Übungsblatt 1

Geometrie

Eric Kunze
Übungsleiter: Dr. F. Legrand

Thema: Gruppen - Ordnung - Index

Übung 6

Ist $\#G = p$ eine Primzahl, so ist $G = \langle g \rangle$ für ein $g \in G$.

Lösung:
Da $p \geq 2$ ist, existiert ein vom neutralen Element verschiedenes Element $g \in G$.
$\Rightarrow \quad \langle g \rangle \leq G$
Nach dem Satz von Lagrange gilt $\operatorname{ord}(g) \mid \#G = p$. Da g nicht das neutrale Element der Gruppe G ist, muss $\operatorname{ord}(g) = \#\langle g \rangle \geq 2$ und damit $\operatorname{ord}(g) = \#\langle g \rangle = p$. Folglich ist also $G = \langle g \rangle$.

Übung 7

Sei $f : G \to H$ ein Epimorphismus endlicher Gruppen. Zeigen Sie, dass $\left|f^{-1}(h)\right| = |\operatorname{Ker}(f)|$ für jedes $h \in H$. Schließen Sie, dass $\#G = \#H \cdot \#\operatorname{Ker}(f)$.

Lösung:
Es sei $h \in H$.
f surjektiv $\quad \Rightarrow \quad \exists\, g_0 \in G : f(g_0) = h$
Für $g \in \operatorname{Ker}(f)$ gilt

$$f(g \cdot g_0) = f(g) \cdot f(g_0) = 1 \cdot h = h$$

d.h. die Abbildung $\varphi : \operatorname{Ker}(f) \to f^{-1}(h), g \mapsto \varphi(g) := g \cdot g_0$ ist wohldefiniert.

- $\triangleright$ φ ist surjektiv: Sei $g \in f^{-1}(h)$. Dann haben wir

  $$f(g \cdot g_0^{-1}) = f(g) \cdot f(g_0)^{-1} = h \cdot h^{-1} = 1,$$

  d.h. $g \cdot g_0^{-1} \in \operatorname{Ker}(f)$ und $\varphi(g \cdot g_0^{-1}) = g \cdot g_0^{-1} \cdot g_0 = g$.
- $\triangleright$ φ ist injektiv: Es seien $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker}(f)$ mit $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, d.h. $g_1 \cdot g_0 = g_2 \cdot g_0$
  $\Rightarrow \quad g_1 = g_2$.
- $\triangleright$ Dann ist φ bijektiv, d.h. $\left|f^{-1}(h)\right| = |\operatorname{Ker}(f)|$.

  Die Urbilder von h sind disjunkt, denn: Für $h \neq h' \in H$ haben wir

  $$f^{-1}(h) = \{g \in G : f(g) = h\}$$
  $$f^{-1}(h') = \{g \in G : f(g) = h'\}$$

  Ist $g \in f^{-1}(h) \cap f^{-1}(h')$, so ist $h = f(g) = h'$ im Widerspruch zur Annahme $h \neq h'$.

  Aus $G = \bigsqcup_{h \in H} f^{-1}(h)$ folgt

  $$\begin{aligned} |G| = \left| \bigsqcup_{h \in H} f^{-1}(h) \right| &= \sum_{h \in H} \left|f^{-1}(h)\right| \\ &= \sum_{h \in H} |\operatorname{Ker}(f)| \\ &= |\operatorname{Ker}(f)| \cdot |H| \end{aligned}$$

Übung 8
Zeigen Sie: Für $k, n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{ord}(k + n\mathbb{Z}) = \frac{\operatorname{kgV}(k,n)}{k} = \frac{n}{\operatorname{ggT}(k,n)}$.

Lösung:
Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Außerdem sei $d = \operatorname{ggT}(k, n)$. Dann existieren $k_1, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} k &= d \cdot k_1 \\ n &= d \cdot n_1 \\ \operatorname{ggT}(k_1, n_1) &= 1 \end{aligned}$$

Für $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} m \cdot (k + n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow n \mid m \cdot k \\ &\Leftrightarrow d \cdot n_1 \mid m \cdot d \cdot k_1 \\ &\Leftrightarrow n_1 \mid m \cdot k_1 \\ &\Leftrightarrow n_1 \mid m \end{aligned}$$

Dann ist $\operatorname{ord}(k + n\mathbb{Z}) = n_1 = \frac{n}{\operatorname{ggT}(k,n)}$.

Übung 17 (Präsenz)
Zeigen oder widerlegen Sie:
Genau dann kommutieren Zykel $\tau_1, \tau_2 \in S_n$, wenn sie disjunkt sind.

Lösung:
Die Rückrichtung ist richtig laut Vorlesung (vgl. 1.13). Für die Hinrichtung verwenden wir folgendes Gegenbeispiel: Sei $\tau_1 = (1\ 2) = \tau_2$. Dann ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ aber offensichtlich ist $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1 = \tau_2 \neq \emptyset$.

