Statistik 2, Übung 5

Henry Haustein

Aufgabe 1

Beachte: $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$

(a) Ein Schätzer $\hat{\vartheta}$ ist genau dann erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}(\hat{\vartheta}) = \vartheta$ bzw. wenn $Bias = \mathbb{E}(\hat{\vartheta}) - \vartheta = 0$

- $(\frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1) + ... + \mathbb{E}(X_n))) - \mu = (\frac{1}{n} \cdot n\mu) - \mu = 0$
- $(\frac{2}{3}\mathbb{E}(X_2) + \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_3)) - \mu = \mu - \mu = 0$
- $\mathbb{E}(X_1) - \mu = 0$
- $\left(\mathbb{E}(\bar{X}) + \mathbb{E}\left(\frac{1000}{n}\right)\right) - \mu = \frac{1000}{n}$
- $(\frac{n-1}{n}\mathbb{E}(\bar{X})) - \mu = \frac{n-1}{n}\mu - \frac{n}{n}\mu = -\frac{1}{n}\mu$

(b) Für den MSE gilt $MSE(X) = \operatorname{Var}(X) + Bias^2$. Wir berechnen zuerst die Varianz und dann den MSE

- $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{n^2}\sum \operatorname{Var}(X_i) = \frac{1}{n}\sigma^2 \Rightarrow MSE = \frac{1}{n}\sigma^2$
- $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{4}{9}\operatorname{Var}(X_2) + \frac{1}{9}\operatorname{Var}(X_3) = \frac{5}{9}\sigma^2 \Rightarrow MSE = \frac{5}{9}\sigma^2$
- $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_3) = \operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2 \Rightarrow MSE = \sigma^2$
- $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_4) = \operatorname{Var}(\bar{X}) + \operatorname{Var}\left(\frac{1000}{n}\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 \Rightarrow MSE = \frac{1}{n}\sigma^2 + \left(\frac{1000}{n}\right)^2$
- $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_5) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{(n-1)}{n^3}\sigma^3 \Rightarrow MSE = \frac{(n-1)}{n^3}\sigma^3 + \frac{1}{n^2}\mu^2$

(c) Ein Schätzer ist genau dann konsistent, wenn $\lim_{n\to\infty} MSE = 0$

- 0
- $\frac{5}{9}\sigma^2$
- σ^2
- 0
- 0

(d) Der einzig konsistente und erwartungstreue Schätzer ist $\hat{\mu}_1$.

Aufgabe 2

(a) Die Konfidenzintervalle für den Mittelwert haben alle die folgende Struktur: $KI = [\bar{x} \pm \varepsilon]$. Ich werde für die nächsten Teilaufgaben nur dieses ε berechnen.

- $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \cdot \frac{8}{3} = 4.373$
- $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{3} = 5.227$
- $\varepsilon = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.306 \cdot \frac{\sqrt{70}}{3} = 6.431$

- $KI = \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right] = \left[\frac{8\cdot 70}{17.535}; \frac{8\cdot 70}{2.180}\right] = [31.936; 256.881]$
- $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{40}} = 2.68$

(b) Wenn das KI eine Breite von 5 haben soll, so muss mein $\varepsilon = 2.5$ sein. Also

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
\sqrt{n} &= 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} \\
n &= \left(1.96 \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \\
&= 39.34 \approx 40
\end{aligned}$$

(c) Die Aufgabenstellung gibt uns hier schon indirekt, dass $\varepsilon = 7$ gilt. Umstellen nach α:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
z_{1-\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \\
1 - \frac{\alpha}{2} &= \mathrm{CDF}\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
\frac{\alpha}{2} &= 1 - \mathrm{CDF}\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
\alpha &= 2\left[1 - \mathrm{CDF}\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] \\
&= 2[1 - \mathrm{CDF}(2.625)] \\
&= 0.0068
\end{aligned}$$

Wobei $\mathrm{CDF}(\cdot)$ für die *Cumulative distribution function* (Verteilungsfunktion) der Standardnormalverteilung steht.