Statistik 2, Übung 1

Henry Haustein

TU Dresden

12. Oktober 2022

Aufgabe 1.1

Nur 3% der kontrollierten Fahrgäste der Dresdner Straßenbahnen besitzen keinen gültigen Fahrschein. Die Ergebnisse der Kontrolle seien unabhängig, d. h. es wird vereinfacht angenommen, dass nur Einzelpersonen kontrolliert werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei der Kontrolle von 10 Personen wenigstens ein Schwarzfahrer erwischt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kontrolleur erst bei der zehnten Kontrolle den ersten Schwarzfahrer aufspürt?

Aufgabe 1.1

(a) Sei X die Anzahl der erwischten Schwarzfahrer. Dann $X \sim B(10, 0.03)$ und für die Binomialverteilung gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Aufgabe 1.1

(a) Sei X die Anzahl der erwischten Schwarzfahrer. Dann $X \sim B(10, 0.03)$ und für die Binomialverteilung gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Wir suchen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{10} \\ &= 0.263 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1

(b) Y sei die Anzahl der kontrollierten Fahrgäste, bis der erste Schwarzfahrer erwischt wird. Daher folgt Y einer geometrischen Verteilung $Y \sim G(0.03)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{k-1} \\ \mathbb{P}(Y = 10) &= 0.03 \cdot 0.97^9 \\ &= 0.023\end{aligned}$$

Aufgabe 1.1

(b) Y sei die Anzahl der kontrollierten Fahrgäste, bis der erste Schwarzfahrer erwischt wird. Daher folgt Y einer geometrischen Verteilung $Y \sim G(0.03)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= p(1-p)^{k-1} \\ \mathbb{P}(Y = 10) &= 0.03 \cdot 0.97^9 \\ &= 0.023 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Alternative Lösung, die vielleicht etwas intuitiver ist: Wenn man erst bei der 10. Kontrolle einen Schwarzfahrer finden will, darf man bei den 9 Kontrollen vorher keinen Schwarzfahrer finden (0.97^9), muss aber in der 10. Kontrolle (0.03):

$$0.97^9 \cdot 0.03 = 0.023$$

Aufgabe 1.2

Die Dauer von Telefongesprächen an der Information am Hauptbahnhof Dresden sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 0.2 min^{-1}$.

(a) Skizzieren Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion der Dauer der Telefongespräche.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch kürzer als 3 Minuten dauert?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch länger als 3 Minuten dauert?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch länger als 2 Minuten und kürzer als 3 Minuten dauert?

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Dauer der Telefongespräche.

Aufgabe 1.2

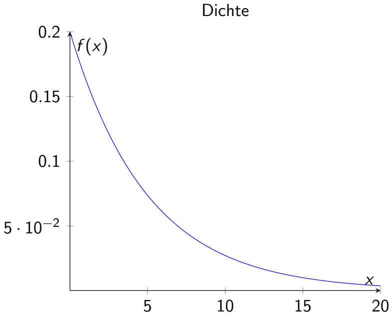
(a) Die Dichte f und Verteilungsfunktion F einer Exponentialverteilung sind definiert als

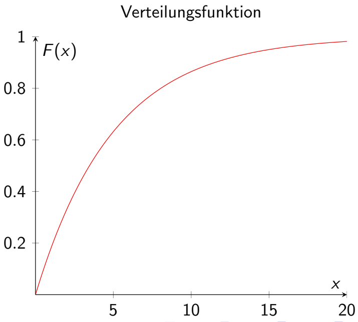
$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Aufgabe 1.2

(a) Die Dichte f und Verteilungsfunktion F einer Exponentialverteilung sind definiert als

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$$





Aufgabe 1.2

(b) $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 1 - e^{-0.2 \cdot 3} = 0.451$

Aufgabe 1.2

(b) $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 1 - e^{-0.2 \cdot 3} = 0.451$

(c) $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = 0.549$

Bemerkung: $\mathbb{P}(X = 3) = 0$, weil X eine stetige Zufallsvariable ist.

Aufgabe 1.2

(b) $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 1 - e^{-0.2 \cdot 3} = 0.451$

(c) $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = 0.549$

Bemerkung: $\mathbb{P}(X = 3) = 0$, weil X eine stetige Zufallsvariable ist.

(d) $\mathbb{P}(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 0.121$

Aufgabe 1.2

(b) $\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 1 - e^{-0.2 \cdot 3} = 0.451$

(c) $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = 0.549$
Bemerkung: $\mathbb{P}(X = 3) = 0$, weil X eine stetige Zufallsvariable ist.

(d) $\mathbb{P}(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 0.121$

(e) In der Formelsammlung 2 ($\nearrow$ Ordner *Extras* in OPAL) finden sich folgende Formeln für den Erwartungswert und die Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariable:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 25$$

Aufgabe 1.3

Gegeben ist folgende Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(2 < X < 3)$.