Übung 18 (Präsenz)
Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Sind $K, N \leq G$, so ist $K \cup N \leq G$.

b) Sind $K, N \leq G$, so ist $K \cdot N \leq G$.

Lösung:

a) Die Aussage ist falsch. Sei dazu $K := (2\mathbb{Z}, +)$ und $N := (3\mathbb{Z}, +)$. Dann ist $2 \in 2\mathbb{Z}$ und $3 \in 3\mathbb{Z}$, aber $2 + 3 = 5 \notin K \cup N$ und $K \cup N$ ist somit nicht abgeschlossen bezüglich der Addition.

b) Auch diese Aussage ist falsch. Betrachte dazu $K := \{\operatorname{id}, (1\,2)\} \leq S_3$ und $N := \{\operatorname{id}, (1\,3)\} \leq S_3$. Dann ist $K \cdot N = \{\operatorname{id}, (1\,2), (1\,2), (1\,2)(1\,3) = (1\,3\,2)\} \not\leq S_3$ nach dem Satz von Lagrange, da $|KN| = 4 \nmid 6 = \#S_3$.

Übungsblatt 2

Geometrie

Eric Kunze
Übungsleiter: Dr. F. Legrand

Thema: Normalteiler, abelsche Gruppen, Produkte

Übung 24

Es seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Wenn G/H mit dem Komplexprodukt eine Gruppe bildet, so ist $H \trianglelefteq G$.

Lösung:
Angenommen, G/H mit dem Komplexprodukt wäre eine Gruppe.

Zunächst zeigen wir, dass H das neutrale Element von G/H ist. Es sei g_0H das neutrale Element von G/H. Für jedes $g \in G$ gilt $gH \cdot g_0H = g_0H \cdot gH = gH$. Insbesondere gilt $g \cdot g_0 = g \cdot 1 \cdot g_0 \cdot 1 \in gH \cdot g_0H = gH$, das heißt es existiert $h \in H$ mit $gg_0 = g \cdot H$. Deswegen gilt $g_0 = h$, somit $g_0H = H$.

Jetzt zeigen wir, dass H Normalteiler von G ist. Sei $g \in G$. Aus $H \cdot gH = gH$ folgt $gH \subseteq H \cdot gH = gH$, das heißt $H \subseteq gHg^{-1}$. Analog bekommen wir $H \subseteq g^{-1}Hg$, das heißt $gHg^{-1} \subseteq H$. Deswegen gilt $gHg^{-1} = H$, also $gH = Hg$. Mit 3.3 schließen wir, dass $H \trianglelefteq G$.

Übung 25

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $S_n = \langle(1\,2)\rangle \ltimes A_n$.

Lösung:
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Nach 5.6 ist zu zeigen, dass $A_n \trianglelefteq S_n$, $A_n \cap \langle(1\,2)\rangle = \{\mathrm{id}\}$ und $\langle(1\,2)\rangle \cdot A_n = S_n$ gelten. Da A_n der Kern des Homomorphismus $\mathrm{sgn} : S_n \to \mu_2$ ist, gilt $A_n \trianglelefteq S_n$ (vgl. 3.5). Aus $(1\,2) \notin A_n$ folgt $A_n \cap \langle(1\,2)\rangle = \{\mathrm{id}\}$. Dann zeigen wir, dass $H = \langle(1\,2)\rangle \cdot A_n = S_n$ gilt. Es sei $\sigma \in S_n$. Ist $\sigma \in A_n$, so gilt $\sigma = \mathrm{id} \cdot \sigma \in H$. Ist $\sigma \notin A_n$, so gelten $(1\,2) \cdot \sigma \in A_n$ und $\sigma = (1\,2) \cdot ((1\,2) \cdot \sigma) \in H$.

Alternativer Beweis für die dritte Eigenschaft: Wir wissen, dass $A_n \subsetneqq H \leq S_n$, und da $(S_n : A_n) = 2$ prim ist, folgt aufgrund der Multiplikativität des Index schon, dass $H = S_n$.

Übung 27

Zeigen Sie: Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 6, nämlich C_6 und S_3.

Lösung:
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung 6. Aus dem Satz von Lagrange gilt $\mathrm{ord}(g) \in \{1, 2, 3, 6\}$ für jedes $g \in G$.

