Stochastikvertiefung: Finanzmathematik WS 19/20

Dozent: Prof. Martin.Keller-Ressel

20. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel I

Einführung

1. Zentrale Fragestellung der Finanzmathematik

Bewertung:

Bewertung von Derivaten und Absicherung gegen aus Kauf/Verkauf entstehenden Risiken.

> **Definition (Derivat)**
> FInanzprodukt, dessen auszahlungen sich vom Preis einer oder mehrer Basisgüter (underlying) ableitet (ableiten entspricht derivate)

■ **Beispiel**

- Recht, in 3 Monaten 100.000 GBP gegen 125.000 EUR zu erhalten (Call-Option, Underlying: Wechselkurs GBP/EUR)
- Recht, innerhalb des nächsten Jahres 100.000 Mwh elektrischer Energie zum Preis von 30EUR/Mwh zu konsumieren mit Mindestabnahme 50.000 Mwh (Swing-Option, Underlying: Strompreis)
- Kauf- und Verkaufsoptionen aus Aktien (Underlying: Aktienkurs)

Fragestellung: Was ist der "faire" Preis für solch ein Derivat? ("Pricing"/Bewertung). Wie kann sicher der Verkäufer gegen eingegangenen Risiken absichern? ("Hedging"/Absicherung)

Optimale Investition

Zusammenstellung von Portofolios, welche nach Risiken/Ertragsgesichtspunkten optimal sind

- Wie wäge ich Risiken gegen Ertrag ab?
- Was genau bedeutet "optimal"?
- Lösung des resultierenden Optimierungsproblems

Risikomangement + Risikomessung

- Gesetzliche Vorschriften (Basel + Solvency) sollen Stabilität des Banken-/Verischerunssystems auch angesichts verschiedener Risiken sicherstellen $\Longrightarrow$ mathematische Theorie der konvexen und kohärenten Risikomaße

Mathematische Werkzeuge: Wtheorie + stochastische Prozesse (Dynamik in der Zeit), etwas lineare Algebra, Optimierung, Maßtheorie

2. Mathematisches Finanzmodell

Wir betrachten

1. WRaum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, später auch weitere W-Maße $Q, \dots$ auf demselben Maßraum $(\Omega, \mathscr{F}), \omega \in \Omega$ Elementarereignisse bzw. "Szenarien"

2. Zeitachse I entweder $I = \{t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$ N-Periode Modell (diskretes Modell) oder $I = [0, T]$ (zeitstetiges Modell), wobei T = Zeithorizont
   Ein stochasticher Prozess S ist eine messbare Abbildung $S : (\Omega, \mathscr{F}) \to \mathbb{R}^d$ mit $(\omega, t) \mapsto S_t(\omega)$ insbesondere ist

   - $t \mapsto S_t(\omega)$ Funktion $I \to \mathbb{R}^d$ für jedes $\omega \in \Omega$ ("Pfad")
   - $\omega \mapsto S_t(\omega)$ Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R}^d$ für jedes $t \in I$

3. Filtration ist Folge von ω-Algebren $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ mit der Eigenschaft $\mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_t \quad \forall s, t \in I, x \leq t$ und $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F} \quad \forall t \in I$
   Interpretation: $\mathscr{F}_t$ =dem Marktteilnehmer zum Zeitpunkt t bekannte/ verfügbare Informationen
   Ereignisse $A \in \mathscr{F}_t$ gelten als "zum Zeitpunkt t" bekannt
   Eine $\mathbb{R}^d$-wertige ZV X heißt $\mathscr{F}_t$-messbar, wenn $E = X^{-1}(B) \in \mathscr{F}_t \quad \forall$ Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ (dabei ist E das Urbild von B)

   ■ **Beispiel**
   Ein stochastischer Prozess $(S_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ heißt adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$, wenn gilt:

   $$S_t \text{ ist } \mathscr{F}_t - \text{messbar} \quad \forall t \in I$$

   Interpretation: "der Wert S_t ist zum Zeitpunkt t bekannt"
   Warum Filtration in der Finanzmathematik (FiMa)?

   - Unterscheidung Zukunft / Vergangenheit
   - unterschiedliche Information (Insider/Outsider) entspricht unterschiedlicher Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ bzw. $(\mathscr{G}_t)_{t\in I}$

4. Anlagegüter (assets) $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger stochastischer Prozess mit Komponenten

   $$S^i : (\Omega \times I) \to \mathbb{R} \quad (\omega, t) \mapsto S^i_t(\omega) \text{ mit } i \in \{0, 1, \dots, d\}$$

   wobei S^i_t = Preis des i-ten Anlageguts zum Zeitpunkt t
   $S^i, i \in \{1, \dots, d\}$ ist typischerweise

   - Aktie (Stock), Unternehmensanteil
   - Währung (currency) bzw. Wechselkurs
   - Rohstoff (commodity) wie z.B. Öl, Edelmetall, Elektriziät, etc
   - Anleihe (bond) ... Schuldverschreibung

   Hauptannahme: S^i ist liquide gehandelt (z.B. an Börse), d.h. Kauf/Verkauf zum Preis S^i_t jederzeit möglich
   $S^0 \dots$ "Numeraire" hat Sonderrolle: beschreibt Verzinsung von nicht in $(S^1, \dots, S^d)$ angelegten Kapital, wird meist risikolos betrachtet

Definition 2.1 (Finanzmodell)
Ein Finanzmodell (FMM) mit Zeitachse I ist gegeben durch

1. einen WRaum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$
2. einen an $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ adaptieren, $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen stochastischen Prozess $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d), t \in I$

■ **Beispiel (Cox-Rubinstein (CRR)-Modell (zeitdiskret))**

- $S_n^0 = (1+r)^n$, d.h. Verzinsung mit konstanter Rate r
- $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n (1+Ru)$, wobei $(R_1, R_2, \ldots)$ unabhängig ZVen mit zwei möglichen Werten $a < b$
  Bild: "rekonbinierter Baum" mit Ereignissen ω entsprechen Pfaden in dem Baum

■ **Beispiel (Block-Scholes-Modell (zeitstetig))**

- $S_t^0 = e^{rt}$, d.h. Verzinsung mit konstanter Rate r
- $S_t^1 = S_0^1 \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma\beta_t)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0^1 > 0$ und β_t entspricht Brownscher Bewegung (stochastischer Prozess in stetiger Zeit) und $\mu - \frac{\omega^2}{2}$ entspricht Trendkomponente

Bild: Börsenkurve $= S_t(\omega)$, wobei zeitstetiges Modell auf unendlichen W-Raum

3. Anleihen und grundeliegende Beispiele für Derivate

Hier betrachten wir immer nur ein Basisgut $S_t = S_t^1$

1. Anleihe(bond): (genauer: Null-Coupon-Anleihe [zero-coupon-bond]) Der Emittent (Herausgeber) einer Anleihe mit Endfälligkeit T [maturity] garantiert dem Käufer zum Zeitpunkt T den Betrag N (EUR/USD/...) zu zahlen.
   Typische Emittenten:

   - Staaten [government bond]
   - Unternehmen (als Alternative zur Kreditaufnahme)

   Nach Emission werden Anleihen auf den Sekundärmarkt weiterverkauft, d.h. liquide gehandelte Wertpapiere
   Preis bei Emission: $B(0, T)$
   Preis bei Weiterverkauf zum Zeitpunkt $t \leq T$: $B(t, T)$
   Wir normieren stets $N = 1 \implies B(T, T) = 1$
   Anleihen von West/Nord/Mitteleuropäischen Staaten + USA/Kananda werden als risikolos betrachtet (sichere Zahlung).
   Sonst: Kreditrisiko
   Risikofreie Anleihen können als Numerale $S_t^0 = B(t, T)$ genutzt werden
   Bild: kann ich gerade nicht beschreiben :/

2. Terminvertrag
   Aus Käufersicht: Vereinbarung zu bestimmten, zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis zu kaufen (Kaufverpflichtung)

Beliebt bei Rohstoffen + Elektrizität
Auszahlunsprofil: $F_T = S_T - K$
Bild: "Eine Gerade mit Schnittpunkt der x-Achse bei K und Schnittpkt der y-Achse bei $S_T \geq 0$, ist ja nur einer Polynom 1. Ordnung"
Preis zum Zeitpunkt t: F_t

3. Europäische Put-/Call-Option: Recht zu einem zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis K zu verkaufen (Put) bzw. zu kaufen (Call) **keine (Ver-)Kaufsverpflichtung**

   - Call:

$$C_T := \begin{cases} S_T - K & S_T \geq K \\ 0 & S_T < K \end{cases} = (S_T - K)_+$$

▶ **Bemerkung**

$$\begin{aligned} X_+ &= \max(X, 0) \quad X_+ - X_{=X} \\ X &= \min(X, 0) \quad X_+ + X_{=|X|} \end{aligned}$$

Bild: (hockey stick function)

   - Put:

$$P_t = \begin{cases} 0 & S_T \geq K \\ K - S_T & S_t < K \end{cases} = (K - S_T)_+$$

Bild: "inversed" hockey stick function xD

4. Amerikanische Put/Call-Option: Wie Put/Call aber mit Ausübung zu beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$
   Preis zum Zeitpunkt t: P_t^{AM}, C_t^{AM}
   Auszahlungsprofil zum zeitpunkt τ: $(S_\tau - K), (K - S_\tau)_+$
   Zeitpunkt τ muss im Allgemeinen als Lösung eines stochastischen Optimierungsproblems bestimmt werden ("Optimales Stopproblem")

4. Elementare Replikations und Arbitrage-Argumente

Was können wir (mit elementaren Mitteln) über die "fairen" Preise $B(t, T), F_t, C_t, P_t$ aussagen?
Wir verwenden:

- Replikationsprinzip: Zwei identische zukünftige Zahlungsströme haben auch heute denselben Wert. (ein Zahlungstrom "repliziert" den anderen)
- No-Arbitage-Prinzip: "Ohne Kapiteleinsatz kann sicherer Gewinn ohne Verlustrisiko erzielt werden"

- Arbitrage: risikofreier Gewinn

- Schwächere Form des Replikationsprinzips:
  Superpositionsprinzip: Ist ein Zahlungsstrom in jedem Fall größer als ein anderer, so hat er auch heute den größeren Wert

stark	Rep. Prinzip	eingeschränkt anwendbar
$\downarrow$	Superrep. Prinzip	$\uparrow$
schwach	No-Arbitrage-Prinzip	immer anwendbar

Lemma 4.1
Für den preis C_t des europäischen Calls gilt:

$$(S_t - K \cdot B(t,T))_+ \leq C_t \leq S_t$$

Beweis. • untere Schranke: Für Widerspruch $S_t - K \cdot (B(t,T)) - C_t = \varepsilon > 0$

Portofolio	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Verkaufe Basisgut	$-S_t$	$-S_T$	$-S_T$
Kaufe Anleihe	$\varepsilon + K \cdot B(t,T)$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$
Σ	0	$K - S_T + \frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$
	keine Anfangskapital	sicherer Gewinn	sicherer Gewinn

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu No-Arbitrage
$\Longrightarrow$ $S_t - K \cdot B(t,T) \leq C_t$ und Ausserdem $C_t \geq 0 \Longrightarrow C_t \geq (S_t - K \cdot B(t,T))_+$

- obere Schranke: UE ☐

Lemma 4.2 (Put-Call-Parität)
Für Put P_t, Call C_t mit demselben Ausübungspreis K und Basisgut S_t gilt

$$C_t - P_t = S_t - B(t,T)K$$

Bild: need to add ..., but should be fast to do ...

Beweis. mit Replikation:

Portofolio 1	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Kaufe Anleihe	$K \cdot B(t,T)$	K	K
Wert Portofolio 1	$C_t + K \cdot B(t,T)$	K	S_T

Portofolio 2	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Put	P_t	$K - S_T$	0
Kaufe Basisgut	S_t	S_T	S_T
Wert Portofolio 2	$P_t + S_t$	K	S_T

Replikationsprinzip: $C_t + K \cdot B(t,T) = P_t + S_t$
$\implies C_t - P_t = S_t - K \cdot B(t,T)$ □

5. Bedingte Erwartungswerte und Martingale

5.1. Bedingte Dichte und bedingter Erwartungswert

Motivation: Gegeben: Zwei ZVen (X,Y) mit Werten in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und gemeinsame Dichte $f_{XY}(x,y)$. Aus f_{XY} können wir ableiten:

- $f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^m} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x$ mit Randverteilung von Y
- $S_Y := \{y \in \mathbb{R}^n : f_Y(y) > 0\}$ Träger von Y - Bild?

