# Statistik 2, Übung 11

Henry Haustein

## Aufgabe 1

Da hier auf eine diskrete Verteilung getestet werden soll, können wir nur den $\chi^2$-Anpassungstest benutzen. Dafür müssen wir aber erstmal den Parameter der Poisson-Verteilung schätzen. MLE ergibt

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} n_i \\
&= \frac{1}{99} \cdot (\underbrace{0 + \dots + 0}_{10 \text{ mal}} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{30 \text{ mal}} + \underbrace{2 + \dots + 2}_{25 \text{ mal}} + \underbrace{3 + \dots + 3}_{20 \text{ mal}} + \underbrace{4 + \dots + 4}_{10 \text{ mal}} + \underbrace{5 + \dots + 5}_{4 \text{ mal}}) \\
&= \frac{200}{99}
\end{aligned}
$$

Die Tabelle für den Test ist dann

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $>5$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_i$ | 10 | 30 | 25 | 20 | 10 | 4 | 0 | 99 |
| $p_i$ | 0.1326 | 0.2679 | 0.2706 | 0.1823 | 0.0920 | 0.0372 | 0.0176 | 1 |
| $np_i$ | 13.1274 | 26.5221 | 26.7894 | 18.0477 | 9.108 | 3.6828 | 1.7424 | |

Die Teststatistik berechnet sich dann zu

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{(10-13.1274)^2}{13.1274} + \frac{(30-26.5221)^2}{26.5221} + \frac{(25-26.7894)^2}{26.7894} + \frac{(20-18.0477)^2}{18.0477} + \frac{(10-9.108)^2}{9.108} \\
&+ \frac{(4-3.6828)^2}{3.6828} + \frac{(0-1.7424)^2}{1.7424} \\
&= 3.3889
\end{aligned}
$$

Der kritischen Werte sind

- $\alpha = 0.01 \Rightarrow \chi^2_{7-1;0.99} = 16.8119 \Rightarrow H_0$ (die Verteilung entspricht der Poisson-Verteilung mit dem oben errechneten $\lambda$) kann nicht abgelehnt werden
- $\alpha = 0.05 \Rightarrow \chi^2_{7-1;0.95} = 12.5916 \Rightarrow H_0$ kann nicht abgelehnt werden
- $\alpha = 0.1 \Rightarrow \chi^2_{7-1;0.9} = 10.6446 \Rightarrow H_0$ kann nicht abgelehnt werden

## Aufgabe 2

(a) Wir führen den Kolmogorow-Smirnow-Test durch:

| $i$ | $x_i$ | $\hat{F}(x_i)$ | $F(x_i)$ | $\hat{F}(x_{i-1})$ | max |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | 0 | $\frac{9}{100}$ |
| 2 | 8 | $\frac{2}{10}$ | $\frac{9}{100}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{100}$ |
| 3 | 10 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{25}{100}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{11}{100}$ |
| 4 | 11 | $\frac{4}{10}$ | $\frac{36}{100}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{5}{100}$ |
| 5 | 13 | $\frac{6}{10}$ | $\frac{64}{100}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{6}{100}$ |
| 6 | 13 | $\frac{6}{10}$ | $\frac{64}{100}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{4}{100}$ |
| 7 | 14 | $\frac{7}{10}$ | $\frac{81}{100}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{21}{100}$ |
| 8 | 15 | 1 | 1 | $\frac{7}{10}$ | $\frac{30}{100}$ |
| 9 | 15 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 15 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Die Teststatistik ist dann

$$D = \frac{30}{100} = 0.3$$

und der kritische Wert ist $c = 0.409$. Damit kann $H_0$ nicht abgelehnt werden.

(b) Die Tabelle für den $\chi^2$-Anpassungstest sieht wie folgt aus:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_i = (a_i, b_i)$ | [5,7.5] | (7.5,10] | (10,12.5] | (12.5,15] | |
| $S_i$ | 33 | 41 | 40 | 36 | 150 |
| $p_i = F(b_i) - F(a_i)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | 1 |
| $np_i$ | 9.375 | 28.125 | 46.875 | 65.625 | 150 |

Die Teststatistik ergibt sich zu

$$\begin{aligned} q &= \frac{(33-9.375)^2}{9.375} + \frac{(41-28.125)^2}{28.125} + \frac{(40-46.875)^2}{46.875} + \frac{(36-65.625)^2}{65.625} \\ &= 79.8108 \end{aligned}$$

Der kritische Wert ist $\chi^2_{4-1;0.95} = 7.8147$, also wird $H_0$ abgelehnt und $H_1$ angenommen.