Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 1) - Engenharia Informática - Época normal

25 de Janeiro de 2016 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\,\text{arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{1}{3}\,\sin(5x+\pi)$.

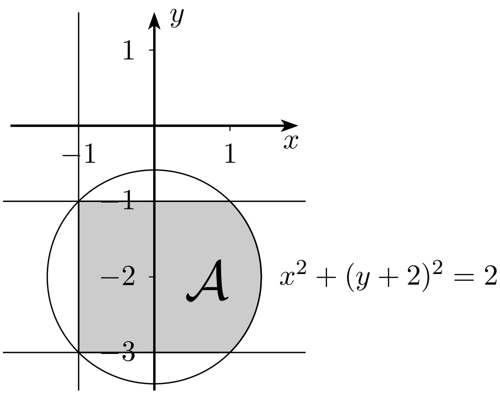
[1.0 *val.*] (a) Calcule o valor de $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

[0.75 *val.*] (b) Resolva a equação $f(x) = 1$.

[1.5 *val.*] (c) Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 *val.*] (d) Resolva, a equação $5\,\text{arccos}(x-1) = 6f(0)$.

2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b \;\wedge\; f(y) \le x \le g(y)\}$.

[1.5 *val.*] (b) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{A}$.

[2.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução que se obtêm a partir da rotação da região $\mathcal{A}$ em torno

i. do eixo Ox;

ii. do eixo Oy.

3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \ge -y^2 \;\wedge\; y \le -\ln x \;\wedge\; -1 \le y \le 0\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área de $\mathcal{B}$

(i) em função da variável x;

(ii) em função da variável y.

[1.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

4. Considere a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-6}}$.

[1.0 *val.*] (a) Prove que o integral $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ é impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

[2.25 *val.*] (b) Considere as seguintes expressões:

(I) $\displaystyle\int_2^{14} f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_0^{2} f(x)\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{14}^{29} f(x)\,dx$.

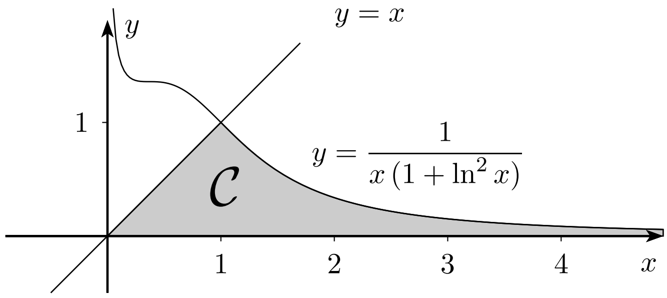
Determine o valor lógico das seguintes afirmações:

(i) Todas as expressões têm significado matemático.

(ii) O integral definido é igual a 2 .

(iii) O integral impróprio é convergente.

5. Considere a região $\mathcal{C}$, ilimitada, representada na figura seguinte:



[1.5 *val.*] (a) Usando integrais, identifique, sem calcular, uma expressão simplificada que lhe permita determinar a área da região $\mathcal{C}$.

[1.25 *val.*] (b) O que pode concluir da medida obtida na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 2) - Engenharia Informática - Época normal

25 de Janeiro de 2016 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Usando a técnica de primitivação por decomposição e as regras de primitivação imediata, determine

$$\int \frac{e^{-x-2} - 4e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx\,.$$

[2.5 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{-2}{x\sqrt{1-\boxed{\cdot}}}\, dx\,.$

Complete, justificando, o espaço assinalado com $\boxed{\cdot}$ por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata (Tabelas de Matemática, página 3):

(a) Regra 2; (b) Regra 5; (c) Regra 18; (d) Regra 19.

[2.5 *val.*] 3. Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^{3x}} - \sqrt{e^{x}}}{e^x + 1}\, dx$ recorrendo à mudança de variável $e^x = t^2$, com $t \in \mathbb{R}^+$.

[2.0 *val.*] 4. Usando a técnica de primitivação por partes, determine $\displaystyle\int (x^2 - \pi)\cos x\, dx\,.$

[7.0 *val.*] 5. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\operatorname{cosec}^2(1+x^2)}\, dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \frac{6x-7}{(x-2)(x^2-3x+2)}\, dx\,;$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x+\sqrt[6]{x}\,)^2}{\sqrt[3]{x}}\, dx\,.$

[4.0 *val.*] 6. Considere as seguintes equações diferencias ordinárias de primeira ordem:

i) $x\,y' + y = \dfrac{1}{4y}$; ii) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x\,.$

(a) Mostre, sem resolver a equação, que $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x}$ é uma solução de (i).

(b) Sem recorrer a mudanças de variável, apresente duas resoluções alternativas a equação (ii).

