Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 2 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

8 de Janeiro de 2015 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Mostre que:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n}\left(1-2^{-2}\right)$ é uma série de <u>Mengoli</u> <u>convergente</u> de <u>soma</u> $\frac{3}{8}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2^n)}{n^2}$ é uma série de <u>Dirichlet</u> <u>divergente</u>.

[2.0 *val.*] 2. Determine, justificando, a natureza das seguintes série numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)$.

[4.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int \boxed{\cdot}\, e^{3x}\,dx$.

Complete, justificando, o espaço assinalado com $\boxed{\cdot}$ por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata (Tabelas de Matemática, página 3):

(a) Regra 2; (b) Regra 3; (c) Regra 5; (d) Regra 19.

[2.0 *val.*] 4. Usando a técnica de primitivação por partes, determine $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx$.

[4.0 *val.*] 5. (a) Usando a técnica de primitivação de funções racionais, determine $\displaystyle\int \frac{6\,t^2}{t^2-1}\,dt$.

(b) Usando a mudança de variável indicada, mostre que a primitiva se reduz à primitiva da alínea (a) e estabeleça o respectivo resultado:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}\,-\,x}\,dx$$

m.v.: $\boxed{x=t^6}$, $t\in\,]0,\,1[\,\cup\,]1,\,+\infty[$

[6.0 *val.*] 6. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{\sin x}\,\sec^3 x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,(\ln x)\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \left(\frac{e}{1+e^2}\,+\,\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,x\right)dx$.

1. (a) Uma vez que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n}\left(1-2^{-2}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{-n}-2^{-n-2}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\underbrace{2^{-n}}_{u_n}-\underbrace{2^{-(n+2)}}_{u_{n+2}}\big)$$

então a série é de Mengoli com $p = 2$. Note-se agora que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{-n}-2^{-(n+2)}\right) = \left(2^{-2}-2^{-4}\right)+\left(2^{-3}-2^{-5}\right)+\left(2^{-4}-2^{-6}\right)+\left(2^{-5}-2^{-7}\right)+\dots$$

e como $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ é finito, então a série é convergente e tem soma

$$S = 2^{-2}+2^{-3}-\underbrace{p}_{=2}\times\underbrace{\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}}_{=0},$$

isto é, tem soma $S = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

(b) Tendo em conta as propriedades dos logaritmos, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(2^n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\log(2)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(2)}{n} = \log(2)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

Uma vez que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é uma série de Dirichlet divergente (porque $\alpha = 1$) então $\log(2)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ também é uma série divergente (por ser definida pelo produto de uma constante por uma série divergente).

2. (a) Comecemos por notar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{(2^2)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{4^n}.$$

Uma vez que

$$\frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{3^n}{4^n}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}\,\frac{4^n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

é constante então a série é geométrica de razão $R = \frac{3}{4}$ e portanto convergente (porque $|R| < 1$).

(b) Comecemos por notar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\dots+\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}+\dots,$$

e como

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\frac{\pi}{n}}_{\to 0}\Big) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

então a condição necessária de convergência permite concluir que a série é divergente (porque o limite do termo geral é diferente de zero).

3. Começamos por observar que existem múltiplas possibilidades para cada caso. No que se segue vamos apresentar algumas delas.

   (a) A regra 2 tem a forma $f^p f'$ pelo que se $f = e^{3x}$ e $p = 1$ então $f' = 3\,e^{3x}$ e portanto uma possibilidade é considerar

$$\int \boxed{3\,e^{3x}}\; e^{3x}\,dx \;=\; \frac{e^{3x}}{2} + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

   Outra possibilidade é considerar $f = e^x$ e $p = 3$. Nesse caso tem-se $f' = e^x$ e portanto

$$\int \boxed{e^x}\,\left(e^x\right)^3 dx \;=\; \frac{\left(e^x\right)^4}{4} + c \;=\; \frac{1}{4}\,e^{4x} + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) A regra 3 tem a forma $e^f f'$ pelo que se $f = 3x$ então $f' = 3$ e portanto um exemplo possível é

$$\int \boxed{3}\; e^{3x}\,dx \;=\; e^{3x} + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

