Stochastikvertiefung: Finanzmathematik WS 19/20

Dozent: Prof. Martin.Keller-Ressel

30. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel I

Einführung

1. Zentrale Fragestellung der Finanzmathematik

Bewertung:

Bewertung von Derivaten und Absicherung gegen aus Kauf/Verkauf entstehenden Risiken.

> **Definition (Derivat)**
> FInanzprodukt, dessen auszahlungen sich vom Preis einer oder mehrer Basisgüter (underlying) ableitet (ableiten entspricht derivate)

■ **Beispiel**

- Recht, in 3 Monaten 100.000 GBP gegen 125.000 EUR zu erhalten (Call-Option, Underlying: Wechselkurs GBP/EUR)
- Recht, innerhalb des nächsten Jahres 100.000 Mwh elektrischer Energie zum Preis von 30EUR/Mwh zu konsumieren mit Mindestabnahme 50.000 Mwh (Swing-Option, Underlying: Strompreis)
- Kauf- und Verkaufsoptionen aus Aktien (Underlying: Aktienkurs)

Fragestellung: Was ist der "faire" Preis für solch ein Derivat? ("Pricing"/Bewertung). Wie kann sicher der Verkäufer gegen eingegangenen Risiken absichern? ("Hedging"/Absicherung)

Optimale Investition

Zusammenstellung von Portofolios, welche nach Risiken/Ertragsgesichtspunkten optimal sind

- Wie wäge ich Risiken gegen Ertrag ab?
- Was genau bedeutet "optimal"?
- Lösung des resultierenden Optimierungsproblems

Risikomangement + Risikomessung

- Gesetzliche Vorschriften (Basel + Solvency) sollen Stabilität des Banken-/Verischerunssystems auch angesichts verschiedener Risiken sicherstellen $\implies$ mathematische Theorie der konvexen und kohärenten Risikomaße

Mathematische Werkzeuge: Wtheorie + stochastische Prozesse (Dynamik in der Zeit), etwas lineare Algebra, Optimierung, Maßtheorie

2. Mathematisches Finanzmodell

Wir betrachten

1. WRaum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, später auch weitere W-Maße $Q, \ldots$ auf demselben Maßraum $(\Omega, \mathscr{F}), \omega \in \Omega$ Elementarereignisse bzw. "Szenarien"

2. Zeitachse I entweder $I = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = T\}$ N-Periode Modell (diskretes Modell) oder $I = [0, T]$ (zeitstetiges Modell), wobei $T =$ Zeithorizont
   Ein stochasticher Prozess S ist eine messbare Abbildung $S : (\Omega, \mathscr{F}) \to \mathbb{R}^d$ mit $(\omega, t) \mapsto S_t(\omega)$ insbesondere ist

   - $t \mapsto S_t(\omega)$ Funktion $I \to \mathbb{R}^d$ für jedes $\omega \in \Omega$ ("Pfad")
   - $\omega \mapsto S_t(\omega)$ Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R}^d$ für jedes $t \in I$

3. Filtration ist Folge von ω-Algebren $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$ mit der Eigenschaft $\mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_t \quad \forall s, t \in I, x \leq t$ und $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F} \quad \forall t \in I$
   Interpretation: $\mathscr{F}_t$ =dem Marktteilnehmer zum Zeitpunkt t bekannte/ verfügbare Informationen
   Ereignisse $A \in \mathscr{F}_t$ gelten als "zum Zeitpunkt t" bekannt
   Eine $\mathbb{R}^d$-wertige ZV X heißt $\mathscr{F}_t$-messbar, wenn $E = X^{-1}(B) \in \mathscr{F}_t \quad \forall$ Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ (dabei ist E das Urbild von B)

   ■ **Beispiel**
   Ein stochastischer Prozess $(S_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ heißt adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$, wenn gilt:

   $$S_t \text{ ist } \mathscr{F}_t - \text{messbar} \quad \forall t \in I$$

   Interpretation: "der Wert S_t ist zum Zeitpunkt t bekannt"
   Warum Filtration in der Finanzmathematik (FiMa)?

