Prof. Dr. A. Fischer WiS 2018/2019

Modul NUME: Numerische Mathematik Einführung

2. Übungsblatt: 29. Oktober-9. November 2018

Aufgabe 5:

Gegeben sind die Daten

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	3	1	-1	0

Bestimme jeweils den diese Daten interpolierenden kubischen C^2-Spline s mit

1. natürlichen Randbedingungen,
2. periodischen Randbedingungen $s'(x_0+0) = s'(x_n-0),\ s''(x_0+0) = s''(x_n-0)$,
3. *not-a-knot* Bedingungen (DE BOOR Spline).
   $s'''(x_1-0) = s'''(x_1+0)$ und $s'''(x_{n-1}-0) = s'''(x_{n-1}+0)$,
   d.h. s''' ist in x_1 und x_{n-1} stetig. Damit ist s auf $[x_0, x_2]$ sowie auf $[x_{n-2}, x_n]$ ein Polynom dritten Grades. Folglich sind x_1 und x_{n-1} eigentlich *keine Knoten*.

Aufgabe 6:

Eine Funktion s heißt quadratischer Spline zur Zerlegung $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, wenn $s \in C^1[a,b]$ gilt und s auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, mit einem quadratischen Polynom übereinstimmt. Gib eine Berechnungsvorschrift für den quadratischen Spline an, der mit vorgegebenen $y_0, \ldots, y_{n+1}$ die Interpolationsbedingungen

$$s(z_i) = y_i, \quad z_i = \big(x_{i-1} + x_i\big)/2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und die Randbedingungen

$$s(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad s(x_n) = y_{n+1}$$

erfüllt.
Hinweis: Führe $\sigma_i = s(x_i)$ als Parameter ein.

Aufgabe 7*:

Seien $(N+1)$ Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., N$, gegeben mit $a \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le b$. Weiter sei $f \in C^{2N+2}[a,b]$ gegeben und p das Polynom $(2N+1)$-ten Grades mit

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad \text{und} \qquad p'(x_i) = f'(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

Zeige: Zu jedem $x \in [a,b]$ gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!} \prod_{k=0}^{N} (x - x_k)^2.$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, h] \to \mathbb{R}$.

(a)* Leite eine Quadraturformel $Q_\ell(h) = A(h)f(0) + B(h)f(h)$ gemäß

$$\int\limits_0^h f(x)\sqrt{x}\ dx = A(h)f(0) + B(h)f(h) + R$$

her, indem f durch ein lineares Polynom mit den Stützstellen 0 und h interpoliert wird. Gebe eine Darstellung für das Restglied R an.

(b) Berechne nach der in (a) aufgestellten Quadraturformel Q_ℓ genähert das Integral

$$J = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{x} \sin x\ dx$$

und gebe Schranken für den auftretenden Fehler an.
Vergleiche mit der Trapez-Regel und diskutiere die unterschiedliche Größe des Fehlers.

Bemerkung: Rechnet ein Studierender eine mit * gekennzeichnete Aufgabe oder Teilaufgabe erfolgreich vor, dann erhält er einen Bonuspunkt.

Modulbegleitende Aufgabe T3: (Abgabe bis zum 8.11.2018, 11 Uhr)

Seien $(N + 1)$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., N$, gegeben. Weiter sei $f_i, f_i' \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, ..., N$, gegeben.
Bestimme die für den Ansatz

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} \left(f_i g_i(x) + f_i' h_i(x)\right)$$

geeigneten Polynome $(2N + 1)$-ten Grades g_i, h_i, so dass gilt

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{und} \qquad p'(x_i) = f_i'.$$

Hinweis: Benutze für beide Polynome g_i, h_i jeweils den Ansatz

$$L_i^2(x)\,(a_i\,x\ +\ b_i)$$

mit den LAGRANGE-Polynomen $\quad L_i(x) = \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{N} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}.$

Modulbegleitende Aufgabe T4: (Abgabe bis zum 8.11.2018, 11 Uhr)

Löse näherungsweise die Gleichung $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ mittels inverser Polynominterpolation, d.h. durch Interpolation für die inverse Funktion f^{-1}. Verwende dabei die folgende Wertetafel.

