Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática

Apontamentos de Apoio às Aulas de

Álgebra Linear

Engenharia Informática
Curso Europeu de Informática
2016/2017

João Cardoso

Conteúdo

Capítulo 0

Revisão sobre Números Complexos

- Chama-se *número complexo* a um número da forma

  $$z = a + bi,$$

  em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária, que verifica $i^2 = -1$; por vezes escreve-se também $i = \sqrt{-1}$. Diz-se que a é a parte real de z e b a parte imaginária; escreve-se

  $$\mathrm{Re}(z) = a, \quad \mathrm{Im}(z) = b.$$

- i é uma das raízes soluções da equação

  $$x^2 + 1 = 0;$$

  a outra solução é $-i$.

- Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ dizem-se iguais se $a = c$ e $b = d$.

- **Adição de complexos.** Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Define-se

  $$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

- **Multiplicação de complexos.** Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Define-se

  $$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

- **Conjugado.** Chama-se conjugado do complexo $z = a + bi$ a

  $$\bar{z} = a - bi.$$

- **Módulo.** Chama-se módulo do complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo

  $$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- **Propriedade.** $z\bar{z} = a^2 + b^2$, isto é, $z\bar{z} = |z|^2$.
- Regra prática para escrever a divisão z/w, em que $w \neq 0$, na forma $a + bi$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2},$$

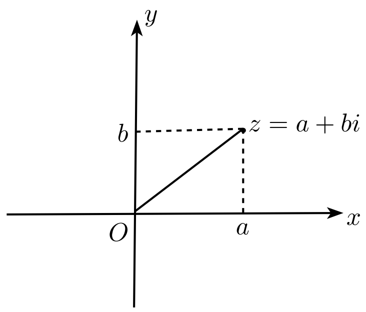
isto é, multiplicam-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

- **Exemplo.** Escrever o complexo $\frac{3+2i}{2+5i}$ na forma algébrica $a + bi$:

$$\begin{aligned} \frac{3+2i}{2+5i} &= \frac{(3+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6 - 15i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} \\ &= \frac{16}{29} - \frac{11}{29}i. \end{aligned}$$

- **Representação geométrica de números complexos**

Consideremos um referencial ortonormado xOy no plano. A cada complexo $z = a+bi$ fazemos corresponder o ponto de abcissa a e ordenada b: $P(a, b)$.



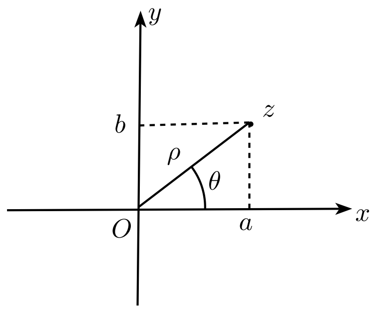
Ao ponto $P(a, b)$ chama-se afixo (ou imagem) do complexo $z = a + bi$. O afixo de $0 + 0i$ é a origem. O eixo dos xx é designado por eixo real e o eixo dos yy por eixo imaginário. Quando se estabelece a correspondência $a + bi \to P(a, b)$, dizemos que o plano xOy é o plano complexo ou plano de Argand.

- **Representação de números complexos na forma polar (ou trigonométrica)**

Chama-se *argumento* do complexo z ao ângulo θ formado pela semi-recta Oz e pela parte positiva do eixo dos xx; escreve-se $\theta = \arg(z)$. Como é óbvio, o argumento de z não é único, pois qualquer ângulo da forma

$$\theta + 2k\pi, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

é um argumento de z. No entanto, existe um único argumento em $]-\pi, \pi]$, chamado *argumento principal*.



Para calcular $\theta = \arg(z)$, determina-se um ângulo θ tal que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \ (a \neq 0)$$

tendo em conta o quadrante onde se encontra o afixo de z.

Exemplo. Calcular o argumento do complexo $z = -1 - i$. Como

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$$

podemos, erradamente, ser levados a pensar que $\theta = \pi/4$. Ora acontece que o afixo de z está no 3^o quadrante e, portanto, $\theta = -3\pi/4$. Também podíamos escolher $\theta = 5\pi/4$. ■

Dado um complexo $z = a + bi$, podemos observar na figura acima que $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$, onde $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Logo,

$$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Esta representação do complexo z é chamada a forma *polar* ou *trigonométrica*. Se atendermos à conhecida fórmula de Euler

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

onde $e^{\theta i}$ representa a exponencial de variável complexa, ou à notação

$$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta,$$

podemos escrever

$$\boxed{z = \rho\, e^{\theta i}}$$

ou

$$z = \rho\operatorname{cis}(\theta).$$

- **Multiplicação e divisão de complexos na forma polar**

Dados os complexos $z_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i}$ e $z_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}$, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \, e^{(\theta_1+\theta_2)i} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \, e^{(\theta_1-\theta_2)i}, \ (z_2 \neq 0) \end{aligned}$$

Exemplo. Dados os complexos $z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$ e $z_2 = 2\, e^{i\pi/3}$, temos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/12} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-7\pi i/12}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

- **Potenciação - fórmula de De Moivre**

Dado um complexo $z = a + bi$, suponhamos que se pretende calcular z^n, para um certo inteiro n. Se n for grande, isto pode ser uma tarefa complicada se usarmos apenas a forma algébrica. O processo mais eficiente é escrever, em primeiro lugar, z na forma polar $z = \rho e^{\theta i}$ e de seguida usar a fórmula de De Moivre

$$\boxed{z^n = \rho^n \, e^{n\theta i}.}$$

Exemplo. Calcular $(-1+\sqrt{3}\, i)^6$ e escrever o resultado na forma algébrica.
Em primeiro lugar escreve-se $-1+\sqrt{3}\, i$ na forma polar. Efectuando os cálculos, obtém-se

$$-1+\sqrt{3}\, i = 2\, e^{2\pi i/3}.$$

Logo

$$\begin{aligned} (-1+\sqrt{3}\, i)^6 &= \left(2e^{2\pi i/3}\right)^6 \\ &= 2^6 \, e^{6\times 2\pi i/3} \\ &= 64\,(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) \\ &= 64. \end{aligned}$$

- **Radiciação**

Dado um número complexo w, pretende-se determinar as suas raízes de índice n, isto é, pretende-se resolver a equação

$$z^n = w.$$

Da teoria dos números complexos, sabe-se que esta equação tem exactamente n soluções, que, do ponto de vista geométrico, se situam de forma equidistante sobre uma circunferência centrada na origem e de raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$, em que $\rho = |w|$. Supondo que

$$w = \rho\, e^{\theta i}$$

é a forma polar de w, as suas n raízes de índice n podem ser calculadas através da seguinte fórmula

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

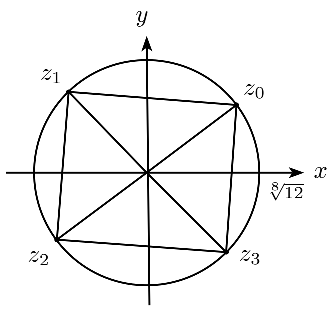
Exemplo. Calcular as raízes de índice 4 (raízes quartas) de $w = -3 + i\sqrt{3}$.
Escrevendo w na forma polar obtemos (confirmar!)

$$w = -3 + i\sqrt{3} = \sqrt{12}\, e^{5\pi i/6}.$$

Aplicando a fórmula, obtemos as seguintes 4 raízes quartas de w:

$$\begin{aligned}
k = 0 \ &\Rightarrow\ z_0 = \sqrt[8]{12}\, e^{5\pi i/24}\\
k = 1 \ &\Rightarrow\ z_1 = \sqrt[8]{12}\, e^{17\pi i/24}\\
k = 2 \ &\Rightarrow\ z_2 = \sqrt[8]{12}\, e^{29\pi i/24}\\
k = 3 \ &\Rightarrow\ z_3 = \sqrt[8]{12}\, e^{41\pi i/24}
\end{aligned}$$

Na figura seguinte estão representadas as raízes quartas de w.



- **Equação quadrática real**
  Como é sabido, as soluções da equação quadrática real

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$(a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ podem ser obtidas através da fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

  – Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, a equação tem duas raízes reais (distintas ou coincidentes);

– Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação não admite raízes reais; as suas duas raízes são complexas conjugadas

$$x = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

- **Exercícios de Revisão sobre Números Complexos**

1. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem:
   (a) $(2 + xi)(3 - 2i) = 12 + 5i$;
   (b) $(2 + xi)^2 = 4$.
2. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma algébrica $a + bi$:
   (a) $(3 - 2i)(1 + i) + |3 + 4i|$;
   (b) $\frac{3-2i}{1-i} - \frac{3-7i}{2-3i}$.
3. Determine $z \in \mathbb{C}$ por forma a que:
   (a) $z^2 = 3 - 4i$;
   (b) $z(2 - i) = (\overline{z} + 1)(1 + i)$.
4. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma polar $\rho e^{i\theta}$. Represente no plano d'Argand.
   (a) $z = 3 - 3i$;
   (b) $z = -6i$;
   (c) $z = \sqrt{3} + i$.
5. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma álgébrica $a + bi$. Represente no plano d'Argand.
   (a) $z = e^{7i\pi/3}$;
   (b) $z = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$;
   (c) $z = 2\sqrt{3}\, e^{-2i\pi/6}$.
6. Determine as raízes das seguintes equações:
   (a) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
   (b) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
   (c) $x^2 + 9 = 0$;
   (d) $x^2 - 4x + 5 = 0$.
7. Utilize as fórmulas de De Moivre para calcular:
   (a) $(2 + 2i)^4$;
   (b) $(1 - i)^3$;
   (c) $(-1 - \sqrt{3}\, i)^{15}$;
   (d) todas as raízes cúbicas de $1 + i$;
   (e) todas as raízes de índice quatro de -1.
8. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações e represente geometricamente as soluções:
   (a) $z^3 = 8$;
   (b) $z^4 = -1 + \sqrt{3}\, i$

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

1.1 Definições e Exemplos

- **Notação:** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; os elementos de $\mathbb{K}$ designam-se por escalares.

