x|^{1/2}$

3.8.10. $f(x) = 1/x^2$

3.8.11. Chứng tỏ rằng $\sec^2 x$ và $\tan^2 x$ có cùng đạo hàm, và rút ra nhận định về $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

3.8.12. Chứng tỏ rằng $\csc^2 x$ và $\cot^2 x$ có cùng đạo hàm và tìm $f(x) = \csc^2 x - \cot^2 x$.

Tìm các giới hạn trong 3.8.13-3.8.22 bằng Quy tắc của l'Hôpital.

3.8.13. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

3.8.14. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

3.8.15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{-2}-1}{x}$

3.8.16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

3.8.17. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{x-\pi}{\sin x}$

3.8.18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sin x}$

3.8.19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

3.8.20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}$

3.8.21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

3.8.22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

3.8.23. Đối với $f = x^2-4$ và $g = x+2$, tỷ số f'/g' tiến tới 4 khi $x \to 2$. Hỏi giới hạn của $f(x)/g(x)$? Có điều gì sai trong Quy tắc của l'Hôpital?

3.8.24. ***Quy tắc của l'Hôpital vẫn đúng đối với*** $f(x)/g(x) \to \infty/\infty$***:*** L ***là***

$$\begin{aligned}&\lim \frac{f(x)}{g(x)}\\ =&\lim \frac{1/g(x)}{1/f(x)}\\ =&\lim \frac{g'(x)/g^2(x)}{f'(x)/f^2(x)}\\ =&L^2 \lim \frac{g'(x)}{f'(x)}.\end{aligned}$$

Khi đó L bằng $\lim[f'(x)/g'(x)]$ nếu giới hạn này tồn tại. Chúng ta đã dùng Quy tắc của l'Hôpital đối với 0/0 ở đâu? Những quy tắc giới hạn khác nào đã được dùng?

3.8.25. Tính $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+(1/x)}{1-(1/x)}$.

3.8.26. Tính $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x}{2x^2}$.

3.8.27. Tính $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ bằng cảm quan thông thường. Chứng tỏ rằng Quy tắc của l'Hôpital không đưa ra được kết quả.

3.8.28. Tính $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\csc x}{\cot x}$ bằng cảm quan thông thường hoặc bằng mánh khóe.

3.8.29. Định Lý Giá Trị Trung Bình được áp dụng cho $f(x) = x^3$ đảm bảo rằng số c nào đó giữa 1 và 4 có một tính chất nhất định. Cho biết tính chất này là gì và tìm c.

3.8.30. Nếu $|\dfrac{df}{dx}| \leqslant 1$ tại tất cả các điểm, chứng minh điều sau:

$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$ đối với mọi x và y.

3.8.31. Sai số trong phương pháp của Newton được bình phương lên tại từng bước: $|x_{n+1}-x^*| \leqslant M|x_n-x^*|^2$. Chứng minh bắt đầu từ $0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^*-x^n) + \frac{1}{2}f''(c)(x^*-x_n)^2$. Chia bởi $f'(x_n)$, nhận diện x_{n+1}, và ước lượng M.

3.8.32 (Định lý của Rolle đảo). Giả sử $f'(c) = 0$. Liệu có nhất thiết phải có hai điểm a và b quanh c mà $f(a) = f(b)$ hay không?

3.8.33. Giả sử $f(0) = 0$. Nếu $f(x)/x$ có một giới hạn khi $x \to 0$, giới hạn đó được biết đến nhiều hơn dưới dạng ________. Quy tắc của l'Hôpital thay vào đó nhìn vào giới hạn của ________.

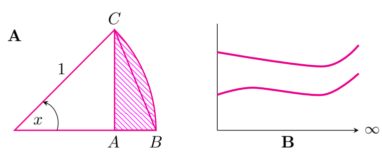
Kết luận từ l'Hôpital: Giới hạn của $f'(x)$, nếu nó tồn tại, bằng với $f'(0)$. Do đó $f'(x)$ không thể có một "________ bỏ được."

3.8.34. Có khả năng $f'(x)/g'(x)$ không có giới hạn nhưng $f(x)/g(x) \to L$. Đây là lý do tại sao l'Hôpital thêm vào một từ "nếu."

(a) Tìm L khi $x \to 0$ trong trường hợp $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ và $g(x) = x$. Nhớ rằng các cosine có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 1.

(b) Từ công thức $f'(x) = \sin \dfrac{1}{x} + 2x \cos \dfrac{1}{x}$, chứng tỏ rằng f'/g' không có giới hạn khi $x \to 0$.

3.8.35. Sách giải tích của Stein[44] yêu cầu tìm giới hạn của tỷ số của $f(x) =$ diện tích tam giác ABC và $g(x) =$ diện tích nan quạt ABC. (a) Dự đoán giới hạn của f/g khi góc x tiến tới không. (b) Giải thích lý do tại sao $f(x)$ là $\frac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos x)$ và $g(x)$ là $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$. (c) Tính giới hạn thật sự của $f(x)/g(x)$.



[44]Nd: Giải tích và Hình học Giải tích (tiếng Anh: Calculus and Analytic Geometry) được viết bởi Sherman K. Stein.

3.8.36. Nếu bạn lái xe 3000 dặm từ New York đến L.A. trong 100 giờ (cho phép dừng lại để ngủ và ăn, và cho phép đi ngược trở lại ở một số đoán) tại khoảnh khắc nào đó tốc độ của bạn là ________.

3.8.37. Khi $x \to \infty$, Quy tắc của l'Hôpital vẫn áp dụng được. Giới hạn của $f(x)/g(x)$ bằng giới hạn của $f'(x)/g'(x)$, nếu giới hạn đó tồn tại. Hỏi giới hạn là gì khi hai đồ thị trong Hình B trở nên song song với nhau.

3.8.38. Chứng minh rằng $f(x)$ tăng khi hệ số góc của nó là dương: Nếu $f'(c) > 0$ tại mọi điểm c, khi đó $f(b) > f(a)$ tại mọi cặp điểm $b > a$.

CHƯƠNG 4

Đạo hàm theo Quy tắc Xích

4.1. Quy tắc Xích

Bạn nhớ rằng đạo hàm của $f(x)g(x)$ không phải là $(df/dx)(dg/dx)$. Đạo hàm của $\sin x$ lần x^2 không phải là $\cos x$ lần $2x$. Quy tắc tích đã đưa ra hai số hạng, chứ không phải là một số hạng. Nhưng còn có một cách khác để kết hợp hàm số $f(x) = \sin x$ và hàm số $g(x) = x^2$ thành một hàm đơn. Đạo hàm của hàm mới này cũng có liên quan đến $\cos x$ lần $2x$ (nhưng với một chút thay đổi). Trước tiên chúng ta sẽ lý giải về hàm số mới này, và sau đó tìm "quy tắc xích" đối với đạo hàm của nó.

Tôi phải nói ngay đây rằng quy tắc xích là rất quan trọng! Thật dễ để học nó và bạn sẽ dùng nó thường xuyên. Tôi nhận thấy nó là cách cơ bản thứ ba để tìm các đạo hàm của các hàm số mới từ các đạo hàm của hàm số cũ đã được biết đến. (Các hàm số cũ đã được biết là $x^n, \sin x, \cos x$. Sau này là e^x và $\log x$). Khi f và g được cộng hoặc nhân với nhau, các đạo hàm được sinh ra từ *quy tắc cộng* và *quy tắc nhân*. Mục này kết hợp f và g theo cách thứ ba.

Hàm số mới được giới thiệu ở mục này là $\sin(x^2)$—***sine của*** x^2. Nó được tạo ra từ hai hàm số gốc: nếu $x = 3$ khi đó $x^2 = 9$ và $\sin^2 x = \sin 9$. Có một "xích" gồm các hàm số. Kết hợp $\sin x$ và x^2 thành hàm hợp $\sin(x^2)$. Chúng ta bắt đầu với x, *sau đó tìm* $g(x)$, ***sau đó tìm*** $f[g(x)]$:

Hàm bình phương đưa ra $y = x^2$. Đây là $g(x)$.

Hàm sine sinh ra $z = \sin y = \sin(x^2)$. Đây là $f(g(x))$.

"***Hàm bên trong***" $g(x)$ đưa ra y. *Đây là đầu vào cho* "***hàm bên ngoài***" $f(y)$. Đây được được gọi là ***phép hợp***. Nó bắt đầu với x và kết thúc với z. Hàm hợp đôi khi được viết là $f \circ g$ (dấu tròn cho thấy sự khác biệt so với với một tích thông thường fg). Thường xuyên hơn bạn sẽ thấy nó được viết là $f[g(x)]u$:

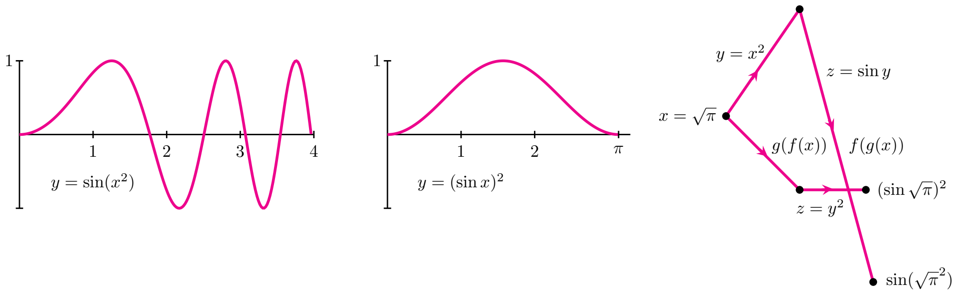
$$z(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]. \tag{4.1.1}$$

Các ví dụ khác là $\cos 2x$ và $(2x)^3$, với $g(x) = 2x$. *Trên một máy tính cầm tay bạn nhập đầu vào x, sau đó nhấn phím "g", sau đó nhấn phím "f"*:

Từ x ***tính*** $y = g(x)$ ***Từ*** y ***tính*** $z = f(y)$.

Không có bất kỳ phím mới nào đối với phép hợp cũng như loại hàm số mới này! Nhưng nút đối với hàm bình phương và hàm sine đều có trong hầu hết các dòng máy tính cầm tay, và chúng sẽ được dùng theo ***thứ tự đó***. Hình 4.1.1a cho thấy bình phương sẽ kéo giãn và làm nén đồ thị của hàm sine như thế nào.

Đồ thị của $\sin(x^2)$ là một tín hiệu FM điên rồ (Tần số được Biến điệu). Sóng đi lên và xuống như $\sin x$, nhưng không cắt trục hoành tại cùng một nơi. Việc thay đổi thành $\sin g(x)$ làm cho đỉnh di chuyển về phía bên trái và phải. Khác với một tích $g(x) \sin x$, đồ thị của hàm số này là một tín hiệu AM (Biên độ được Biến điệu).



HÌNH 4.1.1. $f(g(x))$ là khác với $g(f(x))$. Áp dụng g sau đó là f,hoặc f và sau đó là g.

GHI CHÚ. $f(g(x))$ thường khác với $g(f(x))$. ***Trật tự của f và g thường là quan trọng***. Đối với $f(x) = \sin x$ và $g(x) = x^2$, xích trong thứ tự ngược lại $g(f(x))$ đưa ra một vài điểm khác biệt:

Trước tiên áp dụng hàm sine: $y = \sin x$

Sau đó áp dụng hàm bình phương: $z = (\sin x)^2$.

Hàm số được sinh ra thường được viết là $\sin^2 x$ để tiết kiệm các dấu ngoặc. Người ta không bao giờ viết là $\sin x^2$, đây là một hàm số hoàn toàn khác. Hãy so sánh chúng trong Hình 4.1.1.

VÍ DỤ 4.1.1. Hàm hợp $f \circ g$ có thể gây nhầm lẫn. Nếu $g(x) = x^3$ và $f(y) = y^4$, $f[g(x)]u$ khác biệt so với tích thông thường $f(x)g(x)$ như thế nào? Tích thông thường là x^7. Xích bắt đầu với $y = x^3$, và sau đó $z = y^4 = x^{12}$. Phép hợp của x^3 và y^4 đưa ra $z = f[g(x)] = x^{12}$.

VÍ DỤ 4.1.2. Trong phương pháp của Newton, $F(x)$ được hợp với chính nó. Đây là ***phép lặp***. Mọi đầu ra x_n đều được gán trở lại dưới dạng đầu vào, để tìm $x_{n+1} = F(x_n)$. Ví dụ $F(x) = \frac{1}{2}x + 4$ có $F(F(x)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 4) + 4$. Phép hợp này sinh ra $z = \frac{1}{4}x + 6$.

Đạo hàm của $F(x)$ là $\frac{1}{2}$. Đạo hàm của $z = F(F(x))$ là $\frac{1}{4}$, chính là $\frac{1}{2}$ lần $\frac{1}{2}$. ***Chúng ta nhân các đạo hàm***. Đây là một trường hợp đặc biệt của quy tắc xích.

Một trường hợp cực kỳ đặc biệt nữa là $f(x) = x$ và $g(x) = x$. Tích thông thường là x^2. Xích $f(g(x))$ sinh ra chỉ x! Đầu ra từ "*hàm đồng nhất*" là $g(x) = x$.[1] Khi hàm đồng nhất thứ hai tác động lên x nó vẫn sinh ra lại x. Đạo hàm là 1 lần 1. Hãy để tôi đưa ra nhiều hàm hợp trong bảng sau:

$y = g(x)$	$z = f(y)$	$z = f[g(x)]$
$x^2 - 1$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x^2 - 1}$
$\cos x$	y^3	$(\cos x)^3$
2^x	2^y	2^{2^x}
$x + 5$	$y - 5$	x

Cộng 5 vào x nằm ở ô cuối cùng để thu được y. Sau đó trừ 5 để thu được z. Vì vậy $z = x$. Ở đây đầu ra bằng đầu vào: $f(g(x)) = x$. Những "***hàm ngược***" này

[1]Một máy tính cầm tay không có phím cho hàm đồng nhất. Nếu có, nút đó cũng chẳng có tác dụng gì.

được đề cập đến trong Mục 4.3. Các ví dụ khác tạo ra các hàm mới $z(x)$ và chúng ta muốn biết các đạo hàm của chúng.

ĐẠO HÀM CỦA $f(g(x))$

Đạo hàm của $z = \sin x^2$ là gì? Nó là giới hạn của $\Delta z/\Delta x$. Vì vậy chúng ta nhìn vào một điểm gần đó $x + \Delta x$. Số gia đó trong x sinh ra một số gia trong $y = x^2$—mà chuyển tới $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Từ số gia này trong y, có một số gia trong $z = f(y)$. Nó là một "hiệu ứng domino," trong đó với từng số gia trong đầu vào kéo theo một số gia trong đầu ra: Δx ***sinh ra*** Δy ***sinh ra*** Δz. Chúng ta phải kết nối Δz sau cùng với Δx ban đầu.

Mấu chốt là viết $\Delta z/\Delta x$ ***dưới dạng*** $\Delta z/\Delta y$ ***lần*** $\Delta y/\Delta x$. Sau đó cho Δx tiến tới không. Trong giới hạn, dz/dx được cho bởi "quy tắc xích":

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \ \textbf{\textit{trở thành quy tắc xích}}\ \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Khi Δx tiến tới không, tỷ số $\Delta z/\Delta x$ tiến tới dy/dx. Vì vậy Δy phải tiến tới không, và $\Delta z/\Delta y$ tiến tới dz/dy. Giới hạn của một tích là tích của các giới hạn riêng biệt (đã được kết luận bằng một chứng minh nhanh). *Chúng ta nhân các đạo hàm*:

PHÁT BIỂU 4.1.1 (Quy tắc Xích). Giả sử $g(x)$ có một đạo hàm tại x và $f(y)$ có một đạo hàm tại $y = g(x)$. Khi đó đạo hàm của $z = f(g(x))$ là

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'[g(x)]g'(x). \tag{4.1.2}$$

Hế số góc tại x là df/dy (tại y) lần dg/dx (tại x).

CHÚ Ý. Quy tắc xích không nói rằng đạo hàm của $\sin x^2$ là $(\cos x)(2x)$. Đúng, $\cos y$ là đạo hàm của $\sin y$. Vấn đề là là $\cos y$ *phải được tính tại* y (không phải tại x). Chúng ta không muốn df/dx tại x, chúng ta muốn df/dy tại $y = x^2$.

$$\textit{Đạo hàm của } \sin x^2 \textit{ là } (\cos x^2) \textit{ lần } (2x). \tag{4.1.3}$$

VÍ DỤ 4.1.3. Nếu $z = (\sin x)^2$ khi đó $dz/dx = 2\sin x\cos x$. Ở đây $y = \sin x$ là hàm bên trong.
Theo thứ tự này, $z = y^2$ kéo theo $dz/dy = 2y$. *Nó không kéo theo* $2x$. Hàm bên trong $\sin x$ sinh ra $dy/dx = \cos x$. Đáp án là $2y\cos x$. Chúng ta vẫn chưa tìm được hàm số mà có đạo hàm là $2x\cos x$.

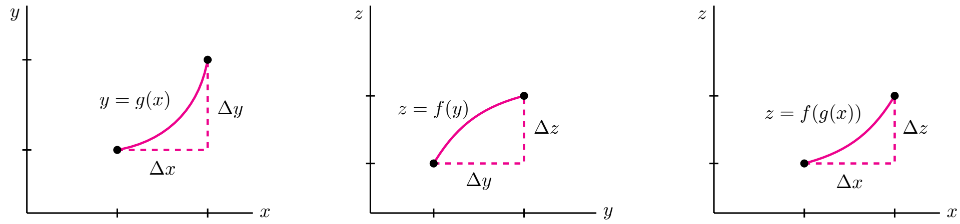
VÍ DỤ 4.1.4. Đạo hàm của $z = \sin 3x$ là $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = 3\cos 3x$.

Hàm bên ngoài là $z = \sin y$. Hàm bên trong là $y = 3x$. Khi đó $dz/dy = \cos y$—đây là $\cos 3x$, chứ không phải là $\cos x$. Đừng quên thừa số $dy/dx = 3$ còn lại.

Tôi có thể đưa ra một lời giải thích trực quan đối với thừa số 3 đó, đặc biệt là nếu x được thay đổi thành t. Hàm quãng đường là $z = \sin 3t$. Nó dao động như $\sin t$ trừ việc *nhanh hơn gấp ba lần.* Chu kỳ của hàm $\sin 3t$ là $2\pi/3$ (thay vì 2π). Một cách tự nhiên vận tốc chứa thêm thừa số 3 từ quy tắc xích.

VÍ DỤ 4.1.5. Cho $z = f(y) = y^n$. Tìm đạo hàm của $f[g(x)] = [g(x)]^n$.
Trong trường hợp này, dz/dx là ny^{n-1}. Quy tắc xích nhân bởi dy/dx:

$$\frac{dz}{dx} = ny^{n-1} \qquad \text{hay} \qquad \frac{dy}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\frac{dg}{dx} \tag{4.1.4}$$



HÌNH 4.1.2. Quy tắc xích: $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = \dfrac{\Delta z}{\Delta y}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiến tới $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$.

Đây là ***quy tắc luỹ thừa***! Chúng ta đã tìm hiểu nó trong Mục 2.5. Các căn bậc hai (khi $n = 1/2$) được dùng khá thường xuyên và quan trọng. Giả sử $y = x^2 - 1$:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}. \tag{4.1.5}$$

CÂU HỎI. *Một chiếc xe mang thương hiệu Buick dùng* $1/20$ *gallon xăng trên mỗi dặm. Bạn lái xe tại tốc độ* 60 *dặm trên mỗi giờ?. Hỏi xe tiêu thụ bao nhiêu gallon xăng trên mỗi giờ?*

CÂU TRẢ LỜI. (***Gallon***/***giờ***) = (***Gallon***/***dặm***)(***dặm***/***giờ***). Quy tắc xích là $(dy/dt) = (dy/dx)(dx/dt)$. Đáp án là $(1/20)(60) = 3$ gallon/giờ.

QUY TẮC XÍCH. Thảo luận trên đã chính xác dựa trên:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{và} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{4.1.6}$$

Chính ở đây, thông qua quy tắc xích, Leibniz đã chiến thắng "trận chiến về ký hiệu." Các ký hiệu của ông đã nói cho chúng ta biết mình phải làm gì một cách hết sức cụ thể: Lấy giới hạn của từng hàm số. (Tôi phải đề cập rằng rằng khi Δx tiến tới, về mặt lý thuyết Δz có thể *chạm đến* không. Nếu điều này đó xảy ra, $\Delta z/\Delta y$ trở thành $0/0$. Chúng ta phải gán cho nó ý nghia đúng đắn mà nó đáng nhận được, đó chính là dz/dy.) Khi $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to g'(x) \text{ và } \frac{\Delta z}{\Delta y} \to f'(y) = f'[g(x)].$$

Khi $\Delta z/\Delta x$ tiến tới $f'(y)$ lần $g'(x)$, đây chính là quy tắc xích $(dz/dy)(dy/dx)$. Trong bảng dưới đây, đạo hàm của $(\sin x)^3$ là $3(\sin x)^2 \cos x$. Thừa số $\cos x$ đó rất dễ bị bỏ quên. Thậm chí -1 trong ví dụ sau cùng còn dễ bị bỏ quên hơn:

$z = (x^3+1)^5$	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = 5(x^3+1)^4$	lần $3x^2$
$z = (\sin x)^3$	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = 3\sin^2 x$	lần $\cos x$
$z = (1-x)^2$	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = 2(1-x)$	lần -1

□

ĐỊNH NGHĨA. Trước sau gì chữ cái nào rồi cũng đều được dùng trong quy tắc xích. Chúng ta đặt tên đầu ra là z. Rất thường xuyên nó cũng được gọi là y, và hàm bên trong được gọi là u.

$$\textbf{\textit{Đạo hàm của }} y = \sin u(x) \textbf{\textit{ là }} \frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}.$$

Các ví dụ với du/dx là cực kỳ phổ biến. Tôi phải yêu cầu bạn đừng cảm thấy bất ngờ nếu có những chữ cái mới xuất hiện thay vì u và x. Đều không bao giờ thay đổi là ý tưởng chính—*đạo hàm của hàm bên ngoài lần đạo hàm của hàm bên trong.*

Ví dụ 4.1.6. Chúng ta hầu như không cần đến quy tắc xích đối với việc tính đạo hàm của $\sin(x-1)$. Nói một cách chặt chẽ, hàm bên trong là $u = x-1$. Khi đó du/dx chỉ là 1 (chứ không phải là -1). ***Nếu*** $y = \sin(x-1)$ ***khi đó*** $dy/dx = \cos(x-1)$. Đồ thị được tịnh tiến và hệ số góc cũng thay đổi theo.

