Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Exame de **Álgebra Linear** (Época de Recurso)

Engenharia Informática e Curso Europeu de Informática

12 de fevereiro de 2016 Duração: 2h30m

Nota: Deve justificar convenientemente todas as respostas.

---

1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = i$ e escreva as três soluções na forma algébrica $a + bi$.
(**Sugestão**: Use a fórmula $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.)

2. Sejam $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ a inversa de A, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o valor de α para o qual B é singular.

   (b) Usando A^{-1}, determine a solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$.

   (c) Nas alíneas seguintes, suponha que $\alpha = 2$.

      (i) Sem calcular explicitamente A e B^{-1}, determine $(AB^{-1})^{-1}$.

      (ii) Determine B^{-1}.

3. Considere o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ & & & & 6x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \end{array}\right.$

   (a) Use o método de eliminação de Gauss para classificar e determinar o conjunto solução do sistema.

   (b) Indique, se existirem, duas soluções particulares do sistema.

4. Dada a matriz real $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, sabe-se que $\det(A) = 2$. Calcule, justificando:

   (a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d-4g & 3e-4h & 3f-4i \\ \frac{1}{6}g & \frac{1}{6}h & \frac{1}{6}i \end{vmatrix}$;

   (b) $\det(2A^TA)$;

   (c) a matriz resultante do produto de A pela sua adjunta $\mathrm{adj}(A)$.

5. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) O plano $\alpha:\ 2x - y + z = 2$ e a recta $r:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z + 3$ são paralelos;

   (b) A imagem do triângulo de vértices $(5, 0)$, $(0, 3)$, $(2, -1)$ pela transformação linear

   $$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v},$$

   é o triângulo de vértices $(5, -10)$, $(0, 3)$, $(2, -5)$;

   (c) O conjunto $S = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ xy = 0\ \}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$;

(d) O vector $(-4, -7, -5)$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$ e $\mathbf{v} = (6, 1, 1)$;

(e) Três vetores de $\mathbb{R}^4$ que sejam linearmente independentes podem formar uma base de $\mathbb{R}^4$;

(f) Sendo B uma matriz 2×2 tal que $\mathrm{tr}(B) = 8$ e $\det(B) = 12$, os valores próprios de B são 2 e 6.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que o polinómio característico de A é $c(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)^2$.

(b) Calcule o espaço próprio $E(1)$.

(c) Sem calcular $E(3)$, averigue se A é diagonalizável.

Cotações: **1.** 1.5 **2.**(a)1.0 (b)1.0 (c)(i)0.75 (ii)1.25 **3.**(a)1.5 (b)0.5 **4.**(a)1.0 (b)0.75 (c)0.75
5.(a)1.0 (b)1.0 (c)1.0 (d)1.0 (e)0.75 (f)1.25 **6.**(a)1.5 (b)1.5 (c)1.0