

Thema: Gruppen - Ordnung - Index

Übung 6

Ist $\#G = p$ eine Primzahl, so ist $G = \langle g \rangle$ für ein $g \in G$.

Lösung:

Da $p \geq 2$ ist, existiert ein vom neutralen Element verschiedenes Element $g \in G$.

$\Rightarrow \langle g \rangle \leq G$

Nach dem Satz von Lagrange gilt $\text{ord}(g) \mid \#G = p$. Da g nicht das neutrale Element der Gruppe G ist, muss $\text{ord}(g) = \#\langle g \rangle \geq 2$ und damit $\text{ord}(g) = \#\langle g \rangle = p$. Folglich ist also $G = \langle g \rangle$.

Übung 7

Sei $f : G \rightarrow H$ ein Epimorphismus endlicher Gruppen. Zeigen Sie, dass $|f^{-1}(h)| = |\text{Ker}(f)|$ für jedes $h \in H$. Schließen Sie, dass $\#G = \#H \cdot \#\text{Ker}(f)$.

Lösung:

Es sei $h \in H$.

f surjektiv $\Rightarrow \exists g_0 \in G : f(g_0) = h$

Für $g \in \text{Ker}(f)$ gilt

$$f(g \cdot g_0) = f(g) \cdot f(g_0) = 1 \cdot h = h$$

d.h. die Abbildung $\varphi : \text{Ker}(f) \rightarrow f^{-1}(h), g \mapsto \varphi(g) := g \cdot g_0$ ist wohldefiniert.

▷ φ ist surjektiv: Sei $g \in f^{-1}(h)$. Dann haben wir

$$f(g \cdot g_0^{-1}) = f(g) \cdot f(g_0)^{-1} = h \cdot h^{-1} = 1,$$

d.h. $g \cdot g_0^{-1} \in \text{Ker}(f)$ und $\varphi(g \cdot g_0^{-1}) = g \cdot g_0^{-1} \cdot g_0 = g$.

▷ φ ist injektiv: Es seien $g_1, g_2 \in \text{Ker}(f)$ mit $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, d.h. $g_1 \cdot g_0 = g_2 \cdot g_0$
 $\Rightarrow g_1 = g_2$.

▷ Dann ist φ bijektiv, d.h. $|f^{-1}(h)| = |\text{Ker}(f)|$.

Die Urbilder von h sind disjunkt, denn: Für $h \neq h' \in H$ haben wir

$$f^{-1}(h) = \{g \in G : f(g) = h\}$$

$$f^{-1}(h') = \{g \in G : f(g) = h'\}$$

Ist $g \in f^{-1}(h) \cap f^{-1}(h')$, so ist $h = f(g) = h'$ im Widerspruch zur Annahme $h \neq h'$.

Aus $G = \bigsqcup_{h \in H} f^{-1}(h)$ folgt

$$\begin{aligned} |G| &= \left| \bigsqcup_{h \in H} f^{-1}(h) \right| = \sum_{h \in H} |f^{-1}(h)| \\ &= \sum_{h \in H} |\text{Ker}(f)| \\ &= |\text{Ker}(f)| \cdot |H| \end{aligned}$$

Übung 8

Zeigen Sie: Für $k, n \in \mathbb{N}$ ist $\text{ord}(k + n\mathbb{Z}) = \frac{\text{kgV}(k, n)}{k} = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}$.

Lösung:

Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Außerdem sei $d = \text{ggT}(k, n)$. Dann existieren $k_1, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} k &= d \cdot k_1 \\ n &= d \cdot n_1 \\ \text{ggT}(k_1, n_1) &= 1 \end{aligned}$$

Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} m \cdot (k + n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow n \mid m \cdot k \\ &\Leftrightarrow d \cdot n_1 \mid m \cdot d \cdot k_1 \\ &\Leftrightarrow n_1 \mid m \cdot k_1 \\ &\Leftrightarrow n_1 \mid m \end{aligned}$$

Dann ist $\text{ord}(k + n\mathbb{Z}) = n_1 = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}$.