Definition (Bedingte Dichte von X bezüglich Y)
Bedingte Dichte von X bezüglich Y ist definiert als

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} & y \in S_Y \\ 0 & y \notin S_Y \end{cases}$$

Betrachte folgende Problemstellung:
Was ist die beste Vorhersage von X gegeben einer Beobachtung $Y = y$?
Kriterium:
Minimiere quadratischen Abstand/ zweite Moment/ L_2-Norm.
Vorhersage:
Messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $y \mapsto g(y)$, d.h,.

$$\min\left\{\mathbb{E}[(X - g(Y))]^2 : g \text{ messbar } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\right\} \tag{min-1}$$

Satz 5.1
Wenn (X,Y) eine gemeinsame Dichte besitzen mit $\mathbb{E}[|X|^2] < \infty$ gilt, dann wird (min-1) minimiert durch die bedingte Erwartung

$$g(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y] := \int_{\mathbb{R}^m} x f_{X|Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

(wobei $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ "Erwartungswert von X bedingt auf $Y = y$")

Allgemeiner gilt:

Theorem 5.2
Seien (X,Y) ZVen mit gemeinsamer Dichte auf $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathbb{E}[h(X,y)^2]$. Dann wird das Minimierungsproblem

$$\min\left\{\mathbb{E}[(h(X,Y)-g(y))^2]\right\} \quad g \text{messbar von } \mathbb{R}^n \text{ nach } \mathbb{R}$$

gelöst durch

$$g(y) = \mathbb{E}[h(X,Y) \mid Y = y] = \int_{\mathbb{R}^m} h(X,Y) f_{X|Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Beweis (nur Prop, Theorem analog, für $n = 1$). Setze $g(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige messbare Funktion mit $\mathbb{E}[p(y)^2] < \infty$. Setze $g_\varepsilon(y) = g(y) + \varepsilon p(y)$. Minimiere

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon) &:= \mathbb{E}[(X-g_\varepsilon(y))^2] = \mathbb{E}[(X-g(y)-\varepsilon p(y))^2] \\
&= \mathbb{E}[(X-g(y))^2] - 2\varepsilon\mathbb{E}[(X-g(y))p(y)] + \varepsilon^2\mathbb{E}[p(y)^2] \\
\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) &= 2\varepsilon\mathbb{E}[p(y)^2] - 2\mathbb{E}[(X-g(y))p(y)] \\
&\implies \varepsilon_* := \frac{\mathbb{E}[(X-g(y))p(y)]}{\mathbb{E}[p(y)^2]} = \frac{A}{B}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}[Xp(y)] - \mathbb{E}[g(y)p(y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} xp(y) f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{S_y} g(y)p(y)f_Y(y) = [\text{Einsetzen von } g + \text{Fubini}] \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} xp(y) f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}\times S_y} xp(y)\underbrace{f_{X|Y}(x,y)f_Y(y\,\mathrm{d}y)}_{=f_{XY}(x,y)} = 0
\end{aligned}$$

also $\varepsilon^* = 0$ unabhängig von $p \implies g(y)$ minimiert (min-1). □

■ **Beispiel**
Seien (X,Y) normalverteilt auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit

$$\mu = (\mu_x,\mu_y)^T \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma x^2 \rho\sigma_x\sigma_y & \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) & \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) \end{pmatrix} \text{ mit } \rho \in [-1,1]$$

Dann ist die beliebige Dichte $f_{X|Y}(x,y)$. (Σ Kovarianzmatrix). wieder die Dichte einer Normalverteilung mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid Y = y] &= \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y) \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid Y = y) &= \sigma_x^2(1-\rho^2)
\end{aligned}$$

(ist ÜA!). Die Abbildung $y \mapsto \mu_x + g(y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)$ heißt Regressionsgerade für X gegeben $Y = y$. Bild: μ_x, μ_y sind Werte auf x,y-Achse und die σ's bilden das Steigungsdreieck (Steigung im We-

sentlichen durch ρ bekannt)
Für diskrete ZVen, d.h. wenn X, Y nur endlich viele $\{x_1, \dots, x_m\}$ bzw. $\{y_1, \dots, y_m\}$ annehmen dann erhalten wir mit ähnlichen Überlegungen als Lösung von (min-1)

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y_j] = \sum_{i=1}^{m} X_i \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j)$$

wobei direkt die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X = x_i \wedge Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} & \text{wenn } \mathbb{P}(Y = y_j) > 0 \\ 0 & \text{wenn } \mathbb{P}(Y = y_j) = 0 \end{cases}$$

5.2. Bedingte Erwartung - maßtheoretischer Zugang

Wir betrachten WRaum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Für ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$ definieren wir die L_p-Norm

$$\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \right)^{1/p}$$

und L_p-Raum $L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) := \left\{ X : \Omega \to \mathbb{R} \colon \mathscr{F} - \text{messbar}, \|X\|_p < \infty \right\}$. Dabei identifzieren wir ZVen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, d.h. $\mathbb{P}(X \neq X') = 0 \implies X = X'$ (in L_p).
Aus Maßtheorie bekannt: (?)
Die Räume $L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit Norm $\|\cdot\|_p, p \in [1, \infty)$ sind stets Banach-Räume (lineare, vollständig, normierte Vektorräume). Für $p = 2$ auch Hilbertraum mit inneren Produkt

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY] = \int_\Omega X(\omega) Y(\omega) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Für $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra ist $L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \subseteq L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ abgeschlossen Unterraum.
Wir verallgemeinern "Vorhersageproblem" aus dem letzten Abschnitt (1.3?)
Gegeben ZVe X aus $L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ist $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra.
Was ist die beste $\mathscr{G}$-messbare Vorhersage für Y?

$$\min\left\{ \mathbb{E}[(X - G)^2] \colon G \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \right\} \tag{min-2}$$

wobei $\mathbb{E}[(X - G)^2] = \|X - G\|_2^2$.
Aus Hilbertraumtheorie:
(min-2) besitzt eine eindeutige Lösung $G_* \in L_2(\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathbb{P})$. G_* ist Optimierung (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$) von $X \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ auf abgeschlossenen Unterraum $L_2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$
Bild: eventuell von Eric (Orthogonal Projektion auf den Unterraum)
Wir bezeichnen mit G_* mit $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ bedingte Erwartungswert von X bezüglich $\mathscr{G}$.

Theorem 5.3 (Eigenschaften bedingter Erwartungswert)
Seien $X, Y \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und $\mathscr{G} \subseteq F$ Unter-σ-Algebra. Dann gilt

1. (Linearität) $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$
2. (Turmregel) Für jede weitere σ-Algebra $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{G}$ gilt
$$\mathbb{E}[E[X \mid \mathscr{G} \mid \mathscr{H}]] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{H}]$$
3. (Pullout-Property) $\mathbb{E}[XZ \mid \mathscr{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$, wenn Z beschränkt und $\mathscr{G}$-messbar ist.
zweite Version: Für Z $\mathscr{G}$-messbar mit $\mathbb{E}[|XZ|] < \infty$ gilt:
$$\mathbb{E}[XZ \mid \mathscr{G}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$$
insbesondere gilt
$$X\mathscr{G}\text{-messbar} \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = X$$
4. (Monotonie) $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$
5. (Δ-Ungleichung) $|\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathscr{G}]$
6. (Unabhängigkeit) X unabhängig von $G \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$
7. (triviale σ-Algebra) $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\} \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$

Beweis. (ohne Beweis, siehe VL W-Theorie mit Martingalen oder auch STOCH-Skript SS19.) □

▶ **Bemerkung**

- Die für $X \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ definierte vedingte Erwartung $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ lässt sich durch Approximation auf alle $X \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ erweitern. Alle Eigenschaften aus Theorem **???** bleiben erhalten!
- Sei Y eine ZVe und $\mathscr{G} = \sigma(Y)$ die von Y erzeugte σ-Algebra. Wir schreiben:
$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] \quad \sigma\text{-messbare ZVe}$$
- Maßtheorie: Doob-Dynkin-Lemma $\implies \exists$ messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sodass
$$\mathbb{E}[X \mid Y] = g(Y)$$
Dabei ist g genau die Funktion aus (min-1).

Zusammenfassung:
Sei X, Y aus $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra

1. $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ ist messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Falls bedingte Dichte existiert, gilt:

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{\mathbb{R}^m} f_{X|Y}(x, y)\,\mathrm{d}x$$

2. $\mathbb{E}[X \mid Y]$ ist eine $\sigma(y)$-messbare ZVe, diese kann als $g(Y)$ dargestellt werden. Falls bedingte Dichte existiert, gilt

$$\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x, Y(\omega))\,\mathrm{d}x$$

3. $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ ist eine $\mathscr{G}$-messbare ZVe. Falls $\mathscr{G} = \sigma(y)$ tritt 2) ein.

In allgemeinen Fall kann $\mathbb{E}[\bar{X} \mid \cdot]$ interpretiert werden als beste Vorhersage für X, gegeben

1. punktweise Beobachtung $Y = y$
2. Beobachtung Y
3. Information $\mathscr{G}$

5.3. Martingale

Prototyp eines "neutralen" stochastischen Prozesses,der weder Aufwärts- noch Abwärtstrend besitzt. Hier nur in diskrete Zeit $Z = \mathbb{N}_0$.

Definition (Martingal ohne Filtration)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stochastischer Prozess. Wenn gilt

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\mathbb{E}[X_{n+1}, \dots, X_n] = X_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

dann heißt (X_n) Martingal. Wen wir $\mathscr{F}_n^* = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ definieren, können wir 2) schreiben als

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] = X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Interpretation:

- Beste Vorhersage für zukünftigen Wert X_{n+1}, basierend auf Vergangenheit $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ ist der momentane Wert X_n.
- Aus der Turmregel folgt

  $$\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_n^*] = X_n \quad n, k \in \mathbb{N}_0$$

  denn

  $$\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_n^*] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_{n+k-1} \mid \mathscr{F}_n^*]] = \mathbb{E}[X_{n+k-1} \mid \mathscr{F}_n^*] = (k\text{-mal}) = X_n$$

Kann von $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf beliebige Filtrationen $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erweitert werden.

Definition (Martingal mit Filtration)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wenn gilt

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
2. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

dann heißt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bezüglich Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Interpretation:
Beste Vorhersage für zukünftige Werte X_{n+1}, basierend auf verfügbarer Information $\mathscr{F}_n$ ist momentane Wert X_n.

Definition (Supermartingal, Submartingal)
Falls in Punkt 2) statt "=" die Ungleichung $\leq$ oder $\geq$ gilt, so heißt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Supermartingal bzw. Submartingal.

Erste Beobachtung:

- X Martingal $\implies \mathbb{E}[X_n] = X_0$, d.h. $n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist konstant.
  Begründung:
  $$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n \implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] \implies (n\text{-mal Anwendung } \mathbb{E}[X_n] = X_0)$$
  Bild: Erwartungswert konstant, aber kein Martingal.
- X Submartingal $\implies n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist monoton steigend
- X Supermartingal $\implies n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist monoton fallend

Um sich den Unterschied zwischen Super- und Submartingal zu merken, hier eine kleine Hilfe:
"Das leben ist ein Supermartingal, die Erwartungen fallen mit der Zeit."

■ **Beispiel**

- Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige ZVen in $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[Y_n] = 0$. Definiere $X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$ mit $X_0 = 0$. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal, denn
  1. $\mathbb{E}[|X_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Y_k|] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓
  2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] &= \mathbb{E}[Y_{n+1} + X_n \mid \mathscr{F}_n^*] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{F}_n^*] \quad (\text{ Turm und } \mathscr{F}_n^*\text{-messbar}) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1}]}_{=0} + X_n = X_n ✓\end{aligned}$$
- weitere Beispiele auf dem ersten Übungsblatt!

Definition (vorhersehbar)
Sei $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt vorhersehbar (predictable) bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn gilt:

$$H_n \text{ ist } \mathscr{F}_{n-1}\text{-messbar} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

▶ **Bemerkung**
Stärkere Eigenschaft als "adaptiert".

Definition (diskretes stochastische Integral)
Sei X adaptierter und H ein vorhersehbarer stochastischer Prozess bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißt

$$(H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \tag{$*$}$$

diskretes stochastische Integral von H bezüglich X.

▶ **Bemerkung**
Summe ($*$) heissen in der Analysis RIEMANN-STIELTJES-Summen. Werden für Konstruktionen des RS-Integrals $\int h \,\mathrm{d}\rho$ verwendet.

Definition (lokal beschränkt)
Ein stochastischer Prozess $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt lokal beschränkt, wenn eine (definierte) Folge $c_\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, sodass

$$|H_n| \leq c_n \text{ f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Theorem 5.4
Sei X adaptiert stochastischer Prozess (bezüglich Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Dann sind äquivalent:

1. X ist Martingal
2. $(H \cdot X)$ ist Martingale für alle lokal beschränkten, vorhersehbaren $(H_n)_{n\in N}$

Das heisst: stochastische Integral erhält die Martingal-Eigenschaft.

▶ **Bemerkung**
Die ZV H wird später die Anlagestrategie sein.

Kapitel II

Cox-Russ-Rubenstein-Modell

Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell (kurz: CRR-Modell) wird auch Binomialmodell genannt und wurde 1979 von Cox, Ross und Rubinstein entwickelt.
Es handelt sich dabei um ein Modell für die Preisentwicklung eines Wertpapiers plus ein Verrechnungskonto mit konstanter Verzinsung (Numeraire) in diskreter Zeit.
Parameter:

r	Zinsrate
b	Rendite des Wertpapiers bei Aufwärtsbewegung (”up“)
a	Rendite des Wertpapiers bei Abwärtsbewegung(”down“)
$p \in (0,1)$	Wahrscheinlichkeit für ”up“
$S_0 > 0$	Preis Wertpapier zum Zeitpunkt Null
$N \in \mathbb{N}$	Anzahl der Zeitschritte

Annahmen: $r > -1$, $b > a > -1$ Wir modellieren Wertpapiere $\{S_k\}_{k \in N}$ und Verrechnungskonto $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ als stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$.

