Rechtfertigung der Staatstätigkeit, Hausaufgaben 1

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Wenn $\bar{x} = 0$, dann offensichtlich $x_1 = x_2 = 0$ und somit $u_1 = u_2 = 0$. Dies ist auch die einzig mögliche Allokation, also auch die optimale Allokation. Wenn $\bar{x} > 0$, dann gilt $W = 0$ nur dann, wenn $u_1 = x_1 = 0$ und $u_2 = x_2 = \bar{x}$. In diesem Fall kommt es zu einer Wohlfahrtssteigerung, wenn man eine Verteilung wählt, bei der $x_1, x_2 > 0$ ist.

(b) Mit dem Lagrange-Ansatz folgt:

$$L = x_1 \cdot x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - \bar{x})$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \lambda = 0 \tag{1.2}$$

Subtaktion von (1.1) und (1.2) liefert $x_1 - x_2 = 0$, also $x_1 = x_2$ und damit $x_1 = x_2 = \frac{\bar{x}}{2}$.

Aufgabe 2

(a) Mittels Lagrange ergibt sich

$$L = U_1 + U_2 + \lambda(I_1 + I_2 - 1000)$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

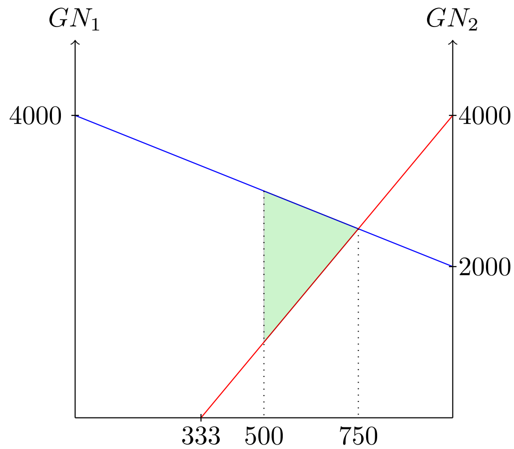
$$\frac{\partial L}{\partial I_1} = 4000 - 2I_1 + \lambda = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I_2} = 4000 - 6I_2 + \lambda = 0 \tag{2.2}$$

Subtaktion von (2.1) und (2.2) liefert

$$\begin{aligned} 4000 - 2I_1 &= 4000 - 6I_2 \\ I_1 &= 3I_2 \\ I_1 &= 750 \\ I_2 &= 250 \end{aligned}$$

(b) Graph



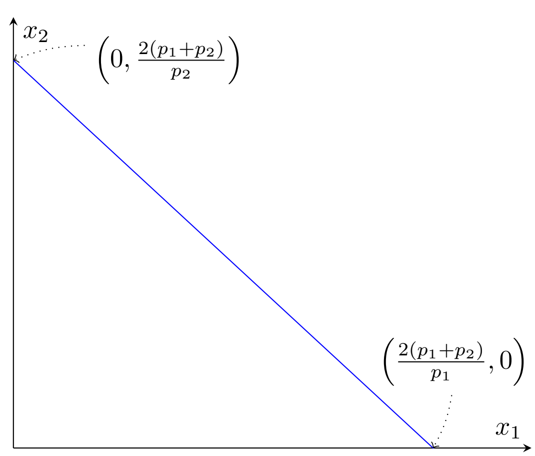
GN_1, GN_2, Wohlfahrtsverlust

Nimmt man Person 1 etwas weg und gibt es Person 2, so sinkt der sinkt der Grenznutzen von 1 nur ein bisschen, aber der Grenznutzen 2 steigt viel stärker. Eine solche Umverteilung kann man solange machen, bis sich die Grenznutzen angleichen.

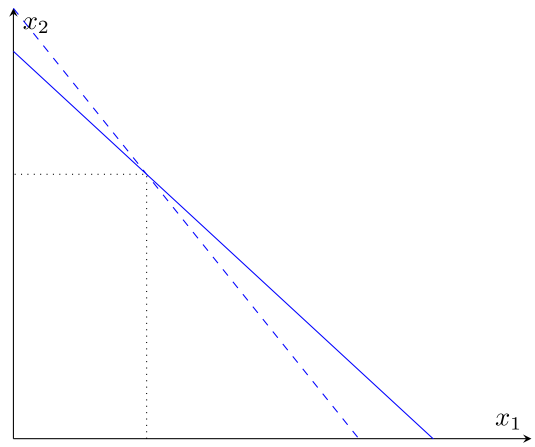
Aufgabe 3

(a) Das Budget ist $p_1x_1 + p_2x_2 = 2p_1 + 2p_2 = 2(p_1 + p_2)$. Die Bugetgerade ist damit

$$x_2 = \frac{2(p_1 + p_2)}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$



(b) Wenn p_1 steigt, so verschieben sich die Achsenabschnitte und damit die Budgetgerade. So wird der Achsenabschnitt $\frac{2(p_1+p_2)}{p_2}$ größer werden, während $\frac{2(p_1+p_2)}{p_1}$ kleiner wird. Die Budgetgerade dreht sich also um den Punkt der Anfangsausstattung $(2, 2)$.



