Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Análise Matemática I

Apontamentos de Cálculo Integral

Autor:
Jorge Cruz

Supervisor:
Dra. Emília Bigotte

9 de Maio de 2014

Prefácio e Agradecimentos

Como eu me meti nisto?

No meu percurso académico, assimilei as dificuldades sentidas por muitos colegas quanto à matéria lecionada em Análise Matemática I, pelo que ponderei dentro das minhas possibilidades, contribuir para um melhor sucesso académico.

Hesitei contudo, em me aventurar a "resolver"e compilar os exercícios incluídos neste manual, mas a Dra. Emília Bigotte desde logo entendeu e apoiou a minha ideia e integrou-a no projeto de voluntariado do IPC.

Os exemplos dos exercícios resolvidos, retratados no presente manual constituem um complemento às matérias lecionadas na unidade curricular.

No fundo, com este manual pretendo por um lado agradecer às pessoas que contribuíram para o meu sucesso nesta UC, nomeadamente, a Dra. Emília Bigotte (Docente UC), a Dra. Emília Ferreira (Figueira da Foz) e a Dra. Ana Maria Silva (Licenciatura Matemática - via Ensino) por todo o apoio dado como textos matemáticos, frequências, apontamentos, livros, etc.., bem como a todos os (ex)colegas do ECS (principalmente os anti-chinas dos BadBoys e os LynceGamers) que comigo têm partilhado a aventura académica. E, por outro lado, dar o meu contributo à comunidade estudantil desta unidade curricular.

Jorge Miguel Antunes da Cruz

aluno nº 21190486 (ECS)

à Dra. Margarida Passos,

Aegroto dum anima est, spes est.

Conteúdo

Capítulo 1

Derivadas

1.1 Definição

Seja f uma função real de variável real definida em $[a,b]$, diz-se que f é derivável no ponto $x_0 \in [a,b]$ se $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (onde $x \neq x_0$) tem limite (constante ou ∞) quando x tende para x_0 sem sair do intervalo $[a,b]$. Sempre que este limite existe, chama-se-lhe **derivada de** f no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$.

1.2 Tabelas Derivadas

1.2.1 de Cálculo

$$(c)' = 0$$

$$(ax^n)' = nax^{n-1}$$

1.2.2 de Operação

$$(u \pm v)' = (u)' \pm (v')$$

$$(u * v)' = (u)'(v) + (v')(u)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u)'(v) - (v')(u)}{v^2}$$

$$(\sqrt[n]{a})' = \frac{(a)'}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$(a^n)' = na^{n-1}(a)'$$

1.2.3 de Funções

$$(e^u)' = (u)'e^u$$

$$(a^u)' = (u)'a^u \ln a$$

$$(\ln u)' = \frac{(u)'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{(u)'}{u \ln a}$$

$$(\sin u)' = (u)' \cos u$$

$$(\cos u)' = -(u)' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{(u)'}{\cos^2 u} = (u)' \sec^2 u$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = \frac{(-u)'}{\sin^2 u} = -(u)'\operatorname{cosec}^2 u$$
$$(\sec u)' = (u)' \sec u \operatorname{tg} u$$
$$(\operatorname{cosec} u)' = -(u)'\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$$
$$(\arcsin u)' = \frac{(u)'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(\arccos u)' = \frac{-(u)'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{(u)'}{1+u^2}$$

1.3 Exercícios

1. $y = x^5 + 4x^3 + 2x - 3$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (x^5)' + (4x^3)' + (2x)' - (3)' \\ &= 5x^4 + 12x^2 + 2 - 0 \\ &= 5x^4 + 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

2. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + (x^2)' - \left(\frac{1}{2}x^4\right)' \\ &= 0 - \frac{1}{3} + 2x - 2x^3 \\ &= -2x^3 + 2x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (ax^2)' + (bx)' + (c)' \\ &= 2ax + b + 0 \\ &= 2ax + b \end{aligned}$$

4. $y = -\frac{5x^3}{a}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= -\left(\frac{5x^3}{a}\right)' \\ &= -\left(\frac{5}{a}x^3\right)' \\ &= -\frac{15}{a}x^2 \end{aligned}$$

5. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{\pi}{x}\right)' + (\ln 2)' \\ &= \left(\pi\frac{1}{x}\right)' + 0 \\ &= -\pi x^{-2} \\ &= -\frac{\pi}{x^2} \end{aligned}$$

6. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(3x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(2x^{\frac{5}{2}}\right)' + (x^{-3})' \\ &= \left(\frac{2}{3}(3)x^{(\frac{2}{3}-1)}\right) - \frac{5}{2}(2)(x^{\frac{5}{2}-1}) + (-3)(x^{-3-1}) \\ &= 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4} \end{aligned}$$

7. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (x^2\sqrt[3]{x^2})' \\ &= ((x^2)(x)^{\frac{2}{3}})' \\ &= (x^{2+\frac{2}{3}})' \\ &= (x^{\frac{8}{3}})' \\ &= \left(\frac{8}{3}\right)(x^{\frac{8}{3}-1}) = \left(\frac{8}{3}\right)(x^{\frac{5}{3}}) \end{aligned}$$

8. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{2x+3}{x^2-5x+5}\right)' \\ &= \frac{(2x+3)'(x^2-5x+5) - (x^2-5x+5)'(2x+3)}{(x^2-5x+5)^2} \\ &= \frac{2(x^2-5x+5) - (2x-5)(2x+3)}{(x^2-5x+5)^2} \\ &= \frac{-2x^2-6+25}{(x^2-5x+5)^2} \end{aligned}$$

9. $y = 5\sin x + 3\cos x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (5\sin x)' + (3\cos x)' \\ &= (5)'\sin x + (\sin x)'5 + (3)'(\cos x) + (\cos x)'(3) \\ &= (x)'\cos x(5) + (-(x)'\sin x(3)) \\ &= 5\cos x - 3\sin x \end{aligned}$$

10. $y = \mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (\mathrm{tg}x)' - (\mathrm{cotg}x)' \\ &= (x)'\sec^2 x - (-(x)'\mathrm{cosec}^2 x) \\ &= \sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x \end{aligned}$$

11. $y = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arccotg}\, x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (\mathrm{arctg}x)' + (\mathrm{arccotg}\, x)' \\ &= \frac{(x)'}{1+x^2} + \frac{-(x)'}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

12. $y = x\mathrm{cotg}x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (x\mathrm{cotg}x)' \\ &= (x)'(\mathrm{cotg}x) + (\mathrm{cotg}x)'(x) \\ &= \mathrm{cotg}x + (-(x)'\mathrm{cosec}^2 x(x)) \\ &= \mathrm{cotg}x - x\mathrm{cosec}^2 x \end{aligned}$$

13. $y = x \arcsin x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (x \arcsin x)' \\ &= (x)' \arcsin x + (\arcsin x)'(x) \\ &= \arcsin x + \frac{(x)'}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

14. $y = x^7 e^x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (x^7)'(e^x) + (e^x)'(x^7) \\ &= 7x^6 e^x + (x)' e^x (x^7) \\ &= 7x^6 e^x + x^7 e^x \\ &= x^6 e^x (x+7) \end{aligned}$$

15. $y = (x-1)e^x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= ((x-1)e^x)' \\ &= (x-1)' e^x + (e^x)'(x-1) \\ &= e^x + e^x(x-1) \\ &= \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} \\ &= xe^x \end{aligned}$$

16. $y = \frac{e^x}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' \\ &= \frac{(e^x)'(x^2) - (x^2)'(e^x)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{e^x x^2 - (2xe^x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 e^x - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x \cancel{x}(x-2)}{x^{\cancel{4}}} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \end{aligned}$$

17. $y = \frac{x^5}{e^x}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{(x^5)' e^x - (e^x)' x^5}{(e^x)^2} \\ &= \frac{(5x^4)(e^x) - (e^x)(x^5)}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^{\cancel{x}}(5x^4 - x^5)}{(e^x)^{\cancel{2}}} \\ &= \frac{5x^4 - x^5}{e^x} \end{aligned}$$

18. $y = e^x \cos x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (e^x \cos x)' \\ &= (e^x)' \cos x + (\cos x)'(e^x) \\ &= e^x \cos x - \sin(x) e^x \end{aligned}$$

19. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= ((x^2 - 2x + 2)e^x)' \\ &= (x^2 - 2x + 2)'e^x + (e^x)'(x^2 - 2x + 2) \\ &= (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x + 2) \\ &= e^x((\cancel{2x} - \cancel{2}) + (x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2})) \\ &= e^x x^2 \end{aligned}$$

20. $y = e^x \arcsin x$

$$\begin{aligned} f'(y) &= (e^x \arcsin x)' \\ &= (e^x)' \arcsin x + (\arcsin x)' e^x \\ &= e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \end{aligned}$$

21. $y = \frac{x^2}{\ln x}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' \\ &= \frac{(x^2)' \ln x - (\ln x)' x^2}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x \ln x - \frac{x\cancel{^2}}{\cancel{x}}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x^2)} \end{aligned}$$

22. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)' + (2 \ln x)' - \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{-(x)'(1)}{x^2} + (\ln x)'(2) - \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x} - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{-2 + \ln x}{x^2} + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

23. $y = e^x$

$$f'(y) = (e^x)' = e^x$$

24. $y = e^{4x}$

$$f'(y) = (e^{4x})' = (4x)' e^{4x} = 4e^{4x}$$

25. $y = 5e^{2x} + 3$

$$f'(y) = (5e^{2x} + 3)' = (5e^{2x})' + (3)' = (2x)'(5e^{2x}) + 0 = 10e^{2x}$$

26. $y = \ln x$

$$f'(y) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

27. $y = \ln(x+5)$

$$f'(y) = (\ln(x+5))' = \frac{(x+5)'}{x+5} = \frac{1}{x+5}$$

28. $y = \ln(x) + 5$

$$f'(y) = (\ln(x)+5)' = (\ln x)' + (5)' = \frac{1}{x}$$

29. $y = \sin(3x)$

$$f'(y) = (\sin(3x))' = (3x)'\cos(3x) = 3\cos(3x)$$

30. $y = \sin(\ln x)$

$$f'(y) = (\sin(\ln x))' = (\ln x)'\cos\ln x = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

31. $y = \mathrm{tg} x^3$

$$f'(y) = (\mathrm{tg} x^3)' = (x^3)'\sec^2 x^3 = 3x^2\sec^2 x^3$$

Capítulo 2

Primitivas

2.1 Definição

Seja f uma função numérica definida em $[a, b]$. Diz-se que uma função F definida em $[a, b]$ é uma **primitiva de** f se, qualquer que seja $x \in [a, b]$:

1. existe derivada de F
2. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Designa-se a primitiva de uma função f definida sobre $[a, b]$ por $f(x)$, por:

$$\int f(x)\, dx$$

A primitivação é, de sua própria definição, a operação inversa da derivação. A primitivação conduz de $f(x)$ a $\int f(x)\, dx$, a derivação reconduz de $\int f(x)\, dx$ a $f(x)$.
Como duas funções que difiram por uma constante têm a mesma derivada, sendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$ também $F(x) + c$ é primitiva de $f(x)$. A expressão geral das primitivas de $f(x)$ é então:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

em que c é a constante de primitivação.

2.2 Regras

1. A primitiva do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela primitiva da função, isto é:
$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$
2. A primitiva da soma é a soma das primitivas (primitivação por decomposição), isto é:
$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$
3. A primitiva de zero é uma constante, isto é:
$$\int 0\, dx = c$$
4. A primitiva da unidade é a variável independente, isto é:
$$\int 1\, dx = x + c$$

Capítulo 3

Primitivas Imediatas

Chamam-se primitivas imediatas pois estas dependem diretamente de uma Regra de Derivação.

3.1 1º Caso (Primitiva da Potência)

$$\boxed{\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)}$$

1. $\int (x^2 + 4x + 2)\, dx$

$$\int x^2\, dx + \int 4x\, dx + \int 2\, dx$$
$$\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x + c$$

2. $\int (4x^5 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2})\, dx$

$$\int 4x^5\, dx + \int \sqrt{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$
$$4\int x^5\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{-2}\, dx$$
$$4\left(\frac{x^6}{6}\right) + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-1}}{-1}$$
$$\frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + c$$

3. $\int (x^4 - 2x^2 - x + 8)\, dx$

$$\int x^4\, dx + \int -2x^2\, dx + \int -x\, dx + \int 8\, dx$$
$$\frac{x^5}{5} - 2\int x^2\, dx - \int x\, dx + 8x$$
$$\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x + c$$

4. $\int x^{10} dx$

$$\frac{x^{11}}{11} + c$$

5. $\int 3x^{10}$

$$3\int x^{10}\,dx$$

$$\frac{3x^{11}}{11}+c$$

3.2 2º Caso (Primitiva da Potência)

A primitiva da potência é imediata se a multiplicar pela potência existir a derivada da sua base, a primitiva é então igual à potência com o expoente incrementado uma unidade a dividir pelo mesmo.

$$\boxed{\int u^{\alpha}(u)' = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)}$$

1. $\int (x+1)^2 \, dx$

$$\int (x+1)^2 \underbrace{(x+1)'}_{1} \, dx$$

$$\frac{(x+1)^3}{3} + c$$

2. $\int (2x+1)^3 \, dx$

$$\int (2x+1)^3 \underbrace{(2x+1)'}_{2} * \frac{1}{2} \, dx$$

$(2x+1)' = 2$, verificando-se, então, a falta do fator 2. Neste caso temos que retirar esse excesso por intermédio de uma operação aritmética, neste caso, a multiplicação por $\frac{1}{2}$ que vai anular o fator excedente, 2.

$$\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^4}{4} + c$$

3. $\int (1+x)^{-2} \, dx$

$$\int (1+x)^{-2} \underbrace{(1+x)'}_{1} \, dx$$

$$\frac{(1+x)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+x} + c$$

4. $\int 3\,(2x+1)^4 \, dx$

$$3\int (2x+1)^4 \underbrace{(2x+1)'}_{2} * \frac{1}{2} \, dx$$

$$\frac{3}{2}\frac{(2x+1)^5}{5} + c$$

5. $\int \sqrt{2x-5} \, dx$

$$\int (2x-5)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\int (2x-5)^{\frac{1}{2}} \underbrace{(2x-5)'}_{2} * \frac{1}{2} \, dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}$$

$$\frac{1}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

6. $\int \sqrt[3]{3x-2}\,dx$

$$\int (3x-2)^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$\int (3x-2)^{\frac{1}{3}} \underbrace{(3x-2)'}_{3} * \frac{1}{3}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{(3x-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}}$$

$$\frac{1}{4}(3x-2)^{\frac{4}{3}} + c$$

7. $\int \sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx$

$$\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\ dx$$

$$\int (x-2)^{\frac{2}{3}} \underbrace{(x-2)'}_{1}\,dx$$

$$\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$$

8. $\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

$$\int (x-3)^{-2}\ dx$$

$$\int (x-3)^{-2} \underbrace{(x-3)'}_{1}\,dx$$

$$\frac{(x-3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-3} + c$$

9. $\int \frac{1}{(2x-1)^{-2}}\,dx$

$$\int (2x-1)^{2}\ dx$$

$$\int (2x-1)^{2} \underbrace{(2x-1)'}_{2} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{3}}{3} + c$$

10. $\int \frac{1}{\sqrt[2]{x-1}}\,dx$

$$\int (x-1)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$\int (x-1)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{(x-1)'}_{1}\,dx$$

$$\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx$

$$\int (1-2x)^{-\frac{1}{3}}\ dx$$

$$\int (1-2x)^{-\frac{1}{3}}\ \underbrace{(1-2x)'}_{\text{-2}} * \left(-\frac{1}{2}\right)\ dx$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$$

12. $\displaystyle\int \frac{\pi}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$

$$\pi\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$$

$$\pi\int (x-1)^{-\frac{3}{2}}\ dx$$

$$\pi\int (x-1)^{-\frac{3}{2}}\ \underbrace{(x-1)'}_{1}\ dx$$

$$\pi\frac{(x-1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}$$

$$\pi\frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c$$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{x+2}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$

$$\int (e^{x+2})(1-e^x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

aqui foi usado o critério de “dá-se a mesma base e soma-se os expoentes"

$$\int (e^{x})(e^{2})(1-e^x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$e^2\int (e^{x})(1-e^x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$e^2\int (1-e^x)^{-\frac{1}{2}}\ \underbrace{(1-e^x)'}_{-e^x} * (-1)\,dx$$

$$-e^2\frac{(1-e^x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

3.3 3º Caso (Primitiva do Logaritmo)

Se uma fração é tal que o numerador é a derivada do denominador, a primitiva é imediata e igual ao logaritmo do denominador.

$$\boxed{\int \frac{(u)'}{u} = \ln|u| + c}$$

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+4}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(x^3+4)'}^{3x^2}}{x^3+4} * \frac{1}{3}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\ln|x^3+4| + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}}}{\ln x}\,dx$$

$$\ln|\ln x| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(e^x+4)'}^{e^x}}{e^x+4}\,dx$$

$$\ln|e^x+4| + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(1+\sin x)'}^{\cos x}}{1+\sin x}\,dx$$

$$\ln|\cos x| + c$$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\int \frac{\overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x}}{\cos x} * (-1)\,dx$$

$$-\ln|\cos x| + c$$

6. $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(\sin x)'}^{\cos x}}{\sin x} \, dx$$

$$\ln|\sin x| + c$$

7. $\int \frac{1}{\cos^2(x)\mathrm{tg}x} \, dx$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\mathrm{tg}x} \, dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}x} \, dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(\mathrm{tg}x)'}^{\sec^2 x}}{\mathrm{tg}x} \, dx$$

$$\ln|\mathrm{tg}x| + c$$

8. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x} \, dx$

$$\int \frac{\overbrace{\left(x^2+2x\right)'}^{2x+2}}{x^2+2x} \, dx$$

$$\ln|x^2+2x| + c$$

9. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4} \, dx$

$$\int \frac{\overbrace{\left(e^{3x}+4\right)'}^{3e^{3x}}}{e^{3x}+4} * \frac{1}{3} \, dx$$

$$\frac{1}{3}\ln|e^{3x}+4| + c$$

10. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} \, dx$

$$\int \frac{\overbrace{(x+\sin x)'}^{1+\cos x}}{x+\sin x} \, dx$$

$$\ln|x+\sin x| + c$$

3.4 4º Caso (Primitiva do Seno e Cosseno)

A primitiva do seno de um ângulo é imediata se a multiplicar pelo seno do ângulo existir a derivada do ângulo. A primitiva é então o cosseno do mesmo ângulo.

A primitiva do cosseno de um ângulo é imediata se a multiplicar pelo cosseno do ângulo existir a derivada do ângulo. A primitiva é então o seno do mesmo ângulo.

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int (u)' \sin u = -\cos u + c \\ \displaystyle\int (u)' \cos u = \sin u + c \end{array}}$$

1. $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3+1)\, dx$

$$\int \overbrace{(x^3+1)'}^{3x^2} \sin(x^3+1) * \frac{1}{3}\, dx$$

$$-\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + c$$

2. $\displaystyle\int e^x \cos(e^x+4)\, dx$

$$\int \overbrace{(e^x+4)'}^{e^x} \cos(e^x+4)\, dx$$

$$\sin(e^x+4) + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)\, dx$

$$\int \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} \sin(\ln x)\, dx$$

$$-\cos(\ln x) + c$$

4. $\displaystyle\int \sin(4x+1)\, dx$

$$\int \overbrace{\sin(4x+1)'}^{4} \sin(4x+1) * \frac{1}{4}\, dx$$

$$-\frac{1}{4}\cos(4x+1) + c$$

5. $\displaystyle\int \cos(3x+1)\, dx$

$$\int \overbrace{\cos(3x+1)'}^{3} \cos(3x+1) * \frac{1}{3}\, dx$$

$$-\frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$$

6. $\displaystyle\int 2\cos(2x)\,dx$

$$\int \overbrace{(2x)'}^{2} \cos(2x)\,dx$$

$$\sin(2x) + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \cos(\sqrt{x}) * \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \overbrace{\left(\sqrt{x}\right)'}^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \cos(\sqrt{x}) * \frac{1}{\sqrt{x}} * 2\,dx$$

$$2\sin(\sqrt{x}) + c$$

8. $\displaystyle\int \frac{\sin(\mathrm{arctg}x)}{1+x^2}\,dx$

$$\int \sin(\mathrm{arctg}x) \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \sin(\mathrm{arctg}x)\, \overbrace{(\mathrm{arctg}x)'}^{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$$

$$-\cos(\mathrm{arctg}x) + c$$

9. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\sin(\sqrt{x^3+3x})}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$

$$\int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^3+3x}} \cdot \sin(\sqrt{x^3+3x})\,dx$$

$\left(\sqrt{x^3+3x}\right)' = \frac{(x^3+3x)'}{2\sqrt{x^3+3x}} = \frac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x}} = \frac{3}{2}\frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^3+3x}}$ pode-se verificar que falta o fator $\frac{3}{2}$ portanto é efetuada a operação $*\frac{2}{3}$

$$\int \sin(\sqrt{x^3+3x})\left(\sqrt{x^3+3x}\right)' * \frac{2}{3}\,dx$$

$$-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{x^3+3x}) + c$$

3.5 5º Caso (REGRA DA TANGENTE)

A primitiva da secante ao quadrado de um ângulo é imediata se a multiplicar pela $sec^2\,u$ existir a derivada do ângulo. A primitiva é igual à tangente desse mesmo ângulo.

$$\boxed{\int (u)' \sec^2(u) = \operatorname{tg} u + c}$$

1. $\displaystyle\int e^{2x} \sec^2(e^{2x})\, dx$

$$\int \overbrace{\left(e^{2x}\right)'}^{2e^{2x}} \sec^2(e^{2x}) * \frac{1}{2}\, dx$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}(e^{2x}) + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x)}\, dx$

$$\int (2x+1) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+x)}\, dx$$
$$\int (2x+1) \sec^2(x^2+x)\, dx$$
$$\int \overbrace{\left(x^2+x\right)'}^{2x+1} \sec^2(x^2+x)\, dx$$
$$\operatorname{tg}(x^2+x) + c$$

3. $\displaystyle\int \sec^2(x+1)\, dx$

$$\int \overbrace{(x+1)'}^{1} \sec^2(x+1)\, dx = \operatorname{tg}(x+1) + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x}\, dx$

$$\int \sec^2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$\int \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} \sec^2(\ln x) * \frac{1}{x}\, dx$$
$$\operatorname{tg}(\ln x) + c$$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2} \sec^2(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right))\, dx$

$$\int \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} \sec^2(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right))\, dx$$

$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2(1+\frac{x^2}{4})}$

$$\int \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' \sec^2(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)) * \frac{1}{2}\, dx$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4} + c$$

3.6 6º Caso (REGRA DA CO-TANGENTE)

A primitiva da co-secante quadrada de um ângulo é imediata se a multiplicar pela $\text{cosec}^2\, u$ existir a derivada do ângulo. A primitiva é igual a menos co-tangente do mesmo ângulo.

$$\boxed{\int (u)' \text{cosec}^2 u = -\text{cotg}\, u + c}$$

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(7x)}\, dx$

$$\int \text{cosec}^2(7x)\, dx$$

$$\int \overbrace{(7x)'}^{7} \text{cosec}^2(7x) * \frac{1}{7}\, dx$$

$$-\frac{1}{7}\text{cotg}(7x) + c$$

2. $\displaystyle\int \text{cosec}^2(\sin x) \cdot \cos x\, dx$

$$\int \overbrace{(\sin x)'}^{\cos x} \text{cosec}^2(\sin x)\, dx$$

$$-\text{cotg}(\sin x) + c$$

3. $\displaystyle\int x^2 \text{cosec}^2(x^3)\, dx$

$$\int \text{cosec}^2(x^3)\, \overbrace{(x^3)'}^{3x^2} * \left(\frac{1}{3}\right)\, dx$$

$$-\frac{1}{3}\text{cotg}(x^3) + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{\text{cosec}^2(e^{x+2})}{e^{-x}}\, dx$

$$\int \text{cosec}^2(e^{x+2}) \cdot e^x\, dx$$

$$\int \overbrace{\left(e^{x+2}\right)'}^{e^{x+2} = e^x \cdot e^2} \cdot \text{cosec}^2(e^{x+2}) * \frac{1}{e^2}\, dx$$

$$-\frac{1}{e^2}\text{cotg}(e^{x+2}) + c$$

5. $\displaystyle\int \frac{\text{cosec}^2(\sin(3x))}{\sec(3x)}\, dx$

$$\int \text{cosec}^2(\sin(3x)) \cdot \frac{1}{\sec(3x)}\, dx$$

$$\int \text{cosec}^2(\sin(3x) \cdot \cos(3x)\, dx$$

$$\int \overbrace{(\sin(3x))'}^{3\cos(3x)} \text{cosec}^2(\sin(3x)) * \frac{1}{3}\, dx$$

$$-\frac{1}{3}\text{cotg}(\sin(3x)) + c$$

6. $\int \frac{e^x \operatorname{cosec}^2(\cos(e^x))}{\operatorname{cosec}(e^x)}\,dx$

$$\int e^x \operatorname{cosec}^2(\cos(e^x)) \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec}(e^x)}\,dx$$

$$\int e^x \operatorname{cosec}^2(\cos(e^x))\sin(e^x)\,dx$$

$$\int \overbrace{(\cos(e^x))'}^{-e^x\,\sin(e^x)} e^x \operatorname{cosec}^2(\cos(e^x)) * (-1)\,dx$$

$$\operatorname{cotg}(\cos(e^x)) + c$$

3.7 7º Caso (REGRA DA SECANTE)

A primitiva do produto da secante de um ângulo pela tangente do mesmo ângulo é imediata se a multiplicar por $\sec u \cdot \operatorname{tg} u$ existir a derivada do mesmo ângulo. A primitiva é igual à secante desse ângulo.

$$\boxed{\int (u)' \sec(u) \operatorname{tg}(u) = \sec(u) + c}$$

1. $\displaystyle\int \sec(2x) \operatorname{tg}(2x)\, dx$

$$\int \overbrace{(2x)'}^{2} \sec(2x) \operatorname{tg}(2x) * \frac{1}{2}\, dx$$

$$\frac{1}{2} \sec(2x) + c$$

2. $\displaystyle\int 7e^x \sec(e^x + 1) \operatorname{tg}(e^x + 1)\, dx$

$$\int \overbrace{(e^x + 1)'}^{e^x} \sec(e^x + 1)\operatorname{tg}(e^x + 1) * 7\, dx$$

$$7 \sec(e^x + 1) + c$$

3.8 8º Caso (REGRA DA CO-SECANTE)

A primitiva do produto da co-secante de um ângulo pela co-tangente do mesmo ângulo é imediata se a multiplicar por $\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$ existir a derivada do ângulo. A primitiva é igual a menos co-secante do ângulo.

$$\boxed{\int (u)'\operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u) = -\operatorname{cosec}(u) + c}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$

$$\int \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{x}\right) * (-1)\,dx$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cosec}(\sqrt{x})\cdot\operatorname{cotg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \operatorname{cosec}(\sqrt{x})\cdot\operatorname{cotg}(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \overbrace{(\sqrt{x})'}^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \operatorname{cosec}(\sqrt{x})\cdot\operatorname{cotg}(\sqrt{x}) * 2\,dx$$

$$-2\operatorname{cosec}(\sqrt{x}) + c$$

3.9 9º Caso (Primitiva da Secante)

A primitiva da secante de um ângulo é imediata se a multiplicar pela secante do ângulo existir a derivada do ângulo. A primitiva é então o logaritmo neperiano da adição da secante desse ângulo com a tangente do mesmo ângulo.

$$\boxed{\int (u)' \sec(u) = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + c}$$

1. $\int \frac{\sec(\sqrt{x+2})}{3\sqrt{x+2}}\,dx$

$$\int \sec(\sqrt{x+2}) \cdot \frac{1}{3\sqrt{x+2}}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int \sec(\sqrt{x+2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int \overbrace{\left(\sqrt{x+2}\right)'}^{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} \cdot \sec(\sqrt{x+2}) * 2\,dx$$

$$\frac{2}{3}\ln|\sec(\sqrt{x+2}) + \operatorname{tg}(\sqrt{x+2})| + c$$

2. $\int e^x \sec(e^{x+1})\,dx$

$$\int \overbrace{\left(e^{x+1}\right)'}^{e^x} \sec(e^{x+1})\,dx$$

$$\ln|\sec(e^{x+1}) + \operatorname{tg}(e^{x+1})| + c$$

3. $\int \cos(2x)\sec(\sin(2x))\,dx$

$$\int \overbrace{\left(\sin(2x)\right)'}^{2\cos(2x)} \sec(\sin(2x)) * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|\sec(\sin(2x)) + \operatorname{tg}(\sin(2x))| + c$$

3.10 10º Caso (Primitiva da Co-Secante)

A primitiva da co-secante de um ângulo é imediata se a multiplicar pela co-secante do ângulo existir a derivada do ângulo. A primitiva é então o logaritmo neperiano da subtração da co-secante desse ângulo com a co-tangente desse mesmo ângulo.

$$\boxed{\int (u)'\text{cosec}(u) = \ln|\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)| + c}$$

1. $\displaystyle\int \text{cosec}(3x+2)\,dx$

$$\int \overbrace{(3x+2)'}^{3}\text{cosec}(3x+2) * \frac{1}{3}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\ln|\text{cosec}(3x+2) - \text{cotg}(3x+2)| + c$$

2. $\displaystyle\int 3x \cdot \text{cosec}(x^2+1)\,dx$

$$3\int \overbrace{(x^2+1)'}^{2x}\text{cosec}(x^2+1) * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{3}{2}\ln|\text{cosec}(x^2+1) - \text{cotg}(x^2+1)| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\text{cosec}\,(\ln(\sqrt{x}))}{x}\,dx$

$$\int \text{cosec}\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \overbrace{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)'}^{\frac{1}{2x}} \cdot \text{cosec}\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) * 2\,dx$$

$$2\ln|\text{cosec}(\ln(\sqrt{x})) - \text{cotg}(\ln(\sqrt{x}))| + c$$

4. $\displaystyle\int e^{2x}\text{cosec}(e^{2x+1})\,dx$

$$\int \left(e^{2x+1}\right)'\text{cosec}(e^{2x+1}) * \frac{1}{2e}\,dx$$

$\left(e^{2x+1}\right)' = (2x+1)'\,e^{2x+1} = 2e^{2x+1} = 2(e^{2x})(e^1) = (e^{2x})(2e)$
Como se pode verificar existe o fator $(2e)$ a mais pelo que temos que o eliminar com recurso a $*\frac{1}{2e}$

$$\frac{1}{2e}\ln|\text{cosec}(e^{2x+1}) - \text{cotg}(e^{2x+1})| + c$$

5. $\displaystyle\int \text{cotg}(2x)\,\text{cosec}(\ln(\sin(2x))\,dx$

$$\int \text{cotg}(2x)\,\text{cosec}(\ln(\sin(2x)))\,dx$$

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,\text{cosec}(\ln(\sin(2x))\,dx$$

$$\int \overbrace{(\ln(\sin(2x)))'}^{\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}}\text{cosec}(\ln(\sin(2x))) * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|\text{cosec}(\ln(\sin(2x))) - \text{cotg}(\ln\sin(2x)))| + c$$

3.11 11º Caso (Primitiva dos Arcos)

A primitiva do arco-tangente de um ângulo é imediata se:

1. Denominador conter um binómio em que um termo é composto pela unidade e o outro é um quadrado.
2. Numerador é a derivada da base do quadrado.

