Multivariate Statistik, Übung 2

Henry Haustein

Aufgabe 1

(a) Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2^2 = (0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,1) - 4 = 1,6$$

(b) Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25 = 2,5$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2,5^2 = (0^2 \cdot 0,25 + 3^2 \cdot 0,25 + 3^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,25) - 6,25 = 2,25$$

Aufgabe 2

Der Spektralsatz gibt uns, dass die Matrizen P und P' unitär sind, also die Zeilen (und Spalten) bezüglich des Standardskalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthonormal sind. Das bedeutet $\langle z_i, z_i \rangle = 1$ für eine Zeile z_i und $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Daraus ergibt sich

$$P \cdot P' = I$$

Aufgabe 3

Wir nutzen wieder den Spektralsatz und zerlegen A in $P \cdot D \cdot P'$, wobei $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(P \cdot D \cdot P') \\ &= \mathrm{tr}(P' \cdot P \cdot D) \\ &= \mathrm{tr}(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Ich werde im nachfolgenden statt $\mathbb{E}(X)$ μ schreiben.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}((X-\mu)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mu^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$