   - Unterscheidung Zukunft / Vergangenheit
   - unterschiedliche Information (Insider/Outsider) entspricht unterschiedlicher Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$ bzw. $(\mathscr{G}_t)_{t \in I}$

4. Anlagegüter (assets) $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger stochastischer Prozess mit Komponenten

   $$S^i : (\Omega \times I) \to \mathbb{R} \quad (\omega, t) \mapsto S_t^i(\omega) \text{ mit } i \in \{0, 1, \ldots, d\}$$

   wobei $S_t^i =$ Preis des i-ten Anlageguts zum Zeitpunkt t
   $S^i, i \in \{1, \ldots, d\}$ ist typischerweise

   - Aktie (Stock), Unternehmensanteil
   - Währung (currency) bzw. Wechselkurs
   - Rohstoff (commodity) wie z.B. Öl, Edelmetall, Elektriziät, etc
   - Anleihe (bond) ... Schuldverschreibung

   Hauptannahme: S^i ist liquide gehandelt (z.B. an Börse), d.h. Kauf/Verkauf zum Preis S_t^i jederzeit möglich
   $S^0 \ldots$ "Numeraire" hat Sonderrolle: beschreibt Verzinsung von nicht in $(S^1, \ldots, S^d)$ angelegten Kapital, wird meist risikolos betrachtet

Definition I.1 (Finanzmodell)
Ein Finanzmodell (FMM) mit Zeitachse I ist gegeben durch

1. einen WRaum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$
2. einen an $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ adaptieren, $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen stochastischen Prozess $S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d), t \in I$

■ **Beispiel (Cox-Rubinstein (CRR)-Modell (zeitdiskret))**

- $S_n^0 = (1+r)^n$, d.h. Verzinsung mit konstanter Rate r
- $S_n^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^n (1+Ru)$, wobei $(R_1, R_2, \dots)$ unabhängig ZVen mit zwei möglichen Werten $a < b$
  Bild: "rekonbinierter Baum" mit Ereignissen ω entsprechen Pfaden in dem Baum

■ **Beispiel (Block-Scholes-Modell (zeitstetig))**

- $S_t^0 = e^{rt}$, d.h. Verzinsung mit konstanter Rate r
- $S_t^1 = S_0^1 \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \beta_t)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0^1 > 0$ und β_t entspricht Brownscher Bewegung (stochastischer Prozess in stetiger Zeit) und $\mu - \frac{\omega^2}{2}$ entspricht Trendkomponente

Bild: Börsenkurve $= S_t(\omega)$, wobei zeitstetiges Modell auf unendlichen W-Raum

3. Anleihen und grundeliegende Beispiele für Derivate

Hier betrachten wir immer nur ein Basisgut $S_t = S_t^1$

1. Anleihe(bond): (genauer: Null-Coupon-Anleihe [zero-coupon-bond]) Der Emittent (Herausgeber) einer Anleihe mit Endfälligkeit T [maturity] garantiert dem Käufer zum Zeitpunkt T den Betrag N (EUR/USD/...) zu zahlen.
   Typische Emittenten:
   - Staaten [government bond]
   - Unternehmen (als Alternative zur Kreditaufnahme)

   Nach Emission werden Anleihen auf den Sekundärmarkt weiterverkauft, d.h. liquide gehandelte Wertpapiere
   Preis bei Emission: $B(0,T)$
   Preis bei Weiterverkauf zum Zeitpunkt $t \leq T$: $B(t,T)$
   Wir normieren stets $N = 1 \implies B(T,T) = 1$
   Anleihen von West/Nord/Mitteleuropäischen Staaten + USA/Kananda werden als risikolos betrachtet (sichere Zahlung).
   Sonst: Kreditrisiko
   Risikofreie Anleihen können als Numerale $S_t^0 = B(t,T)$ genutzt werden
   Bild: kann ich gerade nicht beschreiben :/