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

Bemerkung: Nullstellenbestimmung durch inverse Interpolation ist möglich, wenn die Inverse in einer Umgebung der Nullstelle existiert. Wegen $f'(x) > 1$ existiert die Inverse hier sogar global.

Hinweise:
Bitte beachten Sie bei der Abgabe der Lösung der modulbegleitende Aufgabe:
Jeweils rechts oben muss stehen: *Name, Vorname, Matrikelnummer*
Bei der ersten Abgabe einer Lösung auch angeben: *Immajahrgang* und
Math-Bachelor oder eine vergleichbare Angabe
Wenn Sie die korrigierte Lösung haben möchten, dann dort auch noch:
Übungsgruppe, die Sie besuchen (z.B. *Mi., 2.DS, ger. Woche*)
Geben Sie die Lösung möglichst schon Ihrem Übungsleiter in der Übung.
Abgabe ansonsten auch im Briefkasten "LV - Numerik" (WIL C, 2. Obergeschoss) möglich.
Bitte beachten Sie, dass Lösungen, die nach dem oben angegebenen Termin abgegeben werden, nicht mehr korrigiert werden können.

Hinweise zu nachfolgender modulbegleitenden praktischen Aufgabe

Bearbeitung: In Gruppen von je 2 Studierenden.

Wer bis 6.11. keine Zweier-Gruppe bilden konnte, meldet sich per E-mail bei Dr. Vanselow !

Abgabe: Bis zum 30.11.2018, 24:00 Uhr.

zur Abgabe:

Programme und Ausarbeitung (inkl. Bilder) als zip-File im Anhang senden an:

`opal.numerik`<*at*>`mailbox.tu-dresden.de`

Ausarbeitung als pdf-Datei, im Ausnahmefall auch als Text-Datei.

Das zip-File muss bei den Bearbeitern mit Namen "Klara Meier" und "Hans Müller" sowie für die Aufgabe "PNr" (z.B. P1) und das Programm "Pr" mit Pr=Matlab oder Pr=Octave den Namen Klara_Meier_Hans_Mueller_PNr_Pr.zip haben.

Beim Entpacken des zip-Files müssen alle Files in das Verzeichnis
Klara_Meier_Hans_Mueller_PNr_Pr (oder Unterverzeichnisse davon) entpackt werden.

Im Programm mit einem Kommentar in der ersten Zeile die Bearbeiter und die Aufgabennummer wie folgt vermerken: % Klara_Meier_Hans_Mueller_PNr_Pr.

Betreff der E-Mail: "Numerik_PNr".

Ausarbeitungen in handschriftlicher Form können auch bis 30.11., 13 Uhr, im Sekretariat des Instituts Numerik (Frau Krug, WIL C 319) abgegeben werden. Bitte ins Postfach des Kursassistenten legen lassen.

Vorstellung der Programme und Resultate: 15 Minuten Dauer pro Gruppe zum Vorstellungstermin im PC-Pool in der Regel zu den bekannten Poolzeiten.

Bitte beachten Sie: Bei der Vorstellung muss jedes Gruppenmitglied anwesend sein.

Einschreibung zum Vorstellungstermin:

Einschreibung für einen Vorstellungstermin nach dem Absenden der E-Mail bis zum 4.12. im Sekretariat des Instituts bei Frau Krug WIL C 319. Beachten Sie bitte, dass das Sekretariat i.Allg. von 8 bis 15.30 Uhr besetzt ist.

Falls Sie nicht zu allen Terminen können, dann schreiben Sie sich bitte rechtzeitig ein.

Wer die praktische Aufgabe schon am 28.11. vorstellen möchte, muss sich dazu bis spätestens 27.11. bis 11.30 Uhr einschreiben, wer die praktische Aufgabe am 5.12. vorstellen möchte, muss sich dazu bis spätestens 3.12. bis 12 Uhr einschreiben, sonst bis 4.12. bis 14 Uhr.