- $S_0^0 = 1$ und $S_n^0 = (1+r)^n$
- Wir definieren die Rendite $R_n(\omega)$ in der n-ten Marktperiode durch

$$R_n = \begin{cases} b & \text{mit } p \\ a & \text{mit } 1-p \end{cases}$$

Die Renditen $(R_1, \ldots, R_N)$ sind unabhängig.

$$S_n = S_0 * \prod_{k=1}^{n} (1 + R_k)$$

Der Verlauf von S lässt sich grafisch als Binomialbaum darstellen:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_0(1+b)^2 \\
 & S_0(1+b) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0(1+a)(1+b) \\
 & S_0(1+a) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_0(1+a)^2
\end{tikzcd}$$

Man nennt dies auch ein ”rekombinierendes Baummmodell“. Es hat den Vorteil, dass die Anzahl der Knoten nur linear mit n wächst.

- Abgezinster Preisprozess $\tilde{S}_n := \frac{S_n}{S_n^0} = S_0 * \prod_{k=1}^n \frac{1+R_k}{1+r}$.
- Filtration: natürliche Filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$.

Satz 0.5
Im CRR-Modell gilt:

1. Die Anzahl der Aufwärtsbewegungen $U_n := \#\{k \in [n] \colon R_k = b\}$ ist binomialverteilt, d.h. $U_n \sim \operatorname{Bin}(n, p)$.
2. Es gilt
$$\log\left(\frac{\tilde{S}_n}{S_0}\right) = U_n \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right) + n \log\left(\frac{1+a}{1+r}\right)$$
d.h. $\log\left(\frac{\tilde{S}_n}{S_0}\right)$ ist nach Skalen-Lagen-Transformation binomialverteilt.
3. Die Verteilung von S_n ist gegeben durch
$$\mathbb{P}\big(S_n = S_0(1+b)^k(1+a)^{n-k}\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beweis. 1. klar
2. $\frac{\tilde{S}_n}{S_0} = \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{U_n} * \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^n \implies \log\left(\frac{\tilde{S}_n}{S_0}\right) = U_n \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right) + n \log\left(\frac{1+a}{1+r}\right)$
3. Es ist $S_n = S_0(1+b)^{U_1}(1+a)^{n-U_n}$. Also
$$\mathbb{P}\big(S_n = S_0(1+b)^k(1+a)^{n-k}\big) = \mathbb{P}(U_n = k) \overset{(a)}{=} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ □

▶ Bemerkung
Teil (b) suggeriert Konvergenz von $\log\left(\frac{\tilde{S}_n}{S_0}\right)$ gegen Normalverteilung für $n \to \infty$ (nach Skalierung) $\rightsquigarrow$ Black-Scholes-Modell ($\nearrow$ Kapitel 3).

Lemma 0.6
Eine selbstfinanzierende Anlagestrategie $(\eta_n, \xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Anfangskapital $w \in \mathbb{R}$ und Werteprozess Π_n sind durch w und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig definiert.

- Der diskrete Werteprozess lässt sich darstellen als
$$\tilde{\Pi}_n = w + \sum_{k=1}^n \xi_k(\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) = w + (\xi \cdot \tilde{S})_n$$
- Der Anteil η_n ist eindeutig gegeben durch
$$\eta_n = \tilde{\Pi}_n - \xi_n \tilde{S}_n$$

Beweis. klar! □

1. Replikation/Hedging von Derivaten in CRR-Modell

Derivat C mit Auszahlung $h(S_1, S_2, \dots, S_N)$ zum Zeitpunkt N, d.h. $C = h(S_1, S_2, \dots, S_n)$ mit h messbar.
Gesucht ist eine replizierende Strategie $(\xi_n)_{n\in[N]}$ und Anfangskapital w, d.h.

- (ξ_n) vorhersehbar mit diskreten Werteprozess $\tilde{\Pi}_n = w + (\xi \cdot \tilde{S})_n$
- Replikationsbedingung

$$C = h(S_1, \dots, S_N) = \Pi_N \text{ f.s.} \tag{Rep}$$

Definition 1.1

1. Derivat C heißt erreichbar, wenn eine Replikationsstrategie existiert.
2. Ein Finanzmodell heißt vollständig, wenn jedes Derivat erreichbar ist.

Theorem 1.2
Sei $C = h(S_1, \dots, S_N)$ Derivat im CRR-Modell. Dann ist C erreichbar, d.h. $\exists w \in \mathbb{R}$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (Rep). Es gilt:

1. $\exists$ messbare Funktion $f_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \in [N]$ so dass

$$\Pi_n = f_n(S_1, \dots, S_n)$$

und die Werte von f_n entlang der Pfade im Binomialbaums sind rekursiv bestimmt durch

$$Rek = \begin{cases} f_N(S_1, \dots, S_N) = h(S_1, \dots, S_N) = C \\ f_n(S_1, \dots, S_N) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-a}{b-a} f^b_{n+1} + \frac{b-r}{b-a} f^a_{n+1}\right) \forall n \in [N]_0 \end{cases}$$

wobei $f^b_{n+1} = f_{n+1}(S_1, \dots, S_n(1+b))$ und $f^a_{n+1} = f_{n+1}(S_1, \dots, S_n(1+a))$

2. Die Replizierende Strategie ist gegeben durch

$$\xi_n = \frac{f^b_n - f^a_n}{S_{n-1}(b-a)} \tag{Δ-Hedge}$$

Folgerung 1.3
Das CRR-Modell ist vollständig.

Folgerung 1.4
Ist C ein europäisches Derivat, d.h. $C = h(S_N)$, mit $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, dann gelten folgende Vereinfachungen: Es reicht $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu nehmen und es gilt

$$\Pi_n = f_n(S_n) \quad f^b_{n+1} = f_{n+1}(S_n(1+b)) \quad f^a_{n+1} = f_{n+1}(S_n(1+a))$$

▶ **Bemerkung**

1. Rekursionen *Rek* entspricht einem Rückwärtsdurchlauf des Baumdiagramms BILD: *tree diagram is missing :/* f_n wird als diskontierter, gewichteter Mittelwert von f^b_{n+1} und f^a_{n+1}

bestimmt. Die Gewichte $q_b = \frac{r-a}{b-a}, q_a = \frac{b-r}{b-a}$. Es gilt: $q_a + q_b = 1$

2. Ursprüngliche Übergangswahrscheinlichkeiten p spielen für Bewertung von C keine Rolle: Sie werden durch "risiko-neutrale" Wahrscheinlichkeiten $q_b, q_a = 1 - q_b$ ersetzt

3. Lässt sich auf den Computer auch für große Bäume effizient implementieren

4. Die Formel für ξ_n wir auch als "Delta-Hedge" bezeichnet

$$\xi_n = \frac{\text{"Preissenkung Derivat"}}{\text{"Preissenkung Basisgut"}} \qquad \text{Differenzenquotient}$$

5. Weitere Interpretation von ξ_n

   - $\xi_n > 0$ Preisänderung Derivat hat selbes Vorzeichen wie Preissenkung Basisgut, keine Lehrverkäufe notwendig!
   - $\xi_n < 0$ Preisänderung Derivat hat entgegengesetztes Vorzeichen wie Preissenkung Basisgut, keine Lehrverkäufe notwendig!
   - $\xi_n \approx 0$ Preisänderung Derivat hängt kaum von Preisänderung Basisgut ab.

Beweis. Mittels Rückwärtsinduktion über $n \in [N]_0$

1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Pi_N = C = h(S_1, \dots, S_N)$ (Rep) also $\Pi_N = f_N(S_1, \dots, S_N)$ mit $f_N = h$
2. Induktionsschritt aus SF-Bedingung folgt

$$\tilde{\Pi}_{n+1} = \tilde{\Pi}_n = \xi_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) \quad |(1+r)^{n-1}$$
$$\implies \Pi_{n+1} - (1+r)\Pi_n = \xi_{n+1}(S_{n+1} - (1+r)S_n) \tag{$*$}$$

Nach IV gilt $\Pi_{n+1} = f_{n+1}(S_1, \dots, S_{n+1}) = f_{n+1}(S_1, \dots, S_n, S_n(1+R_{n+1}))$ (da Definition CRR und $S_{n+1} = S_n(1+R_n)$). Der zweite Fall $R_k = b$ und $R_k = a$ können jeweils mit strikt postiver Wahrscheinlichkeit eintreten.

Fall 1: $\Pi_{n+1} = F_{n+1}(S_1, \dots, S_n, S_n(1+b)) = f^b_{n+1}$, einsetzen in ($*$), gibt

$$f^b_{n+1} - (1+r)\Pi_n = \xi_{n+1} S_n(b-r) \tag{I}$$

Fall 2: $S_{n+1} = S_n(1-a)$ und $\Pi_{n+1} = f_{n+1}(S_1, \dots, S_n, S_n(1+a)) = f^a_{n+1}$, einsetzen in ($*$), gibt

$$f^a_{n+1} - (1+r)\Pi_n = \xi_{n+1} S_n(a-r) \tag{II}$$

□

Π_n ist ξ_{n+1} $\mathscr{F}_n$-messbar, also unabhängig von $R_{n-1} \implies$ (II) (I)

- (II) - (I): $f^b_{n+1} - f^a_{n+1} = \xi_{n+1} S_n(b-a)$, dann $\xi_{n+1} = \frac{f^b_{n+1} - f^a_{n+1}}{S_n(b-a)}$ also (Δ-Hedge) ✓
- in (I) $f^b_{n+1} - (1+r)\Pi_n = \frac{b-r}{b-a}(f^b_{n+1} - f^a_{n+1})$, dann $\Pi_n = \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-a}{b-r} f^a_{n+1} + \frac{b-r}{b-a} f^a_{n+1}\right) \implies$ (Rep) ✓

▶ **Bemerkung**

Lineare GLS (I) + (II) können wir schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1+r & b-r \\ 1+r & a-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_n \\ \xi_{n+1} S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^b \\ f_{n+1}^a \end{pmatrix} \tag{LGS-1}$$

■ **Beispiel**

"Asiatische Call-Option", Auszahlung:

$$C = (\overline{S}_N - K)_+ \text{ mit } \overline{S}_N = \frac{1}{1+N} \sum_{k=0}^{N} S_k$$

Pfadabhängiges Derivat. Bewertung im CRR-Modell mit $N = 2$ mit Parametern:

$$b = 0,3 \quad a = 0,3 \quad r = 0,2 \quad S_0 = 100 \quad K = 100$$

Binomialbaum:

$$\begin{tikzcd}
 & & 169 \\
 & 130 \arrow[ur] \arrow[r] & 91 \\
100 \arrow[ur] \arrow[r] & 70 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 49
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
C &= h(S_1, S_2) \text{ mit } h = f_2 \\
h(130, 169) &= (\frac{399}{3} - 100)_+ = 33 \\
h(130, 91) &= (\frac{321}{3} - 100)_+ = 7 \\
h(70, 91) &= (\frac{261}{3} - 100)_+ = 0 \\
h(70, 49) &= (\frac{219}{3} - 100)_+ = 0
\end{aligned}$$

Rekursion:

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechung: } q = \frac{r-a}{b-a} &= \frac{0,4}{0,6} = 2/3 \text{ und } 1-a = 1/3 \\
f_1(130) &= \frac{1}{1+r}(q \cdot f^b + (1-q)f^a) \\
&= \frac{1}{1,1}(2/333 + 1/37) = \frac{1}{1,1} \cdot 73/3 \\
&\approx 22,12 \\
f_1(70) &= \frac{1}{1,1}(2/30 + 1/30) = 0 \\
f_0 &= \frac{1}{1,1}(2/3 \frac{1}{1,1} 73/3 + 1/ \cdot 0) \approx 13,41
\end{aligned}$$

Strategie:

$$\begin{aligned}
\xi_2(130) &= \frac{f_2^b - f_2^a}{S_1(b-a)} = \frac{33-7}{130 \cdot 0,6} = \frac{26}{13 \cdot 6} = 1/3 \\
\xi_2(70) &= \frac{0-0}{70 \cdot 0,6} = 0 \\
\xi_1 &= \frac{f_1^b - f_1^a}{S_0(b-a)} = \frac{\frac{1}{1,1} 73/3 - 0}{100 \cdot 0,6} = \frac{73}{3 \cdot 11 \cdot 6} = \frac{73}{196} \approx 0,37
\end{aligned}$$

2. Martingale und Arbitrage im CRR-Modell

Betrachte CRR-Modell auf W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Setze weiteres W-Maß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$. D.h. wir lassen die Baumstruktur unverändert, aber ändern die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
\text{von } p &= \mathbb{P}(R_n = b) \\
\text{zu } q &= \mathbb{Q}(R_n = b)
\end{aligned}$$

Notation: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ Erwartungswert unter $\mathbb{Q}$.