Đặc biệt chú ý: Hàm cosine được tính tại $x-1$ và không phải tại điểm chưa được tịnh tiến x.

NHẬN DIỆN $f(y)$ VÀ $g(x)$

Một phần lớn của quy tắc xích có liên quan đến *việc nhận diện xích.* Hãy bắt đầu với $(x^3+1)^5$. Bạn nhìn vào nó một lúc. Sau đó bạn xem nó như là u^5. Hàm bên trong là $u = x^3+1$. Bằng cách thực hành phép phân tích này (đây là phép ngược với phép hợp) chúng ta dễ dàng nhận thấy:

$\cos(2x+1)$ là $\cos u$ $\qquad$ $\sqrt{1+\sin t}$ là $\sqrt{u}$ $\qquad$ $x\sin x$ là ... (quy tắc tích!)

Trong các tính toán, cách cẩn thận nhất là viết ra tất cả các hàm:

$$z = \cos u \qquad u = 2x+1 \qquad dz/dx = (-\sin u)(2) = -2\sin(2x+1).$$

Cách nhanh chóng là giữ trong tâm trí của bạn câu "đạo hàm của hàm bên trong"". Hệ số góc của $\cos(2x+1)$ là $-\sin(2x+1)$, *lần* -2 *từ quy tắc xích.* Đạo hàm của $2x+1$ được nhớ đến—mà không có sự hiện diện của z hay u hay f hay g.

Ví dụ 4.1.7. $\sin\sqrt{1-x}$ là một xích của $z = \sin y$, $y = \sqrt{u}, u = 1-x$ (*ba hàm*). Với xích gồm ba hàm đó, bạn sẽ nắm được quy tắc xích:

$$\text{Đạo hàm của } \sin\sqrt{1-x} \text{ là } (\cos\sqrt{1-x})\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(-1).$$

Đây là $(dz/dy)(dy/du)(du/dx)$. Hãy đánh giá chúng ở đúng nơi y, u, x.

Cuối cùng là câu hỏi liên quan đến các *đạo hàm cấp hai.* Quy tắc xích cho dz/dx dưới dạng một tích, nên d^2z/dx^2 cần đến quy tắc tích:

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{u}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v} \text{ kéo theo } \frac{d^2z}{dx^2} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{u}\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{v'} + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right)}_{u'}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v'}. \tag{4.1.7}$$

Số hạng sau cùng cũng cần đến quy tắc xích một lần nữa. Nó trở thành d^2z/dy^2 lần $(dy/dx)^2$.

Ví dụ 4.1.8. Đạo hàm của $\sin x^2$ là $2x\cos x^2$. Sau đó quy tắc xích đưa ra $d^2z/dx^2 = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$. Trong trường hợp này $y'' = 2$ và $(y')^2 = 4x^2$.

BÀI TẬP 4.1

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

$z = f(g(x))$ đến từ $z = f(y)$ và $y =$ __a__. Tại $x = 2$, xích $(x^2-1)^3$ bằng __b__. Hàm bên trong của nó là $y =$ __c__, hàm bên ngoài của nó là $z =$ __d__. Khi đó dz/dx bằng __e__. Thừa số thứ nhất được đánh giá tại $y =$ __f__ (không phải tại $y = x$). Đối với $z = \sin(x^4-1)$, đạo hàm là __g__.

Xích ba $z = \cos(x+1)^2$ có một phép tịnh tiến và một __h__ và một cosine. Khi đó $dz/dx =$ __i__.

Chứng minh của quy tắc xích bắt đầu với $\Delta z/\Delta x =$ (__j__)(__k__) và kết thúc với __l__. Hãy thay đổi các chữ cái, $y = \cos u(x)$ có $dy/dx =$ __m__. Quy tắc lũy thừa đối với $y = [u(x)]^n$ là quy tắc xích $dy/dx =$ __n__. Hệ số góc của $5g(x)$ là __o__ và hệ số góc của $g(5x)$ là __p__. Khi $f =$ cosine và $g =$ sine và $x = 0$, các số $f(g(x))$ và $g(f(x))$ và $f(x)g(x)$ là __q__.

Trong 4.1.1-4.1.10, nhận diện $f(y)$ và $g(x)$. Từ các đạo hàm của chún tìm $\frac{dz}{dx}$.

4.1.1. $z = (x^2-3)^3$

4.1.2. $z = (x^3-3)^2$

4.1.3. $z = \cos(x^3)$

4.1.4. $z = \tan 2x$

4.1.5. $z = \sqrt{\sin x}$

4.1.6. $z = \sin\sqrt{x}$

4.1.7. $z = \tan(1/x) + 1/\tan x$

4.1.8. $z = \sin(\cos x)$

4.1.9. $z = \cos(x^2+x+1)$

4.1.10. $z = \sqrt{x^2}$

Trong 4.1.11-4.1.16, viết ra dz/dx. Đừng viết ra f và g.

4.1.11. $z = \sin(17x)$

4.1.12. $z = \tan(x+1)$

4.1.13. $z = \cos(\cos x)$

4.1.14. $z = (x^2)^{3/2}$

4.1.15. $z = x^2\sin x$

4.1.16. $z = (9x+4)^{3/2}$

Các bài toán 4.1.17-4.1.22 liên quan đến ba hàm số $z(y)$, $y(u)$, và $u(x)$. Tìm dz/dx từ $(dz/dy)(dy/du)(du/dx)$.

4.1.17. $z = \sin\sqrt{x+1}$

4.1.18. $z = \sqrt{\sin x + 1}$

4.1.19. $z = \sqrt{1+\sin x}$

4.1.20. $z = \sin(\sqrt{x}+1)$

4.1.21. $z = \sin(1/\sin x)$

4.1.22. $z = (\sin x^2)^2$

Trong 4.1.23-4.1.26, tìm dz/dx bằng quy tắc xích và cũng bằng cách viết lại z.

4.1.23. $z = ((x^2)^2)^2$

4.1.24. $z = (3x)^3$

4.1.25. $z = (x+1)^2 + \sin(x+\pi)$

4.1.26. $z = \sqrt{1-\cos^2 x}$

4.1.27. Nếu $f(x) = x^2+1$, $f(f(x))$ là gì? Nếu $U(x)$ là hàm bậc thang đơn vị (từ 0 tới 1 tại $x=0$) vẽ đồ thị của $\sin U(x)$ và $U(\sin x)$. Nếu $R(x)$ là *hàm dốc* $\frac{1}{2}(x+|x|)$, vẽ đồ thị của $R(x)$ và $R(\sin x)$.

4.1.28 (Được khuyến nghị). Nếu $g(x) = x^3$, tìm $f(y)$ sao cho $f(g(x)) = x^3+1$. Sau đó tìm $h(y)$ sao cho $h(g(x)) = x$. Sau đó tìm $k(y)$ sao cho $k(g(x)) = 1$.

4.1.29. Nếu $f(y) = y-2$, tìm $g(x)$ sao cho $f(g(x)) = x$. Sau đó tìm $h(x)$ sao cho $f(h(x)) = x^2$. Sau đó tìm $k(x)$ sao cho $f(k(x)) = 1$.

4.1.30. Tìm hai cặp $f(y)$, $g(x)$ khác nhau sao cho $f(g(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

4.1.31. Đạo hàm của $f(f(x))$ là ________. Nó có phải là $(df/dx)^2$ hay không? Kiểm tra công thức của bạn trên $f(x) = 1/x$.

4.1.32. Nếu $f(3) = 3$, $g(3) = 5$, $f'(3) = 2$, và $g'(3) = 4$, tìm đạo hàm tại $x = 3$ nếu có thể đối với

(a) $f(x)g(x)$
(b) $f(g(x))$
(c) $g(f(x))$
(d) $f(f(x))$

4.1.33. Đối với $F(x) = \frac{1}{2}x + 8$, chỉ ra cách phép lặp đưa ra $F(F(x)) = \frac{1}{4}x + 12$. Tìm $F(F(F(x)))$—còn được gọi là $F^{(3)}(x)$. Đạo hàm của $F^{(4)}(x)$ là ________.

4.1.34. Trong Bài toán 4.1.33, giới hạn của $F^{(n)}(x)$ là một hằng số $C =$ ________. Bắt đầu tại bất kỳ đâu (thử $x = 0$) các phép lặp $x_{n+1} = F(x_n)$ hội tụ tới C.

4.1.35. Giả sử $g(x) = 3x+1$ và $f(y) = \frac{1}{3}(y-1)$. Khi đó $f(g(x)) =$ ________ và $g(f(y)) =$ ________. Chúng là các *hàm ngược*.

4.1.36. Giả sử $g(x)$ là liên tục tại $x = 4$ với $g(4) = 7$. Giả sử $f(y)$ là liên tục tại $y = 7$ với $f(7) = 9$. Khi đó $f(g(x))$ liên tục tại $x = 4$ và $f(g(4)) = 9$.

Chứng minh. Với ϵ được cho trước. Bởi vì ________ là liên tục, có một δ sao cho $|f(g(x))-9| < \epsilon$ bất kỳ khi nào $|g(x)-7| < \delta$. Khi đó bởi vì ________ liên tục, có một θ sao cho $|g(x)-7| < \delta$ bất kỳ khi nào $|x-4| < \theta$. Kết luận: *Nếu* $|x-4| < \theta$ *khi đó* ________. Điều này cho thấy rằng $f(g(x))$ tiến tới $f(g(4))$.

□

4.1.37. Chỉ có sáu hàm số có thể được xây dựng bởi phép hợp (theo bất kỳ thứ tự nào) của $g(x) = 1-x$ và $f(x) = 1/x$. Bắt đầu với g và f, tìm bốn hàm số còn lại.

4.1.38. Nếu $g(x) = 1-x$ khi đó $g(g(x)) = 1-(1-x) = x$. Nếu $g(x) = 1/x$ khi đó $g(g(x)) = 1/(1/x) = x$. Vẽ các đồ thị của các hàm g đó và giải thích từ các đồ thị tại sao $g(g(x)) = x$. Tìm hai hàm g nữa với tính chất đặc biệt này.

4.1.39. Xây dựng các hàm số sao cho $f(g(x))$ luôn bằng không, nhưng $f(y)$ không luôn bằng không.

4.1.40. **Đúng hay sai**

(a) Nếu $f(x) = f(-x)$ khi đó $f'(x) = f'(-x)$.

(b) Đạo hàm của hàm đồng nhất là 0.

(c) Đạo hàm của $f(1/x)$ là $-1/(f(x))^2$.

(d) Đạo hàm của $f(1+x)$ là $f'(1+x)$.

(e) Đạo hàm cấp hai của $f(g(x))$ là $f''(g(x))g''(x)$.

4.1.41. Trên cùng một đồ thị vẽ parabola $y = x^2$ và đường cong $z = \sin y$ (giữ y hướng lên, với x và z nằm ngang). Bắt đầu tại $x = 3$ tìm đường đến $z = \sin 9$.

4.1.42. Trên cùng một đồ thị vẽ $y = \sin x$ và $z = y^2$ (y hướng lên). Bắt đầu tại $x = \pi/4$, tìm $z = (\sin x)^2$ trên đồ thị?

4.1.43. Tìm đạo hàm cấp hai của

(a) $\sin(x^2+1)$

(b) $\sqrt{x^2-1}$

(c) $\cos\sqrt{x}$

4.1.44. Giải thích tại sao $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = \left(\dfrac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ trong phuong trình 4.1.7. Kiểm tra điều này khi $z = y^2$, $y = x^3$.

Bài thực hành cuối cùng với quy tắc xích và các quy tắc khác (và các chữ cái khác!). Tìm đạo hàm theo x hoặc theo t của z hoặc của y.

4.1.45. $z = f(u(t))$

4.1.46. $z = u^3$, $u = x^3$

4.1.47. $y = \sin u(t)\cos u(t)$

4.1.48. $y = \sqrt{u(t)}$

4.1.49. $y = x^2u(x)$

4.1.50. $y = f(x^2) + (f(x))^2$

4.1.51. $z = \sqrt{1-u}$, $u = \sqrt{1-x}$

4.1.52. $z = 1/u^n(t)$

4.1.53. $z = f(u)$, $u = v^2$, $v = \sqrt{t}$

4.1.54. $y = u$, $u = x$, $x = 1/t$

4.1.55. Nếu $f = x^4$ và $g = x^3$ khi đó $f' = 4x^3$ và $g' = 3x^2$. Quy tắc xích nhân các đạo hàm lại với nhau để nhận được $12x^5$. Nhưng $f(g(x)) = x^{12}$ và đạo hàm của nó không phải là $12x^5$. Lỗ hổng ở dâu?

4.1.56. Đạo hàm của $y = \sin(\sin x)$ là $dy/dx =$ ________

$\cos(\cos x)$

$\sin(\cos x)\cos x$

$\cos(\sin x)\cos x$

$\cos(\cos x)\cos x$

4.1.57. (a) Một quyển sách có 400 từ trên mỗi trang. Có 9 trang trên mỗi mục. Vậy có ________ từ trên mỗi mục.

(b) Bạn đọc được 200 từ trên mỗi phút. Vậy bạn đọc được ________ trang trên mỗi phút. Hỏi bạn mất bao nhiêu phút để đọc xong mỗi mục?

4.1.58. (a) Bạn đi bộ trong một con tàu tại tốc độ 3 dặm trên mỗi giờ? Tàu di chuyển với tốc độ 50 dặm trên mỗi giờ? Tốc độ so với mặt đất của bạn là ________ dặm trên mỗi giờ?

(b) Bạn đi bộ trong một con tàu tại tốc độ 3 dặm trên mỗi giờ. Con tàu được chiếu trên TV (1 dặm tàu chạy được = 20 inch trên màn hình TV). Tốc độ của bạn dọc theo theo màn hình là ________ inch trên mỗi giờ?

4.1.59. Coke có giá 1/3 dollar trên mỗi chai. Người mua nhận được ________ chai trên mỗi dollar. Nếu $dy/dx = 1/3$ khi đó $dx/dy =$ ________.

4.1.60 (Máy vi tính). Vẽ đồ thị $F(x) = \sin x$ và $G(x) = \sin(\sin x)$—không có quá nhiều sự khác biệt. Làm tương tự đối với $F'(x)$ và $G'(x)$. Sau đó vẽ đồ thị $F''(x)$ và $G''(x)$ để xem sự khác biệt xuất hiện ở đâu.

4.2. Phép lấy Vi phân Ẩn và các Tỷ số Liên quan

Chúng ta bắt đầu với phương trình $xy = 2$ và $y^5 + y = 3$. Khi x thay đổi, những y này cũng sẽ thay đổi theo—để giữ (x, y) vẫn nằm trên đường cong. ***Chúng ta muốn biết dy/dx tại một điểm điển hình***. Đối với $xy = 2$, không có vấn đề gì, nhưng hệ số góc của $y^5 + xy = 3$ đòi hỏi một ý tưởng mới.

Trong trường hợp thứ nhất, giải đối với $y = 2/x$ và lấy đạo hàm của nó: $dy/dx = -2/x^2$. Đường cong này là một hyperbola. Tại $x = 2$ hệ số góc là $-2/4 = -1/2$.

Vấn đề với $y^5 + xy = 3$ đó là không thể giải đối với y. Galois dã chứng minh rằng không thể có một công thức nghiệm đối với các phương trình bậc năm.[2] ***Hàm $y(x)$ không thể được cho một cách tường minh***. Tất cả những gì chúng ta có là một sự xác định *ẩn* của y, dưới dạng là một nghiệm cho $y^5 + xy = 3$. Điểm $x = 2, y = 1$ thoả mãn phương trình và nằm trên đường cong, nhưng làm thế nào để tìm dy/dx ?

Mục này trả lời câu hỏi đó. Đó là một tình huống thường xảy ra. Các phương trình như $\sin y + \sin x = 1$ hoặc $y \sin y = x$ (thậm chí có thể là $\sin y = x$) là khó hoặc không thể được giải một cách trực tiếp đối với y. Tuy nhiên chúng ta có thể tìm dy/dx tại bất kỳ điểm nào?.

Lối thoát chính là ***phép lấy vi phân ẩn***. Làm việc với phương trình ở dạng nó được cho. ***Tìm các đạo hàm theo x của mỗi số hạng trong*** $y^5 + xy = 3$. Bao gồm cả số hạng hằng 3, mà có đạo hàm bằng không.

Ví dụ 4.2.1. Dùng quy tắc luỹ thừa đối với y^5 và quy tắc tích đối với xy để thu được

$$5y^4 \frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{4.2.1}$$

Bây giờ thế điểm cụ thể $x = 2$ và $y = 1$, và giải đối với dy/dx:

$$5\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \text{ suy ra } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{7}. \tag{4.2.2}$$

Đây là phép lấy vi phân ẩn (**ID**)[3], và bản thấy được ý tưởng: Bỏ vào luôn dy/dx từ quy tắc xích, ngay cả khi y không được biết một cách tường minh dưới dạng là một hàm số x.

Ví dụ 4.2.2. $\sin y + \sin x = 1$ kéo theo $y\dfrac{dy}{dx} + \cos x = 0$.

Ví dụ 4.2.3. $y \sin y = x$ kéo theo $y \cos y\dfrac{dy}{dx} + \sin y\dfrac{dy}{dx} = 1$.

Việc biết được hệ số góc sẽ giúp việc vé đường cong dễ dàng hơn. Chúng ta vẫn cần đến các điểm (x, y) mà thoả mãn phương trình. Đôi khi chúng ta có thể giải đối với x. Việc chia $y^5 + xy = 3$ bởi y đưa ra $x = 3/y - y^4$. Bây giờ đạo hàm (đạo hàm theo x!) là

$$1 = \Big(-\frac{3}{y^2} - 4y^3\Big) = -7\frac{dy}{dx} \text{ tại } y = 1. \tag{4.2.3}$$

Một lần nữa $dy/dx = -1/7$. Tất cả các ví dụ này đều xác nhận mục đích chính của mục này:

Phát biểu (Phép lấy vi phân ẩn). Một phương trình $F(x, y) = 0$ có thể được lấy vi phân một cách trực tiếp theo quy tắc xích, không cần giải đối với y theo x.

---

[2]Điều này đã được viết ra trước khi ông đi đến cuộc đấu súng tay đôi nổi tiếng của đời mình và bỏ mạng tại đó. Các phương trình bậc bốn có công thức nghiệm, nhưng thực tế không bao giờ được dùng đến.

[3]Nd: Phép lấy vi phân Ẩn (tiếng Anh: Implicit Differentiation, viết tắt: ID).

Ví dụ $xy = 2$, được thực hiện theo cách ẩn, đưa ra $x\,dy/dx + y = 0$. Hệ số góc $dy/dx = -y/x$. Điều này phù hợp với hệ số góc tường minh $-2/x^2$.

ID được giải thích tốt hơn bằng các ví dụ chứ không phải bằng lý thuyết suông (có thể thứ gì cũng vậy). Lý thuyết cần thiết ở đây có thể được rút ngắn thành một ý tưởng: "***Hãy tiến lên và lấy vi phân đi***."

Ví dụ 4.2.4. Tìm hướng tiếp tuyến (hệ số góc của tiếp tuyến) cho đường tròn $x^2 + y^2 = 25$.
Chúng ta có thể giải đối với $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, hoặc thao tác trực tiếp trên $x^2 + y^2 = 25$:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\cdot \tag{4.2.4}$$

So sánh với đường thẳng chứa bán kính, mà có hệ số góc y/x. Bán kính đi ngang x và đi thẳng lên y. Tiếp tuyến di ngang $-y$ và lên x. Các hệ số góc này nhân với nhau cho $(-x/y)(y/x) = -1$.

Để nhấn mạnh vi phân ẩn, chúng ta hãy đến với *đạo hàm cấp hai*. Đỉnh của đường tròn lõm xuống, nên d^2y/dx^2 là âm. Dùng quy tắc thương đối với $-x/y$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ nên } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\frac{dx}{dx} - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}. \tag{4.2.5}$$

CÁC TỶ SỐ CÓ LIÊN QUAN VỚI NHAU

Có một nhóm các bài toán mà chưa bao giờ tìm được một chỗ đứng hoàn hảo trong bộ môn giải tích. Nhưng chúng lại tìm được chỗ đứng khá phù hợp ở đây—dưới dạng các ứng dụng của quy tắc xích. Bài toán được đặt ra là đi tính df/dt, nhưng điều kỳ lạ là *chúng ta được cho một đạo hàm dg/dt khác*. Để tìm df/dt chúng ta cần một hệ thức giữa f và g.

Quy tắc xích là $df/dt = (df/dg)(dg/dt)$. Ở đây biến số là t bởi vì chữ cái này được dùng khá phổ biến trong các ứng dụng có liên quan. Từ tốc độ thay đổi của g chúng ta tìm *tốc độ thay đổi của f*. Đây là bài toán về ***các tỷ số có liên quan với nhau***, và các ví dụ sau đây sẽ làm sáng tỏ điều này.

Ví dụ 4.2.5. Bán kính của một đường tròn có tốc độ tăng trưởng $dr/dt = 7$. Chu vi tăng nhanh như thế nào? Nhớ rằng $C = 2\pi r$ (hệ thức này liên hệ C với r).

Lời giải.

