Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - parte 1 - Engenharia Informática

5 de Fevereiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

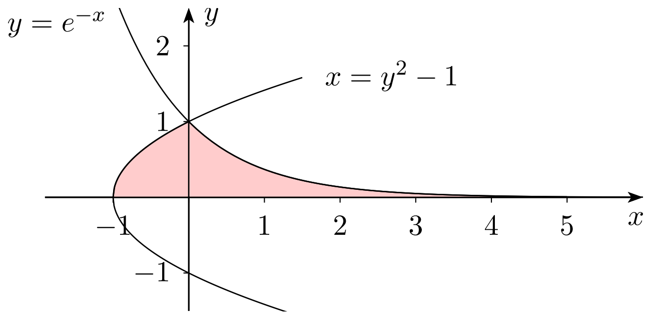
[3.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(2x+1)$.

(a) Calcule o valor de $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

(b) Determine o zero de $f(x)$.

(c) Caracterize a função inversa de f indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[5.0 *val.*] 2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



(a) Identifique, sem calcular, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo das abcissas.

(b) O que pode concluir sobre a existência da medida definida na alínea anterior.

(c) Calcule a área da região considerada na figura <u>quando</u> $x \leq 1$.

[5.0 *val.*] 3. Considere a região $\mathcal{B}$ definida por $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

(b) Identifique, justificando, a região $\mathcal{B}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(c) Usando unicamente cálculo integral, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área de $\mathcal{B}$;

ii. o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy;

iii. o perímetro de $\mathcal{B}$.

[3.0 *val.*] 4. Considere a função $f(x) = \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$.

(a) Mostre que a restrição principal de $f(x)$ é definida por $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

(b) Prove, recorrendo à definição de primitiva, que $\int f(x)\,dx = \arcsin(\operatorname{tg} x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(c) Indique, justificando, qual dos seguintes integrais é impróprio.

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}\,dx$.

(d) Determine a natureza do integral impróprio.

[1.5 *val.*] 5. Determine o integral geral da equação diferencial linear de 1ª ordem $y' + \dfrac{4y}{x} = x^5$.

[2.5 *val.*] 6. Considere as seguinte equações:

(i) $y' = \dfrac{2xy^2 + x}{x^2 y - y}$; (ii) $xy' = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y$; (iii) $\sqrt{y} + y\operatorname{tg} x = \sec x$.

(a) Identifique as equações diferenciais e classifique-as, justificando, quanto ao tipo.

(b) Determine o integral geral de <u>uma</u> das equações diferenciais dadas.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I - parte 2 - Engenharia Informática

5 de Fevereiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{8\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ é uma série de <u>Dirichlet</u>, <u>convergente</u>.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é uma série de <u>Mengoli</u>, <u>convergente</u> e de <u>soma</u> $\frac{1}{2}$.

[2.0 *val.*] 2. Determine, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n-1}$.

[2.0 *val.*] 3. Usando as regras de primitivação imediata, determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$.

[4.0 *val.*] 4. (a) Usando a técnica de primitivação de funções trigonométricas, determine $\displaystyle\int \sin^3 t \sec^4 t\, dt$.

(b) Usando a mudança de variável indicada, mostre que a primitiva se reduz ao cálculo da primitiva da alínea (a) e estabeleça o respectivo resultado.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

$$m.v.:\ \boxed{x = 2\,\mathrm{tg}\, t},\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

[4.0 *val.*] 5. Calcule a primitiva $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\cos(e^x)$ recorrendo

(a) à técnica de primitivação imediata;

(b) à técnica de primitivação de funções trigonométricas;

(c) à técnica de primitivação por partes.

[6.0 *val.*] 6. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{\pi}{1+\pi^2} + \frac{e^{6x}+e^{3x}}{e^{2x}}\right) dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \arcsin(\ln x)\, dx$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

5 de Fevereiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(2x+1)$.

(a) Calcule o valor de $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

(b) Caracterize a função inversa de f indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[6.0 *val.*] 2. Considere a região $\mathcal{A}$ definida por $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 - 1 \wedge 0 \leq y \leq e^{-x}\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

(b) Identifique, sem calcular, a expressão que lhe permite determinar o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo das abcissas.

(c) O que pode concluir sobre a existência da medida definida na alínea anterior.

(d) Considere a região anterior quando $x \leq 1$.

i. Calcule a área da região.

ii. Usando cálculo integral, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região.

[2.0 *val.*] 3. Considere as seguinte equações:

(i) $y' = \dfrac{2xy^2 + x}{x^2y - y}$; (ii) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$; (iii) $\sqrt{y} + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

(a) Identifique as equações diferenciais e classifique-as, justificando, quanto ao tipo.

(b) Determine o integral geral de uma das equações diferenciais dadas.

[2.0 *val.*] 4. Determine, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{8\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

[8.0 *val.*] 5. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{\pi}{1+\pi^2} + \frac{e^{6x} + e^{3x}}{e^{2x}}\right) dx$;

(b) $\displaystyle\int x \operatorname{tg}(x^2) \sqrt[3]{\sec(x^2)}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}\, dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \arcsin(\ln x)\, dx$.