A primitiva do arco-seno de um ângulo é imediata se:

1. Denominador conter uma raiz quadrada cujo radicando é um binómio subtrativo em que o termo aditivo é composto pela unidade e o subtrativo é um quadrado.
2. Numerador é a derivada da base do quadrado.

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{(u)'}{1+(u)^2} &= \operatorname{arctg}(u) + c \\ \int \frac{(u)'}{\sqrt{1-(u)^2}} &= \arcsin(u) + c \end{aligned}}$$

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$

$$\int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(x^2)'}^{2x}}{1+(x^2)^2} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^{12}}\,dx$

$$\int \frac{x^5}{1+(x^6)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(x^6)'}^{6x^5}}{1+(x^6)^2} * \frac{1}{6}\,dx$$

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^6) + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2(x)}\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{1+(\cos x)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x}}{1+(\cos x)^2} * (-1)\,dx$$

$$-\operatorname{arctg}(\cos x) + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(e^x)'}^{e^x}}{1+(e^x)^2}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(e^x)+c$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^8}{1+x^{18}}\,dx$

$$\int \frac{x^8}{1+(x^9)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(x^9)'}^{9x^8}}{1+(x^9)^2} * \frac{1}{9}\,dx$$

$$\frac{1}{9}\operatorname{arctg}(x^9)+c$$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln x)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}}}{1+(\ln x)^2}\,dx$$

$$\operatorname{arctg}(\ln x)+c$$

7. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{(x^2)'}^{2x}}{\sqrt{1-(x^2)^2}} * 2\,dx$$

$$2\arcsin(x^2)+c$$

8. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^{12}}}\,dx$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-(x^6)^2}}\,dx$$

$$\int \overbrace{(x^6)'}^{6x^5} * \frac{1}{6}\,dx$$

$$\frac{1}{6}\arcsin(x^6)+c$$

9. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-\left(e^{2x}\right)^2}}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{\left(e^{2x}\right)'}^{2e^{2x}}}{\sqrt{1-\left(e^{2x}\right)^2}} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\arcsin(e^{2x}) + c$$

10. $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1-x^{22}}}\,dx$

$$\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1-\left(x^{11}\right)^2}}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{\left(x^{11}\right)'}^{11x^{10}}}{\sqrt{1-\left(x^{11}\right)^2}} * \frac{1}{11}\,dx$$

$$\frac{1}{11}\arcsin(x^{11}) + c$$

11. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\left(\cos(x)\right)^2}}\,dx$$

$$\int \frac{\overbrace{\left(\cos x\right)'}^{-\sin x}}{\sqrt{1-\left(\cos(x)\right)^2}} * (-1)\,dx$$

$$-\arcsin(\cos x) + c$$

3.12 12º Caso (Primitiva da Exponencial)

A primitiva de uma função exponencial é imediata se a multiplicar pela exponencial existir a derivada do expoente. A primitiva é então igual à própria exponencial a dividir pelo logaritmo da base.

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int e^u \ (u)' = e^u + c \\[2ex] \displaystyle\int a^u \ (u)' = \frac{a^u}{\ln a} \end{array}}$$

1. $\displaystyle\int \sin(x) \cdot e^{\cos x} \, dx$

$$\int \overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x} \cdot e^{\cos x} * (-1) \, dx$$

$$-e^{\cos x} + c$$

2. $\displaystyle\int 2^{x+1} \, dx$

$$\int \overbrace{(x+1)'}^{1} \cdot 2^{x+1} \, dx$$

$$\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{\mathrm{tg} x}}{\cos^2(x)} \, dx$

$$\int e^{\mathrm{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$$

$$\int e^{\mathrm{tg} x} \cdot \sec^2(x) \, dx$$

$$\int \overbrace{(\mathrm{tg}\, x)'}^{\sec^2 x} \cdot e^{\mathrm{tg}\, x} \, dx$$

$$e^{\mathrm{tg}\, x} + c$$

3.13 Exercícios

1. $\int e^{2x-3}\,dx$

$$\int \underbrace{(2x-3)'}_{2} e^{2x-3} * \frac{1}{2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}e^{2x-3} + c$$

2. $\int x\,e^{x^2}\,dx$

$$\int \underbrace{(x^2)'}_{2x} e^{x^2} * \frac{1}{2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

3. $\int x^2\,4^{x^3+2}\,dx$

$$\int \underbrace{(x^3+2)'}_{3x^2}\,4^{x^3+2} * \frac{1}{3}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\frac{4^{x^3+2}}{\ln 4} + c$$

4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$\int \underbrace{(\sqrt{x})'}_{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{\sqrt{x}} * 2\,dx$$
$$2e^{\sqrt{x}} + c$$

5. $\int \frac{10^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

$$\int 10^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$\int 10^{\frac{1}{x}} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-\frac{1}{x^2}} *(-1)\,dx$$
$$-\frac{10^{\frac{1}{x}}}{\ln 10} + c$$

6. $\int \sin(x)e^{2\cos(x)}\,dx$

$$\int e^{2\cos\,x} \underbrace{(2\cos\,x)'}_{-2\sin\,x} * \left(-\frac{1}{2}\right)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}e^{2\cos\,x} + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{\sin\, x}{e^{\cos\, x}}\, dx$

$$\int \sin\, x \cdot \frac{1}{e^{\cos\, x}}\, dx$$

$$\int \sin\, x \cdot e^{-\cos\, x}\, dx$$

$$\int e^{-\cos\, x} \underbrace{(-\cos\, x)'}_{\sin\, x}\, dx$$

$$e^{-\cos\, x} + c$$

8. $\displaystyle\int \sec^2(2x) e^{\operatorname{tg}(2x)}\, dx$

$$\int e^{\operatorname{tg}(2x)} \underbrace{(\operatorname{tg}(2x))'}_{2\sec^2(2x)} * \frac{1}{2}\, dx$$

$$\frac{1}{2} e^{\operatorname{tg}(2x)} + c$$

9. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{cotg}(2x)}}{\sin^2(2x)}\, dx$

$$\int e^{\operatorname{cotg}(2x)} \cdot \frac{1}{\sin^2(2x)}\, dx$$

$$\int e^{\operatorname{cotg}(2x)} \cdot \operatorname{cosec}^2(2x)\, dx$$

$$\int e^{\operatorname{cotg}(2x)} \underbrace{(\operatorname{cotg}(2x))'}_{-\frac{2}{\sin^2(2x)}} * \left(-\frac{1}{2}\right)\, dx$$

$$-\frac{1}{2} e^{\operatorname{cotg}(2x)} + c$$

10. $\displaystyle\int \frac{2^{\arcsin\, x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$$\int 2^{\arcsin\, x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\int 2^{\arcsin\, x} \underbrace{(\arcsin\, x)'}_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\, dx$$

$$\frac{2^{\arcsin\, x}}{\ln 2} + c$$

11. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx$

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \underbrace{(\operatorname{arctg} x)'}_{\frac{1}{1+x^2}}\, dx$$

$$e^{\operatorname{arctg} x} + c$$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx$

$$\int e^{\operatorname{arctg}(2x)}\frac{1}{1+4x^2}\,dx$$
$$\int e^{\operatorname{arctg}(2x)}\frac{1}{1+(2x)^2}\,dx$$
$$\int e^{\operatorname{arctg}(2x)}\underbrace{(\operatorname{arctg}(2x))'}_{\frac{2}{1+(2x)^2}}*\frac{1}{2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}(2x)}+c$$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(\ln\,x)}}{x(1+\ln^2\,x)}\,dx$

$$\int e^{\operatorname{arctg}(\ln\,x)}\cdot\frac{1}{x(1+(\ln\,x)^2}\,dx$$
$$\int e^{\operatorname{arctg}(\ln\,x)}\underbrace{(\operatorname{arctg}(\ln\,x))'}_{\frac{1}{x(1+\ln^2\,x)}}\,dx$$
$$e^{\operatorname{arctg}(\ln\,x)}+c$$

14. $\displaystyle\int \frac{2}{1-x}\,dx$

$$2\int\frac{1}{1-x}\,dx$$
$$2\int\frac{\overbrace{(1-x)'}^{-1}}{1-x}*(-1)\,dx$$
$$-2\ln|1-x|+c$$

15. $\displaystyle\int \frac{2e^x}{(1+e^{2x}\operatorname{arctg}(e^x)}\,dx$

$$2\int\frac{\overbrace{(\operatorname{arctg}(e^x))'}^{\frac{e^x}{1+(e^x)^2}}}{\operatorname{arctg}(e^x)}\,dx$$
$$2\int\frac{\frac{e^x}{1+(e^x)^2}}{\operatorname{arctg}(e^x)}\,dx$$
$$2\ln|\operatorname{arctg}(e^x)|+c$$

16. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2}\,dx$

$$\int\frac{\overbrace{(x^4+x^2)'}^{4x^3+2x=2(2x^3+x)}}{x^4+x^2}*\frac{1}{2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^4+x^2|+c$$

17. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(e^x+1)'}^{e^x}}{e^x+1}\,dx$$
$$\ln|e^x+1|+c$$

18. $\displaystyle\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx$

$$\int \frac{e^x\cdot e^1}{e^x+1}\,dx$$
$$e\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$
$$e\ln|e^x+1|+c$$

19. $\displaystyle\int \frac{3}{x\ln\,x}\,dx$

$$3\int \frac{1}{x\ln\,x}\,dx$$
$$3\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln\,x}\,dx$$
$$3\int \frac{\overbrace{(\ln\,x)'}^{\frac{1}{x}}\ln\,x}{}dx$$
$$3\ln|\ln\,x|+c$$

20. $\displaystyle\int \frac{3}{x\ln(\sqrt{x})}\,dx$

$$3\int \frac{1}{x\ln(\sqrt{x})}\,dx$$
$$3\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(\sqrt{x})}\,dx$$
$$3\int \frac{\overbrace{(\ln(\sqrt{x})'}^{\frac{1}{2x}}}{\ln(\sqrt{x})}*2\,dx$$
$$6\ln|\ln\sqrt{x}|+c$$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(\sin(3x)'}^{3\cos(3x)}}{\sin(3x)}*\frac{1}{3}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\ln|\sin(3x)|+c$$

22. $\displaystyle\int \frac{\sin\ x}{\cos\ x+\pi}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(\cos\ x+\pi)'}^{-\sin\ x}}{\cos\ x+\pi} * (-1)\,dx$$

$$-\ln|\cos\ x+\pi|+c$$

23. $\displaystyle\int \frac{e^x\cos(e^x)}{\sin(e^x)}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(\sin(e^x)'}^{e^x\cos(e^x)}}{\sin(e^x)}\,dx$$

$$\ln|\sin(e^x)|+c$$

24. $\displaystyle\int \frac{sec^2(2x)}{\mathrm{tg}(2x)}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(\mathrm{tg}(2x))'}^{2\sec^2(2x)}}{\mathrm{tg}(2x)} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}(2x)|+c$$

25. $\displaystyle\int \frac{\pi}{\sin^2\ x\mathrm{cotg}\,x}\,dx$

$$\pi\int \frac{\frac{1}{\sin^2\ x}}{\mathrm{cotg}\,x}\,dx$$

$$\pi\int \frac{\mathrm{cosec}^2\,x}{\mathrm{cotg}\,x}\,dx$$

$$\pi\int \frac{\overbrace{(\mathrm{cotg}\,x)'}^{-\mathrm{cosec}^2\,x}}{\mathrm{cotg}\,x} * (-1)\,dx$$

$$-\pi\ln|\mathrm{cotg}\,x|+c$$

26. $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2\,x\mathrm{tg}\,x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sin^2\ x}\cdot\frac{\sin\ x}{\cos\ x}\,dx$$

$$\int \frac{\cancel{\sin\ x}}{(\sin\ x)^{\cancel{2}}\cos\ x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sin\ x\cos\ x}\,dx$$

$$\int \frac{(\sin\ x\cos\ x)'}{\sin\ x\cos\ x} * (-1)\,dx$$

$$(\sin\ x\cos\ x)' = (\sin\ x)'\cos\ x+(\cos\ x)'\sin\ x = (\cos\ x)^2-(\sin\ x)^2 = -\underbrace{(\sin^2\ x+\cos^2\ x)}_{\text{F. F. Trigonometria}} = -1$$

$$-\ln|\sin\ x\cos\ x|+c$$

27. $\displaystyle\int \frac{\text{cotg}(2x)}{\cos^2(2x)}\, dx$

$$\int \frac{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}{(\cos(2x))^2}\, dx$$

$$\int \frac{\cancel{\cos(2x)}}{\sin(2x)(\cos(2x))^{\cancel{2}}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sin(2x)\cos(2x)}\, dx$$

$$\int \frac{(\sin(2x)\cos(2x))'}{\sin(2x)\cos(2x)}\, dx * \left(-\frac{1}{2}\right)\, dx$$

$(\sin(2x)\cos(2x))' = (\sin(2x)'\cos(2x)+(\cos(2x))'\sin(2x) = 2\cos^2(2x)-2\sin^2(2x) = -2(\sin^2(2x)+\cos^2(2x)) = -2$

$$-\frac{1}{2}\ln|\sin(2x)\cos(2x)| + c$$

28. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\, dx$

$$3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\, dx$$

$$3\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\, dx$$

$$3\int \frac{\overbrace{(\arcsin x)'}^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}{\arcsin x}\, dx$$

$$3\ln|\arcsin x| + c$$

29. $\displaystyle\int \frac{\pi\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}\arccos(\sin x)}\, dx$

$$\pi\int \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}}{\arccos(\sin x)}\, dx$$

$$\pi\int \frac{\overbrace{(\arccos(\sin x))'}^{-\frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}}}{\arccos(\sin x)} * (-1)\, dx$$

$$-\pi\ln|\arccos(\sin x)| + c$$

30. $\displaystyle\int \frac{3}{x(1+\ln^2(x))\text{arctg}(\ln x)}\, dx$

$$3\int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))\text{arctg}(\ln x)}\, dx$$

$$3\int \frac{\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}}{\text{arctg}(\ln x)}\, dx$$

$$3\int \frac{\overbrace{(\text{arctg}(\ln x))'}^{\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}}}{\text{arctg}(\ln x)}\, dx$$

$$\ln|\text{arctg}(\ln x)| + c$$

31. $\int \sin(2x)\,dx$

$$\int \sin(2x)\,\overbrace{(2x)'}^{2} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

32. $\int \cos(3x+1)\,dx$

$$\int \cos(3x+1)\,\overbrace{(3x+1)}^{3} * \frac{1}{3}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$$

33. $\int x\sin(x^2)\,dx$

$$\int \sin(x^2)\,\overbrace{(x^2)'}^{2x} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\cos(x^2) + c$$

34. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\overbrace{(\sqrt{x})'}^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} * 2\,dx$$

$$-2\cos(\sqrt{x}) + c$$

35. $\int \frac{x\sin(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$$\int \sin(\sqrt{x^2+1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\int \sin(\sqrt{x^2+1})\,\overbrace{(\sqrt{x^2+1})'}^{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}\,dx$$

$$-\cos(\sqrt{x^2+1}) + c$$

36. $\int e^x\cos(e^x)\,dx$

$$\int \cos(e^x)\,\overbrace{(e^x)'}^{e^x}\,dx$$

$$\sin(e^x) + c$$

37. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x))}{2x}\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \sin(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sin(\ln(x))\,\overbrace{(\ln(x))'}^{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\ln(x))+c$$

38. $\displaystyle\int \sqrt{e^x}\sin(\sqrt{e^x})\,dx$

$$\int \sin(\sqrt{e^x})\,\overbrace{(\sqrt{e^x})'}^{\frac{\sqrt{e^x}}{2}}*2\,dx$$

$$-2\cos(\sqrt{e^x})+c$$

39. $\displaystyle\int \sin(x)\sin(\cos(x))\,dx$

$$\int \sin(\cos\ x)\,\overbrace{(\cos\ x)'}^{-\sin\ x}*(-1)\,dx$$

$$\cos(\cos\ x)+c$$

40. $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(\cos^2(x))\,dx$

$$\int 2\sin(x)\cos(x)\cdot\cos(\cos^2(x))\,dx$$

$$\int \cos(\cos^2(x))\ \overbrace{(\cos^2(x))'}^{2\sin(x)\cos(x)}\ dx$$

$$\sin(\cos^2(x))+c$$

41. $\displaystyle\int \frac{\sin\ x}{\sqrt{\cos\ x}}\sin(\sqrt{\cos\ x}),dx$

$$\int \sin(\sqrt{\cos\ x})\,\overbrace{(\sqrt{\cos\ x})'}^{\frac{-\sin\ x}{2\sqrt{\cos\ x}}}*(-2)\,dx$$

$$2\cos(\sqrt{\cos\ x})+c$$

42. $\displaystyle\int \mathrm{tg}(2x)\sin(\ln(\cos(2x)))\,dx$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\sin(\ln(\cos(2x)))\,dx$$

$$\int \sin(\ln(\cos(2x)))\,\overbrace{(\ln(\cos(2x)))'}^{-\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}}*\left(-\frac{1}{2}\right)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cos(\ln(\cos(2x)))+c$$

43. $\int \frac{4}{\sqrt{1-4x^2}\sin(\arccos(2x))}\,dx$

$$4\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\sin(\arccos(2x))\,dx$$

$$4\int \sin(\arccos(2x))\overbrace{(\arccos(2x))'}^{-\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}}*\left(-\frac{1}{2}\right)\,dx$$

$$2\cos(\arccos(2x))+c$$

$$4x$$

44. $\int \frac{e^{x+1}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cos(\arcsin(e^x))\,dx$

$$\int \frac{e^x\cdot e^1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cos(\arcsin(e^x))\,dx$$

$$e\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cos(\arcsin(e^x))\,dx$$

$$e\int \cos(\arcsin(e^x))\overbrace{(\arcsin(e^x))'}^{\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}}\,dx$$

$$e\cdot\underbrace{\sin(\arcsin(e^x)}_{e^x}$$

$$e^{x+1}+c$$

45. $\int \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}\cos(\mathrm{arctg}(\sin\ x))\,dx$

$$\int \frac{\cos\ x}{1+(1-\cos^2(x)}\cos(\mathrm{arctg}(\sin\ x))\,dx$$

$$\int \frac{\cos\ x}{1-\underbrace{(\cos^2\ x-1)}_{-\sin^2\ x}}\cos(\mathrm{arctg}(\sin\ x))\,dx$$

$$\int \frac{\cos\ x}{1+\sin^2\ x}\cos(\mathrm{arctg}(\sin\ x))\,dx$$

$$\int \cos(\mathrm{arctg}(\sin\ x))\overbrace{(\mathrm{arctg}(\sin\ x))'}^{\frac{\cos\ x}{1+\sin^2\ x}}\,dx$$

$$\sin(\mathrm{arctg}(\sin\ x))+c$$

46. $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx$

$$\int \frac{\overbrace{(2x)'}^{2}}{\sqrt{1-(2x)^2}}*\frac{1}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\arcsin(2x)+c$$

47. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4(1-x^2)}}\,dx$$
$$\int \frac{1}{2\sqrt{1-(x)^2}}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{(x)'}^{1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\arcsin(x)+c$$

48. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^6}}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9\left(1-\left(\frac{x^6}{9}\right)\right)}}\,dx$$
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3\left(1-\left(\frac{x^6}{9}\right)\right)}}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x^6}{9}\right)\right)}}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{\left(\frac{x^3}{3}\right)'}^{x^2}}{\sqrt{9\left(1-\left(\frac{x^6}{9}\right)\right)}}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{3}\right)+c$$

49. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-9e^{(2x)}}}\,dx$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(3e^x)^2}}\,dx$$
$$\int \frac{\overbrace{(3e^x)'}^{3e^x}}{\sqrt{1-(3e^x)^2}}*\frac{1}{3}\,dx$$
$$\frac{1}{3}\arcsin(3e^x)+c$$

50. $\displaystyle\int \frac{\sin\,x}{\sqrt{1-\cos^2\,x)}}\,dx$

$$\int \frac{\sin\,x}{\sqrt{1-(\cos\,x)^2}}\,dx$$
$$\int \frac{\overbrace{(\cos\,x)'}^{-\sin\,x}}{\sqrt{1-(\cos\,x)^2}}*(-1)\,dx$$
$$-\arcsin(\cos\,x)+c$$

51. $\displaystyle\int \frac{3}{\sec(2x)\sqrt{1-\sin^2(2x)}}\,dx$

$$3\int \frac{1}{\sec(2x)\sqrt{1-\sin^2(2x)}}\,dx$$

$$3\int \frac{\frac{1}{\sec(2x)}}{\sqrt{1-(\sin(2x))^2}}\,dx$$

$$3\int \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1-(\sin(2x))^2}}\,dx$$

$$3\int \frac{\overbrace{(\sin(2x))'}^{2\cos(2x)}}{\sqrt{1-(\sin(2x))^2}} * \left(\frac{1}{2}\right)\,dx$$

$$\frac{3}{2}\underbrace{\arcsin(\sin(2x))}_{2x} + c$$

$$3x + c$$

Pode-se resolver também de outra forma,

$$3\int \frac{1}{\sec(2x)\sqrt{(\cos(2x))^2}}\,dx$$

$$3\int \frac{1}{\sec(2x)\cos(2x)}\,dx$$

$$3\int \frac{1}{\sec(2x)}\cdot\frac{1}{\cos(2x)}\,dx$$

$$3\int \frac{\cos(2x)}{\cos(2x)}\,dx$$

$$3x + c$$

52. $\displaystyle\int \frac{4}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,dx$

$$4\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln\, x)^2}}\,dx$$

$$4\int \frac{\overbrace{(\ln\, x)'}^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-(\ln\, x)^2}}\,dx$$

$$4\arcsin(\ln\, x) + c$$

53. $\displaystyle\int \frac{4\text{cotg}\, x}{\sqrt{1-\ln^2(\sin\, x}}\,dx$

$$4\int \frac{\text{cotg}\, x}{\sqrt{1-(\ln(\sin\, x))^2}}\,dx$$

$$4\int \frac{\overbrace{(\ln(\sin\, x))'}^{\text{cotg}\, x}}{\sqrt{1-(\ln(\sin\, x))^2}}\,dx$$

$$4\arcsin(\ln(\sin\, x)) + c$$

54. $\int \frac{4\sec^2(2x)}{\sqrt{1-4\mathrm{tg}^2(2x)}}\,dx$

$$4\int \frac{\sec^2(2x)}{\sqrt{1-(2\mathrm{tg}(2x))^2}}\,dx$$

$$4\int \frac{\overbrace{(2\mathrm{tg}(2x))'}^{4\sec^2(2x)}}{\sqrt{1-(2\mathrm{tg}(2x))^2}} * \frac{1}{4}\,dx$$

$$\arcsin(2\mathrm{tg}(2x)) + c$$

Capítulo 4

Primitivação por Partes

Para primitivar o produto de dois fatores, multiplica-se a primitiva de um deles, sucessivamente, pelo outro fator e pela sua derivada; ao primeiro produto subtrai-se a primitiva do segundo produto. Nestas condições, dadas duas funções f e g definidas em $[a, b]$ por $f(x)$ e $g(x)$, e designando F e G definidas em $[a, b]$ por $F(x)$ e $G(x)$ as suas primitivas, tem-se:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Naturalmente, a escolha do fator pelo qual se começa nem sempre é arbitrária. Assim,

1. Quando se conheçam as duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$, deve escolher-se para fator a primitivar em primeiro lugar, aquele que menos se simplifique por derivação; se nenhum deles se simplifica por derivação a escolha é arbitrária, mas então, o que aliás sucede noutros casos, à segunda aplicação da regra da primitivação por partes obtém-se o pedido, o qual se passa para o 1º membro a fim de determinar o valor da primitiva.

2. Quando se conhece apenas a primitiva de um dos fatores é por esse que se começa.

3. Quando existe apenas um fator, cuja primitiva é desconhecida, introduz-se o fator 1 pelo qual se começa.

$$\boxed{u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx}$$

4.1 Primeiro Caso - Logaritmos ou Arcos

$Calcular: \int x \ln(x+1)\, dx$

Resolução

Como apenas se sabe primitivar o fator x é porque ele que vamos começar. Teremos:

$$\int \underbrace{x}_{\text{v'}} \cdot \underbrace{\ln(x+1)}_{\text{u}}\, dx$$

u $= \ln(x+1)$
u'$= \frac{1}{x+1}$
v'$= x$
v$=\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$

$$\ln(x+1)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$\ln(x+1)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,dx$$

fração racional, $\frac{x^2}{x+1}$, em que o **grau** do **numerador** é **superior** ao do **denominador**. **Faz-se a divisão**!

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{x^2} & x+1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^2}-x & x-1 \\ \hline
-\cancel{x} & \\
\cancel{x}+1 & \\ \hline
1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^2}{x+1}=(x-1)+\frac{1}{x+1}$$

$$\ln(x+1)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\int(x-1+\frac{1}{x+1})\,dx$$

$$\ln(x+1)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+c$$

Pode-se então deduzir,

Monómio ou Polinómio	e	Logaritmos ou Arcos
v'		u

1. $\displaystyle\int(x^2+1)\ln(x)\,dx$

$$\int\underbrace{(x^2+1)}_{\text{v'}}\underbrace{\ln(x)}_{\text{u}}\,dx$$

u=$\ln(x)$
u'=$\frac{1}{x}$
v'=x^2+1
v=$\int x^2+1\,dx=\frac{x^3}{3}+x$

$$\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+3\right)\,dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+3x}{x}\,dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\frac{1}{3}\int\frac{x(x^2+3)}{x}\,dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\frac{1}{3}\int(x^2+3)\,dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^3}{3}+x\right)-\frac{x^3}{9}-x+c$$

2. $\displaystyle\int(x+1)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

$$\int\underbrace{(x+1)}_{\text{v'}}\,\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{\text{u}}\,dx$$

u=arctg x
u'=$\frac{1}{1+x^2}$
v'=$x+1$
v=$\frac{x^2}{2}$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\int \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}+2x & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2}\qquad -1 & 1 \\ \hline 2x-1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+2x}{x^2+1}=1+\frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\int \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\,dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x}{x^2+1}\,dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}\int 1+\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)\,dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$(\operatorname{arctg} x)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$$

4.2 Segundo Caso - Associar 1 ao produto

$Calcular: \int \operatorname{arctg} x \, dx$

Resolução

Como se trata de um fator apenas, cuja primitiva não é imediata, vamos introduzir o fator 1 pelo que se começa.

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{1}_{\text{v'}} \, dx$$

u = $\operatorname{arctg} x$
u'= $\frac{1}{1+x^2}$
v'= 1
v=x

$$x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c$$

Pode-se então deduzir,

$$\underset{\text{u}}{\boxed{\text{Arcos}}} \qquad \text{ou} \qquad \underset{\text{u}}{\boxed{\text{Logaritmos}}}$$

(Associar o fator 1 ao produto)

1. $\int \ln(x+1) \, dx$

$$\int \underbrace{\ln(x+1)}_{\text{u}} \cdot \underbrace{1}_{\text{v'}} \, dx$$

u=$\ln(x+1)$
u'=$\frac{1}{x+1}$
v'=1
v=x

$$x \ \ln(x+1) - \int \frac{1}{x+1} \cdot x \, dx$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x} - 1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$x \ \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} \, dx$$

$$x \ \ln(x+1) - \int 1 - \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$x \ \ln(x+1) - x + \ln |x+1| + c$$

4.3 Terceiro Caso - Exponencial ou Trigonométrica

$Calcular: \int x \sin x \, dx$

Resolução

Qualquer dos fatores tem primitiva conhecida mas dos dois, o que menos se simplifica por derivação é $\sin x$. Vamos, então, começar por esse fator. Teremos:

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{\sin x}_{\text{v'}} \, dx$$

u $= x$
u'$= 1$
v'$= \sin x$
v$= \int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$$x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$-x \cos x + \sin x + c$$

Pode-se então deduzir,

Monómio ou Polinómio	e	Exponencial ou Trigonométrica
u		v'

1. $\int x \cdot e^{x+1} \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{\text{v'}} \, dx$$

u$=x$
u'$=(x)' = 1$
v'$=e^{x+1}$
v$=\int e^{x+1} \, dx = e^{x+1}$

$$x \cdot e^{x+1} - \int 1 \cdot e^{x+1} \, dx$$

$$x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} + c$$

4.3.1 Quarto Caso - Ciclo Vicioso

Por vezes será necessário recorrer a uma equação algébrica a fim de evitar entrar num ciclo de integração por partes.

