

Mint-Nachklausur 08.05.2019

1.

a) Definition σ -Algebra.

b) Definition Maß.

c) Zeige, dass jedes Maß σ -subadditiv ist.

d) Zeige für eine Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dass gilt: $\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq j} B_k\right) \leq \liminf \mu(B_k)$

2. $\int u \, d\mu = 1, u \in \mathcal{L}^1$

a) Jensen Ungleichung angeben.

b) Zeige: $\int \log u \, d\mu \leq 0$

3. $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lambda(dx)$

a) Stetigkeitslemma angeben.

b) Zeige: $F(t)$ ist für $t \in (0, \infty)$ stetig.

c) Differenzierbarkeitslemma angeben.

d) Zeige, dass $F(t)$ zweimal differenzierbar ist und dass $F''(x) = \int_0^\infty (\sin x)^2 e^{-tx} \lambda(dx)$

4.

a) Fubini angeben.

b) $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f stetig. Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), \lambda^2)$.

c) Zeige für das f aus b): $\int_0^9 \int_0^{x^2} f(x, y) \, d\gamma \, dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, \gamma) \, dx \, dy$