1 σ-Algebren und Maße

Definition 1
Eine σ-Algebra über einer Grundmenge $X \neq \emptyset$ ist eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Mengen mit

(Σ_1) $X \in \mathcal{A}$
(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^{\complement} = X \setminus A \in \mathcal{A}$
(Σ_1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Satz 2
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X.

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$
b) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}$ mittels (Σ_3).
c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (Schnitt = Vereinigung von Komplementen, de Morgan)
d) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$
e) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beispiel 3
Die üblichen Beispiele $\mathcal{P}(X), \{\emptyset, X\}, \ldots$ sind klar.

- **Spur-σ-Algebra.** $E \subseteq X$ beliebig, $\mathcal{A}$ σ-Algebra in X. $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_E := \{E \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ ist σ-Algebra.
- **Urbild-σ-Algebra.** $f\colon X \to X'$ eine Abbildung, X, X' Mengen, $\mathcal{A}'$ sei σ-Algebra in X'. Dann ist $\mathcal{A} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$ eine σ-Algebra.

Definition 4
Die von $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) := \{U \subseteq \mathbb{R}^d : U \text{ offen}\}$ erzeugte σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ heißt *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Definition 5
Ein Maß ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

(M_0) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra.
(M_1) $\mu(\emptyset) = 0$.
(M_2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt. $\Rightarrow$ $\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \in \mathcal{A}$

Ein Maß μ heißt *endlich*, falls $\mu(X) < \infty$ und *σ-endlich*, falls

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}, A_n \uparrow X : \mu(A_n) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Theorem 6 (Eindeutigkeitssatz)
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum, μ, ν zwei Maße und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Weiter sei $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil und $\exists (G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}, G_n \uparrow X : \mu(G_n), \nu(G_n) < \infty$. Dann gilt

$$\forall G \in \mathcal{G} : \mu(G) = \nu(G) \;\Rightarrow\; \forall A \in \sigma(\mathcal{G}) : \mu(A) = \nu(A)$$
$$\forall G \in \mathcal{G} : \mu|_G = \nu|_G \;\Rightarrow\; \mu = \nu$$

Beweis. Beweisidee: Wunschkonzert
Zeige, dass $\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Dynkin-System ist ($X \in \mathcal{D}$, $D^{\complement} \in \mathcal{D}$, $\biguplus_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$).
Verwende die Eigenschaft $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$ für $\cap$-stabile $\mathcal{G}$ um zu zeigen, dass $\mathcal{A} = \mathcal{D}_j$
Nutze Maßstetigkeit um $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n) \rightsquigarrow \mu(A) = \nu(A)$. □

Theorem 7 (Fortsetzungssatz nach Carathéodory)
Sei $\mathcal{S}$ ein Halbring über X und $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ein Prämaß, d.h. $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\forall (S_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}, \text{ paarweise disjunkt und } \biguplus_{i \in \mathbb{N}} S - i \in \mathcal{S} : \quad \mu\left(\biguplus_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S_i)$$

Dann existiert eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$.
Wenn $(G_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}, G_i \uparrow X, \mu(G_i) < \infty$ gilt, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

Satz 8
λ^1 ist Prämaß auf $\mathcal{I}$.

Beweis. Beweisidee:
(M_1) ist wegen $\emptyset = [a, a)$ klar.