Multivariate Statistik, Hausaufgabe 1

Henry Haustein

Für die Matrix D

(a) Determinante

$$\det(D) = ad - bc = (2 \cdot 6) - (4 \cdot 2) = 12 - 8 = 4$$

(b) Spur

$$\operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{2} d_{ii} = 2 + 6 = 12$$

(c) Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(2-\lambda)(6-\lambda) - 8 &= 0 \\
\lambda^2 - 8\lambda + 4 &= 0 \\
\lambda_1 &= 0.5359 \\
\lambda_2 &= 7.4641
\end{aligned}$$

(d) Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_1 I)x &= 0 \\
\begin{pmatrix} 2-0.5359 & 4 \\ 2 & 6-0.5359 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
1.4641x_1 + 4x_2 &= 0 \\
2x_1 + 5.4641x_2 &= 0
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen[1]. Wähle z.B. $x_1 = 1$, dann folgt $x_2 = -0.3660$. Die Norm/der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{1^2 + (-0.3660)^2} = 1.0649$, also ist der erste Eigenvektor

$$x = \frac{1}{1.0649} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.3660 \end{pmatrix}$$

[1] Diese Lösungen spannen den sogenannten Eigenraum auf.

Für den zweiten Eigenvektor ergibt sich analog

$$
\begin{aligned}
(D - \lambda_2 I)y &= 0 \\
\begin{pmatrix} 2 - 7.4641 & 4 \\ 2 & 6 - 7.4641 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
-5.4641y_1 + 4y_2 &= 0 \\
2y_1 - 1.4641y_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Wähle wieder $y_1 = 1$, dann folgt $y_2 = 1.3660$, Normierung $\sqrt{1^2 + 1.3660^2} = 1.6688$, also ist der zweite Eigenvektor

$$
y = \frac{1}{1.6688} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.3660 \end{pmatrix}
$$

(e) nein, $D \neq D'$

(f) ja, da $\det(D) = 4 \neq 0$

Für die Matrix E

(a) Determinante

$$
\det(E) = ad - bc = (1 \cdot 2) - (0 \cdot 1) = 2 - 0 = 2
$$

(b) Spur

$$
\mathrm{tr}(E) = \sum_{i=1}^{2} e_{ii} = 1 + 2 = 3
$$

(c) Eigenwerte

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(1 - \lambda)(2 - \lambda) &= 0 \\
\lambda_1 &= 2 \\
\lambda_2 &= 1
\end{aligned}
$$

(d) Eigenvektoren

$$
\begin{aligned}
(E - \lambda_1 I)x &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 - 2 & 0 \\ 1 & 2 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
-1x_1 + 0x_2 &= 0 \\
1x_1 + 0x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Wähle z.B. $x_2 = 1$, dann folgt $x_1 = 0$. Die Norm/der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, also ist der erste Eigenvektor

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Eigenvektor ergibt sich analog

$$\begin{aligned} (E - \lambda_2 I)y &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 0y_1 + 0y_2 &= 0 \\ 1y_1 + 1y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wähle wieder $y_1 = 1$, dann folgt $y_2 = -1$, Normierung $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, also ist der zweite Eigenvektor

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e) nein, $E \neq E'$

(f) ja, da $\det(E) = 2 \neq 0$

(g) Varianz $\mathrm{Var}(e_{\cdot 1}) = \frac{1}{1}[(1-1)^2 + (1-1)^2] = 0$
Varianz $\mathrm{Var}(e_{\cdot 2}) = \frac{1}{1}[(0-1)^2 + (2-1)^2] = 2$
Kovarianz $\mathrm{Cov}(e_{\cdot 1}, e_{\cdot 2}) = \frac{1}{1}[(1-1)(0-1) + (1-1)(2-1)] = 0$

$$\mathrm{Cov}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$