Definition 2.1
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ heißt äquivalentes Martingalmaß (EMM) für das CRR-Modell, wenn gilt

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ($\mathbb{Q}$ äquivalent zu $\mathbb{P}$)
2. diskreter Preisprozess $(\tilde{S}_n)_{n \in [N]}$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal, d.h.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = \tilde{S}_n \quad \forall n \in [N-1]_0$$

▶ **Erinnerung 2.2**
$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F})$

- $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} :\Leftrightarrow (\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0 \forall A \in \mathscr{F}$ (Äquivalent)
- $\mathbb{Q} << \mathbb{P} \Leftrightarrow (\mathbb{P}(A) = 0 \implies \mathbb{Q}(A) = 0 \forall A \in \mathscr{F}$ ($\mathbb{Q}$ absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$)
- Es gilt: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \Leftrightarrow (\mathbb{Q} << \mathbb{P} \wedge \mathbb{P} << \mathbb{Q})$

Theorem 2.3

1. IM CRR-Modell existiert ein EMM genau dann, wenn $a < r < b$ gilt
2. Das EMM $\mathbb{Q}$ ist eindeutig und es gilt

$$\begin{aligned} q &:= \mathbb{Q}(R_n = b) = \frac{r-a}{b-a} \\ 1 - q &= \mathbb{Q}(R_n = a) = \frac{b-r}{b-a} \quad \forall n \in [N] \end{aligned}$$

▶ **Bemerkung**

q und $1-q$ sind genau die risiko-neutralen Gewichte, die in (Rep) auftauchen

Beweis. Sei $\mathbb{Q}$ beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$. Setze

$$\begin{aligned} q_n &:= \mathbb{Q}(R_n = b \mid \mathscr{F}_{n-1}) \in [0,1] \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_n \cdot (\frac{1+R_n}{1+r}) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \tilde{S}_{n-1} \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1 + R_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \\ &= \tilde{S}_{n-1} \cdot \frac{1}{1+r} (q_n(1+b) + (1-q_n)(1+a)) \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_{n\in[N]}) \text{ ist } \mathbb{Q}\text{-Martingal} &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{1+r}(q_n(1+b) + (1-q_n)(1-a) &= 1 \quad \forall n \\ q_n b = (1-q_n)a &= r \\ q_n(b-a) = r - a \implies q_n &= \frac{r-a}{b-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_n \in [0,1] &\Leftrightarrow a \le r \le b \\ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \colon q_n \in (0,1) &\Leftrightarrow a < r < b \end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{Q}$ ist EMM $\Leftrightarrow a < r < b$. □

Theorem 2.4 (Risiko-Neutrale Bewertungsformel)
Sei $C = h(S_1, \dots, S_n)$ Derivat im CRR-Modell mir EMM $\mathbb{Q}$. Für den Preisprozess $(\Pi_n)_{n\in[N]}$ von C gilt:

$$\Pi_n = (1+r)^{-(N-n)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C \mid \mathscr{F}_n]$$

Insbesondere gilt

$$w = \Pi_0 = (1+r)^{-N} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C]$$

In Worten: Der faire Preis von C ist eindeutig und gegeben durch den diskontieren Erwartungswert von C unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$.

Beweis. Der Wahrscheinlichkeitsraum für das CRR-Modell ist endlich, d.h. $|\Omega| = 2^N < \infty$ (also haben endlich viele Pfade im CRR-Modell). Daraus folgt jede Zufallsvariable ist beschränkt und insbesondere C und $(\xi_n)_{n\in[N]}$. Sei (ξ_n) Replikationsstrategie für C mit diskontinuierten Werteprozess $(\tilde{\Pi}_n)$, d.h.

$$\tilde{\Pi}_n = w + \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) = w + (\xi \bullet \tilde{S})_n$$

und

$$\tilde{\Pi}_n = (1+r)^{-N} C$$

$\mathbb{Q}$ ist EMM $\implies$ $(\tilde{S}_n)$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal. Mit Theorem 1.6 $(\xi \bullet \tilde{S})_n$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal. Damit folgt $\tilde{\Pi}_n$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal.

$$\begin{aligned} \Pi_n &= (1+r)^n \cdot \tilde{\Pi}_n = (1+r)^n \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Pi_N \mid \mathscr{F}_n] \quad \text{Martingal} \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C \mid \mathscr{F}_n]. \end{aligned}$$

□

▶ **Bemerkung (zur Martingalbedingung für $\mathbb{Q}$)**
Wir schreiben (etwas umständlich)

- $q_b = \mathbb{Q}(R_n = b)$ und $q_a = \mathbb{Q}(R_n = a)$
- $\mathbb{Q}$-Maß: $q_a + q_b = 1 \Leftrightarrow q_b(1+r) + q_a(1+r) = 1 + r$
- Martingalbedingung:

$$(1+b)q_b + (1+a)q_a = 1 - r \Leftrightarrow q_b(b-r) + q_a(a-r) = 0$$

Als LGS:

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ b-r & a-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_b \\ q_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{LGS-2}$$

ist Bedingung für Martingalmaß. Vergleiche mit

$$\begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ b-r & a-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{n+1} \\ \xi_n \cdot S_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^b \\ f_n^a \end{pmatrix}$$

letzteres ist wieder (LGS-1), also Gleiche Matrix, aber transponiert $\implies$ Dualität!

Arbitrge im CRR-Model

Definition 2.5

Eine Anlagestrategie $(\xi_n)_{n\in[N]}$ mit Zeithorizont N und diskontinuierlichem Werteprozess $(\tilde{\Pi}_n)_{n\in[N]}$ heißt Arbitrage, wenn gilt:

1. $\tilde{\Pi}_0 = 0$ (Kein Anfangskapital)
2. $\mathbb{P}(\tilde{\Pi}_N \geq 0) = 1$ (kein Verlustrisiko)
3. $\mathbb{P}(\tilde{\Pi}_N > 0) > 0$ (positiver Gewinn mit positiver Wahrscheinlichkeit)

Die 3 Bedingungen nehmen wir (Arb.)

Theorem 2.6

??? Im CRR-Modell sind äquivalent

1. Es existiert keine Arbitrage (NA = "No-Arbitrage")
2. Ex existiert ein EMM $\mathbb{Q}$

▶ **Bemerkung**

Dieses Theorem gilt im Wesentlichen in allen Finanzmodellen (diskret, stetig, ...). Heißt auch 1. Hauptsatz der Preistheorie.

Beweis.

- b) $\implies$ a) mit Widerspruch. Sei $\mathbb{Q}$ ein EMM und (ξ) Arbitrage. Wegen $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ folgt aus (Arb):

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\tilde{\Pi}_N \geq 0) = 1 \\ &\mathbb{Q}(\tilde{\Pi}_N > 0) > 0 \\ \implies &\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Pi}_N] > 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

  Andererseits: $\tilde{\Pi}_N = 0 + (\xi \cdot \tilde{S})_N$. $\tilde{S}$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal $\implies$ $(\xi \cdot \tilde{S})$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal, dann

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Pi}_N] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((\xi \cdot \tilde{S})_N) = 0 \qquad \square$$

  und das ist ein Widerspruch zu ($*$).

- a) $\implies$ b) klar ✓

Kapitel III

Das Black-Scholes-Modell

Ziel ist der Übergang vom CRR-Modell (zeit-diskret) zum Black-Scholes (BS-)Modell (zeit-stetig) durch Grenzwertbildung.

- Herleitung Block-Scholes-Formel für Preise von europäischen Put- und Call-Optionen

Beachte Zeitintervall $[0,T]$, für jedes $N \in \mathbb{N}$ geteilt in Schritte der Länge $\Delta_n = \frac{T}{N}$. Wähle Parameter $r \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ (Trendparameter), $\sigma > 0$ (Volatitität). Definiere Folge von CRR-Modelle $(S^N)_{N\in\mathbb{N}}$ eingebettet in $[0,T]$ mit Parametern

$$r_N = r \cdot \Delta_n \quad b_N = \mu\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n} \quad a_N = \mu\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n},\ p \in (0,1),\ s > 0$$

d.h. $S_0^N = s$, $S_{t_k}^N = s \cdot \prod_{i=1}^k (1+R_i^N)$ mit $t_k = k \cdot \Delta_n$, bzw. $\tilde{S}_0^N = s$ und damit $\tilde{S}_{t_k}^N = s \cdot \prod_{i=1}^k \frac{1+R_i^N}{1+r_N}$, wobei $\mathbb{P}(R_i^N = b_N) = p, \mathbb{P}(R_i^N = a_N) = 1-p$. Bezeichne diese Folge mit CRR_N. Falls notwendig, interpolieren wir zwischen den Gitterpunkten mit

$$S_t^N = S_{t_k}^N \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Berechne risko-neutrale Wahrscheinlichkeiten

$$q_N = \mathbb{Q}_N(R_i^N = b_N) = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} = \frac{(r-\mu)\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\sqrt{\Delta_n}$$

mit $\lambda := \frac{\mu-r}{\sigma}$

▶ **Bemerkung**

- Wenn $\mu = r$, dann $q_N = \frac{1}{2}$ und im Allgemeinen $\lim_{k\to\infty} a_N = \frac{1}{2}$
- $\lambda := \frac{\mu-r}{\sigma}$ heißt “Sharp-ratio” oder Marktrisikopreis

Frage: Konvergenz der Verteilung von S_T^N unter $\mathbb{Q}_N$ für $N \to \infty$?
Übergang zum Logarithmus:

$$\mathcal{Z}_N := \log(\frac{S_T^N}{S_0}) = \sum_{k=1}^N \underbrace{\log(1 + R_k^N)}_{L_k^N}$$

Summe von unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, dann Zentraler Grenzwertsatz(ZGS)?
Es liegt ein sogenanntes Dreiecksschema vor

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= L_1^1 \\
\mathcal{Z}_2 &= L_2^1 \quad +L_2^2 \qquad\qquad \text{Zufallsvariablen in einer Zeile sind stoch. unabhängig.} \\
\mathcal{Z}_3 &= L_3^1 \quad +L_2^3 \quad +L_3^3
\end{aligned}$$

Theorem 0.7 (ZGS für Dreiecksschemata)
Sei für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein Vektor $L^N := (L_1^N, L_2^N, \ldots, L_N^N)$ von Zufallsvariablen gegeben ("Dreiecksschema") mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall N \in \mathbb{N}$ sind $(L_1^n, \ldots, L_N^N)$ unabhängig mit identischer Verteilung
2. $\exists$ Folge von (deterministischen) Konstanten $C_N \to 0$, sodass

$$\left|L_k^N\right| \leq C_N \quad \forall k \in [N]$$

3. Mit $\mathcal{Z}_N = L_1^N + \cdots + L_N^N$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{Z}_N] &\to m \in \mathbb{R} \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathcal{Z}_N) &\to s^2 > 0 \end{aligned}\right. \quad \text{für } N \to \infty$$

Dann konvergiert $(\mathcal{Z}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen normalverteilte Zufallsvariable $\mathcal{Z}$ mit $\mathbb{E}[\mathcal{Z}] = m$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathcal{Z}) = s^2$

Beweis. Ohne Beweis, siehe z.B. Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingale. □

▶ **Bemerkung**
Vergleiche 2. Übung erste Aufgabe.

▶ **Erinnerung 0.8**
Dichte der Standardnormalverteilung heißt hier

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

und die Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

Normalverteilung mit Erwartungswert m und Varianz s^2 hat Verteilungsfunktion $\Phi(\frac{x-m}{s})$

Definition 0.9
Eine strikt positive Zufallsvariable X heißt <u>lognormalverteilt</u> mit Parameter m, s^2, wenn gilt

$$\log(X) \sim \mathcal{N}(m, s^2)$$

Theorem 0.10
Betrachte Folge $(S^N)_{N\in\mathbb{N}}$ von CRR-Modellen wie in CRR_N beschrieben. Dann konvergiert S_T^N unter $\mathbb{Q}_N$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable S_T und S_T/S_0 ist lognormalverteilt mit Parameters $n = T(r-\sigma^2/2)$ und $s^2 = T\sigma^2$. Äquivalent dazu gilt mit $\mathcal{Z}_N = \log(S_T^N/S_0)$

$$\mathbb{Q}_N(\mathcal{Z}_N \le x) \xrightarrow{N\to\infty} \Phi\left(\frac{x - T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Beweis. Das Dreiecksschema $L^N = (L_1^N, \dots, L_N^N)$ mit $L_k^N = \log(1+R_k^N)$ erfüllt (unter $\mathbb{Q}_N$) offensichtlich Bedingung 1. und 2. aus Theorem 3.1 wähle z.B.:

$$C_N = \max(\left|\log(1+\mu\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n})\right|, \left|\log(1+\mu\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n})\right|)$$

. Wir berechnen Erwartungswert und Varianz von L_k^N bzw. $\mathcal{Z}_N$. Verwende die Taylorentwicklung:

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$$

Das heißt

$$\log(1+\underbrace{\mu\Delta_n \pm \sigma\sqrt{\Delta_n}}_{b_N \text{ bzw. } a_N}) = \pm\sigma\sqrt{\Delta_n} + \mu\Delta_n - \sigma^2/2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})$$

Risiko-neutralen Wahrscheinlichkeiten sind

$$q_N = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\sqrt{\Delta_n} \quad 1 - q_N = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\Delta_n}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[L_k^N] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[\log(1+R_k^N)] = q_N\log(1+b_N) + (1+p_N)\log(1+a_N) \\
&= (\mu - \sigma^2/2)\Delta_n - \lambda\sigma\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \quad \text{mit } \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \\
&= (\mu - (\mu - r) - \sigma^2/2)\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \\
&= (r - \sigma^2/2)\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[(L_k^N)^2] &= q_N\log^2(1+b_N) + (1-q_N)\log^2(1+a_N) \\
&= \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}^{\mathbb{Q}_N}(L_k^N) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[(L_k^N)^2] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[L_k^N]^2 = \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[\mathcal{Z}_N] &= N\cdot\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}[L_k^N] = (r-\sigma^2/2)T + \mathcal{O}(N^{-1/2}) \xrightarrow{N\to\infty} (r-\sigma^2/2)T =: m \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}^{\mathbb{Q}_N}[\mathcal{Z}_N] &= N\cdot\mathbb{V}\mathrm{ar}^{\mathbb{Q}_N}[L_k^N] = \sigma^2 T + \mathcal{O}(N^{-1/2}) \xrightarrow{N\to\infty} \sigma^2 T =: s^2
\end{aligned}$$