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática - Época normal

25 de Janeiro de 2016 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{\pi}\,\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin(5x+\pi)$.

[0.75 *val.*] (a) Resolva a equação $f(x) = 1$.

[1.25 *val.*] (b) Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

2. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \geq -y^2 \ \wedge\ y \leq -\ln x \ \wedge\ -1 \leq y \leq 0\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.75 *val.*] (b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{B}$ em função da variável x.

[1.75 *val.*] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém a partir da rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy.

[1.5 *val.*] (d) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

[2.0 *val.*] 3. Considere as seguintes expressões:

(I) $\displaystyle\int_2^{14} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{14}^{29} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\,dx$.

Determine o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Todas as expressões têm significado matemático.

(b) O integral impróprio é convergente.

[8.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x-2} - 4e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\text{cosec}^2(1+x^2)}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int (x^2-\pi)\cos x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{6x-7}{(x-2)(x^2-3x+2)}\,dx$.

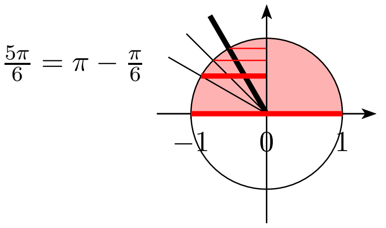
[2.0 *val.*] 5. Resolva a equação diferencial ordinárias de primeira ordem

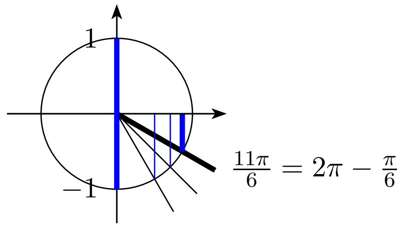
$$y' - y\,\text{tg}\,t = \text{tg}\,t$$

sujeita à condição inicial $y(0) = 1$.

1. (a) Tendo em conta o contra-domínio da função arco cosseno, tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\pi}\,\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\,\sin\left(5\,\frac{\pi}{6}+\pi\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\,\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\,\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

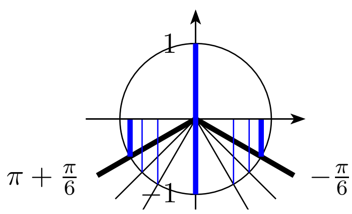




$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi}\,\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

(b) Tendo em conta o resultado de $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ já calculado na alínea (a), tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,\sin(5x+\pi) = 1 \\ &\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\,\sin(5x+\pi) = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow\; \sin(5x+\pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\; 5x+\pi = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \;\vee\; 5x+\pi = \pi + \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow\; 5x = -\frac{7\pi}{6} + k\,2\pi \;\vee\; 5x = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow\; x = -\frac{7\pi}{30} + k\,\frac{2\pi}{5} \;\vee\; x = \frac{\pi}{30} + k\,\frac{2\pi}{5}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xleftrightarrow[f^{-1}]{f} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}\sin(5x+\pi) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir da restrição principal da função seno, pelo que

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{\pi}{2} \le 5x+\pi \le \tfrac{\pi}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{\pi}{2} \le 5x \le \tfrac{3\pi}{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{\pi}{10} \le x \le \tfrac{3\pi}{10}\} = \left[\tfrac{\pi}{10}, \tfrac{3\pi}{10}\right] \end{aligned}$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$
\begin{aligned}
y = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\sin(5x+\pi) \quad &\Leftrightarrow \quad y - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\sin(5x+\pi)\\
&\Leftrightarrow \quad 3y - \frac{5}{2} = \sin(5x+\pi)\\
&\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arcsin\left(3y - \frac{5}{2}\right) = 5x+\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \arcsin\left(3y - \frac{5}{2}\right) - \pi = 5x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\arcsin\left(3y - \frac{5}{2}\right) - \frac{\pi}{5} = x\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e o domínio da função arco cosseno, tem-se

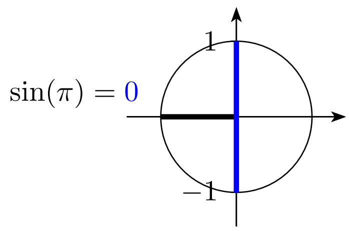
$$
\begin{aligned}
CD_f = D_{f^{-1}} \quad &= \quad \{y \in \mathbb{R} :\, -1 \leq 3y - \tfrac{5}{2} \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R} :\, \tfrac{3}{2} \geq 3y \geq \tfrac{7}{2}\}\\
&= \quad \{y \in \mathbb{R} :\, \tfrac{1}{2} \geq y \geq \tfrac{7}{6}\} = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{6}]\,,
\end{aligned}
$$

pelo que

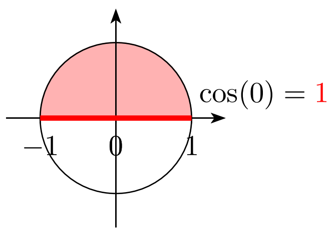
$$
\begin{array}{ccc}
\left[\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{3\pi}{10}\right] & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right]\\
\dfrac{1}{5}\arcsin\left(3y - \dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{\pi}{5} = x & \longleftrightarrow & y = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}\sin(5x+\pi)
\end{array}
$$

