Teste 1

03-julho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Considere a função real de variável real $f(x) = arccos(-\frac{1}{2}) - arcsen(3x-1)$.

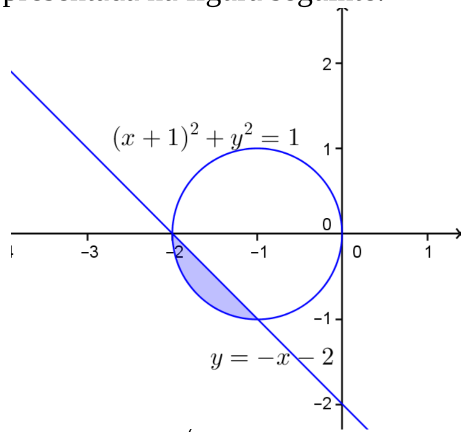
   a. Comente a afirmação $f(\frac{1}{6}) = \frac{5\pi}{6}$.

   b. Resolva a equação $2\cot g\left(f(\frac{1}{6}) - 3x \right) + 2 = 0$.

   c. Averigue se a equação $f(x) = -\frac{\pi}{3}$ é possível. Justifique convenientemente a sua resposta.

   d. Caracterize a função inversa de f indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

2. Considere a região do plano A representada na figura seguinte:



   a. Reescreva o domínio plano na forma $E = \{(x,y) \in \Re^2 : a \le x \le b \wedge f(x) \le y \le g(x)\}$.

   b. Usando integrais indique, <u>sem calcular</u>, expressões simplificadas que lhe permitam determinar:

      i. a área da região A.

      ii. o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região A em torno do eixo das ordenadas.

3. Considere a região do plano, definida pelo seguinte conjunto

$$E = \{(x,y) \in \Re^2 : x \ge y^2 - 1 \wedge y \ge -e^{-x} \wedge y \le 0\}$$

   a. Represente geometricamente a região E.

   b. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região E em torno do eixo das abcissas.

   c. Que pode concluir da existência da medida encontrada na alínea anterior.

   d. Considere a região sujeita à condição $x \le 1$.

      i. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar o perímetro total da região E

      ii. Calcule a área do domínio E.

4. Considere a função real de variável real $f(x)=\begin{cases}-x+2, x\geq 1\\ -\sqrt{-x+2}, x<1\end{cases}$.

a. Averigue a continuidade da função.

b. Considere g uma função impar e $\int_{-1}^{2} g(x)dx=-1$. Calcule o valor do integral $\int_{1}^{2}(f+g)(x)dx$.

5. Considere a seguinte função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}$.

a. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $arctg(2\sqrt{x})+\pi$ é uma primitiva de $f(x)$.

b. Justifique convenientemente que o integral $\int_{1/4}^{+\infty} f(x)dx$ é impróprio de 1ª espécie. Determine a sua natureza.

c. Considere os seguintes integrais:

I) $\int_{1/4}^{4} f(x)dx$ II) $\int_{-1/4}^{0} f(x)dx$ III) $\int_{0}^{1/4} f(x)dx$

Identifique qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie, justificando convenientemente a sua escolha. Determine a sua natureza.

d. Comente a afirmação “ O integral $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ é um integral misto convergente.”

Cotação

1a	1b	1c	1d	2a	2bi	2bii	3a	3b	3c	3di	3dii	4a	4b	5a	5b	5c	5d
0,75	1	0,75	1,5	1	1,5	1,5	1	1,25	1	1,5	2	0,5	1,5	0,5	0,75	1,25	0,5

ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Teste 2

03-julho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das afirmações:

a. $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n}\left(1-\frac{1}{9}\right)$ é uma série de Mengoli, convergente de soma igual $\frac{4}{27}$.

b. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{ln\, 2^n}{\sqrt[3]{n^4}}$ é uma série Dirichlet, divergente.

2. Determine justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{1-2n}}$ b. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4}+2}$

3. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

(i) $xy' - x^3e^x = 2y$ (ii) $xy' - x^2e^x y^2 + y = 0$ (iii) $xy' - x^2e^{x^2} y = 2y$

a. Identifique, justificando, a equação (i) quanto ao tipo e determine a sua solução geral.

b. Prove que a função $y = -\frac{e^{-x}}{x}$ é solução da equação (ii).

c. Justifique que a equação (iii) é de variáveis separáveis e resolva-a sujeita à condição $y(1) = 1$.

4. Complete a seguinte expressão em $[\,.\,]$ por forma a obter primitivas imediatas, justificando qual(is) a(s) regra(s) aplicada(s) $\int \frac{ln 3}{x\sqrt{4-[.]}}dx$.

5. Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas determine $\int \frac{2sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\, sec(3\sqrt{x})}dx$.

6. Sabe-se que $\int \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}dx = arctg(2\sqrt{x}) + C, C \in \Re$.

Prove a igualdade anterior recorrendo:

a. à definição de primitiva.
b. às regras de primitivação imediata.
c. à técnica de primitivação por substituição.

7. Calcule as seguintes primitivas:

   a. $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$.

   b. $\int \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x^3}} dx$

   c. $\int \frac{1}{x} arctg(ln(x))dx$

Cotação

1	2	3a	3b	3c	4	5	6a	6b	6c	6b	7a	7b	7c
2	2	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1	1,25	1,5	1,5	2	1,75	1,5

ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame

03-julho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Considere a função real de variável real $f(x) = arccos(-\frac{1}{2}) - arcsen(3x-1)$.

   a. Resolva a equação $2cot\,g\left(f(\frac{1}{6}) - 3x \right) + 2 = 0$.

   b. Caracterize a função inversa de f indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

2. Considere a região do plano, definida pelo seguinte conjunto

$$E = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : x \geq y^2 - 1 \wedge y \geq -e^{-x} \wedge y \leq 0 \right\}$$

   a. Represente geometricamente a região E.

   b. Reescreva o domínio plano na forma $E = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : a \leq y \leq b \wedge f(y) \leq x \leq g(y) \right\}$

   c. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região E em torno do eixo das abcissas.

   d. Considere a região sujeita à condição $x \leq 1$. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar:

      i. a área do domínio E.

      ii. o perímetro total da região E.

3. Considere a seguinte função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}$.

   a. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $arctg(2\sqrt{x}) + \pi$ é uma primitiva de $f(x)$.

   b. Prove a igualdade anterior recorrendo à técnica de primitivação por substituição.

   c. Considere os seguintes integrais:

   I) $\displaystyle\int_{1/4}^{4} f(x)dx$ II) $\displaystyle\int_{-1/4}^{0} f(x)dx$ III) $\displaystyle\int_{0}^{1/4} f(x)dx$

   Identifique qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie, justificando convenientemente a sua escolha. Determine a sua natureza.

4. Determine justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

   a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{1-2n}}$ b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{ln\,2^n}{\sqrt[3]{n^4}}$

5. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

   a. $xy' - x^3 e^x = 2y$ b. $xy' - x^2 e^{x^2} y = 2y$

6. Calcule as seguintes primitivas:

a. $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$.

b. $\int \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x^3}} dx$

c. $\int \frac{1}{x} arctg(ln(x))dx$

d. $\int \frac{2sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\, sec(3\sqrt{x})} dx$

.

Cotação

1a	1b	2a	2b	2c	2di	2dii	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	6a	6b	6c	6d
0,75	1,25	1	1	1,5	1,25	1,25	0,5	1	1,5	1	1	1	1	1,5	1,25	1,25	1