Resultat folgt nun mir ZGS (Theorem 3.1). □

Asymptotik von Put- und Call-Option

Fixiere Laufzeit T und Ausübungspreis K und schreiben:

- $C_N(t, S_t^N)$ ... Preis einer europäischen Call-Option im CRR_N Modell in Abhängigkeit von Zeit t und Basisgut S_t^N
- $P_N(t, S_t^N)$ ... Analog für Put

Theorem 0.11 (Black-Scholes-Formel)
Die Preise C_N, P_N konvergieren für $N \to \infty$ gegen BS-Preis

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, S_t) &= \lim_{N\to\infty} C_N(t, S_t^N) \\ P_{BS}(t, S_t) &= \lim_{N\to\infty} P_N(t, S_t^N) \end{aligned}$$

und es gilt die <u>Black-Scholes-Formel</u>:

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, S_t) &= S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2) \\ P_{BS}(t, S_t) &= S_t\Phi(-d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_2) \end{aligned}$$

wobei

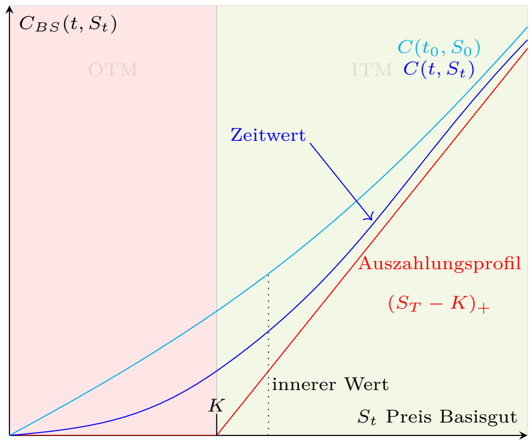
$$\begin{aligned} d_1 = d_1(t, S_t) &= \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_2(t, S_t) &= \frac{\log(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1(t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

▶ **Bemerkung**

- Geschlossener Ausdruck für Bewertung von europäischen Put- und Call-Optionen
- Herleitung als Grenzwert aus dem CRR-Modell entspricht nicht der ursrünglichen Herleitung von Black & Scholes mittels stochastische Analysis ($\Longrightarrow$ VL stoch. Calculus)
- Für Entwicklung von BS-Formel und BS-Modell erhielten Scholes & Merton dem Wirtschaftsnobel(gedenk)preis 1997
- Der Parameter σ heißt Voliatitität und entspricht der Schwankungsbreite der Preisänderung

Skizze vom BS-Call-Preis:

BS-Call-Preis



- innere Wert: $(S_t - K)_+$ konvergiert gegen Auszahlungsprofil: $(S_T - K)_+$, für $t \to T$
- Zeitwert: $C_{BS}(t, S_t) - (S_t - K)_+ \geq 0$ konvergiert gegen Null für $t \to T$
-
  - out of the money (OTM): Innere Wert $= 0$ bei $S_t < K$
  - in the money (ITM): Innere Wert > 0 bzw. $S_t > K$
  - at the money (ATM): Grenzfall $S_t = K$
- Zeitwert ist am größten für ATM-Optionen
- $t \mapsto C_{BS}(t, S_t)$ ist streng monoton fallend bzw.

$$\frac{\partial C_{BS}(t, S_t)}{\partial t} < 0$$

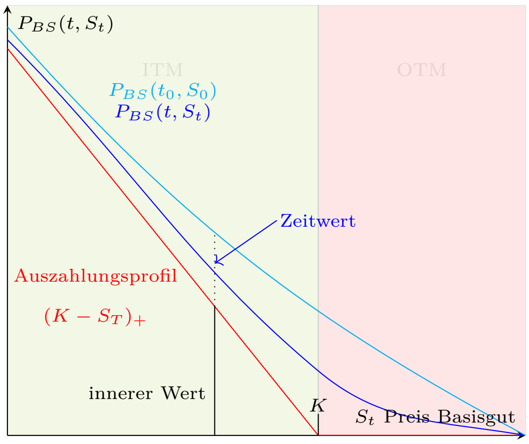
- $S_t \mapsto C_{BS}(t, S_t)$ ist streng monoton steigend und konvex bzw

$$\frac{\partial C_{BS}(t, S_t)}{\partial S}(t, S_t) > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2}(t, S_t) > 0$$

- Für den Put ist das ganze Symmetrisch

Skizze vom BS-Put-Preis:

BS-Put-Preis



- <u>innere Wert</u>: $(K - S_t)_+$ konvergiert gegen Auszahlungsprofil: $(K - S_T)_+$, für $t \to T$
- <u>Zeitwert</u>: $P_{BS}(t, S_t) - (K - S_t)_+ \geq 0$ konvergiert gegen Null für $t \to T$
-
  - <u>out of the money</u> (OTM): Innere Wert $= 0$ bei $S_t > K$
  - <u>in the money</u> (ITM): Innere Wert > 0 bzw. $S_t < K$
  - <u>at the money</u> (ATM): Grenzfall $S_t = K$
- Zeitwert ist am größten für ATM-Optionen
- $t \mapsto C_{BS}(t, S_t)$ ist streng monoton fallend bzw.

$$\frac{\partial C_{BS}(t, S_t)}{\partial t} < 0$$

- $S_t \mapsto C_{BS}(t, S_t)$ ist streng monoton fallend und konvex bzw

$$\frac{\partial C_{BS}(t, S_t)}{\partial S}(t, S_t) < 0 \text{ und } \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2}(t, S_t) > 0$$

Beweis (Theorem 0.11). Wir beweisen das Resultat für $t = 0$: andere Zeitpunkte $t \in [0, T]$ können analog behandelt werden.

- Nach **???**, gilt für Preis der Put-Option im CRR_N-Modell

$$\begin{aligned} P^N(0, S_0^N) &= (1 + r\Delta_n)^{-N} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K - S_T^N)_+] \\ &= (1 + r\Delta_n)^{-N} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K - S_0 e^{\mathcal{Z}_N = \log(\frac{S_T^N}{S_0})})] \\ &= (1 + r\Delta_n)^{-N} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(\mathcal{Z}_N)] \end{aligned}$$

mit $f(z) = (K - S_0 e^z)_+$ stetig und beschränkt. Aus Stochastik ist bekannt $\mathcal{Z}_N \to \mathcal{Z}$ in Verteilung, dann folgt $\mathbb{E}[f(\mathcal{Z}_N)] \to \mathbb{E}[f(\mathcal{Z})] \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$.

  - $\lim_{N\to\infty}(1 + r\Delta_n)^{-N} = \lim_{N\to\infty}(1 + rT/N)^{-N} = e^{-rT}$

– $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(\mathcal{Z}_N)] = \mathbb{E}[f(Z)]$ mit $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}((r-\sigma^2/2)T, \sigma^2 T) = \mathcal{N}(mT, \sigma^2 T)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(\mathcal{Z})] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{\infty}(K - S_0 e^{\mathcal{Z}})_+ \exp(-\frac{(\mathcal{Z}-mt)^2}{2\sigma^2 T})\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\log(K/S_0)}(K - S_0 e^{\mathcal{Z}})\exp(-\frac{1}{2}(\frac{\mathcal{Z}-mT}{\sigma\sqrt{T}})^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \begin{pmatrix} y = \frac{\mathcal{Z}-mT}{\sigma\sqrt{T}} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}\mathcal{Z}}{\sigma\sqrt{T}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}(K - S_0\exp(y\sigma\sqrt{T}+mT)e^{y^2/2}\,\mathrm{d}y \\
&= K\Phi(-d_2) - S_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\exp(-y^2/2 + y\sigma\sqrt{T}+mT)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Nebenrechung:

$$\begin{aligned}
&y^2/2 + y\sigma\sqrt{T}(+mT = rT - \frac{1}{2}(y^2 - 2y\sigma\sqrt{T}+\sigma^2 T) = rT - \frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T}) \\
&= K\Phi(-d_2) = S_0 e^{rT}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{(y-\sigma\sqrt{T})/2}\,\mathrm{d}y}_{\Phi(-d_2-\sigma\sqrt{T})} \\
&= K\Phi(-d_2) - S_0 e^{rT}\Phi(-d_1)
\end{aligned}$$

Dann folgt $\lim_{N\to\infty} P_N(0, S_0^N) = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$ und das ist die Formel für den Put ✓

- Für Call: Nutze Put-Call-Parität

$$C^N(0,S_0) - \underbrace{P^N(0,S_0)}_{P_{BS}(0,S_0)} = \underbrace{S_0}_{S_0} - \underbrace{(1+r\Delta_n)^{-N}K}_{\to e^{-rT}K}$$

$$\begin{aligned}
C_{BS}(0,S_0) &= \lim_{N\to\infty} C^N(0,S_0) \\
&= P_{BS}(0,S_0) + S_0 - e^{rT}K \\
&= e^{-rT}K(\underbrace{\Phi(-d_2)-1}_{-\Phi(d_2)}) - S_0(\underbrace{\Phi(-d_1)-1}_{-\Phi(d_1)}) \\
&= S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

wobei wir die Symmetrie der Normalverteilung: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ genutzt haben. Damit ist auch die BS-Formel für den Call gezeigt ✓. □

Wir haben gezeigt: CRR$_N$-Preise konvergieren gegen BS-Preise.
Frage: Was gilt für die Replikationsstrategie? Konvergiert diese auch?

Theorem 0.12
Für die Replikationsstrategie $\xi_{t_N}^N$ der Put- bzw. Call-Optionen in CRR$_N$-Modell gilt:

- Put: $\lim_{N\to\infty} \xi_{t_N}^N = \frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S_t) = -\Phi(-d_1)$
- Call: $\lim_{N\to\infty} \xi_{t_N}^N = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S_t) = \Phi(d_1)$

Diese partielle Ableitungen heißen auch "Delta" des Put- bzw. Call-Preisen.

Beweis. Betrachte nur $t = 0$, $t \in [0, T]$ kann analog behandelt werden. Nach Theorem II.2.3 ist ξ_0^N für Put gegeben durch

$$\begin{aligned}\xi_0^N &= \frac{P_N(\Delta_N, S_0(1+b_N)) - P_N(\Delta_N, S_0(1+a_N))}{S_0(b_N - A_N)} \\ &= \frac{P_N(\Delta_N, S_0(1+\mu\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n})) - P_N(\Delta_N, S_0(1+\mu\Delta_N + \sigma\sqrt{\Delta_N}))}{2S_0\sigma\sqrt{\Delta_N}}\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{N\to\infty} P_N(\Delta_N, S_0(1+\mu\Delta_N)) = P_{BS}(0, S_0)$. Unter geeigneten Annahmen an gleichmäßige Konvergenz folgt

$$\lim_{N\to\infty} \xi_0^N = \frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S_t)$$

und analog für Call. Wir berechnen explizit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) &= \Phi(d_1) + S\varphi(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K\varphi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S}(S\varphi(d_1) - e^{-r(T-t)} K\varphi(d_2))\end{aligned}$$

Nebenrechung und Setze: $\tau = T - t$

$$\begin{aligned}e^{-rt} K/S\varphi(d_2) &= e^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} K/S\exp(-\frac{1}{2}\frac{\log(S/K) + r\tau - \sigma^2 r/\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} K/S\exp(-\frac{1}{2}\frac{(\log(S/K) + r\tau)^2}{\sigma^2\tau} - 2(\log(S/K) + r\tau) + \sigma^2\tau/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}\frac{(\log(S/K) + r\tau)^2}{\sigma^2\tau} + (\log(S/K) + r\tau + \sigma^2\tau/4) \\ &= \varphi(d_1)\end{aligned}$$

also

$$e^{-r(T-t)} K\varphi(d_2) = S\varphi(d_1)$$

Das heißt: $\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) = \Phi(d_1)$. Put folgt analog oder mit Put-Call-Parität. □

▶ Bemerkung

- $\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}$ bzw. $\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}$ lassen sich auch interpretieren als Sensitivität des Call- bzw. Put-Preises gegenüber Preisänderungen des Basisguts.

Analog lassen sich die Sensitivitäten ("Greeks") nach den weiteren Parametern berechnen.

Definition 0.13
Die "Greeks" des BS-Preises sind folgende partielle Ableitungen

Bezeichg.	part. Abl.	Call	Put	
Delta	$\frac{\partial}{\partial S}$	$\Phi(d_1)$	$-\Phi(-d_1)$	Bestimmt die Re
Gamma	$\frac{\partial^2}{\partial S^2}$	$\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	$\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	Sensitivität von Delta ggü Basisgu
Vega	$\frac{\partial}{\partial \sigma}$	$S_t\sqrt{T-t}\varphi(d_1)$	$S_t\sqrt{T-t}\varphi(d_1)$	Sensitivität gegen
Theta	$\frac{\partial}{\partial t}$	siehe ÜA	siehe ÜA	Änd
Rho	$\frac{\partial}{\partial r}$	$K(T-t)(e^{-r(T-t)})\Phi(d_2)$	$-K(T-t)(e^{-r(T-t)})\Phi(-d_2)$	Sensitivitä

▶ **Bemerkung**
"Vega" ist kein Buchstabe des griechischen Alphabets :/

Folgerung 0.14
Der BS-Preis $C_{BS}(t,S)$ erfüllt folgende partielle DGL

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + rS\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} + rC_{BS} = 0 \tag{BS-PDE}$$

wobei $(t,s) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit Endwertbedingung

$$\lim_{t\to T} C_{BS}(t,S) = (S-K)_+$$

Für P_{BS} gilt die gleiche PDE mit Endwertbedingung

$$\lim_{t\to T} P_{BS}(t,S) = (K-S)_+$$

Beweis. Siehe Übung 3.0. □

▶ **Bemerkung**
In Erweiterungen des BS-Modells gibt es keine geschlossene Ausdrücke für Put/Call-Preise, aber eine PDE ähnlich zu (BS-PDE) gilt weiterhin.

