Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Exame da Época Especial de **Álgebra Linear**

Engenharia Informática e Curso Europeu de Informática

9 de setembro de 2016 Duração: 3h00m

Nota: É necessário justificar convenientemente todas as respostas.

1ª PARTE

1. (1.25) Considere o número complexo $z = -1 + i$. Calcule z^8 e apresente o resultado na forma algébrica $a + bi$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 2 & 2\alpha - 3 & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha + 6 \end{bmatrix}$, onde α é um parâmetro de valor real.

   (a) (1.00) Determine todos os valores de α para os quais $\text{car}(A) = 3$.

   (b) (0.50) Indique um valor particular de α para o qual não exista a inversa de A.

   (c) (1.25) Supondo que $\alpha = 1$, calcule a inversa de A, usando a adjunta.

3. Uma matriz quadrada A diz-se *ortogonal* se $A^\top A = I$. Diga, justificando,

   (a) (1.00) Quais são os valores que o determinante de A pode tomar;

   (b) (0.75) Qual é a inversa de uma matriz ortogonal.

4. Considere a matriz $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (0.75) Calcule $\det(R)$ usando o desenvolvimento de Laplace na segunda coluna.

   (b) (1.00) Averigue se a matriz $A = \frac{1}{3}R$ é ortogonal.

   (c) (0.75) Sem calcular explicitamente a matriz $2A^3$, calcule o valor do seu determinante.

5. (1.75) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Usando o método de eliminação de Gauss, classifique e determine o conjunto solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(v.s.f.f.)

2ª PARTE

6. Considere os pontos do espaço $A(0,1,2)$, $B(1,3,4)$, $C(3,5,6)$. Determine:

   (a) (1.50) A equação do plano que contém os três pontos dados;

   (b) (0.75) A área do triângulo de vértices A, B e C.

7. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores $\mathbf{u} = (1,-1,2)$, $\mathbf{v} = (2,0,5)$ e $\mathbf{w} = (3,-5,5)$.

   (a) (1.00) Averigue se os três vectores dados formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) (1.00) Seja S o subespaço gerado pelos três vectores, isto é, $S = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Averigue se

   $$\mathbf{a} = (4,-2,9) \in S.$$

   (c) (1.00) Dada a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(x,y,z) = (x-y, yz),$$

   calcule $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ e explique se pode tirar alguma conclusão sobre a linearidade de T.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

   (a) (1.50) Determine o polinómio característico de A e conclua que $c(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

   (b) (0.75) Indique os valores próprios de A e as suas multiplicidades algébricas.

   (c) (1.50) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -2$.

   (d) (1.00) Averigue se A é diagonalizável.