Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 2 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

14 de Janeiro de 2016 — Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[1.5 *val.*] 1. Usando a técnica de decomposição e as regras de primitivação imediata, determine $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

[4.0 *val.*] 2. Sabe-se que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,dx = 2\arcsin(\sqrt{x}\,) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Prove a igualdade anterior recorrendo

(a) à definição de primitiva;

(b) à técnica de primitivação imediata;

(c) à mudança de variável $x = \sin^2 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

[4.0 *val.*] 3. Considere a função $f(x) = \dfrac{4x^3}{(x^2-1)^2}$.

(a) Calcule A e B tais que

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(b) Calcule a primitiva da função $f(x)$.

(c) Repita a alínea anterior, recorrendo à técnica de primitivação por partes.

[6.5 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sec^2(\ln x)}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \left(\cos(53\pi) + \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

[4.0 *val.*] 5. Considere as seguintes equações diferencias ordinárias de primeira ordem:

i) $x^2 y' = x\,y + y^2$; ii) $y' = -\dfrac{1}{x}\,y - \dfrac{1}{x^2}$; iii) $t\,x' = x^2$.

(a) Mostre que $y = \dfrac{x}{1-\ln x}$ é uma solução da equação (i).

(b) Resolva a equação (ii).

(c) Prove que (iii) é uma equação diferencial de variáveis separáveis e determine a solução particular que satisfaz a condição $x(1) = 2$.

1. Tem-se
$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx &= \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx + \int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\ln^2 x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}\,dx \\
&= \int \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}}_{R19}\,dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2(\ln x)\,\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}}_{R5}\,dx \\
&= \operatorname{arctg}(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 x) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Recorrendo à definição de primitiva, basta mostrar que
$$\Big(2\arcsin(\sqrt{x}\,)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,.$$
Ora,
$$\begin{aligned}
\Big(2\arcsin(\sqrt{x}\,)\Big)' &= 2\Big(\arcsin(\sqrt{x}\,)\Big)' = 2\,\frac{(\sqrt{x}\,)'}{\sqrt{1-(\sqrt{x}\,)^2}} = 2\,\frac{(x^{\frac{1}{2}}\,)'}{\sqrt{1-x}} \\
&= 2\,\frac{\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação imediata, tem-se
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x}\,)^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x}\,)^2}}\,dx \\
&= 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x}\,)^2}}\,dx = 2\arcsin(\sqrt{x}\,)+c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à mudança de variável dada,
$$\text{m.v. } \boxed{x=\sin^2 t}\,,\quad t\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big]\,,$$
tem-se
$$x' = 2\sin t\cos t$$
e ainda $|\cos t| = \cos t$ e $|\sin t| = \sin t$ (porque o seno e cosseno são não negativos no primeiro quadrante), pelo que
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t}\,\sqrt{1-\sin^2 t}}\,2\sin t\cos t\,dt = \int \frac{2\sin t\cos t}{|\sin t|\,\sqrt{\cos^2 t}}\,dt \\
&= \int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\,|\cos t|}\,dt = \int \frac{2\cos t}{\cos t}\,dt = \int \underbrace{2}_{R1}\,dt = 2t+c\,,\ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Atendendo novamente à mudança de variável considerada, tem-se
$$x=\sin^2 t\,,\quad t\in\big[0,\tfrac{\pi}{2}\big] \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x}=\sin t\,,\quad t\in\big[0,\tfrac{\pi}{2}\big] \ \Leftrightarrow\ \arcsin(\sqrt{x}\,)=t\,,$$
pelo que
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t}\,\sqrt{1-\sin^2 t}}\,2\sin t\cos t\,dt \\
&= 2t+c \\
&\overset{\text{m.v}}{=} 2\arcsin(\sqrt{x}\,)+c\,,\ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3. (a) Começamos por notar que a função $f(x)$ é uma fracção racional própria e que as raízes do denominador são dadas por

$$(x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \,\vee\, x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \,\vee\, x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1 \,\vee\, x=\pm1\,,$$

pelo que o denominador tem duas raízes reais de multiplicidade dois. Cada uma dessas raízes determina duas fracções da decomposição em elementos simples e, de acordo com o enunciado, dois deles são já dados. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{4x^3}{(x^2-1)^2} &= \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x-1)(x+1)^2} + \underbrace{\frac{B}{(x-1)^2}}_{\cdot(x+1)^2} + \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{\cdot(x-1)^2(x+1)^2} - \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\cdot(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+2(x-1)^2(x+1)-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Substituindo na igualdade entre os numeradores x pela raízes do denominador obtém-se um sistema possível e determinado de duas equações que permite determinar os valores das duas incógnitas pretendidas:

$$\begin{array}{r|rcl} & 4x^3 & = & A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+2(x-1)^2(x+1)-(x-1)^2\\ \hline x=1 & 4 & = & 0+4B+0+0\\ x=0 & 0 & = & -A+B+2-1\end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=1\\ A=2\end{array}\right.$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{4x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