2. Terminvertrag
   Aus Käufersicht: Vereinbarung zu bestimmten, zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis zu kaufen (Kaufverpflichtung)

Beliebt bei Rohstoffen + Elektrizität
Auszahlunsprofil: $F_T = S_T - K$
Bild: "Eine Gerade mit Schnittpunkt der x-Achse bei K und Schnittpkt der y-Achse bei $S_T \geq 0$, ist ja nur einer Polynom 1. Ordnung"
Preis zum Zeitpunkt t: F_t

3. Europäische Put-/Call-Option: Recht zu einem zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisguts S zum Preis K zu verkaufen (Put) bzw. zu kaufen (Call) **keine (Ver-)Kaufsverpflichtung**

   - Call:

$$C_T := \begin{cases} S_T - K & S_T \geq K \\ 0 & S_T < K \end{cases} = (S_T - K)_+$$

     ▶ **Bemerkung**

$$\begin{aligned} X_+ &= \max(X, 0) \quad X_+ - X_{=X} \\ X &= \min(X, 0) \quad X_+ + X_{=|X|} \end{aligned}$$

     Bild: (hockey stick function)

   - Put:

$$P_t = \begin{cases} 0 & S_T \geq K \\ K - S_T & S_t < K \end{cases} = (K - S_T)_+$$

     Bild: "inversed" hockey stick function xD

4. Amerikanische Put/Call-Option: Wie Put/Call aber mit Ausübung zu beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$
   Preis zum Zeitpunkt t: P_t^{AM}, C_t^{AM}
   Auszahlungsprofil zum zeitpunkt τ: $(S_\tau - K), (K - S_\tau)_+$
   Zeitpunkt τ muss im Allgemeinen als Lösung eines stochastischen Optimierungsproblems bestimmt werden ("Optimales Stopproblem")

4. Elementare Replikations und Arbitrage-Argumente

Was können wir (mit elementaren Mitteln) über die "fairen" Preise $B(t, T), F_t, C_t, P_t$ aussagen?
Wir verwenden:

- Replikationsprinzip: Zwei identische zukünftige Zahlungsströme haben auch heute denselben Wert. (ein Zahlungstrom "repliziert" den anderen)

- No-Arbitage-Prinzip: “Ohne Kapiteleinsatz kann sicherer Gewinn ohne Verlustrisiko erzielt werden”
- Arbitrage: risikofreier Gewinn

- Schwächere Form des Replikationsprinzips:
  Superpositionsprinzip: Ist ein Zahlungsstrom in jedem Fall größer als ein anderer, so hat er auch heute den größeren Wert

stark	Rep. Prinzip	eingeschränkt anwendbar
$\downarrow$	Superrep. Prinzip	$\uparrow$
schwach	No-Arbitrage-Prinzip	immer anwendbar

Lemma I.2
Für den preis C_t des europäischen Calls gilt:

$$(S_t - K \cdot B(t,T))_+ \leq C_t \leq S_t$$

Beweis. • untere Schranke: Für Widerspruch $S_t - K \cdot (B(t,T)) - C_t = \varepsilon > 0$

Portofolio	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Verkaufe Basisgut	$-S_t$	$-S_T$	$-S_T$
Kaufe Anleihe	$\varepsilon + K \cdot B(t,T)$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} + K$
Σ	0	$K - S_T + \frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$	$\frac{\varepsilon}{B(t,T)} > 0$
	keine Anfangskapital	sicherer Gewinn	sicherer Gewinn

$\implies$ Widerspruch zu No-Arbitrage
$\implies$ $S_t - K \cdot B(t,T) \leq C_t$ und Ausserdem $C_t \geq 0 \implies C_t \geq (S_t - K \cdot B(t,T))_+$

- obere Schranke: UE □

Lemma I.3 (Put-Call-Parität)
Für Put P_t, Call C_t mit demselben Ausübungspreis K und Basisgut S_t gilt

$$C_t - P_t = S_t - B(t,T)K$$

Bild: need to add ..., but should be fast to do ...