1. $\int e^x \sin x \, dx$

$$-e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) \, dx$$

u=e^x
u'=e^x
v'=$\sin x$
v=$-\cos x$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

u=e^x
u'=e^x
v'=$\cos x$
v=$\sin x$

$$-e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Como se pode verificar, voltamos a ter o mesmo integral inicial, estamos então a entrar num ciclo vicioso! Resolvendo a equação algébrica, vem que:

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$

4.4 Exercícios

1. $\int \ln x \, dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{1}_{\text{v'}} \, dx$$

u= $\ln(x)$
u'= $\frac{1}{x}$
v'= 1
v= x

$$x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx$$

$$x \ln x - x + c$$

2. $\int x \sin\ x \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{\sin\ x}_{\text{v'}} \, dx$$

u= x
u'= 1
v'= $\sin\ x$
v= $-\cos\ x$

$$-x \cos\ x - \int -\cos\ x \, dx$$

$$-x \cos\ x + \sin\ x + c$$

3. $\int x \cos(3x) \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{\cos(3x)}_{\text{v'}} \, dx$$

u= x
u'= 1
v'= $\cos(3x)$
v= $\frac{\sin(3x)}{3}$

$$x\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right) - \int \frac{\sin(3x)}{3} \, dx$$

$$x\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) \overbrace{(3x)'}^{3} * \frac{1}{3} \, dx$$

$$x\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right) + \frac{1}{9} \cos(3x) + c$$

4. $\int \frac{x}{e^x} \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{e^{-x}}_{\text{v'}} \, dx$$

u= x
u'= 1
v'= e^{-x}
v= $-e^{-x}$

$$-xe^{-x} - \int -e^{-x} \, dx$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} + c$$

5. $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{2^{-x}}_{\text{v'}}\, dx$$

u= x
u'= 1
v'= 2^{-x}
v= $-\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}$

$$x\left(-\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}\right) - \int -\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}\, dx$$

$$x\left(-\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}\right) + \frac{1}{\ln\ 2}\int 2^{-x}\, dx$$

$$x\left(-\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}\right) + \left(\frac{1}{\ln\ 2}\right)\left(\frac{-2^{-x}}{\ln\ 2}\right) + c$$

6. $\displaystyle\int (x+1)5^x\, dx$

$$\int \underbrace{x+1}_{\text{u}} \underbrace{5^x}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $x+1$
u'= 1
v'= 5^x
v= $5^x \ln\ 5$

$$(x+1)\left(\frac{5^x}{\ln\ 5}\right) - \int 5^x \ln\ 5\, dx$$

$$(x+1)\left(\frac{5^x}{\ln\ 5}\right) \ln\ 5 \int 5^x\, dx$$

$$(x+1)\left(\frac{5^x}{\ln\ 5}\right) - 5^x + c$$

7. $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\, dx$

$$\int \underbrace{x^2}_{\text{v'}} \underbrace{\ln\ x}_{\text{u}}\, dx$$

v'= x^2
v= $\frac{x^3}{3}$
u= $\ln\ x$
u'= $\frac{1}{x}$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)(\ln\ x) - \int \frac{x^{\cancel{3}}}{3\cancel{x}}\, dx$$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)(\ln\ x) - \frac{x^3}{9} + c$$

8. $\displaystyle\int \ln^2\ x\, dx$

$$\int \underbrace{\ln^2\ x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{1}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $\ln^2\ x$
u'= $\frac{2\ln\ x}{x}$
v'= 1
v= x

$$x \ln^2\ x - \int \frac{2\ln\ x}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx$$

$$x\ln^2 x - 2\int \underbrace{\ln x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{1}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $\ln x$
u'= $\frac{1}{x}$
v'= 1
v= x

$$x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\, dx\right]$$

$$x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - x\right] + c$$

9. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{\text{u}} \cdot \underbrace{(x^{-3})}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $\ln x$
u'= $\frac{1}{x}$
v'= $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
v= $-\frac{1}{2x^2}$

$$(\ln x)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\, dx$$

$$(\ln x)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{2}\int (x)^{-3}\, dx$$

$$(\ln x)\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + c$$

10. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \underbrace{(\ln x)}_{\text{u}} \underbrace{(x)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $\ln x$
u'= $\frac{1}{x}$
v'= $x^{-\frac{1}{2}}$
v= $2\sqrt{x}$

$$2\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\, dx$$

$$2\sqrt{x}\ln x - 2\int (x)^{\frac{1}{2}}(x)^{-1}\, dx$$

$$2\sqrt{x}\ln x - 2\int (x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$2\sqrt{x}\ln x - 2(2\sqrt{x}) + c$$

11. $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$

$$\int \underbrace{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}_{\text{u}} * \underbrace{1}_{\text{v'}}\, dx$$

u= $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
u'= $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
v'= 1
v= x

$$x\ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$x\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int (x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$x\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\overbrace{(1+x^2)'}^{2x} * \frac{1}{2}\,dx$$

$$x\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2\ x}\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}}\underbrace{(\sin\ x)^{-2}}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x
u'= 1
v'= $(\sin\ x)^{-2}\,dx$
v= $\int \frac{1}{\sin^2\ x}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x$

$$-x\operatorname{cotg} x - \int -\operatorname{cotg} x\,dx$$

$$-x\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos\ x}{\sin\ x}\,dx$$

$$-x\operatorname{cotg} x + \int \frac{\overbrace{(\sin\ x)'}^{\cos\ x}}{\sin\ x}\,dx$$

$$-x\operatorname{cotg} x + \ln|\sin\ x| + c$$

13. $\displaystyle\int \frac{x\ \cos\ x}{\sin^2\ x}\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}}\underbrace{\cos\ x(\sin\ x)^{-2}}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x
u'= 1
v'= $(\cos\ x)(\sin\ x)^{-2}$
v= $\int(\cos\ x)(\sin\ x)^{-2}\,dx = -\operatorname{cosec} x$

$$-x\operatorname{cosec} x - \int -\operatorname{cosec} x\,dx$$

$$-x\operatorname{cosec} x + \int (\operatorname{cosec} x)\,\overbrace{(x)'}^{1}\,dx$$

$$-x\operatorname{cosec} x + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + c$$

14. $\displaystyle\int \underbrace{e^x}_{\text{u}}\underbrace{\sin\ x}_{\text{v'}}\,dx$
u= e^x
u'= e^x
v'= $\sin\ x$
v= $-\cos\ x$

$$-e^x\ \cos\ x - \int e^x(-\cos\ x)\,dx$$

$$-e^x\ \cos\ x + \int \underbrace{e^x}_{\text{u}}\underbrace{\cos\ x}_{\text{v'}}\,dx$$

u= e^x
u'= e^x

v'= $\cos x$
v= $\sin x$

$$-e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Atenção! Se repararmos este integral volta a ser igual ao inicial, estamos portanto num ciclo vicioso.

$$\int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2} \left[-e^x \cos x + e^x \sin x\right] + c$$

15. $\int \underbrace{3^x}_{\text{u}} \underbrace{\cos x}_{\text{v'}} \, dx$
u= 3^x
u'= $3x \ln 3$
v'= $\cos x$
v= $\sin x$

$$3^x \sin x - \int (3x \ln 3)(\sin x) \, dx$$

$$3^x \sin x - 3 \ln 3 \int x \sin x \, dx$$

O integral, $\int x \sin x \, dx$, já fora resolvido anteriormente.

$$3^x \sin x - 3 \ln 3 \left[-x \cos x + \sin x\right] + c$$

16. $\int \sin(\ln x) \, dx$

$$\int \underbrace{\sin(\ln x)}_{\text{u}} * \underbrace{1}_{\text{v'}} \, dx$$

u= $\sin(\ln x)$
u'= $\frac{\cos(\ln x)}{x}$
v'= 1
v= x

$$x \sin(\ln x) - \int \frac{\cancel{x} \cos(\ln x))}{\cancel{x}} \, dx$$

$$x \sin(\ln x) - \int \underbrace{\cos(\ln x)}_{\text{u}} * \underbrace{1}_{\text{v'}} \, dx$$

$$x \sin(\ln x) - \left[x \cos(\ln x) - \int -\frac{\cancel{x} \sin(\ln x))}{\cancel{x}}\right] \, dx$$

Atenção! Se repararmos este integral volta a ser igual ao inicial, estamos portanto num ciclo vicioso.

$$\int \sin(\ln x) \, dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) \, dx$$

$$2 \int \sin(\ln x) \, dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)\right] + c$$

17. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

$$\int \underbrace{\operatorname{cosec} x}_{\text{u}} \underbrace{\operatorname{cosec}^2 x}_{\text{v'}} \, dx$$

u= $\operatorname{cosec} x$
u'= $-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
v'= $\operatorname{cosec}^2 x$
v= $-\operatorname{cotg} x$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)(-\operatorname{cotg} x) \, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx + \int \operatorname{cosec} x \, dx$$

Atenção! Se repararmos este integral volta a ser igual ao inicial, estamos portanto num ciclo vicioso.

$$2\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = (\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|\right] + c$$

18. $\int x \operatorname{arctg}(x^2) \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{v'}} \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_{\text{u}} \, dx$$

u= $\operatorname{arctg}(x^2)$
u'= $\frac{2x}{1+x^4}$
v'= x
v= $\frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}{2} - \int \frac{\cancel{2}x(x^2)}{\cancel{2}(1+x^4)} \, dx$$

$$\frac{x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}{2} - \int \frac{x^3}{1+x^4} \, dx$$

$$\frac{x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}{2} - \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + c$$

19. $\int x \ \arcsin(x^2) \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{v'}} \underbrace{\arcsin(x^2)}_{\text{u}} \, dx$$

u= $\arcsin(x^2)$
u'= $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
v'= x
v= $\frac{x^2}{2}$

$$(\arcsin(x^2))\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \, dx$$

$$(\arcsin(x^2))\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int (x^3)(1-x^4)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

$$(\arcsin(x^2))\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\overbrace{(1-x^4)'}^{-4x^3}*\left(-\frac{1}{4}\right)\,dx$$

$$(\arcsin(x^2))\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{4}\frac{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

20. $\displaystyle\int \sin x\,\ln(\cos x)\,dx$

$$\int\underbrace{\sin x}_{\text{v'}}\underbrace{\ln(\cos x)}_{\text{u}}\,dx$$

u$=\ln(\cos x)$
u'$=-\frac{\sin x}{\cos x}$
v'$=\sin x$
v$=-\cos x$

$$(-\cos x)(\ln(\cos x))-\int\left(-\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\right)(-\cancel{\cos x})\,dx$$

$$(-\cos x)(\ln(\cos x))-\int\sin x\,dx$$

$$(-\cos x)(\ln(\cos x))+\cos x+c$$

21. $\displaystyle\int \cos x\ln(1+\cos x)\,dx$

$$\int\underbrace{\cos x}_{\text{v'}}\underbrace{\ln(1+\cos x)}_{\text{u}}\,dx$$

u$=\ln(1+\cos x)$
u'$=\frac{-\sin x}{1+\cos x}$
v'$=\cos x$
v$=\sin x$

$$(\sin x)(\ln(1+\cos x))-\int\left(-\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)(\sin x)\,dx$$

$$(\sin x)(\ln(1+\cos x))+\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$$

$$(\sin x)(\ln(1+\cos x))+\int\frac{(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\,dx$$

O integral contempla uma fração em que o grau do numerador $\geq$ denominador, faz-se então a divisão!

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{-\cos^2} x+1 & \cos x+1 \\ \cline{2-2}
+\cancel{\cos^2} x+\cos x & -\cos x+1 \\ \hline
\cancel{\cos x+1} & \\
\cancel{-\cos x-1} & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}=-\cos x+1+\frac{0}{\cos x+1}=-\cos x+1$$

$$(\sin x)(\ln(1+\cos x))+\int(-\cos x+1)\,dx$$

$$(\sin x)(\ln(1+\cos x))-\sin x+x+c$$

22. $\int x\,\cos(2x)\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{\cos(2x)}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x
u'= 1
v'= $\cos(2x)$
v= $\frac{\sin(2x)}{2}$

$$(x)\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx$$
$$(x)\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx$$
$$(x)\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right] + c$$

23. $\int x^2 e^x\,dx$

$$\int \underbrace{x^2}_{\text{u}} \underbrace{e^x}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x^2
u'= $2x$
v'= e^x
v= e^x

$$(x^2)(e^x) - \int (2x)(e^x)\,dx$$
$$(x^2)(e^x) - 2\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{e^x}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x
u'= 1
v'= e^x
v= e^x

$$(x^2)(e^x) - 2\left[(x)(e^x) - \int e^x\,dx\right]$$
$$((x^2)(e^x) - 2\left((x)(e^x) - e^x\right) + c$$

24. $\int x^2 \cos\,x\,dx$

$$\int \underbrace{x^2}_{\text{u}} \underbrace{\cos\,x}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x^2
u'= $2x$
v'= $\cos\,x$
v= $\sin\,x$

$$(x^2)(\sin\,x) - \int (2x)(\sin\,x)\,dx$$
$$(x^2)(\sin\,x) - 2\int \underbrace{x}_{\text{u}} \underbrace{\sin\,x}_{\text{v'}}\,dx$$

u= x
u'= 1
v'= $\sin\,x$
v= $-\cos\,x$

$$(x^2)(e^x) - 2\left[(x)(-\cos\,x) - \int -\cos\,x\,dx\right]$$
$$(x^2)(e^x) - 2\left[(x)(-\cos\,x) + \sin\,x\right] + c$$

Capítulo 5

Primitivação de Funções Racionais

Chama-se função racional a qualquer função da forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

onde N(x) e D(x) são polinómios em x. Para se primitivar uma função deste tipo o primeiro passo é, caso o numerador tenha grau superior ou igual ao do denominador, efetuar a divisão de N(x) por D(x). Seja Q(x) o quociente e R(x) o resto. Então,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

onde o grau de R(x) já é menor que o de D(x). Como Q(x) já é um polinómio a sua primitiva é imediata, e o problema reduz-se a primitivar uma função do tipo de

$$\frac{R(x)}{D(x)}$$

cujo numerador tem grau inferior ao do denominador.
Atendendo a que, como é sabido, qualquer polinómio se pode decompor em fatores, pode escrever-se

$$D(x) = a\left((x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_\mathrm{n})\right),$$

onde a representa o coeficiente do termo de maior grau de D(x) e α_1, α_2, ..., α_n, são as raízes (iguais/distintas, reais/complexas), de D(x). Daqui resulta que qualquer fração racional própria (2º e 3º casos) se pode decompor numa soma de frações simples, isto é, dos tipos de

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r} \quad \text{ou} \quad \frac{B+Cx}{[(x-a)^2+b^2]^s}$$

$$(\text{com r e s} \in \mathbb{N})$$

cujas primitivas são fáceis. O passo seguinte é, portanto, calcular as raízes do denominador. De acordo com o tipo destas raízes existem três casos:

1. Se o denominador D(x) tiver apenas raízes reais simples α_1, α_2, ..., α_n, então, a função racional própria pode-se decompor numa soma de frações simples, da forma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right)$$

   onde A_1, A_2, ..., A_n, representam constantes que se podem calcular pelo método dos coeficientes indeterminados, ou outro.

2. Se o denominador D(x) tiver uma raiz real α com multiplicidade k, então as frações simples correspondentes a esta raiz na decomposição de $\frac{R(x)}{D(x)}$ são:

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

3. Se o denominador D(x) tiver raízes complexas (impossível em $\mathbb{R}$) $a \pm bi$ com multiplicidade k, então as frações simples correspondentes a estas raízes na decomposição de $\frac{R(x)}{D(x)}$ são:

$$\frac{A_1 + B_1 x}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 + B_2 x}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \cdots + \frac{A_k + B_k x}{[(x-a)^2 + b^2]^k}$$

5.1 1º Caso - grau numerador ≥ denominador (efetua-se a divisão)

$$f(x) = \frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

(f(x) há-de ser igual ao quociente mais o resto sobre o divisor)

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$

   (a) Fração Racional, grau do numerador superior ao grau do denominador, efetua-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} - x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1}$$

Assim temos:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx = \int \left(x + \frac{-x}{x^2+1}\right) dx = \int x\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^2+1|}{2} + c$$

5.2 2º Caso - fator decomponível

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

   (a) Grau do numerador menor do que o grau do denominador.

   (b) Fatorização:

   $$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x=3 \wedge x=2$$

   $$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)=0$$

   (c) Decomposição da fração:

   $$\frac{x}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)}$$

   (d) Pelo método dos coeficientes indeterminados, para que dois polinómios sejam iguais, os coeficientes dos termos do mesmo grau terão de ser iguais. Donde,

   $$\begin{cases} A+B=1 & (\text{em } x) \\ \\ -2A-3B=0 & (\text{em } x^0) \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$

   Nota: Em vez dos coeficientes indeterminados podemos também fazer pelo seguinte método:

   $$x=A(x-2)+B(x-3)$$

   Começando no 1º termo, se $x=2$ (vai anular esse termo), vem

   $$2=0+B(2-3) \Leftrightarrow B=-2$$

   Movendo para o próximo termo, se $x=3$ (vai anular esse termo), vem

   $$3=A(3-2)+0 \Leftrightarrow A=3$$

   E temos então os coeficientes determinados.

   Eu aconselho utilizar o segundo método se o polinómio envolvente for de ordem igual ou superior a 2 e se a escolha para os valores de x for bem feita. Por questão de simplicidade/rapidez usei o método dos coeficientes indeterminados ao longo da resolução dos exercícios.

Assim temos:

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left(\frac{\frac{3}{5}}{x-3}+\frac{\frac{2}{5}}{x-2}\right)dx=\frac{3}{5}\ln|x-3|+\frac{2}{5}\ln|x-2|+c$$

5.3 3º Caso - fator indecomponível (não tem zeros em $\mathbb{R}$)

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+2x}\,dx$

   (a) Fatorização:

   $$x^3 + 2x = x(x^2+2)$$

   (b) $x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=-2\,\}\,\emptyset$ em $\mathbb{R}$ (fator indecomponível)

   (c) Decomposição da fração:

   $$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+2} = \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)}$$

   (d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados

   $$\begin{cases} A+B=1 \\ C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim temos:

   $$\int \frac{x^2+1}{x^3+2x}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x+0}{x^2+2} \right) dx = \frac{\ln|x|}{2} + \frac{\ln|x^2+2|}{4} + c$$

5.4 Exercícios

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2}\,dx$

   (a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

   (b) Fatorização:

   $$x^3+x^2 = x^2(x+1)$$

   (c) Decomposição da Fração:

   $$\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx^2+Bx+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

   (d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

   $$\begin{cases} B+C=2 \\ A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C=3 \\ B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

   Temos que:

   $$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x}+\frac{3}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{x}-\ln|x|+3\ln|x+1|+c$$

2. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-2x}$

   (a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

   (b) Fatorização:

   $$x^2-2x = x(x-2)$$

   (c) Decomposição da Fração:

   $$\frac{2x+1}{x(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx}{x(x-2)}$$

   (d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

   $$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B=\frac{5}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Temos que:

   $$\int \frac{2x+1}{x^2-2x}\,dx = \int \frac{2x+1}{x(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{5}{2}}{x-2}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{2}\ln|x-2|+c$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4-3x^3+2x^2}\,dx$

   (a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

   (b) Fatorização:

   $$\frac{x^2-1}{x^4-3x^3+2x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x^2-3x+2)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-2)\cancel{(x-1)}x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-2)}$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{x+1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2}{x^2(x-2)}$$

(d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - 2B = 1 \\ -2A = 1 \end{cases} \qquad \ldots \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} C = \frac{3}{4} \\ B = -\frac{3}{4} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4 - 3x^3 + 2x^2}\, dx = \int \frac{x+1}{x^2(x-2)}\, dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} \right) dx = \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{3}{4} \ln|x-2| + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{(x-1)^2\, x} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x} = \frac{Ax + Bx^2 - Bx + Cx^2 - 2Cx + C}{(x-1)^2\, x}$$

(d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - B - 2C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \ldots \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx = \int \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + c$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\, dx$

(a) Grau do numerador superior ao do denominador, efetua-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} + 2x^2 - x & x + 2 \\ \hline \cancel{2x^2} - x & \\ -\cancel{2x^2} + 4x - 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Assim temos:

$$\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx = \int x\,dx + 2\int 1\,dx + \int \frac{3x-2}{(x-1)^2}\,dx$$

Os dois primeiros integrais são imediatos, temos então depois este integral:

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)^2}\,dx$$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização: (não é necessário)

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A+Bx-B}{(x-1)^2}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B = 3 \\ \\ A - B = -2 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = 3 \\ \\ A = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os integrais todos, vem:

$$\frac{x^2}{2} + 2x + \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + c$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

(a) Grau do numerador superior ao do denominador, efetua-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} \qquad -2x+\cancel{1} & x^3-x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3}+x^2+x\cancel{-1} & 1 \\ \hline x^2-x & \end{array}$$

$$\frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2-x+1} = 1 + \frac{x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\int \frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int \left(1+\frac{x^2-x}{x^3-x^2-x+1}\right)dx$$

Vamos tentar usar a Regra de Ruffini com $x=1$ para tentar baixar o grau:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-2x+1) = (x-1)(x^2-1)$$

Continuando a resolução do integral vem:

$$\int 1\,dx + \int \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2-1)}\,dx = x + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

Tomemos atenção ao integral $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \\ -A + B = 0 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Continuando o integral, temos:

$$x + \int \frac{x}{(x+1)(x-1)}\,dx = x + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) dx = x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

7. $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização: (não é necessário)

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \\ -2A + B = 1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} \right) dx = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$$

8. $\int \frac{x-1}{x(x-2)}\,dx$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização: (não é necessário)

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{x-1}{(x)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx}{x(x-2)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \\ -2A = -1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{x-1}{(x)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + c$$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)x}\,dx$

 (a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

 (b) Fatorização: (não é necessário)

 (c) Decomposição da Fração:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x} = \frac{Ax^2-2Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-3Cx+2C}{(x-1)(x-2)x}$$

 (d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2A+B-3C=0 \\ 2C=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{5}{6} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)x}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x}\right)\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x| + c$$

10. $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x-1)^3}\,dx$

 (a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

 (b) Fatorização: (não é necessário)

 (c) Decomposição da Fração:

$$\frac{x-2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} = \frac{A+Bx-B+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)^3}$$

 (d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} C=0 \\ B-2C=1 \\ A-B+C=-2 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C=0 \\ B=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

Temos que:

$$\int \frac{x-2}{(x-1)^3}\,dx = \int \left(\frac{-1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + 0\right)\,dx = \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + c$$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}\,dx$

 (a) Grau do numerador igual ao do denominador, efetua-se a divisão!

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} \qquad + \cancel{1} & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2} + 2x \cancel{-1} & 1 \\ \hline 2x & \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2x}{x^2-2x+1}$$

Assim temos:

$$\int \left(1 + \frac{2x}{x^2-2x+1}\right) dx = \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2-2x+1}\, dx$$

O primeiro integral é imediato, temos então depois este integral:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+1}\, dx$$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador

(b) Fatorização:

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A+Bx-B}{(x-1)^2}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B=0 \\ \\ A-B=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B=0 \\ \\ A=1 \end{cases}$$

Temos que:

$$\int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x^2-2x+1}\, dx = x + 2\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + 0\right) dx = x - \frac{2}{x-1} + c$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{(x^2-3x+2)(x-1)}\, dx$

O grau do numerador é igual ao do denominador. Para não trabalharmos com um polinómio de grau 3 vamos tentar baixar o grau.

Aplicando a Regra de Ruffini ao polinómio numerador com $x=1$ vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^3-2x+1 = (x-1)(x^2+x-1)$$

Temos então:

$$\int \frac{x^3-2x+1}{(x^2-3x+2)(x-1)}\, dx = \int \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^2-3x+2)}\, dx = \int \frac{x^2+x-1}{x^2-3x+2}\, dx$$

(a) Grau do numerador igual ao grau do denominador, faz-se a divisão!

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}+x-1 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^2}+3x-2\cancel{-1} & 1 \\ \hline 4x-3 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{4x-3}{x^2-3x+2}$$

Vem então:

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(1+\frac{4x-3}{x^2-3x+2}\right)\,dx$$

O primeiro integral é imediato, contudo o seguinte integral:

$$\int \frac{4x-3}{x^2-3x+2}\,dx$$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização:

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{4x-3}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-1)(x-2)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ \\ -A-2B=-3 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=5 \\ \\ B=-1 \end{cases}$$

Temos então:

$$\int \left(1+\frac{4x-3}{x^2-3x+2}\right)\,dx = x + \int \left(\frac{5}{x-2}+\frac{-1}{x-1}\right)\,dx = x+5\ln|x-2|-\ln|x-1|+c$$

Capítulo 6

Primitivação de Funções Trigonométricas

6.1 Simplificações

$$\frac{1}{\sin^a x} = \text{cosec}^a x \qquad \frac{1}{\text{cosec}^a x} = \sin^a x \qquad \text{tg} = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\frac{1}{\cos^a x} = \sec^a x \qquad \frac{1}{\sec^a x} = \cos^a x \qquad \text{cotg} = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\frac{1}{\text{tg}^a x} = \text{cotg}^a x \qquad \frac{1}{\text{cotg}^a x} = \text{tg}^a x$$
$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

6.2 Potências de Funções trigonométricas

6.2.1 Potência ímpar de $\sin x$

Destaca-se uma unidade à potência e à potência de expoente par aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

1. $\int \sin^5 x \, dx$

$$\int \sin x \cdot \sin^4 x \, dx$$
$$\int \sin x \cdot \left(\sin^2 x\right)^2 \, dx$$
$$\int (\sin x) \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \, dx$$
$$\int (\sin x) \left(1 - 2\cos^2 x + cos^4 x\right) dx$$
$$\int \sin x \, dx - 2 \int \sin x \cos^2 x \, dx + \int \sin x \cos^4 x \, dx$$
$$-\cos x - 2 \int (\cos x)^2 \overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x} * (-1) \, dx + \int (\cos x)^4 \overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x} * (-1) \, dx$$
$$-\cos x + 2 \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

6.2.2 Potência par de $\sin x$

Passa-se para o arco duplo através da fórmula:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$$

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx$$
$$\int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

6.2.3 Potência ímpar de $\cos x$

Destaca-se uma unidade à potência e à potência de expoente par aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}$$

1. $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$

$$\int \cos x \cdot \cos^2 x\, dx$$
$$\int (\cos x)(1-\sin^2 x)\, dx$$
$$\int \cos x\, dx - \int (\cos x)(\sin x)^2\, dx$$
$$\sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

6.2.4 Potência par de $\cos x$

Passa-se para o arco duplo através da fórmula:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$$

1. $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$

$$\int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx$$
$$-\frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$
$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

6.2.5 Potência ímpar de $\operatorname{tg} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$

$$\int (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x)(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x)(\sec x)^2 - \int \operatorname{tg} x\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x)^1 \overbrace{(\operatorname{tg} x)'}^{\sec^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c$$

6.2.6 Potência par de $\operatorname{tg} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$

$$\int (\operatorname{tg}^2 x)(\operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg}^2 x)(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg}^2 x)(\sec^2 x)\, dx - \int \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x)^2 \overbrace{(\operatorname{tg} x)'}^{\sec^2 x}\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \sec^2 x\, dx + \int 1\, dx$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + c$$

6.2.7 Potência par de $\operatorname{cotg} x$

Destaca-se $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^4 x \, dx$

$$\int (\operatorname{cotg}^2 x)(\operatorname{cotg}^2 x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg}^2 x)(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg}^2 x)(\operatorname{cosec}^2 x)\, dx - \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^2 \overbrace{(\operatorname{cotg} x)'}^{-\operatorname{cosec}^2 x} * (-1)\, dx - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$$

$$-\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x + x + c$$

6.2.8 Potência ímpar de $\operatorname{cotg} x$

Destaca-se $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3 x \, dx$

$$\int (\operatorname{cotg} x)(\operatorname{cotg}^2 x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)(\operatorname{cosec}^2 - 1)\, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)(\operatorname{cosec}^2 x)\, dx - \int \operatorname{cotg} x \, dx$$

$$\int (\operatorname{cotg} x)^1 \overbrace{(\operatorname{cotg} x)'}^{-\operatorname{cosec}^2 x} * (-1) - \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + c$$

6.2.9 Potência par de $\sec x$

Destaca-se $\sec^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

1. $\int \sec^4 x\, dx$

$$\int (\sec^2 x)(\sec^2 x)\, dx$$

$$\int (\sec^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

$$\int \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$\operatorname{tg} x + \int (\operatorname{tg} x)^2 \overbrace{(\operatorname{tg} x)'}^{\sec^2 x}\, dx$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$$

6.2.10 Potência ímpar de $\sec x$

Destaca-se $\sec^2 x$ e primitiva-se por partes começando por esse fator.

1. $\int \sec^3 x\, dx$

$$\int (\sec x)(\sec^2 x)\, dx$$

$$(\sec x)(\operatorname{tg} x) - \int (\sec x)(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)\, dx$$

$$(\sec x)(\operatorname{tg} x) - \int (\sec x)(\operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

$$(\sec x)(\operatorname{tg} x) - \int (\sec x)(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$(\sec x)(\operatorname{tg} x) - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Ciclo Vicioso: pode-se reparar que o fator $\int \sec^3 x\, dx$ volta a surgir. Portanto, vem que:

$$\int \sec^3 x\, dx = (\sec x)(\operatorname{tg} x) - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx + \int \sec^3 x\, dx = (\sec x)(\operatorname{tg} x) + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = (\sec x)(\operatorname{tg} x) + \int \sec x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{(\sec x)(\operatorname{tg} x) + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|}{2} + c$$

6.2.11 Potência par de $\operatorname{cosec} x$

Destaca-se $\operatorname{cosec}^2 x$ e aplica-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x}$$

1. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

$$\int (\operatorname{cosec}^2 x)(\operatorname{cosec}^2 x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{cosec}^2 x)(1 + \operatorname{cotg}^2 x)\, dx$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$

$$-\operatorname{cotg} x + \int (\operatorname{cotg} x)^2 \overbrace{(\operatorname{cotg} x)'}^{-\operatorname{cosec}^2 x} * (-1)\, dx$$

$$-\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + c$$

6.2.12 Potência ímpar de $\operatorname{cosec} x$

Destaca-se $\operatorname{cosec}^2 x$ e primitiva-se por partes começando por esse fator.

1. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$

$$\int \underbrace{(\operatorname{cosec}^2 x)}_{\text{v'}} \cdot \underbrace{(\operatorname{cosec} x)}_{\text{u}}\, dx$$

v'=$\operatorname{cosec}^2 x$
v=$\operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x$
u=$\operatorname{cosec} x$
u'=$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)(-\operatorname{cotg} x)\, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)(\operatorname{cotg}^2 x)\, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)(\operatorname{cosec}^2 x)\, dx + \int (\operatorname{cosec} x)(\operatorname{cotg} x)\, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) - \int (\operatorname{cosec} x)^2 \overbrace{(\operatorname{cosec} x)'}^{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} * (-1)\, dx + \int \left(\frac{1}{\sin\ x} \cdot \frac{\cos\ x}{\sin\ x} \right) dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) + \frac{\operatorname{cosec}^3 x}{3} + \int (\sin\ x)^{-2} \overbrace{(\sin\ x)'}^{\cos\ x}\, dx$$

$$(\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cotg} x) + \frac{\operatorname{cosec}^3 x}{3} - \frac{1}{\sin\ x} + c$$

6.3 Produto de Funções Trigonométricas (mesmo ângulo)

6.3.1 Potência ímpar de $\sin x$ por qualquer potência de $\cos x$

Destaca-se $\sin x$ e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

1. $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \, dx$

$$\int \sin x \cdot \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin x \left(\sin^2 x\right)^2 \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$\int (\sin x)(\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1)(\cos^2 x) \, dx$$

$$\int (\sin x)(\cos^6 x - 2\cos^4 x + \cos^2 x) \, dx$$

$$\int \cos^6 x \sin x \, dx - 2\int \cos^4 x \sin x + \int \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$-\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

6.3.2 Potência ímpar de $\cos x$ por qualquer potência de $\sin x$

Destaca-se $\cos x$ e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$$

1. $\displaystyle\int \sin^2(3x) \cdot \cos^3(3x) \, dx$

$$\int \sin^2(3x)\cos^2(3x)\cos(3x) \, dx$$

$$\int \sin^2(3x)(1 - \sin^2(3x))\cos(3x) \, dx$$

$$\int (\sin^2(3x) - \sin^4(3x))\cos(3x) \, dx$$

$$\int \sin^2(3x)\cos(3x) \, dx - \int \sin^4(3x)\cos(3x) \, dx$$

$$\frac{\sin^3(3x)}{9} - \frac{\sin^5(3x)}{15} + c$$

6.3.3 Potência par de $\sin x$ por potência par de $\cos x$

Aplicam-se as fórmulas:

$\sin 2x = 2\sin\, x \cos\, x$	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

1. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$

$$\int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\,dx$$

$$\frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))(1+\cos(2x))\,dx$$

$$\frac{1}{4}\int (1+\cancel{\cos(2x)}-\cancel{\cos(2x)}-(\cos(2x))^2)\,dx$$

$$\frac{1}{4}\int 1\,dx - \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx$$

$$\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos(4x))\,dx$$

$$\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin(4x)}{4}\right)$$

$$\frac{x}{8}-\frac{\sin(4x)}{32}+c$$

6.4 Produto de Funções Trigonométricas (ângulos diferentes)

6.4.1 Produto de $\sin(x) * \sin(y)$

Aplica-se a fórmula:

$$\boxed{\sin\, x \sin\, y = \frac{1}{2}[\cos(x{-}y) - \cos(x{+}y)]}$$

1. $\displaystyle\int \sin(6x)\sin(2x)\,dx$

$$\int \frac{1}{2}[\cos(6x-2x) - \cos(6x+2x)]\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int (\cos(4x) - \cos(8x))\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \cos(4x) - \frac{1}{2}\int \cos(8x)\,dx$$

$$\frac{\sin(4x)}{8} - \frac{\sin(8x)}{16} + c$$

6.4.2 Produto de $\cos(x) * \cos(y)$

Aplica-se a fórmula:

$$\boxed{\cos\, x \cos\, y = \frac{1}{2}[\cos(x{+}y) + \cos(x{-}y)]}$$

1. $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx$

$$\int \frac{1}{2}[\cos(5x+3x) + \cos(5x-3x)]\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int (\cos(8x) + \cos(2x))\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \cos(8x)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$$

$$\frac{\sin(8x)}{16} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

6.4.3 Produto de $\sin(x) * \cos(y)$

Aplica-se a fórmula:

$$\boxed{\sin\, x \cos\, y = \frac{1}{2}[\sin(x{+}y) + \sin(x{-}y)]}$$

1. $\int \sin(3x)\cos(7x)\,dx$

$$\frac{1}{2}(\sin(7x+3x)+\sin(7x-3x))\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int(\sin(10x))+\sin(4x))\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sin(10x)\,dx - \frac{1}{2}\sin(4x)\,dx$$

$$-\frac{\cos(10x)}{20}-\frac{\cos(4x)}{8}+c$$

6.5 Exercícios

1. $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

$$\int \cos\, x \cos^2 x \sin^4 x \, dx$$

$$\int (\cos\, x)(1 - \sin^2 x)(\sin^4 x) \, dx$$

$$\int (\cos\, x)(\sin^4 x - \sin^6 x) \, dx$$

$$\int (\cos\, x)(\sin^4 x) \, dx - \int (\cos\, x)(\sin^6 x) \, dx$$

$$\int (\sin\, x)^4 \overbrace{(\sin\, x)'}^{\cos\, x} \, dx - \int (\sin\, x)^6 \overbrace{(\sin\, x)'}^{\cos\, x} \, dx$$

$$\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

2. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

$$\int (\sin\, x)(\sin^2 x)(\cos^4 x) \, dx$$

$$\int (\sin\, x)(1 - \cos^2 x)(\cos^4 x) \, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^4 x) \, dx - \int (\sin\, x)(\cos^6 x) \, dx$$

$$-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

3. $\displaystyle\int \sin^{-4} x \cos^3 x \, dx$

$$\int \sin^{-4} x \cos\, x \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin^{-4} x (\cos\, x)(1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\int (\sin^{-4} x - \sin^{-2} x)(\cos\, x) \, dx$$

$$\int \sin^{-4} x \cos\, x \, dx - \int \sin^{-2} x \cos\, x \, dx$$

$$\frac{\sin^{-3} x}{-3} - \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c$$

4. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^{-4} x \, dx$

$$\int (\sin\, x)(\sin^2 x)(\cos^{-4} x) \, dx$$

$$\int (\sin\, x)(1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x) \, dx$$

$$\int (\sin\,x)(\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)\,dx$$

$$\int (\sin\,x)(\cos^{-4} x)\,dx - \int (\sin\,x)(\cos^{-2} x)\,dx$$

$$-\frac{\cos^{-3} x}{-3} + \frac{\cos^{-1} x}{-1} + c$$

5. $\displaystyle\int \sin^3 x\sqrt{\cos\,x}\,dx$

$$\int (\sin\,x)(\sin^2 x)(\cos\,x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\sin\,x)(1-\cos^2 x)(\cos\,x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\sin\,x)(\cos^{\frac{1}{2}} x - \cos^{\frac{5}{2}x})\,dx$$

$$\int (\cos^{\frac{1}{2}} x)(\sin\,x)\,dx - \int (\cos^{\frac{5}{2}} x)(\sin\,x)\,dx$$

$$-\frac{2\cos^{\frac{3}{2}} x}{3} + \frac{2\cos^{\frac{7}{2}} x}{7} + c$$

6. $\displaystyle\int \cos^3 x\sqrt{\sin\,x}\,dx$

$$\int (\cos\,x)(\cos^2 x)(\sin\,x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\cos\,x)(1-\sin^2 x)(\sin\,x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\cos\,x)(\sin^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{5}{2}} x)\,dx$$

$$\int (\sin^{\frac{1}{2}} x)(\cos\,x)\,dx - \int (\sin^{\frac{5}{2}} x)(\cos\,x)\,dx$$

$$\frac{2\sin^{\frac{3}{2}} x}{3} - \frac{2\sin^{\frac{7}{2}} x}{7} + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin\,x}}\,dx$

$$\int (\cos\,x)(\cos^2 x)(\sin\,x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\cos\,x)(1-\sin^2 x)(\sin\,x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int (\cos\,x)(\sin^{-\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{3}{2}} x)\,dx$$

$$\int (\sin\,x)(\cos^{-\frac{1}{3}} x)\,dx - \int (\sin^{\frac{3}{2}} x)(\cos\,x)\,dx$$

$$2\sqrt{\sin\,x} - \frac{2\sqrt{\sin^5 x}}{5} + c$$

8. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos\, x}}\, dx$

$$\int (\sin\, x)(\sin^2 x)(\cos\, x)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(1-\cos^2 x)(\cos\, x)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^{-\frac{1}{3}} x-\cos^{\frac{5}{3}} x)\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^{-\frac{1}{3}} x)\, dx-\int (\sin\, x)(\cos^{\frac{5}{3}} x)\, dx$$

$$-\frac{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}{2}+\frac{3\sqrt[3]{\cos^8 x}}{8}+c$$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^2 x}}\, dx$

$$\int \frac{(\sin\, x)(\sin^2 x)}{\sqrt[\cancel{4}]{(\cos\, x)^{\cancel{2}}}}\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\sin^2 x)(\cos\, x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(1-\cos^2 x)(\cos\, x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^{-\frac{1}{2}} x-\cos^{\frac{3}{2}} x)\, dx$$

$$\int (\sin\, x)(\cos^{-\frac{1}{2}} x)\, dx-\int (\sin\, x)(\cos^{\frac{3}{2}} x)\, dx$$

$$-2\sqrt{\cos\, x}-\frac{2\sqrt{\cos^5 x}}{5}+c$$

10. $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(3x)\, dx$

$$\int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)\right]\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int (\cos\, x-\cos(5x))\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int \cos\, x\, dx-\frac{1}{2}\cos(5x)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\sin\, x-\frac{1}{10}\sin(5x)+c$$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{cosec}^4 x}{\mathrm{tg}\, x}\, dx$

$$\int \frac{\frac{1}{\sin^4 x}}{\frac{\sin\, x}{\cos\, x}}\, dx$$

$$\int \frac{\cos\, x}{\sin^5 x}\, dx$$

$$\int (\sin^{-5} x)(\cos\, x)\, dx$$

$$\frac{\sin^{-4} x}{-4}+c$$

12. $\displaystyle\int \sin^2(2x)\,dx$

$$\int \frac{1}{2}\left[1-\cos(4x)\right]\,dx$$

$$\int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(4x)\,dx$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8} + c$$

13. $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(-2x)\,dx$

$$\int \frac{1}{2}\left[\sin(x)+\sin(5x)\right]\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \sin\,x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(5x)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\cos\,x - \frac{1}{10}\cos(5x) + c$$

Capítulo 7

Primitivas por Substituição

A primitivação por substituição rege-se pela fórmula:

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]g'(t)\,dt$$

Isto é: para primitiva $f(x)$ por substituição da variável, escolhe-se uma função biunívoca $x = g(t)$, derivável, que transforme o intervalo $[t_0, T]$, onde é definida, no intervalo $[a, b]$ de definição de $f(x)$ e tal que permita determinar a primitiva de $f[g(t)]g'(t)$; na primitiva obtida, substitui-se, então t pelo seu valor em x.

Sejam a, b, c e d constantes reais. A notação $R(\cdots)$ indica que se trata de uma função que envolve apenas somas, diferenças, produtos e quocientes das funções que se encontram entre parêntesis.

Só é feito objeto de estudo as seguintes regras:

1. $R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$ faz-se $x = \frac{a}{b}\sin t$ ou $x = \frac{a}{b}\cos t$ ou $x = \frac{a}{b}\mathrm{th}\, t$
2. $R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$ faz-se $x = \frac{a}{b}\mathrm{tg}\, t$ ou $x = \frac{a}{b}\mathrm{sh}\, t$
3. $R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$ faz-se $x = \frac{a}{b}\sec t$ ou $x = \frac{a}{b}\mathrm{ch}\, t$
4. $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}})$ faz-se $x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, \cdots)$
5. $R(a^{rx}, a^{sx}, \cdots)$ faz-se $a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c.(r, s, \cdots)$

7.1 Trigonométricas (Regras 1,2,3)

1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (*Regra 1*)

   Fazendo $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,(\sin t)'\ dt \\
&= \int \sqrt[\cancel{2}]{(\cos t)^{\cancel{2}}}\ \cos t\,dt \\
&= \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int 1\,dt + \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + c
\end{aligned}$$

   e, regressando à variável original, como $t = \arcsin x$, vem:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + c$$

2. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ (*Regra 2*)

   Fazendo $x = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow t = \operatorname{arctg} x$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{1+(\operatorname{tg} t)^2}(\operatorname{tg} t)'\,dt \\
&= \int \sqrt[\cancel{2}]{(\sec t)^{\cancel{2}}}\sec^2 t\,dt \\
&= \int \sec^3 t\,dt \quad \text{(primitiva já calculada por partes atrás)} \\
&= \frac{(\sec t)(\operatorname{tg} t) + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + c
\end{aligned}$$

   e, regressando à variável original, como $t = \operatorname{arctg} x$, vem:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{(\sec(\operatorname{arctg} x))(\overbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}^{x}) + \ln|\sec(\operatorname{arctg} x) + \overbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}^{x}|}{2} + c$$

3. $\displaystyle\int \sqrt{-1+x^2}\,dx$ (*Regra 3*)

Fazendo $x = \sec t \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsec} x$ e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{(\sec t)^2 - 1}(\sec t)'\,dt \\
&= \int \sqrt{\sec^2 t - 1}(\operatorname{tg} t)(\sec t)\,dt \\
&= \int \cancel{\sqrt[2]{\vphantom{t}}}\!\!\sqrt{(\operatorname{tg} t)^{\cancel{2}}}(\sec t)(\operatorname{tg} t)\,dt \\
&= \int (\operatorname{tg}^2 t)(\sec t)\,dt \\
&= \int (1 - \sec^2 t)(\sec t)\,dt \\
&= \int \sec t\,dt - \int \sec^3\ dt \quad \text{(primitiva de } sec^3 \text{ já calculada atrás por partes)} \\
&= \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| - \frac{(\sec t)(\operatorname{tg} t) + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|}{2} + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \operatorname{arcsec} x$, vem:

$$
\int \sqrt{-1+x^2}\,dx = \ln|\overbrace{\sec(\operatorname{arcsec} x)}^{x} + \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)| - \frac{(\overbrace{\sec(\operatorname{arcsec} x)}^{x})(\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)) + \ln|\overbrace{\sec(\operatorname{arcsec} x)}^{x} + \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)|}{2} + c
$$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ (*Regra 1*)

Fazendo $x = 2\sin t \Leftrightarrow t = \arcsin(\frac{x}{2})$ e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}{2\sin t}(2\sin t)'\,dt \\
&= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{2\sin t} 2\cos t\,dt \\
&= \int \frac{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}{\cancel{2}\sin t}\cancel{2}\cos t\,dt \\
&= \int \frac{2\sqrt{(\cos t)^2}}{\sin t}\cos t\,dt \\
&= 2\int \frac{\cos t}{\sin t}\cos t\,dt \\
&= 2\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt \\
&= 2\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{\sin t}\,dt - 2\int \frac{\sin^2 t}{\sin t}\,dt \\
&= 2\int \operatorname{cosec} t\,dt - 2\int \sin t\,dt \\
&= 2\ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t| + 2\cos t + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \arcsin(\frac{x}{2})$, vem:

$$
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = 2\ln|\operatorname{cosec}(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)) - \operatorname{cotg}(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right))| + 2\cos(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)) + c
$$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}\,dx$ (*Regra 2*)

Fazendo $x = 3\mathrm{tg}\,t \Leftrightarrow t = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sqrt{9+(3\mathrm{tg}\,t)^2}}{3\mathrm{tg}\,t}(3\mathrm{tg}\,t)'\,dt \\
&= \int \frac{\sqrt{9(1+\mathrm{tg}^2\,t)}}{3\mathrm{tg}\,t}(3\sec^2\,t)\,dt \\
&= 3\int \frac{\sqrt[2]{(\sec\,t)^2}}{\mathrm{tg}\,t}\sec^2 t\,dt \\
&= 3\int \frac{\sec^3 t}{\mathrm{tg}\,t}\,dt \\
&= 3\int \sec^3 t\mathrm{cotg}\,t\,dt \\
&= 3\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos\,t}{\sin\,t}\,dt \\
&= 3\int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\sin\,t}\,dt \\
&= 3\int \sec^2 t\cdot\mathrm{cosec}\,t\,dt \\
&= 3\int (1+\mathrm{tg}^2 t)(\mathrm{cosec}\,t)\,dt \\
&= 3\int \mathrm{cosec}\,t\,dt + 3\int \mathrm{tg}^2 t\,\mathrm{cosec}\,t\,dt \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + 3\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\sin\,t}\,dt \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + 3\int \frac{\sin\,t}{\cos^2 t}\,dt \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + 3\int \sin\,t\cdot\cos^{-2} t\,dt \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + 3\int (\cos\,t)^{-2}\overbrace{(\cos\,t)'}^{-\sin\,t}*(-1)\,dt \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| - 3\frac{\cos^{-1} t}{-1} + c \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + \frac{3}{\cos\,t} + c \\
&= 3\ln|\mathrm{cosec}\,t-\mathrm{cotg}\,t| + 3\sec\,t + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \mathrm{arctg}(\frac{x}{3})$, vem:

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}\,dx = 3\ln|\mathrm{cosec}(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)) - \mathrm{cotg}(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right))| + 3\sec(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)) + c$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2-16}{x}\,dx$ (*Regra 3*)

Fazendo $x = 4\sec\,t \Leftrightarrow t = \text{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sqrt{(4\sec\,t)^2-16}}{4\sec\,t}(4\sec\,t)'\,dt \\
&= \int \frac{\sqrt{16(\sec^2 t-1)}}{\cancel{4\sec\,t}}(\cancel{4\sec\,t}\,\text{tg}\,t)\,dt \\
&= 4\int \sqrt[\cancel{2}]{(\text{tg}\,t)^{\cancel{2}}}\,\text{tg}\,t\,dt \\
&= 4\int \text{tg}^2 t\,dt \\
&= 4\int (\sec^2 t-1)\,dt \\
&= 4\int \sec^2 t\,dt - 4\int 1\,dt \\
&= 4\,\text{tg}\,t - 4t + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \text{arcsec}(\frac{x}{4})$, vem:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx = 4\,\text{tg}(\text{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right)) - 4\,\text{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (*Regra 1*)

Fazendo $x = 2\sin\,t \Leftrightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{(2\sin\,t)\sqrt{4-(2\sin\,t)^2}}(2\sin\,t)'\,dt \\
&= \int \frac{\cancel{2}\cos\,t}{(\cancel{2}\sin\,t)\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{\cos}\,t}{(\sin\,t)\sqrt[\cancel{2}]{(\cancel{\cos}\,t)^{\cancel{2}}}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin\,t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \text{cosec}\,t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|\text{cosec}\,t - \text{cotg}\,t| + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \arcsin(\frac{x}{2})$, vem:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\text{cosec}(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)) - \text{cotg}(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right))| + c$$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+9x^2}}\,dx$ (*Regra 2*)

Fazendo $x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t \Leftrightarrow t = \operatorname{arctg}(3x)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{(\frac{1}{3}\operatorname{tg} t)\sqrt{1+9(\frac{1}{3}\operatorname{tg} t)^2}} \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg} t\right)' dt \\
&= \int \frac{3}{\operatorname{tg} t\sqrt{1+9\left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{9}\right)}} \cdot \frac{\sec^2 t}{3}\, dt \\
&= \cancel{3}\int \frac{\sec^2 t}{\cancel{3}\operatorname{tg} t\sqrt{1+\cancel{9}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{\cancel{9}}\right)}}\, dt \\
&= \int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg} t\sqrt[\cancel{2}]{(\sec\, t)^{\cancel{2}}}}\, dt \\
&= \int \frac{\sec\, t}{\operatorname{tg} t}\, dt \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cancel{\cos\, t}}}{\frac{\sin\, t}{\cancel{\cos\, t}}}\, dt \\
&= \int \frac{1}{\sin\, t}\, dt \\
&= \int \operatorname{cosec} t\, dt \\
&= \ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{cotg} t| + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \operatorname{arctg}(3x)$, vem:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+9x^2}}\,dx = \ln|\operatorname{cosec}(\operatorname{arctg}(3x)) - \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg}(3x))| + c$$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$ (*Regra 3*)

Fazendo $x = 2\sec\, t \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{(2\sec\, t)\sqrt{(2\sec\, t)^2}\sqrt{(2\sec\, t)^2-4}}(2\sec\, t)'\, dt \\
&= \int \frac{(\cancel{2\sec\, t}\operatorname{tg} t)}{(\cancel{2\sec\, t})\sqrt{4(\sec^2 t-1)}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt[\cancel{2}]{(\operatorname{tg} t)^{\cancel{2}}}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int 1\, dt \\
&= \frac{1}{2}t + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{2})$, vem:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (*Regra 1*)

Fazendo $x = \sin\, t \Leftrightarrow t = \arcsin\, x$ e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(\sin\, t)^2}{\sqrt{1-(\sin\, t)^2}}(\sin\, t)'\, dt \\
&= \int \frac{(\sin\, t)^2}{\sqrt[\cancel{2}]{(\cancel{\cos}\, t)^{\cancel{2}}}}\cancel{\cos}\, t\, dt \\
&= \int \sin^2 t\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \cos(2t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \arcsin\, x$, vem:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\arcsin\, x - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin\, x) + c$$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$ (*Regra 2*)

Fazendo $x = 2\,\mathrm{tg}\, t \Leftrightarrow t = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$ e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(2\,\mathrm{tg}\, t)^2}{\sqrt{4+(2\mathrm{tg}\, t)^2}}(2\,\mathrm{tg}\, t)'\, dt \\
&= \int \frac{(2\,\mathrm{tg}\, t)^2}{\sqrt{\cancel{4}(1+\mathrm{tg}^2 t)}}(\cancel{2}\sec^2 t)\, dt \\
&= \int \frac{(2\,\mathrm{tg}\, t)^2}{\sqrt[\cancel{2}]{(\cancel{\sec t})^{\cancel{2}}}}(\sec^{\cancel{2}\,1}\, t)\, dt \\
&= \int (2\,\mathrm{tg}\, t)^2(\sec\, t)\, dt \\
&= 4\int (1-\sec^2 t)(\sec\, t)\, dt \\
&= 4\int \sec\, t dt - 4\int \sec^2 t\, dt \\
&= 4\ln|\sec\, t + \mathrm{tg}\, t| - 4\mathrm{tg}\, t + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \mathrm{arctg}(\frac{x}{2})$, vem:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = 4\ln|\sec(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)) + \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right))| - 4\,\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right))| + c$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$ (*Regra 3*)

Fazendo $x = \frac{3}{2}\sec\, t \Leftrightarrow t = \text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right)$ e, portanto, vem:

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{\left(\frac{3}{2}\sec\, t\right)^2}{\sqrt{4\left(\frac{3}{2}\sec\, t\right)^2 - 9}} \left(\frac{3}{2}\sec\, t\right)' dt \\
&= \int \frac{\frac{9}{4}\sec^2 t}{\sqrt{\cancel{4}\left(\frac{9\sec^2 t}{\cancel{4}}\right) - 9}} \left(\frac{3}{2}\sec\, t\,\text{tg}\, t\right) dt \\
&= \int \frac{\frac{9}{4}\sec^2 t}{\sqrt{9(\sec^2 t - 1)}} \left(\frac{3}{2}\sec\, t\,\text{tg}\, t\right) dt \\
&= \frac{1}{\cancel{3}} \int \frac{\frac{9}{4}\sec^2 t}{\sqrt[\cancel{2}]{(\cancel{\text{tg}\, t})^{\cancel{2}}}} \left(\frac{\cancel{3}}{2}\sec\, t\,\cancel{\text{tg}\, t}\right) dt \\
&= \frac{9}{8}\int \sec^3 t\, dt \ \ (\textit{Já resolvido anteriormente}) \\
&= \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{2}\left[(\sec\, t)(\text{tg}\, t) + \ln|\sec\, t + \text{tg}\, t|\right] + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right)$, vem:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{9}{16}\left[\sec(\text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right))(\text{tg}(\text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right))) + \ln|\sec(\text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right)) + \text{tg}(\text{arcsec}\left(\frac{2}{3}x\right))|\right] + c$$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$ (*Regra 1*)

Fazendo $x = 3\sin\, t \Leftrightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ e, portanto, vem:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{9-(3\sin\, t)^2}}{(3\sin\, t)^2}(3\sin\, t)'\, dt \\
&= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t}(3\cos\, t)\, dt \\
&= \int \frac{\sqrt{9(1-\sin^2 t)}}{9\sin^2 t}(3\cos\, t)\, dt \\
&= \int \frac{\cancel{3}\sqrt[\cancel{2}]{(\cos\, t)^{\cancel{2}}}}{\cancel{9}\sin^2 t}(\cancel{3}\cos\, t)\, dt \\
&= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt \\
&= \int \text{cotg}^2 t\, dt \\
&= \int (\text{cosec}^2\, t - 1)\, dt \\
&= \int \text{cosec}^2 t\, dt - \int 1\, dt \\
&= -\text{cotg}\, t - t + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$, vem:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\text{cotg}\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$ (*Regra 3*)

Fazendo $x = 2\sec t \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$ e, portanto vem:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{(2\sec t)^2-4}}{(2\sec t)^2}(2\sec t)'\,dt\\
&=\int \frac{\sqrt{4(\sec^2 t-1)}}{4\sec^2 t}(2\sec t\operatorname{tg} t)\,dt\\
&=\int \frac{\cancel{2}\sqrt[\cancel{2}]{(\operatorname{tg} t)^{\cancel{2}}}}{\cancel{4}\sec^{\cancel{2}} t}(\cancel{2\sec t}\operatorname{tg} t)\,dt\\
&=\int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t}\operatorname{tg} t\,dt\\
&=\int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sec t}\,dt\\
&=\int \frac{(\sec^2 t-1)}{\sec t}\,dt\\
&=\int \frac{\sec^{\cancel{2}} t}{\cancel{\sec t}}\,dt-\int \frac{1}{\sec t}\,dt\\
&=\int \sec t\,dt-\int \cos t\,dt\\
&=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|-\sin t+c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$, vem:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx = \ln\left|\sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| - \sin\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$$

7.2 Exponencial e Raízes (Regras 4, 5)

7.2.1 Funções Racionais de a^{rx}, a^{sx}, ...

Faz-se a^{mx}=t com m = m.d.c (r, s, ...).

Tem-se m xlog a = log t

1. $\displaystyle\int \frac{3^x}{1-9^x}\,dx$

$$= \int \frac{3^x}{1-(3^2)^x}\,dx$$
$$= \int \frac{3^x}{1-(3^x)^2}\,dx$$

Fazendo $3^x = t \Leftrightarrow x = \log_3 t$, donde se tem:

$$\int \frac{t}{1-t^2}(\log_3 t)'\,dt$$
$$= \int \frac{\cancel{t}}{1-t^2}\left(\frac{1}{\cancel{t}\ln 3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

(a) Grau do numerador menor do que o grau do denominador.

(b) Fatorização:

$$1-t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Vem que:

$$1-t^2 = (t-1)(t+1)$$

(c) Decomposição da fração:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \\ A-B=1 \end{cases} \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim temos:

$$= \frac{1}{\ln 3}\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{1}{t-1}\,dt + \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}\right)\int\frac{1}{t+1}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2\ln 3}\ln|t-1| + \frac{1}{2\ln 3}\ln|t+1| + c$$

e, regressando à variável original, como $t = 3^x$, vem:

$$\int \frac{3^x}{1-(3^x)^2}\,dx = -\frac{\ln|3^x-1|}{2\ln 3} + \frac{\ln|3^x+1|}{2\ln 3} + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{4^x}{4-2^x}\,dx$

$$= \int \frac{(2^2)^x}{4-2^x}\,dx$$
$$= \int \frac{(2^x)^2}{4-2^x}\,dx$$

Fazendo $2^x = t \Leftrightarrow x = \log_2 t$, donde se tem:

$$\int \frac{t^2}{4-t}\left(\log_2 t\right)'\,dt$$
$$= \int \frac{t^{\cancel{2}}}{4-t}\left(\frac{1}{\cancel{t}\ln 2}\right)dt$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{t}{4-t}\,dt$$

(a) Grau do numerador superior ao grau do denominador, faz-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{t} & -t+4 \\ \cline{2-2} -\cancel{t}+4 & -1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\frac{t}{4-t} = -1 + \frac{4}{-t+4}$$

Assim temos duas primitivas imediatas,

$$= \frac{1}{\ln 2}\int\left(-1+\frac{4}{-t+4}\right)dt$$
$$= -\frac{t}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2}\ln|-t+4| + c$$

e, regressando à variável original, como $t = 2^x$, vem:

$$\int \frac{(2^x)^2}{4-2^x}\,dx = -\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2}\ln|-2^x+4| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{2^{-x}}{4-2^x}\,dx$

$$= \int \frac{(2^x)^{-1}}{4-2^x}\,dx$$

Fazendo $2^x = t \Leftrightarrow x = \log_2 t$, donde se tem:

$$\int \frac{t^{-1}}{4-t}\left(\log_2 t\right)'\,dt$$
$$= \int \frac{t^{-1}}{4-t}\left(\frac{1}{t\ln 2}\right)dt$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2(4-t)}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2(t-4)}\,dt$$

(a) Grau do numerador inferior ao grau do denominador.