Die Vorstellung der praktischen Aufgabe ist voraussichtlich zu folgenden Zeiten möglich:
Mi., 28.11., 6. DS; Mi., 5.12., 6. + 7. DS.; Fr., 7.12., 4.DS.

Beachten Sie bitte auch noch folgenden Hinweis:
Verzeichnis- und Dateinamen sollte keine Umlaute, kein ß und keine Leerzeichen enthalten.

Modulbegleitende Aufgabe P1: (Abgabe bis zum 30.11.2018)

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $I := [-1, 1]$ durch die gleichabständigen Stützstellen $x_i := -1 + ih_N$ für $i = 0, \ldots, N$ und mit $h_N := 2/N$. Weiter sei die Runge-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Berechne Funktionen g_N, die f in den Stützstellen $x_0, \ldots, x_N$ interpolieren. Dabei sei

(a) g_N ein Polynomspline aus $\mathcal{S}_1^0(\Delta_N)$,

(b) g_N ein Polynomspline aus $\mathcal{S}_3^1(\Delta_N)$, der zusätzlich f' in $x_0, \ldots, x_N$ interpoliert.

Bearbeite die Aufgabe (inklusive der unten stehenden Anforderungen) auch für die Funktion

$$f(x) := \big(1 + \cos(\tfrac{3}{2}\pi x)\big)^{2/3}.$$

Weitere Anforderungen

Programme sind in Matlab oder Octave zu schreiben und sollen im PC-Pool der Mathematik lauffähg sein. N soll frei wählbar sein.

Die Bilder der Funktionen f und g_N sollen auf I geplottet werden. Weiterhin ist die Fehlerfunktion $F_N : I \to [0, \infty)$ mit

$$F_N(x) := |f(x) - g_N(x)| \qquad \text{für alle } x \in I$$

an den Stützstellen einer feineren Zerlegung Δ_M zu berechnen und zu plotten. Die Zerlegung Δ_M ist durch $M + 1$ gleichabständige Stützstellen $\tilde{x}_j$ $(j = 0, \ldots, M)$ mit $\tilde{x}_0 := -1$, $\tilde{x}_M := 1$ und $M := 10N$ gegeben.

Für den Plot der Bilder berechne die benötigten Werte nur in den Stützstellen der feineren Zerlegung Δ_M und verwende den Befehl *plot*(), der die jeweilige Funktion zwischen zwei benachbarten Stützstellen linear interpoliert plottet.

Berechne außerdem jeweils die Näherung

$$E(h_N) := \max_{j=0,\ldots,M} |f(\tilde{x}_j) - g_N(\tilde{x}_j)|.$$

für den maximalen Fehler $\|f - g_N\|_\infty$ auf I.

Bestimme für (a) und (b) die **experimentelle Konvergenzordnung** (EOC) von $E(h_N)$, die durch

$$\mathrm{EOC}(h_{N_1}, h_{N_2}) := \frac{\ln E(h_{N_1}) - \ln E(h_{N_2})}{\ln h_{N_1} - \ln h_{N_2}}$$

für je zwei Stützstellenabstände $h_{N_1} \neq h_{N_2}$ erklärt ist.

Zur Dokumentation:

Es ist jeweils für (a) und für (b)

i) die Vorschrift zur Berechnung der Spline-Funktionen g_N anzugeben (mit Angabe einer entsprechenden Referenz oder mit Herleitung),

ii) ein Bild zu plotten, das gleichzeitig die Funktionen f und g_N mit $N = 16$ darstellt,

iii) die Fehlerfunktion F_N mit $N = 16$ zu plotten,

iv) der maximale Fehler $E(h_N)$ in Abhängigkeit von $N = N_k$ mit $N_k := 4 * 2^k$ und $k = 0, 1, 2, 3, 4$ zu tabellieren,

v) die experimentelle Konvergenzordnung $\mathrm{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ zu tabellieren, wobei die N_k entsprechend iv) mit $k = 0, \ldots, 10$ zu verwenden sind,

vi) eine Auswertung/Diskussion der Ergebnisse vorzunehmen.