- **Definição.** Chama-se matriz do tipo $m \times n$ ao conjunto de mn elementos de $\mathbb{K}$ dispostos da seguinte forma rectangular:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}}$$

- Uma matriz $m \times n$ tem m linhas e n colunas;
  os números a_{ij} da matriz A designam-se por entradas ou elementos da matriz; na notação a_{ij}, i designa a linha e j a coluna.

- **Exemplo.** Na matriz 3×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  temos $a_{22} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{34} = 1$, ...

- **Mais Exemplos de Matrizes.**

  (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5/2 \\ 2 & 0 \\ -3 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (matriz 3×2 com entradas em $\mathbb{R}$)

(b) $B = \begin{bmatrix} 2i & -5 & 0 \\ 1-3i & 4i & 5 \\ -i & 2-3i & 1 \end{bmatrix}$ (matriz 3×3 com entradas em $\mathbb{C}$)

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ (vector coluna $n \times 1$)

- **Definição.** Duas matrizes A e B dizem-se <u>iguais</u> se são do mesmo tipo e se $a_{ij} = b_{ij}$, para cada i e j.

1.2 Operações com Matrizes

- **Adição**
  Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, define-se $A + B$ como sendo a matriz $m \times n$ cuja entrada (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$, para cada i e j.

- **Multiplicação por um escalar**
  Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ e α é um escalar, define-se αA como sendo a matriz $m \times n$ cuja entrada (i, j) é αa_{ij}, para cada i e j.

- **Notação:** $-A := (-1)A; \quad A - B := A + (-1)B$

- **Exercício 1.2.1**
  Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine
  (a) $A + B$
  (b) $3A - B$

- **Produto de matrizes**
  Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz $n \times p$. O produto de A por B, denotado por AB, é a matriz $AB = C = [c_{ij}]$ do tipo $m \times p$, onde

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \end{aligned}$$

  para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, p$.

- Uma matriz diz-se <u>quadrada</u> se o número de linhas coincidir com o número de colunas.

- **Notação:** Se A for quadrada, denota-se

$$A^k := \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ vezes}}$$

- **Exercício 1.2.2**

  Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

  determinar, se possível:
  (a) AB
  (b) BA
  (c) AC
  (d) BC
  (e) D^2

- **Exercício 1.2.3**
  (a) Quando é que o produto de duas matrizes A e B está definido?
  (b) Será que o produto de duas matrizes é comutativo?

- Chama-se matriz nula a uma matriz O com todas as entradas iguais a zero; chama-se matriz identidade a uma matriz quadrada com 1's na diagonal e zeros nas restantes entradas. Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 (isto é, 3×3) é

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Diz-se que uma matriz quadrada é triangular superior (respectivamente, triangular inferior se todos os elementos situados abaixo (resp., acima) da diagonal são nulos.

1.3 Propriedades das operações com matrizes

- **Propriedades da adição:** Sejam A, B e C matrizes $m \times n$. Então:

  (i) $A + B = B + A$ (comutativa)

  (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)

  (iii) a matriz nula O do tipo $m \times n$ é a única matriz tal que

$$A + O = A,$$

  para toda a matriz A.

(iv) Para cada matriz A existe uma única matriz B tal que

$$A + B = O;$$

denota-se $B := -A$.

- **Propriedades da multiplicação por um escalar:** Sejam A e B matrizes $m \times n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então:

  (i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

  (ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

  (iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

  (iv) $(-1)A = -A$

- **Propriedades do produto de matrizes:** Sejam A, B e C matrizes para as quais estão definidas as operações seguintes. Então:

  (i) $A(B + C) = AB + AC$
  $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva)

  (ii) $(AB)C = A(BC)$ (associativa)

  (iii) $IA = AI = A$

- **Observações:**

  1. $AB = O \not\Rightarrow A = O \vee B = O$
  (isto é, a lei do anulamento do produto não é válida para matrizes)
  Por exemplo, se
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$
  temos $AB = O$ mas $A \neq O$ e $B \neq O$.

  2. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
  (isto é, a lei do corte não é válida para matrizes)
  Por exemplo, se
  $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$
  temos $AB = AC$ mas $B \neq C$.

1.4 Transposição de matrizes

- **Definição.** Seja A uma matriz $m \times n$. Chama-se transposta de A, e escreve-se $A^\top$, à matriz $n \times m$ que se obtém escrevendo ordenadamente as linhas de A como colunas.

- **Exercício 1.4.1**

  Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  determinar a sua transposta.

- **Propriedades da transposição:** Sejam A, B e C matrizes para as quais estão definidas as operações seguintes e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

  (i) $(A^\top)^\top = A$

  (ii) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

  (iii) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$

  (iv) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

- **Definição.** Diz-se que uma matriz é simétrica se $A^\top = A$;
  diz-se que A é anti–simétrica se $A^\top = -A$.

- **Exercício 1.4.2**

  Dê exemplos de duas matrizes simétricas e de duas matrizes anti–simétricas

1.5 Eliminação de Gauss

- **Definição.** Consideremos as seguintes operações definidas sobre as linhas de uma matriz:
  OE1 – Troca de duas linhas;
  OE2 – Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;
  OE3 – Adição a uma linha de um múltiplo escalar de outra linha.
  A estas três operações dá-se o nome de operações elementares sobre as linhas de A.

- **Exercício 1.5.1**

  Escolha uma matriz 3×4 e efectue cada uma das três operações elementares.

- **Definição.** Diz-se que uma matriz U está na forma de escada se se verificarem as seguintes condições:

  (i) Abaixo do primeiro elemento não nulo de cada linha, e na mesma coluna, todas as entradas são nulas

  (ii) Abaixo de linhas nulas não há linhas não nulas

  (iii) O primeiro elemento não nulo de uma linha está situado numa coluna à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.

- Forma de escada:
$$\begin{bmatrix} \star & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \star & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \star & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
onde $\star$ designa uma entrada $\neq 0$.

- **Exercício 1.5.2** Averigue se as seguintes matrizes estão em forma de escada:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Definição.** Diz-se que U é <u>equivalente por linhas</u> a A se for possível obter U a partir de A usando somente operações elementares sobre as linhas de A.

- Determinar a forma de escada de uma dada matriz significa obter uma matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A.

- **Exercício 1.5.3** Obter uma forma de escada das seguintes matrizes:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- O método usado para obter a forma de escada das matrizes anteriores chama-se método de <u>**eliminação de Gauss**</u>. Podemos esquematizá-lo na seguinte forma:

  1. Se a matriz é a matriz nula, stop – ela está em forma de escada
  2. Caso contrário, encontrar a primeira coluna (da esquerda para a direita) que contém uma entrada não nula (digamos, a) e mover a linha que contém essa entrada para o topo da matriz
  3. Multiplicar essa linha por $1/a$ para obter 1 (pivô)
  4. Subtraindo múltiplos dessa linha às linhas abaixo, tornar todas as entradas abaixo do pivô iguais a zero.
     Estes 4 passos completam a primeira linha.
  5. Repetir os passos 1 – 4 na matriz formada pelas restantes linhas. Quando se esgotarem as linhas o processo termina.

- **Definição.** Diz-se que uma matriz U está na forma de escada reduzida se se verificarem as três condições seguintes:

  (i) U está na forma de escada;

  (ii) todos os pivôs são iguais a 1;

  (iii) cada pivô é a única entrada não nula da sua coluna.

- **Exercício 1.5.4** Calcular a forma de escada reduzida das matrizes do exercício anterior.

1.6 Característica de uma matriz

- **Teorema.** Se U e U' são matrizes em forma de escada e equivalentes por linhas a A então o número de linhas não nulas de U coincide com o número de linhas não nulas de U'.

- **Observações**

  1. Uma matriz A pode admitir várias formas de escada, consoante a sequência de operações elementares utilizadas. No entanto, pelo teorema anterior, todas elas têm o mesmo número de linhas não nulas.
  2. A forma de escada reduzida de A é única.

- **Definição.** Seja U uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a A. Chama-se característica de A ao número de linhas não nulas de U.

- **Exercício 1.6.1**

  Determinar a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.7 Sistemas de equações lineares

1.7.1 Definição e Classificação

- **Definições.**

  (i) Chama-se equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ a uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad (\star)$$

  onde $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

(ii) Diz-se que o n-uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução da equação ($\star$) se

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n \equiv b$$

(iii) Chama-se conjunto solução da equação ao conjunto de todas as suas soluções.

(iv) Um conjunto finito de equações lineares designa-se por sistema de equações lineares.

(v) Diz-se que o n-uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução de um sistema linear se for solução de todas as equações do sistema.

- **Exercício 1.7.1**

  Das seguintes equações, dizer quais são lineares:

  (a) $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$ (b) $x + 3y^2 = 7$ (c) $3x + 2y - z = \ln 4$
  (d) $3xy + z = 0$ (e) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

- **Exercício 1.7.2**

  Dada a equação $4x - 2y = 1$, determinar

  (a) duas soluções e duas não soluções

  (b) o conjunto solução

- **Exercício 1.7.3**

  (a) Dado o sistema linear

  $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases},$$

  mostre que $(1, 2, -1)$ é solução e que $(1, 8, 1)$ não é solução.