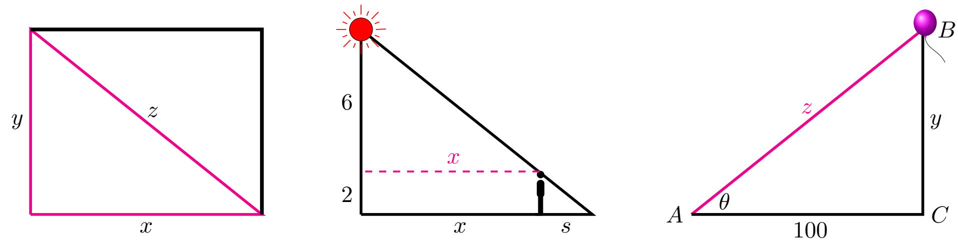
$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dr}\frac{dr}{dt} = (2\pi)(7) = 14\pi.$$

Biểu thức này khá là cơ bản, nhưng những hàm ý của nó thật tuyệt vời. Giả sử bạn muốn đặt một sợi dây quanh trái đất sao cho bất kỳ người nào cao 7 feet đều có thể đi bộ phía dưới sợi dây này. Nếu khoảng cách là 24.000 dặm, hỏi sợi dây phải dài thêm bao nhiêu? Đáp án: chỉ 14π feet.

Một bài toán thực tế hơn, nếu hai đường chạy trên một đường đua hình tròn cách nhau 5 feet, điểm xuất phát của đường ngoài vượt lên đường đua phía trong bao xa? Chỉ 10 feet. Nếu tốc độ của bạn ở đường chạy phía trong là 55 và tốc độ của một chiếc xe khác ở đường chạy phía ngoài là 56, người thắng là ai? Xem Bài toán 4.2.14.

Các ví dụ 4.2.6-4.2.8 được trích từ Kỳ thi Xếp loại Nâng cao[4] năm 1988 (bản quyền 1989 bởi Hội đồng Đánh giá Nhập học vào Đại học[5]). Những câu hỏi của họ đều được chuẩn bị một cách cẩn thận.

[4]Nd: Kỳ thi Xếp loại Nâng cao (tiếng Anh: Advanced Placement Exams).
[5]Nd: Hội đồng Đánh giá Nhập học vào Đại học (tiếng Anh: College Entrance Examination Board).



HÌNH 4.2.1. Hình vuông đối với Ví dụ 4.2.6, bóng hình đối với Ví dụ 4.2.7, bóng bay đối với Ví dụ 4.2.8.

VÍ DỤ 4.2.6. Các cạnh của hình chữ nhật tăng theo cách sao cho $dz/dt = 1$ và $dx/dt = 3\,dy/dt$. Tại thời điểm khi $x = 4$ và $y = 3$, giá trị của dx/dt là gì?

LỜI GIẢI. Hệ thức mấu chốt là $x^2 + y^2 = z^2$. Lấy đạo hàm của nó (*phép lấy vi phân ẩn*):

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} \text{ suy ra } 8\frac{dx}{dt} + 6\frac{dy}{dt} = 10$$

Chúng ta đã dùng tất cả thông tin, bao gồm $z = 5$, ngoại trừ $dx/dt = 3\,dy/dt$. Số hạng $6\,dy/dt$ bằng $2\,dx/dt$, nên chúng ta có $10\,dx/dt = 10$. Đáp án: $dx/dt = 1$.

VÍ DỤ 4.2.7. Một người cao 2 meter trực tiếp đi bộ khỏi một cây đèn đường cao 8 meter. Nếu bóng hình của người đó dài ra tại tốc độ 4/9 meter trên mỗi giây, hỏi tốc độ người đó đi bộ tính theo meter trên mỗi giây?

LỜI GIẢI. Vẽ một cái hình đi! Bạn phải thiết lập một hệ thức liên hệ chiều dài của bóng hình s với khoảng cách x tới đèn đường. Bài toán đưa ra $ds/dt = 4/9$ và yêu cầu tìm dx/dt:

$$\text{Theo các tam giác đồng dạng } \frac{x}{6} = \frac{s}{2} \text{ nên } \frac{dx}{dt} = \frac{6}{2}\frac{ds}{dt} = (3)(\frac{4}{9}) = \frac{4}{3}.$$

LƯU Ý. Bài toán này khá là khó. Tôi đã vẽ ba cái hình trước khi liên hệ được x và s. Điều thú vị là *chúng ta không bao giờ biết được x hay s hay góc giữa chúng.*

VÍ DỤ 4.2.8. Một người đứng tại điểm A đang quan sát quả bóng bay B đang bay lên từ điểm C (*Hình đã được cho*). Quả bóng đang bay lên tại một tốc độ không đổi là 3 meter trên mỗi giây (*điều này nghĩa là $dy/dt = 3$*) và người quan sát cách điểm C 100 meter?

(a) Tìm tốc độ thay đổi trong z tại thời điểm khi $y = 50$. (*Họ muốn dz/dt.*)

$$z^2 = y^2 + 100^2 \Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

$$z = \sqrt{50^2 + 100^2} = 50\sqrt{5} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 3}{2 \cdot 50\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

(b) Tìm tắc độ thay đổi trong diện tích của tam giác vuông BCA khi $y = 50$.

$$A = \frac{1}{2}(100)(y) \qquad \frac{dA}{dt} = 50\frac{dy}{dt} = 50 \cdot 3 = 150.$$

(b) Tìm tắc độ thay đổi trong θ khi $y = 50$. (*Họ cần $d\theta/dt$.*)

$$y = 50 \Rightarrow \cos\theta = \frac{100}{50\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{100} \Rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\frac{3}{100} = \frac{3}{105}$$

Trong tất cả các bài toán trên trước tiên tôi viết ra một hệ thức từ hình vẽ. Sau đó tôi lấy đạo hàm nó. Sau đó tôi thế thông tin đã được biết vào. (Phép thế phải được thực hiên *sau khi* lấy đạo hàm của $\tan\theta = y/100$. Nếu chúng ta thế $y = 50$ quá sớm, đạo hàm của $50/100$ không có ích gì.)

"Các ứng viên tham dự Kỳ thi Xếp loại Nâng cao được khuyên nên thể hiện các bước giải để giảm thiểu rủi ro không nhận được bất kỳ điểm nào do không rút ra được đáp án đúng sau cùng." 50% giải được Ví dụ 4.2.6, và 21% giải được Ví dụ 4.2.7. Từ $12,000$ ứng viên, điểm trung bình của Ví dụ 4.2.8 (từ khảo sát ý kiến phản hồi tự do) là 6.1 trên thang điểm 9.

Ví dụ 4.2.9. A là một ngọn hải đăng và BC là đường bờ biển (hình minh họa tương tự như trong Ví dụ 4.2.8). Ngọn đèn tại A có chu kỳ một giây ($d\theta/dt = 2\pi$ radians/giây). Hỏi điểm tiếp nhận B di chuyển dọc theo bờ biển nhanh như thế nào?

Lời giải. Hình cho thấy$y = 100\tan\theta$. Tốc độ dy/dt là $100\sec^2 d\theta/dt$. Đây là $200\pi\sec^2\theta$, nên B tăng nhanh khi $\sec\theta$ tăng.

Nghịch lý. Khi θ tiến tới $90°$, $\sec\theta$ tiến tới vô cùng. Vì vậy dy/dt cũng thế. B ***di chuyển nhanh hơn ngọn đèn***! Điều này mâu thuẫn với thuyết tương đối của Einstein. Nghịch lý này được giải quyết (đấy là tôi hy vọng như vậy) trong Bài toàn 18.

Nếu bạn đi bộ quanh một ngọn đèn tại A, bóng hình của bạn tại B dường như di nhanh hơn ngọn đèn. Cùng bài toán. Tốc độ này là không thể—thứ gì đó đã bị bỏ quên.

Nghịch lý nhỏ hơn (không phá hủy thuyết tương đối). Hình cho thấy $y = z\sin\theta$. Rõ ràng $dy/dt = (dz/dt)\sin\theta$. ***Điều này hoàn toàn sai***. Không chỉ điều này là sai, mà điều ngược lại là đúng: $dz/dt = (dy/dt)\sin\theta$. Nếu bạn có thể giải thích điều này (Bài toán 15), khi đó **ID** và các tỷ lệ có liên quan với nhau không có gì kinh khủng cả.

BÀI TẬP 4.2

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Đối với $x^3 + y^3 = 2$ đạo hàm dy/dx được suy ra từ đạo hàm __a__. Chúng ta không phải giải đối với __b__. Lấy đạo hàm theo từng số hạng thu được đạo hàm là $3x^2 +$ __c__ $= 0$. Việc giải ra đối với dy/dx đưa ra __d__. Tại $x = y = 1$ hệ số góc này là __e__. Phương trình tiếp tuyến là $y - 1 =$ __f__.

Một ví dụ thứ hai là $y^2 = x$. Đạo hàm theo x của phương trình này là __g__. Do đó $dy/dx =$ __h__. Thay y bởi $\sqrt{x}$, đây là $dy/dx =$ __i__.

Trong các tỷ số có liên quan với nhau, chúng ta được cho dg/dt và chúng ta muốn df/dt. Chúng ta cần một hệ thức giữa f và __j__. Nếu $f = g^2$, khi đó $(df/dt) =$ __k__ (dg/dt). Nếu $f^2 + g^2 = 1$, khi đó $df/dt =$ __l__. Nếu các cạnh của một hình lập phương tăng với tốc độ $ds/dt = 2$, khi đó thể tích của nó tăng với tốc độ $dV/dt =$ __m__. Để tìm một số (8 là sai), bạn cũng cần biết __n__.

Sử dụng phép lấy đạo hàm ẩn, tìm dy/dx trong 4.2.1-4.2.10.

4.2.1. $y^n + x^n = 1$

4.2.2. $x^2y + y^2x = 1$

4.2.3. $(x - y)^2 = 4$

4.2.4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ tại $x = 4$

4.2.5. $x = F(y)$

4.2.6. $f(x) + F(y) = xy$

4.2.7. $x^2y = y^2x$

4.2.8. $x = \sin y$

4.2.9. $x = \tan y$

4.2.10. $y^n = x$ tại $x = 1$

4.2.11. Chứng tỏ rằng các hyperbola $xy = C$ vuông góc với các hyperbola $x^2 - y^2 = D$. (Vuông góc nghĩa là tích các hệ số góc bằng -1.)

4.2.12. Chứng tỏ rằng các đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 2$ và $x^2 + (y-2)^2 = 2$ tiếp xúc với nhau tại điểm $(1, 1)$.

4.2.13. Chiếc xe của bạn và một chiếc xe khác đang chạy trên hai đường chạy trên một đường đua hình tròn cách nhau 5 meter. Tại tốc độ 25 meter/giây, liệu chiếc xe của bạn cua nhanh hơn hay chậm hơn chiếc xe đang chạy trên đường đua phía bên ngoài tại tốc độ 26 meter/giây? Bán kính của bạn là (a) 50 meter (b) 100 meter.

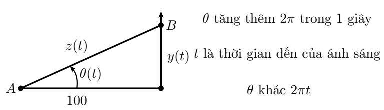
4.2.14. Phuong trình (4.2.4) là $2x + 2y\,dy/dx = 0$ (trên một đường tròn). Tìm d^2y/dx^2 trong phương trình (4.2.5) một cách trực tiếp bằng **ID**.

Các bài toán 4.2.15-4.2.18 giải quyết nghịch lý về ánh sáng trong Ví dụ 4.2.9.

4.2.15 (Nghịch lý nhỏ trước). Tam giác vuông có $z^2 = y^2 + 100^2$. Lấy đạo hàm theo t để chứng tỏ rằng $z' = y' \sin\theta$.

4.2.16 (Nghịch lý còn nhỏ hơn nữa). Khi B di chuyển lên trên đường thẳng, tại sao dy/dt lớn hơn dz/dt? Chắc chắn z lớn hơn y. Nhưng khi θ tăng, chúng trở thành ________.

4.2.17 ((Nhanh hơn ánh sáng). Đạo hàm của $y = 100\tan\theta$ trong Ví dụ 4.2.9 là $y' = 100\sec^2\theta\,\theta' = 200\pi\sec^2\theta$. Do đó y' vượt qua c (tốc độ ánh sáng) khi $\sec^2\theta$ vượt qua ________. Một tốc độ như vậy là không thể tồn tại—chúng ta quên mất rằng ánh sáng cần thời gian để đến được B.



4.2.18 (Giải thích bằng **ID**). Ánh sáng đi từ A đến B trong thời gian z/c, quãng đường trên tốc độ. Thời điểm đến của nó là $t = \theta/2\pi + z/c$ nên $\theta'/2\pi = 1 - z'/c$. Khi đó $z' = y'\sin\theta$ và $y' = 100\sec^2\theta\theta'$ (tất cả biểu thức này đều là **ID**) suy ra

$$y' = 200\pi c/(c\cos^2\theta + 200\pi\sin\theta)$$

Khi θ tiến tới $\pi/2$, tốc độ này tiến tới ________.

Lưu ý. y' vẫn vượt qua c đối với góc âm nào đó. Hãy để đó cho Einstein giải thích. Xem *Tạp chí Toán Cao đẳng*[6] năm 1985 trang 186, và *Tạp chí Khoa học Mỹ*[7] năm 1960, "Những thứ đi nhanh hơn ánh sáng."[8]

4.2.19. Nếu một máy bay bay theo đường cong $y = f(x)$, và tốc độ đối với mặt đất của nó là $dx/dt = 500\,\text{mph}$, máy bay bay lên nhanh như thế nào? Máy bay bay nhanh như thế nào?

4.2.20. Tại sao chúng ta không thể lấy vi phân $x = 7$ và suy ra $1 = 0$?

Các bài toán 4.2.21-4.2.29 là những ví dụ của các hệ thức có liên quan với nhau.

4.2.21 (Bài toán Giải tích Cổ điển). Chân của một cái thang dài 10 feet đang trượt ra xa khỏi bức tường tại tốc độ $dx/dt = 2$ feet trên mỗi giây. Đỉnh thang tụt xuống đất nhanh như thế nào? nào? Vẽ tam giác vuông để tìm dy/dt khi độ cao y là (a) 6 feet (b) 5 feet (c) không.

4.2.22. Đỉnh của một cây thang dài 10 feet trong bài toán trên có thể di chuyển nhanh hơn ánh sáng. Hỏi độ cao y mà tại đó $dy/dt = -c$?

4.2.23. Lượng nước ngọt trong một lon Coke xuống nhanh như thế nào nếu bạn uống một inch khối trên mỗi giây? Lon là một hình trụ có bán kính 2 inches—trước tiên hãy viết ra công thức tính thể tích.

4.2.24. Một máy bay phản lực bay tại độ cao cách mặt đất 8 dặm và tại tốc độ 560 dặm trên mỗi giờ? Nó tiến tới bạn nhanh như thế nào khi (a) nó cách bạn 16 dặm; (b) bóng của nó cách bạn 8 dặm (mặt trời ngay trên đỉnh đầu); (c) máy bay cách bạn đúng 8 dặm (ngay phía trên bạn)?

4.2.25. Bắt đầu từ một tam giác vuông 3-4-5, các cạnh vuông tăng với tốc độ 2 meter trên mỗi giây nhưng góc giữa chúng giảm với tốc độ 1 radian trên mỗi giây. Diện tích tăng hay giảm nhanh như thế nào?

[6]Nd: Tạp chí Toán Cao đẳng (tiếng Anh: College Math Journal).
[7]Nd: Tạp chí Khoa học Mỹ (tiếng Anh: Scientific American)
[8]Nd: Bài báo "Những thứ đi nhanh hơn ánh sáng" (tiếng Anh: Things that go faster than light) được xuất bản trên Tập 203, Số 1, tháng 7 năm 1960 của Tạp chí Khoa học Mỹ.

4.2.26. Một cầu thủ ở vị trí bắt bóng trong môn bóng bầu dục Mỹ đang đứng tại $x = 4$, $y = 8t$. Quả bóng được ném lúc $t = 3$ tại $x = c(t-3)$, $y = 10c(t-3)$.

(a) Chọn c để cầu thủ ở vị trí bắt bóng bắt được quả bóng

*(b) Tại thời điểm đó khoảng cách D giữa quả bóng và người cầu thủ đó thay đổi với tốc độ nào?

4.2.27. Một tên trộm cách bạn 10 meter theo đường chim bay (đứng phía trước bạn 8 meter và cách nhau một con đường rộng 6 meter). Tên trộm chạy dọc theo lề bên kia tại tốc độ 7 meter/giây, bạn chạy tại tốc độ 9 meter/giây. Hỏi tốc độ thay đổi trong khoảng cách giữa bạn và tên trộm nếu (a) bạn đi dọc theo phía lề đường của mình để bám theo tên trộm; (b) bạn chạy thẳng về phía tên trộm; (c) bạn đi dọc theo phía lề đường của mình để bỏ chạy?

4.2.28. Một hạt mưa hình cầu bốc hơi tại tốc độ bằng hai lần diện tích bề mặt của nó. Tìm dr/dt.

4.2.29. Bắt đầu từ $P = V = 5$ và duy trì $PV = T$, tìm dV/dt nết $dP/dt = 2$ và $dT/dt = 3$.

4.2.30. (a) Trục khuỷu[9] AB quay hai vòng trên mỗi giây nên $d\theta/dt =$ ________.

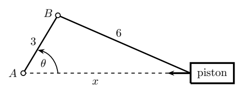
(b) Lấy vi phân định hàm định lý cosine $6^2 = 3^2 + x^2 - 2(3x\cos\theta)$ để tìm được tốc độ piston dx/dt khi $\theta = \pi/2$ và $\theta = \pi$.

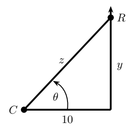
4.2.31. Một camera tại C có thể thay đổi góc quay để bám theo một tên lửa tại R.'

(a) Tìm hệ thức giữa dz/dt và dy/dt khi $y = 10$.

(b) Tìm hệ thức giữa $d\theta/dt$ và dy/dt dựa trên $y = 10\tan\theta$.

(c) Tìm hệ thức giữa $d^2\theta/dt^2$ và d^2y/dt^2 và dy/dt.





4.3. Hàm ngược và Đạo hàm của Nó

Có một trường hợp đặc biết đáng lưu ý về quy tắc xích. Nó xuất hiện khi $f(y)$ và $g(x)$ là các "***hàm ngược***." Ý tưởng đó được thể hiện bằng một phương trình rất ngắn và có ảnh hưởng rất lớn: $f[g(x)] = x$. Sau đây là lời giải thích cho nhận định này.

Hàm ngược: Bắt đầu với bất kỳ đầu vào nào, chẳng hạn $x = 5$. *Tính* $y = g(x)$, chẳng hạn $y = 3$. Sau đó tính $f(y)$, và *đáp án phải là* 5. Một hàm số sẽ thực hiện một số thao tác theo một thứ tự nào đó, hàm ngược của nó sẽ đảo ngược quá trình đó. Nếu $g(5) = 3$, khi đó $f(3) = 5$. ***Hàm ngược*** f ***nhận đầu ra*** y ***làm đầu vào để thu được đầu vào*** x.

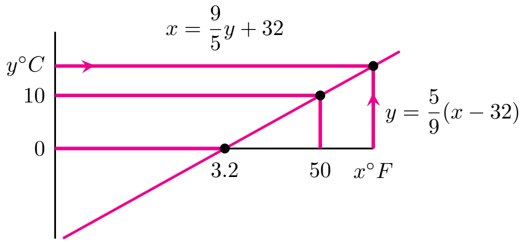
Ví dụ 4.3.1. $g(x) = x - 2$ và $f(y) = y + 2$ là các hàm ngược của nhau. Bắt đầu với $x = 5$, hàm g trừ 2. Thu được $y = 3$. Sau đó hàm f cộng 2. *Thu lại được* $x = 5$. Nói một cách trực tiếp: ***Hàm ngược của*** $y = x - 2$ ***là*** $x = y + 2$.

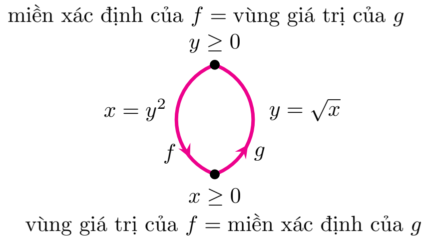
Ví dụ 4.3.2. $y = \dfrac{5}{9}(x - 32)$ và $x = f(y) = \dfrac{9}{5}(y + 32)$ là các hàm ngược (để chuyển đổi giữa các đơn vị của nhiệt độ). Ở đây x là độ Fahrenheit và y là độ Cencius. Từ $x = 32$ (nhiệt độ đóng băng trong thang Fahrenheit) bạn thu được $y = 0$ (nhiệt độ đóng băng thang Cencius). Hàm ngược của nó nhận $y = 0$ để đưa ra $x = 32$. Hình 4.3.1 cho thấy khi $x = 50$°F khớp với $y = 10°C$.

Lưu ý rằng $\dfrac{5}{9}(x - 32)$ trừ 32 *đầu tiên.* Hàm ngược $\dfrac{9}{5}y + 32$ cộng 32 *sau cùng.* Tương tự g nhân bởi $\dfrac{5}{9}$ sau cùng trong khi f nhân bởi $\dfrac{9}{5}$ đầu tiên.

> ***Hàm ngược được viết là*** $f = g^{-1}$ ***và được phát âm là*** "g ngược." ***Nó không phải là*** $1/g(x)$.

[9]Nd: Trục khuỷu là một trục quay nối với các piston bởi các thanh truyền nhằm chuyển đổi chuyển động tịnh tiến của các piston thành chuyển đổng quay.





HÌNH 4.3.1. °F thành °C thành °F. Luôn là $g^{-1}(g(x)) = x$ và $g(g^{-1}(y)) = y$. Nếu $f = g^{-1}$ khi đó $g = f^{-1}$.

Nếu như cầu y là một hàm số của giá bán x, khi đó giá bàn là một hàm số của như cầu. Các hàm này là các hàm ngược của nhau. ***Các đạo hàm của chúng tuân theo một quy tắc cơ sở***: dy/dx ***lần*** dx/dy ***bằng*** 1. Trong Ví dụ 4.3.2, dy/dx là 5/9 và dx/dy là 9/5.

