Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº2 Data limite de entrega: 7/out/2016 (18h)

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

[**A. Conhecimento**]

2. Simplifique as seguintes expressões, considerando $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\sin\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(a - \dfrac{7\pi}{2}\right) - \tan\left(a + \dfrac{5\pi}{2}\right) - \cot\left(a - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

[**C. Aplicação**]

2. Considere a função $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Resolva a equação $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

c) [Extra] Faça um esboço do gráfico de f e interprete graficamente a equação da alínea (b).

d) [Extra] Justifique que a função f não é injectiva e defina uma restrição de injectividade. Represente o gráfico de f nesse intervalo.

Sugestão de resolução:

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

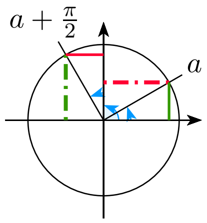
[**A. Conhecimento**]

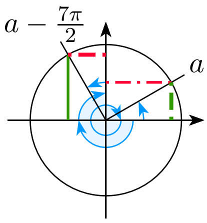
2. b) Tem-se

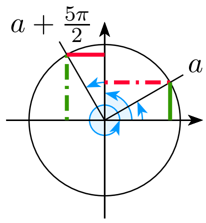
$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \qquad + \cos\left(a - \frac{7\pi}{2}\right) \qquad - \tan\left(a + \frac{5\pi}{2}\right) \qquad - \cot\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)$$

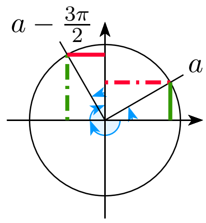
$$= \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \qquad + \cos\left(a - \frac{7\pi}{2}\right) \qquad -\frac{\sin\left(a + \frac{5\pi}{2}\right)}{\cos\left(a + \frac{5\pi}{2}\right)} \qquad -\frac{\cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$









$$= \cos(a) \qquad - \sin(a) \qquad -\frac{\cos(a)}{-\sin(a)} \qquad -\frac{-\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$= \cos(a) \qquad - \sin(a) \qquad + \cot(a) \qquad + \tan(a)$$

[**C. Aplicação**]

2.

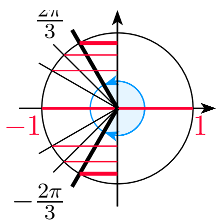
a) Não existe qualquer restrição associada à expressão analítica de $f(x)$, pelo que $D_f = \mathbb{R}$. Relativamente ao contradomínio, tem-se

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos(2x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq 1+\cos(2x) \leq 2 \end{aligned}$$

pelo que $CD_f = [0,\, 2]$.

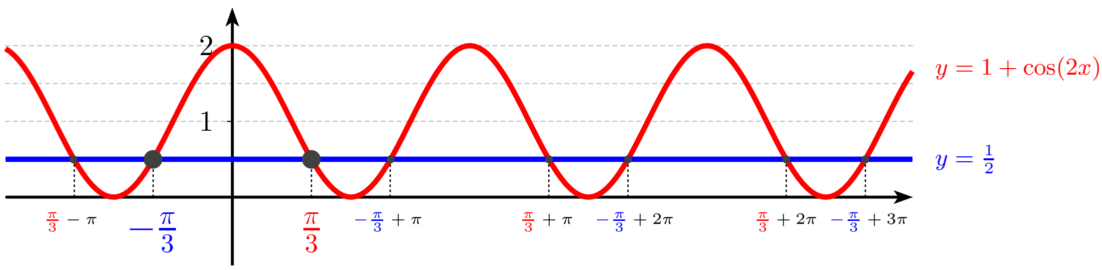
b) Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} \quad & \Leftrightarrow \quad 1+\cos(2x) = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} - 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = -\frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \text{ver fórmula 21, Tabelas pág. 1} \end{aligned}$$



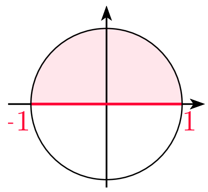
$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \ \vee\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \\ & \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\,\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + k\,\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) A equação anterior define a intersecção do gráfico de $f(x) = 1+\cos(2x)$ com a recta horizontal $y = \frac{1}{2}$. Como se verifica pelo gráfico seguinte, essa equação tem um número infinito de soluções.



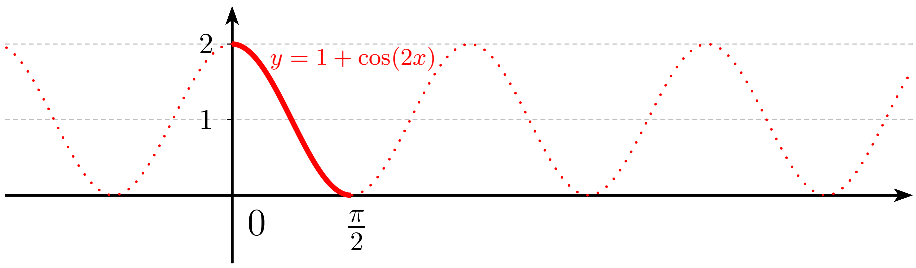
d) A função não é injectiva porque existem diferentes objectos (x) com a mesma imagem. Por exemplo, de acordo com a alínea (c), os objectos $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$ têm a mesma imagem: $f(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

O domínio natural de f é $\mathbb{R}$, como foi referido em (a). A restrição de injectividade tem por base a restrição principal da função cosseno, que é definida por $[0,\, \pi]$. Assim,



$$\begin{array}{rcccc} & 0 & \leq & 2x & \leq & \pi \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & x & \leq & \dfrac{\pi}{2}\,. \end{array}$$

Na restrição principal, a função tem representação gráfica dada por



pelo que foram "eliminadas" todas repetições de resultados e portanto nestas condições a função já injectiva e invertível.