Übung 17 (Präsenz)

Zeigen oder widerlegen Sie:

Genau dann kommutieren Zykel $\tau_1, \tau_2 \in S_n$, wenn sie disjunkt sind.

Lösung:

Die Rückrichtung ist richtig laut Vorlesung (vgl. 1.13). Für die Hinrichtung verwenden wir folgendes Gegenbeispiel: Sei $\tau_1 = (1\ 2) = \tau_2$. Dann ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ aber offensichtlich ist $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1 = \tau_2 \neq \emptyset$.

Übung 18 (Präsenz)

Zeigen oder widerlegen Sie:

- a) Sind $K, N \leq G$, so ist $K \cup N \leq G$.
- b) Sind $K, N \leq G$, so ist $K \cdot N \leq G$.

Lösung:

- a) Die Aussage ist falsch. Sei dazu $K := (2\mathbb{Z}, +)$ und $N := (3\mathbb{Z}, +)$. Dann ist $2 \in 2\mathbb{Z}$ und $3 \in 3\mathbb{Z}$, aber $2 + 3 = 5 \notin K \cup N$ und $K \cup N$ ist somit nicht abgeschlossen bezüglich der Addition.
- b) Auch diese Aussage ist falsch. Betrachte dazu $K := \{\text{id}, (1\ 2)\} \leq S_3$ und $N := \{\text{id}, (1\ 3)\} \leq S_3$. Dann ist $K \cdot N = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)\} \not\leq S_3$ nach dem Satz von Lagrange, da $|KN| = 4 \nmid 6 = \#S_3$.

Thema: Gruppen

Übung 19

Übung

Lösung:
Lösung

Thema: Gruppenwirkungen, Sylowgruppen

Übung 47

Für $n \geq 2$ ist $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$.

Lösung:

Sei $G = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ und $c = (12 \dots n)$. Nach Ü26 gilt für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$:

$$c \circ (12) \circ c^{-1} = (c^i(1) \ c^i(2)) = (i+1 \ i+2)$$

Dann gilt $\{(12), (23), (34), \dots, (n-1 \ n)\} \subseteq G$. Aus V44 folgt dann $G = S_n$.

Übung 48

Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$. Zeigen Sie: Ist $(G : S) < p$, so ist $S \trianglelefteq G$.

Lösung:

Schreibe $\#G = p^n \cdot m$ mit $n \geq 0$ und $p \nmid m$. Es sei n_p die Kardinalität von $\text{Syl}_p(G)$. Aus den Sylow-Sätzen folgt $n_p \equiv 1 \pmod p$ und $n_p \mid m = (G : S)$ (da $|S| = p^n$ und nach Lagrange ist $(G : S) = |G| : |S| = p^n \cdot m : p^n = m$). Insbesondere gilt $n_p \leq (G : S)$ und $p \mid n_p - 1$. Ist $n_p \neq 1$, so ist $p \leq n_p - 1 \leq n_p \leq (G : S)$, was unmöglich ist. Deswegen ist $n_p = 1$, d.h. $S \trianglelefteq G$ (vgl. 8.7: $S \trianglelefteq G \Leftrightarrow \#\text{Syl}_p(G) = 1$).

Übung 49

Seien $H_1, H_2 \leq G$. Die Wirkung von $\Gamma := H_1 \times H_2$ auf $X := H_1 H_2 \subseteq G$ durch $x^{(h_1, h_2)} := h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2$ ist transitiv. Bestimmen Sie $\Gamma_1 = \text{Stab}(1)$ und folgern Sie, dass

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$$

Lösung:

▷ Betrachte die Abbildung

$$\psi: \begin{cases} H_1 H_2 \times (H_1 \times H_2) & \rightarrow H_1 H_2 \\ (x, (h_1, h_2)) & \mapsto h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2 \end{cases}$$

Für jedes $x \in H_1 H_2$ gilt $x = g_1 \cdot g_2$ mit $g_1 \in H_1$ und $g_2 \in H_2$. Dann gilt

$$h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2 = \underbrace{h_1^{-1} g_1}_{\in H_1} \cdot \underbrace{g_2 h_2}_{\in H_2} \in H_1 H_2$$

Deswegen ist ψ definiert.