  (b) Dado o sistema linear

  $$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases},$$

  averiguar se ele admite soluções.

- **Teorema.** Um sistema de equações lineares verifica uma e uma só das seguintes condições:

  (i) o sistema tem uma só solução (possível determinado)

  (ii) o sistema tem um conjunto infinito de soluções (possível indeterminado)

  (iii) o sistema não tem soluções (impossível)

1.7.2 Representação matricial de sistemas

- Dado um sistema com m equações lineares e n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

a sua representação matricial é

$$AX = \mathbf{b},$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- Chama-se matriz <u>completa</u> ou <u>ampliada</u> do sistema à matriz

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

- **Exercício 1.7.4**

  Dado o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{array}\right. ,$$

  (a) Representá-lo na forma matricial

  (b) Escrever a sua matriz completa

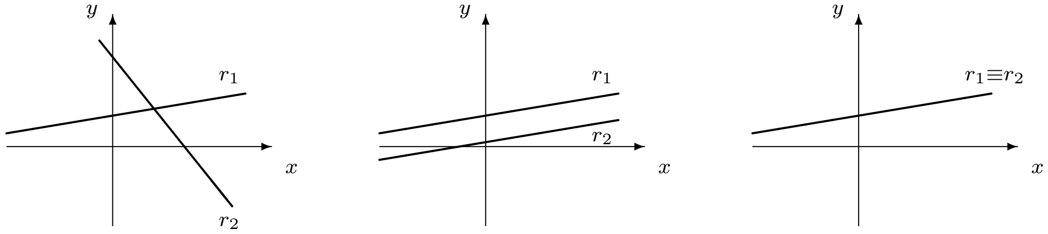
  (c) Usando a forma matricial, averiguar se os vectores $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ e $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}^\top$ são soluções do sistema.

1.7.3 Interpretação geométrica de um sistema 2×2

- Num sistema linear 2×2, podemos associar a cada equação uma recta no plano:

$$\left\{\begin{array}{rl} ax + by = c & \longrightarrow \text{recta } r_1 \\ a'x + b'y = c' & \longrightarrow \text{recta } r_2 \end{array}\right. .$$

- Se o sistema for possível determinado, isto significa que as rectas r_1 e r_2 se intersectam num só ponto; se o sistema for impossível, as rectas são paralelas; se for possível indeterminado, as rectas são coincidentes.



r_1 e r_2 concorrentes $\qquad$ r_1 e r_2 paralelas $\qquad$ r_1 e r_2 coincidentes

1.7.4 Método de eliminação de Gauss para sistemas lineares

- Consideremos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 3 \\ 3x-y-3z & = & -1 \\ 2x+3y+z & = & 4 \end{array}\right. .$$

- Para resolver este sistema, vamos considerar a sua matriz completa e seguidamente determinar a sua forma de escada:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \leftarrow -3L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_1+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow -7L_2+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

- Podemos observar que as operações elementares efectuadas sobre as linhas da matriz completa correspondem a operações efectuadas sobre as equações do sistema. Por exemplo, $L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2$ corresponde a substituir a segunda equação pela que resulta da adição a essa equação de um múltiplo $(-3\times)$ da primeira equação; do mesmo modo, $L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3$ corresponde a substituir a terceira equação pela que resulta da adição a essa equação de um múltiplo $(-2\times)$ da primeira equação; a troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$ corresponde à troca da segunda equação com a terceira. Podemos dizer então que as operações elementares sobre as linhas da matriz completa respeitam os princípios de equivalência dos sistemas de equações. Mais precisamente:

OE 1	$\longleftrightarrow$	troca de duas equações
OE 2	$\longleftrightarrow$	multiplicação de uma equação por um número $\neq 0$
OE 3	$\longleftrightarrow$	adição a uma equação de um múltiplo escalar de outra equação

- Continuando a resolver o sistema, vamos passar a matriz em escada para o sistema correspondente:
$$\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ \quad -y-z &= -2 \\ \qquad\quad z &= 4 \end{cases}.$$
Usando o método de substituição, podemos agora facilmente determinar x, y e z e completar a resolução do sistema:
$$x=3,\ y=-2,\ z=4.$$

- **Teorema 1.** Um sistema de equações lineares é possível se e só se
$$\operatorname{car}[A|b] \;=\; \operatorname{car} A.$$

- **Exercício 1.7.5** Averiguar se o seguinte sistema linear é possível ou impossível:
$$\begin{cases} x+y+3z &= 1 \\ 2x+2y+6z &= 1 \end{cases}.$$

- **Teorema 2.** Seja $AX = b$ um sistema linear possível, com m equações e n incógnitas. Então o conjunto solução do sistema envolve $n - \operatorname{car} A$ parâmetros (variáveis livres).

- **Resolução de um sistema linear:**
  1. Formar $[A|b]$ e determinar a sua forma de escada;
  2. Se $\operatorname{car}[A|b] \;=\; \operatorname{car} A$, pelo Teorema 1 o sistema tem solução.
     (i) se $\operatorname{car} A = n$, então não há variáveis livres, pois $n - \operatorname{car} A = 0$; o sistema é possível determinado
     (ii) se $\operatorname{car} A < n$, o sistema é indeterminado, havendo $n - \operatorname{car} A$ variáveis livres.
  3. Caso o sistema tenha solução, deve passar-se a forma de escada da matriz completa $[A|b]$ ao sistema correspondente e usar o método de substituição. Se o sistema for indeterminado, as variáveis correspondentes a colunas sem pivôs podem ser escolhidas como livres.

- **Exercício 1.7.6** Resolver o sistema linear $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3 &= -7 \\ 4x_1+x_2+3x_3 &= 5 \\ 2x_1-5x_2+7x_3 &= 19 \end{cases}.$

1.7.5 Sistemas homogéneos

- Chama-se sistema homogéneo a um sistema da forma $AX = O$.

- Um sistema homogéneo tem sempre solução. De facto, o vector nulo $X = O$ é sempre solução do sistema homogéneo; é usual designar-se esta solução por *solução trivial.* As soluções não nulas são chamadas soluções não triviais.

- **Teorema.** Um sistema homogéneo com n incógnitas é

  (i) possível determinado se $\operatorname{car} A = n$;

  (ii) possível indeterminado se $\operatorname{car} A < n$.

- **Exemplo.** Para determinar uma solução não trivial do sistema indeterminado

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

basta resolver o sistema e atribuir valores particulares às variáveis livres. Vamos começar por formar a matriz completa do sistema e determinar a sua forma de escada.

$$[A|0] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow -L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\operatorname{car} A = 3 < n = 4$, há $n - \operatorname{car} A = 1$ variável livre. Vamos escolher x_3 como variável livre porque esta corresponde a uma coluna sem pivô. Passando então a matriz completa ao sistema correspondente e fazendo $x_3 = \alpha$, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & \alpha \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -\alpha \\ x_2 & = & \alpha \\ x_3 & = & \alpha \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Fazendo, por exemplo, $\alpha = 1$, obtemos

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 1, 1, 0)$$

que é uma solução não trivial do sistema homogéneo. ■

1.8 Matriz Inversa

- **Definição.** Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Diz-se que B é a inversa de A se

$$AB = BA = I. \quad (\star)$$

Se existir uma matriz B nas condições de $(\star)$, diz-se que A é <u>invertível</u> ou <u>não singular</u>; caso contrário, A diz-se não invertível ou singular.

- **Exercício 1.8.1** *Mostre que*
(a) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

- **Teorema 1.** Uma matriz invertível admite uma só inversa, isto é, se B e C são inversas de A então $B = C$.

Demonstração. Supondo que B e C são inversas de A, sabe-se que $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$. Daqui pode-se concluir, em particular, que

$$AB = AC.$$

Multiplicando ambos os membros desta equação à esquerda por B, obtém-se

$$B(AB) = B(AC),$$

ou seja, $IB = IC$, donde $B = C$. ■

- **Notação.** Como existe uma só inversa, ela será representada por A^{-1}. Podemos então escrever
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

- **Teorema 2.** Sejam A e B matrizes invertíveis. Então:

(i) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(ii) A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}$;

(iv) $A^\top$ é invertível e $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

- **Exercício 1.8.2** Demonstrar o teorema 2.

- **Teorema 3.** Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é não singular;

(ii) O sistema homogéneo $AX = O$ admite apenas a solução trivial;

(iii) $\text{car}\, A = n$.

- Para mostrar que B é a inversa de A, pela definição, é necessário mostrar que $AB = I$ e $BA = I$. O teorema seguinte mostra que se uma daquelas condições se verificar (ou $AB = I$ ou $BA = I$), fica provado que B é a inversa de A.

- **Teorema 4.** Sejam A e B matrizes $n \times n$.

  (i) Se $BA = I$ então A é invertível e $B = A^{-1}$;

  (ii) Se $AB = I$ então A é invertível e $B = A^{-1}$.

  Demonstração.

  (i) Consideremos o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos os membros do sistema à esquerda por B e atendendo a que $BA = I$, obtemos

  $$B(A\mathbf{x}) = B\mathbf{0} \Leftrightarrow (BA)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

  donde se conclui que o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pelo teorema 3 isto significa que A é invertível, existindo portanto A^{-1}. Multiplicando ambos os membros de $BA = I$ à direita por A^{-1} vem

  $$(BA)A^{-1} = IA^{-1} \Leftrightarrow B = A^{-1}.$$

  (ii) Basta considerar o sistema homegéneo $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e proceder de modo análogo a (i). (Verificação ao cuidado do aluno.) ■

- **Cálculo da inversa** – *Algoritmo de Gauss-Jordan*

  1. Determinar a forma de escada reduzida de $[A|I]$;
  2. Se for possível obter uma matriz da forma $[I|B]$ então $B = A^{-1}$.