(b) Tendo em conta a decomposição em elementos simples determinada na alínea anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^3}{(x^2-1)^2}\,dx &= \int\Big(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\Big)\,dx\\ &= 2\int\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx+\int\underbrace{(x-1)^2}_{R2}\,dx+2\int\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx-\int\underbrace{(x+1)^2}_{R2}\,dx\\ &= 2\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+2\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c\\ &= 2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int\frac{4x^3}{(x^2-1)^2}\,dx = \int 4x^3\,(x^2-1)^{-2}\,dx = \int\underbrace{4x^2}_{d}\,\underbrace{x(x^2-1)^{-2}}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ \int x(x^2-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int\underbrace{2x(x^2-1)^{-2}}_{R2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1}\\ \bullet\ (4x^2)' = 8x\end{array}}$$

$$\begin{aligned}&\overset{PP}{=} 4x^2\,\frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1}-\int 8x\,\frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1}\,dx\\ &= -\frac{2x^2}{x^2-1}+\int\frac{4x}{x^2-1}\,dx = -\frac{2x^2}{x^2-1}+2\int\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{R5}\,dx\\ &= -\frac{2x^2}{x^2-1}+2\,\ln|x^2-1|+k\,,\ k\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. (a) Atendendo à definição de secante e às técnicas de primitivação de potências de funções trigonométricas, descritas na página 6 das Tabelas de Matemática, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sec^2(\ln x)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\cos^2(\ln x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{2}\Big(1+\cos(2\ln x)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cos(2\ln x)\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2\,\frac{1}{x}\cos(2\ln x)}_{R6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\sin(2\ln x) + c\,,\ \ k \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

(b) A função é uma fracção imprópria (grau do numerador $= 2 =$ grau do denominador) pelo que a primitivação da fracção é realizada recorrendo à sua decomposição numa soma de elementos simples e o cálculo dessa decomposição começa pela divisão dos polinómios.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^2 & +x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{5-5}
-(& x^2 & +x & -2\ ) & 1 \\ \cline{1-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

Então

$$
\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{3}{x^2+x-2}}_{\text{fracção própria}}\,.
$$

A fracção própria resultante da divisão ainda não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Uma vez que

$$
x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 1 \ \vee\ x=-2\,,
$$

então $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ e portanto

$$
\frac{3}{x^2+x-2} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x+2)} + \underbrace{\frac{B}{x+2}}_{\cdot(x-1)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\,.
$$

Substituindo, na igualdade entre os numeradores, x pelas raízes $x=1$ e $x=-2$, obtêm-se os valores das duas constantes A e B:

$$
\begin{array}{r|rcl}
 & 3 & = & A(x+2)+B(x-1) \\ \hline
x=1 & 3 & = & 3A \\
x=-2 & 3 & = & 0-3B
\end{array}
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
A=1 \\
B=-1
\end{array}
\right.
$$

A decomposição da fracção numa soma de elementos simples é assim definida por

$$
\underbrace{\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{3}{x^2+x-2}}_{\text{fracção própria}} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\,.
$$

pelo que a primitiva pode agora ser calculada recorrendo a essa decomposição e às regras de primitivação imediata.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\,dx &= \int \Big(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\Big)\,dx \\
&= \int \underbrace{1}_{R1}\,dx + 3\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx - \int \underbrace{x+2}_{R5}\,dx \\
&= x + 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

(c) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \left(\cos(53\pi) + \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) dx &= \int \cos(53\pi)\, dx + \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\
&= \int \underbrace{-1}_{R1}\, dx + \int x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\, dx \\
&= -x + \int \underbrace{x^{-\frac{1}{6}}}_{R2}\, dx + \int \underbrace{x^{\frac{1}{6}}}_{R2}\, dx \\
&= -x + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c \\
&= -x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Substituindo $y = \dfrac{x}{1-\ln x}$ na equação (i), tem-se

$$\begin{aligned}
x^2\left(\frac{x}{1-\ln x}\right)' = x\,\frac{x}{1-\ln x} + \left(\frac{x}{1-\ln x}\right)^2 &\Leftrightarrow x^2\,\frac{1-\ln x + x\,\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{x^2}{1-\ln x} + \frac{x^2}{(1-\ln x)^2} \\
&\Leftrightarrow x^2\,\frac{1-\ln x+1}{(1-\ln x)^2} = \frac{x^2(1-\ln x)+x^2}{(1-\ln x)^2} \\
&\Leftrightarrow x^2\,\frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{x^2 - x^2\ln x + x^2}{(1-\ln x)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x^2\ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{2x^2 - x^2\ln x}{(1-\ln x)^2}\ \checkmark
\end{aligned}$$

(b) Ignorando as eventuais alterações de domínios, tem-se

$$\begin{aligned}
y' = -\frac{1}{x}\,y - \frac{1}{x^2} &\Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}\,y = -\frac{1}{x^2}\,, \quad \text{EDO linear de primeira ordem} \\
&\qquad \text{F.I. } e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x| \\
&\overset{\times x}{\Leftrightarrow} y'x + y = -\frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \big(y\,x\big)' = -\frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow y\,x = -\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\, dx \\
&\Leftrightarrow y\,x = -\ln|x| + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Começamos por notar que a solução é uma função do tipo $x(t)$. Ignorando as eventuais alterações de domínios, tem-se

$$\begin{aligned}
t\,x' = x^2 &\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\,x^2\,, \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\
&\Leftrightarrow \int x^{-2}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt \\
&\Leftrightarrow -\frac{x^{-1}}{-1} = \ln|t| + c \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln|t| + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Atendendo à condição inicial $x(1) = 2$, tem-se agora

$$\frac{1}{2} = \ln|1| + c \ \Leftrightarrow\ c = \frac{1}{2}\,,$$

pelo que a solução do problema diferencial (equação + condição inicial) é dada por

$$\frac{1}{x} = \ln|t| + \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{\ln|t| + \frac{1}{2}}\,.$$