(b) Decomposição da fração:

$$\frac{1}{t^2(t-4)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t-4} = \frac{At-4A+Bt^2-4Bt+Ct^2}{t^2(t-4)}$$

(c) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-4B=0 \\ -4A=1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{16} \\ C=\frac{1}{16} \end{cases}$$

Assim temos três primitivas imediatas,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{-\frac{1}{4}}{t^2}\,dt - \frac{1}{\ln 2}\int \frac{-\frac{1}{16}}{t}\,dt - \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\frac{1}{16}}{t-4}\,dt \\
&= \frac{1}{4\ln 2}\int \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{16\ln 2}\int \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{16\ln 2}\int \frac{1}{t-4}\,dt \\
&= -\frac{1}{4\ln 2\cdot t} + \frac{\ln|t|}{16\ln 2} - \frac{\ln|t-4|}{16\ln 2} + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = 2^x$, vem:

$$\int \frac{(2^x)^{-1}}{4-2^x}\,dx = -\frac{1}{4\ln 2\cdot(2^x)} + \frac{\ln|2^x|}{16\ln 2} - \frac{\ln|2^x-4|}{16\ln 2} + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{3^x-9}\,dx$

$$= \int \frac{(3^x)^2}{3^x-9}\,dx$$

Fazendo $3^x = t \Leftrightarrow x = \log_3 t$, donde se tem:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t^2}{t-9}(\log_3 t)'\,dt \\
&= \int \frac{t^2}{t-9}\left(\frac{1}{t\ln 3}\right)dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{t^{\cancel{2}}}{t-9}\frac{1}{\cancel{t}}\,dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{t}{t-9}\,dt
\end{aligned}$$

(a) Grau do numerador superior ao grau do denominador, faz-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{t} & t-9 \\ \cline{2-2} -\cancel{t}+9 & 1 \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$\frac{t}{t-9} = 1 + \frac{9}{t-9}$$

Assim temos duas primitivas imediatas,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln 3}\int \left(1 + \frac{9}{t-9}\right)dt \\
&= \frac{t}{\ln 3} + \frac{9\ln|t-9|}{\ln 3} + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = 3^x$, vem:

$$\int \frac{(3^x)^2}{3^x-9}\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9\ln|3^x-9|}{\ln 3} + c$$

7.2.2 Funções Racionais de $\mathbf{e}^{rx}$, $\mathbf{e}^{sx}$, ...

Faz-se $e^{mx} = t$ com m = m.d.c (r,s, ...)
Tem-se m x = $\log t$

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{1-(e^x)^2}\,dx$$

Faz-se $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, donde se tem:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1-t^2}\,(\ln t)'\,dt \\
&= \int \frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{t^2-t}\,dt
\end{aligned}$$

   (a) Grau do numerador inferior ao grau do denominador.

   (b) Fatorização:

$$t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0$$

   (c) Decomposição da fração:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - A + Bt}{t(t-1)}$$

   (d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \\ -A = 1 \end{cases} \quad \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Assim temos duas primitivas imediatas,

$$\begin{aligned}
&= -\int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt \\
&= \ln|t| - \ln|t-1| + c
\end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = e^x$, vem:

$$\int \frac{1}{1-(e^x)^2}\,dx = \ln|e^x| - \ln|e^x - 1| = x - \ln|e^x - 1| + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{3e^x}{e^{2x}-9}\,dx$

$$= 3\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 9}\,dx$$

Faz-se $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, donde se tem:

$$\begin{aligned}
&3\int \frac{t}{t^2-9}(\ln t)'\,dt \\
&= 3\int \frac{\cancel{t}}{t^2-9}\left(\frac{1}{\cancel{t}}\right) dt \\
&= 3\int \frac{1}{t^2-9}\,dt
\end{aligned}$$

(a) Grau do numerador inferior ao grau do denominador.

(b) Fatorização:

$$t^2-9=0 \Leftrightarrow t=\pm 3$$

$$t^2-9=(t+3)(t-3)$$

(c) Decomposição da fração:

$$\frac{1}{(t+3)(t-3)}=\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t-3}=\frac{At-3A+Bt+3B}{(t+3)(t-3)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \\ -3A+3B=1 \end{cases} \dots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{6} \\ B=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim temos duas primitivas imediatas,

$$\begin{aligned} &=3\int \frac{-\frac{1}{6}}{t-3}\,dt+3\int \frac{\frac{1}{6}}{t+3}\,dt \\ &=-\frac{1}{2}\ln|t-3|+\frac{1}{2}\ln|t+3|+c \end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t=e^x$, vem:

$$3\int \frac{e^x}{(e^x)^2-9}\,dx=-\frac{\ln|e^x-3|}{2}+\frac{\ln|e^x+3|}{2}+c$$

3. $\displaystyle\int \frac{3}{4e^x-9e^{-x}}\,dx$

$$=3\int \frac{1}{4e^x-9(e^x)^{-1}}\,dx$$

Faz-se $e^x=t \Leftrightarrow x=\ln t$, donde se tem:

$$\begin{aligned} &3\int \frac{1}{4t-9t^{-1}}(\ln t)'\,dt \\ &=3\int \frac{1}{4t-9t^{-1}}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\ &=3\int \frac{1}{4t^2-9t^0}\,dt \\ &=3\int \frac{1}{4t^2-9}\,dt \end{aligned}$$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização:

$$4t^2-9=0 \Leftrightarrow (2t-3)(2t+3)=0$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{(2t-3)(2t+3)}=\frac{A}{2t-3}+\frac{B}{2t+3}=\frac{2At+3A+2Bt-3B}{(2t-3)(2t+3)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ \\ 3A - 3B = 1 \end{cases} \dots \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim temos duas primitivas imediatas,

$$= 3\int \frac{\frac{1}{6}}{2t-3}\, dt + 3\int \frac{-\frac{1}{6}}{2t+3}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\ln|2t-3|}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln|2t+3|}{2} + c$$

e, regressando então à variável original, como $t = e^x$, vem:

$$\int \frac{3}{4e^x - 9e^{-x}}\, dx = \frac{\ln|2e^x - 3|}{4} - \frac{\ln|2e^x + 3|}{4} + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{4+e^x}\, dx$

$$= \int \frac{(e^x)^{-1}}{4+e^x}\, dx$$

Faz-se $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, donde se tem:

$$\int \frac{t^{-1}}{4+t}(\ln t)'\, dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2(t+4)}\, dt$$

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização: (não é necessário)

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{t^2(t+4)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+4} = \frac{At + 4A + Bt^2 + 4Bt + Ct^2}{t^2(t+4)}$$

(d) Determinação de A, B, C pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 4B = 0 \\ 4A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{1}{16} \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Temos então 3 integrais imediatos,

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{t^2}\, dt + \int \frac{-\frac{1}{16}}{t}\, dt + \int \frac{\frac{1}{16}}{t+4}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2}\, dt - \frac{1}{16}\int \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{16}\int \frac{1}{t+4}\, dt$$

$$= -\frac{1}{4t} - \frac{\ln|t|}{16} + \frac{\ln|t+4|}{16} + c$$

e, regressando então à variável original, como $t = e^x$, vem:

$$\int \frac{e^{-x}}{4+e^x}\, dx = -\frac{1}{4e^x} - \frac{\ln|e^x|}{16} + \frac{\ln|e^x+4|}{16} + c$$

7.2.3 Funções Racionais de $x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \ldots$

Faz-se $x = m^t$ com $m =$m.m.c(q,s,...)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sqrt[2]{x}}\,dx$

   Numa tentativa de eliminar a raiz, tem-se que m.m.c$(2) = 2$, faz-se então $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$, donde:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1-\sqrt[\cancel{2}]{t^{\cancel{2}}}}(t^2)'\,dt \\
&= 2\int \frac{t}{-t+1}\,dt
\end{aligned}$$

   (a) Grau do numerador superior ao do denominador. Faz-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{t} & -t+1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{t}+1 & -1 \\ \hline
1 &
\end{array}$$

$$\frac{t}{-t+1} = -1 + \frac{1}{-t+1}$$

   Assim temos duas primitivas imediatas,

$$\begin{aligned}
&= 2\int \left(-1 + \frac{1}{-t+1}\right)\,dt \\
&= -2\int 1\,dt + 2\int \frac{1}{-t+1}\,dt \\
&= -2t - 2\ln|-t+1| + c
\end{aligned}$$

   e, regressando à variável original, como $t = \sqrt{x}$, vem:

$$\int \frac{1}{1-\sqrt[2]{x}}\,dx = -2\sqrt{x} - 2\ln|-\sqrt{x}+1| + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

   Numa tentativa de eliminar a raiz, tem-se que m.m.c$(2) = 2$, faz-se então $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$, donde:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t^2+1}{\sqrt[\cancel{2}]{t^{\cancel{2}}}+1}(t^2)'\,dt \\
&= \int \frac{t^2+1}{t+1}2t\,dt \\
&= 2\int \frac{t^3+t}{t+1}\,dt
\end{aligned}$$

   (a) Grau do numerador superior ao do denominador. Faz-se a divisão!

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{t^3}+t & t+1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{t^3}-t^2 & -t^2-t+2 \\ \hline
-\cancel{t^2}+t & \\
\cancel{t^2}+t & \\ \hline
\cancel{2t} & \\
-\cancel{2t}-2 & \\ \hline
-2 &
\end{array}$$

$$\frac{t^3+t}{t+1} = t^2 - t + 2 + \frac{-2}{t+1}$$

Assim temos um conjunto de primitivas imediatas,

$$
\begin{aligned}
&= 2\int \left(t^2 - t + 2 + \frac{-2}{t+1}\right) dt \\
&= 2\int t^2\, dt - 2\int t\, dt + 4\int 1\, dt - 4\int \frac{1}{t+1}\, dt \\
&= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4\ln|t+1| + c
\end{aligned}
$$

e, regressando à variável original, como $t = \sqrt{x}$, vem:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+1| + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x - 4\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int \frac{\sqrt[4]{x}}{x - 4\sqrt[4]{x^2}}\, dx$$

Numa tentativa de eliminar a raiz, tem-se que m.m.c$(2,4) = 4$, faz-se então $x = t^4 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{x}$, donde:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt[\cancel{4}]{t^{\cancel{4}}}}{t^4 - 4\sqrt[\cancel{4}]{(t^{\cancel{4}})^2}} (t^4)'\, dt \\
&= \int \frac{t}{t^{\cancel{4}} - 4t^{\cancel{2}}} 4t^{\cancelto{1}{3}}\, dt \\
&= 4\int \frac{t^2}{t^2 - 4}\, dt
\end{aligned}
$$

(a) Grau do numerador igual ao do denominador. Faz-se a divisão!

$$
\begin{array}{r|l}
t^{\cancel{2}} & t^2 - 4 \\ \cline{2-2}
\cancel{-t^2} + 4 & 1 \\ \hline
4 &
\end{array}
$$

$$\frac{t^2}{t^2-4} = 1 + \frac{4}{t^2-4}$$

$$= 4\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt$$

O primeiro integral é imediato e o segundo é uma fração racional em que:

(a) Grau do numerador inferior ao do denominador.

(b) Fatorização:

$$t^2 - 4 = (t+2)(t-2)$$

(c) Decomposição da Fração:

$$\frac{1}{(t+2)(t-2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{At - 2A + Bt + 2B}{(t+2)(t-2)}$$

(d) Determinação de A, B pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \\ -2A + 2B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Continuando o cálculo integral, temos então

$$\begin{aligned} &= 4\int 1\,dt + 16\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t+2} + \frac{\frac{1}{4}}{t-2} \right) dt \\ &= 4t - 4\ln|t+2| + 4\ln|t-2| + c \end{aligned}$$

e, regressando à variável original, como $t = \sqrt[4]{x}$, vem:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x - 4\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt[4]{x} - 4\ln|\sqrt[4]{x} + 2| + 4\ln|\sqrt[4]{x} - 2| + c$$

Capítulo 8

Exercícios por resolver

Aqui encontram-se alguns exercícios de todo o tipo de integrais por resolver com algumas sugestões para tentar ajudar na respetiva resolução.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. 2º Exame de Frequência - 1957)

   Sugestão: Fração Racional com fator indecomponível que resulta em 3 primitivas imediatas

2. $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^2}\,dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. Exame final - Junho 1958)

   Sugestão: Fração Racional em que o grau do numerador é igual que o do denominador. Faz-se a divisão, que resultará numa fração com fator indecomponível que dará 3 integrais imediatos mais o outro integral imediato do resto da primeira divisão

3. $\displaystyle\int \left[\frac{x+4}{x^2+1} + e^{\sin x}\cos x + \sqrt{x^2-1}\right] dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. Exame final - Outubro 1958)

   Sugestão: O primeiro integral é imediato (note-se a soma no numerador que dará 2 integrais imediatos), o segundo é uma primitiva duma exponencial e o último integral é uma primitiva por substituição em que $x = \sec t$

4. $\displaystyle\int (e^x+1)^3\, e^x\, dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. 2º Exame de Frequência - 1959)

   Sugestão: Primitiva imediata

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-5x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. 2º Exame de Frequência - 1959)

   Sugestão: Fração Racional em que o grau do numerador é igual que o do denominador. Faz-se a divisão, que resultará numa fração com fator decomponível que resultará em 3 integrais imediatos mais o integral imediato restante da primeira divisão

6. $\displaystyle\int (2x^2+\arcsin x)^2\, dx$ (ISCEF: Prova prática de Análise Matemática - 1955)

   Sugestão: $\int (2x^2+\arcsin x)^2\,dx = \int 4x^4 + 4x^2\arcsin x + \arcsin^2 x\,dx$ em que nos deparamos com um integral imediato, e duas primitivas por partes

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{4-x}-\sqrt{4-x}}\,dx$ (ISCEF: Prova prática de ANÁLISE MATEMÁTICA - 1955)

   Sugestão: É uma primitiva por substituição envolvendo raízes em que o m.m.c$(2,3) = 6$ então faz-se a substituição $4-x = t^6 \Leftrightarrow x = 4-t^6 \Leftrightarrow t = \sqrt[6]{4-x}$ em que virá tudo primitivas imediatas

8. $\displaystyle\int x\ln\sqrt[3]{1+x^4}\,dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. 2º Exame de Frequência - 1956)

   Sugestão: Primitiva por partes que resultará numa fração racional (1º caso) em que virá arco-tangente

9. $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+5x+1}{x^2+2x+1}\,dx$ (FCUC: Matemáticas Gerais. Exame final - Dezembro 1956)

Sugestão: Fração Racional em que o grau do numerador é igual que o do denominador. Faz-se a divisão, que resultará em 2 integrais imediatos seguindo-se duma fração racional com fator indecomponível de grau 2 que dará outras duas primitivas imediatas

10. $\displaystyle\int \ln(1-x^2)\,dx$ (ISCEF: Matemáticas Gerais. 2º Exame de Frequência - 1958)

Sugestão: $\int \ln(1-x^2)\,dx = \int \ln(1-x)(1+x)\,dx$ dando então duas primitivas por partes em que se associa em ambas o fator 1 ao produto

11. $\displaystyle\int \left[\frac{2+x}{(x-1)^3(x-2)} + x^3\ln^2 x\,dx\right]$ (FCUC: Matemáticas Gerais. 1º Exame de frequência - Dezembro 1954)

Sugestão: O primeiro integral é uma fração racional (3º caso) em que o denominador já está fatorizado e a 2ª primitiva é feita por partes

12. $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ (ISCEF: Cálculo. 1º Exame de Frequência - 1953)

Sugestão: Multiplicar ambos os termos da fração por $1-\sin x$ vem então $\int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\,dx$ que dará 2 primitivas por partes

13. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2}\,dx$ (FCUC: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1953)

Sugestão: $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ e primitiva-se por partes que resultará num integral com fração com fator indecomponível de 2º grau que levará a 3 primitivas imediatas

14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$ (FCUC: Matemáticas Gerais. 1º Exame de frequência - Dezembro 1953)

Sugestão: Primitiva de fração racional com dois fatores indecomponíveis no denominador

15. $\displaystyle\int \frac{1}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x\,dx}$ (FCUC: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1949)

Sugestão: $\int \frac{1}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+9}\,dx$ que resultará numa primitiva imediata do arco-tangente

16. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\cos^2 \ln x - \sin^2 \ln x)}\,dx$ (ISA: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1948)

Sugestão: Aplicar a fórmula trigonométrica $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

17. $\displaystyle\int \frac{x^4+8x+4}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx$ (FCUC: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1947)

Sugestão: Fração Racional em que o grau do numerador é igual que o do denominador. Faz-se a divisão.

18. $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}\,dx$ (FCUC: Álgebra Superior. 2º Exame de Frequência - 1946)

Sugestão: Primitiva imediata do arco-tangente

19. $\displaystyle\int \frac{x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}\,dx$ (FCUC: Álgebra Superior. 2º Exame de Frequência - 1946)

Sugestão: Decompor a fração

20. $\displaystyle\int \frac{\arcsin \ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}\,dx}$ (ISA: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1946)

Sugestão: Primitiva imediata da potência

21. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx$ (ISA: Cálculo Infinitesimal. 1º Exame de Frequência - 1945)

Sugestão: Aplicar a fórmula trigonométrica $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ que resultará num integral imediato do arco-tangente

22. $\displaystyle\int (3x^2+1)\mathrm{arctg}(x)\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

23. $\displaystyle\int \sqrt{x-2}\ln(x-2)\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

24. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

25. $\displaystyle\int x\sec^2 x\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

26. $\displaystyle\int e^x(\sin x + x)\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

27. $\displaystyle\int x\mathrm{cosec}\, x\mathrm{cotg}\, x\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

28. $\displaystyle\int x^3\sin(3x^2+1)\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

29. $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\sin x\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

30. $\displaystyle\int x^2(1+x^2)^{-2}\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

31. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

Sugestão: Primitive por partes

32. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

33. $\displaystyle\int \frac{2+2x+x^2}{(x-1)(4+x^2)}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

34. $\displaystyle\int \frac{4x}{(x-2)^2(x^2+4)}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

35. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{(1+x)^2(x^2+4)}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

36. $\displaystyle\int \frac{4+6x^2-x^3}{2x^2+4x^2}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

37. $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2+3x}{(1-x^4)(1+x^2)}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

38. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x-1}{x^4-1}\,dx$

Sugestão: Fração Racional

Capítulo 9

Integral Definido

9.1 Propriedades

9.1.1 1ª Propriedade

O conceito geométrico de $\int_a^b f(x)\,dx$ é dado pela área limitada pela função f, pelas retas paralelas ao eixo das ordenadas passando pelos limites de integração (a e b) e pelo eixo das abcissas.

9.1.2 2ª Propriedade

Se trocarmos os limites do integral, o mesmo muda de sinal.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

9.1.3 3ª Propriedade

A área total é igual à soma da parcela das área parciais.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

9.1.4 4ª Propriedade

O Integral Definido não depende da variável de integração.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

9.1.5 5ª Propriedade - Regra de Barrow

Seja f uma função real de variável real, contínua em [a,b] e F uma primitiva de f, isto é,

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

(Regra de Barrow)

1. $\int_2^4 x\,dx$

Calcular o integral indefinido,

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

vem:

$$\int_2^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \left(\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{2^2}{2}\right) = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6$$

2. $\int_1^2 e^x\,dx$

Calcular o integral indefinido,

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

vem:

$$\int_1^2 e^x\,dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$$

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

Calcular o integral indefinido,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + c$$

vem:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\left[\arcsin(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\arcsin(1)}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$

Calcular o integral indefinido,

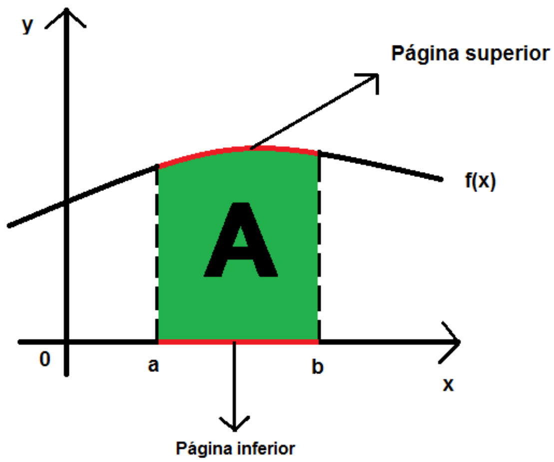
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

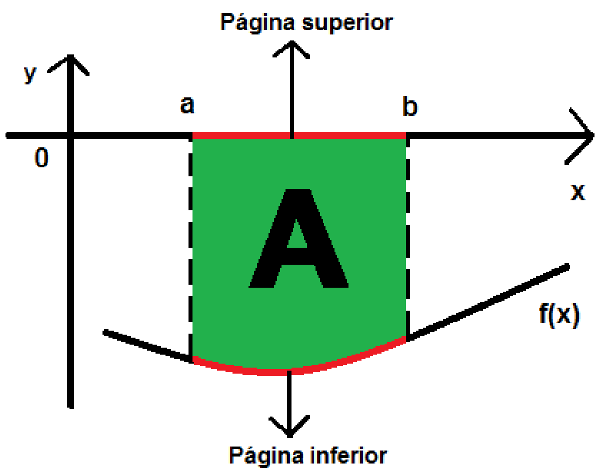
9.2 Áreas

9.2.1 1º Caso



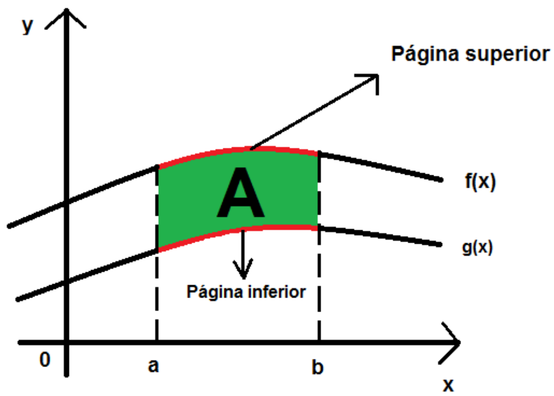
$$A = \int_a^b (f(x) - 0)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

9.2.2 2º Caso



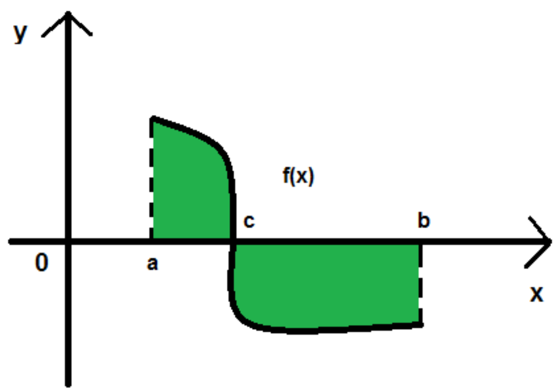
$$A = \int_a^b (0 - f(x))\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx$$

9.2.3 3º Caso



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

9.2.4 4º Caso



$$A = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b -f(x)\, dx$$

Nota: O mesmo conceito é aplicado no cálculo de volumes de revolução usando integrais.

9.2.5 Exercícios

1. A$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq -y^2 - 1\}$

   Resolvendo a inequação, temos:

   $$-2 \leq x \wedge x \leq -y^2 - 1$$
   $$-x \geq 2 \wedge y^2 \geq -1 - x$$
   $$x \leq -2 \wedge y^2 \geq -1 - x$$

   (a) $x \geq -2$ corresponde à reta $x = -2$

   (b) $y^2 = -1 - x$, é uma parábola, vamos então tentar calcular o vértice/concavidade:

   $$y^2 \geq -(x+1)$$
   $$y^2 \geq -(x-(-1))$$

   corresponde a uma parábola virada para a esquerda de V$(-1, 0)$.

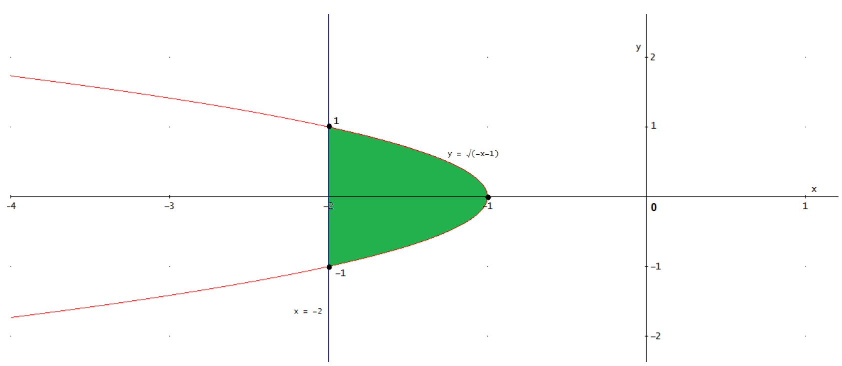
   Vamos então buscar alguns pontos da parábola para ajudar a traçar o gráfico:
   $y^2 = -1 - x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{-1-x}$

   Dá-se ao x o valor de -2 para dar ao y um valor inteiro para facilitar a construção do gráfico,

x	y
-2	± 1

   Tem-se então os pontos A$(-2, 1)$ e B$(-2, -1)$.

   Com isto estão reunidas as condições necessárias para traçar o gráfico,



$$A = 2\int_{-2}^{-1} (\sqrt{-x-1} - 0)\,dx$$

Calcular o integral indefinido,

$$\int \sqrt{(-x-1)}\,dx = \int (-x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(-x-1)^3} + c$$

vem então:

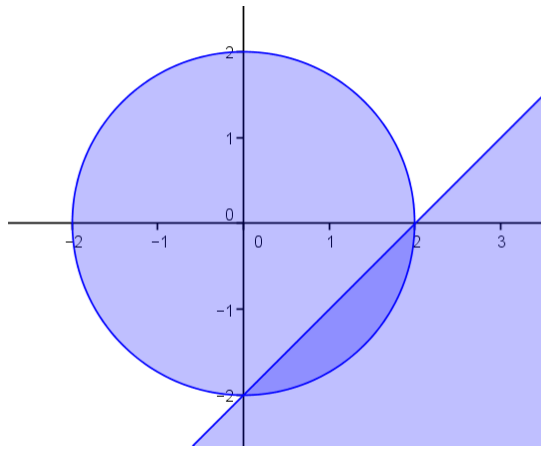
$$A = 2\int_{-2}^{-1} (\sqrt{-x-1} - 0)\,dx = 2\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(-x-1)^3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{4}{3}$$

2. B= $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4 \land y\leq x-2\}$

   (a) $x^2+y^2=4$ é uma circunferência de $\mathrm{C}(0,0)$ e $r=2$

   (b) $y=x-2$ é o segmento de reta paralelo ao bissector dos ímpares com deslocamento de -2 unidades em oy

$$x^2+y^2=4$$
$$y^2=-x^2+4$$
$$y=\pm\sqrt{-x^2+4}$$



$$A_{\text{ox}}=\int_0^2 x-2-(-\sqrt{-x^2+4})\,dx$$

3. C= $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1 \land x\geq y^2\}$ (oy)

   (a) $x^2+y^2=1$ é uma circunferência de $\mathrm{C}(0,0)$ e $r=1$

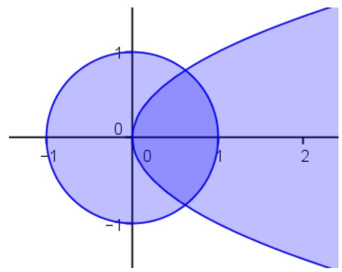
$$x^2+y^2=1$$
$$y^2=-x^2+1$$
$$y=\pm\sqrt{-x^2+1}$$

   (b) $x=y^2$ é uma parábola virada para a direita ($\subset$) de $\mathrm{V}(0,0)$ e passa por $(1,\pm1)$

$$x=y^2$$
$$y=\pm\sqrt{x}$$

   (c) Intersecção de ambas as equações

$$\sqrt{-y^2+1}=\sqrt{y}$$
$$-y^2-y+1=0$$
$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

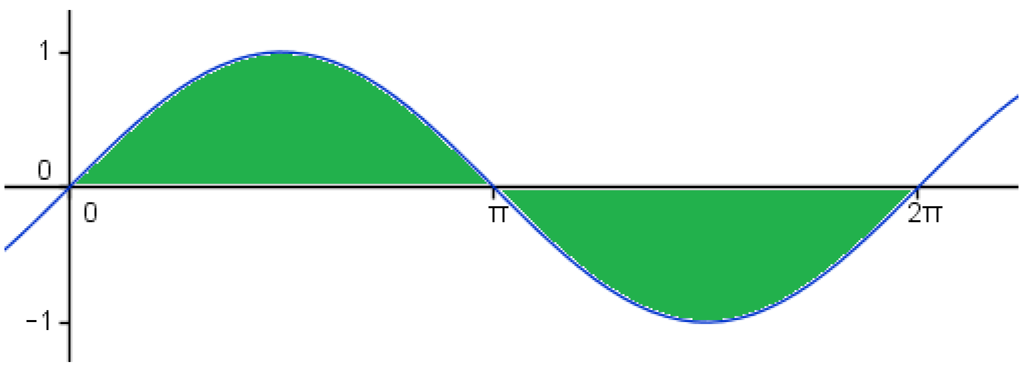


$$A_{\text{oy}} = 2\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{-y^2+1} - \sqrt{y}\, dy$$

4. Determinar a Área definida pela função $y = \sin\, x$, com $x \in [0, 2\pi]$

   Parece fácil, então a área é dada por A= $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\, x\, dx = [-\cos\, x]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$
   Claro que por sua vez o resultado está errado.