Có một điểm quan trọng khác. Việc bắt đầu với f và suy ra g, hay bắt đầu theo *thứ tự ngược lại* là không quan trọng. Nếu f cộng 2, sau đó g phải trừ 2. Xích $g[f(y)] = (y + 2) - 2 = y$. ***Nếu*** f ***là hàm ngược của*** g, ***khi đó*** g ***cũng là hàm ngược của*** f. Hệ thức là hoàn toàn đối xứng, và định nghĩa cũng vậy:

> ***Hàm ngược***: ***Nếu*** $y = g(x)$ ***khi đó*** $x = g^{-1}(y)$. ***Nếu*** $x = g^{-1}(y)$ ***khi đó*** $y = g(x)$.

Vòng trong Hình 4.3.1 đi từ x tới y trở lại x. Hàm hợp $g^{-1}[g(x)]$ là hàm "đồng nhất." Thay vì đưa ra một điểm z mới, hàm này đưa ra lại điểm x ban đầu. Điều này làm cho quy tắc xích trở nên đặc biệt dễ hơn—suy ra$(dy/dx)(dx/dy) = 1$.

VÍ DỤ 4.3.3. $y = g(x) = \sqrt{x}$ và $x = f(y) = y^2$ là các hàm ngược của nhai. Bắt đầu từ $x = 9$ chúng ta thu được $y = 3$. Hàm ngược của nó đưa ra $3^2 = 9$. Bình phương của $\sqrt{x}$ là $f(g(x)) = x$. Theo chiều ngược lại, căn bậc hai của y^2 là $g(f(y)) = y$.

CHÚ Ý. Ví dụ đó không cho phép x âm. Miền xác định của g—tập hợp gồm các số có căn bậc hai—được hạn chế với $x \geqslant 0$. Tập hợp này khớp với vùng giá trị của g^{-1}. Các đầu ra y^2 là không âm. Với *miền xác định của* g = *vùng giá trị của* f, phương trình $x = (\sqrt{x})^2$có thể tồn tại và là đúng. Các số không âm x là các đầu vào của g và là các đầu ra của g^{-1}.

Trong ví dụ này y cũng là không âm. Bạn có thể nghĩ rằng chúng ta có thể lấy bình phương bất kỳ thứ gì, nhưng y phải được trả lại dưới dạng là căn bậc hai của y^2. Vì vậy $y \geq 0$.

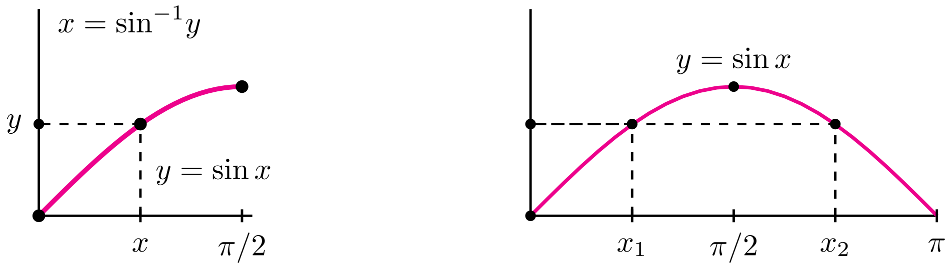
Tóm tắt: ***Miền xác định của một hàm số khớp với vùng giá trị của hàm ngược của nó*** . Các đầu vào cho g^{-1} là các đầu ra từ g. Các đầu vào cho g là các đầu ra từ g^{-1}.

> ***Nếu*** $g(x) = y$ ***khi đó việc giải phương trình đối với*** x ***đưa ra*** $x = g^{-1}(y)$:

$$\text{Nếu } y = 3x - 6 \qquad \text{khi đó } x = \frac{1}{3}(y + 6) \qquad (\text{đây là } g^{-1}(y))$$

$$\text{Nếu } y = x^3 + 1 \qquad \text{khi đó } x = \sqrt[3]{y - 1} \qquad (\text{đây là } g^{-1}(y))$$

Trong thực tế đó là cách để tính g^{-1}: *Giải* $g(x) = y$. Đây là lý do tại sao các hàm ngược là quan trọng. Mỗi lần chúng ta giải một phương trình chúng ta đang tính một giá trị của g^{-1}.



HÌNH 4.3.2. Hàm ngược tồn tại (một x đối với từng y). Không có hàm ngược (hai x đối với một y).

Không phải mọi phương trình đều có một nghiệm. ***Không phải mọi hàm số đều có hàm ngược***. Đối với từng y, phương trình $g(x) = y$ chỉ được cho phép sinh ra một x. Nghiệm đó là $x = g^{-1}(y)$. Nếu có một nghiệm thứ hai, khi đó g^{-1} sẽ không còn là một hàm số—bởi vì một hàm số không thể sinh ra hai x từ cùng một y.

VÍ DỤ 4.3.4. Phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ có nhiều hơn một nghiệm. Có rất nhiều góc có cùng sine. Trên khoảng $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y = \sin x$ không có hàm ngược. Hình 4.3.2 cho thấy cách hai x cho cùng một y.

Việc ngăn không cho x vượt qua $\dfrac{\pi}{2}$ cho phép sine có một hàm ngược, chúng ta viết $x = \sin^{-1} y$.

Hàm g không có hàm ngược nếu có hai điểm x_1 và x_2 đưa ra $g(x_1) = g(x_2)$. Nếu có, hàm ngược của nó khi nhận vào y sẽ phải xuất ra x_1 và x_2. Chỉ có một x đối với từng y.

> ***Để là khả nghịch trên một khoảng***, g ***phải tăng dần hoặc giảm dần***.

ĐẠO HÀM CỦA g^{-1}

Đã đến lúc dành cho bộ môn giải tích. Hãy tha thứ cho tôi vì chỉ đưa ra được ví dụ khiêm tốn sau.

VÍ DỤ 4.3.5 (Phép nhân thông thường). Hàm ngược của $y = g(x) = 3x$ là $x = f(y) = \dfrac{1}{3}y$.

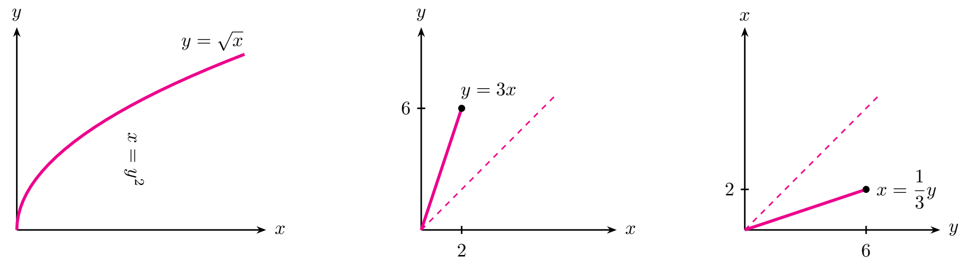
Ví dụ này là một minh chứng đặc biệt rõ ràng về quy tắc đối với đạo hàm của các hàm ngược của nhau: ***Các hệ số góc*** $dy/dx = 3$ ***và*** $dx/dy = \dfrac{1}{3}$ ***nhân với nhau đưa ra*** 1. Quy tắc này đúng đối với tất cả các hàm ngược của nhau, ngay cả khi các hệ số góc của chúng không là các hằng số. Nó là một ứng dụng quan trọng của quy tắc xích cho đạo hàm $f(g(x)) = x$.

PHÁT BIỂU 4.3.1 (Đạo hàm của hàm ngược). Từ $f(g(x)) = x$ quy tắc xích đưa ra $f'(g(x))g^{]\prime}(x) = 1$. Viết $y = g(x)$ và $x = f(y)$, quy tắc này dễ nhìn hơn:

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1 \text{ hay } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}. \tag{4.3.1}$$

Hệ số góc của $x = g^{-1}(y)$ lần hệ số góc của $y = g(x)$ bằng một.

Đây là quy tắc xích với một tính chất đặc biệt. *Vì $f(g(x)) = x$, nên đạo hàm của cả hai vế đều là* 1. Nếu chúng ta đã biết g' chúng ta bây giờ sẽ biết f'. Quy tắc đó



HÌNH 4.3.3. Các đồ thị của các hàm ngược của nhau: $x = \dfrac{1}{3}y$ là ảnh trong gương của $y = 3x$.

sẽ được kiểm chứng trong một ví dụ quen thuộc. Trong mục tiếp theo nó kéo theo các đạo hàm hoàn toàn mới.

VÍ DỤ 4.3.6. Hàm ngược của $y = x^3$ là $x = y^{1/3}$. Chúng ta có thể tìm dx/dy theo hai cách:

$$\text{trực tiếp: } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3} \qquad \text{gián tiếp: } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3y^{2/3}}.$$

Phương trình $(dx/dy)(dy/dx) = 1$ không phải là tích thông thường giữa hai phân thức nghịch đảo của nhau trong đại số, nhưng nó cũng đúng. Phương trình này là $(\Delta x/\Delta y)(\Delta y/\Delta x) = 1$ và chúng ta cho $\Delta x \to 0$.

Trước khi đến với các hà số mới, tôi muốn vẽ một số đồ thị. Hình 4.3.3 biểu diễn $y = \sqrt{x}$ và $y = 3x$. Điều đặc biệt đó là *đồ thị của hàm này là ảnh trong gương của hàm còn lại*. Hàm ngược của $y = \sqrt{x}$ là $x = y^2$. Cặp $x = 4$, $y = 2$ đều nằm trên cả hai đồ thị này. Đó là toàn bộ ý tưởng về các hàm ngược của nhau—nếu $2 = g(4)$ khi đó $4 = g^{-1}(2)$. Lưu ý rằng các đồ thị này tăng dần.

Vấn đề duy nhất là, nếu vẽ đồ thị của $y = g(x)$ và $x = g^{-1}(y)$ trên cùng một hệ tọa độ, hệ số góc của $x = g^{-1}(y)$ sẽ là 3. Để thay đổi hệ số góc từ 3 thành $\dfrac{1}{3}$, bạn phải xoay hình vẽ. Sau khi xoay hình vẽ, một vấn đề khác xuất hiện—các trục tọa độ không chỉ về phía bên phải và lên trên. Để giải quyết vấn đề này, bạn phải nhìn vào gương! (Khi nhìn vào gương các chữ cái cũng bị đảo ngược từ trước ra sau, nhưng người vẽ hình minh họa lại từ chối viết những chữ cái này ở dạng bị đảo ngược. Người đó nghĩ rằng điều này là không tưởng nhưng sự thật đúng là như vậy.) Vừa để đảm bảo chúng ta không phải quay quyển sách, vừa để những chữ chữ cái này không bị đảo ngược, chúng ta cần đến một ý tưởng tốt hơn để biểu diễn đồ thị của $x = g^{-1}(y)$.

Đồ thị của $x = \dfrac{1}{3}y$ được sinh ra từ ***phép lấy đối xứng của đồ thị*** $y = 3x$ ***qua đường thẳng*** $45°$. Trục y trở thành trục hoành và trục x trở thành trục tung. Điểm $(2, 6)$ trên đường thẳng $y = 3x$ trở thành điểm $(6, 2)$ trên đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}y$. Đôi mắt của chúng ta thấy một ảnh đối xứng qua đường thẳng $45°$ (Hình 4.3.3c). Toán học lại chỉ thấy được hai đồ thị này có cùng các cặp x và y. Các tính chất đặc biệt của g và g^{-1} cho phép chúng ta biết về hai hàm số này—và vẽ hai đồ thị của chúng—cùng một lúc.[10] ***Đồ thị của*** $x = g^{-1}(y)$ ***là ảnh trong gương của đồ thị*** $y = g(x)$.

[10]Tôi đã từng thấy các đồ thị với $y = g(x)$ và $y = g^{-1}(x)$. Đối với tôi điều đó là sai: phải là $x = g^{-1}(y)$. Nếu $y = \sin x$ khi đó $x = \sin^{-1} y$.

HÀM MŨ VÀ HÀM LOGARITHM

Tôi muốn thêm hai ví dụ nữa về các hàm ngược của nhau, bởi vì chúng rất quan trọng. Cả hai ví dụ này đều liên quan đến *mũ* và *logarithm*. Một hàm là lũy thừa của 2 được tạo thành từ các đoạn thẳng; hàm số phỏng theo hàm 2^x này đã xuất hiện trong Chương 1. Hàm còn lại là hàm 2^x theo đúng nghĩa của nó, hàm này chưa được định nghĩa—và sẽ không được định nghĩa ở đây. Các hàm số b^x và $\log_b x$ là cực kỳ quan trọng đến nỗi chúng xứng đáng và sẽ có (ít nhất) nguyên một chương trong quyển sách này đề cập đến chúng. Nhưng trước tiên chúng ta cứ thử xem các đồ thị của chúng.

Các hệ số góc trong hàm lũy thừa của 2 chính là các lũy thừa của 2. Cũng chính là các tung độ y tại điểm bắt đầu của từng đoạn thẳng. ***Các hệ số góc*** $1, 2, 4, \ldots$ ***bằng các tung độ*** $1, 2, 4, \ldots$ ***tại những điểm đặc biệt này***.

Hàm ngược của hàm lũy thừa của 2 là một mô hình rời rạc đối với logarithm (cơ số 2). Logarithm của 1 là 0, bởi vì $2^0 = 1$. Logarithm của 2 là 1, bởi vì $2^1 = 2$. Logarithm của 2^j là mũ j. Như vậy mô hình rời rạc này đưa ra $x = \log_2 x$ đúng tại các điểm gãy $y = 1, 2, 4, 8, \ldots$. Các hệ số là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ bởi vì $dx/dy = 1/(dy/dx)$.

Mô hình rời rạc trông cũng tốt đó, nhưng cũng không thể bằng mô hình liên tục. Hính phía bên phải biểu diễn hàm mũ $y = 2^x$ theo đúng nghĩa của nó. Tại $x = 0, 1, 2, \ldots$ các tung độ y vẫn giống như trước. Nhưng bây giờ tung độ tại $x = \frac{1}{2}$ là số $2^{1/2}$, chính là $\sqrt{2}$. Tung độ tại $x = .10$ là căn bậc mười $2^{1/10} = 1.07\ldots$. *Hệ số góc tại* $x = 0$ *không còn là* 1*—nó gần bằng* $\Delta y/\Delta x = .07/.10$. Hệ số góc chính xác là một số c (gần bằng .7) mà chúng tôi chưa tiện tiết lộ cho bạn biết.

Tính chất đặc biệt của $y = 2^x$ đó là hệ số góc tại tất cả các điểm là cy. ***Hệ số góc của hàm mũ này là tỷ lệ thuận với bản thân hàm số*** . Nghiệm của $dy/dx = cy$ là một hàm mũ.

Bây giờ hãy nhìn vào hàm ngược—*logarithm*. Đồ thị của nó là ảnh trong gương:

> Nếu $y = 2^x$ khi đó $x = \log_2 y$. Nếu $2^{1/10} \approx 1.07$ khi đó $\log_2 1.07 \approx 1/10$.

Hàm mũ sẽ thực hiện một số thao tác theo một thứ tự nào đó, hàm logarithm sẽ đảo ngược quá trình đó—và ngược lại. ***Logarithm của*** 2^x ***là mũ*** x. Vì hàm mũ bắt đầu với hệ số góc c, logarithm phải bắt đầu với hệ số góc $1/c$. Hãy kiểm tra điều đó về mặt số học. Logarithm của 1.07 gần bằng 1/10. Hệ số góc gần bằng .10/.07. Tích chất đẹp đẽ này chính là $dx/dy = 1/cy$.

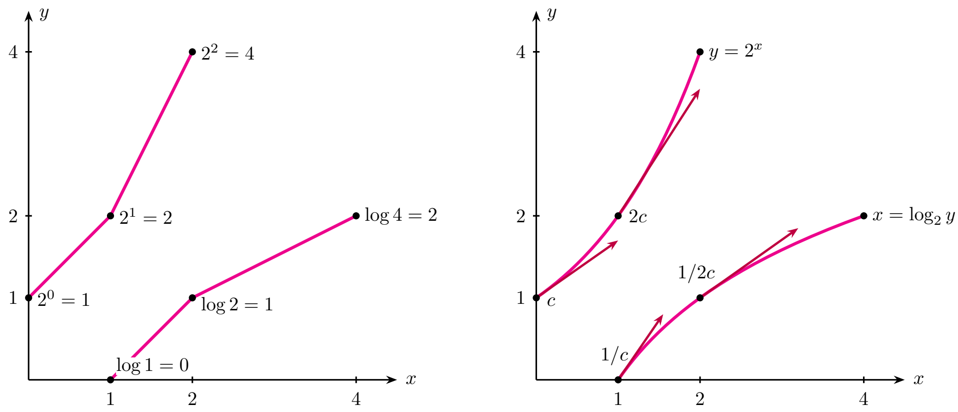
Tôi phải đề cập rằng giải tích tránh các logarithm cơ số 2. Lý do nằm ở con số bí ẩn c. Nó là "logarithm tự nhiên" của 2, chính là 1/.693147...—và ai lại muốn con số này chứ? Ngoài ra $1/.693147\ldots$ là hệ số góc của $\log_2 y$. Khi đó, $(dx/dy)(dy/dx) = 1$. Sự lựa chọn đúng đắn chính là dùng các "logarithm tự nhiên" từ đầu đến cuối. Thay vì cơ số 2, các logarithm này dựa trên số đặc biệt e:

$$y = e^x \text{ là hàm ngược của } x = \ln y. \tag{4.3.2}$$

Các đạo hàm của những hàm này rất là nhạy cảm—chúng được để dành cho Chương 6. Cùng với x^n và $\sin x$ và $\cos x$, chúng là xương sống của giải tích.

Lưu ý. Với lượng kiến thức sẵn có tại thời điểm này, chúng ta hầu như có thể đi trực tiếp đến Chương 6. Các hàm ngược $x = \sin^{-1} y$ và $x = \tan^{-1} y$ có thể được giải một cách nhanh chóng. Lý do cho việc đề cập đến các tích phân trước tiên (Chương 5) đó là chúng giúp chúng ta giải các phương trình vi phân mà không cần phỏng đoán nghiệm:

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ hay } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \text{ kéo theo } \int dx = \int \frac{dy}{y} \text{ hay } x = \ln y + C.$$



HÌNH 4.3.4. Các mô hình tuyến tính từng khúc và các đường cong: $y = 2^x$ và $x = \log_2 y$. Cơ số $b = 2$.

Các tích phân có đủ loại ứng dụng, trải dài khắp quyển sách này. Nhưng đừng quên 2^x và e^x. Chúng là các nghiệm của $dy/dx = cy$—mấu chốt cho giải tích ứng dụng.

HÀM NGƯỢC CỦA MỘT XÍCH $h(g(x))$

Dễ dàng tìm được hàm ngược cho các hàm số $g(x) = x - 2$ và $h(y) = 3y$. Đối với g^{-1} chúng ta cộng thêm 2, và đối với h^{-1} chúng ta chia bởi 3. Bây giờ câu hỏi được đặt ra là: Nếu chúng ta tạo ra hàm hợp $z = h(g(x))$, hay $z = 3(x-2)$, hàm ngược của nó là gì?

Hầu hết các hàm số đã được biết đều được sáng tạo ra theo cách này, từ các xích gồm các hàm số đơn giản hơn. *Bài toán được đặt ra đó là đảo ngược một xích bằng cách dùng hàm ngược của từng hàm thành phần.* Lời giải cho bài toán này là một trong những quy tắc cơ sở của toán học:

PHÁT BIỂU 4.3.2. Hàm ngược của $z = h(g(x))$ là một xích gồm các hàm ngược theo thứ tự ngược lại:

$$x = g^{-1}(h^{-1}(z). \tag{4.3.3}$$

h^{-1} được áp dụng đầu tiên bởi vì h được áp dụng sau cùng: $g^{-1}(h^{-1}(h(g(x)))) = x$.

Phương trình sau cùng trông giống như một mớ hổ lốn, nhưng nó thể hiện được ý tưởng cốt yếu. Ở khoảng giữa bản thấy h^{-1} và h. Phần đó không có tác dụng gì cả! Các hàm ngược của nhau triệt tiêu lẫn nhau, để lại $g^{-1}(g(x))$. Nhưng đây chính là x. Toàn bộ xích thu gọn dần, khi g^{-1} và h^{-1} ở đúng vị trí của nó—chính là ngược với thứ tự của $h(g(x))$.

VÍ DỤ 4.3.7. $z = h(g(x)) = 3(x-2)$ và $x = g^{-1}(h^{-1}(z)) = \dfrac{1}{3}z + 2$.
Đầu tiên h^{-1} chia bởi 3. Sau đó g^{-1} cộng 2. Hàm ngược của $h \circ g$ là $g^{-1} \circ h^{-1}$. *Nó có thể được tìm thấy một cách trực tiếp bằng cách giải* $z = 3(x-2)$. Viết một xích gồm các hàm ngược như viết văn xuôi—chúng ta thực hiện mà không cần biết biết đến hàm thành phần tiếp theo là gì cũng như không cần chú ý đến vần của câu tiếp theo là gì.

VÍ DỤ 4.3.8. Tìm hàm ngược của $z = \sqrt{x-2}$ bằng cách viết $z^2 = x - 2$ và sau đó viết $x = z^2 + 2$.
Hàm ngược cộng 2 và lấy bình phương—*nhưng không phải theo thứ tự đó.* Việc thực hiện theo thứ tự đó sẽ đưa ra $(z+2)^2$, thứ tự này là không đúng. Thứ tự đúng phải là $z^2 + 2$.

HÌNH 4.3.5. Xích $g^{-1}(h^{-1}(h(g(x)))) = x$ là một-một tại mỗi bước.

Miền xác định và vùng giá trị được giải thích trong Hình 4.3.5. Chúng ta bắt đầu với $x \geqslant 2$. Việc trừ 2 đưa ra $y \geqslant 0$. Việc lấy căn bậc hai đưa ra $z \geqslant 0$. Việc lấy bình phương đưa trở lại $y \geqslant 0$. Việc cộng hai đưa trở lại $x \geqslant 2$—mà thuộc chính miền xác định của g.

