



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Teste 1

30-abr-2014

Duração: 2h00m

Importante:

A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados.

1. Considere a função $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

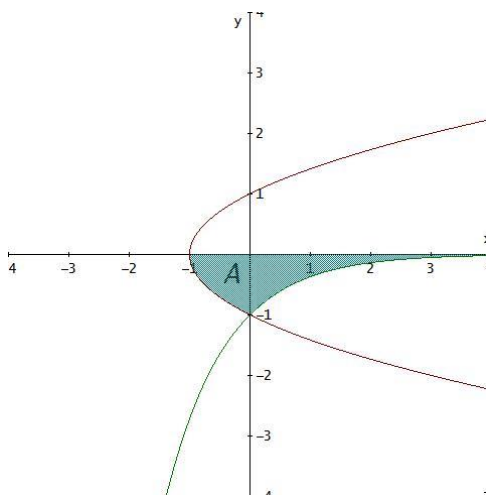
a. Calcule $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

b. Determine os zeros da função $f(x)$.

c. Justifique que $f(x)$ não é injetiva e determine a restrição de injetividade para a função.

d. Caracterize a função inversa de $f(x)$, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

2. Considere a região representada na figura



a. Justificando convenientemente a sua escolha, diga se algum dos seguintes conjuntos corresponde à região representada no gráfico por A. Em caso negativo, defina convenientemente o conjunto.

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq \ln(-y) \wedge x+1 \leq y^2 \wedge y \leq 0\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -\ln(-y) \wedge x+1 \geq y^2 \wedge y \leq 0\}$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\ln(-y) \wedge x+1 \geq -y^2 \wedge y \leq 0\}$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \ln(-y) \wedge x+1 \leq -y^2 \wedge y \leq 0\}$$

b. Utilizando o cálculo integral, identifique, sem calcular, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido de revolução em torno do eixo das abcissas.

c. Que pode concluir sobre a existência da medida encontrada na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta.

d. Considere o domínio A limitado pela equação $x = 1$. Utilizando o cálculo integral, identifique, sem calcular, a expressão que lhe permite determinar a área da região.

3. Considere a região do plano $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

a. Represente graficamente a região B .

b. Reescreva o domínio plano X da forma: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$.

c. Usando unicamente o cálculo integral, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área de B ;

ii. o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de B em torno do eixo OX ;

iii. o perímetro de B .

4. Considere a seguinte função real de variável real $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

a. Prove que o integral $\int_0^2 f(x)dx$ é impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

b. Identifique, justificando, cada uma das seguintes expressões:

i. $\int_4^{10} f(x)dx$

ii. $\int_{-\infty}^2 f(x)dx$

iii. $\int_0^1 f(x)dx$

5. Mostre que a equação diferencial $\sqrt{1-v^2} dt - t dv = 0$ é de variáveis separáveis e determine a solução particular de $v = f(t)$ que satisfaz a condição $v(1) = \frac{1}{2}$.

6. Considere a seguinte equação diferencial $x^2 y' - xy = 2x^4 \sin(x^2)$

a. Verifique se $y = -x \cos(x^2)$ é solução da equação.

b. Resolva a equação diferencial.

Cotação

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3ci	3cii	3ciii	4a	4b	5	6a	6b
0,75	1,25	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,0	1	0,75	0,75	0,75	1,25	1,5	1,0	1,5	1,25	1,25