   Vamos então fazer a representação gráfica:



   Assim pode-se ver que a área é dada por:

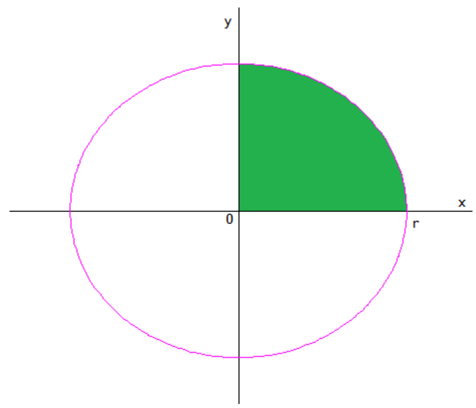
   A= $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\, x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin\, x\, dx = \int_0^{\pi} \sin\, x\, dx + \int_{2\pi}^{\pi} \sin\, x\, dx$
   Atendendo à simetria do seno, pode-se escrever também:

   A= $\displaystyle 2\int_0^{\pi} \sin\, x\, dx = 2[-\cos\, x]_0^{\pi} = 4$

5. Determinar a Área do Círculo limitado pela equação $x^2 + y^2 = r^2$

   Resolvendo a equação em ordem a y vem,

   $$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$



Atendendo à simetria vamos considerar o arco definido de $[0, r]$.

Deste modo vem

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Fazendo $x = r \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{r}$ e, portanto teremos:

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{r^2 - (r \sin t)^2} (r \sin t)'\, dt \\
&= \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} (r \cos t)\, dt \\
&= \int \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 t)}\, \cos t\, dt \\
&= r^2 \int \cos^2 t\, dt \\
&= r^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) + c
\end{aligned}$$

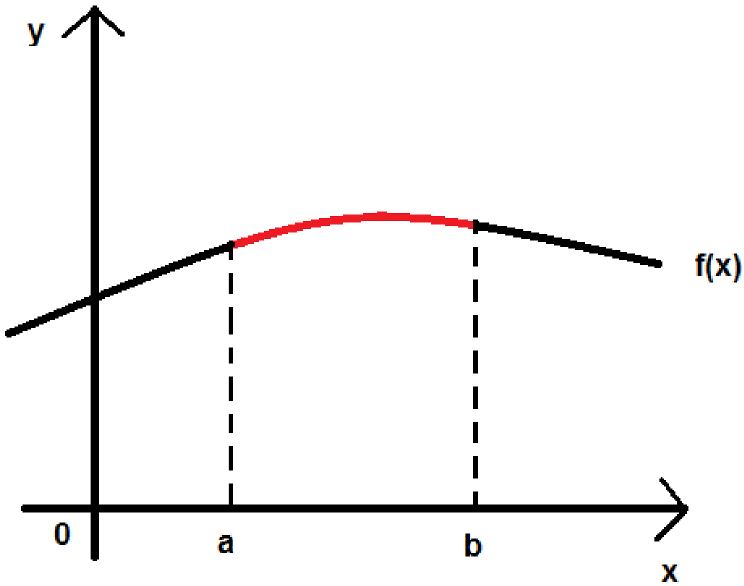
De $x = r \sin t$ para

(a) $x = 0 \Rightarrow 0 = r \sin t \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

(b) $x = r \Rightarrow r = r \sin t \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Assim vem, A $= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4r^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2$

9.3 Comprimento de um arco de curva plana (coord. cartesianas)



O comprimento c do arco de uma curva regular $y = f(x)$, compreendida entre [a,b], é igual a:

$$c = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

9.3.1 Exercícios

1. Determinar a expressão do comprimento da curva da equação quadrática $y = 2x^2 - 8x + 9$, desde $x = 2$ até $x = 3$

$$c = \int_2^3 \sqrt{1 + [(2x^2 - 8x + 9)']^2}\, dx$$

2. Determinar a expressão do comprimento da curva limitada pelas regiões $y = 1$, $y = \ln x$, $y - x + 1$

   (a) $y = 1$ É uma reta horizontal

   (b) $y = \ln x$ É uma função logarítmica que passa em $x = 1$

   (c) $y = x + 1$ É a reta paralela ao bissector dos ímpares subindo uma unidade no eixo oy

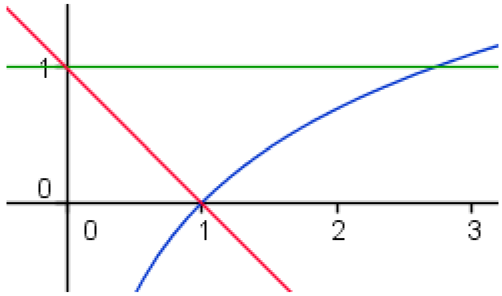
   Vamos então calcular a intersecção:

   $\ln x = 1$

   $e^{\ln x} = e^1$ (Ambos os lados da equação têm um expoente de base e)

   $x = e$

   (Quando a base a de um logaritmo no expoente e a base do expoente é a mesma, o resultado é o argumento do logaritmo)



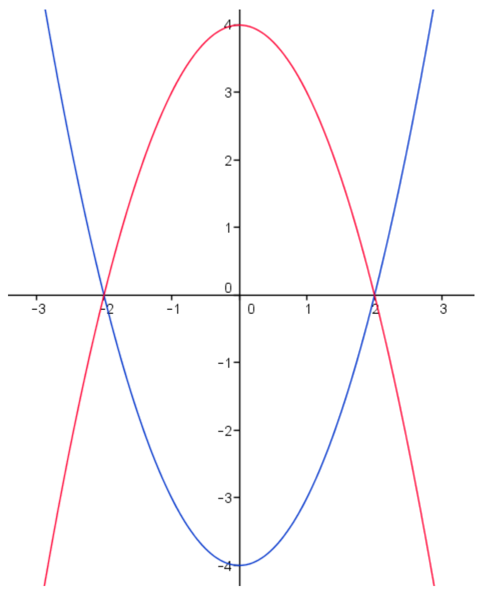
Então o comprimento da curva (a azul) é dado por:

$$c = \int_1^e \sqrt{1 + [(\ln x)']^2}\, dx$$

3. Determinar a expressão do comprimento da curva limitada por $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$

   (a) $y = x^2 - 4$ É uma parábola com a concavidade virada para cima ($\cup$) e $V(0, -4)$

   (b) $y = -x^2 + 4$ É uma parábola com a concavidade virada para baixo ($\cap$) e $V(0, 4)$



Atendendo à simetria, o comprimento da curva é dado por:

$$c = 4 \int_0^2 \sqrt{1 + \left[(\sqrt{-y + 4})'\right]^2}\, dy$$

9.4 Volumes de Revolução

Sendo $y = g(x)$, o volume do sólido em torno do eixo das abcissas, é dado por:

$$V_{ox} = \pi \int_a^b (y)^2 \, dx$$

Sendo $x = g(y)$, o volume do sólido em torno do eixo das ordenadas, é dado por:

$$V_{oy} = \pi \int_c^d (x)^2 \, dy$$

9.4.1 Exercícios

1. Considere a região delimitada pelas curvas $y = \frac{1}{x^2} - 1; y = 0$ e $y = 3$
   Vamos então calcular o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo das ordenadas.

   $$y = \frac{1}{x^2} - 1$$

   Calcular o zero da hipérbole:

   $$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2} - 1 \\ \frac{1}{x^2} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{1} \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

   Vamos então calcular as assimptotas, começando pelas horizontais:

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{(-\infty)^2} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

   Como os dois limites são os iguais para $\pm\infty$, então $y = -1$ é uma assimptota horizontal.

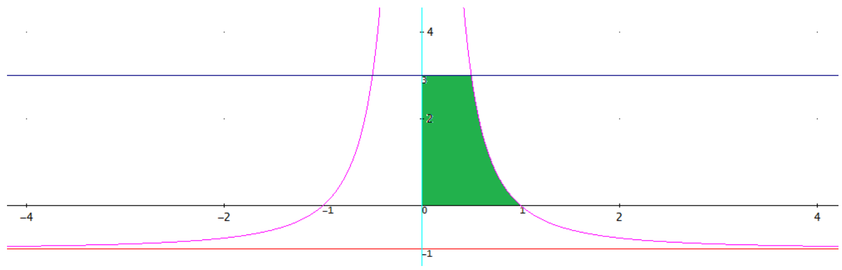
   Como a função não é definida para $x = 0$ vamos usar esse ponto para calcular a assimptota vertical:

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{(0^+)^2} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

   $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{(0^-)^2} - 1 = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

   Como qualquer um dos dois limites deu $+\infty$, então $x = 0$ é uma assimptota vertical.

   Temos então reunidas as condições necessárias para traçar o gráfico.



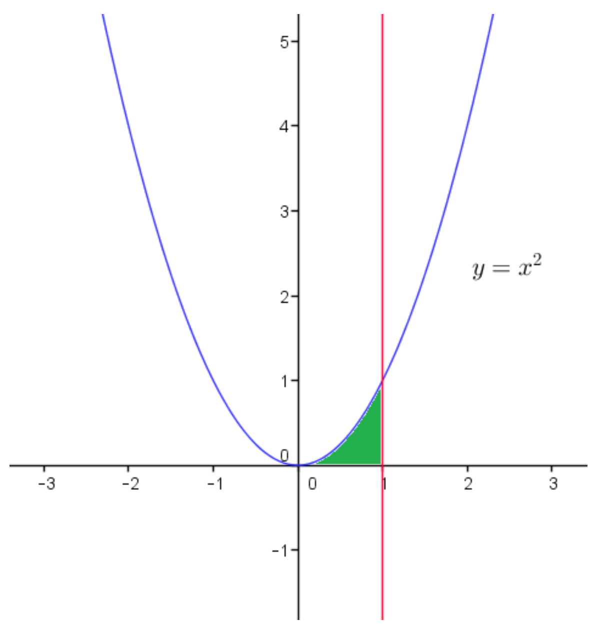
$$y = \frac{1}{x^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = y + 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y+1}}$$

$$V_{oy} = \pi \int_0^3 \frac{1}{y+1}\, dy$$
$$V_{oy} = \pi \left[\ln(y+1)\right]_0^3 = \pi \ln 4$$

2. Seja $f(x) = x^2$ definida em $[0, 1]$.
   Calcular o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico f em torno de ox

   (a) $y = x^2$ é uma parábola de $V(0, 0)$ que que passa nos pontos $(\pm 1, 1)$

   O gráfico vem então,



$$V_{ox} = \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx$$
$$V_{ox} = \pi \int_0^1 x^4\, dx$$
$$V_{ox} = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

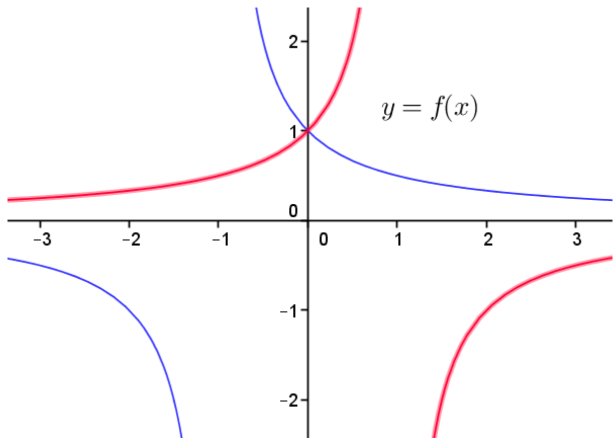
3. Seja $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ definida em $[-1, 1]$.
Calcular o volume do sólido gerado pela rotação em ox

Atendendo a que temos um módulo na função, temos que dividir os ramos, então

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos então 2 hipérboles. (Fica ao critério da pessoa fazer o estudo das mesmas)

O gráfico vem então,



Atendendo à simetria,

$$V_{ox} = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx$$

$$V_{ox} = 2\pi \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$

$$V_{ox} = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$$

Capítulo 10

Integrais Impróprios

Um integral diz-se impróprio se a região de integração é ilimitada, ou a função integranda é ilimitada. Para que se possam enquadrar estes integrais na teoria dos integrais estudados, consideram-se os integrais impróprios como limite de integrais próprios e se este limite existir, o integral impróprio dir-se-á convergente, caso contrário, é divergente. Posto isto, a natureza do integral é ver se é convergente (o limite é uma constante) ou divergente ($\pm\infty$).

10.1 1ª Espécie

Existem três tipos de Integrais de 1ª Espécie, que são os seguintes:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx; \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \int_0^{\epsilon} xe^{-x}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \left[(-e^{-x})(x) - e^{-x}\right]_0^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} (-e^{-\epsilon}(\epsilon) - e^{\epsilon}) - (0 - e^{0}) \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} e^{-\epsilon}(-\epsilon - 1) + 1 \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \frac{-\epsilon - 1}{e^{\epsilon}} + 1
\end{aligned}$$

Temos aqui uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, aplica-se a Regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \frac{(-\epsilon - 1)'}{(e^{\epsilon})'} + 1 \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} -\frac{1}{e^{\epsilon}} + 1 \\
&= -\frac{1}{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

O Integral é convergente.

Cálculo Auxiliar:

$$\int xe^{-x}\,dx = (-e^{-x})(x) - e^{-x} + c$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to-\infty} \int_{\epsilon}^{-2} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\epsilon}^{-2} \\
&= -\frac{1}{-2} - \lim_{\epsilon\to-\infty} \left(-\frac{1}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{\epsilon\to-\infty} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

O Integral é convergente.

Cálculo Auxiliar:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$$

3. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \int_{1}^{\epsilon} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \left[\frac{\ln|1+x^2|}{2}\right]_{1}^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \left(\frac{\ln|1+\epsilon^2|}{2}\right) - \frac{\ln|2|}{2} \\
&= +\infty - \frac{\ln|2|}{2} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

O Integral é divergente.

Cálculo Auxiliar:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\ln|1+x^2|}{2} + c$$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4+x^4}\,dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{x}{4+x^4} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{\epsilon\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-\epsilon}^{\epsilon} \\
&= \frac{1}{4} \left(\lim_{\epsilon\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) - \lim_{\epsilon\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

O Integral é convergente.

Cálculo Auxiliar:

$$\int \frac{x}{4 + x^4}\, dx = \frac{1}{4}\text{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

10.2 2ª Espécie (Calcular o domínio)

Pontos dos extremos do integral D=$\mathbb{R}\backslash\{a,b\}$

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

   $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0^+}^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\epsilon^2 \\
&= -\frac{1}{2} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \infty \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

   O Integral é divergente.

   Cálculo Auxiliar:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\ln\,x\,dx$

   $f(x) = x\ln\,x$
   $D_f = \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0^+}^1 x\ln\,x\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 x\ln\,x\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln\,x - \frac{x^2}{4}\right]_\epsilon^1 \\
&= -\frac{1}{4} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\ln\epsilon - \frac{\epsilon^2}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{4} - 0 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

   O Integral é convergente.

   Cálculo Auxiliar:

$$\int x\ln\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln\,x - \frac{x^2}{4} + c$$

10.3 Exercícios

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$

   (a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ (I. Definido)

   $$= \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$
   $$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$$
   $$= \frac{3}{2}$$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

   $$= \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$
   $$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\epsilon}^{2}$$
   $$= -\frac{1}{2} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$
   $$= -\frac{1}{2} + \infty = +\infty$$

   O Integral é divergente.

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

   $$= \int_{-1}^{0^-} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$
   $$= \lim_{\epsilon\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\epsilon}^{2}$$
   $$= \lim_{\epsilon\to 0^-}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - 1 - \frac{1}{2} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$
   $$= +\infty - 1 - \frac{1}{2} + \infty$$
   $$= \infty$$

   O Integral é divergente.

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

   $$= \lim_{\epsilon\to -\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\epsilon}^{-1}$$
   $$= 1 - \lim_{\epsilon\to -\infty}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$
   $$= 1 - 0$$
   $$= 1$$

   O Integral é convergente.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0^-} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^-}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - \lim_{\epsilon\to -\infty}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - \frac{1}{2} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

2. $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{e^{-x}+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$
$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\ln|e^{-x}+1| + c$

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to +\infty}\left[-\ln|e^{-x}+1|\right]_0^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to +\infty}\left(-\ln|e^{-\epsilon}+1|\right) + \ln|2| \\
&= \ln|2|
\end{aligned}
$$

O Integral é convergente.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to -\infty}\left[-\ln|e^{-x}+1|\right]_{\epsilon}^{0} \\
&= -\ln|2| - \lim_{\epsilon\to -\infty}\left(-\ln|e^{-\epsilon}+1|\right) \\
&= -\ln|2|
\end{aligned}
$$

O Integral é convergente.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to +\infty}\left[-\ln|e^{-x}+1|\right]_{-\epsilon}^{\epsilon} \\
&= 0 - \lim_{\epsilon\to +\infty}\left(-\ln|e^{-\epsilon}+1|\right) \\
&= 0 - (-\infty) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ (I. Definido)

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\ln|e^{-x}+1|\right]_0^1 \\
&= -\ln\left|\frac{1}{e}+1\right| + \ln|2|
\end{aligned}
$$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to +\infty} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_1^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to +\infty} \left(\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right) - \frac{3}{2} \\
&= +\infty - \frac{3}{2} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

   O Integral é divergente.

   (b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (I. Definido)

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_1^{2} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to -\infty} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{\epsilon}^{-1} \\
&= \frac{3}{2} - \lim_{\epsilon \to -\infty} \left(\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \infty \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

   O Integral é divergente.

   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{\epsilon}^{1} \\
&= \frac{3}{2} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2} - 0 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

   O Integral é convergente.

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^-} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{-1}^{\epsilon} + \lim_{\substack{\epsilon \to +\infty \\ \theta \to 0^+}} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{\theta}^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^-} \left[\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right] - \frac{3}{2} + \lim_{\epsilon \to +\infty} \left[\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right] - \lim_{\theta \to 0^+} \left[\frac{3\sqrt[3]{\theta^2}}{2}\right] \\
&= +\infty - \frac{3}{2} + \infty - 0 \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{\,]-2, 2[\,\}$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx = \sqrt{x^2-4} + c$

(a) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-4}\right]_3^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to +\infty} (\sqrt{\epsilon^2-4}) - \sqrt{5} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-2^+}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to -2^+} \left[\sqrt{x^2-4}\right]_{\epsilon}^{3} \\
&= \sqrt{5} - \lim_{\epsilon \to -2^+} (\sqrt{\epsilon^2-4}) \\
&= \sqrt{5} - 0 \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

O Integral é convergente.

(c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (I. Definido)

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sqrt{x^2-4}\right]_{-4}^{-3} \\
&= \sqrt{5} - \sqrt{12}
\end{aligned}
$$

(d) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{2^+}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-4}\right]_{2^+}^{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} (\sqrt{\epsilon^2-4}) - \sqrt{4-4} \\
&= +\infty - 0 \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

5. $f(x) = \frac{2}{x(1+\ln(x))}$

$$
\begin{aligned}
D_f = \{x\in\mathbb{R} : x(1+\ln(x)) \neq 0\} \\
x \neq 0 \wedge 1+\ln(x) \neq 0 \\
x \neq 0 \wedge \ln(x) \neq -1 \\
x \neq 0 \wedge e^{\ln(x)} \neq e^{-1} \\
x \neq 0 \wedge x \neq e^{-1} \\
x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0, \frac{1}{e}\}$
$\int \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx = 2\ln|\ln(x)+1| + c$

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0^+}^{\frac{1}{e}^-} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx \\
&= \lim_{\substack{\epsilon\to0^+\\ \theta\to\frac{1}{e}^-}} \left[2\ln|\ln(x)+1|\right]_{\epsilon}^{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to\frac{1}{e}^-} [2\ln|\ln(\theta+1)|] - \lim_{\epsilon\to0^+} [2\ln|\ln(\epsilon+1)|] \\
&= 2\ln|\ln(\frac{1}{e}+1)| - 2\ln|\ln(0+1)| \\
&= 2\ln|\ln(\frac{1}{e}+1)| - 2\ln(0) \\
&= 2\ln|\ln(\frac{1}{e}+1)| - (-\infty) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

(b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx$ (I. Impróprio - 1ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} [2\ln(\ln(x)+1)|]_{1}^{+\infty} \\
&= \lim_{\epsilon\to+\infty} [2\ln(\ln(\epsilon)+1)|] - 2\ln|\ln(1+1)| \\
&= +\infty - 2\ln|\ln(2)| \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

O Integral é divergente.

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx$ (I. Impróprio - 2ª espécie)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{e}^{+}}^{e} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to\frac{1}{e}^{+}} [2\ln(\ln(\epsilon)+1)|]_{\epsilon}^{e} \\
&= 2\ln|\ln(e+1)| - 2\ln|\ln(\frac{1}{e}+1)|
\end{aligned}
$$

O Integral é convergente.

(d) $\displaystyle\int_{e}^{4} \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,dx$ (I. Definido)

$$
\begin{aligned}
&= [2\ln|\ln(x+1)|]_{e}^{4} \\
&= [2\ln|\ln(4+1)|] - [2\ln|\ln(e+1)|]
\end{aligned}
$$

10.4 Limites

Alguns teoremas para o cálculo de limites

1. O limite de uma constante é a mesma constante
$$\lim_{x\to a} c = c$$
2. Uma constante pode vir para trás do limite se estiver a multiplicar toda a função
$$\lim_{x\to a} c\,F(x) = c \lim_{x\to a} F(x)$$
3. O limite de um logaritmo é igual ao logaritmo do limite
$$\lim_{x\to a} \ln[F(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a} F(x)\right]$$
4. A raiz de um limite é igual ao limite da raiz
$$\sqrt[n]{\lim_{x\to a} F(x)} = \lim_{x\to a} \sqrt[n]{F(x)}$$
5. O limite de uma função exponencial é igual à base elevada ao limite do expoente
$$\lim_{x\to a} A^{F(x)} = A^{\lim\limits_{x\to a} F(x)}$$
6. O limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites
$$\lim_{x\to a} [F(x) \pm G(x)] = \lim_{x\to a} F(x) \pm \lim_{x\to a} G(x)$$
7. O limite do produto é o produto dos limites
$$\lim_{x\to a} [F(x) \cdot G(x)] = \lim_{x\to a} F(x) \cdot \lim_{x\to a} G(x)$$
8. O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o denominador $\neq 0$
$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim_{x\to a} F(x)}{\lim_{x\to a} G(x)}$$

10.4.1 sem indeterminações

Em que c é uma constante arbitrária que está definida em $\mathbb{R}$, pode-se verificar que

$0+0=0$	$0-0=0$	$0\cdot c=0$
$c+0=c$	$c-0=c$	$0-c=-c$
$\infty+\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$	$c+\infty=\infty$
$\infty-c=\infty$	$c-\infty=-\infty$	$\infty\cdot c=\infty$
$\frac{c}{0}=\infty$	$\frac{c}{\infty}=0$	$\frac{\infty}{c}=\infty$
$\frac{0}{\infty}=0$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$c^{\infty}=\infty\ (c>1)$
$c^{\infty}=0\ (0<c<1)$	$\infty^{c}=\infty\ (c>0)$	$\infty^{c}=0\ (c<0)$

10.4.2 com indeterminações

Os tipos mais comuns de indeterminações são do tipo
$$\infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty$$

Levantar indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ são feitas com recurso à Regra de Cauchy.

Regra de Cauchy

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a,b[$ (a, b finitos ou não) e que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$ e que

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ou ∞)

(ii) existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ (finito ou infinito)

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Outros tipos de indeterminações podem também ser levantadas pela Regra de Cauchy, bastando para isso transformar em indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Indeterminações do tipo $\infty \cdot 0$

As indeterminações deste tipo são o culminar do produto de duas funções f e g em que uma converge para infinito e outra para 0. Estas indeterminações podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, fazendo respetivamente,

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \text{ ou } f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

<u>Nota</u>: a escolha da função que passa para o denominador não é indiferente. Por vezes essa escolha não irá simplificar o cálculo do limite.

Existem outras indeterminações que se podem transformar para aplicar o Teorema de Cauchy mas são raras aparecer no cálculo integral.

Capítulo 11

Exercícios por resolver

Um conjunto de primitivas por resolver dos últimos capítulos

1. $\displaystyle\int_0^1 (2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{3}} \operatorname{cotg} x\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{4-\ln x}}{x}\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

4. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x}\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}\,dx$

   Sugestão: Integral Definido

7. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

   Sugestão: Integral Impróprio

8. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

   Sugestão: Integral Impróprio

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x}\,dx$

   Sugestão: Integral Impróprio

10. $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx$

    Sugestão: Integral Impróprio

11. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

    Sugestão: Integral Impróprio

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

    Sugestão: Integral Impróprio

13. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^5}{16-x^4}\,dx$

    Sugestão: Integral Impróprio

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3-x^2}{(1-x)^2(x^2-2x+5)}\,dx$

    Sugestão: Integral Impróprio

Calcule as áreas dos seguintes domínios planos

A $= \{(x,y) : y \geq 0 \wedge y^2 \leq x \leq y^{-\frac{1}{2}}\}$
B $= \{(x,y) : y \geq 0 \wedge y \leq \frac{1}{1+x^2} \wedge y \leq \frac{x^2}{2}\}$
C $= \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y \leq 2 - x^2 \wedge x + y \geq 0\}$
D $= \{(x,y) : x^2 - 1 \leq y \leq (x+1)^2 \wedge |x+y| \leq 1\}$
E $= \{(x,y) : |x| + y \leq 2 \wedge y \geq x^2 - 4\}$
F $= \{(x,y) : y \leq x^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq x - \sqrt{2} \wedge x \geq 0\}$
G $= \{(x,y) : y \leq 1 + e^{-x} - e^{-2} \wedge x \leq y^2 + 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$

Calcule a expressão do comprimento das linhas dadas pelas equações

1. $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$
2. $y = x(2-x)$, $x \in [0,2]$
3. $y = \ln(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
4. $y = \sqrt{(x+3)^3}$, $0 \leq x \leq 2$

Calcule a expressão do volume em torno de ox dado por

1. $0 \leq y \leq e^x - 1$ e $0 \leq x \leq 1$
2. A $= \{(x,y) : 0 \leq y \leq x(2-x)\}$

Capítulo 12

Equações Diferenciais de 1ª Ordem

Uma equação diferencial pode ter mais que uma solução. À semelhança do cálculo de integrais, a expressão da solução de uma equação diferencial também envolve constantes, que se chama **solução geral** da equação. Uma **solução particular** é uma das soluções obtidas através da solução geral. As soluções particulares podem-se obter através de certas condições, designadas condições iniciais, impostas à solução geral. Chama-se então **Problema de Valor Inicial** (PVI) ao problema de resolver uma equação diferencial com essas mesmas condições.

12.1 Variáveis Separadas

Tipo:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

Resolução:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c$$

Exemplo:

$$x\,dx + (y+1)\,dy = 0$$

Como se pode verificar esta equação está na forma acima indicada. Agora basta integrar para obtermos a solução

$$\int x\,dx + \int (y+1)\,dy = c$$

E finalmente temos a solução geral para esta equação diferencial

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = c$$

12.2 Variáveis Separáveis

Tipo:

$$P_1(x)Q_1(y)\,dx + P_2(x)Q_2(y)\,dy = 0$$

Resolução:

Passa-se a Variáveis Separadas

Exemplo:

$$xy\,dx + (x^2+1)y^2\,dy = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separáveis, vamos então passar a Variáveis Separadas

No 1º termo temos $xy\,dx$, vemos que este termo é em ordem a x e contém um fator em ordem a y, temos então que retirar esse fator (y) deste termo com recurso a uma operação aritmética, para então satisfazer a ordem do fator

$$\frac{x\cancel{y}}{(x^2+1)\cancel{y}}\,dx = \frac{x}{x^2+1}$$

No 2º termo temos $(x^2+1)y^2\,dy$, vemos que este termo é em ordem a y e contém um fator em ordem a x, temos então que retirar esse fator $((x^2+1))$ deste termo com recurso a uma operação aritmética, para então manter a ordem do termo

$$\frac{\cancel{(x^2+1)}y^2}{\cancel{(x^2+1)}}=y^2$$

Quando é feita uma operação num dos termos, esta tem de ser aplicada a todos os termos da equação, pelo que vem

$$\frac{x\cancel{y}}{(x^2+1)\cancel{y}}\,dx+\frac{\cancel{(x^2+1)}y^2}{\cancel{(x^2+1)}y}\,dy=0$$

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx+y\,dy=0$$

Esta equação está na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int y\,dy=c$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{\ln|x^2+1|}{2}+\frac{y^2}{2}=c$$

12.2.1 Exercícios

1. $\dfrac{\sin x}{1+y} y' = \cos x$

$$\frac{\sin x\, dy}{1+y\, dx} = \frac{\cos x}{1}$$

Faz-se aqui a multiplicação cruzada (este passo vai passar a ser omitido)

$$\sin x\, dy = \cos x(1+y)\, dx$$

$$\sin x\, dy - \cos x(1+y)\, dx = 0$$

$$\frac{\cancel{\sin x}\, dy}{\cancel{\sin x}(1+y)} - \frac{\cos x\cancel{(1+y)}\, dx}{\sin x\cancel{(1+y)}} = 0$$

$$\frac{1}{1+y} dy - \frac{\cos x}{\sin x} dx = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int \frac{1}{1+y} dy - \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = c$$

Temos então a Solução Geral

$$\ln|1+y| - \ln|\sin x| = c$$

2. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{y'}{y} = 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{y} dy = c$$

Temos então a Solução Geral

$$\ln|x| - \ln|y| = c$$

3. $y \ln y\, dx\, x\, dy = 0$

$$\frac{\cancel{(y \ln y)}\, dx}{x\cancel{(y \ln y)}} + \frac{\cancel{x} dy}{\cancel{x}(y \ln y)} = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y \ln y} dy = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{y \ln y}\, dy = c$$

Temos então a Solução Geral

$$\ln|x| + \ln|\ln y| = c$$

4. $x^2 y' + 2xy = y$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - y = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y(2x-1) = 0$$

$$x^2\, dy + y(2x-1)dx = 0$$

$$\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}y}dy + \frac{\cancel{y}(2x-1)}{x^2\cancel{y}}dx = 0$$

$$\frac{1}{y}dy + \frac{2x-1}{x^2}dx = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{2x-1}{x^2}dx = c$$

$$\ln|y| + \int \frac{2x}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = c$$

Temos então a Solução Geral

$$\ln|y| + \ln|x^2| + \frac{1}{x} = c$$

5. $xy' = y + \dfrac{1}{y}$

$$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{y}$$

$$x\,dy = \left(\frac{y^2+1}{y}\right)dx$$

$$x\,dy - \frac{y^2+1}{y}\,dx = 0$$

$$\frac{\cancel{x}y}{\cancel{x}y^2+1}\,dy - \frac{\cancel{(y^2+1)}\cdot\cancel{y}}{\cancel{y}\cancel{(y^2+1)}x}\,dx$$

$$\frac{y}{y^2+1}\,dy - \frac{1}{x}\,dx = 0$$

Equação na forma de Variáveis Separadas, vamos então integrar

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy - \int \frac{1}{x}\,dx = c$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{\ln|y^2+1|}{2} - \ln|x| = c$$

12.3 Equação Diferencial Homogênea

Uma equação diferencial de 1ª ordem $y' = f(x, y)$ diz-se **homogénea** sse

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

para quaisquer x, y e t tais que (x, y) e (tx, ty) pertençam ao domínio de f.