1. Implizite Volatilität/ Grenzen des BS-Modells

Wir schreiben etwas ausführlicher

$$C_{BS}(t,S_t,T,K,\sigma) := C_{BS}(t,S_t)$$

eine Abhängigkeit von (T,K,σ) zu verdeutlichen.

Theorem 1.1 (Implizite Volatlität)
Sei $C_*(0, S_0, T, K)$ ein vorgegebener (beobachtbarer) Preis einer Call-Option mit Fälligkeit T, Ausübungspreis K welcher innerhalb der Arbitragegrenzen liegt

$$(S_0 - e^{-rT}K)_+ < C_*(0, S_0, T, K) < S_0$$

Dann existiert ein eindeutiges $\sigma_*(T, K) \in (0, \infty)$, die implizite Volativilität von C_* sodass

$$C_*(0, S_0, T, K) = C_{BS}(0, S_0, T, K, \sigma_*(T, K))$$

gilt.

▶ **Bemerkung**
$\sigma_*(T, K)$ ist Lösung eines inversen Problems.

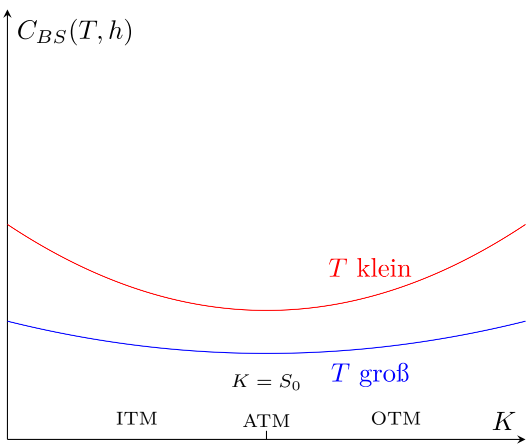
Vorwärtsproblem:	Parameter	$\rightarrow$	Call-Preis
inverses Problem:	Call-Preis	$\rightarrow$	Parameter

Kann zur impirischen Überpürfung des BS-Modells verwendet werden:

- BS-Modell passt gut zu Daten: $(T, K) \mapsto \sigma_*(T, K)$ ist annähernd konstant
- BS-Modell passt nicht gut zu Daten: $(T, K) \mapsto \sigma_*(T, K)$ variiert stark mit (T, K)

Typische tatsächliche Beobachtung:

Volativitäts-Smile



Eigenschaften:

- konvex
- assymetrisch (höher für große K)

- Minimum bei ATM
- flacher für lange Laufzeiten, steiler für kurze Laufzeiten

Form weist daraufhin, dass BS-Modell große Preissprünge des Basisguts unterschätzt. Form des Vola-Smiles in Modellen jeweils von BS $\implies$ aktuelles Forschungsthema.

Kapitel IV

Optimale Investition

1. Das Anlageproblem

Gegeben: Vermögen W, Anlagegüter $S^1, \dots, S^n$ (Aktien, Anleihen, ...)
Gesucht: Optimale Verteilung $W = W_1 + \dots + W_n$ auf $S^1 \dots S^n$
$S^1 \dots S^n$ weisen unterschiedliche Beträge, Risiken und typischerweise Korrelationen auf.
Wir unterscheiden:

- Einperiodenproblem: Aufteilung wird heute ($t = 0$) festgelegt und bis zum Zeithorizont ($t = T$) beibehalten
- Mehrperiodenproblem: Umschichten zu mehreren Zeitpunkten $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ möglich

Einfachstes Optimalitätsprinzip: PARETO-Optimalität

- Bei gleichem Risiko wird Anlage mit größeren Ertrag bevorzugt
- Bei gleichem Ertrag wird Anlage mit kleineren Risiko bevorzugt

d.h. Pareto-Optimal bedeutet, es gibt keine Anlagestrategie mit größerem Ertrag und kleinerem Risiko.
Zum Aufwärmen zwei Toy-Models (= stark vereinfachte Beispiele)

- Toy-Model I; Einperiodenmodell, eine risikofreie und eine risiko-behaftete Anlagenmodel.
  - Zeithorizont sei $T = 1$
  - risikofrei: $S_0^0 = 1$, $S_T^0 = (1 + r)$
  - risikobehaftet: $S_0^1 = 1$, $S_T^1 = (1 + R)$ mit R stochastisch,

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[R] \quad \text{Ertrag} \\ \sigma &= \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(R)} \quad \text{Risiko} \end{aligned}$$

  - $S = \mu - r$ Überrendite (excess return).
  - $S \leq 0 \implies$ Investiere alles in S^0 (Pareto-Optimal)
  - $S > 0 \implies ?$
  - Teile W in $(W_0, W - W_0)$ auf (S^0, S^1) auf (Jetzt: $W = 1$)

$$\begin{cases} W - W_0 < 0 & \text{Leerverkauf} \\ W_0 < 0 & \text{Kredit} \end{cases}$$

  - Endvermögen: $P_T = W_0(1 + r) + (1 - W_0)(1 + R)$

- Erweiterte Rendite:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \mathbb{E}[P_T - 1] = W_0(1+r) + (W - W_0)(1+\mu)\\ &= W_0 r + (1 - W_0)\mu\end{aligned}$$

- Risiko: $\sigma_p = (1 - W_0)\sigma$
- Überrendite $S_p = (1 - W_0)(\mu - r)$
- Jede Strategie ist Pareto-Optimal, d.h. Pareto-Prinzip hilft nicht bei der Auswahl. Insbesondere ist Sharp-Ratio

$$SR(W_0) = \frac{\text{“Überrendite”}}{\text{“Risiko”}} = \frac{S_p}{\sigma_p} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad \text{konstant!}$$

- Alternative zum Pareto-Prinzip Festlegen von individueller Risikoaversion (mehr dazu später)
- Toy-Model II: Einperiodenproblem, zwei risikobehaftete Anlagemöglichkeiten
  - Zeithorizont $T = 1$, Vermögen $W = 1$
  -

$$\begin{aligned}S_0^1 &= 1 \quad S_T^1 = (1 + R_1) \quad \text{mit } \mathbb{E}[R_1] = \mu,\ \mathbb{V}\text{ar}(R_1) = \sigma_1^2 > 0\\ S_0^2 &= 1 \quad S_T^2 = (1 + R_1) \quad \text{mit } \mathbb{E}[R_2] = \mu,\ \mathbb{V}\text{ar}(R_2) = \sigma_2^2 > 0\end{aligned}$$

    und $R_1 \perp\!\!\!\perp R_2$ (unabhängig)
  - Portfoliowert: $P_T = W_1(1 + R_1) + (1 - W_1)(1 + R_2)$
  - Rendite: $\mu_p = \mathbb{E}[P_T - 1] = W_1\mathbb{E}[R_1] + (1 - W_1)\mathbb{E}[R_2] = \mu$
  - Risiko:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = \mathbb{V}\text{ar}(P_T - 1) &= \mathbb{V}\text{ar}(W_1 R_1 + (1 - W_1)R_2)\\ &= W_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - W_1)^2\sigma_2^2\end{aligned}$$

  - Pareto-Optimales Portfolio:

$$\begin{aligned}0 &= 2W_1 \cdot \sigma_1^2 - 2(1 - W_1)\sigma_2^2\sigma_2^2\\ &= W_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\\ &\implies W_* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \in (0, 1)\end{aligned}$$

    Also existiert genau eine Pareto-Optimale Strategie
  - Vermögen wird proportional zum Verhältnis der Risiken aufgeteilt

- Vermögen wird nicht vollständig in risiko-ärmere Anlagen gesteckt, also findet eine Diversifikation statt
- W_* ist auch die Strategie mit maximaler Sharp-Ratio

Als nächstes: Pareto-Optimale Portfolio mit $n > 2$ Anlagegütern

2. Exkurs: Optimierung mit Nebenbedingung

Betrachte Optimierungsproblem:

$$\min f_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

unter Nebenbedingungen

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0 & i = 1, ..., m \\ h_i(x) = 0 & i = 1, ..., p \end{cases} \tag{OPT}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ welches (NB) erfüllt heißt zulässig
- $x_* \in \mathbb{R}^n$ welches (OPT) normiert heißt Optimallösung
- $p_* = f_0(x_0)$ heißt Minimalwert

Definition 2.1

1. Die Funktion

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\lambda_i + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\nu_i$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}, \nu \in \mathbb{R}^p$ heißt Lagrange-Zielfunktion

2. Die Funktion

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}(x, \lambda, \nu)$$

heißt (Langrange-) duale Funktion für (OPT).

▶ **Bemerkung**

Als Infimum von $g(\lambda, \nu)$ lineare Funktionen ist g konkav.

- Die duale Funktion g erzeugt untere Schranken für p_*
- Begründung Sei $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (OPT), d.h.

$$f_i(\overline{x}) \leq 0 \quad \forall i \in [n]$$
$$h_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i \in [p]$$

$$\implies \mathcal{L}(\overline{x}, \lambda, \nu) = f_0(\overline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1} f_i(\overline{x})\lambda_i + \sum_{i=1} h_i(\overline{x})\nu_i}_{=0} \leq f_0(\overline{x})$$

Also $g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \mathcal{L}(x, \lambda, \nu) \leq \mathcal{L}(\overline{x}, \lambda, \nu) \leq f_0(\overline{x}) \quad \forall \overline{x}$ zulässig und damit folgt

$$g(\lambda, \nu) \leq p_* \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_{>0}, \nu \in \mathbb{R}^n$$

Die beste untere Schranke erhalten wir durch maximieren über λ, ν

Definition 2.2
Das duale Optimierungsproblem zu (OPT) ist

$$\max g(\lambda, \nu) \quad \lambda \in \mathbb{R}^m, \nu \in \mathbb{R}^p$$

unter Nebenbedingungen

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots m \tag{D}$$

Maximalwert: d_*

- Zwischen (OPT) und (D) gilt schwache Dualität

$$d_* \leq p_*$$

- Unter bestimmten Voraussetzungen gilt auch die starke Dualität

$$d_* = p_*$$

Das duale Problem hat auch eine Lösung (λ_*, ν_*) und Maximalwert d_*

Lemma 2.3
Zwischen (OPT) und (D) gilt die schwache Dualität

$$d_* \leq p_* \tag{WD}$$

Beweis. SeSt. □

▶ Bemerkung

- Die Differenz $p_* - d_* \geq 0$ heißt Dualitätslücke (duality gap).
- Wenn Dualitätslücke verschwindet starke Dualität

$$d_* = p_*$$

- hinreichende Bedingungen für starke Dualität existieren vor allem für konvexe Probleme

Definition 2.4
Optimierungsproblem(OPT) ist konvex wenn f_0 konvex ist und die Menge der zulässigen Werte konvex ist. In diesem Fall kann (OPT) in folgende Form gebracht werden:

$$\min f_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

unter NB

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0 & i \in [m] \\ Ax = b \end{cases} \tag{K-OPT}$$

mit $f_0, f_1, \ldots, f_m$ konvex, $A \in \mathbb{R}^{p \times m}, b \in \mathbb{R}^p$.

Theorem 2.5 (Slaters-Bedingung)
Betrachte das konvexe Optimierungsprobleme (OPT). Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f_i(x) < 0 \quad \forall i \in [m] \text{ und } Ax = b$$

dann gilt starke Dualität.

Für den Beweis verwende wir den Trennungssatz für konvexe Mengen.

Theorem 2.6 (Trennungssatz für konvexe Mengen)
Sei $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nichtleer und disjunkt, d.h.

$$A \cap B = \varnothing$$

Dann existieren $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} a^T x &\geq b \quad \forall x \in A \\ a^T x &\leq b \quad \forall x \in B \end{aligned}$$

Die Hyperebene $h = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x = b\}$ heisst trennende Hyperbene für A und B

Beweis. Ohne Beweis. □

Skizze:

Beweis (Theorem 4.2?). Betrachte folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{m+p+1}$,

$$\mathscr{G} = \left\{ (u, v, t) \in \mathbb{R}^N \colon \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \begin{cases} f_i(x) = u_i, h_i(x) = v & \forall i \in [m], Ax - b = v \\ f_0(x) = t \end{cases} \right\}$$

$$\mathscr{G} = \left\{ (f_1(x), \ldots, f_m(x), h_1(x), h_p(x), f_0(x)) \in \mathbb{R}^N \colon x \in \mathbb{R}^n \right\} \subseteq \mathscr{A}$$

$$\mathscr{A} = \left\{ (u, v, t) \in \mathbb{R}^N \colon \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } f_i(x) \leq u_i \forall i \in [m], Ax - b = v, f_0(x) \leq t \right\} = \mathscr{G} \oplus \mathbb{R}^m_{\geq 0} \times \{0\}^p \times \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\mathscr{B} = \left\{ (0, 0, t) \in \mathbb{R}^N \colon t < p_* \right\}$$

Es gilt $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ sind konvex. Nun folgt die

- Behauptung: $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing$. Mit Widerspruch: Angenommen es existiert $(u, v, t) \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, dann gilt wegen $\mathscr{B}$

  $$u = 0, v = 0 \text{ und } t < p_*$$

  wegen $\mathscr{A}$

  $$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } f_i(x) &\leq u_i = 0 \quad i \in [m] \\ h_i(x) &= v_i = 0 \quad i \in [p] \\ f_0(x) &\leq t < p_* \end{aligned}$$

  d.h. x ist zulässig für (K-OPT) und besser als optimal! ($f_0(x) < p_*$). Damit ist die Behauptung gezeigt und es folgt $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing$.