VÍ DỤ 4.3.9. Các ma trận nghịch đảo của ma trận $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (bài toán đại số tuyến tính là tùy chọn).
Giả sử một vector x được nhân với bởi một ma trận vuông B: $y = g(x) = Bx$. Hàm ngược của nó nhân bởi ***ma trận nghịch đảo***: $x = g^{-1}(y) = B^{-1}y$. Nó giống như phép nhân bởi $B = 3$ và $B^{-1} = 1/3$, ngoại trừ việc x và y là các vector.

Bây giờ giả sử một hàm thứ hai nhân bởi một ma trận A khác: $z = h(g(x)) = ABx$. Bài toán được đặt ra là tìm lại x từ z. Bước thứ nhất là lấy nghịch đảo của A, bởi vì A được áp dụng sau cùng: $Bx = A^{-1}z$. Sau đó bước thứ hai nhân bởi B^{-1} và mang trở lại: $x = B^{-1}A^{-1}z$. **Tích $B^{-1}A^{-1}$ là nghịch đảo của AB.** Quy tắc đối với các ma trận nghịch đảo là giống với quy tắc đối với các hàm ngược—thực tế nó là một trường hợp đặc biệt.

Tốt hơn là tôi không nên đi lan man quá xa khỏi giải tích. Mục tiếp theo giới thiệu về hàm ngược của sine, cosine và tangent, và tìm các đạo hàm của chúng. Hãy nhớ rằng chúng đều được suy ra từ quy tắc xích.

BÀI TẬP 4.3

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Các hàm số $g(x) = x-4$ và $f(y) = y+4$ là các hàm ___a___, bởi vì $f(g(x))$ = ___b___. Ngoài ra $g(f(y))$ = ___c___. Ký hiệu là $f = g^{-1}$ và g = ___d___. Hàm hợp ___e___ là hàm đồng nhất. Theo định nghĩa, $x = g^{-1}(y)$ khi và chỉ khi y = ___f___. Khi y thuộc vùng giá trị của g, nó thuộc ___g___ của g^{-1}. Tương tự x thuộc ___h___ của g khi nó thuộc ___i___ của g^{-1}. Nếu g có một hàm ngược khi đó $g(x_1)$ ___j___ $g(x_2)$ tại bất kỳ hai điểm nào. Hàm g phải là ___k___ đều hoặc ___l___ đều.

Quy tắc xích được áp dụng cho $f(g(x)) = x$ đưa ra (df/dy)(___m___) = ___n___. Hệ số góc của g^{-1} lần hệ số góc của g bằng ___o___. Trực tiếp hơn, dx/dy = 1/___p___. Đối với $y = 2x+1$ và $x = \frac{1}{2}(y-1)$, các hệ số góc là dy/dx = ___q___ và dx/dy = ___r___. Đối với $y = x^2$ và x = ___s___, các hệ số góc là dy/dx = ___t___ và dx/dy = ___u___. Việc thế x^2 bởi y đưa ra dx/dy = ___v___. Khi đó $(dx/dy)(dy/dx)$ = ___w___.

Đồ thị của $y = g(x)$ cũng là đồ thị của x = ___x___, nhưng với trục x nằm ngang và trục y nằm dọc. Đối với một đồ thị thông thường của g^{-1}, lấy ảnh đối xứng qua đường thẳng ___y___. Nếu $(3, 8)$ nằm đồ thị của g, khi đó ảnh trong gương (___z___) của nó nằm trên đồ thị của g^{-1}. Các điểm cụ thể này thỏa mãn $8 = 2^3$ và 3 = ___A___.

Hàm ngược của xích $z = h(g(x))$ là xích x = ___B___. Nếu $g(x) = 3x$ và $h(y) = y^3$ khi đó z = ___C___. Hàm ngược của nó là x = ___D___, là hàm hợp của ___E___ và ___F___.

Giải các phương trình 4.3.1-4.3.10 đối với x, để tìm hàm ngược $x = g^{-1}(y)$. Khi có nhiều hơn một x mà đưa ra cùng một y, hãy viết "không có hàm ngược."

4.3.1. $y = 3x - 6$

4.3.2. $y = Ax + B$

4.3.3. $y = x^2 - 1$

4.3.4. $y = x/(x-1)$ [giải $xy - y = x$]

4.3.5. $y = 1 + x^{-1}$

4.3.6. $y = |x|$

4.3.7. $y = x^3 - 1$

4.3.8. $y = 2x + |x|$

4.3.9. $y = \sin x$

4.3.10. $y = x^{1/5}$ [vẽ đồ thị]

4.3.11. Việc giải $y = \dfrac{1}{x-a}$ đưa ra $xy - ay = 1$ hay $x = \dfrac{1+ay}{y}$. Bây giờ giải phương trình đó đối với y.

4.3.12. Việc giải $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ đưa ra $xy - y = x + 1$ hay $x = \dfrac{y+1}{y-1}$. Vẽ đồ thị để thấy lý do tại sao f và f^{-1} giống nhau. Tính dy/dx và dx/dy.

4.3.13. Giả sử f là tăng, $f(2) = 3$ và $f(3) = 5$. Bạn có thể nói gì về $f^{-1}(4)$?

4.3.14. Giả sử $f(2) = 3$ và $f(3) = 5$ và $f(5) = 5$. Bạn có thể nói gì về f^{-1}?

4.3.15. Giả sử $f(2) = 3$ và $f(3) = 5$ và $f(5) = 0$. Làm thế nào để biết rằng không có hàm f^{-1}?

4.3.16. ***Phép thử đường thẳng nằm dọc***: Nếu không có đường thẳng nằm dọc nào cắt đồ thị của nó hai lần khi đó $f(x)$ là một ***hàm số*** (một y đối với từng x). ***Phép thử đường thẳng nằm ngang***: Nếu không có đường thẳng nằm ngang nào cắt đồ thị của nó hai lần khi đó $f(x)$ là ***khả nghịch*** bởi vì ________.

4.3.17. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là tăng, hai hàm số nào trong số những hàm số sau có khả năng là không tăng?

$f(x) + g(x)$	$f^{-1}(x)$
$f(x)g(x)$	$1/f(x)$
$f(g(x))$	

4.3.18. Nếu $y = 1/x$ khi đó $x = 1/y$. Nếu $y = 1 - x$ khi đó $x = 1 - y$. Các đồ thị là ảnh trong gương của chính chúng qua qua đường thẳng 45°. Xây dựng hai hàm số khác với tính chất $f = f^{-1}$ hay $f(f(x)) = x$ này.

4.3.19. Đối với số m nào các hàm số sau là khả nghịch?
(a) $y = mx + b$
(b) $y = mx + x^3$
(c) $y = mx + \sin x$

4.3.20. Từ đồ thị của nó chứng tỏ rằng $y = |x| + cx$ là khả nghịch nếu $c > 1$ hoặc nếu $c < -1$. Hàm ngược của một hàm tuyến tính từng khúc là ________ từng khúc.

Trong 4.3.21-4.3.26, tìm dy/dx theo x và dx/dy theo y.

4.3.21. $y = x^5$

4.3.22. $y = 1/(x-1)$

4.3.23. $y = x^3 - 1$

4.3.24. $y = 1/x^3$

4.3.25. $y = \dfrac{x}{x-1}$

4.3.26. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

4.3.27. Nếu $dy/dx = 1/y$ khi đó $dx/dy =$ ________ và $x =$ ________.

4.3.28. Nếu $dx/dy = 1/y$ khi đó $dy/dx =$ ________ (các hàm số này là $y = e^x$ và $x = \ln y$, chúng sẽ sớm được khảo sát một cách thích đáng).

4.3.29. Các hệ số góc của $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ và $g(x) = -1/x$ là x^2 và $1/x^2$. Tại sao không thể có $f = g^{-1}$? g^{-1} là gì? Chứng tỏ rằng $g'(g^{-1})' = 1$.

4.3.30. Tại các điểm x_1, x_2, x_3 một hàm hằng từng khúc nhảy đến y_1, y_2, y_3. Vẽ đồ thị của nó bắt đầu từ $y(0) = 0$. Ảnh trong gương là hằng từng khúc với các bước nhảy tại các điểm ________ đến các tung độ ________. Tại sao hàm này không phải là hàm ngược?

Trong 4.3.31-4.3.38 vẽ đồ thị của $y = g(x)$. Vẽ riêng các ảnh trong gương $x = g^{-1}(y)$ của nó.

4.3.31. $y = 5x - 10$

4.3.32. $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

4.3.33. $y = 1/(x+1)$

4.3.34. $y = |x| - 2x$

4.3.35. $y = 10^x$

4.3.36. $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

4.3.37. $y = 2^{-x}$

4.3.38. $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x < 1$

Trong 4.3.39-4.3.42 tìm dx/dy tại các điểm được cho trước.

4.3.39. $y = \sin x$ tại $x = \pi/6$

4.3.40. $y = \tan x$ tại $x = \pi/4$

4.3.41. $y = \sin^2 x$ tại $x = 3$

4.3.42. $y = x - \sin x$ tại $x = 0$

4.3.43. Nếu y là hàm tăng của x, khi đó x là một hàm ________ y. Chứng minh bằng các đồ thị và bằng quy tắc xích.

4.3.44. Nếu $f(x) > x$ đối với mọi x, chứng tỏ rằng $f^{-1}(y) < y$.

4.3.45. ***Đúng hay sai***, với ví dụ:
(a) Nếu $f(x)$ là khả nghịch khi đó $h(x) = (f(x))^2$ cũng là khả nghịch.
(b) Nếu $f(x)$ là khả nghịch khi đó $h(x) = f(f(x))$ cũng là khả nghịch.
(c) $f^{-1}(y)$ có một đạo hàm tại mỗi y.

Trong các xích 4.3.46-4.3.511, viết ra $g(x)$ và $f(y)$ và các hàm ngược của chúng. Sau đó tìm $x = g^{-1}(f^{-1}(z))$.

4.3.46. $z = 5(x - 4)$

4.3.47. $z = (x^m)^n$

4.3.48. $z = (6 + x)^2$

4.3.49. $z = 6 + x^2$

4.3.50. $z = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + 4) + 4$

4.3.51. $z = \log(10^x)$

4.3.52. Việc giải $f(x) = 0$ chiếm một phần lớn của toán ứng dụng. Biểu diễn nghiệm x^* theo f^{-1}: $x^* =$ ________.

4.3.53. (a) Chứng tỏ bằng ví dụ rằng d^2x/dy^2 không phải là $1/(d^2y/dx^2)$.
(b) Nếu y được đo theo meter và x được đo theo giây, khi đó d^2y/dx^2 có đơn vị ________ và d^2x/dy^2 có đơn vị ________.

4.3.54. Phuong pháp của Newton giải $f(x^*) = 0$ bằng cách áp dụng một xấp xỉ tuyến tính của f^{-1}:

$$f^{-1}(0) \approx f^{-1}(y) + \frac{df^{-1}}{dy}(0 - y).$$

Đối với $y = f(x)$, đây là phương trình Newton $x^* \approx x +$ ________.

4.3.55. Nếu nhu cầu là $1/(p+1)^2$ khi giá cả là p, khi đó nhu câu là y khi giá cả là ________. Nếu vùng giá trí của giá cả là $p \geqslant 0$, vùng giá trị của nhu cầu là gì?

4.3.56. Nếu $dF/dx = f(x)$ chứng tỏ rằng đạo hàm của $G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$ là $f^{-1}(y)$.

4.3.57. Đối với từng số y tìm giá trị cực đại của $yx - 2x^4$. Cực đại này là một hàm $G(y)$. Xác minh rằng các đạo hàm của $G(y)$ và $2x^4$ là các hàm ngược của nhau.

4.3.58 (chỉ dành cho các giáo sư). Nếu $G(y)$ là giá trị cực đại của $yx - F(x)$, chứng minh rằng $F(x)$ là giá trị cực đại của $xy - G(y)$. Giả định rằng $f(x) = dF/dx$ là tăng, giống như $8x^3$ trong Bài toán 57.

4.3.59. Giả sử x phần trăm những người giàu nhất trên thế giới có $10\sqrt{x}$ phần trăm tài sản của cả thế giới. Khi đó y phần trăm tài sản của thế giới bị nắm bởi ________ dân số.

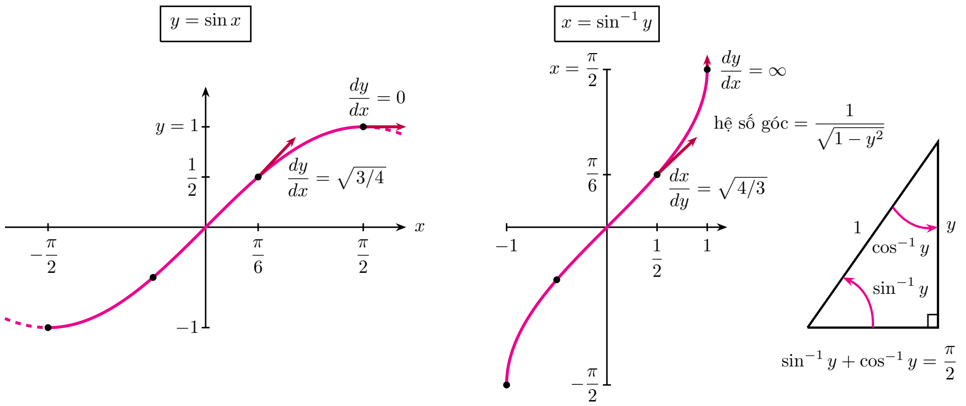
4.4. Hàm ngược của Hàm lượng giác

Toán học được xây dựng trên các hàm số cơ bản như hàm sine, và trên các ý tưởng cơ bản như hàm ngược. Vì vậy ***việc tìm hàm ngược của hàm sine là hoàn toàn tự nhiên***. Đồ thị của $x = \sin^{-1} y$ là một ảnh qua gương của đồ thị $y = \sin x$. Đây là trường hợp mà chúng ta phải chú ý đến các miền xác định, vì đồ thị của hàm sine đi lên và xuống vô hạn lần. Chúng ta chỉ cần đến *một mảnh* của đường cong đó, trong Hình 4.4.1, mà thôi.

Đối với đường nét đậm miền xác định bị hạn chế. Góc x nằm giữa $-\pi/2$ và $+\pi/2$. Trên khoảng đó hàm sine là tăng, nên ***từng y được suy ra từ đúng một góc x***. Nếu toàn bộ đường cong sine được xét, vô số góc x sẽ có $\sin x = 0$. Hàm sine sẽ không có hàm ngược. Bằng cách hạn chế cho một khoảng mà $\sin x$ là tăng, chúng ta làm cho hàm số khả nghịch.

Hàm ngược mang y trở lại x. Nó là $x = \sin^{-1} y$ (***hàm sine ngược***):

$$x = \sin^{-1} y \text{ khi } y = \sin x \text{ và } |x| \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{4.4.1}$$



HÌNH 4.4.1. Các đồ thị của $\sin x$ và $\sin^{-1} y$. Các hệ số góc của chúng là $\cos x$ và $1/\sqrt{1-y^2}$.

Hàm ngược bắt đầu với một số y nằm giữa -1 và 1. Nó sinh ra một góc $x = \sin^{-1} y$—***góc mà có sine là** y*. Góc x nằm giữa $-\pi/2$ và $+\pi/2$, với sine được yêu cầu. Về mặt lịch sử x được gọi là "arc sine" của y, và *arcsin* được dùng trong điện toán. Ký hiệu toán học là $\sin^{-1}$. *Ký hiệu này không liên quan đến* $1/\sin x$.

Hình vẽ cho thấy góc $30°$ $x = \frac{\pi}{6}$. Sine của nó là $y = \frac{1}{2}$. ***Sine ngược của*** $\frac{1}{2}$ ***là*** $\frac{\pi}{6}$. Một lần nữa: Ký hiệu $\sin^{-1}(1)$ đại diện cho góc mà có sine là 1 (góc này là $x = \frac{\pi}{2}$). Chúng ta dang thấy $g^{-1}(g(x)) = x$:

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \text{ đối với } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \sin(\sin^{-1} y) = y \text{ đối với } -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

VÍ DỤ 4.4.1 (quan trọng). Nếu $\sin x = y$ tìm một công thức đối với $\cos x$.

LỜI GIẢI. Chúng ta được cho trước sine, và muốn tìm cosine. Mấu chốt của bài toán này phải là $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Khi sine là y, cosine là căn bậc hai của $1 - y^2$:

$$\cos x = \cos(\sin^{-1} y) = \sqrt{1-y^2}. \tag{4.4.2}$$

Công thức này là rất quan trọng đối với việc tính toán các đạo hàm. Chúng ta sẽ dùng nó ngay lập tức.

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SINE NGƯỢC

Bài toán giải tích được đặt ra ở đây đó là tìm hệ số góc của hàm ngược $f(y) = \sin^{-1} y$. Quy tắc xích đưa ra (*hệ số góc của hàm ngược*) $= 1/$(*hệ số góc của hàm gốc*). Chắc chắn hệ số góc của $\sin x$ là $\cos x$. Để chuyển từ x sang y, dùng phương trình (4.4.2):

$$y = \sin x \text{ suy ra } \frac{dy}{dx} = \cos x \text{ suy ra } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{4.4.3}$$

Đạo hàm $1/\sqrt{1-y^2}$ này đưa ra một cặp v-f mới mà cực có giá trị giải tích:

$$\textit{vận tốc} v(t) = 1/\sqrt{1-t^2} \qquad \textit{khoảng cách} f(t) = \sin^{-1} t.$$

Các hàm ngược sẽ sớm tạo ra hai cặp nữa có ý nghĩa tương tự, từ các đạo hàm của $\tan^{-1} y$ và $\sec^{-1} y$. ***Bảng ở cuối mục này liệt kê tất cả các dữ liệu quan trọng***.

VÍ DỤ 4.4.2. Hệ số góc của $\sin^{-1} y$ tại $y = 1$ là *vô hạn*: $1/\sqrt{1-y^2} = 1/0$. Hãy giải thích
Tại $y = 1$ đồ thị của $y = \sin x$ nằm ngang. Hệ số góc là không. Vì vậy ảnh qua gương của nó nằm ngang. Hệ số góc $1/0$ là trường hợp cực hạn của quy tắc xích.

CÂU HỎI. *$d/dx\,(\sin^{-1} x)$ là gì?*

CÂU TRẢ LỜI. $1/\sqrt{1-x^2}$. Tôi chỉ thay thế các chữ cái.

HÀM COSINE NGƯỢC VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ

Bất cứ điều gì được thực hiện đối với hàm sine đều có thể được thực hiện đối với hàm cosine. Nhưng phải để ý đến miền xác định và vùng giá trị. Đồ thị cũng không được phép đi lên và đi xuống. Từng y từ -1 đến 1 sẽ là cosine của *chỉ một góc x*. Điều này làm cho x nằm giữa 0 và π. Khi đó cosine là giảm dần và $y = \cos x$ có một hàm ngược:

(4.4.4) $$\cos^{-1}(\cos x) = x \text{ và } \cos^{-1}(\cos y) = y.$$

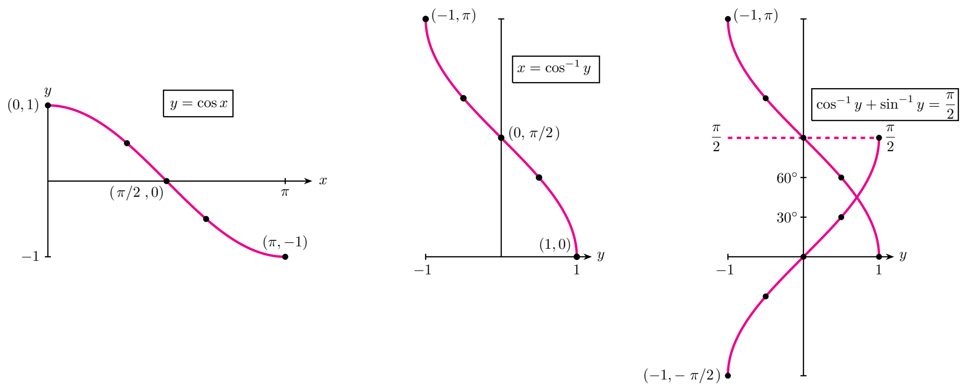
Cosine của góc $x = 0$ là số $y = 1$. Cosine ngược của $y = 1$ là góc $x = 0$. Cả hai phát biểu này đều thể hiên cùng một điều đó là $\cos 0 = 1$.

Đối với hệ số góc của $\cos^{-1} y$, chúng ta có thể sao chép tính toán đã được thực hiện thành công đối với $\sin^{-1}$. Quy tắc xích có thể được áp dụng như trong (4.4.3). Nhưng có một cách nhanh hơn, do dựa vào một hệ thức đặc biệt giữa $\cos^{-1} y$ và $\sin^{-1} y$. ***Hai góc đó phụ nhau thành một góc vuông***:

(4.4.5) $$\cos^{-1} y + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Hình 4.4.1c cho thấy các góc và Hình 4.4.2c cho thấy các đồ thị. Tổng là $\pi/2$ (đường nét chấm), và đạo hàm của nó là không. Vì vậy tổng của các đạo hàm của $\cos^{-1} y$ và $\sin^{-1} y$ phải bằng không. *Các đạo hàm đó có dấu ngược với nhau.* Có một ***dấu trừ*** đối với đạo hàm của hàm cosine ngược, và đồ thị của nó đi xuống.

(4.4.6) $$\textbf{\textit{Đạo hàm của }} x = \cos^{-1} y \text{ là } \frac{dx}{dy} = -1/\sqrt{1-y^2}.$$



HÌNH 4.4.2. Các đồ thị của $y = \cos x$ và $x = \cos^{-1} y$. Lưu ý miền xác định $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

CÂU HỎI. *Vì sao hai hàm $x = \sin^{-1} y$ và $\cos^{-1} y$ có* cùng đạo hàm*?*

CÂU TRẢ LỜI. $\sin^{-1} y$ phải bằng $-\cos^{-1} y + C$. Phương trình (4.4.5) đưa ra $C = \pi/2$.