▷ ψ ist Wirkung.

– Für alle $x \in H_1 H_2$ ist $X^{(1,1)} = 1^{-1} \cdot x \cdot 1 = x$

– Für alle $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (l_1, l_2) \in H_1 \times H_2$ gilt

$$\begin{aligned} ((g_1 g_2)^{(h_1, h_2)})^{(l_1, l_2)} &= (h_1^{-1} g_1 g_2 h_2)^{(l_1, l_2)} = l_1^{-1} h_1^{-1} g_1 g_2 h_2 l_2 \\ &= (h_1 l_1)^{-1} g_1 g_2 (h_2 l_2) = (g_1 g_2)^{(h_1 l_1, h_2 l_2)} \\ &= (g_1 g_2)^{(h_1, h_2) \cdot (l_1, l_2)} \end{aligned}$$

▷ ψ ist transitiv: Es seien $x, y \in H_1 H_2$. Schreibe wieder $x = g_1 g_2$ mit $g_1 \in H_1, g_2 \in H_2$ und $y = l_1 l_2$ mit $l_1 \in H_1, l_2 \in H_2$. Dann gilt

$$y = l_1 l_2 = l_1 g_1^{-1} g_1 g_2 g_2^{-1} l_2 = \underbrace{(g_1 l_1^{-1})^{-1}}_{\in H_1} \cdot x \cdot \underbrace{(g_2^{-1} l_2)}_{\in H_2}$$

▷ Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}(1) &= \{(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2 : 1^{(g_1, g_2)} = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2 : g_1^{-1} \cdot 1 \cdot g_2 = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in H_1 \times H_2 : g_1 = g_2\} \\ &\cong H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

▷ Deswegen gilt

$$\begin{aligned} |H_1 \cdot H_2| &\stackrel{\text{transitiv}}{=} \# 1^{H_1 \times H_2} \stackrel{6.11}{=} (H_1 \times H_2 : \text{Stab}(1)) \\ &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{|H_1 \times H_2|}{|\text{Stab}(1)|} = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} \end{aligned}$$

Übung 50

Jede Gruppe der Ordnung 20 ist isomorph zu einem semidirekten Produkt $C_4 \rtimes_{\alpha} C_5$ oder $V_4 \rtimes_{\alpha} C_5$.

Lösung:

Es sein G eine endliche Gruppe und n_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G . Nach den Sylow-Sätzen ist $n_5 = 1 \pmod{5}$ und $n_5 \mid 4$. Deswegen gilt $n_5 = 1$. G hat genau eine 5-Sylowgruppe, die wir mit N_5 bezeichnen. Nach 8.7 ist $N_5 \trianglelefteq G$. Es sei N_2 eine 2-Sylowgruppe von G ; es gilt $|N_2| = 4$ (vgl. dazu 8.2: $\#G = p^k \cdot m$ mit $p \nmid m \Rightarrow 20 = 2^2 \cdot 5 \Rightarrow H \in \text{Syl}_2(G) \Rightarrow |H| = p^k = 4$). Da $\text{ggT}(4, 5) = 1$ gilt $|N_5 \cap N_2| = 1$, d.h. $N_5 \cap N_2 = \{1\}$. Es gilt auch

$$|N_5 \cdot N_2| = \frac{|N_5| \cdot |N_2|}{|N_5 \cap N_2|} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20 = |G|$$

d.h. $N_5 \cdot N_2 = G$. Mit 5.6 bekommen wir $G \cong N_2 \rtimes_{\alpha} N_5$. Aber wegen $N_5 \cong C_5$ und $N_2 \cong C_3$ oder $N_2 \cong V_4$ (vgl. dazu 7.7 und 4.8 und V4) gilt $C_4 \rtimes_{\alpha} C_5$ oder $V_4 \rtimes_{\alpha} C_5$.