- Wende Trennungssatz an: $\exists (\lambda, \nu, v) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

  $$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \geq \alpha \quad (u, v, t) \in \mathscr{A} \tag{I}$$
  $$\lambda^T u + \nu^T v + \mu t \leq \alpha \quad \forall (u, v, t) \in \mathscr{B} \tag{II}$$

  (II) folgt $\mu t \leq \alpha \forall t < p_*$ (da $a = 0, v = 0$) und damit gilt $\mu p_* \leq \alpha$
  Aus (I) bekommt man $\lambda_i \geq 0 \forall i \in [m]$ und $\mu \geq 0$ (sonst Widerspruch!). Dann nimmt man (I) und (II) zusammen und hat $\forall x \in \mathbb{R}^n$

  $$\begin{aligned} &\sum_{i=1} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1} \nu_i (Ax - b) + \mu f_0(x) \\ &\leq \lambda^T u + \nu^T v + \mu t \overset{(I)}{\geq} \alpha \overset{(II)}{\geq} \mu p_* \end{aligned} \tag{$*$}$$

  Nun gibt es zwei Fälle:
  - Fall: $\mu > 0$ Setze $\tilde{\lambda} = \lambda / mu$, $\tilde{\nu} = \nu/\mu$, damit $\exists x \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1} \tilde{\lambda}_i f_i(x) + \sum_{i=1} \nu_i (Ax - b) + f_0(x) \geq p_*$ und damit folgt $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\nu}) \geq p_*$, d.h. $d_* = \max_{(\lambda,\nu) \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n} g(\lambda, \nu) \geq p_*$. Aber mit schwacher Dualität: $d_* \leq p_*$
  - Fall: $\mu = 0$ (kann nicht eintreten, weil ...). Aus ($*$) bekommen wir

    $$\sum_{i=1} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1} \nu_i (Ax - b) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

    Slaters-Bedingung $\exists \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f_i(x) < 0, i \in [m]$ und $A\overline{x} - b = 0$ und damit

    $$\sum_{i=1} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{f_i(\overline{x})}_{<0} > 0 \implies \lambda = 0$$

    $(\lambda, \nu, \mu) = (0, \nu, 0) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ impliziert $\nu \neq 0$ und $\nu^T (Ax - b) = 0$, dann existiert nach $\overline{x}$ mit $\nu^T (A\overline{x} - b) < 0$ und das ist der Widerspruch, d.h. $\mu = 0$ tritt nicht ein. □

3. Die Markowitz-Modelle

Markowitz-Modell I

(Portfolio-Optimierung ohne risikofreie Anlage)
Anlagegüter $S = (S^1, \dots, S^n)$ mit stochastische ein-perioden Renditen $R = (R^1, \dots, R^n)$, d.h. $S_T = S_0^i(1 + R^i), i \in [n]$ mit auf Anlagegüter $S^1, \dots, S^n$ aufteilen p_i Investitionen in S^i, d.h. $p_1 + \dots + p_n = W = 1$.

- Erwartungswert: $\mu = \mathbb{E}[R] \in \mathbb{R}^n, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$
- $\Sigma = \mathbb{E}[(R - \mu)(R - \mu)^T] \quad (n \times 1)(1 \times n) = (\Sigma_{ij})_{i,j \in [n]}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(R^i) \\ \Sigma_{ij} &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(R^i, R^j) \text{ mit } i \neq j \end{aligned}$$

  - Annahme: Σ ist regulär, d.h. Σ^{-1} existiert.
  - Ziel: Anlagemengen $W = 1$.
  - Erwartete Rendite: $\mu_p = \mathbb{E}[p^T R] = p^T \mu$
  - Risiko (Standardbereich):

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(p^T R)} = \sqrt{\mathbb{E}[(p^T(R - \mu))^2]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}[p^T(R - \mu)(R - \mu)^T p]} = \sqrt{p^T \Sigma p} \end{aligned}$$

  - Optimales Anlageproblem: Minimiere Risiko, gegeben Zielrendite μ_*

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} p^T \Sigma p & \text{über } p \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter NB} & p^T \mu = \mu_* \text{ (Zielrendite)} \\ & p^T \mathbb{1} = \mathbb{1} (\mathbb{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{Mark I}$$

- Die Lagrange-Zielfunktion:

$$\mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} p^T \Sigma p + \lambda_1(\mu_* - p^T \mu) + \lambda_2(1 - p^T \mathbb{1}) \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- Die duale Funktion:

$$\begin{aligned} g(\lambda_1, \lambda_2) &= \inf_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2) \\ \nabla_p \mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2) &= \Sigma - \lambda_1 \mu - \lambda_2 1 = 0 \\ \implies p_* &= \Sigma^{-1}(\lambda_1 \mu + \lambda_2 \mu) \end{aligned}$$

d.h. $g(\lambda_1,\lambda_2) = \mathcal{L}(p_*,\lambda_1,\lambda_2)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(p_*,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{1}{2}(\lambda_1\mu+\lambda_2 1)^T\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu-\lambda_2 1) - (\lambda_1\mu+\lambda_2 1)^T\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu-\lambda_2 1) + \lambda_1\mu_* + \lambda_2\\ &= -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 a + 2\lambda_1\lambda_2 b + \lambda_2^2 c) + \lambda_1\mu_* + \lambda_2\end{aligned}$$

mit

$$a = \mu^T\Sigma^{-1}\mu, b = \mu^T\Sigma\mathbb{1}, c = \mathbb{1}^T\Sigma\mathbb{1}$$

Es gilt $a \geq 0, c \geq 0$ und (mit Cauchy-Schwarz) und damit $ac \geq b^2$

- Maximieren von g:

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_1} = -a\lambda_1 - b\lambda_2 + \mu_* = 0 \implies a\lambda_1 + b\lambda_2 = \mu_* \tag{I}$$
$$\frac{\partial g}{\partial\lambda_2} = -b\lambda_1 - 1\lambda_2 - 1 = 0 \implies b\lambda_1 + c\lambda_2 = 1 \tag{II}$$

$$\begin{aligned}-b(\text{I}) + a(\text{II}):\quad & (ac-b^2)\lambda_2 = a - b\mu_* \implies \lambda_2^* = \frac{a-b\mu_*}{ac-b^2}\\ c(\text{I}) - b(\text{II}):\quad & (ac-b^2)\lambda_1 = c\mu_* - b \implies \lambda_2^* = \frac{c\mu_*-b}{ac-b^2} \quad \text{(aber nur für } ac > b^2\text{)}\end{aligned}$$

- Minimierer von (Mark I):

$$p_* = \lambda_1^*\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2^*\Sigma^{-1}\mathbb{1}$$

Folgerung 3.1 (Tobin-Two-Fund Seperation)
Jedes Pareto-Optimale Portfolio für (Mark I) kann (unabhängig von a!) als Linearkombination der zwei Portfolio

$$\underbrace{p_1^* = \Sigma^{-1}\mu}_{\text{renditeorientiertes Portofolio}} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{p_2^* = \Sigma^{-1}\mathbb{1}}_{\text{sicherheitsorientiertes Portofolio}}$$

dargestellt werden.

▶ **Bemerkung**

- Gewichtung des Portfolios p_1^* und p_2^* orientiert sich am Renditeziel μ_*.
- p_1^* und p_2^* sind breit diversifiziert, d.h. nutzen alle Anlagegüter $S = (S^1,\ldots,S^n)$
- p_1^* und p_2^* kann man als Anlagefunds interpretieren welche Vermögen entsprechend der Portfolio p_1^*, p_2^* anlegen. Diese zwei Fonds sind ausreichend (unabhängig von μ_*) um Vermögen Pareto-optimal zu investieren!

Zuletzt wollen wir noch Risiko der optimalen Strategie p_* berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_*^2 &= \mathbb{V}\text{ar}(p_*^T R) = \mathbb{E}[(p_*^T(R-\mu))^2] = p_*^T \Sigma p_* \\ &= (\lambda_1^* \mu + \lambda_2^* \mathbb{1})^T \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} (\lambda_1^* \mu + \lambda_2^* \mathbb{1}) \\ &= (\lambda_1^{*2} 2a) + 2\lambda_1^* \lambda_2^* b + (\lambda_2^{*2}) c \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2}^2 (((c\mu_* - b)^2)a + 2(\mu_* - b)(a - b\mu_*)b + (a - b\mu_*)^2 c) \\ &= \frac{1}{ac - b^2}(c\mu_*^2 - 2b\mu_* + a^2)\end{aligned}$$

Graph von (σ_*, μ_*) ist ein Hyperbel-ast:
siehe picture phone ...
Nennt sich "Markowitz-Bullet"!

Markowitz-Modell II

(Optimale Investition mit risikofreier Anlage)

- Anlagegüter $S = (S^1, \dots, S^n)$ mit ein-perioden Rendite $R = (R^1, \dots, R^n)$
- Zusätzlich risikofreie Anlage S^0 mit Verzinsung r. Wegen $W = 1$aufgestellt zu $1 = p_0 + p_1 + \dots p_n$. Wir setzen $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$
- Erwartete Rendite: $\mu = \mathbb{E}[p^T R + (1 - p^T \mathbb{1})r] = p^T(\mu - r\mathbb{1}) + r$
- Risiko: $\sigma_* = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(p^T R)} = \sqrt{p^T \Sigma p}$
- Anlageproblem:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} p^T \Sigma p & p \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter NB} & p^T(\mu - r\mathbb{1}) = \mu_* - r(\text{ Zielrendite}) \end{cases} \tag{Mark II}$$

- Lagrange ÜA
- Optimierer: $p_* = \lambda_* \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})$ mit $\lambda_* = \frac{\mu_* - r}{a^2 - 2br + cr^2}$

Folgerung 3.2 (Tobin's One-Fund-Theorem)
Jedes Pareto-Optimale Portfolio für (Mark II) kann als Linearkombination der risko-freien Anlage und des Portfolio

$$\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})$$

dargestellt werden.

Graph von min. Risiko σ_* und Zielrendite μ_* siehe phone

▶ **Bemerkung (nominales vs. relatives Portfolio)**

- $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^n$ mit ϑ_i Stückzahl von Anlagegut S^i und Portfoliowert

$$V_0 = \vartheta^T S_0 = \sum_{i=1}^n \vartheta_i S_0^i = w \quad \dots \text{ Anfangskapital}$$
$$V_T = \vartheta^T S_T = \sum_{i=1} \vartheta_i S_T^i$$

- relatives Portfolio: $p := (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $p_i = \frac{\vartheta_i S_0^i}{W}$ Vermögensanteil in S^i

$$\sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^n \vartheta_i S_0^i = \frac{w}{w} = 1$$

- Renditen:
  - Einzelnes Anlagegut: $R_i = \frac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}$
  - Gesamtes Portfolio:

$$\begin{aligned} R_p = \frac{V_T - V_0}{V_0} &= 1/w(\sum_{i=1}^n \vartheta_i S_0^i - \vartheta_i S_0^i) \\ &= 1/w \sum_{i=1}^n \vartheta_i (S_T^i - S_0^i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\vartheta_i S_0^i}{w_{p_i}}} R_i \\ &= \sum_{i=1}^n p_i R_i = p^T R \quad \dots \text{ linear in } p \end{aligned}$$

4. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- Ausgangspunkt: Optimalportfolio in (Mark II) $p_* = \lambda \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})$. Normiere $p_*^T \mathbb{1} = \mathbb{1} \implies \lambda_* = \frac{1}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})} = \frac{1}{b - cr}$ (Marktportfolio)
- Wert des Marktportfolios: $M_0 = 1, M_T = (1 + p_*^T R)$, Rendite $R_M = p_*^T R$
- Zentrale Idee des CAPM:
  - Betrachte M als beobachtbare Größe
  - Aktienindex DAX oder S&P500 sollte gute Näherung für M ergeben.