- ▷ Ist $\mathrm{ord}(g) \in \{1, 2\}$ für jedes $g \in G$, so ist G abelsch (vgl. W2). Aus 4.8 und $\#G = 6$ folgt $G \cong C_6$, was unmöglich ist, da C_6 ein Element der Ordnung 6 hat.
- ▷ Somit gibt es ein $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) \in \{3, 6\}$. In beiden Fällen, gibt es ein $g_1 \in G$ mit $\mathrm{ord}(g_1) = 3$ (ist $\mathrm{ord}(g) = 6$, so ist $\mathrm{ord}(g^2) = 3$). Außerdem gibt es $g_2 \in G$ mit $\mathrm{ord}(g_2) = 2$ (vgl. H10). Dann bekommen wir: $\langle g_1\rangle \trianglelefteq G$ (vgl. P41), $\langle g_1\rangle \cap \langle g_2\rangle = \{1\}$ (da $\mathrm{ggT}(2, 3) = 1$) und $\langle g_1\rangle \cdot \langle g_2\rangle = G$ mit dem selben Argument wie in Ü25. Somit ist $G = \langle g_2\rangle \ltimes \langle g_1\rangle$ (vgl. 5.6). Aus 5.12 folgt dann $G \cong C_6$ oder $G \cong S_3$.

Übung 28
Zu welcher Ihnen bekannten Gruppe ist $\mathrm{Aut}(V_4)$ isomorph?

Lösung:
Aus W4 ergibt sich $\mathrm{Aut}(V_4) \cong \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2) = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)$ (siehe auch V44). Aber $\mathbb{F}_2^2$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum und die Automorphismen der Gruppe $\mathbb{F}_2^2$ sind genau die $\mathbb{F}_2$-Automorphismen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathbb{F}_2^2$. Somit ist $\mathrm{Aut}(V_4) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$, die eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 6 ist (zählen Sie einfach die Elemente der $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2)$ auf). Mit Ü27 schließen wir, dass $\mathrm{Aut}(V_4) \cong S_3$.

Direkt sieht man dies so: Die V_4 hat neben dem neutralen Element e der Ordnung 1 noch drei Elemente der Ordnung 2, und jede Permutation σ dieser 3 Elemente der Ordnung 2 setzt sich durch $\sigma(e) = e$ zu einer Permutation der Menge V_4 fort. Nun muss man allerdings nachprüfen, dass $\sigma : V_4 \to V_4$ auch tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

Übung 41 (Präsens)
Sei $H \leq G$. Zeige oder widerlege:

a) $(G\colon H) = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$

b) $(G\colon H) = 3 \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Lösung:

a) richtig. Angenommen $H \ntrianglelefteq G$. Sei $h \in H$ mit $hH = H = Hh$ und $g \in G \setminus H$ mit $gH \neq Hg$. Wegen $(G\colon H) = 2$ gilt $gH = H$, das heißt $\exists H \in H$ mit $gh \in H$. Dann folgt

$$\underbrace{gh}_{\in H} \cdot \underbrace{h^{-1}}_{\in H} = g \in H$$

was im Widerspruch zu $g \in G \setminus H$ steht. Also ist $H \trianglelefteq G$.

b) falsch, zum Beispiel $(S_3\colon \langle (1\,2) \rangle) = 3$, aber

$$(1\,3)\langle (1\,2) \rangle = \{(1\,3), (1\,3\,2)\}$$
$$\langle (1\,2) \rangle (1\,3) = \{(1\,3), (1\,2\,3)\}$$

Übungsblatt 3

Geometrie

Eric Kunze
Übungsleiter: Dr. F. Legrand

Thema: Gruppenwirkungen, Sylowgruppen

Übung 47

Für $n \geq 2$ ist $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$.

Lösung:
Sei $G = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ und $c = (12 \dots n)$. Nach Ü26 gilt für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$:

$$c \circ (12) \circ c^{-1} = (c^i(1) \;\; c^i(2)) = (i+1 \;\; i+2)$$

Dann gilt $\{(12), (23), (34), \dots, (n-1 \;\; n)\} \subseteq G$. Aus V44 folgt dann $G = S_n$.

Übung 48

Sei $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Zeigen Sie: Ist $(G : S) < p$, so ist $S \trianglelefteq G$.

Lösung:
Schreibe $\#G = p^n \cdot m$ mit $n \geq 0$ und $p \nmid m$. Es sei n_p die Kardinalität von $\mathrm{Syl}_p(G)$. Aus den Sylow-Sätzen folgt $n_p = 1 \mod p$ und $n_p \mid m = (G : S)$ (da $|S| = p^n$ und nach Lagrange ist $(G : S) = |G| : |S| = p^n \cdot m : p^n = m$). Insbesondere gilt $n_p \leq (G : S)$ und $p \mid n_p - 1$. Ist $n_p \neq 1$, so ist $p \leq n_p - 1 \leq n_p \leq (G : S)$, was unmöglich ist. Deswegen ist $n_p = 1$, d.h. $S \trianglelefteq G$ (vgl. 8.7: $S \trianglelefteq G \;\Leftrightarrow\; \#\,\mathrm{Syl}_p(G) = 1$)