   (c) A regra 5 tem a forma $\frac{f'}{f}$ pelo que se considerarmos $f = e^{3x}$ então $f' = 3\,e^{3x}$. Um exemplo possível é então

$$\int \boxed{\frac{3}{e^{3x}}}\; e^{3x}\,dx \;=\; \int \frac{3\,e^{3x}}{e^{3x}}\,dx \;=\; \ln\left(e^{3x}\right) + c \;=\; 3x + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

   Outra possibilidade é considerar $f = e^{-3x}$. Nesse caso tem-se $f' = -3\,e^{-3x}$ e portanto

$$\int \boxed{-3\,e^{-3x}}\; e^{3x}\,dx \;=\; \int \frac{-3\,e^{-3x}}{e^{-3x}}\,dx \;=\; \ln\left(e^{-3x}\right) + c \;=\; -3x + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

   (d) A regra 19 tem a forma $\frac{f'}{1+f^2}$ pelo que se considerarmos $f = e^{3x}$ então $f' = 3\,e^{3x}$. Um exemplo possível é então

$$\int \boxed{\frac{3}{1+e^{6x}}}\; e^{3x}\,dx \;=\; \int \frac{3\,e^{3x}}{1+\left(e^{3x}\right)^2}\,dx \;=\; \operatorname{arctg}\left(e^{3x}\right) + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

4. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx &= \int e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx = \\
&= \int \underbrace{e^x}_{d}\;\underbrace{e^x(e^x+1)^{\frac{1}{2}}}_{p}\,dx = \\
&= e^x\,\frac{(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int e^x\,\frac{(e^x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,dx = \\
&= \frac{2}{3}\,e^x\sqrt{(e^x+1)^3} - \frac{2}{3}\int e^x\,(e^x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = \\
&= \frac{2}{3}\,e^x\sqrt{(e^x+1)^3} - \frac{2}{3}\,\frac{(e^x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c\,,\; c \in \mathbb{R} = \\
&= \frac{2}{3}\,e^x\sqrt{(e^x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(e^x+1)^5} + c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Uma vez que a fracção é imprópria (grau do numerador = 2 = grau do denominador), o cálculo da primitiva será realizado recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples, começando pelo cálculo da divisão dos polinómios:

$$\begin{array}{rr|l} 6\,t^2 & & t^2-1 \\ \hline -(\,6\,t^2 & -6\ \ ) & 6 \\ \hline & 6 & \end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{6\,t^2}{t^2-1}}_{\text{fracção imprópria}} = 6 + \underbrace{\frac{6}{t^2-1}}_{\text{fracção própria}}.$$

A fracção própria resultante da divisão ainda não é primitivável de forma imediata pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples, o que é feito tendo por base os zeros do seu denominador. Como

$$t^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; t^2=1 \;\Leftrightarrow\; t=1 \vee t=-1\,,$$

a factorização real do denominador é definida por

$$t^2-1 \;=\; \big(t-1\big)\big(t-(-1)\big) \;=\; \big(t-1\big)\big(t+1\big)\,.$$

Cada uma das raízes reais, simples, do denominador determina uma fracção na soma de elementos simples da fracção própria:

$$\frac{\boxed{6}}{t^2-1} \;=\; \underbrace{\frac{A}{t-1}}_{\cdot(t+1)} + \underbrace{\frac{B}{t+1}}_{\cdot(t-1)} \;=\; \frac{\boxed{A(t+1)+B(t-1)}}{(t-1)(t+1)}\,.$$

Tendo agora em consideração a igualdade dos numeradores da primeira e última fracções, podemos considerar um sistema linear possível determinado de duas equações que permite determinar as duas incógnitas A e B. Esse sistema será obtido substituindo, na igualdade entre os numeradores, t pelos valores das raízes 1 e -1 (por exemplo):

$$\begin{array}{r|rcl} & 6 & = & A(t+1)+B(t-1) \\ \hline t=1 & 6 & = & 2\,A+0 \\ t=-1 & 6 & = & 0-2\,B \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A=3 \\ B=-3 \end{cases}.$$

