Multivariate Statistik, Übung 1

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Determinante

$$
\begin{aligned}
\det(D) &= (1 \cdot 3) - (1 \cdot 2) = 1 \\
\det(E) &= (1 \cdot 2) - (2 \cdot 1) = 0 \\
\det(F) &= \text{nicht definiert, da } F \text{ nicht quadratisch}
\end{aligned}
$$

(b) Spur

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(D) &= 1 + 3 = 4 \\
\operatorname{tr}(E) &= 1 + 2 = 3 \\
\operatorname{tr}(F) &= \text{nicht definiert, da } F \text{ nicht quadratisch}
\end{aligned}
$$

(c) Eigenwerte

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)(3-\lambda) - 2 &= 0 \\
\lambda^2 - 4\lambda + 1 &= 0 \\
\lambda_1 &= 0.2679 \\
\lambda_2 &= 3.7321 \\
\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 &= 0 \\
\lambda^2 - 3\lambda &= 0 \\
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= 3
\end{aligned}
$$

F ist nicht quadratisch, deswegen existieren keine Eigenwerte.

(d) Eigenvektoren

$$
\begin{aligned}
(D - \lambda_1 I)x &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 - 0.2679 & 2 \\ 1 & 3 - 0.2679 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
0.7321 x_1 + 2x_2 &= 0 \\
1x_1 + 2.7321 x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen[1]. Wähle z.B. $x_1 = 1$, dann folgt $x_2 = -0.36605$. Die Norm/der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{1^2 + (-0.36605)^2} = 1.0649$, also ist der erste Eigenvektor

$$
x = \frac{1}{1.0649} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.36605 \end{pmatrix}
$$

Für den zweiten Eigenvektor ergibt sich analog

$$
\begin{aligned}
(D - \lambda_2 I)y &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 - 3.7321 & 2 \\ 1 & 3 - 3.7321 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
-2.7321 y_1 + 2y_2 &= 0 \\
1y_1 - 0.7321 y_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Wähle wieder $y_1 = 1$, dann folgt $y_2 = 1.36605$, Normierung $\sqrt{1^2 + 1.36605^2} = 1.6930$, also ist der zweite Eigenvektor

$$
y = \frac{1}{1.6930} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.36605 \end{pmatrix}
$$

(e) keine der Matrizen ist symmetrisch, da gilt $D \neq D'$, $E \neq E'$ und $F \neq F'$.

(f) Es kann nur D invertiert werden. Bei E ist die Determinante 0 und F ist nicht quadratisch.

(g) Varianz $\mathrm{Var}(e_{\cdot 1}) = \frac{1}{1}[(1-1)^2 + (1-1)^2] = 0$
Varianz $\mathrm{Var}(e_{\cdot 2}) = \frac{1}{1}[(2-2)^2 + (2-2)^2] = 0$
Kovarianz $\mathrm{Cov}(e_{\cdot 1}, e_{\cdot 2}) = \frac{1}{1}[(1-1)(2-2) + (1-1)(2-2)] = 0$

$$
\mathrm{Cov}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) &= \mathrm{Cov}(X,Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}
$$

[1] Diese Lösungen spannen den sogenannten Eigenraum auf.

Aufgabe 3

Theorem 1 (Spektralsatz) *Für einen endlichdimensionalen unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum existiert genau dann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren eines Endomorphismus, wenn dieser normal ist und alle Eigenwerte zu $\mathbb{K}$ gehören. In Matrixsprechweise bedeutet dies, dass eine Matrix genau dann unitär diagonalisierbar ist, wenn sie normal ist und nur Eigenwerte aus $\mathbb{K}$ hat.*

Wir wählen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und da $AA' = A'A$ gilt, ist A normal. Dass die Eigenwerte zu $\mathbb{R}$ gehören, kann man wie folgt beweisen: Für einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor v gilt $Av = \lambda v$ und

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A'v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Also $\lambda = \bar{\lambda}$ und damit ist $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Spektralsatz garantiert uns nun, dass es eine Orthonomalbasis aus Eigenvektoren von A gibt, damit ist A diagonalisierbar, dass heißt es gibt eine Matrix T, so dass gilt

$$A = T^{-1} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot T$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(T^{-1} \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \cdot T) \\
&= \det(T^{-1}) \cdot \det(\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \cdot \det(T) \\
&= \det(\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ ist ein EW von } A &\Leftrightarrow Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \\
&\Leftrightarrow v = A^{-1}\lambda v \\
&\Leftrightarrow v\lambda^{-1} = A^{-1}\lambda v \lambda^{-1} \\
&\Leftrightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v \\
&\Leftrightarrow \lambda^{-1} \text{ ist ein EW von } A^{-1}
\end{aligned}$$