Capítulo 3 e 4

$\mathbb{R}$ – Conjunto Números reais

$\mathbb{R}^2$ – $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Vetor: direção sentido e comprimento $\vec{AB}$ ou $\vec{u}$ ou $B-A$

- simétrico: A mesma direção e comprimento com sentido contrário $\vec{AB} = -1\vec{u}$
- Comprimento: $\|\vec{u}\|$, norma $= \sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

- Vetores Colineares ou Paralelos:
  $\vec{v}$ for multiplo Escalar $\vec{v} = k\vec{u}$

- Equação Vetorial da reta

$P - A = k(B - A)$

↳ Qualquer Ponto ↳ representa o declive da reta

- Produto Interno ou Escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$

ou

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$

- Perpendiculares Entre 2 Vetores

$\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{\text{vetores não nulos}} = 0$

- ~~Retas~~

$\boxed{\text{Rectas}}$

- Equação da reta (Equação Cartesiana) Vetorial

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \qquad P_0(x_0, y_0) \qquad u = (u_1, u_2)$$

Equação da reta (Reduzida)

$$y = mx + b$$

$m \leftarrow$ declive

$b \leftarrow$ ordenada na origem

simétrico $v = -u$

Inverso $v = \frac{1}{u}$

Vectores em $\mathbb{R}^n$ (Capítulo III)

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ Conjunto de termos ordenados N° Reais

a ← abcissa
b ← ordenada
c ← cota

Norma $= \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ = $u=(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

- Produto Interno ou Escalar

$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

$u \cdot v = u^T \cdot v$

III

- Produto Vetorial

$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ (Vetor em $\mathbb{R}^3$)

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

sendo que
$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$

ou então

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Aplicação do Produto Vetorial

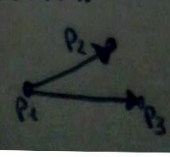
- Área do Triângulo

$A_\Delta = \frac{1}{2} \|u \wedge v\|$

- Área do Paralelogramo

$u = \overrightarrow{P_1 P_2}$
$v = \overrightarrow{P_1 P_3}$

$A = \|u \wedge v\|$



- Cálculo do Volume de Paralelipípedo

$$V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- **Retas**

Equação de R, $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}}$$

Se alguma componente for nula

$u_1 = 0$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3} \end{cases}$$

- **Planos** Pág 48

$$\underbrace{Ax + By + Cz = D}_{\text{Equação do Plano}}$$

$\vec{w} = (A, B, C) \perp$ Plano
↳ Vector normal

- **Transformações lineares**

T de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \quad u \longrightarrow v = T(u) \end{array} \left\} \begin{array}{l} T(u+v) = T(u) + T(v) \\ T(\alpha u) = \alpha T(u) \end{array} \right.$$

Transformação matricial

A (matriz $m \times n$)

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $T(u) = A(u)$

Dilatação e Contração

$$T(u) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} u = ku \begin{cases} k > 1 \rightarrow T \text{ Dilatação} \\ 0 < k < 1 \rightarrow T \text{ Contração} \end{cases}$$

Pág 58

Espaço Vetorial

$\mathbb{R}^n$ (n Componente)

$\mathbb{R}^n = \{ u_1, u_2, u_n \} : u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R} \}$ ou $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\}$

Sub-Espaço Vetorial

- $S \neq \{\}$
- $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$ / $\alpha \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow \alpha u \in S$

Combinação Linear

$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, onde w é Comb. linear

Processo:

1° Substituir Vetores

2° multiplicar pelo Escalar

3° Agrupar Cada Componente num Vetor

4° resolver sistema Através da matriz Completa

Subespaço Gerado por Vetores $\rightarrow S = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$

Dependencia Linear

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ — Linearmente Dependente $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ / Linearmente Independente $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$

Se só existir | uma solução: L. Independente
| mais solução: L. D.

sistema Homogêneo | determinado : L.I
| Indeterminado : L.D.

Teoremas

- u e v são L.D $\Rightarrow$ $u = \alpha v$ $(u // v)$
- u, v e w são L.D $\Rightarrow$ são Coplanares $(\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v})$

Base

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ Base Canônica $\{(1,0), (0,1)\}$ $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ (i, j)

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ Base Canônica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (i, j, K)

Conjunto de vetores de um subespaço S de $\mathbb{R}$

Para saber se formam uma base, basta mostrar que são L.I

Se S (subespaço) admite B (base) com n vetores, então S tem dimensão n

$\dim S = n$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$ $\dim = n$

capítulo IV

Vector Próprio

$\boxed{A}$ matriz quadrada $\Big\}$ $\underbrace{A\,v}_{m \times 1}$ (vector) $\quad Au \parallel u$

$m \times m$ $\quad\quad m \times m \cdot m \times 1$

$\boxed{v}$

Exemplo

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{Au = \lambda u}$

Vector Próprio de A

Valor Próprio de A

$Au = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \boxed{u} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

λ Valor Próprio $\rightarrow$ λ só é Valor Próprio de A se $\det(A - \lambda I) = 0$

- Polinómio Característico

$c(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow (0 < c(\lambda) \leq m)$

raízes deste Polinómio de Grau m são os Valores Próprios de A

$\boxed{\sigma(A)}$ Espectro de A

↳ Conjunto de Valores Próprios

- Equação de Característica

$\det(A - \lambda I) = 0$

Teoremas

- $Au = \lambda u \Leftrightarrow \alpha u$ Também é Vector próprio

$u + v$

- Espaço Próprio

Vector Incógnitas

$$E(\lambda) = \{ u \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I) u = 0 \}$$

Sistema Linear Homogéneo que é sempre Indeterminado

$$car(A - \lambda I) < n$$

Teoremas

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

- Valor Próprio
- multiplicidade Algébrica

- Valor Proprio
- multiplicidade Geometrica

- Propriedades dos Valores Próprios

1º $A = PBP^{-1}$, P é invertível

Têm os mesmos Valores Próprios $C(A) = C(B)$

2º $A_{n \times n}$ $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

Traço de A = Soma dos Elementos da diagonal de A

3º A é invertível se os seus Valores Próprios são não nulos

$\lambda_1 \; \lambda_2 \; \lambda_3 \dots$

4º A e A^T tem o mesmo Polinómio Característico

5º Teorema de Cayley - Hamilton

Aplicação: $A^k = \lambda A + \beta I$

$$C(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

- Diagonalização de matrizes

Matriz Diagonal

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ Vantagens $\begin{cases} \bullet\ \sigma(D) = \{1, 0, 5\} \text{ (Valores Próprios Distintos)} \\ \bullet\ \det(D) = 1 \times 0 \times 5 = 0 \\ \bullet\ D^{-1} \end{cases}$

Como Averiguar (teoremas) $\begin{cases} \bullet\ \text{Tem } n \text{ Valores Próprios Distintos (o contrário não prova nada)} \\ \bullet\ \text{Para cada } \lambda_n\text{, as suas } ma(\lambda) = mg(\lambda) \end{cases}$

Tornar uma matriz parecida em uma matriz Diagonal

$\boxed{A = P\, D\, P^{-1}}$

→ Diagonal (Elemento = Valores Próprios)

→ Diagonalizante (As suas colunas são os vetores Próprios)