Abi-Stoff

Potenzgesetze

- $a^0 = 1$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Logarithmengesetze

- $x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$
- $\log(1) = 0$
- $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$
- $-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$
- $n\log(x) = \log(x^n)$
- $\frac{\log(x)}{\log(x)} = \log_a(x)$

Mengenlehre - Grundsätzliches

- Teilmenge $A \subseteq B$
- leere Menge $\emptyset = \{\}$
- Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = 2^M$: Menge aller Teilmengen von M, Potenzmenge enthält genau $2^{|M|}$ Elemente

Mengenlehre - Mengenalgebra

Grundmenge ist immer M

- Komplement: $A^C = \{x \in M \mid x \notin A\}$
- Durchschnitt: $A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Vereinigung: $A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Differenz: $A \setminus B = A \cap B^C$
- symmetrische Differenz: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- kartesisches Produkt: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Rechenregeln

- Kommutativ-Gesetz
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \triangle B = B \triangle A$
- Assoziativ-Gesetz
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
- Distributiv-Gesetz
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Gesetze von De Morgan
  - $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Lösen von Betragsungleichungen

- Die Zahl $|x + 7|$ ist immer positiv, aber $x + 7$ kann sowohl negativ als auch positiv sein $\rightarrow$ Fallunterscheidung
  - Lösen der Gleichung mit $x + 7$ anstatt $|x + 7| \rightarrow$ Lösungsmenge $\mathcal{L}_1$
  - Lösen der Gleichung mit $-(x + 7)$ anstatt $|x + 7| \rightarrow$ Lösungsmenge $\mathcal{L}_2$
- Lösungsmenge $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1 \cap \{x \mid x \geq -7\}) \cup (\mathcal{L}_2 \cap \{x \mid x < -7\})$

Mengenlehre - Funktionen

- Bild von X unter f: $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$
- Graph von f: $\text{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$
- injektive Funktion: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- surjektive Funktion: Für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$
- bijektive Funktion: injektiv und surjektiv
- Verknüpfung: $(g \circ f)(x) = f(g(x))$
- Umkehrfunktion: die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Funktion f. Erhalt durch Umstellen der Funktion nach x und anschließendes Vertauschen von x und y.

Zahlenbereiche

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- gebrochene Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
- reelle Zahlen $\mathbb{R}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Eigenschaften des Betrages (*Abstand einer Zahl zu 0*)

- $|-a| = |a|$
- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

vollständige Induktion

1. Zeige die Behauptung für $n = 1$
2. Wie sieht die Behauptung für $n + 1$ aus? Versuche davon die Behauptung für n herauszuarbeiten, setze die Behauptung ein und fasse zusammen, bis es so ähnlich wie die originale Behauptung nur mit $n + 1$ statt n aussieht

Kombinatorik

- Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$
- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Binomischer Lehrsatz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Permutation: Anordnung der Elemente $\{1, 2, ..., n\}$, Anzahl der Anordnungen: $n!$
Kombination: Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung, Anzahl der Möglichkeiten $\binom{n}{k}$
Variation: Auswahl von k Elementen aus n Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung, Anzahl der Möglichkeiten $\binom{n}{k} \cdot k!$

Matrizen und Vektoren - Grundsätzliches

- $m \times n$-Matrix: rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten

$\Rightarrow$ Leontief-Modell: schwierig zu erklären, Übung selber rechnen

- Transponierte Matrix A: A^T = Matrix, in der Zeilen mit Spalten getauscht wurden

Matrizen und Vektoren - Rechnen mit Matrizen

- Elementweise Addition und Subtraktion
- Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl (Skalar): jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multiplizieren
- Multiplikation von 2 Matrizen: *Zeile · Spalte*

Matrizen und Vektoren - Rechnen mit Vektoren

- Addition und Subtraktion von Vektoren: elementweise
- Betrag eines Vektors a: $|a| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$
- Skalarprodukt zweier Vektoren: $a^T b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$
- Winkel zwischen 2 Vektoren: $\cos(\alpha) = \frac{a^T b}{|a| \cdot |b|}$

Matrizen und Vektoren - Determinanten

- Determinante einer 2×2-Matrix: $\det(A) = ad - bc$
- Determinante einer 3×3-Matrix: $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ (Regel von Sarrus)
- Determinante einer $n \times n$-Matrix: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \triangle_{ik}$ (Laplace'scher Entwicklungssatz, Entwicklung nach der k-ten Zeile oder Spalte)
- Die zu A inverse Matrix A^{-1} existiert nur, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.
- Eigenschaften der Determinante
  - $\det(A) = \det(A^T)$
  - $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
  - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
  - $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Matrizen und Vektoren - Invertieren einer Matrix

- allgemeine invertierte 2×2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- allgemeine invertierte 3×3-Matrix:

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Matrizen und Vektoren - Lösung linearer Gleichungssysteme

$Ax = b$

- Lösung über Inverse: $x = A^{-1}b$
- Lösung über Cramer'sche Regel: $x_i = \frac{\det(i\text{-te Spalte von } A \text{ durch } b \text{ ersetzt})}{\det(A)}$
- Lösung über Austauschverfahren
  - (R1) neuer Pivotplatz $= \frac{1}{p}$
  - (R2) neue Pivotzeile $= \frac{\text{alte Pivotzeile}}{-p}$
  - (R3) neue Pivotspalte $= \frac{\text{alte Pivotspalte}}{p}$
  - (R4) $\alpha_{ik} = \alpha_{ik} + \alpha_{i\tau}\alpha_{\sigma k}$ für $i \neq \sigma$, $k \neq \tau$ oder $k = 0$ (Rechteckregel)

Lineare Optimierung

- Überführung eines LOP in ein NLO mit folgenden Regeln
  - Zielfunktion $z \rightarrow$ min. Ist $z \rightarrow$ max gegeben, einfach mit -1 multiplizieren
  - Ungleichungen mittels Schlupfvariablen in Gleichungen überführen

Simplexverfahren

- Simplextableau ist entscheidbar, wenn
  - $d_1, ..., d_q \geq 0 \rightarrow$ es gibt eine optimale Lösung, die abgelesen werden kann
  - Es gibt mindestens eine Spalte τ mit $d_\tau < 0$ und $b_{1\tau}, ..., b_{p\tau} \geq 0 \rightarrow$ es gibt keine optimale Lösung
- normales Austauschverfahren, nur gibt es Bedingungen für die Wahl des Pivot-Elements
  - (SR1) Wahl der Pivotspalte τ: Spalte mit der Eigenschaft $d_\tau < 0$
  - (SR2) Wahl der Pivotzeile σ: $\sigma = \text{argmin}_{i \in J(\tau)} \left\{ \frac{b_i}{|b_{i\tau}|} \right\}$ wobei $J(\tau) = \{i \mid i \in \{1, ..., p\} \text{ und } b_{i\tau} < 0\}$