Übung 49

Seien $H_1, H_2 \leq G$. Die Wirkung von $\Gamma := H_1 \times H_2$ auf $X := H_1 H_2 \subseteq G$ durch $x^{(h_1,h_2)} := h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2$ ist transitiv. Bestimmen Sie $\Gamma_1 = \mathrm{Stab}(1)$ und folgern Sie, dass

$$|H_1 H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$$

Lösung:

- ▷ Betrachte die Abbildung

  $$\psi\colon \begin{cases} H_1 H_2 \times (H_1 \times H_2) & \to \quad H_1 H_2 \\ (x, (h_1, h_2)) & \mapsto \quad h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2 \end{cases}$$

  Für jedes $x \in H_1 H_2$ gilt $x = g_1 \cdot g_2$ mit $g_1 \in H_1$ und $g_2 \in H_2$. Dann gilt

  $$h_1^{-1} \cdot x \cdot h_2 = \underbrace{h_1^{-1} g_1}_{\in H_1} \cdot \underbrace{g_2 h_2}_{\in H_2} \in H_1 H_2$$

  Deswegen ist ψ definiert.

- ▷ ψ ist Wirkung.
  - Für alle $x \in H_1 H_2$ ist $X^{(1,1)} = 1^{-1} \cdot x \cdot 1 = x$

– Für alle $(g_1,g_2),(h_1,h_2),(l_1,l_2) \in H_1 \times H_2$ gilt

$$\begin{aligned}((g_1g_2)^{(h_1,h_2)})^{(l_1,l_2)} &= (h_1^{-1}g_1g_2h_2)^{(l_1,l_2)} = l_1^{-1}h_1^{-1}g_1g_2h_2l_2 \\ &= (h_1l_1)^{-1}g_1g_2(h_2l_2) = (g_1g_2)^{(h_1l_1,h_2l_2)} \\ &= (g_1g_2)^{(h_1,h_2)\cdot(l_1,l_2)}\end{aligned}$$

▷ ψ ist transitiv: Es seien $x,y \in H_1H_2$. Schreibe wieder $x = g_1g_2$ mit $g_1 \in H_1, g_2 \in H_2$ und $y = l_1l_2$ mit $l_1 \in H_1, l_2 \in H_2$. Dann gilt

$$y = l_1l_2 = l_1g_1^{-1}g_1g_2g_2^{-1}l_2 = \underbrace{(g_1l_1^{-1})^{-1}}_{\in H_1} \cdot x \cdot \underbrace{(g_2^{-1}l_2)}_{\in H_2}$$

▷ Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}(1) &= \{(g_1,g_2) \in H_1 \times H_2 : 1^{(g_1,g_2)} = 1\} \\ &= \{(g_1,g_2) \in H_1 \times H_2 : g_1^{-1} \cdot 1 \cdot g_2 = 1\} \\ &= \{(g_1,g_2) \in H_1 \times H_2 : g_1 = g_2\} \\ &\cong H_1 \cap H_2\end{aligned}$$

▷ Deswegen gilt

$$\begin{aligned}|H_1 \cdot H_2| &\overset{\text{transitiv}}{=} \#1^{H_1 \times H_2} \overset{6.11}{=} (H_1 \times H_2 : \mathrm{Stab}(1)) \\ &\overset{\text{Lagrange}}{=} \frac{|H_1 \times H_2|}{|\mathrm{Stab}(1)|} = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}\end{aligned}$$

Übung 50

Jede Gruppe der Ordnung 20 ist isomorph zu einem semidirekten Produkt $C_4 \ltimes_\alpha C_5$ oder $V_4 \ltimes_\alpha C_5$.

Lösung:

Es sein G eine endliche Gruppe und n_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G. Nach den Sylow-Sätzen ist $n_5 = 1 \mod 5$ und $n_5 \mid 4$. Deswegen gilt $n_5 = 1$. G hat genau eine 5-Sylowgruppe, die wir mit N_5 bezeichnen. Nach 8.7 ist $N_5 \trianglelefteq G$. Es sei N_2 eine 2-Sylowgruppe von G; es gilt $|N_2| = 4$ (vgl. dazu 8.2: $\#G = p^k \cdot m$ mit $p \nmid m \Rightarrow 20 = 2^2 \cdot 5 \Rightarrow H \in \mathrm{Syl}_2(G) \Rightarrow |H| = p^k = 4$). Da $\mathrm{ggT}(4,5) = 1$ gilt $|N_5 \cap N_2| = 1$, d.h. $N_5 \cap N_2 = \{1\}$. Es gilt auch

$$|N_5 \cdot N_2| = \frac{|N_5| \cdot |N_2|}{|N_5 \cap N_2|} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20 = |G|$$

d.h. $N_5 \cdot N_2 = G$. Mit 5.6 bekommen wir $G \cong N_2 \ltimes_\alpha N_5$. Aber wegen $N_5 \cong C_5$ und $N_2 \cong C_3$ oder $N_2 \cong V_4$ (vgl. dazu 7.7 und 4.8 und V4) gilt $C_4 \ltimes_\alpha C_5$ oder $V_4 \ltimes_\alpha C_5$.

