Multivariate Statistik, Übung 5

Henry Haustein

Aufgabe 1

Was wir am Ende eigentlich zeigen wollen, ist, dass, wenn man α (und β, aber das folgt analog) als Eigenvektor von $R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$ wählt, $\alpha' R_{12}\beta$ maximal wird.
Wir werden hier Ableitungen von Matrizen brauchen, nämlich die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(Av)}{\partial v} &= A' \\ \frac{\partial(v'A)}{\partial v} &= A \\ \frac{\partial(v'Av)}{\partial v} &= 2A'v\end{aligned}$$

Dann bilden wir die Lagrange-Funktion (um im späteren Teil der Aufgabe keine Verwirrung zu stiften, ist hier der Lagrange-Multiplikator ξ)

$$L = \alpha' R_{12}\beta - \frac{\xi}{2}(\alpha' R_{11}\alpha - 1) - \frac{\xi}{2}(\beta' R_{22}\beta - 1)$$

Ableitung nach α und β gibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= R_{12}\beta - \frac{\xi}{2}2R_{11}'\alpha = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \underbrace{(\alpha' R_{12})'}_{R_{12}'\alpha} - \frac{\xi}{2}2R_{22}\beta = 0\end{aligned}$$

Unter Nutzung von $R_{11}' = R_{11}$ und $R_{22}' = R_{22}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}R_{12}\beta &= \xi R_{11}\alpha \\ R_{12}'\alpha &= \xi R_{22}\beta\end{aligned}$$

Umstellen nach β und anschließendes Einsetzen entfernt alle β's.

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\xi}R_{22}^{-1}R_{12}'\alpha \\ R_{12}\left(\frac{1}{\xi}R_{22}^{-1}R_{12}'\alpha\right) &= \xi R_{11}\alpha\end{aligned}$$

Da wir zeigen wollen, dass α ein Eigenvektor einer bestimmten Matrix A ist, müssen wir die obige Gleichung noch in die Form $(A - \lambda I)\alpha = 0$ bringen.

$$\begin{aligned}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}\alpha &= \xi^2 R_{11}\alpha \\ R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}\alpha &= \xi^2\alpha \\ R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}\alpha - \xi^2\alpha &= 0 \\ (R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21} - \xi^2 I)\alpha &= 0\end{aligned}$$

Also muss α als Eigenvektor von $R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$ gewählt werden. Der passende Eigenwert zu diesem Eigenvektor ist ξ^2.

Aufgabe 2

(a) Wir untersuchen ein durchschnittliches Geschmacksempfinden bei verschiedenen Gruppen. Der F-Test mit Wilks Lambda bietet sich hier an.

(b) $H_0 : \mu_{\text{Männer}} = \mu_{\text{Frauen}}$ vs. $H_1 : \mu_{\text{Männer}} \neq \mu_{\text{Frauen}}$

(c) Wir müssen hierzu eine große Menge an Variablen berechnen:

$$\begin{aligned}
W &= (11-1)S_X + (11-1)S_Y \\
T &= (22-1)S_Z \\
\Lambda &= \frac{\det(W)}{\det(T)} = \frac{132447}{218572.5} = 0.6060 \\
s &= \sqrt{\frac{k^2(g-1)^2-4}{k^2+(g-1)^2-5}} = 1 \\
\nu_1 &= k(g-1) = 3 \\
\nu_2 &= s\left[(n-1) - \frac{k+g}{2}\right] - \frac{k(g-1)-2}{2} = 18 \\
F &= \frac{1-\Lambda^{\frac{1}{s}}}{\Lambda^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} = 3.901
\end{aligned}$$

(d) Aus der Tabelle kann man einen kritischen Wert von $F_{3,18;0.95} = 3.16$ ablesen. Das heißt wie lehnen H_0 ab. Es gibt also einen Geschmacksunterschied zwischen Männern und Frauen.

Aufgabe 3

Hier gibt es eine ähnliche Vorgehensweise wie bei Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 0.398 \\
s &= 1 \\
\nu_1 &= 4 \\
\nu_2 &= 5 \\
F &= 1.8907
\end{aligned}$$

Der kritische Wert ist hier $F_{4,5;0.95} = 6.26$. Wir lehnen H_0 nicht ab, es scheint also keinen Unterschied zwischen Kindern im Sportverein und nicht im Sportverein zu geben.