Formale Systeme

Aussagenlogik - Probeklausur im November 2018

Prof. Dr. Steffen Hölldobler

Aufgabe 1

Aussagenlogische Formel
- Wenn F ein Atom ist, dann ist F eine Formel.
- Wenn F eine Formel ist, dann ist $\not F$ eine Formel.
- Wenn F und G Formeln sind, dann ist auch $F \circ G$ eine Formel, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Aussagenlogische Interpretation
- Eine Interpretation $I = (W, \cdot^I)$ besteht aus der Menge der Wahrheitswerte W und
- einer Abbildung $\cdot^I : L(R) \rightarrow W$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$[F]^I = \begin{cases} {}^{\star}\!/[G]^I & \text{wenn } F \text{ von der Form } \not G \text{ ist} \\ [G_1]^I \circ^{\star} [G_2]^I & \text{wenn } F \text{ von der Form } (G_1 \circ G_2) \text{ ist} \end{cases}$$

Tautologie
- F ist allgemeingültig, wenn für alle Interpretationen $I = (W, +^I)$ gilt: $F^I = \top$.

Aussagenlogische Konsequenz
- F ist genau dann eine Konsequenz einer Menge von Formeln $\mathcal{G}$, symbolisch $\mathcal{G} \models F$,
- wenn für jede Interpretation $I = (W, +^I)$ gilt:
- wenn I Modell für $\mathcal{G}$ ist, dann ist I auch Modell für F.

Konjunktive Normalform
- CNF ist von der Form einer verallgemeinerten Konjunktion $\langle C_1, \dots, C_m \rangle$ mit $m \geq 0$ und
- jedes C_j mit $1 \leq j \leq m$ ist einer Klausel von der Form $[L_1, \dots, L_n]$, wobei $L_i, i = 1, \dots n$ ein Literal ist.

Aufgabe 2

(a) falsch

(b) wahr

(c) falsch

(d) wahr

(e) wahr

(f) falsch

(g) wahr

(h) wahr

Aufgabe 3

- (2 Punkte) Sei I eine Interpretation, die alle aussagenlogische Variablen in $\mathcal{R}$ auf $\top$ abbildet.
- (2 Punkte) Also ist I ein Modell für jede definite Klausel. Sei dazu $[A, l_1, \ldots, L_m]$ eine definite Klausel, bei der A ein positives Literal ist.

$$\begin{aligned}[A, l_1, \ldots, L_m]^I &= [(A \vee [L_1 \vee \cdots \vee L_m])]^I \\ &= [A]^I \vee^\star [L_1 \vee \cdots \vee L_m]^I \\ &= \top \vee^\star [L_1 \vee \cdots \vee L_m]^I \\ &= \top\end{aligned}$$

- (2 Punkte) Damit ist I ein Modell für eine Konjunktion von definiten Klauseln, d.h. für eine Formel in Klauselform, die nur definite Klauseln enthält.

Aufgabe 4

Die Aussage ist falsch. (0.5 Punkte)
Betrachte dazu die Formel $F = (p \vee p)$. (1.5 Punkte)
Dann ist

- $|\mathcal{S}(F)| = |\{(p \vee p), p\}| = 2$
- $|\mathcal{P}_F| = |\{\Lambda, 1\Lambda, 2\Lambda\}| = 3$

Aufgabe 5

- (1 Punkt) Es gibt 2^{2^n} verschiedene Äquivalenzklassen bezüglich $\mathcal{L}(\mathcal{R}, n)$ definiert durch $\equiv$.
- (2 Punkte) Also gibt es maximal $k \leq 2^{2^n}$ unterschiedliche Äquivalenzklassen bezüglich $\mathcal{G}_n$ definiert durch $\equiv$.
- (2 Punkte) Es gibt ein Modell I für die Formeln $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k \in \mathscr{G}_n$, die die k Äquivalenzklassen repräsentieren,
- (2 Puntke) da $\{\mathcal{G}_1, \ldots \mathcal{G}_k\}$ eine echte Teilmenge von F ist.

- (1 Punkt) Diese Interpretation ist also auch ein Modell für $\mathscr{G}_n$,
- (1 Punkt) da mit jedem $\mathcal{G}_i$ auch alle anderen Formeln der gegebenen Äquivalenzklasse auf wahr unter I abgebildet werden.