Übung 63 (Präsenz)

Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe G und einer G-Menge X mit $G_x = \mathrm{Stab}(x) \ntrianglelefteq G$ für ein $x \in X$.

Lösung:

Sei $n \geq 3$. Betrachte die natürliche Wirkung von S_n auf $\{1,\dots,n\}$

$$\psi \colon \begin{cases} \{1,\dots,n\} \times S_n & \to \quad S_n \\ (\sigma, i) & \mapsto \quad i^\sigma = \sigma(i) \end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{Stab}(n) = \{\sigma \in S_n : \sigma(n) = n\}$. Aber $\mathrm{Stab}(n) \ntrianglelefteq S_n$:

$$(1\ \ n) \circ \underbrace{(1\ \ 2 \cdots n-1)}_{\in \mathrm{Stab}(n)} \circ (1\ \ n) \overset{\text{Ü26}}{=} (n\ \ 2 \cdots n-1) \notin \mathrm{Stab}(n)$$

Übung 64 (Präsenz)
Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Genau dann ist G eine p-Gruppe, wenn $\mathrm{ord}(g)$ für jedes $g \in G$ eine p-Potenz ist.

Lösung:
Wir betrachten beide Richtungen der Äquivalenz.

($\Rightarrow$) Ist G ein p-Gruppe, so ist $\mathrm{ord}(p)$ Teiler der Ordnung von G für jedes $g \in G$ (Lagrange), d.h. $\mathrm{ord}(g)$ ist eine p-Potenz für jedes $g \in G$, da $\#G$ eine p-Potenz ist.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei G eine endliche Gruppe mit

$$\forall g \in G\ \ \exists n \in \mathbb{N} : \mathrm{ord}(g) = p^n \qquad (\star)$$

Es sei q eine Primzahl, die $\#G$ teilt. Nach dem Satz von Cauchy (7.3) gilt: $\exists g \in G : \mathrm{ord}(g) = q$. Aus Gleichung $(\star)$ folgt $\mathrm{ord}(g) = q = p$. Deswegen ist G eine p-Gruppe.

Übung 65 (Präsenz)
Es seien G eine endliche Gruppe der Ordnung 39 und X eine G-Menge der Kardinalität 23. Zeigen Sie, dass X einen Fixpunkt unter G hat.

Lösung:
Aus $\#G = 39$ und $|X| = 23$, dem Satz von Lagrange und 6.11 gilt $\#x^G \in \{1, 3, 13, 39\}$ für alle $x \in X$. Es seien a die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 1, b die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 3, c die Anzahl der Bahnen der Kardinalität 13. Dann gilt $23 = a + 3b + 13c$, insbesondere gilt $c \in \{0, 1\}$ (da $13 \cdot 2 = 26 > 23$). Ist $c = 0$, so gilt $23 = a + 3b$. Ist $a = 0$, so ist $23 = 3b$, was unmöglich ist, also $a \geq 1$. Ist $c = 1$, so gilt $a + 3b = 10$. Ist $a = 0$, so gilt $3b = 10$, was unmöglich ist. Deswegen gilt $a \geq 1$.

Bemerkung: Der Stabilisator G_{x_0} besteht aus den $g \in G$, die x_0 als Fixpunkt haben.

Übungsblatt 4

Geometrie

Eric Kunze
Übungsleiter: Dr. F. Legrand

Thema: Sylow-Sätze, einfache Gruppen, auflösbare Gruppen

Übung 66 (Vorbereitung)

Sei $\Delta := \{(g,g) : g \in G\}$. Dann ist $\Delta \leq G \times G$. Ist G abelsch, so ist $\Delta \trianglelefteq G \times G$ und $(G \times G)/\Delta \cong G$. Ist G nicht abelsch, so ist $\Delta \ntrianglelefteq G \times G$

Lösung:
Wir präsentieren hier nur die Lösung für den Teil $(G \times G)/\Delta \cong G$. Betrachte dazu die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} G \times G & \to & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & f(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2^{-1} \end{cases}$$

Da G abelsch ist, ist f ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G : f((g_1, g_2) \cdot (g_3, g_4)) &= f(g_1 g_3, g_2 g_4) \\ &= g_1 g_3 \cdot (g_2 g_4)^{-1} \\ &= g_1 g_2^{-1} g_3 g_4^{-1} \\ &= f(g_1, g_2) \cdot f(g_3, g_4) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass f surjektiv ist, da alle $g \in G$ dargestellt werden können als $f(g_1, 1) = g$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : f(g_1, g_2) = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 \cdot g_2^{-1} = 1\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 = g_2\} \\ &= \Delta \end{aligned}$$

Mit 3.9 aus der Vorlesung schließen wir nun $(G \times G)/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (G \times G)/\Delta \cong G$.

