Einführung in die Produktion, Tutorium 3

Henry Haustein

Aufgabe 5

(a) Für die variablen Stückkosten müssen wir die Faktorverbräuche v_1 und v_2 mit ihren Preisen gewichten:

$$\begin{aligned} k_v(d) &= 2\left(\frac{1}{3}d^2 - 8.04d + 34\right) + 13\left(\frac{4}{5}d^2 - 5d + 23\right) \\ &= \frac{2}{3}d^2 - 8.04d + 34 + 10.04d^2 - 65d + 299 \\ &= \frac{166}{15}d^2 - \frac{1826}{25}d + 333 \end{aligned}$$

Um die optimale Leistungsschaltung zu finden (variable Stückkosten sind minimal) müssen wir die Ableitung nullsetzen

$$\begin{aligned} \frac{dk_v(d)}{dd} = \frac{332}{15}d - \frac{1826}{25} &= 0 \\ \frac{332}{15}d &= \frac{1826}{25} \\ d &= \frac{33}{10} \end{aligned}$$

Da aber das minimale d 4 ist, ergibt sich für $d_{opt} = 4$.

(b) Mit $d_{opt} = 4$ können wir in $t_{max} = 10$ Stunden genau 40 Einheiten produzieren. In diesem Bereich ist die Kostenfunktion durch $k_v(d = 4) \cdot x$ gegeben:

$$\begin{aligned} K(x) &= \left(\frac{166}{15} \cdot 4^2 - \frac{1826}{25} \cdot 4 + 333\right) \cdot x \\ &= \frac{16343}{75}x \end{aligned}$$

Wenn wir mehr produzieren möchten, müssen wir von d_{opt} abweichen und $d = \frac{x}{t_{max}}$ wählen. Wir können so $d_{max} \cdot t_{max} = 120$ Einheiten produzieren mit der folgenden Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} K(x) = k_v\left(\frac{x}{10}\right) \cdot x &= \left[\frac{166}{15}\left(\frac{x}{10}\right)^2 - \frac{1826}{25}\left(\frac{x}{10}\right) + 333\right] \cdot x \\ &= \frac{166}{1500}x^3 - \frac{1826}{250}x^2 + 333x \end{aligned}$$

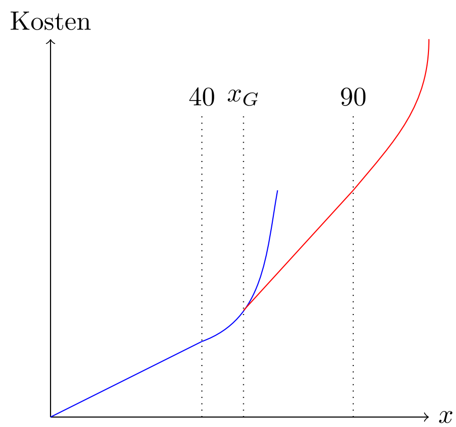
Die gesamte Kostenfunktion ist also

$$K(x) = \begin{cases} \frac{16343}{75}x & 0 \le x \le 40 \\ \frac{166}{1500}x^3 - \frac{1826}{250}x^2 + 333x & 40 < x \le 120 \end{cases}$$

(c) Wenn man nur eine Einheit (bzw. nur sehr wenige Einheiten) produzieren möchte, kann man mit beiden Maschinen mit d_{opt} produzieren. Aber Maschine B hat in diesem Bereich geringere Grenzkosten.

(d) Mit Maschine B kann man mit d_{opt} und 10 Stunden Zeit genau 50 Einheiten produzieren, also $50 = d_{opt} \cdot 10 \Rightarrow d_{opt} = 5$.

(e) Wir wollen den Punkt gleicher Grenzkosten x_G bestimmen:



Kostenfunktion Maschine B, Kostenfunktion Maschine A

$$\begin{aligned}
GK(B_{intens}) &= GK(A_{zeit}) \\
\frac{21}{20}x^2 - 70x + 1350 &= 650 \\
\frac{21}{20}x^2 - 70x + 700 &= 0 \\
x_1 &= -\frac{20}{3}\left(\sqrt{10} - 5\right) \approx 12.25 \\
x_2 &= \frac{20}{3}\left(5 + \sqrt{10}\right) \approx 54
\end{aligned}$$

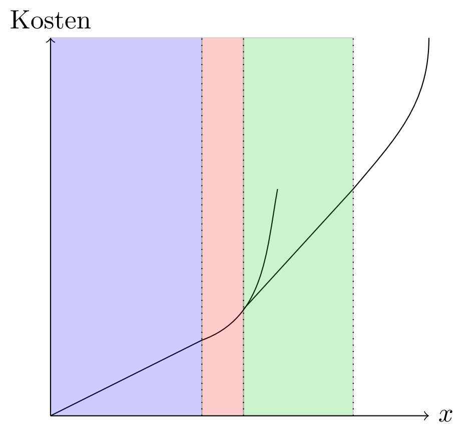
Es kann nur $x_2 = x_G$ gelten. Im Intervall $(40, x_G]$ ist die Kostenfunktion durch $\frac{7}{20}x^3 - 35x^2 + 1350x$ (Maschine B nicht mehr im optimalen Bereich, aber immer noch günstiger als Maschine A im optimalen Bereich) gegeben. Wollen wir mehr als x_G Einheiten produzieren, so müssen wir auch Maschine A benutzen. Die Kosten hierfür setzen sich dann zusammen aus den Kosten von Maschine B um x_G Einheiten zu produzieren und den Kosten für Maschine A $x - x_G$ Einheiten zu produzieren, also

$$\begin{aligned}
K(x) &= K_B(x_G) + K_A(x - x_G) \\
&= \frac{1000}{27}\left(515 + 61\sqrt{10}\right) + 650\left(x - \frac{20}{3}\left(5 + \sqrt{10}\right)\right) \\
&= -\frac{14000}{27}\left(5 + 4\sqrt{10}\right) + 650x
\end{aligned}$$

Wenn man nun für alle Intervalle die Kostenfunktionen zusammenführt ergibt sich:

$$K(x) = \begin{cases} 475x & 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{7}{20}x^3 - 35x^2 + 1350x & 40 < x \leq \frac{20}{3}\left(5 + \sqrt{10}\right) \\ -\frac{14000}{27}\left(5 + 4\sqrt{10}\right) + 650x & \frac{20}{3}\left(5 + \sqrt{10}\right) < x \leq 90 \end{cases}$$

(f) Es lohnt sich noch mal das Diagramm aus (e) zu sehen, um die richtige Produktionsplanung für die verschiedenen x aufzuschreiben:



x	x_A	x_B	d_A	d_B	t_A	t_B	$K(x)$
52	0	52	0	5.2	0	10	24772.80
60	5.6[1]	54.4[2]	4	5.44	1.4	10	29848.61

Aufgabe 6

Die zu produzierende Menge liegt im Bereich, wo wir Maschine B[3] bis zu x_G voll auslasten und den Rest mit Maschine A produzieren. Wir können ablesen, dass $x_G = 94.55$ ist und damit ergibt sich:

x	x_A	x_B	d_A	d_B	t_A	t_B	$K(x)$
100	5.45	94.55	5	9.455	1.09	10	58464.84

[3]Maschine B ist billiger, was man daran erkennt, dass die erste Einheit mit ihr erstellt wird.