Rechtfertigung der Staatstätigkeit, Hausaufgabe 3

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Die Straße würde 20 Mio. Euro kosten, aber einen Nutzen von $2 \cdot 14$ Mio. Euro bringen. Aus gesamtwirtschaftlicher Sicht lohnt es sich also die Straße zu bauen.

(b) Auszahlungsmatrix, der Zeilenspieler wird zuerst genannt:

		Bedorf	
		bauen	nicht bauen
Adorf	bauen	(4,4)	(-6,14)
	nicht bauen	(14,-6)	(0,0)

nicht bauen ist also eine dominante Strategie, das Nash-Gleichgewicht ist daher (nicht bauen, nicht bauen).

(c) Auszahlungsmatrix, der Zeilenspieler wird zuerst genannt:

		Bedorf	
		bauen	nicht bauen
Adorf	bauen	(20,1)	(10,11)
	nicht bauen	(30,-9)	(0,0)

Falls Bedorf baut, baut Adorf nicht und falls Bedorf nicht baut, baut Adorf.
Falls Adorf baut, baut Bedorf nicht und falls Adorf nicht baut, baut Bedorf nicht.
Für Bedorf ist *nicht bauen* eine dominante Strategie; das Nash-Gleichgewicht ist (bauen, nicht bauen)

Aufgabe 2

(a) Die Konsumenten maximieren ihren Nutzen und der Nebenbedingung $x_i = w_i - g_i$. Es gilt weiterhin $g_i = \frac{G}{n}$ und damit $x_i = w_i - \frac{G}{n}$:

$$\begin{aligned} U_i &= x_i \cdot \sqrt{G} \\ &= \left(w_i - \frac{G}{n}\right) \cdot \sqrt{G} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i}{G} &= \frac{n \cdot w_i - 3G}{2n\sqrt{G}} = 0 \\ n \cdot w_i - 3G &= 0 \\ G^{opt} &= \frac{n \cdot w_i}{3}\end{aligned}$$

(b) Der Nutzen $U_i = x_i \cdot \sqrt{G} = (w_i - g_i)\sqrt{g_i + G_{-i}}$ wird maximiert

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i}{\partial g_i} &= -\frac{3g_i - w + 2G_{-i}}{2\sqrt{g_i + G_{-i}}} = 0 \\ 0 &= 3g_i - w + 2G_{-i} \\ g_i &= \frac{w - 2G_{-i}}{3}\end{aligned}$$

Im symmetrischen Gleichgewicht gilt $G_{-i} = (n-1)g_i$, also

$$\begin{aligned}g_i &= \frac{w - 2(n-1)g_i}{3} \\ 3g_i &= w - 2ng_i + 2g_i \\ 2ng_i - 2g_i + 3g_i &= w \\ (2n+1)g_i &= w \\ g_i &= \frac{w}{2n+1}\end{aligned}$$

(c) $G^{priv} = n \cdot g_i = \frac{n \cdot w_i}{2n+1}$. Ab $n > 1$ gilt $G^{priv} < G^{opt}$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_i}{\partial n} &= -\frac{2w}{(2n+1)^2} < 0 \\ \frac{\partial G^{priv}}{\partial n} &= \frac{w}{(2n+1)^2} > 0\end{aligned}$$

(e) Für den Nutzen gilt

$$\begin{aligned}U_i &= x_i \cdot \sqrt{G + T} \\ &= (w_i - g_i - t_i)\sqrt{G_{-i} + g_i + T_{-1} + t_i} \rightarrow \max\end{aligned}$$

Die Bedingung erster Ordnung lautet

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i}{\partial g_i} &= \frac{3g_i + 2T_{-i} - w_i + 3t_i + 2G_{-i}}{2\sqrt{G_{-i} + g_i + T_{-i} + t_i}} = 0 \\ 0 &= 3g_i + 2(n-1)t_i - w_i + 3t_i + 2(n-1)g_i \\ 0 &= (2n+1)g_i + (2n+1)t_i - w_i \\ g_i &= \frac{w_i - (2n+1)t_i}{2n+1}\end{aligned}$$

(f) Es gilt

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_i} = -1$$

Für jeden Euro, den der Staat zur Bereitstellung des öffentlichen Gutes ausgibt, gibt jedes Individuum einen Euro weniger aus.

Aufgabe 3

(a) Die Grenzkosten betragen 30. Unter Wohlfahrtsgesichtspunkten liefert $\sum GZB = GK$ die optimale Lösung, also

$$\begin{aligned} \sum GZB &= GK \\ (40-2G)+(20-G) &= 30 \\ 60-3G &= 30 \\ G_{opt} &= 10 \end{aligned}$$

