Einführung in die Produktion, Hausaufgabe 2

Henry Haustein

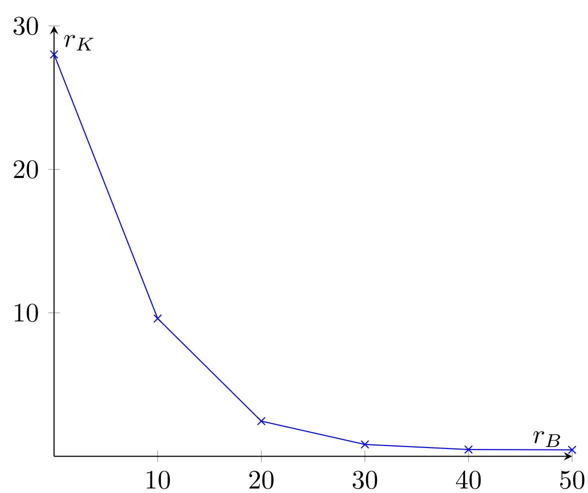
Aufgabe 2

(a) Um bei gegebenen r_B das r_K zu berechnen, müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$1 = 0.0429r_B - 0.0006r_B^2 + (0.0003r_B^2 + 0.0357)r_K$$
$$r_K = \frac{-0.0429r_B + 0.0006r_B^2 - 1}{0.0003r_B^2 + 0.0357}$$

Es ergibt sich

r_B	r_K
0	28.011
10	9.6043
20	2.4534
30	0.8276
40	0.4731
50	0.4518



(b) Die Kostenfunktion ist $K = 2r_K + 2.7r_B$. Daraus ergibt sich die Lagrangefunktion als $L = 2r_K + 2.7r_B + \lambda(0.0429r_B - 0.0006r_B^2 + 0.0003r_B^2 r_K + 0.0357r_K - 1)$. Die Optimalitätsbedingungen sind dann

$$\frac{\partial L}{\partial r_K} = 2 + 0.0003 r_B^2 \lambda + 0.0357\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_B} = 2.7 + 0.0429\lambda + 0.0012 r_B \lambda + 0.0006 r_B r_K \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.0429 r_B - 0.0006 r_B^2 + 0.0003 r_B^2 r_K + 0.0357 r_K - 1 = 0 \tag{3}$$

Damit eine optimale Produktion an den zu prüfenden Punkten möglich ist, müssen die Gleichungen (1) bis (3) an der zu prüfenden Stelle genau 0 sein. Die entsprechenden λ's in (1) und (2) müssen gleich sein. Für den Punkt $(8.4271, 11.9479)$ ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial r_K} = 0 \Rightarrow \lambda = -35.0848$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_B} = 0 \Rightarrow \lambda = -28.9702$$

Wir sparen uns die dritte Bedingung zu überprüfen, denn der Punkt $(8.4271, 11.9479)$ kann also kein Maximum sein. Die Kosten hier sind $K = 46.6490$. Für den Punkt $(9.9854, 9.6239)$ ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial r_K} = 0 \Rightarrow \lambda = -30.4820$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_B} = 0 \Rightarrow \lambda = -30.4821$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Der Punkt $(9.9854, 9.6239)$ ist ein Optimum. Die Kosten liegen hier bei $K = 46.2084$.