Beweis. mit Replikation:

Portofolio 1	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Kaufe Anleihe	$K \cdot B(t,T)$	K	K
Wert Portofolio 1	$C_t + K \cdot B(t,T)$	K	S_T

Portofolio 2	Wert in t	Wert in T, $S_t \leq K$	Wert in T, $S_t > K$
Kaufe Put	P_t	$K - S_T$	0
Kaufe Basisgut	S_t	S_T	S_T
Wert Portofolio 2	$P_t + S_t$	K	S_T

Replikationsprinzip: $C_t + K \cdot B(t,T) = P_t + S_t$
$\implies C_t - P_t 0 S_t - K \cdot B(t,T)$ □

5. Bedingte Erwartungswerte und Martingale

5.1. Bedingte Dichte und bedingter Erwartungswert

Motivation: Gegeben: Zwei ZVen (X,Y) mit Werten in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und gemeinsame Dichte $f_{XY}(x,y)$. Aus f_{XY} können wir ableiten:

- $f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^m} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x$ mit Randverteilung von Y
- $S_Y := \{y \in \mathbb{R}^n : f_Y(y) > 0\}$ Träger von Y - Bild?

Definition (Bedingte Dichte von X bezüglich Y)
Bedingte Dichte von X bezüglich Y ist definiert als

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} & y \in S_Y \\ 0 & y \notin S_Y \end{cases}$$

Betrachte folgende Problemstellung:
Was ist die beste Vorhersage von X gegeben einer Beobachtung $Y = y$?
Kriterium:
Minimiere quadratischen Abstand/ zweite Moment/ L_2-Norm.
Vorhersage:
Messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $y \mapsto g(y)$, d.h,.

$$\min\left\{\mathbb{E}[(X - g(Y))]^2 : g \text{ messbar } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\right\} \tag{min-1}$$

Satz I.4
Wenn (X, Y) eine gemeinsame Dichte besitzen mit $\mathbb{E}[|X|^2] < \infty$ gilt, dann wird (min-1) minimiert durch die bedingte Erwartung

$$g(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y] := \int_{\mathbb{R}^m} x f_{X|Y}(x, y) \, \mathrm{d}x$$

(wobei $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ "Erwartungswert von X bedingt auf $Y = y$")

Allgemeiner gilt:

Theorem I.5
Seien (X, Y) ZVen mit gemeinsamer Dichte auf $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathbb{E}[h(X, y)^2]$. Dann wird das Minimierungsproblem

$$\min\big\{\mathbb{E}[(h(X, Y) - g(y))^2]\big\} \quad g\text{messbar von } \mathbb{R}^n \text{ nach } \mathbb{R}$$

gelöst durch

$$g(y) = \mathbb{E}[h(X, Y) \mid Y = y] = \int_{\mathbb{R}^m} h(X, Y) f_{X|Y}(x, y) \, \mathrm{d}x$$

Beweis (nur Prop, Theorem analog, für $n = 1$). Setze $g(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x, y) \, \mathrm{d}x$. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige messbare Funktion mit $\mathbb{E}[p(y)^2] < \infty$. Setze $g_\varepsilon(y) = g(y) + \varepsilon p(y)$. Minimiere