HÀM TANGENT NGƯỢC VÀ ĐẠO HÀM CỦA NÓ

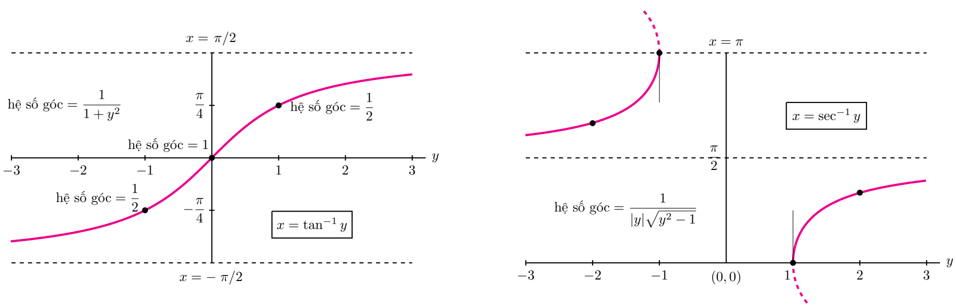
Tangent là $\sin x/\cos x$. Tangent ngược *không* phải là $\sin^{-1} y/\cos^{-1} y$. Hàm tangent sinh ra ***góc mà có tangent là*** y. Hình 4.4.3 cho thấy góc đó, góc này nằm giữa $-\pi/2$ và $\pi/2$. Tangent có thể nhận bất kỳ số nào làm giá trị, nhưng tangent ngược chỉ có thể thuộc *khoảng mở* $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Khoảng này là "mở" bởi vì không bao hàm hai điểm mút). Tangent của $\pi/2$ và $-\pi/2$ không được xác định.

Hệ số góc của $y = \tan x$ là $dy/dx = \sec^2 x$. Hệ số góc của $x = \tan^{-1} y$ là gì?

(4.4.7) Theo quy tắc xích $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Phát biểu 4.4.1.

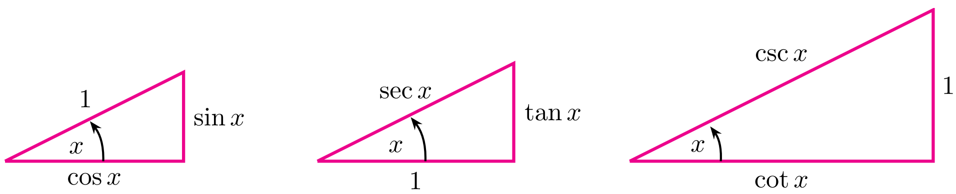
(4.4.8) *Đạo hàm của* $f(y) = \tan^{-1} y$ *là* $$\frac{df}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$



Hình 4.4.3. $x = \tan^{-1} y$ có hệ số góc $1/(1+y^2)$. $x = \sec^{-1} y$ có hệ số góc $1/|y|\sqrt{y^2-1}$.

Ví dụ 4.4.3. Tangent của $x = \pi/4$ là $y = 1$. Chúng ta kiểm tra các hệ số góc. Trên đường cong tangent ngược, $dx/dy = 1/(1+y^2) = \dfrac{1}{2}$. Trên đường cong tangent, $dy/dx = \sec^2 x$. Tại $\pi/4$ bình phương của secant bằng 2. Các hệ số góc $dx/dy = \dfrac{1}{2}$ và $dy/dx = 2$ nhân lại với nhau đưa ra 1.

Quan trọng. Chúng ta sẽ sớm đến với câu hỏi sau đây. *Hàm số nào có đạo hàm* $1/(1+x^2)$? Một lý do tại sao chúng ta phải đọc mục này chính là để hiểu về câu trả lời cho câu hỏi vừa rồi. Đáp án chính là hàm số nằm trong (4.4.8)—*nếu chúng ta thay đổi các chữ cái.* ***Chính*** $f(x) = \tan^{-1} x$ ***là hàm số mà có hệ số góc*** $1/(1+x^2)$.



Hình 4.4.4. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ và $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ và $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

HÀM COTANGENT NGƯỢC, HÀM SECANT NGƯỢC, HÀM COSECANT NGƯỢC

Chúng ta không có cách nào tránh được việc hoàn thiện việc liệt kê các hàm số và đạo hàm của chúng được đâu dù cho cái bản liệt kê này khốn khổ vô cùng! Nhưng chúng ta có thể làm cho công việc này không còn đau đớn nữa. Ý tưởng là dùng $1/(dy/dx)$ đối với $y = \cot x$ và $y = \sec x$ và $y = \csc x$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\csc^2 x} \text{ và } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sec x \tan x} \text{ và } \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\csc x \cot x}. \tag{4.4.9}$$

Trong phương trình giữa, thay $\sec x$ bởi y và $\tan x$ bởi $\pm\sqrt{y^2-1}$. Chọn dấu đối với hệ số góc dương (so sánh với Hình 4.4.3). Điều đó đưa ra phương trình giữa trong :

Đạo hàm của $\cot^{-1} y$***,*** $\sec^{-1} y$ ***và*** $\csc^{-1} y$ ***là***

(4.4.10)

$$\frac{d}{dy}(\cot^{-1} y) = \frac{-1}{1+y^2} \quad \frac{d}{dy}(\sec^{-1} y) = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}} \quad \frac{d}{dy}(\csc^{-1} y) = \frac{-1}{|y|\sqrt{y^2-1}}$$

Lưu ý về hàm secant ngược. Khi y là âm chúng ta có một sự lựa chọn đối với $x = \sec^{-1} y$. Chúng ta chọn góc trong góc phần tư thứ hai (giữa $\pi/2$ và π). Cosine của nó là âm, nên secant của nó là âm. Sự lựa chọn này làm cho $\sec^{-1} y = \cos^{-1}(1/y)$, điều này khớp với $\sec x = 1/\cos x$. Điều này cũng làm cho $\sec^{-1} y$ là một hàm tăng, trong khi $\cos^{-1} y$ là một hàm giảm. Vì vậy chúng ta cần giá trị tuyệt đối $|y|$ trong đạo hàm.

Một số bảng lượng giác toán học khác lại có một sự lựa chọn khác. Góc x có thể nằm trong góc phần tư thứ ba (giữa $-\pi$ và $-\pi/2$). Khi đó hệ số góc không cần đến dấu giá trị tuyệt đối.

Tổng kết. Đối với sáu hàm lượng giác ngược chúng ta chỉ cần học về ba đạo hàm. Ba đạo hàm còn lại chúng ta chỉ việc thêm vào các dấu trừ, như chúng ta đã thấy đối với $\sin^{-1} y$ và $\cos^{-1} y$. Tổng của từng hàm lượng giác ngược và "đối hàm" của nó là $\pi/2$, nên tổng của các đạo hàm của chúng bằng không. Dưới đây là sáu hàm số lượng giác ngược để tham khảo nhanh, và ba đạo hàm mới:

hàm số $f(y)$	***đầu vào*** y	***đầu ra*** x	***hệ số góc*** dx/dy
$\sin^{-1} y$, $\cos^{-1} y$	$\lvert y\rvert \leqslant 1$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\tan^{-1} y$, $\cot^{-1} y$	mọi y	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi)$	$\pm\frac{1}{1+y^2}$
$\sec^{-1} y$, $\csc^{-1} y$	$\lvert y\rvert \geqslant 1$	$[0, \pi]^*$,$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^*$	$\pm\frac{1}{\lvert y\rvert\sqrt{y^2-1}}$

Nếu $y = \cos x$ hay $y = \sin x$ khi đó $|y| \leqslant 1$. Đối với $y = \sec x$ và $y = \csc x$ khi đó điều ngược lại là đúng; chúng ta phải có $|y| \geqslant 1$.Đồ thị của $\sec^{-1} y$ bỏ qua tất cả các điểm $-1 < y < 1$.

Ngoài ra, đồ thị bỏ qua $x = \pi/2$—tại đó cosine bằng không. Secant của $\pi/2$ sẽ là $1/0$ (không thể). Tương tự $\csc^{-1} y$ bỏ qua $x = 0$, bởi vì $y = \csc 0$ không thể là $1/\sin 0$. Dấu sao $*$ trong bảng có nghĩa là bỏ đi các điểm $x = \dfrac{\pi}{2}$ và $x = 0$ đó.

Cột gồm các đạo hàm là những gì chúng ta cần và dùng trong giải tích.

BÀI TẬP 4.4

Các câu hỏi điền từ vào chỗ trống

Hệ thức $x = \sin^{-1} y$ có nghĩa là __a__ là sine của __b__. Như vậy x là góc mà có sine là __c__. Số y nằm giữa __d__ và __e__. Góc x nằm giữa __f__ và __g__. (Nếu chúng ta muốn các hàm sine ngược tồn tại, không thể có hai góc mà có cùng sine.) Cosine của góc $\sin^{-1} y$ là $\sqrt{\_\_h\_\_}$. Đạo hàm của $x = \sin^{-1} y$ là $dx/dy =$ __i__.

Hệ thức $x = \cos^{-1} y$ có nghĩa là y bằng __j__. Một lần nữa số y nằm giữa __k__ và . Lần này góc x nằm giữa __m__ và __n__ (để từng y được suy ra từ một góc x). Tổng $\sin^{-1} y + \cos^{-1} y =$ __o__. (Các góc này được gọi là __p__ , và tổng của chúng là một góc __q__.) Vì vậy đạo hàm của $x = \cos^{-1} y$ là $dx/dy =$ __r__, đạo hàm của $\sin^{-1} y$ có biểu thức là tương tự trừ việc có thêm một dấu __s__.

Hệ thức $x = \tan^{-1} y$ có nghĩa là $y =$ __t__. Số y nằm giữa __u__ và __v__. Góc x nằm giữa __w__ và __x__. Đạo hàm là $dx/dy =$ __y__. Vì $\tan^{-1} y + \cot^{-1} y =$ __z__, đạo hàm của $\cot^{-1} y$ là tương tự trừ việc có thêm một dấu __A__.

Hệ thức $x = \sec^{-1} y$ có nghĩa là __a__. Số y không bao giờ nằm giữa __C__ và __D__. Góc x nằm giữa __E__ và __F__, nhưng không bao giờ nằm tại $x =$ __G__. Đạo hàm của $x = \sec^{-1} y$ là $dx/dy =$ __H__.

Trong 4.4.1-4.4.4, tìm các góc $\sin^{-1} y$, $\cos^{-1} y$ và $\tan^{-1} y$ được đo theo radian.

4.4.1. $y = 0$

4.4.2. $y = -1$

4.4.3. $y = 1$

4.4.4. $y = \sqrt{3}$

4.4.5. Chúng ta biết rằng $\sin \pi = 0$. Vì sao không thể có $\pi = \sin^{-1} 0$?

4.4.6. Giả sử $\sin x = y$. Dưới điều kiện nào $x = \sin^{-1} y$?

4.4.7. Vẽ đồ thị của $x = \sin^{-1} y$ và định vị các điểm với hệ số góc $dx/dy = 2$.

4.4.8. Tìm dx/dy nếu $x = \sin^{-1} \frac{1}{2} y$. Vẽ đồ thị.

4.4.9. Nếu $y = \cos x$, tìm một công thức đối với $\sin x$. Trước tiên vẽ một tam giác vuông với góc x và cạnh kề y—hai cạnh còn lại là gì?

4.4.10. Nếu $y = \cos x$, tìm một công thức đối với $\tan x$. Trước tiên vẽ một tam giác vuông với góc x và cạnh đối y—hai cạnh còn lại là gì?

4.4.11. Lấy đạo hàm theo x của $\sin^{-1}(\sin x) = x$ bằng quy tắc xích. Kiểm tra rằng $d(\sin^{-1} y)/dy = 1/\sqrt{1 - y^2}$ đưa ra kết quả đúng.

4.4.12. Lấy đạo hàm theo y của $\cos^{-1}(\cos y) = y$ bằng quy tắc xích. Kiểm tra rằng $d(\cos^{-1} y)/dy = -1/\sqrt{1 - y^2}$ đưa ra kết quả đúng.

4.4.13. Tại $y = 0$ và $y = 1$, tìm hệ số góc dx/dy của $x = \sin^{-1} y$, $x = \cos^{-1} y$ và $x = \tan^{-1} y$.

4.4.14. Tại $x = 0$ và $x = 1$, tìm hệ số góc dx/dy của $x = \sin^{-1} y$, $x = \cos^{-1} y$ và $x = \tan^{-1} y$.

4.4.15. **Đúng hay sai**, với lý do:
(a) $(\sin^{-1} y)^2 + (\cos^{-1} y)^2 = 1$
(b) $\sin^{-1} y = \cos^{-1} y$ không có nghiệm.
(c) $\sin^{-1} y$ là một hàm tăng.
(d) $\sin^{-1} y$ là một hàm lẻ.
(e) $\sin^{-1} y$ và $-\cos^{-1} y$ có cùng hệ số góc —nên chúng giống nhau.
(f) $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$

4.4.16. Tìm $\tan(\cos^{-1}(\sin x))$ bằng cách vẽ một tam giác với các cạnh $\sin x$, $\cos x$, 1.

Tính các đạo hàm trong 4.4.17-4.4.28 (dùng các chữ cái như đã được cho).

4.4.17. $u = \sin^{-1} x$

4.4.18. $u = \tan^{-2} x$

4.4.19. $z = \sin^{-1}(\sin 3x)$

4.4.20. $z = \sin^{-1}(\cos x)$

4.4.21. $z = (\sin^{-1} x)^2$

4.4.22. $z = (\sin^{-1} x)^{-1}$

4.4.23. $z = \sqrt{1 - y^2} \sin^{-1} y$

4.4.24. $z = (1 + x^2) \tan^{-1} x$

4.4.25. $x = \sec^{-1}(y + 1)$

4.4.26. $u = \sec^{-1}(\sec x^2)$

4.4.27. $u = \sin^{-1} y / cos^{-1} \sqrt{1 - y^2}$

4.4.28. $u = \sin^{-1} y + \cos^{-1} y + \tan^{-1} y$

4.4.29. Vẽ một tam giác vuông để chỉ ra lý do tại sao $\tan^{-1} y + \cot^{-1} y = \pi/2$.

4.4.30. Vẽ một tam giác vuông để chỉ ra lý do tại sao $\tan^{-1} y = \cot^{-1} 1/y$.

4.4.31. Nếu $y = \tan x$ tìm $\sec x$ theo y.

4.4.32. Vẽ đồ thị của $y = \cot x$ và $x = \cot^{-1} y$.

4.4.33. Tìm hệ số góc dy/dx của $x = \tan^{-1} y$ tại

(a) $y = -3$
(b) $x = 0$
(c) $x = -\pi/4$

4.4.34. Tìm hàm số $u(t)$ mà có hệ số góc thoả mãn $u' + t^2 u' = 1$.

4.4.35. Đạo hàm cấp hai d^2x/dy^2 của $x = \sin^{-1} y$ là gì?

4.4.36. d^2u/dy^2 của $u = \tan^{-1} y$ là gì?

Tìm các đạo hàm trong 4.4.37-4.4.44.

4.4.37. $y = \sec \frac{1}{2} x$

4.4.38. $x = \sec^{-1} 2y$

4.4.39. $u = \sec^{-1}(x^n)$

4.4.40. $u = \sec^{-1}(\tan x)$

4.4.41. $\tan y = (x - 1)/(x + 1)$

4.4.42. $z = (\sin x)(\sin^{-1} x)$

4.4.43. $y = \sec^{-1} \sqrt{x^1 + 1}$

4.4.44. $z = \sin(\cos^{-1} x) - \cos(\sin^{-1} x)$

4.4.45. Lấy vi phân $\cos^{-1}(1/y)$ để tìm hệ số góc của $\sec^{-1} y$ theo một cách mới.

4.4.46. Miền xác định và tập giá trị của $x = \csc^{-1} y$ là ________.

4.4.47. Tìm một hàm số $u(y)$ sao cho $du/dy = 4/\sqrt{1 - y^2}$.

4.4.48. Giải phương trình vi phân $du/dx = 1/(1 + 4x^2)$.

4.4.49. Nếu $du/dx = 2/\sqrt{1 - x^2}$, tìm $u(1) - u(0)$.

4.4.50 (Được khuyến nghị). Với $u(x) = (x-1)/(x+1)$, tìm đạo hàm của $\tan^{-1} u(x)$. Đây cũng là đạo hàm của ________. Vì vậy hiệu giữa hai hàm số này là một ________.

4.4.51. Tìm $u(x)$ và $\tan^{-1} u(x)$ và $\tan^{-1} x$ tại $x = 0$ và $x = \infty$. Kết luận dựa trên Bài toán 4.4.50: $\tan^{-1} u(x) - \tan^{-1} x$ bằng số ________.

4.4.52. Tìm $u(x)$ và $\tan^{-1} u(x)$ và $\tan^{-1} x$ khi $x \to -\infty$. Bây giờ $\tan^{-1} u(x) - \tan^{-1} x$ bằng ________. Có điều gì đó dã xảy ra với $\tan^{-1} u(x)$. $u(x)$ và $\tan^{-1} u(x)$ thay đổi ngay lập tức tại x nào.

Đáp án cho các Bài tập Lẻ

CHƯƠNG 1

Mục 1.1 (Trang 23)

1.: $v = 30, 0, -30$; $v = -10, 20$

3: $v(t) = \begin{cases} 2 & \text{đối với } 0 < t < 10 \\ 1 & \text{đối với } 0 < t < 20 \\ -3 & \text{đối với } 20 < t < 30 \end{cases}$

$v(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{đối với } 0 < t < T \\ \frac{1}{T} & \textbf{đối với } T < t < 2T \\ 0 & \textbf{đối với } 2T < t < 3T \end{cases}$ **:**

5: $25; 22; t + 10$

7: $6; -30$

9: $v(t) = \begin{cases} 20 & \text{đối với } t < .2 \\ 0 & \text{đối với } t > .2 \end{cases}$

$f(t) = \begin{cases} 20t & \textbf{đối với } t \le .2 \\ 4 & \textbf{đối với } t \ge .2 \end{cases}$**:**

11: $10\%; 12\frac{1}{2}\%$

13: $f(t) = 0, 30(t-1), 30; f(t) = -30t, -60, 30(t-6)$

15: Trung bình 8, 20

17: $40t - 80$ đối với $1 \le t \le 2.5$

21: $0 \le t \le 3, -40 \le f \le 20; 0 \le t \le 3T; 0 \le f \le 60$

23: $3 - 7t$

25: $6t - 2$

27: $3t + 7$

29: Slope $-2; 1 \le f \le 9$

31: $v(t) = \begin{cases} 8 & \text{đối với } 0 < t < T \\ -2 & \text{đối với } T < t < 5T \end{cases}$

$f(t) = \begin{cases} 8t & \textbf{đối với } 0 \le t \le T \\ 10T - 2t & \textbf{đối với } T \le t \le 5T \end{cases}$**:**

33: $\frac{9}{5}C + 32$; hệ số góc $\frac{9}{5}$

35: $f(\omega) = \frac{\omega}{1000}$;

hệ số góc = thừa số chuyển đổi:

37: $1 \le t \le 5, 0 \le f \le 2$

39: $0 \le t \le 5, 0 \le f \le 4$

41: $0 \le t \le 5, 1 \le t \le 32$

43: $\frac{1}{2}t + 4; \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}; 2t + 12; 2t + 3$

45: Các miền xác định $-1 \le t \le 1$: các vùng giá trị $0 \le 2t + 2 \le 4$, $-3 \le t - 2 \le -1$, $-2 \le -f(t) \le 0$, $0 \le f(-t) \le 2$

47: $\frac{3}{2}V$; $\frac{3}{2}V$

49:

đầu vào$*$ đầu vào $\to A$
đầu vào$+$ $A \to$ đầu ra

đầu vào $*$ đầu vào $\to A$
đầu vào $+ A \to B$

$B * B \to C$
$B + C \to$ đầu ra

đầu vào $+ 1 \to A$
$A * A \to B$
$A + B \to$ đầu ra

51: $3t+5, 3t+1, 6t-2, 6t-1, -3t-1, 9t-4$; các hệ số góc $3, 3, 6, 6, -3, 9$

53: Đồ thị đi lên và đi xuống *hai* lần.