- **Exercício 1.8.3** Determinar, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

1.9 Matrizes em Blocos

- Dada uma matriz A, $m \times n$, podemos particioná-la em várias <u>submatrizes</u> ou <u>blocos</u>. Por exemplo, podemos escrever uma matriz em termos das suas linhas

  $$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix},$$

onde $L_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$, ou em termos das suas colunas

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix},$$

onde $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{bmatrix}^\top$.

- **Questão:** Como multiplicar matrizes quando estas estão subdivididas em blocos?

- Suponhamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ estão particionadas em blocos na seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{bmatrix}.$$

  A matriz A tem $s \times r$ blocos e B tem $r \times t$. Se o produto dos blocos $A_{ik}B_{kj}$ estiver definido para cada i, j, k, então o produto AB obtém-se efectuando o produto de linhas por colunas, como na multiplicação usual. Isto é, o bloco (i, j) de AB é

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}.$$

- A multiplicação de matrizes em blocos tem particular vantagem quando as matrizes A e B têm uma estrutura especial; por exemplo, quando incluem a identidade I ou a matriz nula O como submatrizes.

- **Exercício 1.9.1** Considere as seguintes matrizes particionadas em blocos:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad D = \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right].$$

  Determinar AB e CD.

- **Exercício 1.9.2** Sendo $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times s}$ matrizes invertíveis, determinar

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.10 Exercícios Resolvidos

1. Resolva o sistema de equações lineares $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+z+w &=& 1 \\ 4x+2y+3z+4w &=& 3 \\ -6x-3y-z+w &=& -1 \end{array}\right.$

   Resolução. Vamos começar por formar a matriz completa do sistema e determinar a sua forma de escada.

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow -2L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1+L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -2L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Como $\text{car}(A) = 2 = \text{car}([A|b])$ o sistema tem pelo menos uma solução (possível). Atendendo a que $n - \text{car}\, A = 4 - 2 = 2 > 0$, concluimos que o sistema é indeterminado, havendo $n - \text{car}\, A = 2$ variáveis livres. Vamos escolher y e w como variáveis livres porque estas correspondem a colunas sem pivôs. Passando então a matriz completa ao sistema correspondente e fazendo $y = \alpha$ e $w = \beta$, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+w &=& 1 \\ y &=& \alpha \\ z+2w &=& 1 \\ w &=& \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x &=& \frac{-\alpha+\beta}{2} \\ y &=& \alpha \\ z &=& 1-2\beta \\ w &=& \beta \end{array}\right. \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

   O conjunto solução do sistema é

$$C.S. = \left\{ \left(\frac{-\alpha+\beta}{2}, \alpha, 1-2\beta, \beta \right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Discuta o sistema linear $\left\{\begin{array}{rcr} x+y-\beta z &=& 1 \\ x+\alpha y+\beta z &=& -2 \\ x+\alpha y &=& -2 \end{array}\right.$ em função dos parâmetros reais α e β.

   Resolução. Começa-se por formar a matriz completa e determina-se a sua forma de escada.

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta & -2 \\ 1 & \alpha & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 2\beta & -3 \\ 0 & \alpha-1 & \beta & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow -L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 2\beta & -3 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{array}\right] \qquad (\star)$$

Interessa-nos agora saber quais são os valores de α e β que influenciam as características de A e de $[A|b]$. Normalmente estes valores anulam as entradas da diagonal da matriz em escada. No caso particular deste sistema, esses valores são $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e têm um papel importante na discussão do sistema.

1º caso: $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$

Substituindo α e β por estes valores na matriz $(\star)$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

constatando-se que $\text{car}(A) = 1 \neq \text{car}[A|\mathbf{b}] = 2$. Isto significa que o sistema é impossível.

2º caso: $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 0$

Substituindo estes valores na matriz $(\star)$, verifica-se que esta matriz ainda não está na forma de escada, sendo por isso necessário obtê-la.

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 0 & 2\beta & -3 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & 0 & 2\beta & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(A) = 2 \neq \text{car}[A|\mathbf{b}] = 3$, verifica-se que o sistema é novamente impossível.

3º caso: $\alpha \neq 1 \wedge \beta = 0$

Substituindo na matriz $(\star)$, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\beta & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = 2 = \text{car}[A|\mathbf{b}]$ e $n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1 > 0$, o sistema é possível indeterminado com uma variável livre.

4º caso: $\alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0$

Neste caso, observa-se que a matriz ($\star$) está na forma de escada, em que $\text{car}(A) = 3 = \text{car}[A|\mathbf{b}]$ e $n - \text{car}(A) = 3 - 3 = 0$. Isto significa que o sistema é possível determinado.
(**Nota.** Na discussão de sistemas não é necessário resolver o sistema.) ■

3. Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Resolução.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Como a última linha do bloco esquerdo da matriz é nula, é impossível obter a matriz identidade. Isto significa que a matriz em causa não é invertível. Também se pode observar que $\text{car}(A) = 2 \neq n = 3$, o que, de acordo com o teorema 3, se traduz na não existência de inversa. ■

4. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem, invertíveis. Determine a matriz X que verifica a equação matricial
$$(AB^{-1})^\top X = I.$$

Resolução. Para determinar X, é necessário multiplicar ambos os membros da equação *à esquerda* pela inversa da matriz que está a multiplicar por X e usar propriedades da inversão e transposição de matrizes:

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^\top X = I \;\; &\Leftrightarrow \;\; \left((AB^{-1})^\top\right)^{-1} (AB^{-1})^\top X = \left((AB^{-1})^\top\right)^{-1} I \\ &\Leftrightarrow \;\; X = \left((AB^{-1})^\top\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \;\; X = \left((AB^{-1})^{-1}\right)^\top \\ &\Leftrightarrow \;\; X = \left((B^{-1})^{-1}A^{-1}\right)^\top \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad X = \left(BA^{-1}\right)^{\top} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \left(A^{-1}\right)^{\top} B^{\top}
\end{aligned}
$$

1.11 Exercícios

1. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

   Calcule, se possível:

   (a) $A + B$ (b) $3B - 2A$ (c) BC (d) CB (e) CD (f) DC (g) A^2

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule AB e comente o resultado.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

   (b) Indique o valor lógico da proposição:

$$AB = AC \Rightarrow B = C, \quad BD = CD \Rightarrow B = C$$

   (por vezes chamada "lei do corte").

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Escolha uma maneira de as ordenar por forma a que o produto das quatro matrizes esteja definido, e calcule esse produto.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, obtenha uma expressão para A^k $(k \in \mathbb{N})$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

6. (a) Se A e B são matrizes, as seguintes identidades algébricas

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2, \quad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2, \quad (AB)^2 = A^2B^2,$$

conhecidas por *casos notáveis*, nem sempre são verdadeiras. Verifique esta afirmação para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Transforme os segundos membros daquelas identidades por forma a obter identidades sempre válidas quando A e B são matrizes quadradas da mesma ordem.

7. Que diferença se dá no produto AB das matrizes A e B se:
   (a) trocarmos as linhas i e j de A?
   (b) trocarmos as colunas i e j de B?
   (c) Considere duas matrizes A e B de ordem 3 à sua escolha, e confirme as respostas dadas nas duas alíneas anteriores.

8. Mostre que $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são *permutáveis*, isto é, $EF = FE$.

9. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ é *nilpotente*, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

10. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ são *idempotentes*, isto é, $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

11. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é *periódica*, isto é, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{p+1} = A$.

12. Prove que se B é uma matriz quadrada então as matrizes BB^T e $B + B^T$ são simétricas.

13. Uma matriz quadrada A diz-se *anti-simétrica* se $A^T = -A$.
   (a) Dê 2 exemplos de matrizes reais 3×3 anti-simétricas. Qual a propriedade dos elementos da diagonal das matrizes anti-simétricas?
   (b) Mostre que se B é quadrada então $B - B^T$ é anti-simétrica.

14. Averigue se a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ é ortogonal (isto é, $A^T A = I$).

15. Prove as seguintes afirmações ou dê um contra-exemplo, com A e B matrizes $n \times n$.

(a) Se A e B são ortogonais, então $A+B$ é ortogonal.

(b) Se A e B são ortogonais, então AB é ortogonal.

(c) Se A e AB são ortogonais, então B é ortogonal.

16. Averigue se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ é hermítica, isto é, $\overline{A}^T = A$.

17. Averigue se as seguintes matrizes estão em forma de escada:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. Determine duas formas em escada da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, de modo a obter duas matrizes distintas.

19. Determine uma forma em escada das seguintes matrizes, indicando as operações elementares sobre linhas utilizadas:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

20. Determine a forma de escada reduzida das matrizes do exercício anterior.

21. Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

22. Estude, segundo os valores do parâmetro real α, a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha & -2\alpha \\ 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

23. Dos seguintes sistemas, identifique aqueles que são lineares, sendo k uma constante real:

(a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ y = 2x + 3z + 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 3y^2 = 9 \\ y - \sin x = 0 \end{cases}$

(d) $3x + y - z + t = 4/5$ (e) $\begin{cases} 3x + 2y + xz = 4 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \cos k \\ kx_1 + x_2 = -x_3 \end{cases}$

24. Resolva, pelo método de eliminação de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + 2y + 2z + 3w = 0 \\ 2x + 4y + z + 3w = 0 \\ 3x + 6y + z + 4w = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ (k) $\begin{cases} a + b + 2c + 2d + e = 1 \\ 2a + 2b + 4c + 4d + 3e = 1 \\ 2a + 2b + 4c + 4d + 2e = 2 \\ 3a + 5b + 8c + 6d + 5e = 3 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + y - z + 3w = 0 \\ x - 2y + z + w = 0 \end{cases}$

25. Discuta, para todos os valores reais dos parâmetros, os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = -8 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y + az = b \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ -x + (a-2)y + z = -1 \\ 2x + 2y + (a-2)z = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$

26. Determine os valores de α para os quais o sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = \alpha \end{cases}$:

(i) não tem solução;

(ii) tem uma só solução;

(iii) tem uma infinidade de soluções.