Übung 68

Bestimmen Sie die Anzahl der k-Zykel $\sigma \in S_n$ für $k \in \mathbb{N}$.

Lösung:
Es seien $n \geq 1$ und $k \geq 1$. Ist $k > n$, so gibt es keinen k-Zykel in S_n. Ist $k \leq n$, so gibt es genau

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1)}{k}$$

k-Zykel in S_n, bzw. in anderer Darstellungsweise ist die Anzahl der k-Zykel in S_n

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k}$$

Betrachte zur Veranschaulichung

$$(a_1\, a_2 \cdots a_k) = (a_2\, a_3 \cdots a_k\, a_1) = (a_3\, a_4 \cdots a_k\, a_1\, a_2) = \cdots$$

Übung 69
Ist G endlich und einfach und $H \leq G$ mit $n = (G : H) \geq 2$, so ist $\#G \mid n!$.

Lösung:
Betrachte die folgende Abbildung

$$\psi\colon \begin{cases} H\backslash G \times G & \to & G \\ (Hg_1, g_2) & \mapsto & (Hg_1)^{g_2} = Hg_1g_2 \end{cases}$$

ψ ist eine Wirkung:

(i) $\forall g \in G: \quad (Hg)^1 = Hg \cdot 1 = Hg$

(ii) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G: \quad ((Hg_1)^{g_2})^{g_3} = (Hg_1g_2)^{g_3} = Hg_1g_2g_3 = (Hg_1)^{g_2 \cdot g_3}$

Betrachte den Kern der Wirkung

$$\varphi\colon \begin{cases} G & \to & S_{(H\backslash G)} \\ g & \mapsto & \varphi(g) : H\backslash G \to H\backslash G, Hl \mapsto (Hl)^g \end{cases} \quad \text{(vgl. 6.3)}$$

mit$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \forall l \in G : (Hl)^g = Hl\}$
Da G einfach ist und $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$, gilt $\mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ oder $\mathrm{Ker}(\varphi) = G$. Ist $\mathrm{Ker}(\varphi) = 1$, so ist $G \cong \mathrm{Im}(G)$ nach 3.9, insbesondere gilt $\#G = \#\,\mathrm{Im}(\varphi)$ und $|S_{H\backslash G}| = (G : H)! = n!$. Ist $\mathrm{Ker}(\varphi) = G$, so gilt $H = G$:

- ▷ $H \subseteq G$ ist klar
- ▷ $G \subseteq H$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq H$ gilt. Sei $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, d.h. für alle $l \in G$ ist $Hlg = Hl$. Insbesondere ist für $l = 1$ dann $Hg = H$, d.h. also $g \in H$.

Es ist also $G = H$, was jedoch falsch ist, da $(G : H) \geq 2$. Somit ist $\mathrm{Ker}(\varphi) = G$ nicht möglich.

Übung 70
Keine Gruppe der Ordnung 312, 12 oder 300 ist einfach.

Lösung:
Wir zeigen die Eigenschaft nicht einfach zu sein für die entsprechenden Gruppen nacheinander.

(1) Sei G eine Gruppe der Ordnung $312 = 2 \cdot 156 = 2 \cdot 2 \cdot 78 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$. Sei n_{13} die Anzahl der 13-Sylowgruppen von G. Nach den Sylowsätzen gilt $n_{13} \equiv 1 \mod 13$ und $n_{13} \mid 24$. Die Teiler von 24 sind genau $1, 24, 2, 12, 3, 8, 4, 6$. Deswegen ist $n_{13} = 1$, d.h. es gibt genau eine 13-Sylowgruppe N_{13} von G. Mit 8.7 ist $N_{13} \trianglelefteq G$. Da $\#G = 312$ und $\#N_{13} = 13$, ist $1 \neq N_{13} \neq G$, also ist G nicht einfach.