$f(f(t)) = \begin{cases} 2(2t) & 0 \le t \le 1.5 & 12 - 2(12 - 2t) & 3 \le t \le 4.5 \\ 12 - 4t & 1.5 \le t \le 3 & 2(12 - 2t) & 4.5 \le t \le 6 \end{cases}$

Mục 1.2 (Trang 32)

1: $2 + 5 + 3 = 10; f = 1, 3, 8, 11, 10$

3: $f = 3, 4, 6, 7, 7, 6$; cực đại f tại $v = 0$ hoặc tại các điểm ngắt quãng từ $v = 1$ tới -1

5: $1.1, -2, 5$; $f(6) = 6.6, -11, 4$; $f(7) = 7.7, -13, 9$

7: $f(t) = 2t$ đối với $t \le 5$, $10 + 3(t-5)$ đối với $t \ge 5$; $f(10) = 25$

9: $7, 28, 8t + 4$; tích của các hệ số góc

11: $f(8) = 8.8, -15, 14$; $\frac{\Delta f}{\Delta t} = 1.1, -2.5$

13: $f(x) = 3052.50 + .28(x - 20, 350)$; khi đó 11.158.50 là $f(49, 300)$

15: $19\frac{1}{4}\%$

17: Tín dụng trừ 1,000, khấu trừ chỉ trừ 15% của 1000

19: Mọi $v_j = 2$; $v_j = (-1)^{j-1}$; $v_j = (\frac{1}{2})^j$

21: Các dải L có diện tích 1, 3, 5, 7

23: $f_i = j$; tổng $j^2 + j$; tổng $\frac{j^2}{2} + \frac{j}{2}$

25: $(101^2 - 99^2)/2 = \frac{400}{2}$

27: $v_j = 2j$

29: $f_{31} = 5$

31: $a_j = -f_j$
33: $0; 1; .1$
35: $v = 2, 6, 18, 54;\ 2 \cdot 3^{j-1}$
37: $\frac{\Delta f}{\Delta t} = 1, .7177, .6956, .6934 \to \ln 2 = .6931$ trong Chương 6
39: $v_j = -(\frac{1}{2})^j$
41: $v_j = 2(-1)^j$, tổng là $f_j - 1$
45: $v = 1000, t = 10/V$
47: M, N
51: $\sqrt{9} < 2.9 < 9^2 < 2^9$; $(\frac{1}{9})^2 < 2(\frac{1}{9}) < \sqrt{1/9} < 2^{1/9}$

Mục 1.3 (Trang 41)

1: $6, 6, \frac{13}{2}a, -12, 0, 13$
3: $4, 3.1, 3 + h, 2.9$
5: Vận tốc tại $t = 1$ là 3
7: Diện tích $f = t + t^2$, hệ số góc của f là $1 + 2t$
9: Đ; Đ; Đ; S
11: $2; 2t$
13: $12 + 10t^2; 2 + 10t^2$
15: Thời điểm 2, độ cao 1, ở phía trên $\frac{3}{4}$ từ $t = \frac{1}{2}$ tới $\frac{3}{2}$
17: $f(6) = 18$
21: $v(t) = -2t$ khi đó $2t$
23: Vận tốc trung bình tới $t = 5$ là 2; $v(5) = 7$
25: $4v(4t)$
27: $v_{\text{tb}} = t, v(t) = 2t$

Mục 1.4 (Trang 48)

1: 10π, $(0, -1)$, $(-1, 0)$
3: $(4\cos t, 4\sin t)$; 4 và $4t$; $4\cos t$ và $-4\sin t$
5: $3t$; $(\cos 3t, \sin 3t)$; $-3\sin 3t$ và $3\cos 3t$
7: $x = \cos t$; $\sqrt{2}/2$; $-\sqrt{2}/2$
9: $2\pi/3; 1; 2\pi$
11: Cùng chiều kim đồng hồ bắt đầu tại $(1, 0)$
13: Tốc độ $\frac{2}{\pi}$
15: Diện tích 2
17: Diện tích 0
19: 4 từ tốc độ, 4 từ góc
21: $\frac{1}{4}$ từ bán kính nhân 4 từ góc đưa ra 1 trong vận tốc
23: Hệ số góc $\frac{1}{2}$; trung bình $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})/(\pi/6) = \frac{3(2-\sqrt{3})}{\pi} = .256$
25: Cùng chiều kim đồng hồ với bán kính 1 từ (1,0), tốc độ 3
27: Cùng chiều kim đồng hồ với bán kính 5 từ (0,5), tốc độ 10
29: Ngược chiều kim đồng hồ với bán kính 1 từ $(\cos 1, \sin 1)$, tốc độ 1
31: Qua trái và qua phải từ $(1, 0)$ tới $(-1, 0)$, $v = -\sin t$
33: Đi lên và đi xuống giữa 2 và -2; bắt đầu $2\sin\theta$, $v = 2\cos(t + \theta)$
35: Đi lên và đi xuống từ $(0,-2)$ tới $(0, 2)$; $v = \sin\frac{1}{2}t$
37: $x = \cos\frac{2\pi t}{360}, y = \sin\frac{2\pi t}{360}$, tốc độ $\frac{2\pi}{360}$, $v_{\text{lên}} = \cos\frac{2\pi t}{360}$

Mục 1.5 (Trang 54)

1: Kết nối đỉnh tới trung điểm của cạnh đối diện, sinh ra góc 30°
3: π
7: $\frac{\theta}{2\pi} \to$ diện tích $\frac{1}{2}r^2\theta$
9: $d = 1$, chu vi hexagon < chu vi đường tròn
11: Đ; Đ; S; S
13: $\cos(2t + t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = 4\cos^3 t - 3\cos t$
15: $\frac{1}{2}\cos(s-t) + \frac{1}{2}\cos(s+t)$; $\frac{1}{2}\cos(s-t) - \frac{1}{2}\cos(s+t)$
17: $\cos\theta = \sec\theta = \pm 1$ taij $\theta = n\pi$
19: Dùng $\cos(\frac{\pi}{2} - s - t) = \cos(\frac{\pi}{2} - s)\cos t + \sin(\frac{\pi}{2} - s)\sin t$
23: $\theta = \frac{3\pi}{2}$ + bội của 2π
25: $\theta = \frac{\pi}{4}$ + bội của π
27: Không θ
29: $\phi = \frac{\pi}{4}$
31: $|OP| = a, |OQ| = b$

CHƯƠNG 2

Mục 2.1 (Trang 72)

1: (b) và (c)
3: $12 + 3h$; $13 + 3h$; 3; 3
5: $f(x) + 1$
7: -6
9: $2x + \Delta x + 1; 2x + 1$
11: $\frac{4}{t + \Delta t} - \frac{4}{t} = \frac{-4}{t(t + \Delta t)} \to \frac{-4}{t^2}$
13: 7; 9; góc
15: $A = 1$, $B = -1$
17: S; S; Đ; S
19: $b = B$; m a và M; m hay không được xác định
21: Trung bình $x_2 + x_1 \to 2x_1$

25: $\frac{1}{2}$; không có giới hạn (các giới hạn một bên 1, –1); 1; 1 nếu $t \neq 0$, -1 nếu $t = 0$

27: $f'(3)$; $f(4) - f(3)$

29: $2x^4(4x^3) = 8x^7$

31: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

33: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$; $f'(2)$ không tồn tại

35: $2f\frac{df}{dx} = 4u^3\frac{du}{dx}$

Mục 2.2 (Trang 80)

1: $6x^5$; $30x^4 f'''''' = 720 = 6!$

2: $2x + 7$

5: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

7: $nx^{n-1} - nx^{-n-1}$

9: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

11: $-\frac{1}{x}, (-\frac{1}{x}) + 5$

13: $x^{-2/3}$; $x^{-4/3}$; $-\frac{1}{9}x^{-4/3}$

15: $3x^2 - 1 = 0$ tại $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

17: 8 ft/sec; -8 ft/sec ; 0

19: Giảm đối với $-1 < x < \frac{1}{3}$

21: $\frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$

23: 1 5 10 10 5 1 cộng thành $(1+1)^5$ $(x = h = 1)$

25: $3x^2$; $2h$ là các sai phân của các x

27: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \to 2x + 3x^2 =$ tổng của các đạo hàm riêng lẻ

29: $7x^6$; $7(x+1)^6$

31: $\frac{1}{24}x^4$ cộng bất kỳ khối lập phương nào

33: $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$

35: $\frac{1}{24}x^4$, $\frac{1}{120}x^5$

37: S; S; S; Đ, Đ

39: $\frac{y}{x} = .12$ nên $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}(.12)$; sáu cents

41: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\frac{c}{x + \Delta x} - \frac{c}{a})$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$

45: t tới $\sqrt[3]{2t}$

47: $\frac{1}{10}x^{10}$; $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$; chia bởi $n + 1 = 0$

49: $.7913, -3.7913, 1.618, -.618; 0, 1.266, -2.766$

Mục 2.3 (Trang 88)

1: $\frac{-12}{x^2}; y - 6 = -3(x-2); y - 6 = \frac{1}{3}(x - 2); y - 6 = -\frac{3}{2}(x-2)$

3: $y + 1 = 3(x-1); y = 3x - 4$

5: $y = x; (3,3)$

7: $y - a^2 = (c+a)(x-a); y - a^2 = 2a(x-a)$

9: $y = \frac{1}{5}x^2 + 2; y - 7 = -\frac{1}{2}(x-5)$

11: $y = 1; x = \frac{\pi}{2}$

13: $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a); y = \frac{2}{a}, x = 2a; 2$

15: $c = 4$, tangent at $x = 2$

17: $(-3, 19)$ and $(\frac{1}{3}, \frac{13}{27})$

19: $c = 4, y = 3 - x$ tangent at $x = 1$

21: $(1+h)^3; 3h + 3h^2 + h^3; 3 + 3h + h^2; 3$

23: Tangents parallel, same normal

25: $y = 2ax - a^2, Q = (0, -a^2)$; distance $a^2 + \frac{1}{4}$; angle of incidence = angle of rèlection

27: $x = 2p$; focus has $y = \frac{x^2}{4p} = p$

29: $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = x + \frac{1}{\sqrt{2}}; x = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

31: $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a); y = a^2 + \frac{1}{2}; a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

33: $(\frac{1}{x^2})(1000) = 10$ at $x = 10$

37: $1.01004512; 1 + 10(.001) = 1.01$

39: $(2+\Delta x)^3 - (8 + 6\Delta x) = 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

41: $x_1 = \frac{5}{4}; x_2 = \frac{41}{40}$

43: $T = 8$ sec; $f(T) = 96$ meter

45: $a > \frac{4}{5}$ meter/sec^2

Mục 2.4 (Trang 96)

1: (a) và (b)

3: 0; 1; 5; $\frac{1}{5}$

5: $\sin(x + 2\pi)$; $(\sin h)/h \to 1$; 2π

7: $\cos^2\theta \approx 1 - \theta^2 + \frac{1}{4}\theta^4$; $\frac{1}{4}\theta^4$ là nhỏ

9: $\sin\frac{1}{2}\theta \approx \frac{1}{2}\theta$

11: $\frac{3}{2}$; 4

13: $PS = \sin h$; diện tích $OPR = \frac{1}{2}\sin h <$ diện tích nan quạt $\frac{1}{2}h$

15: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2*1} + \frac{x^4}{4*3*2*1} - ...$

17: $\frac{1}{2h}(\cos(x+h) - \cos(x-h)) = \frac{1}{h}(-\sin x \sin h) \to -\sin x$

19: $y' = \cos x - \sin x = 0$ tại $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

21: $(\tan h)/h = \sin h / h \cos h < \frac{1}{\cos h} \to 1$

23: Hệ số góc $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; không

25: $y = 2\cos x + \sin x; y'' = -y$

27: $y = -\frac{1}{3}\cos 3x; y = \frac{1}{3}\sin 3x$
29: Theo độ $(\sin h)/h \to 2\pi/360 = .01745$
31: $2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x) = 0$

Mục 2.5 (Trang 104)

1: $2x$
2: $\frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$
5: $(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$
7: $-x^2\sin x + 4x\cos x + 2\sin x$
9: $2x - 1 - \frac{1}{\sin^2 x}$
11: $2\sqrt{x}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x^{-1/2}\sin^2 x + \frac{1}{2}(\sin x)^{-1/2}\cos x$
13: $4x^3\cos x - x^4\sin x + \cos^4 x - 4x\cos^3 x\sin x$
15: $\frac{1}{2}x^2\cos x + 2x\sin x$
17: 0
19: $-\frac{8}{3}(x-5)^{-5/3} + \frac{8}{3}(5-x)^{-5/3}(= 0?)$
21: $3(\sin x\cos x)^2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos 2x$
23: $u'vwz + v'uwz + w'uuz + z'uvw$
25: $-\csc^2 x - \sec^2 x$
27: $V = \frac{t\cos t}{1+t}, V' = \frac{\cos t - t\sin t^2 \sin t}{(1+t)^2}$ $A = 2(\frac{t}{t+1} + t\cos t + \frac{\cos t}{t+1})$ $A' = 2(\cos t - t\sin t + \frac{1-\cos t}{(t+1)^2} - \frac{\sin t}{t+1})$
29: $10t$ đối với $t < 10$, $\frac{50}{\sqrt{t-10}}$ đối với $t > 10$
31: $\frac{2t^3+3t^2}{(1+t)^2}; \frac{2t^3+6t^2+6t}{(1+t)^3}$
33: $u''v + 2u'v' + uv''; u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''$
35: $\frac{1}{2}\sin^2 t, \frac{1}{2}\tan^2 t, \frac{2}{3}[(1+t)^{3/2} - 1]$
39: Đ; S; S; Đ; S
41: bậc $2n-1$/ bậc $2n$
43: $v(t) = \cos t - t\sin t (t \le \frac{\pi}{2})$; $v(t) = -\frac{\pi}{2}(t \ge \frac{\pi}{2})$
45: $y = \frac{2hx^3}{L^3} + \frac{3hx^2}{L^2}$ có $\frac{dy}{dx} = 0$ tại $x = 0$ (không đâm vào mặt đất) và tại $x = -L$ (không chìm xuống dưới biển). Khi đó $\frac{dy}{dx} = \frac{6Vh}{L}(\frac{x^2}{L^2} + \frac{x}{L})$ và $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6V^2h}{L^2}(\frac{2x}{L} + 1)$.

Mục 2.6 (Trang 113)

1: $\frac{1}{4}$, $L = 0$, sau $N = 10$; $\frac{25}{24}$, ∞, không N; $\frac{1}{4}$, 0, sau 5; 1.1111, $\frac{10}{9}$, mọi n; $\sqrt{2}$, 1, sau 38; $\sqrt{20} - 4$, $\frac{1}{2}$, mọi n; $\frac{625}{256}$, $e = 2.718\ldots$, sau $N = 12$.
3: (c) và (d)
5: Bên ngoài bất kỳ khoảng nào quanh không chỉ có hữu hạn các a
7: $\frac{5}{2}$
9: $\frac{f(h) - f(0)}{h}$
11: 1
13: 1
15: $\sin 1$
17: Không có giới hạn
19: $\frac{1}{2}$
21: Không nếu $f(x)$ là liên tục tại a
23: 2
25: .001, .0001, .005, .1
27: $\mid f(x) - L \mid$; $\frac{4x}{1+x}$
29: 0; $X = 100$
33: 4; ∞; 7; 7
35: 3; không có giới hạn; 0; 1
37: $\frac{1}{1-r}$ nếu $\mid r \mid \ge 1$
39: .0001; sau $N = 7$ (hoặc 8?)
41: $\frac{1}{2}$
43: 9; $8\frac{1}{2}$; $a_n - 8 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 8) \to 0$
45: $a_n - L \le b_n - L \le c_n - L$ nên $\mid b_n - L \mid < \epsilon$ nếu $\mid a_n - L \mid < \epsilon$ và $\mid c_n - L \mid < \epsilon$

Mục 2.7 (Trang 119)

1: $c = \sin 1$; không có c
3: Bất kỳ c nào; $c = 0$
5: $c = 0$ hoặc 1; không có c
7: $c = 1$; không có c
9: không có c; không có c
11: $c = \frac{1}{64}$; $c = \frac{1}{64}$
13: $c = -1$; $c = -1$
15: $c = 1$; $c = 1$
17: $c = -1$; $c = -1$
19: $c = 2, 1, 0, -1, \ldots$; cùng c
21: $f(x) = 0$ ngoại trừ tại $x = 1$
23: $\sqrt{x-1}$
25: $-\frac{2x}{\mid x \mid}$
27: $\frac{5}{x-1}$
29: Một; hai; hai
31: Không; có; không
33: $xf(x)$, $(f(x))^2$, x, $f(x)$, $2(f(x) - x)$, $f(x) + 2x$
35: S; S; S; Đ
37: Bước; $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ với $f(0) = 0$
39: Có; không; không; có ($f_4(0) = 1$)

41: $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = -g(0)$; không là một giá trị trung gian giữa $g(0)$ và $g(\frac{1}{2})$

43: $f(x) - x$ is ≥ 0 tại $x = 0$ và ≤ 0 tại $x = 1$

CHƯƠNG 3

Mục 3.1 (Trang 128)

1: $Y = x$

3: $Y = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4})$

5: $Y = 2\pi(x - 2\pi)$

7: $2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot .001$

9: 1

11: $1 - 1(-.02) = 1.02$

13: Sai số .000301 vs. $\frac{1}{2}(.0001)6$

15: $.0001 - \frac{1}{3}10^{-8}$ vs. $\frac{1}{2}(.0001)(2)$

17: Sai số .59 vs. $\frac{1}{2}(.01)(90)$

19: $\frac{d}{dx}\sqrt{1-x} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}$ tại $x = 0$

21: $\frac{d}{du}\sqrt{c^2+u} = \frac{1}{2\sqrt{c^2+u}} = \frac{1}{2c}$ tại $u = 0$, $c + \frac{u}{2c} = c + \frac{x^2}{2c}$

23: $dV = 3(10)^2(.1)$

25: $A = 4\pi r^2$, $dA = 8\pi r\, dr$

27: $V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi rh\, dr$ (cộng $\pi r^2 dh$)

29: $1 + \frac{1}{2}x$

31: Căn bậc 32

Mục 3.2 (Trang 136)

1: $x = -2$: cực tiểu tuyệt đối

3: $x = -1$: cực đại tương đối, $x = 0$: cực tiểu tuyệt đối, $x = 4$: cực đại tuyệt đối

5: $x = -1$: cực đại tuyệt đối, $x = 0, 1$: cực tiểu tuyệt đối, $x = \frac{1}{2}$: cực đại tương đối

7: $x = -3$: cực tiểu tuyệt đối, $x = 0$: cực đại tương đối, $x = 1$: cực tiểu tương đối

9: $x = 1, 9$: cực tiểu tuyệt đối, $x = 5$: cực đại tương đối

11: $x = \frac{1}{3}$: cực đại tương đối, $x = 1$: cực tiểu tương đối, $x = 0$: bất động (không phải cực tiểu hay cực đại)

13: $x = 0, 1, 2, \ldots$: cực tiểu tuyệt đối, $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$: cực đại tuyệt đối

15: $|\, x \,| \leq 1$: cực tiểu hết thảy, $x = -3$ cực đại tuyệt đối, $x = 2$ cực đại tương đối

17: $x = 0$: cực tiểu tuyệt đối, $x = \frac{1}{3}$: cực đại tuyệt đối, $x = 4$: cực tiểu tuyệt đối

19: $x = 0$: cực tiểu tuyệt đối, $x = \pi$: bất động (không phải cực đại hay cực tiểu), $x = 2\pi$: cực đại tuyệt đối

21: $\theta = 0$: cực tiểu tuyệt đối, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ ($\sin\theta = \frac{4}{5}$ và $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ cực đại tuyệt đối và $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ và $\cos\theta = \frac{3}{5}$ cực tiểu tuyệt đối), $x = 2\pi$ cực đại tương đối

23: $h = \frac{1}{3}(62''$ hay $158\,\text{cm})$; hình khối

25: $\frac{v}{av^2+b}$; $2\sqrt{ab}$ gallons/mile, $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ miles/gallon tại $v = \sqrt{\frac{b}{a}}$

27: (b) $\theta = \frac{3\pi}{8} = 67.5°$

29: $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$; so sánh Ví dụ 7; $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$

31: $R(x) - C(x)$; $\frac{R(x) - C(x)}{x}$; $\frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dc}$; lợi nhuận

33: $x = \frac{d-a}{2(b-e)}$; số không

35: $x = 2$

37: $V = x(6 - \frac{3x}{2})(12 - 2x)$; $x \approx 1.6$

39: $A = \pi r^2 + x^2$, $x = \frac{1}{4}(4 - 2\pi r)$; $r_{\min} = \frac{2}{2+\pi}$

41: diện tích cực đại 2500 vs $\frac{10000}{\pi} = 3185$

43: $x = 2$, $y = 3$

45: $P(x) = 12 - x$; hình chữ nhật mỏng có cạnh dài dọc theo trục y

47: $h = \frac{H}{3}$, $r = \frac{2R}{3}$, $V = \frac{4\pi R^2 H}{27} = \frac{4}{9}$ của diện tích hình nón

49: $r = \frac{HR}{2(H-R)}$; hình trụ tròn tốt nhất *không* có chiều cao, diện tích $2\pi R^2$ từ đỉnh và đáy (?)