Assim, a fracção imprópria inicial tem decomposição dada por

$$\underbrace{\frac{6\,t^2}{t^2-1}}_{\text{fracção imprópria}} \;=\; 6 + \underbrace{\frac{6}{t^2-1}}_{\text{fracção própria}} \;=\; 6 + \frac{3}{t-1} + \frac{-3}{t+1}$$

e a primitivação pode agora ser feita recorrendo a essa forma e à técnica de primitivação imediata:

$$\begin{aligned} \int \frac{6\,t^2}{t^2-1}\,dt &= \int \left(6 + \frac{3}{t-1} + \frac{-3}{t+1}\right)\,dt \\ &= \int 6\,dt + 3\int \frac{1}{t-1}\,dt - 3\int \frac{1}{t+1}\,dt \;= \\ &= 6\,t + 3\,\ln|t-1| - 3\,\ln|t+1| + c\,,\;\; c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(b) Considerando a mudança de variável apresentada, tem-se

$$\text{m.v.}: \boxed{x = t^6} \Rightarrow x' = 6\,t^5$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x\,\sqrt[3]{x} - x}\,dx \overset{x=t^6}{=} \int \frac{\sqrt{t^6}}{t^6\,\sqrt[3]{t^6} - t^6}\,6\,t^5\,dt \overset{t\geq 0}{=} \int \frac{t^3}{t^6\,(t^2-1)}\,6\,t^5\,dt = \int \frac{6\,t^2}{t^2-1}\,dt\,.$$

Tendo agora em consideração o resultado calculado na alínea (a) e o facto de

$$\boxed{x = t^6} \Rightarrow \sqrt[6]{x} = t$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{x\,\sqrt[3]{x} - x}\,dx &\overset{x=t^6}{=} \int \frac{6\,t^2}{t^2-1}\,dt = \\ &\overset{(a)}{=} 6\,t + 3\,\ln|t-1| - 3\,\ln|t+1| + c\,,\ c \in \mathbb{R} = \\ &\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 6\,\sqrt[6]{x} + 3\,\ln|\sqrt[6]{x}-1| - 3\,\ln|\sqrt[6]{x}+1| + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

6. (a) Tendo em conta a definição de secante e recorrendo às técnicas de primitivação para produtos de funções trigonométricas (Tabelas de Matemática, página 7), tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt[3]{\sin x}\,\sec^3 x}\,dx &= \int \frac{2}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{\cos^3 x}}\,dx = \\ &= \int 2\,(\sin x)^{-\frac{1}{3}}\,\cos^3 x\,dx = \\ &= \int 2\,(\sin x)^{-\frac{1}{3}}\,\cos^2 x\,\cos x\,dx = \\ &= \int 2\,(\sin x)^{-\frac{1}{3}}\,(1-\sin^2 x)\,\cos x\,dx = \\ &= \int 2\left((\sin x)^{-\frac{1}{3}} - (\sin x)^{\frac{5}{3}}\right)\cos x\,dx = \\ &= 2\int (\sin x)^{-\frac{1}{3}}\,\cos x\,dx - 2\int (\sin x)^{\frac{5}{3}}\,\cos x\,dx = \\ &= 2\,\frac{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 2\,\frac{(\sin x)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c\,,\ c \in \mathbb{R} = \\ &= 3\,\sqrt{\sin^3 x} - \frac{3}{4}\,\sqrt[3]{\sin^8 x} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{p}\,\underbrace{\operatorname{arctg}(\ln x)}_{d}\,dx &= \ln|x|\,\operatorname{arctg}(\ln x) - \int \ln|x|\,\frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln x)^2}\,dx = \\ &= \ln|x|\,\operatorname{arctg}(\ln x) - \frac{1}{2}\int \frac{2\,(\ln|x|)\,\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}\,dx = \\ &= \ln|x|\,\operatorname{arctg}(\ln x) - \frac{1}{2}\,\ln\left(1+\ln^2 x\right) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à decomposição das primitivas e à técnica de primitivação imediata, tem-se

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{e}{1+e^2} + \sec^2 x\,\operatorname{tg} x\right)dx &= \int \frac{e}{1+e^2}\,dx + \int \sec^2 x\,\operatorname{tg} x\,dx = \\ &= \frac{e}{1+e^2}\,x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$