Ökonometrie Grundlagen, Übung 7, Ergänzung zu Aufgabe 1

Henry Haustein

Aufgabe 1

Wir bilden die Lagrangefunktion $L = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) - \lambda(R\hat{\beta} - r)$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}} &= -X'y - X'y + 2(X'X)'\hat{\beta} - (\lambda R)' = 0 \\
&= -2X'y + 2X'X\hat{\beta} - R'\lambda' = 0 \qquad (*) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -(R\hat{\beta} - r) = 0 \\
R\hat{\beta} &= r
\end{aligned}$$

Multiplikation von $(*)$ mit $R(X'X)^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned}
0 &= -2R(X'X)^{-1}X'y + 2R\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}\hat{\beta} - R(X'X)^{-1}R'\lambda' \\
&= -2R(X'X)^{-1}X'y + 2R\hat{\beta} - R(X'X)^{-1}R'\lambda'
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\beta_{UR} = (X'X)^{-1}X'y$ und auflösen nach λ'

$$\begin{aligned}
0 &= -2R\beta_{UR} + 2R\hat{\beta} - R(X'X)^{-1}R'\lambda' \\
R(X'X)^{-1}R'\lambda' &= -2R\beta_{UR} + 2R\hat{\beta} \\
\lambda' &= \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(-2R\beta_{UR} + 2\underbrace{R\hat{\beta}}_{r}) \\
&= -2\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r)
\end{aligned}$$

Einsetzen in $(*)$ und Auflösen nach $\hat{\beta}$

$$\begin{aligned}
0 &= -2X'y + 2X'X\hat{\beta} - R'\left[-2\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r)\right] \\
&= X'y - X'X\hat{\beta} - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r) \\
X'X\hat{\beta} &= X'y - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r) \\
\hat{\beta} &= \underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\beta_{UR}} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r) \\
&= \beta_{UR} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{UR} - r)
\end{aligned}$$