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon) &:= \mathbb{E}[(X - g_\varepsilon(y))^2] = \mathbb{E}[(X - g(y) - \varepsilon p(y))^2] \\
&= \mathbb{E}[(X - g(y))^2] - 2\varepsilon \mathbb{E}[(X - g(y))p(y)] + \varepsilon^2 \mathbb{E}[p(y)^2] \\
\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) &= 2\varepsilon \mathbb{E}[p(y)^2] - 2\mathbb{E}[(X - g(y))p(y)] \\
&\implies \varepsilon_* := \frac{\mathbb{E}[(X - g(y))p(y)]}{\mathbb{E}[p(y)^2]} = \frac{A}{B}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}[Xp(y)] - \mathbb{E}[g(y)p(y)] \\
&= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} xp(y) f_{XY}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_{S_y} g(y)p(y) f_Y(y) = [\text{Einsetzen von } g + \text{Fubini}] \\
&= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} xp(y) f_{XY}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R} \times S_y} xp(y) \underbrace{f_{X|Y}(x, y) f_Y(y \, \mathrm{d}y)}_{= f_{XY}(x,y)} = 0
\end{aligned}$$

also $\varepsilon^* = 0$ unabhängig von $p \implies g(y)$ minimiert (min-1). $\square$

■ **Beispiel**

Seien (X,Y) normalverteilt auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit

$$\mu = (\mu_x,\mu_y)^T \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma x^2 \rho\sigma_x\sigma_y & \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) & \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) \end{pmatrix} \text{ mit } \rho\in[-1,1]$$

Dann ist die beliebige Dichte $f_{X|Y}(x,y)$. (Σ Kovarianzmatrix). wieder die Dichte einer Normalverteilung mit

$$\mathbb{E}[X \mid Y=y] = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid Y=y) = \sigma_x^2(1-\rho^2)$$

(ist ÜA!). Die Abbildung $y\mapsto \mu_x + g(y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)$ heißt Regressionsgerade für X gegeben $Y=y$.
Bild: μ_x,μ_y sind Werte auf x,y-Achse und die σ's bilden das Steigungsdreieck (Steigung im Wesentlichen durch ρ bekannt)
Für diskrete ZVen, d.h. wenn X,Y nur endlich viele $\{x_1,\dots,x_m\}$ bzw. $\{y_1,\dots,y_m\}$ annehmen dann erhalten wir mit ähnlichen Überlegungen als Lösung von (min-1)

$$\mathbb{E}[X \mid Y=y_j] = \sum_{i=1}^m X_i\mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j)$$

wobei direkt die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X=x_i\wedge Y=y_j)}{\mathbb{P}(Y=y_j)} & \text{wenn } \mathbb{P}(Y=y_j)>0 \\ 0 & \text{wenn } \mathbb{P}(Y=y_j)=0 \end{cases}$$

5.2. Bedingte Erwartung - maßtheoretischer Zugang

Wir betrachten WRaum $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$. Für ZV $X:\Omega\to\mathbb{R}$ und $p\in[1,\infty)$ definieren wir die L_p-Norm

$$\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p}$$

und L_p-Raum $L_p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}) := \Big\{X:\Omega\to\mathbb{R}\colon \mathscr{F}-\text{messbar}, \|X\|_p<\infty\Big\}$. Dabei identifzieren wir ZVen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, d.h. $\mathbb{P}(X\neq X')=0 \implies X=X'$ (in L_p).
Aus Maßtheorie bekannt: (?)
Die Räume $L_p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ mit Norm $\|\cdot\|_p, p\in[1,\infty)$ sind stets Banach-Räume (lineare, vollständig, normierte Vektorräume). Für $p=2$ auch Hilbertraum mit inneren Produkt

$$\langle X,Y\rangle = \mathbb{E}[XY] = \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Für $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra ist $L_p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})\subseteq L_p(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ abgeschlossen Unterraum.
Wir verallgemeinern "Vorhersageproblem" aus dem letzten Abschnitt (1.3?)
Gegeben ZVe X aus $L_2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ist $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra.