27. Determine uma condição envolvendo a, b, c por forma a que cada um dos seguintes sistemas

(i) tenha solução (possível);

(ii) não tenha solução (impossível).

(a) $\begin{cases} x + 3y + z = a \\ -x - 2y + z = b \\ 3x + 7y - z = c \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 2y + 3z = b \\ x - z = c \end{cases}$

28. Determine todas as matrizes permutáveis com A, sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

29. Resolva as seguintes equações matriciais:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

30. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

31. Resolvendo a equação matricial $AX = I$, encontre, se existir, a inversa das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

32. Seja A uma matriz tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Determine A.

33. Determine as inversas das seguintes matrizes, usando o método de Gauss-Jordan:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

34. Seja A uma matriz tal que $A^2 - 3A + I = 0$. Mostre que $A^{-1} = 3I - A$.

35. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Mostre que se A for invertível então
$$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B).$$

36. Dadas as matrizes quadradas da mesma ordem, invertíveis, A e B, determine a matriz X que verifica cada uma das seguintes equações matriciais:

(a) $A\,X\,B = B^\top$;

(b) $AXA^{-1} = (A+B)^\top$.

37. Seja A invertível e suponha que a inversa de $7A$ é $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$. Determine A, A^3 e A^{-3}.

38. (a) Determine a inversa da matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}$. Calcule A^5 usando a igualdade

$$A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

39. Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

40. Seja A uma matriz qualquer, e suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que, nestas condições, a matriz $I - A$ é invertível, tendo-se
$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

41. Usando o exercício anterior, determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Seja A uma matriz não singular de ordem n. Efectue as seguintes multiplicações por blocos:

(a) $A^{-1}\,[A \;\; I]$ (b) $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} A^{-1}$ (c) $[A \;\; I]^T\,[A \;\; I]$

(d) $[A \;\; I]\,[A \;\; I]^T$ (e) $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} [A \;\; I]$

43. Sejam

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Efectue cada uma das seguintes multiplicações por blocos.

(a) $\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} C & O \\ O & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} D & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

44. Seja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde todos os blocos são matrizes $n \times n$.

(a) Se A_{11} e A_{22} são não singulares, mostre que A também é não singular e que A^{-1} é da forma

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & C \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

(b) Determine C.

45. Seja

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ B & O \end{bmatrix},$$

onde os quatro blocos são matrizes $k \times k$. Determine A^2 e A^4.

Capítulo 2

Determinantes

2.1 Definição de Determinante

- **Definição.**

  (i) Dada uma matriz 1×1, $A = [a]$, define-se $\det[a] = a$;

  (i) Dada uma matriz 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, define-se

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

- **Exemplo.** Sejam $A = [-3]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Os seus determinantes são dados por
  $\det A = \det[-3] = |-3| = -3$
  $\det B = \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 3 \times 4 - (-2) \times 5 = 22.$

- O determinante de uma matriz quadrada $n \times n$ será definido a partir do determinante de uma matriz quadrada $(n-1) \times (n-1)$. Isto é, o determinante de matrizes 2×2 (já definido) permitirá definir o determinante de matrizes 3×3, que por sua vez permitirá definir o determinante de matrizes 4×4 e assim sucessivamente até ao determinante de matrizes $n \times n$.

- **Definição.** Seja $n \geq 2$ e suponhamos que o determinante de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ está definido. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja M_{ij} o determinante da submatriz que se obtém a partir de A pela supressão da linha i e da coluna j. Ao número M_{ij} chama-se <u>menor</u> do elemento a_{ij} e ao número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

chama-se complemento algébrico ou cofactor da entrada a_{ij}.

- **Definição.** Seja $n \geq 2$ e suponhamos que o determinante de matrizes $(n-1)\times(n-1)$ está definido. Se A é uma matriz $n \times n$, chama-se determinante de A ao número

$$\det A = |A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1}.$$

- **Exemplo.** Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

  (a) Determinar os menores e respectivos complementos algébricos relativos à primeira coluna e à segunda linha de A.

  (b) Calcular $\det A$.

  Resolução.

  (a) Os menores e complementos algébricos relativos à primeira coluna são:

$$\begin{array}{ll} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16 & C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 \\ M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 16 = 24 & C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -24 \\ M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26 & C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 26 \end{array}$$

  Os menores e complementos algébricos relativos à segunda linha são:

$$\begin{array}{ll} M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 16 = 24 & C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -24 \\ M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 4 = 28 & C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 28 \\ M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11 & C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -11 \end{array}$$

  (b) De acordo com a definição, o determinante de A é dado por:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= 3 \times 16 + 2 \times (-24) + 1 \times 26 \\ &= 26. \end{aligned}$$

- **Teorema de Laplace.** O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos das entradas de uma qualquer linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos.

- **Exercício 2.1.1**

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Calcular $\det A$ usando o desenvolvimento de Laplace segundo a 1ª linha e segundo a 2ª coluna.

(b) Calcular $\det B$ usando o desenvolvimento de Laplace segundo a linha ou coluna que achar mais conveniente.

(c) Qual será então a linha ou coluna que se deve escolher para efectuar o desenvolvimento por forma a minimizar os cálculos?

2.2 Propriedades do Determinante

- **Exercício 2.2.1**

Suponha que se pretende calcular o determinante de uma matriz quadrada A, com todas as entradas não nulas, usando somente o teorema de Laplace. Se A for uma matriz 4×4, quantos determinantes 2×2 tem de calcular para obter $\det A$? E se A for 5×5?

- O teorema seguinte permite obter um método que vai permitir uma redução significativa do número de operações envolvidas no cálculo do determinante.

- **Teorema.** Seja A uma matriz $n \times n$.

(i) Se A tem uma linha ou coluna de zeros então $\det A = 0$;

(ii) Se trocarmos duas linhas (ou duas colunas) de A, então o determinante muda o sinal;

(iii) Multiplicar o determinante de A por um número α corresponde a multiplicar uma qualquer linha ou coluna de A por α;

(iv) Se A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, então $\det A = 0$;

(v) Se uma linha (respectivamente, coluna) de A é soma de múltiplos escalares de outras linhas (respectivamente, colunas) então $\det A = 0$;

(vi) A operação elementar OE3 não altera o valor do determinante, isto é, se a uma linha (respectivamente, coluna) adicionarmos um múltiplo escalar de outra linha (respectivamente, coluna) então o valor de $\det A$ não se altera;

(vii) Se $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$ então $\det A = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$.

- **Exemplos ilustrativos das alíneas anteriores.**

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0$

(ii) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & -1 & \mathbf{5} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} & 8 \\ \mathbf{5} & 1 & \mathbf{-1} & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{-1} & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{5} & -1 & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{2} & 0 & \mathbf{1} & 8 \\ \mathbf{-1} & 1 & \mathbf{5} & 2 \\ \mathbf{-1} & 2 & \mathbf{1} & 3 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (C_1 = C_3)$

(v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & -5 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_2 = -2L_1 - L_3)$

(vi) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 9 & 20 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ -7 & -5 & \mathbf{-4} \\ 5 & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{2} \\ -7 & -5 & \mathbf{-7} \\ 5 & 1 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{1} \\ -7 & -5 & \mathbf{3} \\ 5 & 1 & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$

- **Exercício 2.2.2**

Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ e $A = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}$, calcule $\det A$.

- **Exercício 2.2.3**

Usando os desenvolvimento de Laplace em conjunto com o teorema anterior e, em particular, a eliminação de Gauss, calcule o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

- **Teorema.** Sejam A e B matrizes $n \times n$.

  (i) $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$;

  (ii) A é invertível sse $\det(A) \neq 0$;

  (iii) Se A é invertível então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$;

  (iv) $\det(A) = \det(A^\top)$;

  (v) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$;

  (vi) O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal.

- **Observações.**

  1. $\det(A \pm B) \neq \det(A) \pm \det(B)$;
  2. $\det(2A) \neq 2\det(A)$;
  3. Vimos anteriormente que A é invertível se e só se $\mathrm{car}(A) = n$. Usando a alínea (ii) do teorema anterior temos o seguinte resultado importante:

$$\boxed{A \text{ invertível} \Leftrightarrow \mathrm{car}\, A = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.}$$

- **Exercício 2.2.4**

  1. Calcular $\det(A^3 B^{-1} A^\top B^2)$, sabendo que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 5$
  2. Sabendo que $\det(A) = -3$ e que A tem ordem 4, qual o valor de $\det(2A)$?
  3. Sabendo que B não tem inversa, averiguar se o produto AB tem ou não inversa.

2.3 Matriz Adjunta

- **Definição.** Seja A uma matriz $n \times n$ e seja C_{ij} o cofactor do elemento a_{ij}. À matriz

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

chama-se matriz dos cofactores de A; à sua transposta chama-se adjunta de A:

$$\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{cof}(A))^\top.$$

- **Teorema.** Se A é uma matriz quadrada então

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)\,I.$$

- **Corolário.** Se $\det(A) \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A).$$

Demonstração. Do teorema anterior sabe-se que

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,I.$$

Multiplicando ambos os membros desta equação matricial pelo número $1/\det(A)$, obtém-se

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)\right) = I,$$

donde se conclui que a inversa de A resulta da multiplicação do inverso do determinante pela adjunta. ∎

- **Exercício 2.3.1**

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, calcule a sua inversa através da matriz adjunta.

