Komplexe Zahlen

Darstellung
- Algebraische Form: $z = x + yi$
- Trigonometrische Form: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$
- Exponentialform: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$\Rightarrow$ φ heißt *Argument* oder *Phase*
$\Rightarrow$ r heißt *Betrag* oder *Modul*

Umwandlung

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0 & z \text{ im 1. od. 4. Quad.} \\ -\pi & z \text{ im 2. Quad.} \\ \pi & z \text{ im 3. Quad.} \end{cases}$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

Rechenregeln
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a + c) - (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\overline{(a + bi)} = a - bi$
- $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot\overline{(c+di)}}{|c+di|^2}$
- Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen:

$$0 = x^2 + px + q$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Folgen

Eigenschaften
- geometrische Folge: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, nächstes Folgenglied ist immer um bestimmten Faktor q größer
- arithmetische Folge: $a_{n+1} - a_n = d$, nächstes Folgenglied ist immer um bestimmten Wert d größer.

Konvergenz
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
- Nullfolge: $x = 0$
- Folge beschränkt und monoton fallend/steigend $\Rightarrow$ konvergent

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{b \cdot k}\right)^k = e^{\frac{a}{b}}$$

Reihen

Begriffe
- Reihe: $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- n-te Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
- Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} s_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1 - q}$$

Konvergenzkriterien
- Trivialkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn a_k eine Nullfolge ist
- Leibnitz-Kriterium (für alternierende Folgen): $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ ist konvergent, wenn a_k eine monoton fallende Nullfolge ist
- Majorantenkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent ist und $0 \leq a_k \leq b_k$ gilt. $b_k = \frac{1}{k^2}$ funktioniert meistens gut als Majorante.
- Minorantenkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent ist und $0 \leq b_k \leq a_k$ gilt. $b_k = \frac{1}{k}$ funktioniert meistens gut als Minorante.
- Quotientenkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

- Wurzelkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

Funktionen einer Variablen

Umkehrfunktion berechnen: Gleichung $y = f(x)$ nach x umstellen und anschließend x und y vertauschen

Gebrochen rationale Funktionen $y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$
- Nullstelle: $P_m(x_0) = 0$ und $Q_n(x_0) \neq 0$
- Polstelle: $P_m(x_0) \neq 0$ und $Q_n(x_0) = 0$
- Lücke: $P_m(x_0) = 0$ und $Q_n(x_0) = 0$

Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

Funktion f ist in x_0 differenzierbar, wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.

Differentiationsregeln
- $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- Logarithmische Differentiation: $f'(x) = f(x) \cdot (\ln(x))'$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \cdot \ln(x)$
e^x	e^x
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Kurvendiskussion: Nullstellen, Polstellen, Minima, Maxima, Monotonie, Wendepunkte, Konkavität, Konvexität, Verhalten im Unendlichen
- $f'(x) > 0$: monoton steigend
- $f''(x) > 0$: konvex
- $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$: Extremstelle
- $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$: Wendepunkt

Änderungsrate und Elastizität
- Änderungsrate: $\varrho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- Elastizität: $\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \varrho_f(x)$
- $\varepsilon_{cf}(x) = \varepsilon_f(x)$
- $\varepsilon_{f+g}(x) = \frac{f(x)\varepsilon_f(x)+g(x)\varepsilon_g(x)}{f(x)+g(x)}$
- $\varepsilon_{fg}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$
- $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$
- $\varepsilon_{f\circ g}(x) = \varepsilon_f(g(x)) \cdot \varepsilon_g(x)$
- Amoroso-Robinson-Gleichung

$$f'(x) = \varepsilon_f(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} \left(1 + \varepsilon_{\frac{f(x)}{x}}(x)\right)$$

Integralrechnung

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Rechenregeln
- $\int \alpha f(x) + \beta g(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x$
- Partielle Integration: $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$
- Substitution: $\int f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$
$\frac{1}{x^m}$	$-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$e^{\alpha x+\beta}$	$\frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + C$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

Differentialrechnung bezüglich mehrerer Variablen

Höhenlinie der Höhe C: $f : D_f \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(x_1, x_2) = C$

Homogenität: $f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, ..., x_n)$
- $\alpha = 1$: linear-homogen
- $\alpha > 1$: superlinear-homogen
- $\alpha < 1$: sublinear-homogen

Partielle Änderungsrate und Elastizität
- Partielle Änderungsrate: $\varrho_f^{(x_k)} = \frac{f_{x_k}(x)}{f(x)}$
- Partielle Elastizität: $\varepsilon_f^{(x_k)} = x_k \cdot \varrho_f^{(x_k)}$
- Elastizitätsmatrix

$$\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{f_1}^{(x_1)}(x) & \dots & \varepsilon_{f_1}^{(x_n)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{f_l}^{(x_1)}(x) & \dots & \varepsilon_{f_l}^{(x_n)}(x) \end{pmatrix}$$

Extremwertaufgaben - Bedingungen
- $f_{x_1} = 0$ und $f_{x_2} = 0$
- $\det \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix} > 0$
- $f_{x_1,x_1} < 0$ (Maximalstelle) oder $f_{x_1,x_1} > 0$ (Minimalstelle)

Regression - Methode der kleinsten Quadrate $\Rightarrow f(x) = \hat{a}x + \hat{b}$

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen - Variablensubstitution $\Rightarrow$ einfach ineinander einsetzen und Ableitung 0 setzen

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen - Lagrange-Faktoren
- Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ und Nebenbedingungen $g_i(x_1, ..., x_n) = 0$

$\Rightarrow$ Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(...) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \cdot g_i(...))$$

$\Rightarrow$ Partielle Ableitung von L nach jeder Variable und Nullsetzen
$\Rightarrow$ Gleichungssystem lösen

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichung $f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x)$ hat allgemeine Lösung

$$f^*(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x$$