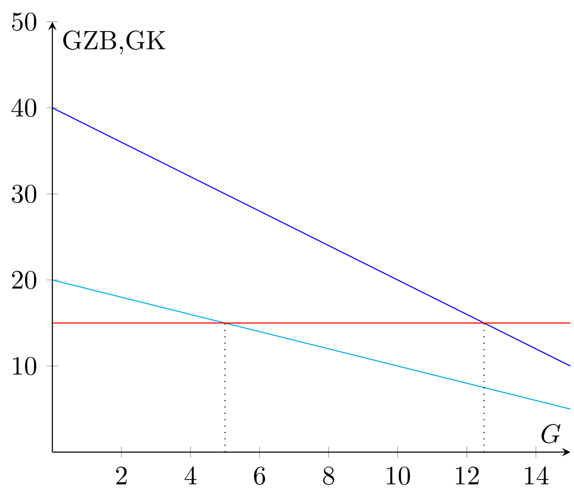
(b) Für Haushalt 1 gilt:

$$\begin{aligned} GZB_1 &= \alpha \cdot GK \\ 40-2G &= \frac{1}{2}\cdot 30 \\ G_1 &= 12.5 \end{aligned}$$

Für Haushalt 2 gilt:

$$\begin{aligned} GZB_2 &= (1-\alpha)\cdot GK \\ 20-G &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 30 \\ G_2 &= 5 \end{aligned}$$

Die Haushalte fragen verschiedene Mengen nach, aber es kann nur eine Menge bereitgestellt werden.

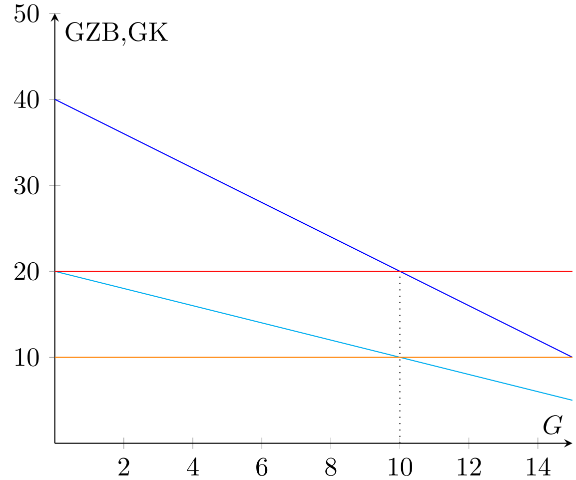


$\alpha GK = (1-\alpha)GK$, GZB_1, GZB_2

(c) Wir müssen α^* so wählen, dass

$$\begin{aligned} GZB_1(G_{opt}) &= \alpha^* \cdot GK \\ 40-2\cdot 10 &= \alpha^*\cdot 30 \\ 20 &= \alpha^*\cdot 30 \\ \alpha^* &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der andere Haushalt muss dann $1-\alpha$ der Grenzkosten tragen, für ihn sind das $\frac{1}{3}$ der Grenzkosten.



GZB_1, GZB_2, $\alpha \cdot GK$, $(1-\alpha) \cdot GK$

Aufgabe 4

(a) Für den Haushalt A ist die Lagrange-Funktion

$$L = x_A \cdot G^2 - \lambda(12 - x_A - \alpha G)$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_A} &= G^2 + \lambda = 0 \\
\lambda &= -G^2 \\
\frac{\partial L}{\partial G} &= 2Gx_A + \alpha\lambda = 0 \\
0 &= 2Gx_A - \alpha G^2 \\
0 &= 2x_A - \alpha G \\
G &= 2\frac{x_A}{\alpha}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Budgetrestriktion ergibt

$$\begin{aligned}
12 &= x_A + \alpha G \\
&= x_A + 2x_A \\
x_A &= 4
\end{aligned}$$

und damit $G = \frac{8}{\alpha}$. Für den Haushalt B gilt

$$L = x_B^2 \cdot G - \lambda(16 - x_B - (1-\alpha)G)$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial G} &= x_B^2 + (1-\alpha)\lambda = 0 \\
\lambda &= -\frac{x_B^2}{1-\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial x_B} &= 2x_B \cdot G + \lambda = 0 \\
0 &= 2x_B \cdot G - \frac{x_B^2}{1-\alpha} \\
2G &= \frac{x_B}{1-\alpha} \\
G &= \frac{x_B}{2(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Budgetrestriktion ergibt

$$\begin{aligned}
16 &= x_B + (1-\alpha)G \\
&= x_B + \frac{x_B}{2} \\
x_B &= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

und damit $G = \frac{16}{3(1-\alpha)}$.

(b) Die G's müssen gleich sein, also

$$\begin{aligned}
\frac{8}{\alpha} &= \frac{16}{3(1-\alpha)} \\
\alpha &= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

und damit $G = \frac{40}{3}$.

Aufgabe 5

(a) Alternative A hat eine Zahlungsbereitschaft von 175, Alternative B von 195 und Alternative C von 100. Damit sollte B angeschafft werden.

(b) Es gilt

	Alternative A	Alternative B	Alternative C	Steuer
$\sum$ ZB ohne Konsument 1	75	**145**	100	0
$\sum$ ZB ohne Konsument 2	**175**	125	50	50
$\sum$ ZB ohne Konsument 3	150	**195**	50	0
$\sum$ ZB ohne Konsument 4	**125**	120	100	5