2.4 Regra de Cramer

- **Teorema**(*Regra de Cramer*) Seja A uma matriz não singular $n \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Seja A_i a matriz que se obtém a partir de A pela substituição da i-ésima coluna de A por $\mathbf{b}$. A única solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é dada por $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^\top$, onde

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Observação.** A regra de Cramer apenas é válida para sistemas lineares da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que A é uma matriz $n \times n$ não singular, isto é, para sistemas possíveis determinados.

- **Exercício 2.4.1** Usando a regra de Cramer, resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

2.5 Aplicação à Codificação de Mensagens

- Uma maneira que pode ser usada para enviar uma mensagem codificada é fazendo corresponder a cada letra do alfabeto um determinado número. Assim, a mensagem enviada será uma sequência de números. Por exemplo, a mensagem

  SEND MONEY

  pode ser codificada por

$$5, 8, 10, 21, 7, 2, 10, 8, 3,$$

  onde S é representado por 5, E por 8 e assim sucessivamente. A chave deste código pode ser fácil de quebrar, uma vez que numa mensagem longa poderá ser fácil descobrir qual é a correspondência letra-número, bastando para isso analisar a frequência com que cada número ocorre. Por exemplo, se 8 for o número que aparece mais vezes na mensagem codificada é provável que ele represente a letra E, no caso da mensagem ser em inglês (letra que ocorre mais vezes na língua inglesa) ou a letra A, no caso da mensagem ser em português (letra mais usada na língua portuguesa).

- Usando o produto de matrizes e os determinantes é possível encontrar uma forma de codificar mensagens por forma a que alguém que não conheça o código não as consiga decifrar.

- Se A é uma matriz com entradas inteiras e determinante ± 1, então, como $A^{-1} = \pm\,\mathrm{adj}(A)$, as entradas de A^{-1} serão também números inteiros. Podemos usar esta matriz para contruir a mensagem que chega ao destinatário. O objectivo é que a mensagem seja difícil de decifrar. Por exemplo, seja

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

  (matriz do código – o seu determinante é 1). A mensagem "SEND MONEY", codificada usando apenas a correspondência letra-número, vai ser colocada nas colunas da matriz M_I (mensagem inicial):

$$M_I = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 10 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

O produto seguinte dá a mensagem final M_F que chega ao receptor:

$$M_F = CM_I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 21 & 10 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 37 & 29 \\ 80 & 83 & 69 \\ 54 & 67 & 50 \end{bmatrix},$$

que corresponde à sequência

$$31, 80, 54, 37, 83, 67, 29, 69, 50$$

- Como é que o receptor vai descodificar a mensagem?
  O receptor tem de conhecer a correspondência letra-número e a matriz do código C. Ele irá descodificar a mensagem multiplicando a matriz com a mensagem recebida M_F por C^{-1}:

$$C^{-1}M_F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 37 & 29 \\ 80 & 83 & 69 \\ 54 & 67 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 10 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix} = M_I$$

- Note-se que

$$C^{-1}M_F = C^{-1}(CM_I) = M_I$$

- Como construir matrizes de código (como a matriz C acima) que têm de ter determinante igual a ± 1?
  Basta considerar a matriz identidade (de qualquer ordem) e efectuar várias operações elementares do tipo OE3 (adicionar a uma linha um múltiplo escalar de outra linha); também se podem trocar linhas. A matriz resultante C terá entradas inteiras e, atendendo a que

$$\det C = \pm \det(I) = \pm 1,$$

  a sua inversa C^{-1} também terá entradas inteiras.

- **Resumo.**

  - *Codificação da Mensagem*
    frase $\rightarrow$ sequência de números $\rightarrow$ Matriz M_I $\rightarrow$ $M_F = CM_I$ $\rightarrow$ sequência de números a enviar

– *Descodificação da Mensagem*
sequência de números recebida $\to$ matriz $M_F \to M_I = C^{-1}M_F \to$ sequência de números $\to$ frase

2.6 Exercícios Resolvidos

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o valor do seu determinante usando o teorema de Laplace;

   (b) Usando o resultado da alínea anterior e as propriedades dos determinantes, indique, justificando, o valor de:

   (i) $\text{car}(A)$;

   (ii) $\det\left(2(A^\top)^{-1}\right)$.

   (c) Calcule a inversa de A usando a matriz adjunta.

   Resolução.

   (a) Vamos escolher a linha dois para efectuar o desenvolvimento de Laplace.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(6-2) + (-1)(-2+6) \\ &= -8 \end{aligned}$$

   (b) (i) Como $\det(A) = -8 \neq 0$, a característica de A é máxima, isto é, $\text{car}(A) = 3$.

   (ii) Usando as propriedades do determinante, temos

$$\det\left(2(A^\top)^{-1}\right) = 2^3 \det\left((A^\top)^{-1}\right) = 8 \times \frac{1}{\det(A^\top)} = 8 \times \frac{1}{\det(A)} = \frac{8}{-8} = -1.$$

   (c) Vimos acima que $\det(A) = -8$. De seguida vamos calcular a matriz dos cofactores.

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Assim, a adjunta de A é

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^\top = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

e a inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 3/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Justifique que C pode ser considerada uma matriz de código.

(b) Sendo C a matriz de código (considere o alfabeto inglês[1]) usada no envio de mensagens, decifre a mensagem recebida, sabendo que ela é dada pela sequência de números

$$16, 35, 23, 8, 16, 12, 24, 20, 15.$$

(c) Dê um exemplo de uma matriz 3×3 com pelo menos seis entradas não nulas e com determinante igual a -1.

Resolução.

(a) Basta mostrar que $\det(C) = \pm 1$, para assim se garantir que a inversa de C tenha entradas inteiras. Com efeito, escolhendo a segunda coluna para efectuar o desenvolvimento de Laplace, temos

$$\det(C) = 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1.$$

(b) A matriz final obtém-se escrevendo os números da sequência em coluna, formando uma matriz 3×3:

$$M_F = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 24 \\ 35 & 16 & 20 \\ 23 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

A matriz inicial obtém-se multiplicando M_F à esquerda por C^{-1}. A inversa de C é

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Confirme os cálculos!). Assim,

$$M_I = C^{-1} M_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 24 \\ 35 & 16 & 20 \\ 23 & 12 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 12 & 15 \\ 5 & 0 & 14 \\ 12 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

[1] a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z

obtendo-se a sequência inicial (aquela que foi enviada)

$$23, 5, 12, 12, 0, 4, 15, 14, 5.$$

Atendendo à correspondência letra-número usada, conclui-se que a mensagem enviada é *Well done*.

(c) A matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfaz os requisitos pretendidos. Recorde-se que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal.

3. Usando um método apropriado, calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 6 & 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Resolução. Como A é 4×4 e não tem entradas nulas, o melhor processo para calcular o determinante é usar a eliminação de Gauss em conjunto com o teorema de Laplace. Assim, efectuando a eliminação na primeira coluna, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 6 & 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow -6L_1 + L_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 11 & -14 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & -7 & 15 & -18 \end{vmatrix}.$$

Efectuando o desenvolvimento de Laplace na mesma coluna, obtemos um determinante 3×3:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -6 & 11 & -14 \\ 5 & -7 & 10 \\ -7 & 15 & -18 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \\ &= -6 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 15 & -18 \end{vmatrix} + 11 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -7 & -18 \end{vmatrix} + \\ &\quad +(-14) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.7 Exercícios

1. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

   (a) M_{13} e C_{13} (b) M_{23} e C_{23} (c) M_{22} e C_{22}

2. Sem calcular o valor do determinante, efectue o desenvolvimento de Laplace da matriz do exercício anterior, segundo:

   (a) a 1ªlinha (b) a 1ªcoluna (c) a 2ªlinha

   (d) a 2ªcoluna (e) a 3ªlinha (c) a 3ªcoluna

3. Calcule os seguintes determinantes, utilizando um método à sua escolha:

   (a) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

4. Suponha que A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det(A) = 2$, $\det(B) = -5/3$ e $\det(C) = 0$. Calcule os seguintes determinantes:

   (a) $\det(BA^{-1}B)$ (b) $\det(2AB^T)$ (c) $\det(ABC)$ (d) $\det(-3A^TB^{-1})$

5. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se A é invertível então $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

6. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule, sem desenvolver, os seguintes determinantes:

   (a) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

7. Suponha que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$. Determine:

   (a) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

8. Determine, usando a adjunta, a inversa das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível, então:

   (a) $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj}(A))^T$ (b) $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A)$ (c) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$

10. Use determinantes para determinar os valores de α para os quais o seguinte sistema possui uma única solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

11. Seja A uma matriz quadrada em que todas as entradas são números inteiros. Explique porque é que a adjunta de A também tem entradas inteiras.

12. Mostre que se $|A| = \pm 1$ e as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} são também números inteiros.

13. Considere $\det(A) = 8$. Calcule $\det(B)$, justificando convenientemente a sua resposta, sendo:

    (a) B a matriz obtida de A trocando a 1ª e a 4ª linhas.
    (b) $B = 2A$ e A é de ordem 3.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{bmatrix}$, sendo k um valor real.

    (a) Determine os valores de k para os quais A é invertível.
    (b) Nas alíneas seguintes, suponha que $k = -4$.
        (i) Calcule a inversa de A através da adjunta.

