Statistik 2, Übung 3

Henry Haustein

Aufgabe 1

Es gilt

$$\begin{aligned}
f(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
L(\mu) &= \prod_{i=1}^n f(\mu) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right) \\
l(\mu) &= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i-\mu)^2}_{x_i^2-2\mu x_i+\mu^2} \\
&= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2\sigma^2}2\mu\sum_{i=1}^n - \frac{1}{2\sigma^2}n\mu^2 \\
\frac{\partial l(\mu)}{\partial\mu} &= \frac{1}{2\sigma}2\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2\sigma^2}2n\mu \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}}_{\neq 0}\left(\sum_{i=1}^n - n\mu\right) = 0 \\
0 &= \sum_{i=1}^n x_i - n\mu \\
\mu &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Am Fenster: 0.4; am Gang: 0.5; in der Mitte: 0.1

(b) Wir stellen gleich die Likelihood-Funktion auf, die als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausprägungen definiert ist. Also

$$
\begin{aligned}
L(p) &= \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{9 \text{ mal}} \cdot (1-2p) \\
&= p^9 \cdot (1-2p) \\
l(p) &= 9\log(p) \cdot \log(1-2p) \\
\frac{\partial l(p)}{\partial p} &= \frac{9}{p} - \frac{2}{1-2p} = 0 \\
\frac{9}{p} &= \frac{2}{1-2p} \\
p &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \cdot 9 \\
&= 4.5 - 9p \\
10p &= 4.5 \\
p &= 0.45
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda) \\
L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(\lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda) \\
l(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}\right) + \sum_{i=1}^{n} -\lambda \\
&= \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} \log(k_i!) - n\lambda \\
\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} k_i - n = 0 \\
\lambda &= \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} = \bar{k}
\end{aligned}
$$

(b) Wir berechnen zuerst λ

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{15}(3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 7) \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= \frac{\left(\frac{13}{3}\right)^0}{0!}\exp\left(-\frac{13}{3}\right)\\ &= 0.013\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir schätzen den Parameter λ wieder über die Maximum-Likelihood-Methode:

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \lambda\exp(-\lambda x)\\ L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(\lambda)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\lambda\cdot\prod_{i=1}^{n}\exp(-\lambda x_i)\\ &= \lambda^n\cdot\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\\ l(\lambda) &= n\log(\lambda)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \frac{\partial l(\lambda)}{\partial\lambda} &= \frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i = 0\\ \frac{n}{\lambda} &= \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \frac{\lambda}{n} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\\ \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{1}{\bar{x}}\end{aligned}$$

Mit den gegebenen Daten können wir λ nun ermitteln:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\bar{x}}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{8}(10+8+9+5+4+7+9+5)}\\ &= \frac{8}{57} = 0.14\end{aligned}$$