Statistik 2, Übung 8

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Die Gütefunktion ist als Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, definiert. Also

$$\begin{aligned}
G(\mu_0) &= \mathbb{P}(H_0 \text{ ablehnen}) \\
&= \mathbb{P}(T > z_{1-\alpha}) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > -z_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\alpha} > 0\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

(b) Wir testen $H : 0 : \bar{x} \leq 83$ vs. $H_1 : \bar{x} > 83$ und berechnen $G(84) = 0.102936$. Wir machen keinen Fehler.

(c) Das ist das Gegenereignis zu (b), also $1 - G(84) = 0.897064$. Wir machen hier einen Fehler 2. Art.

(d) $G(82) = 0.021953$. Wir machen hier einen Fehler 1. Art.

Aufgabe 2

(a) Wir testen $H_0 : \bar{x} \geq 175$ gegen $H_1 : \bar{x} < 175$. Die Teststatistik berechnet sich zu

$$T = \frac{175 - 174.4}{4}\sqrt{25} = 0.75$$

Der kritische Wert ist $z_{1-\alpha} = 1.64$ und damit erfolgt keine Ablehnung von H_0.

(b) Wir müssen α^* finden, so dass

$$\begin{aligned}
z_{1-\alpha^*} &= 0.75 \\
1 - \alpha^* &= \mathrm{CDF}(0.75) \\
\alpha^* &= 1 - \mathrm{CDF}(0.75) \\
&= 0.226627
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{CDF}(\cdot)$ für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung steht.

(c) Läuft ähnlich wie Aufgabe 1 (a):

$$\begin{aligned} G(\mu_0) &= \mathbb{P}(H_0 \text{ ablehnen}) \\ &= \mathbb{P}(T > -z_{1-\alpha}) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > -z_{1-\alpha}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha} < 0\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

(d) Hier ist nach der Operationscharakteristik gefragt, also $1 - G(174) = \Phi(-0.39) = 0.651732$.

(e) Wir müssen ein n finden, sodass die Gütefunktion für $\bar{x} = 174$ größer als 0.975 ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_0 \text{ ablehnen}) &\geq 0.975 \\ \Phi\left(\frac{175-174}{4}\sqrt{n} - 1.64\right) &\geq 0.975 \\ \frac{1}{4}\sqrt{n} - 1.64 &\geq z_{0.975} \\ \sqrt{n} &\geq 4(1.95996 + 1.64) \\ n &\geq 207.335 \\ &\geq 208 \end{aligned}$$