Was ist die beste $\mathscr{G}$-messbare Vorhersage für Y?

$$\min\left\{\mathbb{E}[(X-G)^2] \colon G \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\right\} \tag{min-2}$$

wobei $\mathbb{E}[(X-G)^2] = \|X-G\|_2^2$.
Aus Hilbertraumtheorie:
(min-2) besitzt eine eindeutige Lösung $G_* \in L_2(\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathbb{P})$. G_* ist Optimierung (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$) von $X \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ auf abgeschlossenen Unterraum $L_2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$
Bild: eventuell von Eric (Orthogonal Projektion auf den Unterraum)
Wir bezeichnen mit G_* mit $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ bedingte Erwartungswert von X bezüglich $\mathscr{G}$.

Theorem I.6 (Eigenschaften bedingter Erwartungswert)
Seien $X, Y \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und $\mathscr{G} \subseteq F$ Unter-σ-Algebra. Dann gilt

1. (Linearität) $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$
2. (Turmregel) Für jede weitere σ-Algebra $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{G}$ gilt
$$\mathbb{E}[E[X \mid \mathscr{G} \mid \mathscr{H}]] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{H}]$$
3. (Pullout-Property) $\mathbb{E}[XZ \mid \mathscr{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$, wenn Z beschränkt und $\mathscr{G}$-messbar ist.
zweite Version: Für Z $\mathscr{G}$-messbar mit $\mathbb{E}[|XZ|] < \infty$ gilt:
$$\mathbb{E}[XZ \mid \mathscr{G}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$$
insbesondere gilt
$$X\mathscr{G}\text{-messbar} \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = X$$
4. (Monotonie) $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$
5. (Δ-Ungleichung) $|\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathscr{G}]$
6. (Unabhängigkeit) X unabhängig von $G \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$
7. (triviale σ-Algebra) $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\} \implies \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$

Beweis. (ohne Beweis, siehe VL W-Theorie mit Martingalen oder auch STOCH-Skript SS19.) □

▶ Bemerkung

- Die für $X \in L_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ definierte vedingte Erwartung $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ lässt sich durch Approximation auf alle $X \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ erweitern. Alle Eigenschaften aus Theorem Theorem I.I.6 bleiben erhalten!
- Sei Y eine ZVe und $\mathscr{G} = \sigma(Y)$ die von Y erzeugte σ-Algebra. Wir schreiben:
$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] \quad \sigma\text{-messbare ZVe}$$

- Maßtheorie: Doob-Dynkin-Lemma $\implies$ $\exists$ messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sodass

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = g(Y)$$

Dabei ist g genau die Funktion aus (min-1).

Zusammenfassung:
Sei X, Y aus $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{R})$, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ Unter-σ-Algebra

1. $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ ist messbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Falls bedingte Dichte existiert, gilt:

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{\mathbb{R}^m} f_{X|Y}(x, y) \, \mathrm{d}x$$

2. $\mathbb{E}[X \mid Y]$ ist eine $\sigma(y)$-messbare ZVe, diese kann als $g(Y)$ dargestellt werden. Falls bedingte Dichte existiert, gilt

$$\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{X|Y}(x, Y(\omega)) \, \mathrm{d}x$$

3. $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ ist eine $\mathscr{G}$-messbare ZVe. Falls $\mathscr{G} = \sigma(y)$ tritt 2) ein.

In allgemeinen Fall kann $\mathbb{E}[\bar{X} \mid \cdot]$ interpretiert werden als <u>beste Vorhersage</u> für X, gegeben

1. punktweise Beobachtung $Y = y$
2. Beobachtung Y
3. Information $\mathscr{G}$

5.3. Martingale

Prototyp eines "neutralen" stochastischen Prozesses,der weder Aufwärts- noch Abwärtstrend besitzt. Hier nur in diskrete Zeit $Z = \mathbb{N}_0$.