Uma função $f(x, y)$ diz-se **homogénea de grau** α sse $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$, para todo o (x, y) e para todo o (tx, ty) pertencentes ao domínio de f. (só é feito objeto de estudo das de grau zero)

A frase anterior permite afirmar que a equação $y' = f(x, y)$ é homogénea sse f for uma função homogénea de grau zero.

Se a equação diferencial de 1ª ordem estiver na forma $\mathrm{M}(x, y)dx + \mathrm{N}(x, y)dy = 0$ ou $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, é imediato mostrar que o facto dela ser homogénea é equivalente a $\mathrm{M}(x, y)$ e $\mathrm{N}(x, y)$ serem homogéneas com o mesmo grau de homogeneidade. Esta equação pode reduzir-se à forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

por meio de substituição $\mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ onde v é uma nova função incógnita, se transforma em equações com variáveis separadas. Pode-se também empregar a substituição $\mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y}$

Exemplo:

$$4xy + (y^2 - 5xy)dy = 0$$

É homogénea pois:
$\mathrm{M}(tx, ty) = 4txty = t^2 4xy = t^2 \mathrm{M}(x, y)$
$\mathrm{N}(tx, ty) = t^2(y^2 - 5xy) = t^2 \mathrm{N}(x, y)$,

ou seja M e N têm o mesmo grau de homogeneidade 2.

Um processo para resolver uma equação diferencial homogénea consiste em efetuar a mudança da variável dependente y, para v, por meio de:

$$y = v \cdot x \Leftrightarrow v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v$$

$$4xy\,dx + (y^2 - 5xy)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4xy}{y^2 - 5xy}$$

Fazendo $y = v \cdot x \Leftrightarrow v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = x \cdot v' + x$

$$y' = \frac{4xvx}{(vx)^2 - 5xvx}$$

$$y' = \frac{4x^2 v}{v^2 x^2 - 5x^2 v}$$

$$y' = \frac{4\cancel{x^2}\cancel{v}}{\cancel{x^2}\cancel{v}(v - 5)}$$

$$y' = \frac{4}{v - 5}$$

$$v'x + v = \frac{4}{v - 5}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{4}{v-5} - v$$
$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{-v^2+5v+4}{v-5}$$
$$(v-5)(x)dv = (-v^2+5v+4)\,dx \text{ (Variáveis Separáveis)}$$
$$(v-5)(x)\,dv - (-v^2+5v+4)\,dx = 0$$
$$\frac{v-5}{-v^2+5v+4}\,dv - \frac{1}{x}\,dx = 0 \text{ (Variáveis Separadas)}$$

É só resolver esta Equação Diferencial e substituir no fim o valor de v

12.3.1 Exercícios

1. $2xy\,dx + (y^2 - x^2)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \text{ (todos os termos do numerador e denominador têm o mesmo grau - homogénea)}$$

Fazendo $y = v \cdot x \Leftrightarrow v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = x \cdot v' + x$

$$y' = \frac{2xvx}{x^2-(vx)^2}$$
$$v'x + v = \frac{2\cancel{x^2}v}{\cancel{x^2}(1-v^2)}$$
$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{2v}{v^2-1} - v$$
$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{(2v)(v^3-v)}{v^2-1}$$
$$(x)(v^2-1)(dv) = (2v)(v^3-v)(dx) \text{ (Variáveis Separáveis)}$$
$$(x)(v^2-1)\,dv - (2v)(v^3-v)\,dx = 0$$
$$\frac{1}{2v^2}\,dv - \frac{1}{x}\,dx = 0 \text{ (Variáveis Separadas)}$$

É só resolver esta Equação Diferencial e substituir no fim o valor de v

2. $(y' - xy) + x^2y' = 0$

$$y' - x^2 + x^2y' = 0$$
$$y'(x^2+1) = xy$$
$$y' = \frac{xy}{x^2+1} \text{ (todos os termos do numerador e denominador têm o mesmo grau - homogénea)}$$

Fazendo $y = v \cdot x \Leftrightarrow v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = x \cdot v' + x$

$$v + xv' = \frac{x^2v}{x^2+1}$$
$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{x^2\,v}{x^2+1} - v$$
$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{x^2\,v - (x^2+1)v}{x^2+1}$$
$$(x)(x^2+1)\,dv - (x^2v - (x^2+1)v)\,dx = 0 \text{ (Variáveis Separáveis)}$$
$$(x)(x^2+1)\,dv - (v)(x^2-(x^2+1))\,dx = 0$$
$$\frac{1}{v}\,dv - \frac{-1}{x^3+1}\,dx = 0 \text{ (Variáveis Separadas)}$$

É só resolver esta Equação Diferencial e substituir no fim o valor de v

12.4 Equação Linear 1ª Ordem

Tipo:

$$y' + A(x)y = B(x)$$
ou
$$x' + A(y)x = B(y)$$

Resolução:

1. Calcula-se o Fator Integrante

$$\text{FI} = e^{\int A(x)\,dx} \;\text{ ou }\; \text{FI} = e^{\int A(y)\,dy}$$

2. Multiplica-se ambos os termos pelo FI. No 1º membro fica um espaço derivado e identifica-se
3. Aplica-se o integral a ambos os termos

Exemplo:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3$$

Vamos então calcular o Fator Integrante

$$\text{FI} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando ambos os termos pelo FI, temos

$$\frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y}_{\left(\frac{1}{x^2}y\right)'} = x$$

Aplicando o integral a ambos os termos, vem

$$\int \left(\frac{1}{x^2}y\right)' dx = \int x\,dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{1}{x^2}y = \frac{x^2}{2} + c$$

12.4.1 Exercícios

1. $y' + y\,\text{tg}\,x = \sec\,x$

   Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int \text{tg}\,x\,dx} = e^{-\ln|\cos\,x|} = \frac{1}{\cos\,x}$$

   Multiplicando ambos os termos pelo FI vem

$$\frac{1}{\cos\,x}\left(y' + \frac{\sin\,x}{\cos\,x}\right) = \sec\,x \cdot \frac{1}{\cos\,x}$$

$$\frac{1}{\cos\,x}\left(y' + \frac{\sin\,x}{\cos\,x}\right) = \sec^2\,x$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cos\ x}y' + \frac{\sin\ x}{\cos^2\ x}y}_{\left(\frac{1}{\cos\ x}y\right)'} = \sec^2\ x$$

Aplicando o integral a ambos os termos, vem

$$\int \left(\frac{1}{\cos\ x}y\right)'\ dx = \int \sec^2\ x dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{1}{\cos\ x}y = \operatorname{tg} x + c$$

2. $y' \sin\ x + y \cos\ x = \sin^2\ x$

$$\frac{y'\cancel{\sin\ x}}{\cancel{\sin\ x}} + \frac{y \cos\ x}{\sin\ x} = \frac{\sin^{\cancel{2}}}{\cancel{\sin\ x}}$$

$$y' + \frac{\cos\ x}{\sin\ x}y = \sin\ x$$

Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int \frac{\cos\ x}{\sin\ x}\ dx} = e^{\ln|\sin\ x|} = \sin\ x$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI

$$\sin\ x \left(y' + \frac{\cos\ x}{\sin\ y}y\right) = \sin\ x \cdot \sin\ x$$

$$\sin\ x \left(y' + \frac{\cos\ x}{\sin\ y}y\right) = \sin^2\ x$$

$$\underbrace{\sin(x)y' + \cos\ xy}_{(\sin\ xy)'} = \sin^2\ x$$

Aplica-se o integral a ambos os termos

$$\int (\sin(x)y)'\ dx = \int \sin^2\ x\, dx$$

$$\sin(x)y = \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\, dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\sin(x)y = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

3. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$

Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int -\frac{2}{x}\ dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI

$$\frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y}_{\left(\frac{1}{x^2}y\right)'} = x$$

Aplica-se o integral a ambos os termos

$$\int \left(\frac{1}{x^2}y\right)'\ dx = \int x\, dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{1}{x^2}y = \frac{x^2}{2} + c$$

4. $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = \frac{e^{2x}}{x}$

$$xy' - y = x^2$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI

$$\frac{1}{x}\left(y' - \frac{1}{x}y\right) = x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y}_{\left(\frac{1}{x}y\right)'} = 1$$

Aplica-se o integral a ambos os termos

$$\int \left(\frac{1}{x}y\right)' dx = \int 1\,dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{1}{x}y = x + c$$

5. $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = \frac{e^{2x}}{x}$ Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int \frac{1}{x} - 1\,dx} = e^{\ln x - x} = \frac{x}{e^x}$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI

$$\frac{x}{e^x}\left(y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y\right) = \left(\frac{e2x}{x}\right)\left(\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\underbrace{\frac{x}{e^x}y' + \left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right)y}_{\left(\frac{x}{e^x}y\right)'} = e^x$$

Aplica-se o integral a ambos os termos

$$\int \left(\frac{x}{e^x}y\right)' dx = \int e^x\,dx$$

Temos então a Solução Geral

$$\frac{x}{e^x}y = e^x + c$$

12.5 Equação de Bernoulli

Tipo:

$$y' + A(x)y = B(x)y^{\alpha}$$

$$\text{ou}$$

$$x' + A(y)x = B(y)x^{\alpha}$$

Note-se que se $\alpha = 0$, a equação é linear e se $\alpha = 1$, a equação é de variáveis separáveis, portanto considera-se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

Resolução: Multiplica-se ambos os termos por $y^{-\alpha}$ ou $x^{-\alpha}$ para passar a linear 1ª ordem

Exemplo:

$$y - 2x\frac{dy}{dx} = x(x+1)y^3$$

Resolvendo então a equação, vem

$$y - 2xy' = x(x+1)y^3$$

$$-2xy' + y = x(x+1)y^3$$

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{\cancel{x}(x+1)y^3}{-2\cancel{x}}$$

$$y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{x+1}{2}y^3 \ (Bernoulli)$$

Vamos então passar a equação a linear $(\times y^{-3})$

$$y'y^{-3} - \frac{1}{2x}yy^{-3} = -\frac{(x+1)}{2}y^3y^{-3}$$

$$y'y^{-3} - \frac{1}{2x}\underbrace{y^{-2}}_{\text{w}} = \frac{-x-1}{2}$$

Fazendo a substituição, $w = y^{-2}$, com, $w' = (y^{-2})' = 2y^{-3}y' \Leftrightarrow \frac{w'}{2} = y'y^{-3}$

Vem

$$-\frac{w'}{2} - \frac{1}{2}w = \frac{-x-1}{2}$$

$$-w' - w = -x - 1$$

$$w' + w = x + 1 \ (Linear\ 1^{a}\ Ordem)$$

Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int 1\,dx} = e^x$$

Multiplicando ambos os termos pelo FI, temos

$$e^x(w' + w) = (x+1)(e^x)$$

$$\underbrace{e^x w' + e^x w}_{(e^x w)'} = (x+1)(e^x)$$

Aplicando o integral a ambos os termos, vem

$$\int (e^x w)'\,dx = \int (x+1)(e^x)\,dx \Leftrightarrow e^x w = (x+1)e^x - e^x + c$$

Como, $w = y^{-2}$, temos a solução geral

$$e^x y^{-2} = (x+1)e^x - e^x + c$$

12.5.1 Exercícios

1. $x^3y' + x^2y + y^4 = 0$

$$x^3y' + x^2y = -y^4$$

$$\frac{\cancel{x^3}y'}{\cancel{x^3}} + \frac{\cancel{x^2}y}{x^{\cancel{3}}} = \frac{-y^4}{x^3}$$

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^3}y^4 \; (Bernoulli)$$

Passar a linear ($\times y^{-4}$)

$$y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-4}y = -\frac{1}{x^3}y^4y^{-4}$$

$$y^{-4}y' + \frac{1}{x}\underbrace{y^{-3}}_{\mathrm{w}} = -\frac{1}{x^3}$$

Fazendo

$$w = y^{-3} \Rightarrow w' = (y^{-3})' = -3y^{-4}y' \Leftrightarrow -\frac{w'}{3} = y^{-4}y'$$

Vem

$$-\frac{w'}{3} + \frac{1}{x}w = -\frac{1}{x^3}$$

$$w' - \frac{3}{x}w = \frac{3}{x^3} \; (Linear\, 1^{\text{a}}\, Ordem)$$

Calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int -\frac{3}{x}\,dx} = e^{-3\ln|x|} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando ambos os termos pelo FI, vem

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(w' - \frac{3}{x}w\right) = \left(\frac{3}{x^3}\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\underbrace{\frac{w'}{x^3} - \frac{3}{x^4}w}_{\left(\frac{w}{x^3}\right)'} = \frac{3}{x^6}$$

Aplicando o integral a ambos os termos, temos

$$\int \left(\frac{w}{x^3}\right)' dx = \int \frac{3}{x^6}\,dx \Leftrightarrow \frac{w}{x^3} = -\frac{3}{5x^5} + c$$

Como, $w = y^{-3}$, vem a solução geral

$$\frac{y^{-3}}{x^3} = -\frac{3}{5x^5} + c$$

2. $x^2y' + y^2 = xy$

$$x^2y' - xy = -y^2$$

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^2 \; (Bernoulli)$$

Vamos passar a linear ($\times y^{-2}$)

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}yy^{-2} = -\frac{1}{x}y^2y^{-2}$$

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}\underbrace{y^{-1}}_{\mathrm{w}} = -\frac{1}{x^2}$$

Fazendo a substituição

$$w = y^{-1} \Rightarrow w' = (y^{-1})' = -1y^{-2}y' \Leftrightarrow -w' = y^{-2}y'$$

Vem

$$-w' - \frac{1}{x}w = -\frac{1}{x^2}$$

$$w' + \frac{1}{x}w = \frac{1}{x^2} \ (Linear\ 1^{\text{a}}\ Ordem)$$

Cálculo do FI

$$\text{FI} = e^{\frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = x$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI, vem então

$$x\left(w' + \frac{1}{x}w\right) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(x)$$

$$\underbrace{xw' + w}_{(xw)'} = \frac{1}{x}$$

Aplicando o integral a ambos os termos, tem-se

$$\int (xw)'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow xw = \ln|x| + c$$

Como $w = y^{-1}$, vem a solução geral

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

3. $xy' - y = x^3y^4$

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2y^4 \ (Bernoulli)$$

Vamos passar a linear $(\times y^{-4})$

$$y^{-4}y' - \frac{1}{x}yy^{-4} = x^2y^4y^{-4}$$

$$y^{-4}y' - \frac{1}{x}\underbrace{y^{-3}}_{\text{w}} = x^2$$

Fazendo a substituição

$$w = y^{-3} \Rightarrow w' = (y^{-3})' = -3y^{-4}y' \Leftrightarrow -\frac{w'}{3} = y^{-4}y'$$

Vem

$$-\frac{w'}{3} - \frac{1}{x}w = x^2$$

$$w' + \frac{3}{x}w = 3x^2 \ (Linear\ 1^{\text{a}}\ Ordem)$$

Vamos então calcular o FI

$$\text{FI} = e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = x^3$$

Multiplica-se ambos os termos pelo FI

$$x^3\left(w' + \frac{3}{x}w\right) = (3x^2)(x^3)$$

$$\underbrace{x^3w' + 3x^2w}_{(x^3w)'} = 3x^5$$

Aplicando o integral a ambos os termos, tem-se

$$\int \left(x^3w\right)'\,dx = \int 3x^5\,dx \Leftrightarrow x^3w = \frac{x^6}{3} + c$$

Como $w = y^{-3}$, temos então a solução geral

$$x^3y^{-3} = \frac{x^6}{3} + c$$

12.6 Exercícios por Resolver

Determine as soluções gerais das equações abaixo indicadas, quando especificado indique as soluções particulares.

1. $(3x+1)\sin^2 y - (\operatorname{cotg} y)(x^2-4x+8)y' = 0$
   Tipo: Variáveis Separáveis

2. $y' = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$
   Tipo: Variáveis Separáveis

3. $(x^2+x-1)e^{y2} + x^2y^3(1+x)y' = 0$
   Tipo: Variáveis Separáveis

4. $(1+2y^2)y' = y\cos x$ que verifique $y(0)=1$, $y(0)=0$
   Tipo: Variáveis Separáveis

5. $\left(y' - \frac{y}{x}\right)\ln\frac{y}{x} = 1$
   Tipo: Homogénea

6. $(x^2y+y^3)y' = -x^3 - xy^2$
   Tipo: Homogénea

7. $(1-x)y' = y + 2 + 3(1-x)$, com $x \neq 1$
   Tipo: Linear 1ª Ordem

8. $y' = \cos^2 x - y\operatorname{tg} x$ em que $y(0)=1$
   Tipo: Linear 1ª Ordem

9. $1 + y + x^2y = (x+x^3)y'$
   Tipo: Linear 1ª Ordem

10. $y'\cos x + 2y\sin x = \sin x\cos x$
    Tipo: Linear 1ª Ordem

11. $(2xy+3)y' = y^2$
    Tipo: Linear 1ª Ordem

12. $x^2y' = y^2x^2 - 2$
    Tipo: Bernoulli

13. $xy(y^2x^2-1)x' = 1$
    Tipo: Bernoulli

Capítulo 13

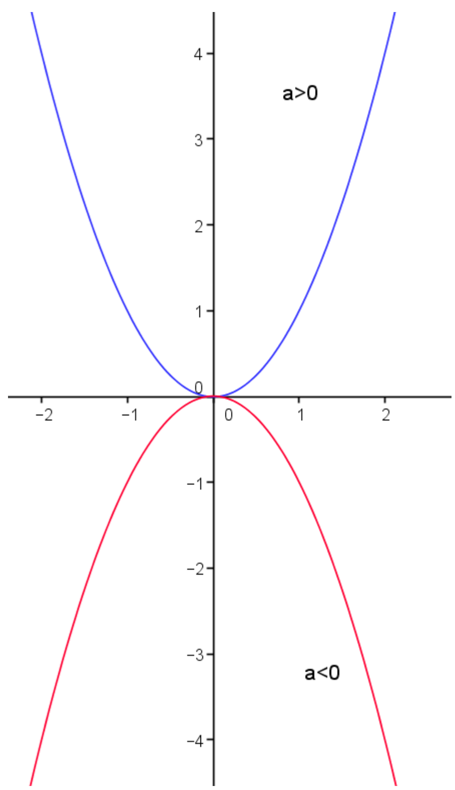
Domínios Planos

13.1 Recordar

13.1.1 Parábolas

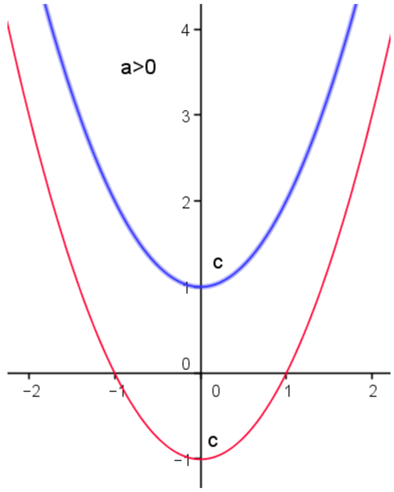
$y = ax^2$

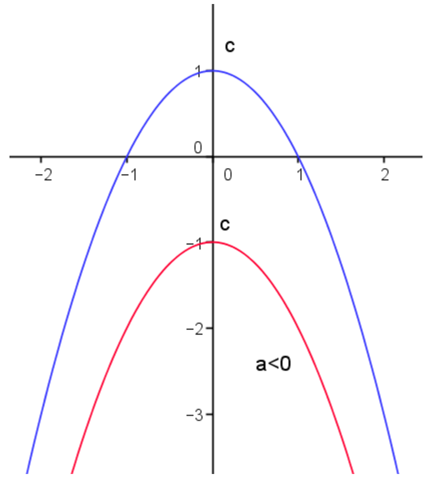
$V(0,0)$



$y = ax^2 + c$

$V(0, C)$





$y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx$

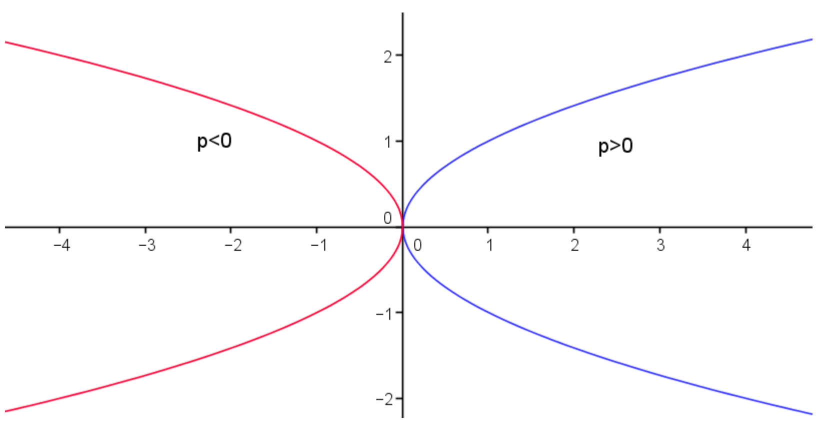
$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$V\left(f'(x) = 0,\ f(f'(x) = 0)\right)$

$(y - y_0)^2 = 2P(x - x_0)$

$(y - y_0)^2 = -2P(x - x_0)$

$V(x_0, y_0)$



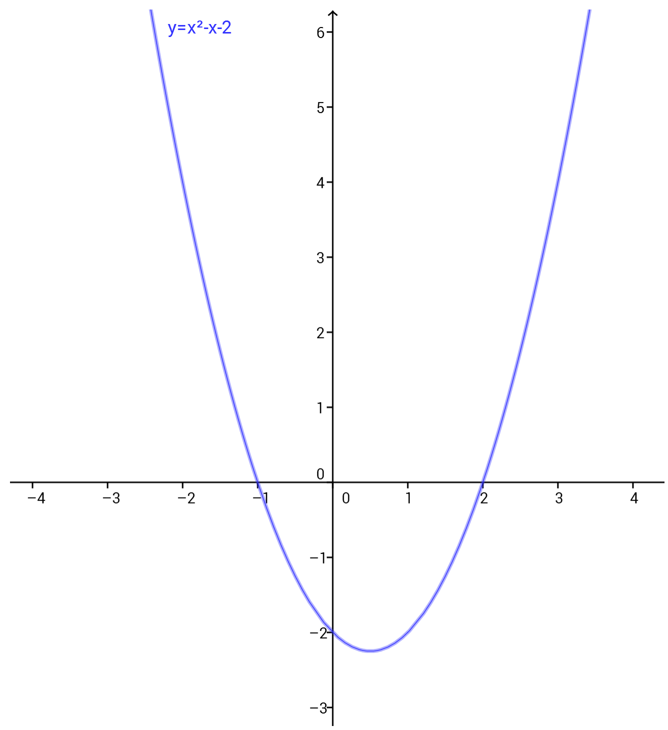
Representação gráfica de Parábolas

1. $y = x^2 - x - 2$

   $a > 0$ (V é o mínimo da função $f'(x) = 0$ e portanto tem a concavidade voltada para cima)
   $f'(y) = (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$
   $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
   $f(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$
   O vértice tem de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

   $f(y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
   $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-2)}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \wedge x = 2$

   Temos então os pontos necessários para traçar o gráfico,

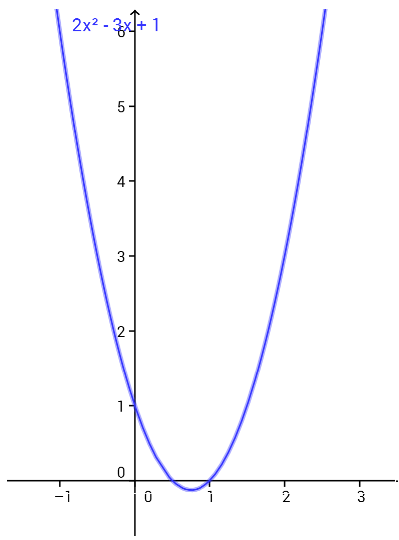


2. $y = 2x^2 - 3x + 1$

   $a > 0$ (V é o mínimo da função $f'(x) = 0$ e portanto tem a concavidade voltada para cima)
   $f'(y) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$
   $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$
   $f(\frac{3}{4} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{8}$
   O vértice tem de coordenadas $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

   $f(y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$
   $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = \frac{1}{2}$

   Temos então tudo necessário para traçar o gráfico,

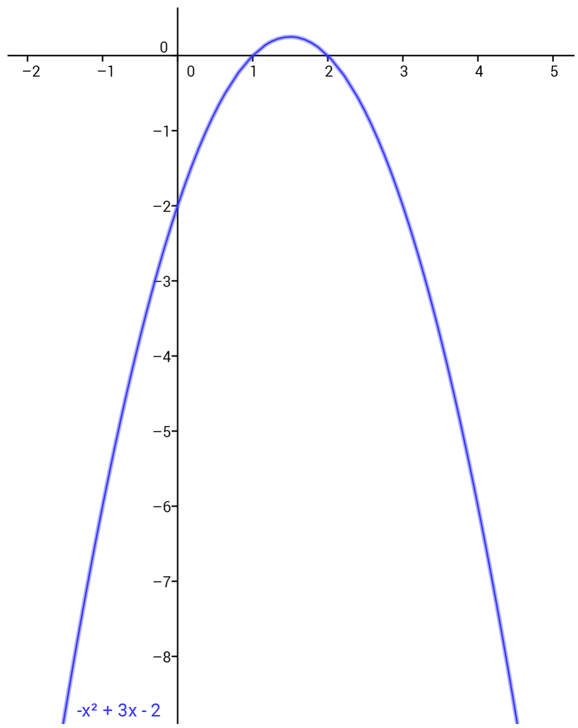


3. $y = -x^2 + 3x - 2$

   $a < 0$ (V é o máximo da função $f'(x) = 0$ e portanto tem a concavidade voltada para baixo)
   $f'(y) = (-x^2 + 3x - 2)' = -2x + 3$
   $f'(y) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
   $f(\frac{3}{2}) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{1}{4}$
   O vértice tem de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

   $f(y) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0$
   $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(-1)(-2)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 2$

   Temos então os pontos necessários para traçar o gráfico,



4. $y - 2 = 2(x+1)^2$

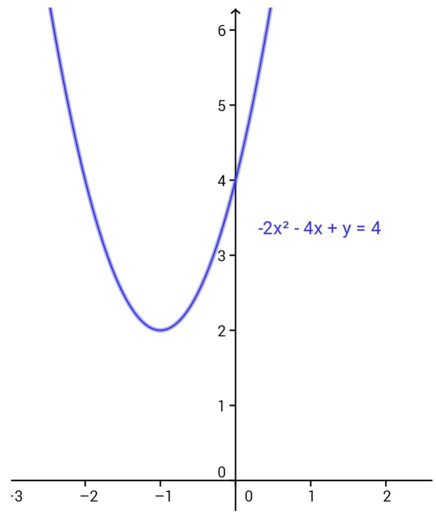
   $a > 0$ (concavidade voltada para cima)
   O vértice tem de coordenadas $(-1, 2)$

   $y - 2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow y = 2(x+1)^2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 4x + 4$
   $f(y) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(2)(4)}}{2(2)}$ ($\emptyset$ - Não tem zeros)

   Vamos então tirar alguns pontos da equação $y = 2x^2 + 4x + 4$

x	y
0	4
-2	4

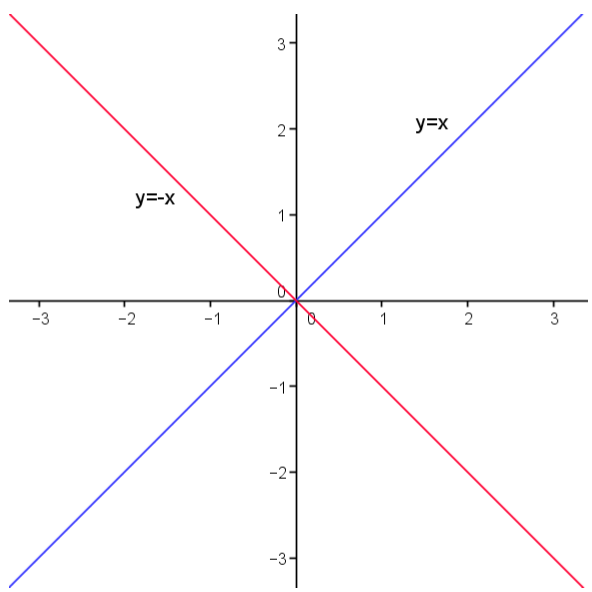
   Temos então os pontos necessários para traçar o gráfico,



13.1.2 Retas

eixo ox $y = 0$
eixo oy $x = 0$

Bissectores: pares $y = -x$ $(m < 0)$
ímpares $y = x$ $(m > 0)$



Vetor da reta

$\vec{v}$ (p,q)
$m = \frac{q}{p}$

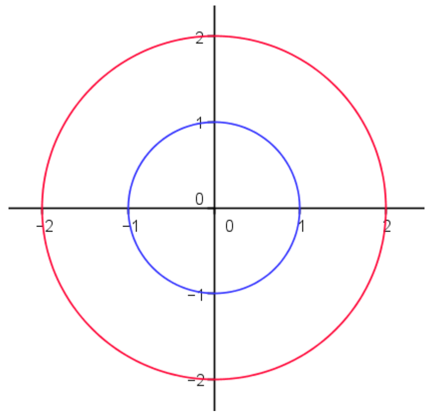
$A(x_1, y_1)\, B(x_2, y_2)$
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y = mx + b$, em que m é o declive e b tem de coordenadas $(0, b)$

13.1.3 Circunferência

$$\boxed{x^2+y^2=a^2}$$

C$(0,0)$
$r=a$



$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2}$$

C(α,β)
$r=a$

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

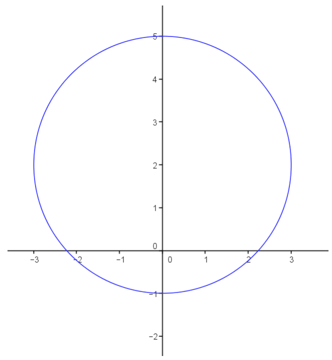
Equação geral da Circunferência

C$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$
$r=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}$

Representação gráfica de Circunferências

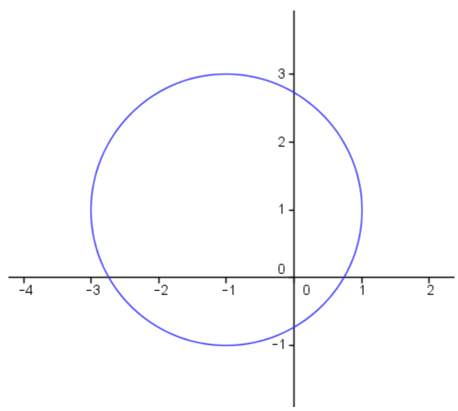
1. $x^2 + (y-2)^2 = 9$

   C$(0, 2)$
   $r = 3$



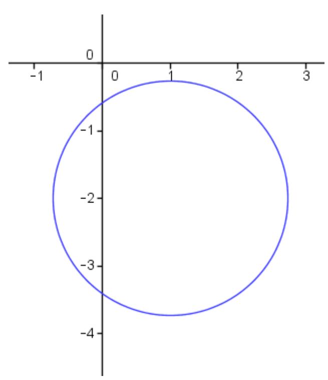
2. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

   C$(-1, 1)$
   $r = 2$



3. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$

   C$(1, -2)$
   $r = \sqrt{3}$



13.2 Expressões sem fração

O Domínio é $\mathbb{R}$ exceto se temos:

1. Raízes de índice par (o interior ≥ 0)
2. Logaritmos $log_a x$ $(x > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1)$
3. Tangentes (os ângulos $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)
4. Cotangentes (os ângulos $\neq k\pi$)

13.3 Expressões com fração

$\frac{Numerador}{Denominador}$

O numerador leva as regras anteriores.

