Ökonometrie Grundlagen, Übung 2

Henry Haustein

Aufgabe 1

- Schätzung: näherungsweise Bestimmung eines unbekannten Parameters
- Schätzer: der Parameter, der bestimmt werden soll

Aufgabe 2

- Fehler: Abweichung des gemessenen Wertes von der PRF
- Residuum: Schätzung des Fehlers

Aufgabe 3

(a) erster Beweis:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i \Rightarrow T\bar{x} = \sum_{i=1}^{T} x_i$$

(b) zweiter Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{T}(x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{T}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= \sum_{i=1} x_i^2 - 2\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{T} x_i}_{T\bar{x}} + \sum_{i=1}^{T} \bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - 2T\bar{x}^2 + T\bar{x} \\
&= \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - T\bar{x}^2
\end{aligned}$$

(c) dritter Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{T}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{T}(x_iy_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{T}x_iy_i - \sum_{i=1}^{T}x_i\bar{y} - \sum_{i=1}^{T}\bar{x}y_i + \sum_{i=1}^{T}\bar{x}\bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{T}x_iy_i - \bar{y}\underbrace{\sum_{i=1}^{T}x_i}_{T\bar{x}} - \bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{T}y_i}_{T\bar{y}} + T\bar{x}\bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{T}x_iy_i - \bar{y}T\bar{x} - \bar{x}T\bar{y} + T\bar{x}\bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - T\bar{x}\bar{y}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Das Ziel der KQ-Schätzung ist, die Summe der Fehlerquadrate zu minimieren, also

$$\sum_{i=1}^{T}u_t^2 = \sum_{i=1}^{T}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2 \rightarrow \min$$

Dazu müssen wir die partiellen Ableitungen nach β_0 und β_1 Null gesetzt werden. Wir wenden uns zunächst β_0 zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta_0}\sum_{i=1}^{T}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i)^2 &= 0 \\
-2\sum_{i=1}^{T}(y_i-\beta_0-\beta_1x_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{T}y_i - T\beta_0 - \beta_1\sum_{i=1}^{T}x_i &= 0 \\
T\beta_0 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{T}y_i}_{T\bar{y}} - \beta_1\underbrace{\sum_{i=1}^{T}x_i}_{T\bar{x}} \\
\beta_0 &= \bar{y} - \beta_1\bar{x}
\end{aligned}$$

Jetzt kommt β_1:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^{T} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) &= 0 \\
2 \sum_{i=1}^{T} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)(-x_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{T} (x_i y_i - \beta_0 x_i - \beta_1 x_i^2) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{T} x_i y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{T} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{T} x_i^2 &= 0 \\
\sum_{i=1}^{T} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{T} x_i + \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{T} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{T} x_i^2 &= 0 \\
\beta_1 \left(-\bar{x} \sum_{i=1}^{T} x_i + \sum_{i=1}^{T} x_i^2 \right) &= \sum_{i=1}^{T} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{T} x_i \\
\beta_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{T} x_i y_i - \bar{y} T \bar{x}}{-\bar{x} T \bar{x} + \sum_{i=1}^{T} x_i^2} \\
\beta_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{T} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{T} (x_i - \bar{x})^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Das Ziel der KQ-Schätzung ist, die Summe der Fehlerquadrate zu minimieren, also

$$
\sum_{i=1}^{T} u_t^2 = \sum_{i=1}^{T} (y_i - \beta x_i)^2 \to \min
$$

Wir lösen also

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^{T} (y - \beta x_i)^2 &= 0 \\
-2 \sum_{i=1}^{T} (y_i - \beta x_i) &= 0 \\
\underbrace{\sum_{i=1}^{T} y_i}_{T\bar{y}} - \beta \underbrace{\sum_{i=1}^{T} x_i}_{T\bar{x}} &= 0 \\
\beta T \bar{x} &= T \bar{y} \\
\beta \bar{x} &= \bar{y} \\
\beta &= \frac{\bar{y}}{\bar{x}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

- β_0 und β_1 sind normalverteilt

- β_0 und β_1 korrelieren miteinander
- β_0 und β_1 sind innerhalb der Klasse der linearen unverzerrten Schätzer diejenigen mit der höchsten Präzision sind (BLUE-Eigenschaft)

Aufgabe 7

(a) $\text{Fiscal\_Indicator} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{net\_Budget}$
$\text{Fiscal\_Indicator}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{net\_Budget}_i + u_i$

(b) + (c) Die Annahmen sind

- linear in den Parametern: offensichtlich richtig
- der Regressor ist nichtstochastisch: offensichtlich richtig
- kein systematischer Restfehler: $\mathbb{E}(u_i) = -2.417369 \cdot 10^{-17} \approx 0$
- keine Heteroskedastie: $\text{Var}(u_i) = 0.5193321 < \infty$
- keine Autokorrelation: $\text{Cov}(u_i, u_j) = \mathbb{E}(u_i \cdot u_j) = 1.039646 \cdot 10^{-19} \approx 0$
- kein Zusammenhang zwischen Fehler und Regressor: $\text{Cov}(u_i, \text{net\_Budget}_i) = 3.828068 \cdot 10^{-17} \approx 0$
- mehr Beobachtungen als unbekannte Parameter: offensichtlich richtig
- die Regressorvariable muss eine positive (endliche) Varianz aufweisen: offensichtlich richtig
- das Regressionsmodell ist korrekt spezifiziert: Gibt es noch andere Größen, die den Fiscal Indicator beeinflussen?
- keine Multikollinearität/Die Matrix X der Regressoren soll gut konditioniert sein: nicht wichtig, da es sich um ein Einfach-Regressionsmodell handelt
- Fehler werden als normalverteilt angenommen: der Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung ergibt, dass es sich wahrscheinlich um eine Normalverteilung handelt.

```r
# Datensatz einlesen
datensatz = read.csv2("EU_Fiskaldaten.csv")

# Lineares Modell berechnen
modell = lm(datensatz$Fiscal_Indicator ~ datensatz$net_Budget)

# Ueberpruefung, ob Modellannahmen gelten
mean(modell$residuals)
sd(modell$residuals)^2
products = 0
for (i in modell$residuals) {
 for (j in modell$residuals) {
  products = c(products, i*j)
 }
}
mean(products)
cov(datensatz$net_Budget,modell$residuals)
shapiro.test(modell$residuals)
```

(d) Anschauen und plotten der Daten

```
datensatz
plot(datensatz$Fiscal_Indicator,datensatz$net_Budget)
```

(e) $\hat{\beta}_0 = 0.45143$, $\hat{\beta}_1 = 0.17752$

(f) $R^2 = 0.3296587 \Rightarrow$ Das Modell ist keine wirklich gute Approximation für diese Daten.

```
summary(modell)$r.squared
```