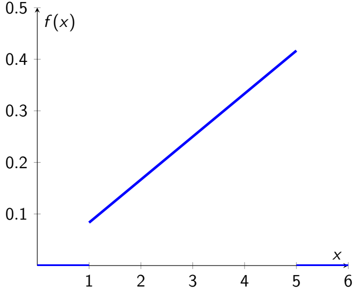
Aufgabe 1.3

Gegeben ist folgende Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen.

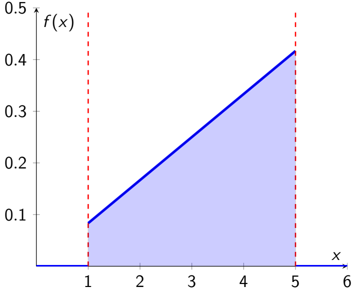
(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(2 < X < 3)$.



Aufgabe 1.3

(a) Die Verteilungsfunktion ist wie folgt definiert:

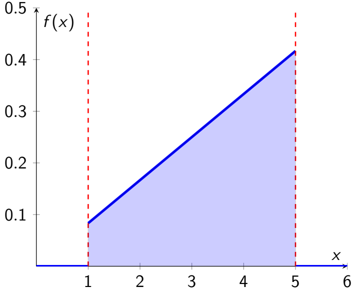
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



Aufgabe 1.3

(a) Die Verteilungsfunktion ist wie folgt definiert:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

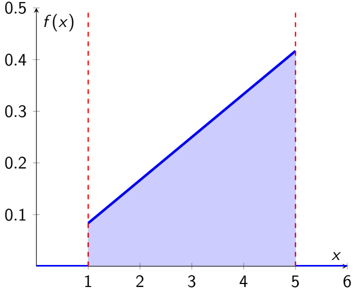


Offensichtlich gilt für alle $x < 1 : F(x) = 0$ und für $x > 5 : F(x) = 1$.

Aufgabe 1.3

(a) Die Verteilungsfunktion ist wie folgt definiert:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$



Offensichtlich gilt für alle $x < 1 : F(x) = 0$ und für $x > 5 : F(x) = 1$. Da f eine Dichte ist, hat die blaue Fläche den Inhalt 1.

Aufgabe 1.3

Der interessante Fall ist $x \in [1, 5]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{12} t\, dt$$
$$= \frac{1}{24} t^2 \Big|_1^x = \frac{x^2 - 1}{24}$$

Aufgabe 1.3

Der interessante Fall ist $x \in [1, 5]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{12} t\,dt$$
$$= \frac{1}{24} t^2 \Big|_1^x = \frac{x^2 - 1}{24}$$

Damit können wir die komplette Verteilungsfunktion zusammensetzen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2-1}{24} & x \in [1, 5] \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Aufgabe 1.3

Der interessante Fall ist $x \in [1, 5]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{12} t\,dt$$
$$= \frac{1}{24} t^2 \Big|_1^x = \frac{x^2 - 1}{24}$$

Damit können wir die komplette Verteilungsfunktion zusammensetzen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2-1}{24} & x \in [1, 5] \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

(b) $\mathbb{P}(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{3^2-1}{24} - \frac{2^2-1}{24} = \frac{5}{24}$

Aufgabe 1.4

X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

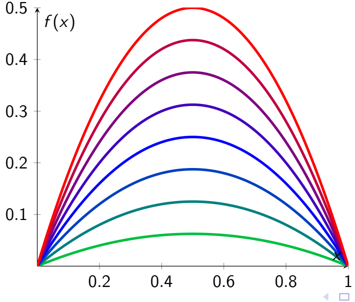
$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X > \frac{2}{3})$, $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{2}{3})$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 3)$.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.



Aufgabe 1.4

(a) Da f eine Dichte sein soll, gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx \overset{!}{=} 1$$

Aufgabe 1.4

(a) Da f eine Dichte sein soll, gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx \overset{!}{=} 1$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 cx(1-x)\,dx &= c\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{c}{6} \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow c &= 6\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

(a) Da f eine Dichte sein soll, gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx \overset{!}{=} 1$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 cx(1-x)\,dx &= c\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{c}{6} \overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow c &= 6\end{aligned}$$

(b) Genau wie bei Aufgabe 1.3 ist auch hier für alle $x < 0$ $F(x) = 0$ und für alle $x > 1$ $F(x) = 1$. Für den interessanten Teil dazwischen ergibt sich:

Aufgabe 1.4

$x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt \\ &= 6\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x \\ &= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

$x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt \\ &= 6\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x \\ &= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \end{aligned}$$

Damit ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$
$\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{13}{54}$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$
$\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{13}{54}$
$\mathbb{P}(2 < X \leq 3) = F(3) - F(2) = 1 - 1 = 0$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$
$\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{13}{54}$
$\mathbb{P}(2 < X \leq 3) = F(3) - F(2) = 1 - 1 = 0$

(d) Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.4

(c) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$
$\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{13}{54}$
$\mathbb{P}(2 < X \leq 3) = F(3) - F(2) = 1 - 1 = 0$

(d) Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}$$

und die Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\,dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{20}$$