(d) Tendo em conta o contra-domínio da função arco cosseno, tem-se

$$
5\arccos(x-1) = 6f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 5\arccos(x-1) = 6\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\sin(0+\pi)\right)
$$



$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 5\arccos(x-1) = 6\left(\frac{5}{6} - 0\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 5\arccos(x-1) = 5\\
&\Leftrightarrow \quad \arccos(x-1) = 1
\end{aligned}
$$

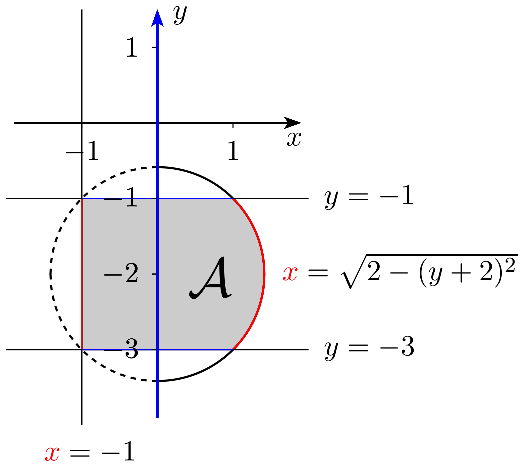


$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x = 1
\end{aligned}
$$

2. (a) Começamos por notar que a circunferência é definida, em função de y, pelas seguintes expressões:

$$x^2 + (y+2)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2-(y+2)^2 \;\Leftrightarrow=\; x = \pm\sqrt{2-(y+2)^2}$$

Assim, a região $\mathcal{A}$ é graficamente definida por



pelo que

$$\mathcal{A} \;=\; \left\{(x,y)\in \mathrm{I\!R}^2 : -3 \le y \le -1 \;\wedge\; -1 \le x \le \sqrt{2-(y+2)^2}\,\right\}.$$

(b) Tendo em conta a alínea (a) tem-se imediatamente

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{2-(y+2)^2} - (-1)\right)dy\\ &= \int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{2-(y+2)^2} + 1\right)dy\,.\end{aligned}$$

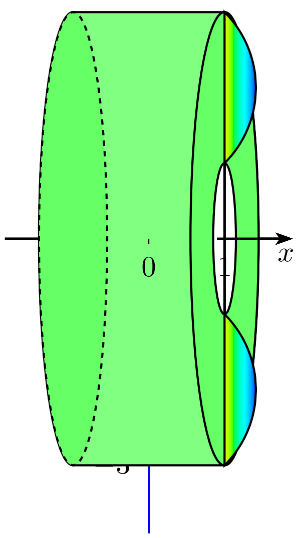
Alternativa: A área também pode ser calculada recorrendo a x como variável independente. Uma vez que

$$x^2 + (y+2)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; (y+2)^2 = 2-x^2 \;\Leftrightarrow=\; y+2 = \pm\sqrt{2-x^2} \;\Leftrightarrow=\; y = -2 \pm \sqrt{2-x^2}\,,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \underbrace{2\times 2}_{\text{quadrado}} + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\left(-2+\sqrt{2-x^2}\right) - \left(-2-\sqrt{2-x^2}\right)\right)dx\\ &= 4 + \int_1^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2-x^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

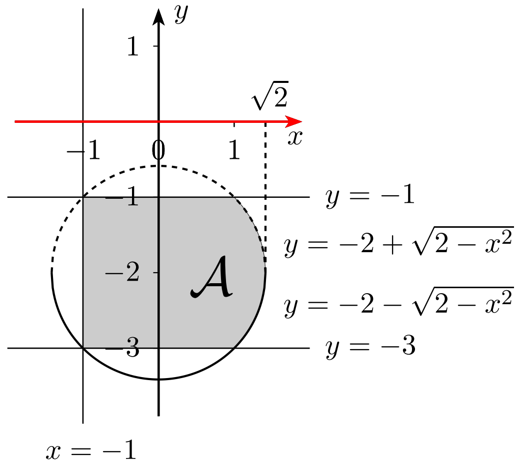
(c) i. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Ox, é o representado na figura seguinte:



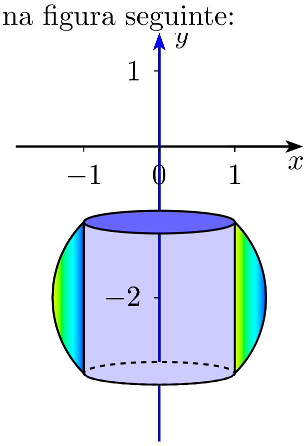
Recorrendo a integrais definidos, o volume do sólido anterior é dado por

$$\int_{-1}^{1} \pi\,(\underbrace{-3}_{R_{\text{ext}}})^2 - \pi\,(\underbrace{-1}_{R_{\text{int}}})^2\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \pi\,(\underbrace{-2+\sqrt{2-x^2}}_{R_{\text{ext}}})^2 - \pi\,(\underbrace{-2-\sqrt{2-x^2}}_{R_{\text{int}}})^2\,dx$$

$$= \underbrace{2\pi}_{\text{cilindro}} + 4\pi\int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx\,.$$

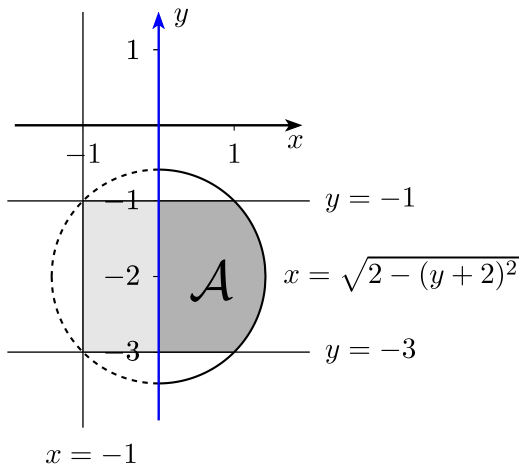


ii. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Oy, é uma semi-esfera, conforme representado na figura seguinte:

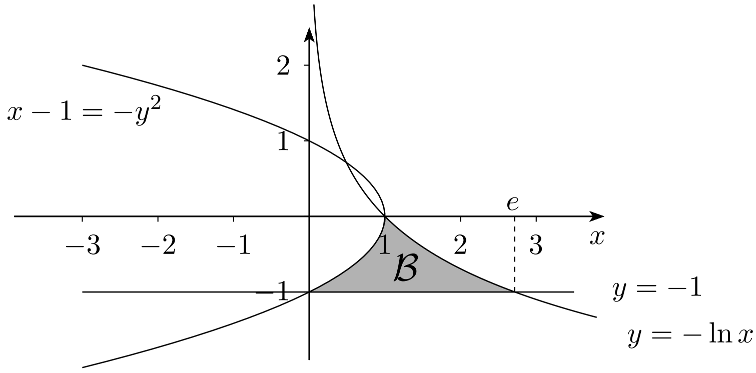


Recorrendo a integrais definidos e atendendo a que parte relativa ao terceiro quadrante fica embutida na rotação da parte relativa ao quarto quadrante, o volume do sólido anterior é dado por

$$\int_{-3}^{-1} \pi\left(\underbrace{\sqrt{2-(y+2)^2}}_{R_{\text{ext}}}\right)^2 dy \;=\; \pi\int_{-3}^{-1}\left(2-(y+2)^2\right)dy\,.$$



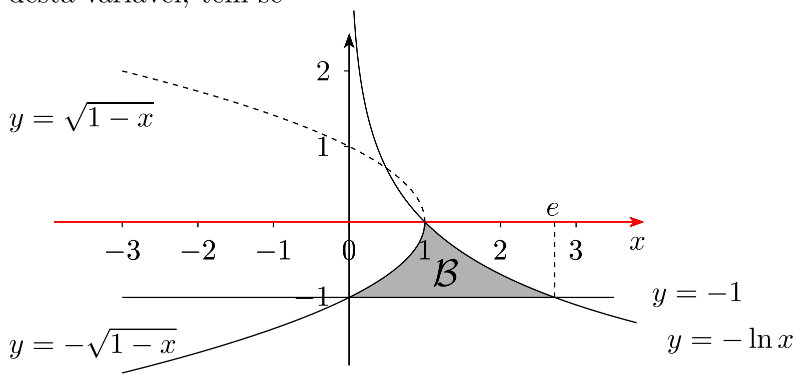
3. (a) A representação gráfica da região $\mathcal{B}$ é a seguinte:



(b) (i) Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de x, pelas seguintes expressões:

- $y=-\ln x$
- $x-1=-y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2=1-x \;\Leftrightarrow\; y=\pm\sqrt{1-x}$

pelo que, em função desta variável, tem-se



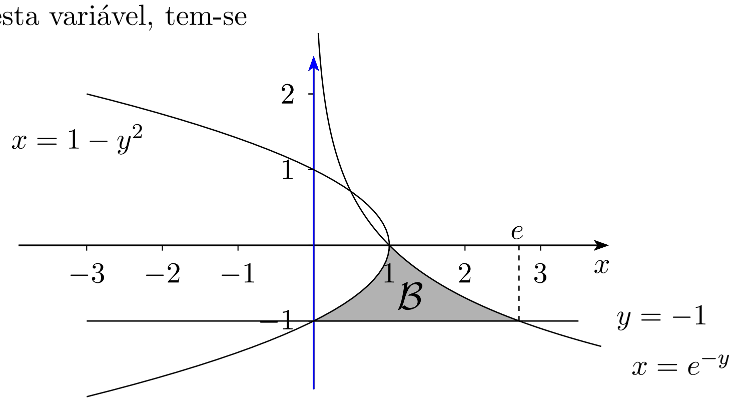
e portanto

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_0^1 -\sqrt{1-x}-(-1)\,dx+\int_1^e -\ln x-(-1)\,dx\\ &= \int_0^1 \left(1-\sqrt{1-x}\right)dx+\int_1^e \left(1-\ln x\right)dx\,.\end{aligned}$$

(ii) As curvas dadas são definidas, em função de y, pelas seguintes expressões:

- $y=-\ln x \;\Leftrightarrow\; -y=\ln x \;\Leftrightarrow\; e^{-y}=x$
- $x-1=-y^2 \;\Leftrightarrow\; x=1-y^2$

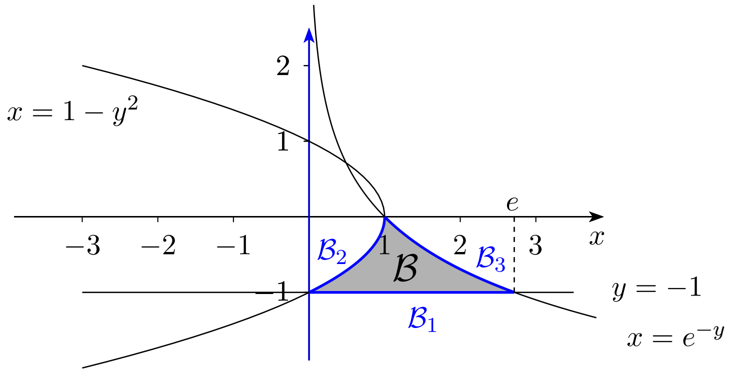
pelo que, em função desta variável, tem-se



e portanto

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_{-1}^0 e^{-y}-\left(1-y^2\right)dy\\ &= \int_{-1}^0 \left(e^{-y}-1+y^2\right)dy\,.\end{aligned}$$

(c) O perímetro da região $\mathcal{B}$ é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes três curvas:



$$\begin{aligned}
\text{Perímetro}(\mathcal{B}) &= \text{Comprimento}(\mathcal{B}_1) + \text{Comprimento}(\mathcal{B}_2) + \text{Comprimento}(\mathcal{B}_3) \\
&= e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \Big(\big(e^{-y}\big)'\Big)^2}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \Big(\big(1 - y^2\big)'\Big)^2}\, dy \\
&= e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \big(-e^{-y}\big)^2}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \big(-2y\big)^2}\, dy \\
&= e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + e^{-2y}}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + 4y^2}\, dy \,.
\end{aligned}$$

4. (a) Comecemos por determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-6}}$:

$$D_f = \big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x-6} \neq 0 \ \wedge \ 3x - 6 \geq 0\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \ \wedge \ x \geq 2\big\} =]2, +\infty[\,.$$

Note-se ainda que a função é contínua em D_f , por ser definida pelo quociente de funções contínuas (uma função constante e um radical).

O intervalo de integração está contido no domínio da função $f(x)$ mas é ilimitado, pelo que o integral é impróprio de 1ª espécie. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{14}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\, dx &= \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{3} \int_{14}^{B} \underbrace{3\,(3x-6)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{3} \left[\frac{(3x-6)^{+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{14}^{B} \\
&= \lim_{B \to +\infty} \frac{2}{3} \Big[\sqrt{3x-6}\Big]_{14}^{B} = \lim_{B \to +\infty} \frac{2}{3} \Big(\sqrt{3B-6} - \sqrt{36}\Big) = +\infty\,,
\end{aligned}$$

pelo que o integral é divergente.

