Statistik 2, Übung 6

Henry Haustein

Aufgabe 1

Wir haben hier wieder ein einfaches Konfidenzintervall zu berechnen, alles nötige ist dafür schon gegeben. Wir brauchen nur noch 98%-Quantil der Standardnormalverteilung: $z_{0.98} = 2.0537$

$$\begin{aligned} KI &= \left[\bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[25.452 \mp 2.05375 \frac{\sqrt{0.85}}{\sqrt{116}}\right] \\ &= [25.276, 25.628] \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Ein Schätzer für p ist hier durch $\hat{p} = \frac{70}{100} = 0.7$. Die Varianz von $\hat{p}$ ist dann gegeben durch $s^2 = \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$ und das 95%-Quantil ist $z_{0.95} = 1.64485$. Das Konfidenzintervall ist dann

$$\begin{aligned} KI &= \left[\hat{p} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0.7 \mp 1.64485 \cdot \frac{\sqrt{0.21}}{\sqrt{100}}\right] \\ &= [0.625, 0.775] \end{aligned}$$

(b) Das Zielkonfidenzintervall ist [0.65,0.75] bei einem α von 10%. Das heißt also, dass

$$\begin{aligned} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} &= 0.05 \\ \sqrt{n} &= z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{s^2}}{0.05} \\ n &= \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{s^2}}{0.05}\right)^2 \\ &= 228 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Diese Teilaufgabe funktioniert analog zur Aufgabe 2a. WIr brauchen hier nur das 98.5%-Quantil: $z_{0.985} = 2.17009$

$$
\begin{aligned}
(KI &= \left[p \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\
&= \left[0.38 \mp 2.17009 \cdot \sqrt{\frac{0.38 \cdot 0.62}{400}}\right] \\
&= [0.327, 0.433]
\end{aligned}
$$

(b) Hier verschieben wir die Streuung im Konfidenzintervall nur auf die linke Seite, das heißt wir ersetzen den Term $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ durch $z_{1-\alpha}$. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} &= 0.03 \\
z_{1-\alpha} &= \frac{0.03}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \\
1 - \alpha &= \mathrm{CDF}\left(\frac{0.03}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \\
\alpha &= 1 - \mathrm{CDF}\left(\frac{0.03}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \\
&= 0.108
\end{aligned}
$$

Wobei $\mathrm{CDF}(\cdot)$ für die *Cumulative distribution function* (Verteilungsfunktion) der Standardnormalverteilung steht.

(c) Die Überlegung ist die selbe wie bei (b), nur das wir jetzt nach n umstellen:

$$
\begin{aligned}
z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} &= 0.03 \\
\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} &= \frac{0.03}{z_{1-\alpha}} \\
\frac{p(1-p)}{n} &= \left(\frac{0.03}{z_{1-\alpha}}\right)^2 \\
n &= \left(\frac{0.03}{z_{1-\alpha}}\right)^2 \cdot p(1-p) \\
&= 632,7 \approx 633
\end{aligned}
$$