Definition (Martingal ohne Filtration)
Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stochastischer Prozess. Wenn gilt

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\mathbb{E}[X_{n+1}, \dots, X_n] = X_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

dann heißt (X_n) <u>Martingal</u>. Wen wir $\mathscr{F}_n^* = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ definieren, können wir 2) schreiben als

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] = X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Interpretation:

- Beste Vorhersage für zukünftigen Wert X_{n+1}, basierend auf Vergangenheit $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ ist der momentane Wert X_n.
- Aus der Turmregel folgt

$$\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_n^*] = X_n \quad n, k \in \mathbb{N}_0$$

denn

$$\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_n^*] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathscr{F}_{n+k-1} \mid \mathscr{F}_n^*]] = \mathbb{E}[X_{n+k-1} \mid \mathscr{F}_n^*] = (k\text{-mal}) = X_n$$

Kann von $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf beliebige Filtrationen $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erweitert werden.

Definition (Martingal mit Filtration)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wenn gilt

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0$
2. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

dann heißt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bezüglich Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Interpretation:
Beste Vorhersage für zukünftige Werte X_{n+1}, basierend auf verfügbarer Information $\mathscr{F}_n$ ist momentane Wert X_n.

Definition (Supermartingal, Submartingal)
Falls in Punkt 2) statt "=" die Ungleichung $\leq$ oder $\geq$ gilt, so heißt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Supermartingal bzw. Submartingal.

Erste Beobachtung:

- X Martingal $\implies \mathbb{E}[X_n] = X_0$, d.h. $n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist konstant.
  Begründung:

  $$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n \implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] \implies (n\text{-mal Anwendung } \mathbb{E}[X_n] = X_0)$$

  Bild: Erwartungswert konstant, aber kein Martingal.
- X Submartingal $\implies n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist monoton steigend
- X Supermartingal $\implies n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$ ist monoton fallend

Um sich den Unterschied zwischen Super- und Submartingal zu merken, hier eine kleine Hilfe:
"Das leben ist ein Supermartingal, die Erwartungen fallen mit der Zeit."

■ **Beispiel**

- Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige ZVen in $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[Y_n] = 0$. Definiere $X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$ mit $X_0 = 0$. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal, denn
  1. $\mathbb{E}[|X_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Y_k|] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓
  2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] &= \mathbb{E}[Y_{n+1} + X_n \mid \mathscr{F}_n^*] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n^*] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{F}_n^*] \quad (\text{ Turm und } \mathscr{F}_n^*\text{-messbar}) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1}]}_{=0} + X_n = X_n \checkmark\end{aligned}$$

- weitere Beispiele auf dem ersten Übungsblatt!

Definition (vorhersehbar)
Sei $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt vorhersehbar (predictable) bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn gilt:

$$H_n \text{ ist } \mathscr{F}_{n-1}\text{-messbar} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

▶ **Bemerkung**
Stärkere Eigenschaft als "adaptiert".

Definition (diskretes stochastische Integral)
Sei X adaptierter und H ein vorhersehbarer stochastischer Prozess bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißt

$$(H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \tag{$*$}$$

diskretes stochastische Integral von H bezüglich X.

▶ **Bemerkung**
Summe $(*)$ heissen in der Analysis Riemann-Stieltjes-Summen. Werden für Konstruktionen des RS-Integrals $\int h \, \mathrm{d}\rho$ verwendet.

Definition (lokal beschränkt)
Ein stochastischer Prozess $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt lokal beschränkt, wenn eine (definierte) Folge $c_{\in}\mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, sodass

$$|H_n| \leq c_n \text{ f.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Theorem I.7
Sei X adaptiert stochastischer Prozess (bezüglich Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Dann sind äquivalent:

1. X ist Martingal
2. $(H \cdot X)$ ist Martingale für alle lokal beschränkten, vorhersehbaren $(H_n)_{n\in N}$

Das heisst: stochastische Integral erhält die Martingal-Eigenschaft.

Beweis. 8.11.2019! □

▶ **Bemerkung**
Die ZV H wird später die Analagestrategie sein.

Anhang

Literaturverzeichnis

Index