(b) (i) A afirmação é falsa, pois o integral (ii) não está definido, porque a função $f(x)$ não está definida em nenhum ponto do intervalo de integração $[0, 2]$.

(ii) O integral (iii) é um integral definido pois o intervalo de integração $[14, 29]$ é um subconjunto do domínio de $f(x)$. Assim,

$$\int_{14}^{29} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\, dx = \frac{2}{3}\Big[\sqrt{3x-6}\Big]_{14}^{29} = \frac{2}{3}\Big(\sqrt{81} - \sqrt{36}\Big) = \frac{2}{3}\Big(9 - 6\Big) = 2\,,$$

pelo que a afirmação é verdadeira.

(iii) O integral (i) é impróprio de segunda espécie, porque o intervalo de integração $[2,\, 14]$ é limitado, $f(x)$ está definida e é continua em $]2,\, 14[$, mas é ilimitada em $x = 2$:

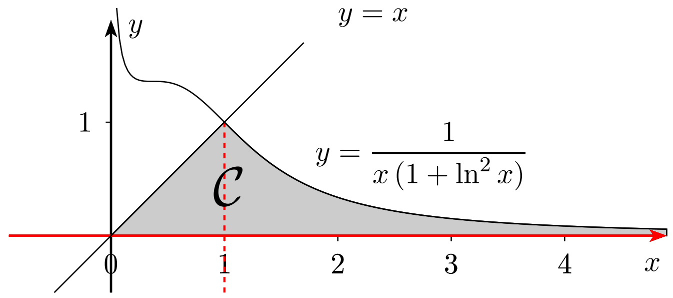
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{3x-6}}_{\to 0^+}} = +\infty\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_2^{14} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\,dx &= \lim_{A\to 2^+} \int_A^{14} \frac{1}{\sqrt{3x-6}}\,dx = \lim_{A\to 2^+} \frac{2}{3}\Big[\sqrt{3x-6}\Big]_A^{14} \\ &= \lim_{A\to 2^+} \frac{2}{3}\Big(\sqrt{36} - \underbrace{\sqrt{3A-6}}_{\to 0}\Big) = 4\,,\end{aligned}$$

pelo que o integral é convergente e portanto a afirmação é verdadeira.

5. (a) Tendo em conta a representação dada e usando x como variável independente, tem-se



$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\text{integral definido}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\,dx}_{\text{integral impróprio}}\,.$$

(b) A área de $\mathcal{C}$ só é finita se o integral impróprio for convergente. Como

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\,dx &= \lim_{B\to+\infty} \int_1^{B} \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}}_{R19}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg}(\ln x)\Big]_1^B \\ &= \lim_{B\to+\infty} \Big(\underbrace{\operatorname{arctg}(\underbrace{\ln B}_{\to+\infty})}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arctg}(\ln 1)}_{=0}\Big) = \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$

então o integral impróprio é convergente e portanto a área de $\mathcal{C}$ é finita.

1. Recorrendo à decomposição das primitivas e à técnica de primitivação imediata, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-x-2}-4e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx &= \int \frac{e^{-x-2}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx + \int \frac{-4e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx \\
&= \int \frac{e^{-x}e^{-2}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx + 2\int \underbrace{-2e^{-2x}\left(1-e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= -e^{-2}\int \underbrace{\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}}_{R18}\,dx + 2\,\frac{\left(1-e^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= -e^{-2}\arcsin(e^{-x}) + 4\sqrt{1-e^{-2x}} + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. Começamos por observar que existem múltiplas possibilidades para cada caso. No que se segue vamos apresentar uma para cada caso.

   (a) A regra 2 tem a forma $f^p f'$ pelo que se $\boxed{\cdot} = \ln x\,,$ tem-se

$$\int \frac{-2}{x\sqrt{1-\boxed{\ln x}}}\,dx = 2\int -\frac{1}{x}(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\,\frac{(1-\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

   (b) A regra 5 tem a forma $\frac{f'}{f}$ pelo que se considerarmos $\boxed{\cdot} = 0\,,$ tem-se

$$\int \frac{-2}{x\sqrt{1-\boxed{0}}}\,dx = \int \frac{-2}{x\sqrt{1}}\,dx\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx\,dx = -2\ln x + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

   (c) A regra 18 tem a forma $\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ pelo que se considerarmos $\boxed{\cdot} = \ln^2 x\,,$ tem-se

$$\int \frac{-2}{x\sqrt{1-\boxed{\ln^2 x}}}\,dx = -2\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = -2\arcsin(\ln x) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