Übung 63 (Präsenz)

Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe G und einer G -Menge X mit $G_x = \text{Stab}(x) \not\trianglelefteq G$ für ein $x \in X$.

Lösung:

Sei $n \geq 3$. Betrachte die natürliche Wirkung von S_n auf $\{1, \dots, n\}$

$$\psi: \begin{cases} \{1, \dots, n\} \times S_n & \rightarrow S_n \\ (\sigma, i) & \mapsto i^{\sigma} = \sigma(i) \end{cases}$$

Es gilt $\text{Stab}(n) = \{\sigma \in S_n : \sigma(n) = n\}$. Aber $\text{Stab}(n) \not\trianglelefteq S_n$:

$$(1 \ n) \circ \underbrace{(1 \ 2 \cdots n-1)}_{\in \text{Stab}(n)} \circ (1 \ n) \stackrel{\text{Ü26}}{=} (n \ 2 \cdots n-1) \notin \text{Stab}(n)$$

Übung 64 (Präsenz)

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Genau dann ist G eine p -Gruppe, wenn $\text{ord}(g)$ für jedes $g \in G$ eine p -Potenz ist.

Lösung:

Wir betrachten beide Richtungen der Äquivalenz.

(\Rightarrow) Ist G eine p -Gruppe, so ist $\text{ord}(p)$ Teiler der Ordnung von G für jedes $g \in G$ (Lagrange), d.h. $\text{ord}(g)$ ist eine p -Potenz für jedes $g \in G$, da $\#G$ eine p -Potenz ist.

(\Leftarrow) Umgekehrt sei G eine endliche Gruppe mit

$$\forall g \in G \ \exists n \in \mathbb{N} : \text{ord}(g) = p^n \tag{1}$$

Es sei q eine Primzahl, die $\#G$ teilt. Nach dem Satz von Cauchy (7.3) gilt: $\exists g \in G : \text{ord}(g) = q$. Aus Gleichung (1) folgt $\text{ord}(g) = q = p$. Deswegen ist G eine p -Gruppe.

Übung 65 (Präsenz)

Es seien G eine endliche Gruppe der Ordnung 39 und X eine G -Menge der Kardinalität 23. Zeigen Sie, dass X einen Fixpunkt unter G hat.

Lösung:

Aus $\#G = 39$ und $|X| = 23$, dem Satz von Lagrange und 6.11 gilt $\#x^G \in \{1, 3, 13, 39\}$ für alle $x \in X$. Es seien a die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 1, b die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 3, c die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 13. Dann gilt $23 = a + 3b + 13c$, insbesondere gilt $c \in \{0, 1\}$ (da $13 \cdot 2 = 26 > 23$). Ist $c = 0$, so gilt $23 = a + 3b$. Ist $a = 0$, so ist $23 = 3b$, was unmöglich ist, also $a \geq 1$. Ist $c = 1$, so gilt $a + 3b = 10$. Ist $a = 0$, so gilt $3b = 10$, was unmöglich ist. Deswegen gilt $a \geq 1$.

Bemerkung: Der Stabilisator G_{x_0} besteht aus den $g \in G$, die x_0 als Fixpunkt haben.

Thema: Sylow-Sätze, einfache Gruppen, auflösbare Gruppen

Übung 66 (Vorbereitung)

Sei $\Delta := \{(g, g) : g \in G\}$. Dann ist $\Delta \leq G \times G$. Ist G abelsch, so ist $\Delta \trianglelefteq G \times G$ und $(G \times G)/\Delta \cong G$. Ist G nicht abelsch, so ist $\Delta \not\trianglelefteq G \times G$

Lösung:

Wir präsentieren hier nur die Lösung für den Teil $(G \times G)/\Delta \cong G$. Betrachte dazu die Abbildung

$$f: \begin{cases} G \times G & \rightarrow G \\ (g_1, g_2) & \mapsto f(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2^{-1} \end{cases}$$

Da G abelsch ist, ist f ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G : f((g_1, g_2) \cdot (g_3, g_4)) &= f(g_1 g_3, g_2 g_4) \\ &= g_1 g_3 \cdot (g_2 g_4)^{-1} \\ &= g_1 g_2^{-1} g_3 g_4^{-1} \\ &= f(g_1, g_2) \cdot f(g_3, g_4) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass f surjektiv ist, da alle $g \in G$ dargestellt werden können als $f(g_1, 1) = g$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : f(g_1, g_2) = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 \cdot g_2^{-1} = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 = g_2\} \\ &= \Delta \end{aligned}$$

Mit 3.9 aus der Vorlesung schließen wir nun $(G \times G)/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f) \Leftrightarrow (G \times G)/\Delta \cong G$.

Übung 68

Bestimmen Sie die Anzahl der k -Zykel $\sigma \in S_n$ für $k \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Es seien $n \geq 1$ und $k \geq 1$. Ist $k > n$, so gibt es keinen k -Zykel in S_n . Ist $k \leq n$, so gibt es genau

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k}$$

k -Zykel in S_n , bzw. in anderer Darstellungsweise ist die Anzahl der k -Zykel in S_n

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k}$$

Betrachte zur Veranschaulichung

$$(a_1 a_2 \cdots a_k) = (a_2 a_3 \cdots a_k a_1) = (a_3 a_4 \cdots a_k a_1 a_2) = \cdots$$

Übung 69

Ist G endlich und einfach und $H \leq G$ mit $n = (G : H) \geq 2$, so ist $\#G \mid n!$.

Lösung:

Betrachte die folgende Abbildung

$$\psi: \begin{cases} H \backslash G \times G & \rightarrow G \\ (Hg_1, g_2) & \mapsto (Hg_1)^{g_2} = Hg_1g_2 \end{cases}$$

ψ ist eine Wirkung:

$$(i) \quad \forall g \in G : (Hg)^1 = Hg \cdot 1 = Hg$$

$$(ii) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G : ((Hg_1)^{g_2})^{g_3} = (Hg_1g_2)^{g_3} = Hg_1g_2g_3 = (Hg_1)^{g_2 \cdot g_3}$$

Betrachte den Kern der Wirkung

$$\varphi: \begin{cases} G & \rightarrow S_{(H \backslash G)} \\ g & \mapsto \varphi(g) : H \backslash G \rightarrow H \backslash G, Hl \mapsto (Hl)^g \end{cases} \quad (\text{vgl. 6.3})$$

$$\text{mit } \text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \forall l \in G : (Hl)^g = Hl\}$$

Da G einfach ist und $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$, gilt $\text{Ker}(\varphi) = 1$ oder $\text{Ker}(\varphi) = G$. Ist $\text{Ker}(\varphi) = 1$, so ist $G \cong \text{Im}(\varphi)$ nach 3.9, insbesondere gilt $\#G = \#\text{Im}(\varphi)$ und $|S_{H \backslash G}| = (G : H)! = n!$. Ist $\text{Ker}(\varphi) = G$, so gilt $H = G$:

▷ $H \subseteq G$ ist klar

▷ $G \subseteq H$. Es reicht zu zeigen, dass $\text{Ker}(\varphi) \subseteq H$ gilt. Sei $g \in \text{Ker}(\varphi)$, d.h. für alle $l \in G$ ist $Hlg = Hl$. Insbesondere ist für $l = 1$ dann $Hg = H$, d.h. also $g \in H$.

Es ist also $G = H$, was jedoch falsch ist, da $(G : H) \geq 2$. Somit ist $\text{Ker}(\varphi) = G$ nicht möglich.

Übung 70

Keine Gruppe der Ordnung 312, 12 oder 300 ist einfach.

Lösung:

To be continued.