(2) Ist G eine endliche Gruppe der Ordnung $12 = 2^3 \cdot 3$. Es seien n_2 die Anzahl der 2-Sylowgruppen von G und n_3 die Anzahl der 3-Sylowgruppen von G. Nach den Sylowsätzen gilt

$$\begin{cases} n_2 \equiv 1 \mod 12 \\ n_2 \mid 3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 4 \end{cases}$$

d.h. $n_2 \in \{1, 3\}$ und $n_3 \in \{1, 4\}$. Ist $n_3 = 4$, so schreibe N_1, N_2, N_3, N_4 für die vier 3-Sylowgruppen von G. Da $|N_1| = |N_2| = |N_3| = |N_4| = 3$ und $N_i \cap N_j = 1$ für $i \neq j$ (da 3 prim ist), besitzt G mindestens acht Elemente der Ordnung 3:

- $N_1 = \{1, a_1, b_1\}$ mit $\mathrm{ord}(a_1) = 3 = \mathrm{ord}(b_1)$
- $N_2 = \{1, a_2, b_2\}$ mit $\mathrm{ord}(a_2) = 3 = \mathrm{ord}(b_2)$

Ist $a_1 = a_2$, so ist $|N_1 \cap N_2| \geq 2$, was falsch ist. Sei nun $n_2 = 3$. Schreibe K_1, K_2, K_3 für die drei 2-Sylowgruppen von G. Da $|K_1| = |K_2| = |K_3| = 4$, besitzt G mindestens vier Elemente von Ordnung 2 oder 4. Insgesamt gilt $n_3 = 4$ und $n_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 12 = \#G = 8 + 4 + 1 = 13$ (8 Elemente der Ordnung 3, 4 Elemente der Ordnung 2 oder 4 und ein neutrales Element), was falsch ist. Deswegen gilt $n_3 = 1$ oder $n_2 = 1$. In jedem Fall ist G aber nicht einfach.

(3) Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $300 = 30 \cdot 10 = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Es sei n_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G. Nach den Sylowsätzen gilt $n_5 \equiv 1 \mod 5$ und $n_5 \mid 12$, d.h. auf jeden Fall ist $n_5 \in \{1, 6\}$. Es sei N_5 eine 5-Sylowgruppe von G. Ist $n_5 = 6$, so ist $(G : \mathrm{N}_G(N_5)) = 6$ (vgl. 8.6). Ist G auch einfach so gilt $\#G = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \mid 6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ (vgl. Ü49), was falsch ist (vergleiche die beiden Primfaktorenzerlegungen). Deswegen gilt $n_5 = 1$ oder G ist nicht einfach. In jedem Fall aber ist G nicht einfach.

Übung 81 (Präsenz)

Geben Sie ein Beispiel einer endlichen Gruppe G, die

(i) einfach und auflösbar ist

(ii) nicht einfach und auflösbar ist

(iii) einfach und nicht auflösbar ist

(iv) nicht einfach und nicht auflösbar ist.

Lösung:
Wir geben jeweils ein Beispiel an und zeigen, dass die entsprechenden Eigenschaften gelten.

(i) Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist einfach (vgl. 9.3). Dann besitzt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Kompositionsreihe $1 \trianglelefteqslant \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist zyklisch. Somit ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auflösbar.

(ii) Die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist nicht einfach, da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ einen Normalteiler der Ordnung 2 besitzt. Außerdem besitzt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ die Normalreihe $1 \lhd \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, die eine Kompositionsreihe ist, da

- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist einfach
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist einfach

Da die Faktoren dieser Kompositonsreihe zyklisch sind, ist $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ auflösbar.

(iii) Mit 9.11 ist A_5 einfach. Deswegen besitzt A_5 *genau* eine Kompositonsreihe $1 \lhd A_5$. Da $A_5/1 \cong A_5$ nicht zyklisch ist, ist A_5 nicht auflösbar.

(iv) Die Gruppe S_5 ist nicht einfach, da $(S_5 : A_5) = 2$ und $A_5 \lhd S_5$. Da die Normalteiler der S_5 genau 1, A_5 und S_5 sind und S_5 nicht einfach ist, besitzt die S_5 genau eine Kompositionsreihe, nämlich $1 \lhd A_5 \lhd S_5$. Es gilt $S_5/A_5 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A_5/1 \cong A_5$ ist nicht zyklisch. Deswegen ist die S_5 nicht auflösbar.

Übung 82 (Präsenz)

Für welche $n \geq 1$ ist $S_n \cong A_n \times C_2$?

Lösung:
Leider gab es dazu keine Lösung in der Übung.

Übungsblatt 6

Geometrie

Eric Kunze
Übungsleiter: Dr. F. Legrand

Übung 106 (Vorbereitung)

Berechnen Sie $\operatorname{ggT}(n, 2019)$ mit dem euklidischen Algorithmus, wobei n Ihr Geburtsjahr ist.

Lösung:
Sei $n = 1999$. Dann folgt mit dem euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} 2019 &= 1 \cdot 1999 + 20 \\ 1999 &= 99 \cdot 20 + 19 \\ 20 &= 1 \cdot 19 + 1 \\ 19 &= 19 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\operatorname{ggT}(1999, 2019) = 1$, was bereits klar ist, da 1999 prim ist.