(c) Maximiere den Nutzen $U = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ unter der Nebenbedingung $p_1x_1 + p_2x_2 \leq 2(p_1 + p_2)$. Der Lagrange-Ansatz ist $L = \ln(x_1) + \ln(x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - 2(p_1 + p_2))$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - 2(p_1 + p_2) = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man $\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$, also $x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$ bzw. $x_1 = \frac{p_2}{p_1}x_2$. Setzt man dies in die 3. Gleichung ein, so erhält man die Nachfrage für x_1

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}x_1\right) = 2(p_1 + p_2)$$
$$2p_1x_1 = 2(p_1 + p_2)$$
$$x_1 = \frac{p_1 + p_2}{p_1}$$

Bzw. die Nachfrage für x_2

$$p_1\left(\frac{p_2}{p_1}x_2\right) + p_2x_2 = 2(p_1 + p_2)$$
$$2p_2x_2 = 2(p_1 + p_2)$$
$$x_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_2}$$

(d) Die Erstausstattung von Gut 1 steigt um Δ auf $2 + \Delta$. Damit steigt auch das Budget auf $2(p_1 + p_2) + p_1\Delta$. Der Lagrange-Ansatz ist $L = \ln(x_1) + \ln(x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - 2(p_1 + p_2) - p_1\Delta)$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - 2(p_1 + p_2) - p_1\Delta = 0$$

Die ersten zwei Gleichungen sind die selben wie bei (c), wir können also die Ergebnisse direkt für die Nachfragen nach x_1 und x_2 benutzen:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= 2(p_1+p_2) + p_1\Delta \\ 2p_1x_1 &= 2(p_1+p_2) + p_1\Delta \\ x_1 &= \frac{p_1+p_2}{p_1} + \frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$

Die Nachfrage nach x_1 steigt also um $\frac{\Delta}{2}$. Für x_2 sieht es ähnlich aus:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= 2(p_1+p_2) + p_1\Delta \\ 2p_2x_2 &= 2(p_1+p_2) + p_1\Delta \\ x_2 &= \frac{p_1+p_2}{p_2} + \frac{p_1}{p_2}\frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$

Die Nachfrage nach x_2 steigt also um das Preisverhältnis mal $\frac{\Delta}{2}$.

Aufgabe 4

(a) Der Lagrange-Ansatz liefert (aus Gründen der Lesbarkeit lasse ich das i vorerst weg)

$$L = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} - \lambda(x_1p_1 + x_2p_2 - m)$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} &= \lambda p_1 && (4.1) \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} &= \lambda p_2 && (4.2) \end{aligned}$$

Division von (4.1) durch (4.2) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}}{\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}} &= \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \\ \frac{\sqrt{x_2}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \cdot x_1 && (4.3) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Budgetrestriktion ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m &= x_1p_1 + x_2p_2 \\ &= x_1p_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1\right) \\ &= x_1p_1 + x_1p_1 \\ x_1 &= \frac{m}{2p_1} \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.3) liefert

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{m}{2p_1} \\ &= \frac{m}{2p_2} \end{aligned}$$

Da die beiden Konsumenten die selbe Nutzenfunktion haben, gilt $x_1 = x_1^A = x_1^B$ und $x_2 = x_2^A = x_2^B$.

(b) Es gibt insgesamt 8 Einheiten von x_1 zu kaufen, also gilt:

$$\begin{aligned} x_1^A + x_1^B &= 8 \\ \frac{m^A}{2p_1} + \frac{m^B}{2p_1} &= 8 \\ \frac{5p_1 + 3p_2}{2p_1} + \frac{3p_1 + 5p_2}{2p_1} &= 8 \\ \frac{5p_1 + 3}{2p_1} + \frac{3p_1 + 5}{2p_1} &= 8 \\ 5p_1 + 3 + 3p_1 + 5 &= 8 \cdot 2p_1 \\ 8p_1 + 8 &= 16p_1 \\ p_1 + 1 &= 2p_1 \\ p_1 &= 1 \end{aligned}$$

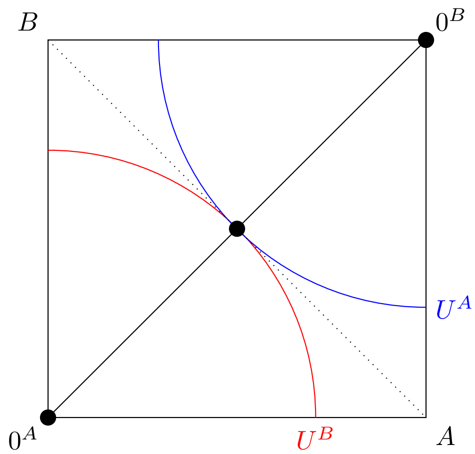
(c) Die gleichgewichtigen Konsummengen sind

$$x_1^A = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 x_2^A \qquad = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 x_1^B = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 x_2^B \qquad = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4$$