   (d) A regra 19 tem a forma $\frac{f'}{1+f^2}$ pelo que se considerarmos $\boxed{\cdot} = 1-(1+\ln^2 x)^2\,,$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2}{x\sqrt{1-(\boxed{1-(1+\ln^2 x)^2})}}\,dx &= \int \frac{-2}{x\sqrt{1-1+(1+\ln^2 x)^2}}\,dx = \int \frac{-2}{x\sqrt{(1+\ln^2 x)^2}}\,dx \\
&= \int \frac{-2}{x\,|1+\ln^2 x|}\,dx = -2\int \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}\,dx \\
&= -2\,\mathrm{arctg}\,(\ln x) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. Considerando a mudança de variável apresentada, tem-se

$$\text{m.v.}: \boxed{e^x = t^2} \ \Rightarrow\ x = \ln(t^2) \ \Rightarrow\ x' = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{e^{3x}}-\sqrt{e^x}}{e^x+1}\,dx &\overset{e^x=t^2}{=} \int \frac{\sqrt{(t^2)^3}-\sqrt{t^2}}{t^2+1}\,\frac{2}{t}\,dt \overset{t\geq 0}{=} \int \frac{t^3-t}{(t^2+1)\,t}\,\frac{2}{t}\,dt \\
&= \int \frac{t\,(t^2-1)}{t^2+1}\,\frac{2}{t}\,dt = \int \frac{2t^2-2}{t^2+1}\,dt\,.
\end{aligned}$$

A função resultante da mudança de variável é uma fracção imprópria (grau do numerador = 2 = grau do denominador), pelo que o cálculo da primitiva será realizado recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples, começando pelo cálculo da divisão dos polinómios:

$$\begin{array}{rr|l} 2\,t^2 & -2 & t^2+1 \\ \cline{3-3} -(\,2\,t^2 & +2\ \ ) & 2 \\ \hline & -4 & \end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{2t^2-2}{t^2+1}}_{\text{fracção imprópria}} = 2 + \underbrace{\frac{-4}{t^2+1}}_{\text{fracção própria}}.$$

A fracção própria resultante já é primitivável de forma imediata. Então,

$$\int \frac{2\,t^2-2}{t^2+1}\,dt = \int \left(2+\frac{-4}{t^2+1}\right)dt = \int \underbrace{2}_{R1}\,dt - 4\int \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{R19}\,dt = 2\,t - 4\,\mathrm{arctg}\,t + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

Atendendo à mudança de variável $e^x = t^2$ e ao facto de $t>0$, tem-se $t=\sqrt{e^x}$ e portanto

$$\int \frac{\sqrt{e^{3x}}-\sqrt{e^x}}{e^x+1}\,dx \overset{mv}{=} \int \frac{2\,t^2-2}{t^2+1}\,dt = 2\,t - 4\,\mathrm{arctg}\,t + c = 2\sqrt{e^x} - 4\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{e^x}\right) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.$$

4. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
\int (x^2-\pi)\cos x\,dx &= \int \underbrace{(x^2-\pi)}_{d}\,\underbrace{\cos x}_{p}\,dx \\
&\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \int \underbrace{\cos x}_{R6}\,dx = \sin x \\ \bullet\ (x^2-\pi)' = 2x \end{array}} \\
&\overset{PP}{=} (x^2-\pi)\sin x - \int 2x\sin x\,dx \\
&\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \int \underbrace{\sin x}_{R7}\,dx = -\cos x \\ \bullet\ (2x)' = 2 \end{array}} \\
&\overset{PP}{=} (x^2-\pi)\sin x - \left(2x(-\cos x) - \int 2(-\cos x)\,dx\right) \\
&= (x^2-\pi)\sin x + 2x\cos x - 2\int \underbrace{\cos x}_{R6}\,dx \\
&= (x^2-\pi)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Tendo em conta a definição de secante e recorrendo às técnicas de primitivação para potências de funções trigonométricas (Tabelas de Matemática, página 6), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\mathrm{cosec}^2(1+x^2)}\,dx &= \int x\sin^2(1+x^2)\,dx \\
&= \int x\,\frac{1}{2}\Big(1+\cos(2+2x^2)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{R2}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int \underbrace{4x\cos(2+2x^2)}_{R6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}\sin(2+2x^2) + c \\
&= \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{8}\sin(2+2x^2) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Uma vez que a função é uma fracção racional própria (grau do numerador $= 1 < 3 =$ grau do denominador), o cálculo da primitiva será realizado recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples, o que é feito tendo por base os zeros do seu denominador. Como