Übung 107 (Vorbereitung)

Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$13x + 17y = \operatorname{ggT}(13, 17) \tag{1}$$

Bestimmen Sie außerdem $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$13x + 17y = 3 \tag{2}$$

Lösung:
Mit dem euklidischen Algorithmus folgt

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 13 + 4 \\ 13 &= 4 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Durch Rückwärtseinsetzen der Reste ausgehend von der vorletzten Gleichung erhalte wir

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \\ &= 13 - 3 \cdot (17 - 13) \\ &= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 \end{aligned}$$

Somit ist $(x, y) = (4, -3)$ eine Lösung von Gleichung (1). Multiplizieren wir die Gleichung mit dem Faktor 3, so ist $(x, y) = (12, -9)$ eine Lösung von Gleichung (2).

Übung 108 (Vorbereitung)

$\mathbb{Z}[X]$ und $K[X, Y]$ sind keine Hauptidealringe.

Lösung:
Um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist, betrachten wir das Ideal $(2, X)$ und zeigen, dass dies wirklich ein Ideal ist. Wir zeigen hier nur die Abgeschlossenheit unter Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{Z}[X]$. Sei dazu $f \in \mathbb{Z}[X]$, dann ist

$$f \cdot (a \cdot 2 + b \cdot X) = f \cdot a \cdot 2 + f \cdot b \cdot X = \underbrace{(f \cdot a)}_{\in \mathbb{Z}[X]} \cdot 2 + \underbrace{(f \cdot b)}_{\in \mathbb{Z}[X]} \cdot X \in (2, X)$$

Für $K[X, Y]$ ist beispielsweise (X, Y) ein Ideal und damit $K[X, Y]$ kein Hauptidealring.

Übung 110
Definiere $R_0 = R$ und $R_{i+1} := R_i[X_{i+1}]$. Dann ist $R_n \cong R[X_1, \dots, X_n]$.

Lösung:
Wir lösen die Aufgabe durch vollständige Induktion über $n \geq 0$. Für $n = 0$ gilt $R_0 = R$. Für $n = 1$ gilt $R_1 = R_0[X_1] = R[X_1]$. Sei daher nun $n > 1$. Wir setzen voraus, dass es Isomorphismen $\Phi_n \colon R_n \to R[X_1, \dots, X_n]$ sowie $\Psi_n \colon R[X_1, \dots, X_n] \to R_n$ gibt mit

$$\begin{aligned} \Phi_n \circ \Psi_n &= \mathrm{id}_{R[X_1,\dots,X_n]} \\ \Psi_n \circ \Phi_n &= \mathrm{id}_{R_n} \end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n|_R &= \mathrm{id}_R \\ \Psi_n|_R &= \mathrm{id}_R \end{aligned} \tag{3b}$$

$$\Psi_n(X_i) = \Phi_n(X_i) = X_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \tag{3c}$$

Betrachte die Abbildung

$$\iota \colon \begin{cases} R & \to & R_{n+1} \\ x & \mapsto & x \end{cases} \tag{4}$$

Mit Ü89 gibt es dann $\Psi_{n+1} \colon R[X_1, \dots X_{n+1}] \to R_{n+1}$ mit $\Psi_{n+1}(X_i) = X_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$ und $\Psi_{n+1}(x) = \iota(x) = x$ für alle $x \in R$.

Betrachte die Abbildung

$$\kappa \colon \begin{cases} R_n & \to & R[X_1, \dots, X_{n+1}] \\ x & \mapsto & \Phi_n(x) \end{cases} \tag{5}$$

Mit Ü89 gibt es $\Phi_{n+1} \colon R_n[X_{i+1}] \to R[X_1, \dots, X_{n+1}]$ mit

$$\Phi_{n+1}(X_{n+1}) = X_{n+1} \text{ und} \tag{6a}$$

$$\Phi_{n+1}(x) = \Phi_n(x) \text{ für alle } x \in R_n \tag{6b}$$

Da $\Psi_n(x) \overset{(3b)}{=} x$ für jedes $x \in R$ und $\Psi_n(X_i) \overset{(3c)}{=} X_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt auch $\Psi_{n+1}|_{R[X_1,\dots,X_n]} = \Psi_n$.

Übung 111
Es sei R nullteilerfrei und $\iota \colon R \to K := \mathrm{Quot}(R)$. Beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers: Ist L ein Körper und $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, L)$ injektiv, so gibt es genau ein $\varphi' \in \mathrm{Hom}(K, L)$ mit $\varphi' \circ \iota = \varphi$.

Lösung:
Es seien L ein Körper und $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, L)$ injektiv. Da φ injektiv ist, ist $\varphi(b) \neq 0$ für alle $b \in R \backslash \{0\}$. Betrachte die Abbildung

$$\psi \colon \begin{cases} K & \to & L \\ \frac{a}{b} & \mapsto & \varphi(\frac{a}{b} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} \end{cases}$$