(d) Es ist zu zeigen, dass $GRS_A = GRS_B$ im Gleichgewicht gilt:

$$\begin{aligned} GRS_A &= GRS_B \\ \frac{\sqrt{x_2^A}}{2\sqrt{x_1^A}} &= \frac{\sqrt{x_2^B}}{2\sqrt{x_1^B}} \\ \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} &= \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(e) Edgeworth-Box mit Kontraktkurve und gesticheltem Preisverhältnis. Die Kontraktkurve zeigt alle pareto-optimalen Lösungen für den beidseitig optimalen Tausch.



Aufgabe 5

(a) Es ist der Gewinn $\Pi = p \cdot Y = 8 \cdot \sqrt[4]{N} \cdot \sqrt[4]{K} - w \cdot N - r \cdot K = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{K} - 4 - K$. Die Bedingung erster Ordnung lautet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial K} &= 8\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{K^3}} - 1 = 0 \\
\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{K^3}} &= 1 \\
2\sqrt{2} &= \sqrt[4]{K^3} \\
64 &= K^3 \\
K^* &= 4
\end{aligned}$$

(b) Die gewinnmaximierende Produktionsmenge ist dann $Y^* = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

(c) Der Gewinn ist dann $\Pi^* = 8 \cdot 2 = 16$.

Aufgabe 6

(a) Der Lagrange-Ansatz liefert

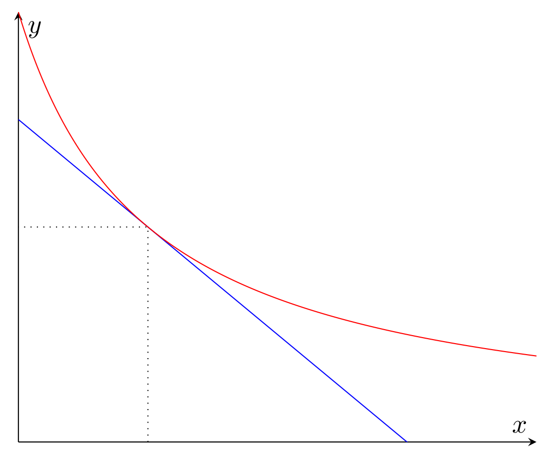
$$L = rK + wN - \lambda(N^a \cdot K^b - \bar{Y})$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial K} &= r - \lambda \cdot N^a \cdot b \cdot K^{b-1} = 0 \\
\lambda &= \frac{r}{N^a \cdot b \cdot K^{b-1}} \\
\frac{\partial L}{\partial N} &= w - \lambda \cdot K^b \cdot a \cdot N^{a-1} = 0 \\
w &= \frac{r}{N^a \cdot b \cdot K^{b-1}} \cdot K^b \cdot a \cdot N^{a-1} \\
w &= \frac{r \cdot a \cdot K}{b \cdot N} \\
\frac{K}{N} &= \frac{w}{r} \cdot \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Das Faktoreinsatzverhältnis entspricht also dem Produkt des inversen Preisverhältnisses (teure Faktoren sollten wenig eingesetzt werden) und den Verhältnis der Effizienz (effiziente Faktoren sollten häufig eingesetzt werden)

(b) Die Isoquante gibt die Faktormengen an, die zum gleichen Output führen, während die Isokostengerade die Mengen angibt, die zu gleichen Kosten führen.



Isokostengerade, Isoquante

Am Tangentialpunkt dieser beiden Kurven kann man ein gegebenes Outputniveau zu minimalsten Kosten herstellen.

(c) Wir wissen

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= N^a \cdot K^b \\
&= N^a \cdot \left(N \cdot \frac{w}{r} \cdot \frac{b}{a}\right)^b \\
&= N^{a+b} \cdot \left(\frac{w}{r} \cdot \frac{b}{a}\right)^b \\
N^{a+b} &= \frac{\bar{Y}}{\left(\frac{w}{r} \cdot \frac{b}{a}\right)^b} \\
N^* &= \sqrt[a+b]{\frac{\bar{Y}}{\left(\frac{w}{r} \cdot \frac{b}{a}\right)^b}} \\
K^* &= N^* \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} \\
&= \sqrt[a+b]{\frac{\bar{Y}}{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r}\right)^b}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r} \\
&= \sqrt[a+b]{\frac{\bar{Y}}{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{w}{r}\right)^a}}
\end{aligned}
$$