Wir betrachten folgende Kennzahlen:

- Überschussrendite: [excess return] (α)

$$\alpha_i = \mathbb{E}[R_i] - r = \mu_i - r \quad \dots \text{ für Wertpapiere } S^i$$
$$\begin{aligned} \alpha_M = \mathbb{E}[R_M] - r = p_*^T \mu - r &= \frac{\mu^T \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})} - r \\ &= \frac{a - rb}{b - rc} - r = \frac{a - 2rb + r^2 c}{b - cr} \end{aligned}$$

- Beta-Koeffizient

$$\beta_i = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(R_1, R_M)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_M)}$$

skalierte Kovarianz zwischen Erträgen von S^i und M

  - Maß für Korrelation zwischen Wertpapiere S^i und Marktportfolio
  - Volle Kovarianzmatrix wird nicht benötigt

- Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{\mathbb{E}[(R_i-\mu_i)(R_M-\mu_M)]}{\mathbb{E}[(R_M-\mu_M)^2]} = \frac{\mathbb{E}[e_i^T(R-\mu)(R-\mu)^T p_*]}{\mathbb{E}[p_*^T(R-\mu)(R-\mu)^T p_*]} = \frac{e_i^T\Sigma p_*}{p_*^T\Sigma p_*} \\ &= \frac{\lambda_* e_i^T \Sigma\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})}{\lambda_*(\mu - r\mathbb{1})^T\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})} \\ &= \frac{\mu_i - r}{\lambda_*(a-2rb+r^2c)} = \frac{\mu_i - r}{\mu_M - r} \quad \text{mit } \alpha_M := \mu_M - r\end{aligned}$$

d.h. es gilt CAPM-Gleichung

$$\beta_i(\mu_M - r) = (\mu_i - r) \quad \forall i \in [n]$$

β_i ist Beta-Koeffizient von S^i, $(\mu_M - r)$ ist Überschussrendite Marktportfolio, $(\mu_i - r)$ ist Überschussrendite von S^i (alpha)

  - Kann als Regressionsgleichung für $(\alpha_i, \beta_i)_{i\in[n]}$ interpretiert werden
  - Entscheidend für Attraktivität eines Wertpapieres S^i ist nicht die Überrendite $\alpha_i = \mu_i - r$ alleine, sondern in Relation zu β_i
  - CAPM kann empirisch überprüft werden durch Schätzung $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_1)$ und Regression

$$\hat{\beta}_i \cdot (\mu_M - r) = \hat{\alpha}_i + \varepsilon_i \tag{$*$}$$

    Ideal, wenn $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ klein ist

  - sketch, see phone ...

- Kritik am CAPM:
  - Regression ($*$) empirisch im Allgemeinen nicht besonders gut (Fehler $\sum \varepsilon_i^2$ groß)
  - Schätzung von μ_i, μ_M schwierig

- Erweiterungen:
  - Ergänze Schätzer $\hat{\mu}_i$ und $\hat{\mu}_M$ von Expertenmeinungen und Konfidenzaussagen führt zum Black-Littermann-Modell
  - Erweitere Regressionsgleichung ($*$) um weitere Variablen und führt zum Beispiel zum Fame-French-Modell

5. Präferenzordnungen und Erwartungsnutzen

- Kritik an Markowitz:
  - Ist Standardabweichung $\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(R)}$ nicht unbedingt gutes Risikomass
  - Entscheidungen unter Unsicherheit meist komplexer als durch Erwartungs-Varianzprinzip beschrieben
- Axiomatischer Zugang: Präferenzordnungen
  Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ Raum der integrierbaren Zufallsvariablen.

  $$\mathcal{M} = \{\text{Menge der Verteilungsfunktionen } F_X \text{ von } X \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\}$$

  Seien $X, Y \in L_1(\Omega)$ Interpretation risikobehafteter Auszahlungen ("Lotterie"). Wir wollen Ordnungsrelation "$\trianglelefteq$" mit Bedeutung:

  $$X \trianglelefteq Y \Leftrightarrow Y \text{ wird bevorzugt gegenüber } X$$

  Beschränken uns auf "verteilungsinvariante" POs welche durch Relation auf $\mathcal{M}$ erklärt werden können, d.h.

  $$X \trianglelefteq Y \Leftrightarrow F_X \trianglelefteq F_Y$$

Definition 5.1
Eine Relation "$\trianglelefteq$" auf $\mathcal{M}$ heißt Praferenzordnung (PO), wenn gilt:

- (Reflexiv) $F \trianglelefteq F \quad \forall F \in \mathcal{M}$
- (Transitiv) $(F \trianglelefteq G) \vee (G \trianglelefteq H) \implies (F \trianglelefteq H) \quad \forall F, G \in \mathcal{M}$
- (Vollständig) $\forall F, G \in \mathcal{M}$ gilt: $(F \trianglelefteq G) \wedge (G \trianglelefteq F)$

▶ **Bemerkung**

- Menge $\mathcal{M}$ ist konvex, d.h. $\forall F, G \in \mathcal{M}$ und $\alpha \in [0, 1]$ gilt

  $$H - (1-\alpha)F + \alpha G \in \mathcal{M} \tag{$\oplus$}$$

- ($\oplus$) lässt sich als "Mischen" von F und G interpretieren
- Sei $X \sim F_X, Y \sim F_Y$ und $A \perp\!\!\!\perp (X, Y)$ mit $\mathbb{P}(A = 0) = \alpha, \mathbb{P}(A = 1) = 1 - \alpha$. Dann gilt:

  $$(1 - A)X + AY \sim (1-\alpha)F_X + \alpha F_Y$$

- Aus gegebenen PO können wir ableiten
  - Äquivalenzrelation $F \sim G \Leftrightarrow (F \trianglelefteq G) \vee (G \trianglelefteq F)$ "Indifferenz zwischen F und G"
  - strikte Relation $F \triangleleft G \Leftrightarrow (F \trianglelefteq G) \vee (G \trianglelefteq F)$ "G wird strikt gegenüber F bevorzugt"

– Für "deterministische Zufallsvariablen" $a \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F_a = \mathbb{1}_{[a,\infty)}$

Eine Präferenzordnung kann folgende Eigenschaften besitzen:

1. Monotonie: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt $F_a \trianglelefteq F_b$ ("mehr besser als weniger")
2. Risikoaversion: $\forall X \in L_1(X)$ gilt: $F_X \trianglelefteq F_{\mathbb{E}[X]}$ ("sicher besser als unsicher")
3. Mittelwertseigenschaft: Sei $F, G, H \in \mathcal{M}$ mit $F \trianglelefteq G \trianglelefteq H$. Dann existiert $\alpha \in [0,1]$ mit $(a-\alpha)F + \alpha H \sim G$
4. Unabhängigkeitsaxiom: $\forall F, G, H \in \mathcal{M}$ gilt

$$F \trianglelefteq G \implies (1-\alpha)F + \alpha H \trianglelefteq (1-\alpha) + \alpha H \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Definition 5.2 (Erwartungsnutzen)
Sei $U\colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ eine monotone steigende und konkave ("Bernoullische Nutzenfunktion"). Dann definiert

$$F \trianglelefteq_U G \Leftrightarrow \int U \,\mathrm{d}F \leq \int U \,\mathrm{d}G \tag{$*$}$$

eine Präferenzordnung auf $\mathcal{M}$. Wir sagen "$\trianglelefteq_U$" folgt den Erwartungsnutzenprinzip (ENP).

▶ **Bemerkung**
Wenn wir ($*$) für Zufallsvariablen $X, Y \in L_1$ formulieren, erhalten wir

$$X \trianglelefteq_U Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[U(X)] \leq \mathbb{E}[U(Y)]$$

■ **Beispiel**
Wichtige Beispiele für Nutzenfunktionen

- logarithmische Nutzen:

$$U(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ -\infty & x \leq 0 \end{cases}$$

- Potenznutzen, mit $\alpha \in (0, \infty \setminus \{1\})$

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & x \geq 0 \\ -\infty & x \leq 0 \end{cases}$$

- Exponentialnutzen mit $\gamma \in \mathbb{R}$

$$U(x) = -\gamma \exp(-\gamma x)$$

Theorem 5.3 (Satz von von Neumann und Morgenstern, 1953)
Sei $|\Omega| < \infty$ und $\trianglelefteq$ eine Präferenzordnung auf $\mathcal{M}_\Omega$. Dann sind äquivalent:

1. Die Präferenzordnung erfüllt Eigenschaften 1.-4.
2. Die Präferenzordnung folgt den Erwartungsprinzip

▶ **Bemerkung**

- Werden in den 50ern als starke Rechtfertigung für ENP wahrgenommen
- (Empirische) Kritik Ende der 70er durch die Psychologen Kehnemann und Tversky ($\Longrightarrow$ "Prospect Theory")

Beweis.

- 2. $\Longrightarrow$ 1.: Es müssen die Eigenschaften 1. -4. nachgewiesen werden. Dann gilt:
  - Zeige erste Eigenschaft:

$$\int U \,\mathrm{d}F_a = U(a) \overset{U \text{ stetig}}{\leq} U(b) = \int U \,\mathrm{d}F_b \implies F_a \trianglelefteq F_b \checkmark$$

  - Sei $X \in L_1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int U \,\mathrm{d}F_X &= \int_{\mathbb{R}} U(x) \,\mathrm{d}F_X \\ &\leq U(\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}F_X) \quad \text{Jensen'sche Ungleichung} \\ &= U(\mathbb{E}[X]) = \int U \,\mathrm{d}F_{\mathbb{E}[X]} \implies F_X \trianglelefteq F_{\mathbb{E}[X]} \checkmark\end{aligned}$$

  (oder $\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X]$, wobei Jensen gilt.)

  - Sei $F \trianglelefteq G \trianglelefteq H$. Zu zeigen: $\exists \alpha \in [0,1]$ mit $(1-\alpha)F + \alpha H \sim G$ und setze

$$\alpha_* = \frac{\int U \,\mathrm{d}G - \int U \,\mathrm{d}F}{\int U \,\mathrm{d}H - \int U \,\mathrm{d}F} \in [0,1]$$

  Es gilt:

$$\int U((1-\alpha_*) \,\mathrm{d}F + \alpha_* \,\mathrm{d}H) = (1-\alpha_*) \int U \,\mathrm{d}F + \alpha_* \int U \,\mathrm{d}H$$
$$\int U \,\mathrm{d}F + \alpha_* (\int U \,\mathrm{d}H - \int \,\mathrm{d}F) = \int U \,\mathrm{d}G \checkmark$$

  - Zu zeigen $F \trianglelefteq G \implies (1-\alpha)F + \alpha H \trianglelefteq (1-\alpha)G + \alpha H$

$$\begin{aligned}\int U((1-\alpha) \,\mathrm{d}F + \alpha H) &= (1-\alpha) \int U \,\mathrm{d}F + \alpha \int U \,\mathrm{d}H \\ &\overset{F \trianglelefteq G}{\leq} (1-\alpha) \int U \,\mathrm{d}G + \alpha \int U \,\mathrm{d}H \\ &= \int U((1-\alpha) \,\mathrm{d}G + \alpha \,\mathrm{d}H) \checkmark\end{aligned}$$

□

Definition 5.4
Sei U Bern. Nutzenfunktion und $\trianglelefteq_U$ die zugehörige Präferenzordnung

1. Für $X \in L_1$ heisst $c := c_*(X, U) \in \mathbb{R}$ mit $c \sim_U X$ das certainly equivalent von X.
2. Für $U \in C^2$ heissen

$$A_U(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \quad R_U(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)}$$

die Arrow-Pratt-Koeffizienten der absoluten bzw. relative Risikoaversion.

▶ **Bemerkung**

- Für U streng monoton steigend gilt

$$c_*(U, X) = U^{-1}(\mathbb{E}[U(X)])$$

denn $c \sim_U X \implies U(c) = \mathbb{E}[U(X)]$

- Motivation für $A_U(x)$: Person mit Vermögen $x \in \mathbb{R}$ wird "Lotterie" εy angeboten (mit ε klein). Nach dem ENP sollte die Person annehmen wenn $\mathbb{E}[U(x + \varepsilon Y)] \geq U(x)$. Taylor:

$$\mathbb{E}[U(x + \varepsilon Y)] - U(x) = \mathbb{E}[\varepsilon y]U'(x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\varepsilon^2 y^2]U''(x) + \dots$$

Person sollte annehmen, wenn

$$2\frac{\mathbb{E}[\varepsilon y]}{\mathbb{E}[\varepsilon^2 y^2]} = \frac{\text{"Erw. Gewinn"}}{\text{"Risiko"}} \geq \frac{U''(x)}{U'(x)} = A_U(x)$$

Klassisches Beispiel zum "certainty equivalent".

■ **Beispiel (St. Petersburger Paradoxon (Nicholas Bernoulli, 1713))**

- Spiel: faire Münze geworfen bis in der N-ten Runde das erste Mal "Zahl" fällt. Gewinn ist 2^{N-1} Euro
- Wie hoch soll der Einsatz sein um am Spiel teilzunehmen?
- Antwort I: Einsatz gleich erwarteter Gewinn und N ist geometrisch verteilt, d.h. $\mathbb{P}(N = k) = (\frac{1}{2})^k, k \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{E}[2^{N-1}] = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}) = +\infty$$

- Die Antworten II und III von Gabriel Cramèr und Daniel Bernoulli entsprechen dem "certainty equivalent" mit Nutzenfunktion

$$U_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{(Cramer)}$$
$$U_2(x) = \log(x) \quad \text{(D. Bernoulli)}$$

- Antwort II (Cramer): $C_1 = C_*(2^{N-1}, U_1) = U_1^{-1}(\mathbb{E}[U_1(2^{N-1})])$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_1(2^{N-1})] = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k \sqrt{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+\frac{k-1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

  also $c_1 = (\frac{1}{2-\sqrt{2}})^2 \approx 2,914$ also fairer Einsatz: 2,91 Euro

- Antwort III (D. Bernoulli): $c_2 = c_*(2^{N-1}, U_2)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_2(2^{N-1})] &= \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k \log(2^{k-1}) = \log(2) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(k-1) \\
&= \frac{\log(2)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 2^{-k} = \frac{\log(2)}{4} \frac{1}{(1-1/2)^2} = \log(2)
\end{aligned}
$$

  NR:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \overset{\partial_z}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}
$$

  $c_2 = e^{\log(2} = 2$, also ist der faire Einsatz: 2 Euro.

Anhang

Literaturverzeichnis

Index