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2-3x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; x-2=0 \;\vee\; x^2-3x+2=0 \;&\Leftrightarrow\; x=2 \vee x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}\\ &\Leftrightarrow\; x=2 \vee x=2 \;\vee\; x=1\,,\end{aligned}$$

a factorização real do denominador é definida por

$$(x-2)(x^2-3x+2) \;=\; (x-1)(x-2)(x-2)\,.$$

A raiz simples do denominador determina uma fracção na soma de elementos simples e a raiz dupla determina duas fracções dessa decomposição, pelo que

$$\begin{aligned}\frac{6x-7}{(x-2)(x^2-3x+2)} &= \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x-2)^2}+\underbrace{\frac{B}{x-2}}_{\cdot(x-1)(x-2)}+\underbrace{\frac{C}{(x-2)^2}}_{\cdot(x-1)}\\ &= \frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}\,.\end{aligned}$$

Tendo agora em consideração a igualdade dos numeradores da primeira e última fracções, podemos considerar um sistema linear possível determinado de três equações que permite determinar as três incógnitas A, B e C. Esse sistema será obtido substituindo, na igualdade entre os numeradores, x pelos valores das raízes 1 e 2 e ainda por 0 (por exemplo):

$$\begin{array}{c|rcl} & 6x-7 & = & A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)\\ \hline x=1 & -1 & = & A+0+0\\ x=2 & 5 & = & 0+0+C\\ x=0 & -7 & = & 4A+2B-C\end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}A=-1\\ C=5\\ B=1\end{array}\right. .$$

Assim, fracção racional própria tem a seguinte decomposição em elementos simples,

$$\frac{6x-7}{(x-2)(x^2-3x+2)} \;=\; \frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\,.$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int\frac{6x-7}{(x-2)(x^2-3x+2)}\,dx &= \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx\\ &= -\int\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx+\int\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{R5}\,dx+5\int\underbrace{(x-2)^{-2}}_{R2}\,dx\\ &= -\ln|x-1|+\ln|x-2|+5\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c\\ &= -\ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+c\,,\;\; c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à decomposição das primitivas e à técnica de primitivação imediata, tem-se

$$\begin{aligned}\int\frac{(x+\sqrt[6]{x}\,)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int\frac{x^2+2x\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{x}^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx\\ &= \int\frac{x^2+2x^{\frac{7}{6}}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx\\ &= \int\underbrace{x^{\frac{5}{3}}}_{R2}\,dx+2\int\underbrace{x^{\frac{5}{6}}}_{R2}\,dx+\int\underbrace{1}_{R1}\,dx\\ &= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+2\,\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}+x+c\\ &= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+\frac{12}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+x+c\,,\;\; c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

6. (a) Substituindo $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x}$ na equação (i), tem-se

$$
\begin{aligned}
& x\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2x}\right)' + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x} = \frac{1}{4}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \\
\Leftrightarrow\ & x\,\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\,2x - 2\sqrt{x^2+4}}{(2x)^2} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+4}} - 2x\sqrt{x^2+4}}{4x^2} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x^3}{4x^2\sqrt{x^2+4}} - \frac{2x\sqrt{x^2+4}}{4x^2} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2x} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}} - \cancel{\frac{\sqrt{x^2+4}}{2x}} + \cancel{\frac{\sqrt{x^2+4}}{2x}} = \cancel{\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}} \\
\Leftrightarrow\ & 0 = 0\,,
\end{aligned}
$$

pelo que a função é uma solução da equação diferencial.

(b) Começamos por notar que (ii) pode ser interpretada como uma equação de variáveis separáveis pelo que, ignorando as eventuais alterações de domínios, tem-se

$$
\begin{aligned}
y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x \quad & \Leftrightarrow\ y' = y\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,x \\
& \Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx} = (y+1)\,\mathrm{tg}\,x \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\
& \Leftrightarrow\ \int \frac{1}{y+1}\,dy = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \\
& \Leftrightarrow\ \ln|y+1| = -\ln|\cos x| + c_1\,,\ c_1 \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

No entanto, (ii) também pode ser interpretada como uma equação linear, donde

$$
\begin{aligned}
y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x \quad & \Leftrightarrow \quad y' + (-\mathrm{tg}\,x)\,y = \mathrm{tg}\,x\,, \quad \text{EDO linear} \\
& \qquad FI:\ e^{\int -\mathrm{tg}\,x\,dx} = e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x| \\
& \overset{\times \cos x}{\Leftrightarrow} \quad \Big(y\,\cos x\Big)' = \mathrm{tg}\,x\,\cos x \\
& \Leftrightarrow \quad y\,\cos x = \int \sin x\,dx \\
& \Leftrightarrow \quad y\,\cos x = -\cos x + c_2 \\
& \Leftrightarrow \quad y = -1 + \frac{c_2}{\cos x}\,,\ c_2 \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$