(ii) Usando a inversa de A, determine a solução do sistema de equações lineares

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. Usando a regra de Cramer, resolva os seguintes sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ -2x + 2y - z = -8 \end{cases}$

16. Na codificação de uma mensagem, um espaço em branco foi representado por 0, a letra A por 1, B por 2, C por 3, etc. Usou-se o alfabeto inglês (26 letras). A matriz de código usada foi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Sabendo que a sequência de números que chegou ao receptor foi

$$-19, 19, 25, -21, 0, 18, -18, 15, 3, 10, -8, 3, -2, 20, -7, 12,$$

qual é a frase contida na mensagem?

(b) Suponha agora que a sequência recebida foi

$$16, 4, 1, -16, 17, -4, -13, 4, 1, 6, -2, -4, -18, 19, -1, 2.$$

Qual é a frase da mensagem?

17. (a) Encontre duas matrizes 3×3 com entradas inteiras e determinante ± 1.

(b) Encontre duas matrizes 5×5 com entradas inteiras e determinante ± 1.

(c) Usando uma das matrizes 5×5 da alínea anterior como matriz de código, escolha uma frase para enviar a alguém que conheça e diga qual é a sequência de números que chegou ao receptor.

Capítulo 3

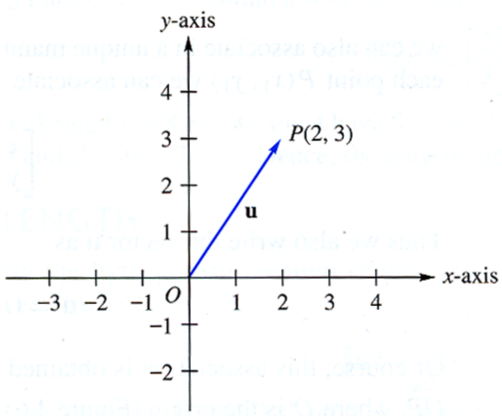
Vectores em $\mathbb{R}^n$

3.1 Vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

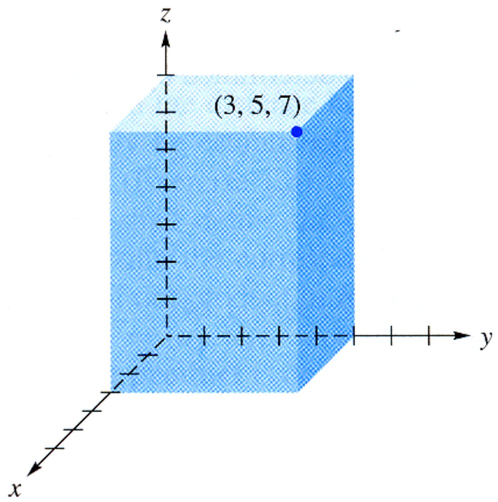
3.1.1 Generalidades

- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais;
  os números reais podem ser representados numa recta, denominada recta real.

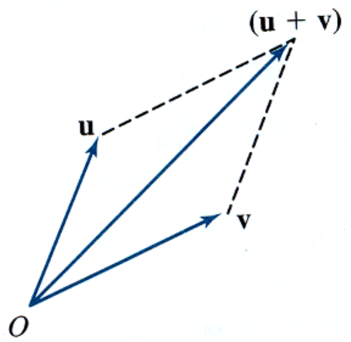
- $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais. a é a abcissa e b é a ordenada. A cada par ordenado podemos fazer corresponder um ponto do plano ou o respectivo vector posição. Na figura, está representado o ponto $P(2,3)$ e o seu vector posição **u**.



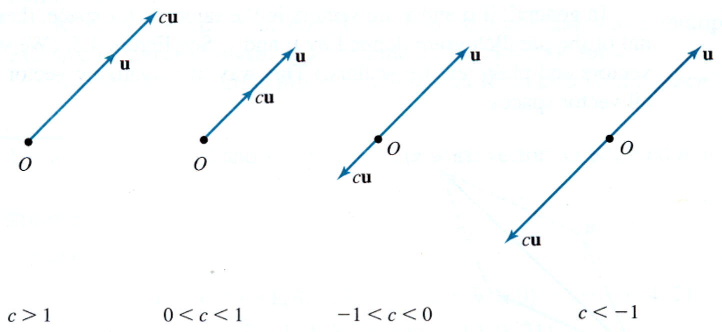
- $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos ternos ordenados de números reais. a é a abcissa, b é a ordenada e c é a cota. A cada terno ordenado podemos fazer corresponder um ponto do plano ou o respectivo vector posição. Na figura, está representado o ponto de coordenadas $(3,5,7)$.



- Os elementos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ serão designados por vectores, embora, como vimos, eles também possam ser usados para representar pontos.
- Do ponto de vista geométrico, a adição de vectores no plano e no espaço, ou seja, em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, faz-se através da regra do paralelogramo.



- Se c é um escalar, então $c\mathbf{u}$ tem a mesma direcção de $\mathbf{u}$; tem o mesmo sentido de $\mathbf{u}$ se $c > 0$ e contrário se $c < 0$. O comprimento de $c\mathbf{u}$ é igual a $|c|$ vezes o comprimento de $\mathbf{u}$.



- Dado o vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, chama-se *comprimento* ou *norma* ao real não negativo
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,;$$
do mesmo modo, para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$,
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,.$$

- Dados os vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$, chama-se *produto interno* (ou produto escalar) ao número real
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2\,;$$
se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pertencem a $\mathbb{R}^3$, o *produto interno* (ou produto escalar) é definido de modo análogo:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$
Usando a notação matricial, podemos ainda escrever
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{v}.$$

- Recorde-se que o produto interno de dois vectores ortogonais (isto é, perpendiculares) é nulo.

3.1.2 Produto Vectorial e Aplicações

- Os vectores de $\mathbb{R}^3$ também se podem representar na forma
$$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$$

- **Definição.** Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vectores de $\mathbb{R}^3$. Chama-se *produto vectorial* de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ ao vector
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

- O produto vectorial é um novo vector, que é simultaneamente ortogonal (perpendicular) a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$.

- Para efeitos computacionais, podemos escrever $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ como um pseudo-determinante (porquê pseudo?):

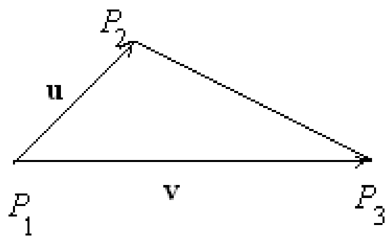
$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

- **Aplicações do produto vectorial:**

1. **Cálculo da área de um triângulo:** A área do triângulo de vértices P_1, P_2 e P_3 é dada por

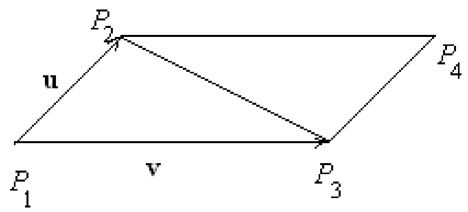
$$A_T = \frac{1}{2}\| \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \|,$$

onde $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$.



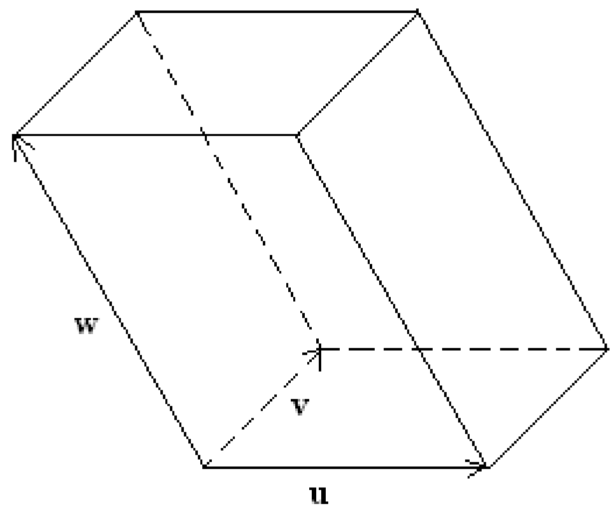
2. **Cálculo da área de um paralelogramo:** A área do paralelogramo com lados adjacentes $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dada por

$$A_P = \| \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \|.$$



3. **Cálculo do volume de um paralelepípedo:** O volume do paralelepípedo (não necessariamente rectângulo) com um vértice na origem e arestas $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é dado por

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|.$$



3.1.3 Rectas em $\mathbb{R}^2$

- Seja r a recta em $\mathbb{R}^2$ que contém o ponto $P_0(x_0, y_0)$ e é paralela ao vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Supondo que $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, a equação da recta r pode ser escrita na forma

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2},$$

que é chamada de *equação cartesiana*. No caso particular em que $u_1 = 0$, a recta é vertical e a sua equação será da forma

$$x = x_0\,;$$

se $u_2 = 0$, a recta é horizontal e a sua equação será da forma

$$y = y_0\,.$$

- Se r não for vertical, a sua equação pode ser escrita na chamada *forma reduzida*

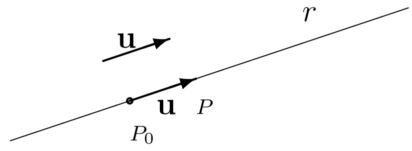
$$y = mx + b,$$

onde m é o declive e b a ordenada na origem.

- **Exercício 3.1.1** Determine as equações cartesiana e reduzida da recta que contém os pontos $P_0(-3, 4)$ e $P_1(3, 5)$. Represente geometricamente a recta.

3.1.4 Rectas e Planos em $\mathbb{R}^3$

- Seja r a recta que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da recta.



