Statistik 2, Übung 7

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Wir machen einen zweiseiten Gaußtest, da hier σ^2 bekannt ist und testen
$H_0 : \mu = 83$
$H_1 : \mu \neq 83$
Die Teststatistik ist

$$\begin{aligned} Z &= \frac{86-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot \sqrt{n} \sim \Phi \\ &= \frac{86-83}{\sqrt{64}} \cdot \sqrt{9} \\ &= 1.125 \end{aligned}$$

Vergleichen wir das mit dem kritischen Wert $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.95996$ ergibt sich, dass wir die Nullhypothese nicht ablehnen können.[1]

(b) Jetzt ist σ^2 nicht mehr bekannt, weswegen wir auf einen zweiseiten t-Test zurückgreifen müssen. Die Hypothesen sind die selben, nur die Teststatistik ändert sich zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{86-\mu}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1} \\ &= \frac{86-83}{\sqrt{20}} \cdot \sqrt{9} \\ &= 2.012 \end{aligned}$$

Der kritische Wert ist dann $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = 2.306$, also können wir auch hier H_0 nicht ablehnen.

(c) Da wir H_0 nie annehmen können, sondern entweder ablehnen oder nicht, müssen wir die zu zeigende Behauptung als die Alternativhypothese auffassen:
$H_0 : \mu \leq 83$
$H : 1 : \mu > 83$
Zudem handelt es sich hier um einen einseitigen t-Test. Die Teststatistik ändert sich nicht, aber der kritische Wert: $t_{n-1;1-\alpha} = 1.86$. Das heißt wir können H_0 ablehnen und nehmen H_1 an.

(d) Auch hier ändert sich nur der kritische Wert zu $t_{n-1;1-\alpha} = 2.45$, hier kann also H_0 nicht angelehnt werden.

(e) Wir testen hier Varianzen, das heißt wir brauchen den zweiseitigen χ^2-Test
$H_0 : \sigma^2 = 64$

[1] Das bedeutet nicht, dass man die Nullhypothese annehmen kann. Das einzige was wir zeigen können, dass die Daten nicht ausreichen (mit 5%-igen Fehlerwahrscheinlichkeit) um H_0 abzulehnen. Vor Gericht ist es ähnlich: Nur weil man die Schuld nicht beweisen kann, heißt das noch lange nicht, dass der Angeklagte unschuldig ist.

$H_1 : \sigma^2 \neq 64$
Die Teststatistik ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
T &= (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \\
&= (9-1)\frac{20}{64} \\
&= 2.5
\end{aligned}$$

Die beiden kritischen Werte sind $\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = 17.53$ und $\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}} = 2.1$. Da unsere Teststatistik zwischen diesen beiden kritischen Werten liegt, können wir H_0 nicht ablehnen.

Aufgabe 2

(a) Auch hier führen wir wieder einen einseitigen t-Test durch:
$H_0 : p < 0.35$
$H_1 : p \geq 0.35$
Für die Teststatik werden wir die Varianz brauchen. Diese ist gegeben durch $s^2 = p(1-p) = 0.38 \cdot 0.62 = 0.2356$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{0.38 - p}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1} \\
&= \frac{0.38 - 0.35}{\sqrt{0.2356}} \cdot \sqrt{400} \\
&= 1.2361
\end{aligned}$$

Der kritische Wert ist $t_{n-1;1-\alpha} = 1.8861$, also können wir H_0 nicht ablehnen.

(b) Die Teststatistik ändert sich nicht, nur die kritischen Werte:

- $t_{n-1;1-0.05} = 1.6487 \Rightarrow$ keine Ablehnung von H_0
- $t_{n-1;1-0.10} = 1.2837 \Rightarrow$ keine Ablehnung von H_0
- $t_{n-1;1-0.15} = 1.0378 \Rightarrow$ Ablehnung von H_0 und Annahme von H_1

(c) Wenn wir den p-Wert bestimmen wollen, so fragen wir uns, bei welchem α H_0 gerade so nicht mehr ablehnt werden kann, also $t_{n-1;1-\alpha} = 1.2361$.

$$\begin{aligned}
t_{n-1;1-\alpha} &= 1.2361 \\
1 - \alpha &= \text{CDF}(1.2361) \\
\alpha &= 1 - \text{CDF}(1.2361) \\
&= 0.108574
\end{aligned}$$

wobei CDF$(\cdot)$ für die Verteilungsfunktion (*Cumulative Distribution function*) der t-Verteilung mit 399 Freiheitsgraden steht.

Aufgabe 3

Wir testen wieder
$H_0 : p \leq 0.5$
$H_1 : p > 0.5$

wobei p für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kopiervorgang fehlschlägt steht. Auch hier werden wir die Varianz brauchen: $s^2 = p(1-p) = 0.55 \cdot 0.45 = 0.2475$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{0.55 - p}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1} \\
&= \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{0.2475}} \cdot \sqrt{100} \\
&= 1.00504
\end{aligned}
$$

Der kritische Wert ist $t_{n-1;1-\alpha} = 0.8453$, also können wir H_0 ablehnen und H_1 annehmen.

Aufgabe 4

Wir testen
$H_0 : \mu > 25.8$
$H_1 : \mu \leq 25.8$
Die Teststatistik berechnet sich durch

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{25.8 - \mu}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1} \\
&= \frac{25.8 - 25.452}{\sqrt{0.85}} \cdot \sqrt{116} \\
&= 4.0654
\end{aligned}
$$

Der kritische Wert ist $t_{n-1;1-\alpha} = 1.7663$, also lehnen wir H_0 ab und können H_1 annehmen.