51: $r = 2$, $h = 4$

53: 25 và 0

55: 8 và $-\infty$

57: $\sqrt{r^2+x^2} + \sqrt{q^2+(s-x)^2}$; $\frac{df}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} - \frac{s-x}{\sqrt{q^2+(s-x)^2}} = 0$ khi $\sin a = \sin c$

59: $y = x^2 = \frac{3}{2}$

61: $(1, -1)$, $(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5})$

63: $m = 1$ đưa ra đường thẳng gần nhất

65: $m = \frac{1}{3}$

67: bằng nhau; $x = \frac{1}{2}$

69: $\frac{1}{x}x^2$

71: Đúng (dùng sự đổi dấu của f'')

73: Bán kính R,bơi $2R\cos\theta$, chạy $2R\theta$,thời gian $\frac{2R\cos\theta}{v} + \frac{2R\theta}{10v}$; *cực đại* khi $\sin\theta = \frac{1}{10}$, *cực tiểu* khi chỉ chạy trên cả quảng đường

Mục 3.3 (Trang 146)

3: $y = -1 - x^2$; không $\cdots$

5: Sai

7: Đúng

9: Đúng (f' có 8 không điểm, f'' có 7)

11: $x = 3$ là cực tiểu: $f''(3) = 2$

13: $x = 0$ không phải là cực đại hay cực tiểu; $x = \frac{9}{2}$ là cực tiểu: $f''(\frac{9}{2}) = 81$

15: $x = \frac{3\pi}{4}$ là cực đại: $f''(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$; $x = \frac{7\pi}{4}$ là cực tiểu: $f''(\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}$

17: Lõm xuống đối với $x > \frac{1}{3}$ (điểm uốn)

19: $x = 3$ là cực đại: $f''(3) = -4$; $x = 2, 4$ là các điểm cực tiểu nhưng $f'' = 0$

21: $f(\Delta x) = f(-\Delta x)$

23: $1 + x - \frac{x^2}{2}$

25: $1 - \frac{x^2}{6}$

27: $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

29: Sai số $\frac{1}{2}f''(x)\Delta x$

31: Sai số $0\Delta x + \frac{1}{3}f'''(x)(\Delta x)^2$

37: $\frac{1}{.99} = 1.010101; \frac{1}{1.1} = .90909$

39: Điểm uốn

41: 18 vs. 17

43: Lõm trên; phía dưới

Mục 3.4 (Trang 157)

1: 120; 150; $\frac{60}{x}$

3: Lẻ; $x = 0$, $y = x$

5: Chẵn; $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$

7: Chẵn; $y = 1$

9: Chẵn;

11: Chẵn; $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$

13: $x = 0$, $x = -1$, $y = 0$

15: $x = 1$, $y = 1$

17: Lẻ

19: $\frac{2x}{x-1}$

21: $x + \frac{1}{x-4}$

23: $\sqrt{x^2+1}$

25: Có cùng bậc

27: Có bậc $P <$ bậc Q; không

29: $x = 1$ và $y = 3x + C$ nếu f là một đa thức; nhưng $f(x) = (x-1)^{1/3} + 3x$ không có tiệm cận $x = 1$

31: $(x-3)^2$

39: $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, y = x$

41: $Y = 100\sin\frac{2\pi X}{360}$

45: $c = 3, d = 10$; $c = 4, d = 20$

47: $x^* = \sqrt{5} = 2.236$

49: $y = x - 2$;$Y = X$; $y = 2x$

51: $x_{\max} = .281, x_{\min} = 6.339$; $x_{\inf} = 4.724$

53: $x_{\min} = .393, x_{\max} = 1.53, x_{\min} = 3.33$; $x_{\text{uốn}} = .896, 2.604$

55: $x_{\min} = -.7398, x_{\max} = .8135$;$x_{\inf} = .04738$;$x_{\text{bùng nổ}} = \pm 2.38$

57: 8 chữ số

Mục 3.5 (Trang 167)

1: $dy/dx = 0$ tại $\frac{-b}{2a}$

3: $V = (1, -4)$, $F = (1, -3.75)$

5: $V = (0, 0)$, $F = (0, -1)$

7: $F = (1, 1)$

9: $V = (0, \pm 3)$;$F = (0, \pm\sqrt{8})$

11: $V = (0, \pm 1)$;$F = (0, \pm\sqrt{\frac{5}{4}})$

13: Hai đường thẳng, $a = b = c = 0$; $V = F = (0, 0)$

15: $y = 5x^2 - 4x$

17: $y + p = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \rightarrow 4py = x^2$; $F = (0, \frac{1}{12})$, $y = -\frac{1}{12}$; $(\pm\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{11}{12})$

19: $x = ay^2$ với $a > 0$; $y = \frac{(x+p)^2}{4p}$; $y = -ax^2 + ax$ với $a > 0$

21: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

23: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{32} = 1$; $x^2 + y^2 = 25$

25: Đường tròn, hyperbola, ellipse, parabola

27: $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5}$; $y = -\frac{4}{5}x + 5$

29: $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{40} = \frac{1}{2}(\frac{5}{4} - \frac{4}{5})$

31: Đường tròn; $(3, 1)$; 2; $X = \frac{x-3}{2}$, $Y = \frac{y-1}{2}$

33: $3x'^2 + y'^2 = 2$

35: $y^2 - \frac{1}{3}x^2 = 1$;$\frac{y^2}{9} - \frac{4x^2}{9} = 1$;$y^2 - x^2 = 5$

37: $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{39}=1$
39: y^2-4y+4, $2x^2+12x+18$; -14, $(-3,2)$, phải-trái
41: $F=(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2},0)$; $y=\pm\dfrac{x}{2}$
43: $(x+y+1)^2=0$
45: $(a^2-1)x^2+2abxy+(b^2-1)y^2+2acx+2bcy+c^2=0$; $4(a^2+b^2-1)$; nếu $a^2+b^2<1$ khi đó $B^2-4AC<0$

Mục 3.6 (Trang 176)

1: $-.366$; ∞
3: 1; 1
5: $\dfrac{2}{3}$; $\pm\infty$
7: -2; -2
9: $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ hút, $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ đẩy; $\dfrac{1}{2}$ hút, 0 đẩy; 1 hút, 0 đẩy; 1 hút; $\dfrac{2}{3}$ hút, 0 đẩy;
11: Âm
13: .900
15: .679
17: $\mid a\mid<1$
19: Bất ổn $\mid F'\mid>1$
21: $x^*=\dfrac{s}{1-a}$; $\mid a\mid<1$
23: \$2000; \$2000
25: $x_0, b/x_0, x_0, b/x_0, \ldots$
27: $F'=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^{-3/2}=-\dfrac{1}{2}$ tại x^*
29: $F'=1-2cx=1-4c$ tại $x^*=2$; $0<c<\dfrac{1}{2}$ thành công
31: $F'=1-9c(x-2)^8=1-9c$ at $x^*=3$;$0<c<\dfrac{2}{9}$ thành công
33: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x^3-2}{3x_n^2}$; $x_{n+1}=x_n-\dfrac{\sin x_n-\frac{1}{2}}{\cos x_n}$
35: $x^*=4$ nếu $x_0>2.5$; $x^*=1$ nếu $x_0<2.5$
37: $m=1+c$ tại $x^*=0$, $m=1-c$ tại $x^*=1$ (hội tụ nếu $0<c<2$)
39: 0
43: $F'=1$ tại $x^*=0$

Mục 3.7 (Trang 187)

1: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3-b}{3x_n^2}=\dfrac{2x_n}{3}+\dfrac{b}{3x_n^2}$
5: $x_1=x_0$; x_1 không được xác định (∞)
7: $x^*=1$ hoặc 5 từ $x_0<3$, $x_0>3$
11: $x_0<\dfrac{1}{2}$ tới $x^*=0$; $x_0>\dfrac{1}{2}$ tới $x^*=1$
21: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^k-7}{kx_n^{k-1}}$
23: $x_4=\cot\pi=\infty$; $x_3=\cot\dfrac{8\pi}{7}=\cot\dfrac{\pi}{7}$
25: π không phải là một phân số
27: $=\dfrac{1}{4}x_n^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x_n^2}=\dfrac{(x_n^2+1)^2}{4x_n^2}=\dfrac{y_n^2}{4(y_n-1)}$
29: $16z-80z^2+128z^3-64z^4$; 4; 2
31: $\mid x_0\mid<1$
33: $\Delta x=1$, hội tụ một bước đối với các bình phương bậc hai
35: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{5.25}{1.5}$; $x_2=1.86$
37: $1.75<x^*<2.5$; $1.75<x^*<2.125$
39: $8; 3<x^*<4$
41: Tăng thêm 1; tăng gấp đôi đối với Newton
45: $x_1=x_0+\cot x_0=x_0+\pi$ đưa ra $x_2=x_1+\cot x_1=x_1+\pi$
49: $a=2$, các Y tiến tới $\dfrac{1}{2}$

Mục 3.8 (Trang 196)

1: $c=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$
3: Không có c
5: $c=1$
7: Điểm góc tại $\dfrac{1}{2}$
9: Điểm lùi tại 0
11: $\sec^2 x-\tan^2 x=$ hằng số
13: 6
15: -2
17: -1
19: n
21: $-\dfrac{1}{2}$
23: Không phải $\dfrac{0}{0}$
25: -1
27: 1;$\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ không có giới hạn
29: $f'(c)=\dfrac{4^3-1^3}{4-1}$; $c=\sqrt{7}$
31: $0=x^*-x_{n+1}+\dfrac{f''(c)}{2f''(x_n)}(x^*-x_n)^2$ đưa ra $=M\approx\dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$
33: $f'(0)$; $\dfrac{f'(x)}{1}$; điểm kỳ dị
35: $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{3}{4}$
37: 1

CHƯƠNG 4

Mục 4.1 (Trang 203)

1: $z=y^3$, $y=x^2-3$, $z'=6x(x^2-3)^2$
3: $z=\cos y$, $y=x^3$, $z'=-3x^2\sin x^3$
5: $z=\sqrt{y}$, $y=\sin x$, $z'=\cos x/2\sqrt{\sin x}$

7: $z = \tan y + (1/\tan x)$, $y = 1/x$, $z' = (\frac{-1}{x^2})\sec^2(\frac{1}{x}) - (\tan x)^{-2}\sec^2 x$
9: $z = \cos y$, $y = x^2 + x + 1$, $z' = -(2x + 1)\sin(x^2 + x + 1)$
11: $17\cos 17x$
13: $\sin(\cos x)\sin x$
15: $x^2\cos x + 2x\sin x$
17: $(\cos\sqrt{x+1})\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$
19: $\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}(\cos x)$
21: $(\frac{1}{\sin x})(\frac{-\cos x}{\sin^2 x})$
23: $8x^7 = 2(x^2)(2x)$
25: $2(x+1) + \cos(x+\pi) = 2x + 2 - \cos x$
27: $(x^2+1)^2+1$; $\sin U$ từ 0 tới $\sin 1$; $U(\sin x)$ là 1 và 0 với chu kỳ 2π; R từ 0 tới x; $R(\sin x)$ là nửa sóng.
29: $g(x) = x+2$, $h(x) = x^2+2$; $k(x) = 3$
31: $f'(f(x))f'(x)$; không ; $(-1/(1/x)^2)(-1/x^2) = 1$ và $f(f(x)) = x$
33: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+8)+8$; $\frac{1}{8}x+14$; $\frac{1}{16}$
35: $f(g(x)) = x$, $g(f(y)) = y$
37: $f(g(x)) = \frac{1}{1-x}$, $g(f(x)) = 1 - \frac{1}{x}$, $f(f(x)) = x = g(g(x))$, $g(f(g(x))) = \frac{x}{x-1} = f(g(f(x)))$
39: $f(y) = y - 1$, $g(x) = 1$
42: $2\cos(x^2+1) - 4x^2\sin(x^2+1)$; $-(x^2-1)^{-3/2}$; $-(\cos\sqrt{x})/4x + (\sin\sqrt{x})/4x^{3/2}$
45: $f'(u(t)u'(t)$
47: $(\cos^2 u(x) - \sin^2 u(x))\,\frac{du}{dx}$
49: $2xu(x) + x^2\frac{du}{dx}$
51: $1/\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\sqrt{1-x}$
53: df/dt
55: $f'(g(x))g'(x) = 4(x^3)^3 3x^2 = 12x^{11}$
57: 3600; $\frac{1}{2}$; 18
59: 3; $\frac{1}{3}$

Mục 4.2 (Trang 209)

1: $-x^{n-1}/y^{n-1}$
3: $\frac{dy}{dx} = 1$
5: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F'(y)}$
7: $(y^2 - 2xy)/(x^2 - 2xy)$ hoặc 1
9: $\frac{1}{\sec^2 y}$ hay $\frac{1}{1+x^2}$
11: Thứ nhất $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, thứ hai $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
13: Nhanh hơn, nhanh hơn nữa
15: $2zz' = 2yy' \to z' = \frac{y}{x}y'\sin\theta$
17: $\sec^2\theta \approx \frac{c}{200\pi}$
19: $500\frac{df}{dx}$; $500\sqrt{1+(\frac{df}{dx})^2}$
21: $\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}$; $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{3}$; ∞ sau đó 0
23: $V = \pi r^2 h$; $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}$ $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4\pi}$ in/s
25: $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, $\frac{dA}{dt} = 7$
27: $1.6\,\mathrm{m/s}$; $9\,\mathrm{m/s}$; $12.8\,\mathrm{m/s}$
29: $-\frac{7}{5}$
31: $\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta\frac{d\theta}{dt}$; $\theta'' = \frac{\cos\theta}{10}y'' - \frac{1}{50}\cos^3\theta\sin\theta(y')^2$

Mục 4.3 (Trang 217)

1: $x = \frac{y+6}{3}$
3: $x = \sqrt{y+1}$(x không được giới hạn $\to$ không có hàm ngược)
5: $x = \frac{1}{y-1}$
7: $x = (1+y)^{1/3}$
9: (x không được giới hạn $\to$ không có hàm ngược)
11: $y = \frac{1}{x-a}$
13: $2 < f^{-1}(x) < 3$
15: f đi lên và xuống
17: $f(x)g(x)$ và $\frac{1}{f(x)}$
19: $m \neq 0$; $m \geq 0$; $|\, m \,| \geq 1$
21: $\frac{dy}{dx} = 5x^4$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{-4/5}$
23: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}(1+y)^{-2/3}$
25: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{(y-1)^2}$
27: y;$\frac{1}{2}y^2 + C$
29: $f(g(x)) = -1/3x^2$; $g^{-1}(y) = \frac{-1}{y}$; $g(g^{-1}(x)) = x$
39: $2/\sqrt{3}$
41: $1/6\cos 9$
43: Giảm; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} < 0$
45: S; Đ; S
47: $g(x) = x^m$, $f(y) = y^n$, $x = (z^{1/n})^{1/m}$
49: $g(x) = x^3$, $f(y) = y + 6$, $x = (z-6)^{1/3}$
51: $g(x) = 10^x$, $f(y) = \log y$, $x = \log(10^y) = y$
53: $y = x^3$, $y'' = 6x$, $d^2x/dy^2 = -\frac{2}{9}y^{-5/3}$; $\mathrm{m/s^2}$, $\mathrm{s/m^2}$

55: $p = \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 1;\ 0 < y \leq 1$

57: $\max = G = \dfrac{3}{8}y^{4/3},\ G' = \dfrac{1}{2}y^{1/3}$

59: $y^2/100$

Mục 4.4 (Trang 223)

1: $0,\ \dfrac{\pi}{2},\ 0$

3: $\dfrac{\pi}{2},\ 0,\ \dfrac{\pi}{4}$

5: π nằm ngoài $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

7: $y = -\sqrt{3}/2$ và $\sqrt{3}/2$

9: $\sin x = \sqrt{1-y^2};\ \sqrt{1-y^2}$ và 1

11: $\dfrac{d(\sin^{-1} y)}{dy} \cos x = 1 \to \dfrac{d(\sin^{-1} y)}{dy} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

13: $y = 0 : 1, -1, 1;\ y = 1 : 0, 0, \dfrac{1}{2}$

15: S; S; Đ; Đ; S; S

17: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19: $\dfrac{dz}{dx} = 3$

21: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

23: $1 - \dfrac{y \sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}}$

25: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{|\ y+1\ |\ \sqrt{y^2+2y}}$

27: $u = 1$ nên $\dfrac{du}{dy} = 0$

31: $\sec x = \sqrt{y^2+1}$

33: $\dfrac{1}{10}, 1, \dfrac{1}{2}$

35: $-y/\sqrt{1-y^2}$

37: $\dfrac{1}{2} \sec \dfrac{x}{2} \tan \dfrac{x}{2}$

39: $\dfrac{nx^{n-1}}{|\ x^n\ |\ \sqrt{x^{2x}-1}}$

41: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

43: $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{1}{1+x^2}$

47: $u = 4\sin^{-1} y$

49: π

51: $-\pi/4$

Chỉ mục

Mũ và Logarithm

$y = b^x \leftrightarrow x = \log_b y$ $y = e^x \leftrightarrow x = \ln y$

$e = \lim(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828\ldots$

$e^x = \lim(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\ln y = \int_1^y \frac{dx}{x}$ $\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$

$\ln xy = \ln x + \ln y \quad \ln x^n = n \ln x$

$\log_a y = (\log_a b)(\log_b y) \quad \log_a b = 1/\log_b a$

$e^{x+y} = e^x e^y \quad b^x = e^{x \ln b} \quad e^{\ln y} = y$

Phương trình và Nghiệm

$y' = cy$	$y_0 e^{ct}$
$y' = cy + s$	$y_0 e^{ct} + \frac{s}{c}(e^{ct} - 1)$
$y' = cy - by^2$	$\frac{c}{b + de^{-ct}}$ $d = \frac{c - by_0}{y_0}$
$y'' = -\lambda^2 y$	$\cos \lambda t$ và $\sin \lambda t$
$my'' + dy' + ky = 0$	$e^{\lambda_1 t}$và $e^{\lambda_2 t}$ hoặc $te^{\lambda_1 t}$
$y_{n+1} = ay_n$	$a^n y_0$
$y_{n+1} = ay_n + s$	$a^n y_0 + s\frac{a^{n-1}}{a-1}$

Vector và Định thức

$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$

$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ (bất đẳng thức Schwars: $|\cos\theta| \leq 1|$

$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ (bất đẳng thức tam giác)

$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\sin\theta|$ (tích chéo)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) \\ +\mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) \\ +\mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \end{array}$$

Quy tắc bàn tay phải $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

Diện tích hình bình hành $= |a_1b_2 - a_2b_1| = |\mathrm{Det}|$

Diện tích tam giác $= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}|\mathrm{Det}|$

Thể tích khối hộp $= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})| = |$Định thức$|$

Ma trận và Nghịch đảo

$Ax =$ kết hợp của các cột $= b$

Nghiệm $x = A^{-1}b$ nếu $A^{-1}A = I$

Bình phương nhỏ nhất $A^TA\bar{x} = A^Tb$

$Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (AB)^T = B^TA^T$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \times & \mathbf{c} \\ \mathbf{c} & \times & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \times & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{cccccc} + & a_1b_2c_3 & + & a_2b_3c_1 & + & a_3b_1c_2 \\ - & a_1b_3c_2 & - & a_2b_1c_3 & - & a_3b_2c_1 \end{array}$$

	Đơn vị SI	Ký hiệu
độ dài	meter	m
khối lượng	kilogram	kg
thời gian	giây	s
dòng điện	ampere	A
tần số	hertz	Hz $\sim$ 1/s
lực	hertz	N $\sim$ kg $\cdot$ m/s^2
áp suất	pascal	Pa $\sim$ N/m^2
năng lượng, công	joule	J $\sim$ N $\cdot$ m
công suất	watt	W $\sim$ J/s
điện tích	coulomb	C $\sim$ A $\cdot$ s
nhiệt độ	kelvin	K

Tốc độ ánh sáng $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s

Hằng số hấp dẫn $G = 6.6720 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Từ	Đến	Nhân bởi
độ	radian	.01745
calorie	joule	4.1868
BTU	joule	1055.1
foot-pound	joule	1.3558
feet	meter	.3048
dặm	km	1.609
feet/giây	km/hr	1.0973
pound	kg	.45359
ounce	kg	.02835
gallon	liter	3.785
sức ngựa	watt	745.7

Bán kính tại Xích đạo $R = 6378$ km $= 3964$ dặm

Gia tốc $g = 9.8067$ m/s$^2 = 32.174$ ft/s^2

Cấp số Cộng và Chuỗi Vô hạn

$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$

$1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n = (1+x)^n$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1) \approx \dfrac{n^2}{2}$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \dfrac{n^3}{3}$

$1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \approx \ln n \to \infty$

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots = \ln 2$

$1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots = \dfrac{\pi}{4}\ \sum \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}\ \sum \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ (hình học: $|x| < 1$)

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{1-x})$

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$ (hình học đối với $-x$)

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots = \displaystyle\int \dfrac{dx}{1+x}$

$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots$ (mọi x)

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots$ ($e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots$)

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (công thức của Euler)

$\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

$\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$b

$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

$f(x,y) = f + xf_x + yf_y + \dfrac{x^2}{2!}f_{xx} + xyf_{xy} + \cdots$

Tọa độ Cực và Tọa độ Cầu

$x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $\tan\theta = y/x$

$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Diện tích $\displaystyle\int \frac{1}{2}r^2\, d\theta$ Chiều dài $\displaystyle\int \sqrt{r_\theta^2 + r^2}\, d\theta$

$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$

Diện tích $d\boldsymbol{A} = dx\, dy = r\, dr\, d\theta = \boldsymbol{J}\, du\, dv$

Thể tích $r\, dr\, d\theta\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

Nhân tử co giãn $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

Còn nhiều tích phân nữa đằng sau chỉ mục.

Diện tích - Thể tích - Chiều dài - Khối lượng - Moment

Đường tròn πr^2 Ellipse πab Nan quạt $r^2\theta/2$

Mặt trụ tròn $2\pi rh$ Thể tích $\pi r^2 h$ Lớp vỏ $dV = 2\pi rh\, dr$

Mặt cầu $4\pi r^2$ Thể tích $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ Lớp vỏ $dV = 4\pi r^2\, dr$

Hình nón Thể tích $\dfrac{1}{3}$(diện tích đáy)(chiều cao)

Chiều dài cung $\displaystyle\int ds = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$

Diện tích giữa các đường cong $\displaystyle\int (v(x) - w(x))\, dx$

Diện tích mặt tròn xoay $\displaystyle\int 2\pi r\, ds$ ($r = x$ hoặc $r = y$)

Thể tích tròn xoay: Lát cắt $\displaystyle\int \pi y^2\, dx$ Lớp vỏ $\displaystyle\int 2\pi xh\, dx$

Diện tích mặt $z(x,y)$: $\displaystyle\iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$

Khối lượng $M = \displaystyle\iint \rho\, dA$ Moment $M_y = \displaystyle\iint \rho x\, dA$

$\overline{x} = M_y/M$, $\overline{y} = M_x/M$ Moment quán tính $I_y = \displaystyle\iint \rho x^2\, dA$

Công $W = \displaystyle\int_a^b F(x)\, dx = V(b) - V(a)$ Lực $F = dV/dx$

Đạo hàm Riêng của $z = f(x,y)$

Mặt phẳng tiếp xúc $z - z_0 = (\dfrac{\partial f}{\partial x})(x - x_0) + (\dfrac{\partial f}{\partial y})(y - y_0)$

Xấp xỉ $\Delta z \approx (\dfrac{\partial f}{\partial y})\Delta x + (\dfrac{\partial f}{\partial y})\Delta y$

Pháp tuyến $\mathbf{N} = (f_x, f_y, -1)$ hay (F_x, F_y, F_z)

Gradient $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

Đạo hàm có hướng: $D_\mathrm{u} f = \nabla f \cdot \mathrm{u} = f_x u_1 + f_y u_2$

Quy tắc xích: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

Trường Vector $\mathbf{F}(x,y,z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$

Công $\displaystyle\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ Flux $\displaystyle\int M\, dy - N\, dx$

Divergence của $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}$

Curl của $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix}$

Bảo toàn $\mathbf{F} = \nabla f =$ gradient của f nếu curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

Định lý của Green $\displaystyle\oint M\, dx + N\, dy = \iint (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\, dx\, dy$

Định lý Divergence $\displaystyle\iint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV$

Định lý của Stoke $\displaystyle\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathrm{n}\, dS$