O denominador tem sempre condição

1. Sem Raízes ($\neq 0$)
2. Com raiz de índice par (o interior ≥ 0)
3. Com raiz de índice ímpar (o interior $\neq 0$)

13.3.1 Exercícios

1. $f(x) = \frac{2}{\ln(x-1)}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x-1) \neq 0\} \\ (x-1) > 0 \\ x > 1 \end{aligned}$$

$$D_f =]1, +\infty[$$

2. $f(x) = \frac{3}{e^{\frac{1}{x-1}}}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{\frac{1}{x-1}} \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} \\ \text{Condição Universal} \wedge x \neq 1 \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} \geq 0\} \\ x - 1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{aligned}$$

$$D_f = [1, +\infty[$$

4. $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - 1 \geq 0\} \\ e^{2x} \geq 1 \\ e^{2x} \geq e^0 \\ 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

$$D_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$$

5. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x) + \pi}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg}(x) + \pi \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \\ \operatorname{tg}(x) + \pi \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \operatorname{arctg}(-\pi) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{arctg}(-\pi), \frac{\pi}{2} + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

6. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x + \pi)}$

$$\begin{aligned} D_f = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg}(x + \pi) \neq 0\} \\ x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x + \pi \neq \frac{\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-4} \neq 0\}$$
$$x^2 - 4 > 0$$
$$x^2 > 4$$
$$x < -2 \vee x > 2$$

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{]-2, 2[\}$$

8. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

$$D_f\{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

9. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

$$D_f\{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$$
$$e^x \neq 1$$
$$e^x \neq e^0$$
$$x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

10. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1})$

$$D_f\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} > 0 \wedge x^2 - 1 \geq 0\}$$
$$x^2 > 1 \wedge x^2 \geq 1$$
$$x < -1 \vee x > 1 \wedge x \leq -1 \vee x \geq 1$$
$$x < -1 \vee x > 1$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{]-1, 1[\}$$

13.4 Exercícios

Representar graficamente as seguintes condições.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6 - 2x - 2y \geq 0\}$

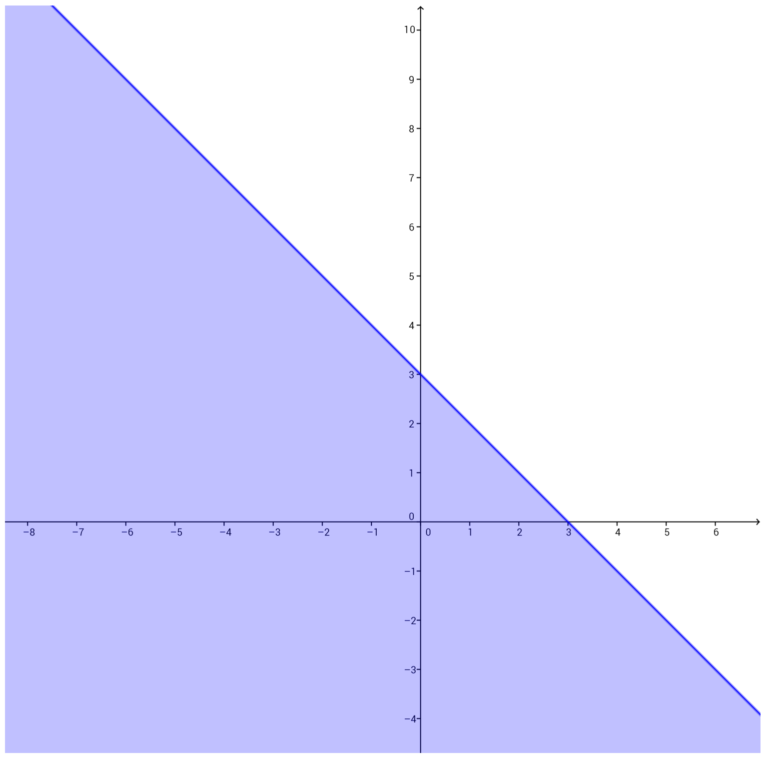
   Resolvendo a inequação vem

$$-2y \geq 2x - 6$$
$$y \leq -x + 3$$

Vamos então tirar alguns pontos da equação $y = -x + 3$

x	y
0	3
3	0

Temos então os pontos A$(0, 3)$ e B$(3, 0)$, vamos então traçar o gráfico do domínio



2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - \frac{x^2}{2} > 0 \wedge -|x| + 4 \geq 0\}$

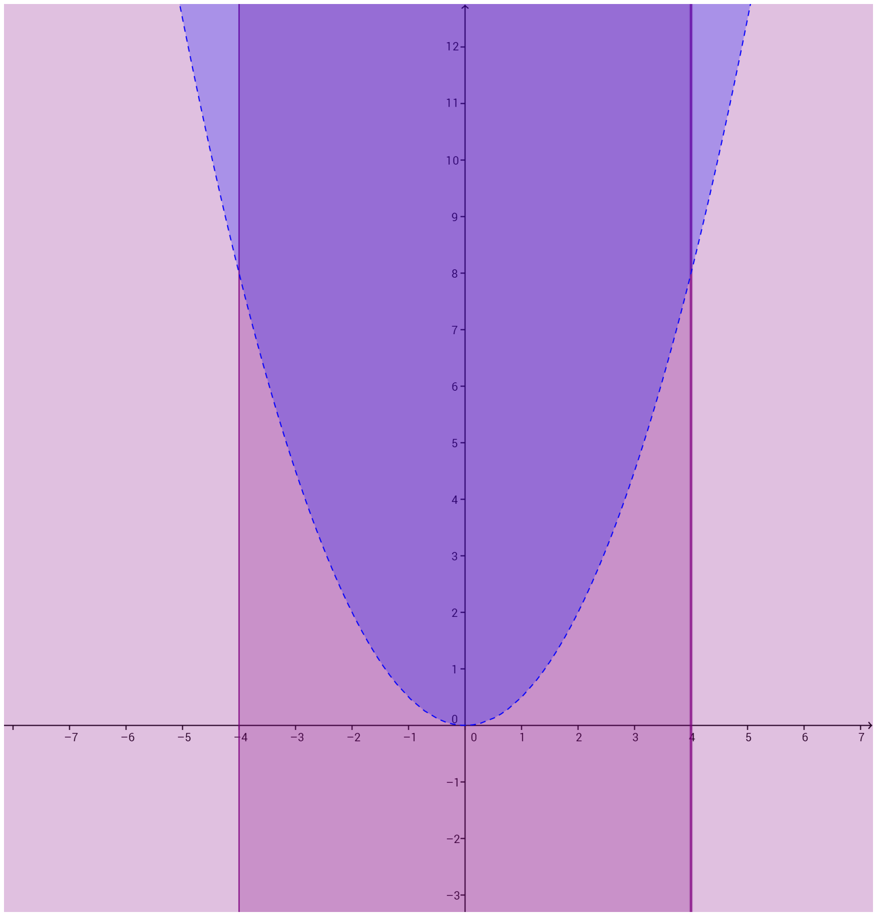
   Resolvendo a inequação vem

$$y > \frac{x^2}{2} \wedge -|x| \geq -4$$
$$y > \frac{x^2}{2} \wedge |x| \leq 4$$
$$y > \frac{x^2}{2} \wedge x \leq 4 \wedge x \geq -4$$

   Vamos então tirar alguns pontos da equação $y = \frac{x^2}{2}$

x	y
0	0
2	2
-2	2
4	8
-4	8

   Temos então tudo necessário para traçar o gráfico do domínio



3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$

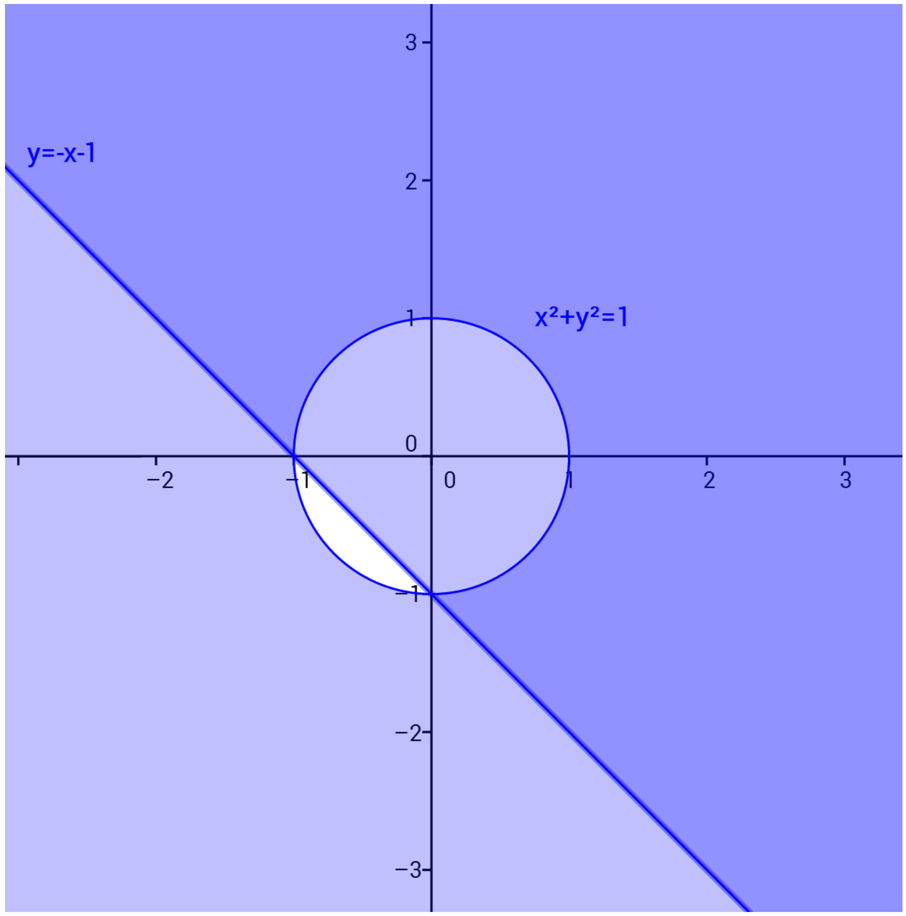
   Resolvendo a inequação vem

   $$y \geq -x - 1 \wedge x^2 + y^2 \geq 1$$

   A equação $x^2 + y^2 = 1$ corresponde à circunferência de C$(0, 0)$ e $r = 1$. Vamos então tirar alguns pontos da equação $y = -x - 1$

x	y
0	-1
-1	0

   Temos então tudo necessário para traçar o gráfico do domínio



4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0\}$
   Para a expressão do domínio ser válida (> 0), a seguinte condição tem de se verificar:

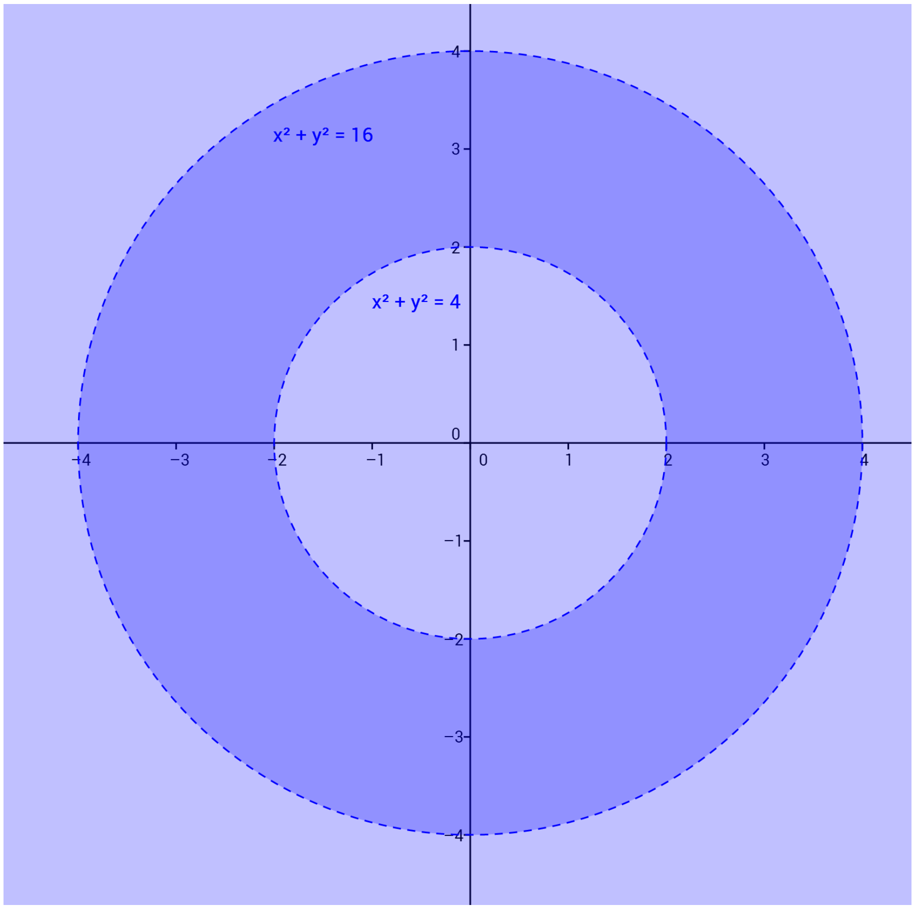
$$((+) \times (+) = (+)) \vee ((-) \times (-)) = (+))$$

   Resolvendo a inequação temos

$$(16 - x^2 - y^2 > 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 > 0) \vee (16 - x^2 - y^2 < 0 \wedge x^2 + y^2 < 0)$$
$$(-x^2 - y^2 > -16 \wedge x^2 + y^2 > 4) \vee \underbrace{(x^2 + y^2 > 16 \wedge x^2 + y^2 < 4)}_{\text{Condição impossível}}$$
$$x^2 + y^2 < 16 \wedge x^2 + y^2 > 4$$

   A equação $x^2 + y^2 = 16$ corresponde a uma circunferência de $\mathrm{C}(0,0)$ com $r = 4$ e a equação $x^2 + y^2 = 4$ é uma circunferência $\mathrm{C}(0,0)$ e $r = 2$.

   Vamos então traçar o gráfico do domínio



5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2x \neq 0\}$

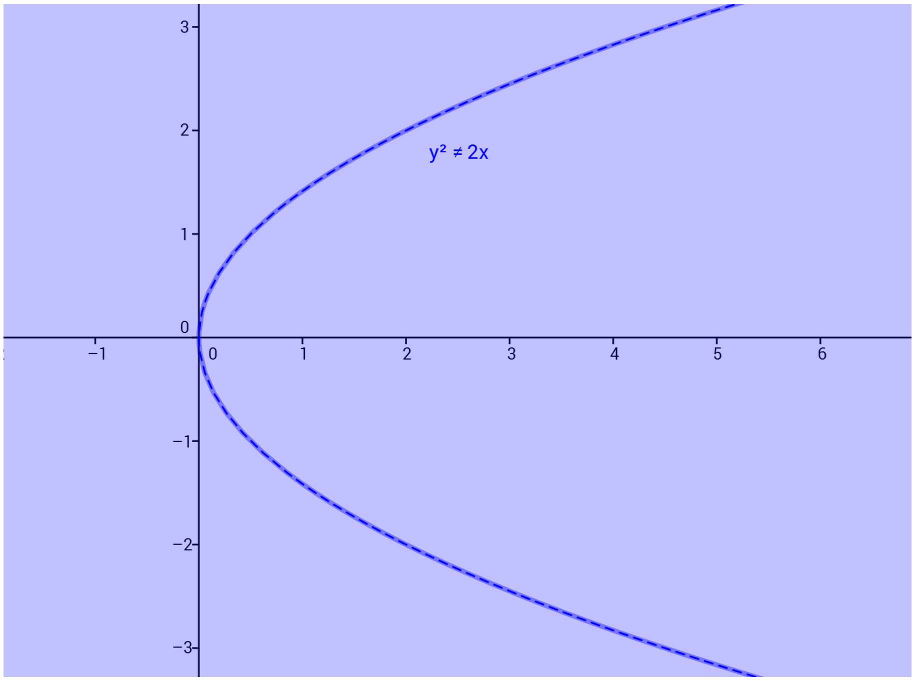
   Resolvendo a inequação vem

$$y^2 \neq 2x$$
$$y \neq \pm\sqrt{2x}$$

   A equação $y^2 = 2x$ corresponde a uma parábola de $\mathrm{V}(0,0)$ com concavidade voltada para a direita. Vamos então buscar alguns pontos do gráfico usando $y = \pm\sqrt{2x}$

x	y
0	0
1	$\pm\sqrt{2}$
2	2
3	$\pm\sqrt{6}$
4	$\pm\sqrt{8}$
5	$\pm\sqrt{10}$

   Temos então tudo necessário para traçar o gráfico do domínio



13.5 Exercícios de correspondência entre domínios e imagem

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \leq -2(x-1)^2 \wedge y \geq 0\}$

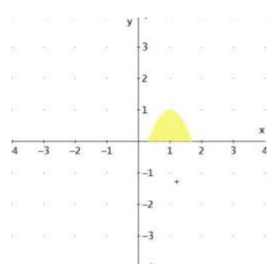
$$\begin{aligned} y - 1 &\leq -2x^2 + 4x - 2 \wedge y \geq 0 \\ y &\leq -2x^2 + 4x - 1 \wedge y \geq 0 \end{aligned}$$

Uma vez que $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo ($\cap$). A parábola está na forma $y - y_0 = a(x - x_0)^2$. O vértice tem então de coordenadas $\mathrm{V}(1, 1)$

Vamos calcular os zeros da parábola

$$\begin{aligned} &-2x^2 + 4x - 1 = 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Posto isto, é fácil concluir que a imagem do domínio é



2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x \leq -2y^2 + 1\}$

   Uma vez que $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda ($\supset$). Vamos calcular então o vértice

   $$\begin{aligned}
   &x = -2y^2 + 1\\
   &f'(y) = (-2y^2 + 1)' = -4y\\
   &f'(y) = 0 \Leftrightarrow -4y = 0 \Leftrightarrow y = 0\\
   &f(0) = -2(0) + 1 = 1
   \end{aligned}$$

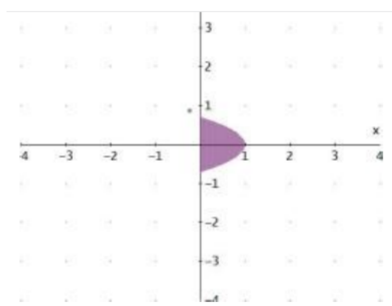
   O vértice tem então de coordenadas V$(1, 0)$.

   Podemos ainda para calcular o vértice, fazendo:

   $$\begin{aligned}
   &x = -2y^2 + 1\\
   &2y^2 = -x + 1\\
   &y^2 = \frac{-x + 1}{2}\\
   &(y - 0)^2 = -\frac{1}{2}(x - 1)
   \end{aligned}$$

   Que vem confirmar as coordenadas V$(1, 0)$.

   Não será necessário calcular os zeros da parábola uma vez que ficou fácil de identificar a figura do domínio,



3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 1 \wedge x \geq y^2 - y - 2\}$

   $y = x + 1$ é o bissetor dos ímpares subindo uma unidade no eixo oy
   A parábola tem $a > 0$ portanto tem a concavidade voltada para a direita ($\subset$). Vamos então calcular o vértice

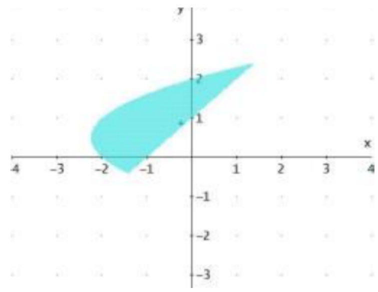
   $$\begin{aligned}
   &x = y^2 - y - 2\\
   &f'(y) = (y^2 - y - 2)' = 2y - 1\\
   &f'(0) = 2(0) - 1 = -1\\
   &f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0
   \end{aligned}$$

   O vértice tem então de coordenadas V$(-1, 0)$.

   Vamos então calcular os zeros da parábola

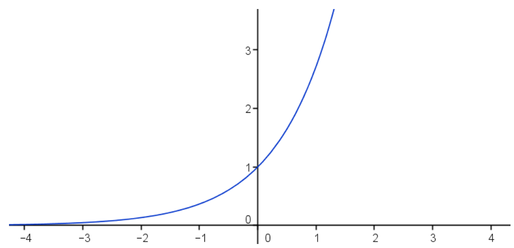
   $$\begin{aligned}
   &f(y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0\\
   &y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y = 2 \wedge y = -1
   \end{aligned}$$

   Facilmente identificamos o gráfico do domínio,

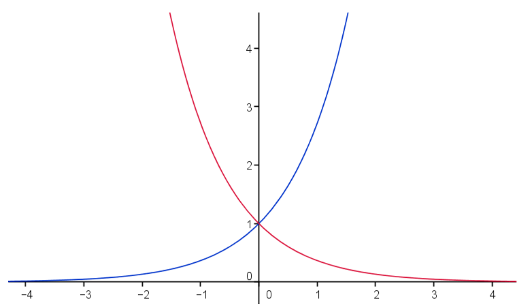


4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq -e^{-x}\}$

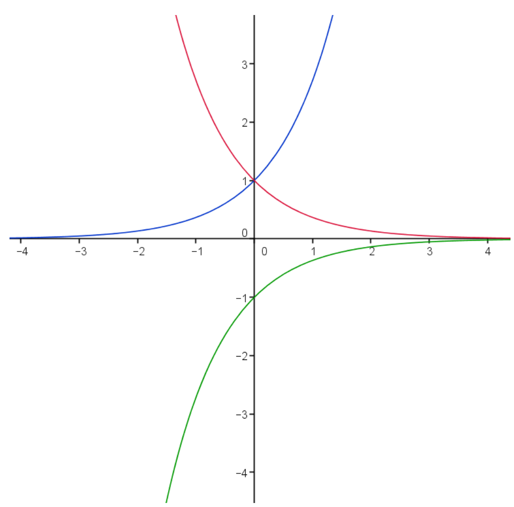
   Nós sabemos que o gráfico de $y = e^x$, é uma função crescente positiva que passa na ordenada $y = 1$,



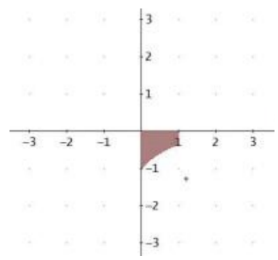
   Então a função $\frac{1}{e^x}$ vai corresponder a uma simetria em relação a oy da função original,



   Uma vez que a função $-\frac{1}{e^x}$ é negativa, então temos uma simetria em relação a ox,



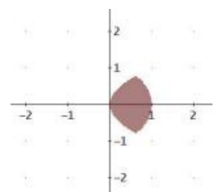
As restantes condições dizem que os valores de y são negativos/nulos e que o x está compreendido entre $[0,1]$.
Portanto o gráfico do domínio é,



5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq y^2\}$

   $x^2 + y^2 = 1$, corresponde a uma circunferência de C$(0,0)$ e $r = 1$.
   $x = y^2$, é uma parábola virada para a direita $(\subset)$ de V$(0,0)$ e que passa nos pontos $(1, \pm 1)$.

   O gráfico do domínio corresponde então a,



6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x + 1 \wedge y \geq x^2 - x - 2\}$

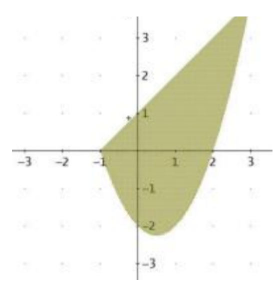
   $y = x + 1$ é o bissetor dos ímpares subindo uma unidade no eixo oy
   A parábola tem $a > 0$ e portanto a concavidade é voltada para cima $\cup$.
   Vamos buscar os zeros da parábola,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \wedge x = -1$$

   Vamos usar um método alternativo para calcular o vértice,

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$
$$V\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$$

   O gráfico da expressão do domínio é então,



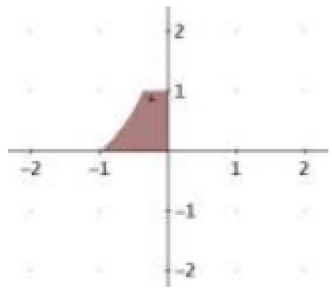
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x \geq -e^{-y}\}$

   Partindo das duas primeiras condições vemos que o x $\in]-\infty, 0]$ e y $\in [0,1]$
   Sobrando então a inequação de equação $x = -e^{-y}$, vamos buscar então alguns pontos

x	y
-e	-1
-1	0
-$\frac{1}{e}$	1

Pode-se ver que é uma função crescente que passa em $(1, 0)$.

Postas estas condições o gráfico domínio correspondente é,

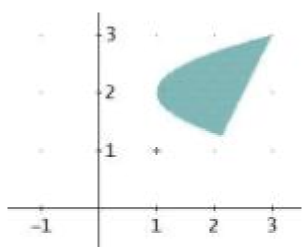


8. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x - 3 \wedge x - 1 \geq 2(y-2)^2\}$
A primeira condição tem de equação $y = 2x - 3$. Vamos ver alguns pontos da reta,

x	y
0	-3
$\frac{3}{2}$	0

A parábola está na forma $(x - x_0) = a(y - y_0)^2$. Tem $a > 0$ então a concavidade é voltada para a direita ($\subset$) e o vértice é V$(1, 2)$.

O gráfico correspondente do domínio é então,



Bibliografia

[1] Azenha, Acilina e Jerónimo, Maria Amélia, "Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$," *McGraw-Hill*, Amadora, 1997.

[2] Baranenkov, G., Demidovitch, B., Efimenko, V., Frolov, S., Kogan, S., Luntz, G., Porshneva, E., Shostak, R., Sitcheva, E. e Yanposki A., "Problemas e Exercícios de Análise Matemática," *McGraw-Hill*, Edição Revista, Amadora, DL 2001.

[3] Bigotte, Emília, Documentos de Suporte, Laboratório Virtual de Matemática, ISEC, 2014

[4] Faria Isabel, C. Silva Pedro, Matemática I, "Textos de Apoio", ISA, 2011

[5] Ferreira, Manuel Alberto M. e Amaral, Isabel, "Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$," *Edições Sílabo, Lda.*, 3ª Edição, Lisboa, 1993.

[6] Miranda, João e Namorado, Joaquim, "Conjuntos Funções Reais de uma Variável Real," *Edição da livraria Almedina*, Coimbra, 1965.

[7] Santos, Fernando Borja, "Sebenta de Matemáticas Gerais - Primitivas e Integrais," *Plátano Editora*, 10ª Edição, Lisboa, 1993