Einführung in die Produktion, Tutorium 2

Henry Haustein

Aufgabe 3

(a) Zielfunktion: $1 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 \to \min$ unter der Nebenbedingung $11 = 12r_1 - 4r_1^2 + 4r_1r_2 - 4r_2^2$. Der Lagrangeansatz ist damit $L = r_1 + r_2 + \lambda(12r_1 - 4r_1^2 + 4r_1r_2 - 4r_2^2 - 11)$.

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = 1 + 12\lambda - 8\lambda r_1 + 4\lambda r_2 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = 1 + 4\lambda r_1 - 8\lambda r_2 = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = 12r_1 - 4r_1^2 + 4r_1r_2 - 4r_2^2 - 11 = 0 \tag{3}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt

$$\begin{aligned} +12\lambda - 8\lambda r_1 + 4\lambda r_2 &= 1 + 4\lambda r_1 - 8\lambda r_2 \\ 12 - 8r_1 + 4r_2 &= 4r_1 - 8r_2 \\ 12 + 12r_2 &= 12r_1 \\ 1 + r_2 &= r_1 \end{aligned}$$

(b) Dazu leiten wir die Produktionsfunktion x nach r_1 und r_2 ab und setzen sie 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r_2} = -8r_2 + 4r_1 &= 0 \\ 4r_1 &= 8r_2 \\ r_1 &= 2r_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r_1} = 4r_2 - \underbrace{8r_1}_{16r_2} + 12 &= 0 \\ -12r_2 + 12 &= 0 \\ r_2 &= 1 \\ \Rightarrow r_1 &= 2 \end{aligned}$$

(c) Für die Minimalkostenkombination nutzen wir unsere Erkenntnisse aus (a) und setzen dies in (3) ein:

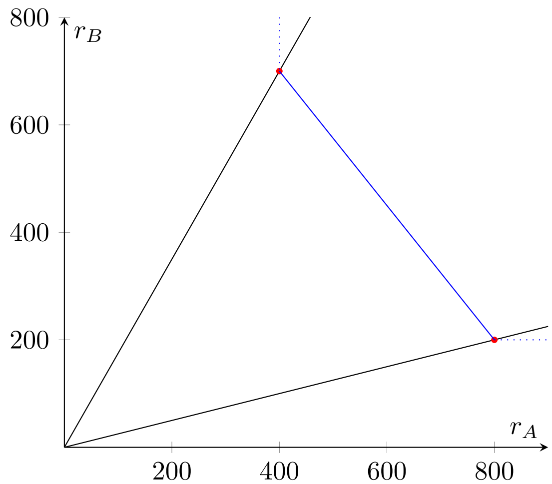
$$\begin{aligned}
\underbrace{12r_1}_{12+12r_2} -4 \underbrace{r_1^2}_{1+2r_2+r_2^2} +4 \underbrace{r_1}_{1+r_2} r_2 - 4r_2^2 - 11 &= 0\\
12 + 12r_2 - 4 - 8r_2 - 4r_2^2 + 4r_2 + 4r_2^2 - 4r_2^2 - 11 &= 0\\
-4r_2^2 + 8r_2 - 3 &= 0\\
r_{2a} &= 0.5\\
r_{2b} &= 1.5
\end{aligned}$$

r_{2b} ist Faktorverschwendung, also ist $r_2 = 0.5$ und entsprechend $r_1 = 1.5$. Die Kosten betragen dann 2 und der Lagrange-Multiplkator λ hat dann den Wert (mit Gleichung (2) berechnet)

$$\begin{aligned}
1 + 4\lambda \cdot 1.5 - 8\lambda \cdot 0.5 &= 0\\
\lambda &= 0.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Die Isoquante ist



Isoquante für $x = 200$

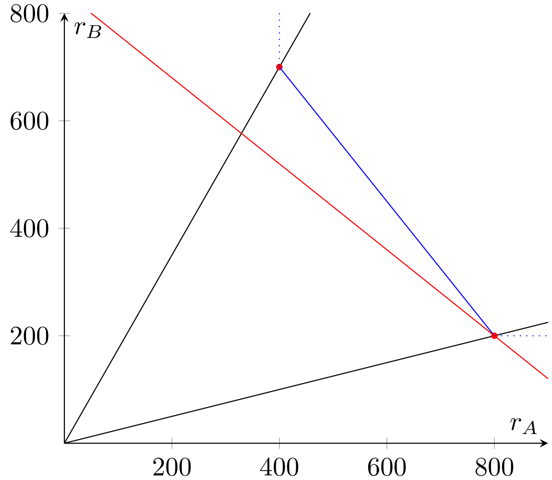
(b) Mit der 2-Punkte-Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)\\
y &= \frac{200 - 700}{800 - 400}(x - 400) + 700\\
&= -1.25x + 400 + 700\\
&= -1.25x + 1200 \quad (400 \leq x \leq 800)
\end{aligned}$$

(c) Die Kostenfunktion ist $K = 2r_A + 2.5r_B$. Eine Gleichung für r_B haben wir schon in (b) ermittelt. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
K &= 2r_A + 2.5(-1.25r_A + 1200)\\
&= 2r_A - 3.125r_A + 3000\\
&= -1.125r_A + 3000
\end{aligned}$$

Da K minimiert werden soll, muss r_A maximiert werden, also wählen wir $r_A = 800$. Damit folgt dann $r_B = 200$ und $K = 2100$.



Isoquante für $x = 200$, Kostenfunktion