Ökonometrie Grundlagen, Übung 4

Henry Haustein

Wir definieren uns die Matrizen

```
X = matrix(c(2,3,7,-1,3,5),3,2, byrow = TRUE)
Y = matrix(c(5,3,6,-2,2,-5,1,0),2,4, byrow = TRUE)
Z = matrix(c(2,5,-3,1,-5,0,0,1,6,7,2,3),4,3, byrow = TRUE)
A = matrix(c(1,1,1,6,3,2,6,1,1),3,3, byrow = TRUE)
```

Aufgabe 1

Wir berechnen einfach beide Ausdrücke und vergleichen das Ergebnis

```
(X %*% Y) %*% Z
X %*% (Y %*% Z)
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} -5 & 132 & 30 \\ -6 & 48 & 105 \\ -8 & 216 & 45 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Wir berechnen einfach beide Ausdrücke und vergleichen das Ergebnis

```
t(X %*% Y)
t(Y) %*% t(X)
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} 16 & 33 & 25 \\ -9 & 26 & -16 \\ 15 & 41 & 23 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Eine Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn $A' = A$ gilt. Wir berechnen einfach beide Ausdrücke und vergleichen das Ergebnis

```
t(X) %*% X
t(t(X) %*% X)
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} 62 & 14 \\ 14 & 35 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Wir berechnen einfach beide Ausdrücke und vergleichen das Ergebnis

```
solve(t(A))
t(solve(A))
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} -0.2 & -1.2 & 2.4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.2 & -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Wenn A symmetrisch ist, dann gilt $A = A'$ und damit $A = A^{-1}$.

Aufgabe 5

Eine Matrix A ist genau dann idempotent, wenn $A = A^2$ gilt. Wir berechnen einfach beide Ausdrücke und vergleichen das Ergebnis

(a) für P:

```
P = X %*% solve(t(X) %*% X) %*% t(X)
P
P %*% P
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} 0.2685 & 0.0193 & .04428 \\ 0.0193 & 0.9995 & -0.0117 \\ 0.4428 & -0.0117 & 0.7320 \end{pmatrix}$$

(b) für Q:

```
eins = c(1,1,1)
I = diag(1,3,3)
Q = I - 1/3*eins %*% t(eins)
Q
Q %*% Q
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & -0.3333 \\ -0.3333 & 0.6667 & -0.3333 \\ -0.3333 & -0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

(c) für $I - P$:

```
I - P
(I - P) %*% (I - P)
```

ergibt

$$\begin{pmatrix} 0.7315 & -0.0193 & -0.4428 \\ -0.0193 & 0.0005 & 0.0117 \\ -0.4428 & 0.0117 & 0.2680 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

(a) Um den Rank einer Matrix zu bestimmen, gibt es das Paket `Matrix`, welches ich installieren werde

```
install.packages("Matrix")
library(Matrix)
rankMatrix(X)\\
rankMatrix(t(X) %*% X)
```

Die Matrizen haben den Rang 2.

(b) Eine Matrix A heißt positiv definit, wenn für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^T Ax > 0$. Der Nachweis davon ist mit dieser Definition sehr schwierig, weswegen ich eine äquivalente Definition mittels Eigenwerten (die sich leichter berechnen lassen) zurückgreife: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte[1] echt größer als 0 sind.

```
eigen(t(X) %*% X)
```

ergibt die Eigenwerte $\lambda_1 = 67.94865$ und $\lambda_2 = 29.05135$. Beide sind echt größer als Null und damit ist $X'X$ positiv definit.

[1] Die zu einer Matrix A gehörenden Eigenwerte λ und Eigenvektoren v sind dadurch bestimmt, dass sie folgende Gleichung erfüllen: $Av = \lambda v$. Die Lösung einer solchen Gleichung ist nicht leicht, aber machbar, wenn man ein paar Tricks kennt. Insbesondere kann R die Eigenwerte und Eigenvektoren mittels der Funktion `eigen()` berechnen.