Recta que contém P_0 e é paralela a **u**

– Se $u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$, as equações de r são

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

– Se alguma das componentes de **u** for nula, por exemplo, $u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$, então as equações da recta r são

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{u_2} & = & \dfrac{z - z_0}{u_3} \end{array}\right. .$$

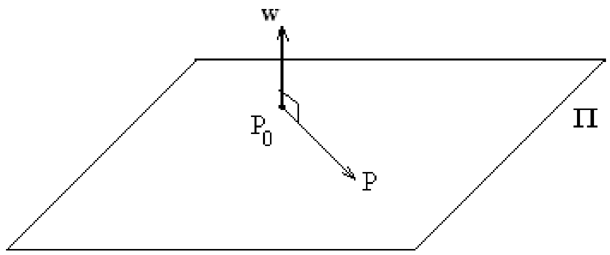
– Se **u** tiver duas componentes nulas, por exemplo, $u_1 = u_2 = 0$, então as equações da recta r são

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 \\ y & = & y_0 \end{array}\right.$$

(subentende-se que z é qualquer).

- **Exercício 3.1.2** Determine as equações da recta que contém os pontos $P_0(-3, -1, 4)$ e $P_1(3, -1, 5)$.

- Seja Π o plano que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular (normal) ao vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano.



Então

$$\begin{aligned} P \in \Pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{w} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (w_1, w_2, w_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \\ &\quad\quad \text{onde } A = w_1,\ B = w_2,\ C = w_3,\ D = -w_1x_0 - w_2y_0 - w_3z_0 \end{aligned}$$

- O vector $\mathbf{w}$ designa-se por vector normal ao plano.

- Em $\mathbb{R}^3$, um plano fica caracterizado por uma equação da forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

enquanto que para definir uma recta são necessárias duas equações, isto é, uma recta fica definida pela intersecção de dois planos.

- **Exercício 3.1.3** Determinar a equação do plano que contém os pontos

$$P_0(2,1,3),\ P_1(-1,-2,4),\ P_2(4,2,1).$$

3.1.5 Transformações Lineares: Aplicação à Computação Gráfica

- **Definição.** Uma transformação T de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$,

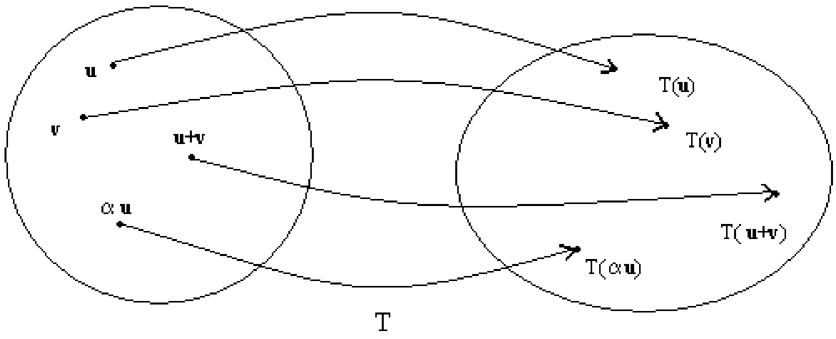
$$\begin{aligned} T:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

é uma correspondência que a cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um único vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

- **Definição.** Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e α um escalar. Uma transformação $T:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se *linear* se

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(\alpha\,\mathbf{u}) &= \alpha\, T(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.



- **Teorema.** Seja A uma matriz $m \times n$. Então a transformação $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ é linear; esta transformação designa-se por *transformação matricial.*

  Demonstração. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vectores de $\mathbb{R}^n$ e α um escalar real. Atendendo a que

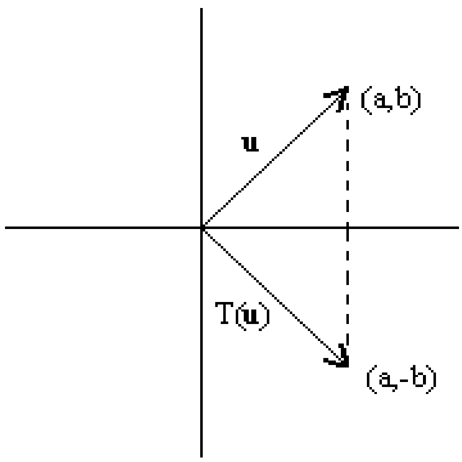
  $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
  $$T(\alpha\,\mathbf{u}) = A(\alpha\,\mathbf{u}) = \alpha\,A(\mathbf{u}) = \alpha\,T(\mathbf{u})$$

  verifica-se que T é linear. ∎

- **Exemplos de transformações matriciais no plano.**

  1. **Simetria em relação ao eixo dos** xx**:** $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

  $$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

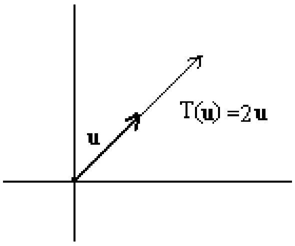
  2. **Simetria em relação ao eixo dos** yy**:** $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

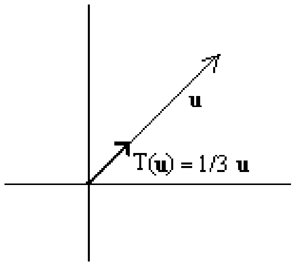
  $$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Dilatação e contracção:** $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u} = r\,\mathbf{u}$$

$$\begin{array}{rcl} r>1 & \longrightarrow & T \text{ dilatação} \\ 0<r<1 & \longrightarrow & T \text{ contracção} \end{array}$$





Aplicação à Computação Gráfica

- A computação gráfica estuda a criação e a manipulação de figuras com a ajuda do computador. Usam-se técnicas de computação gráfica na concepção de jogos de vídeo, na arquitectura, na indústria automóvel, na biologia molecular, etc.. A manipulação de figuras faz-se através do uso de sequências de transformações matriciais, onde se incluem, por exemplo, as rotações, simetrias, dilatações e as contracções.

- De seguida serão apresentados alguns exemplos de manipulação de figuras no plano.

- **Exemplo 1.**
  Simetria de um triângulo relativamente ao eixo xx:

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos o triângulo de vértices

$$\mathbf{v}_1 = (-1,4), \quad \mathbf{v}_2 = (3,1), \quad \mathbf{v}_3 = (2,6).$$

Vamos formar uma matriz em que cada coluna contém as coordenadas dos vértices:

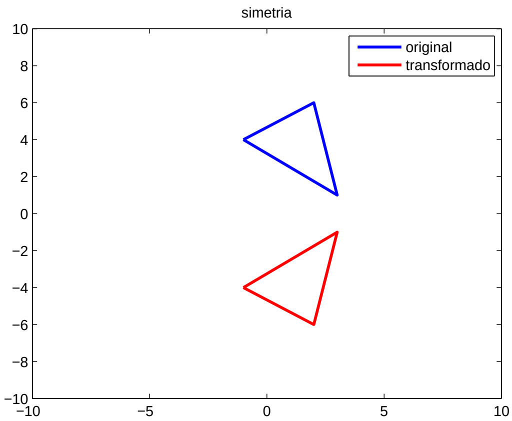
$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para calcular a imagem dos vértices pela transformação, fazemos

$$A\ [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix},$$

donde se conclui que a imagem do triângulo por T ´´e o triângulo de vértices

$$(-1,-4),\ (3,-1),\ (2,-6)$$



- **Exemplo 2.**
Rotação de ângulo θ (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio):

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que pretendemos rodar a parábola $y = x^2$ segundo um ângulo de 50^o, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Vamos escolher alguns pontos da parábola:

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0), \quad \mathbf{v}_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{v}_5 = (3, 9).$$

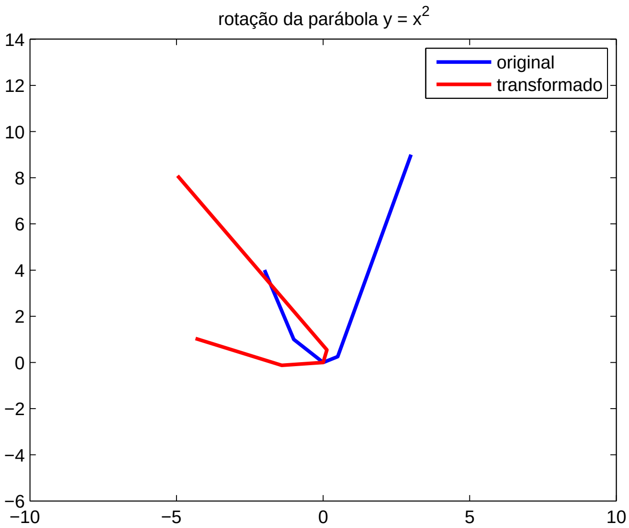
Fazendo o produto (mostrando apenas 4 casas decimais):

$$A\ [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5] = \begin{bmatrix} -4.3498 & -1.4088 & 0 & 0.1299 & -4.9660 \\ 1.0391 & -0.1233 & 0 & 0.5437 & 8.0832 \end{bmatrix}.$$

Os pontos imagem são

$$(-4.3498, 1.0391),\ (-1.4088, -0.1233),\ (0, 0),\ (0.1299, 0.5437),\ (-4.9660, 8.0832);$$

Interligando estes pontos obtém-se a curva à direita na figura.



- **Exemplo 3.**
  "Shear" ("tosquiadela") na direcção do eixo xx:

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $T(x, y) = (x + ky, y)$, podemos ver que o ponto (x, y) se move paralelamente ao eixo dos xx em ky unidades.

Dado um rectângulo R com vértices

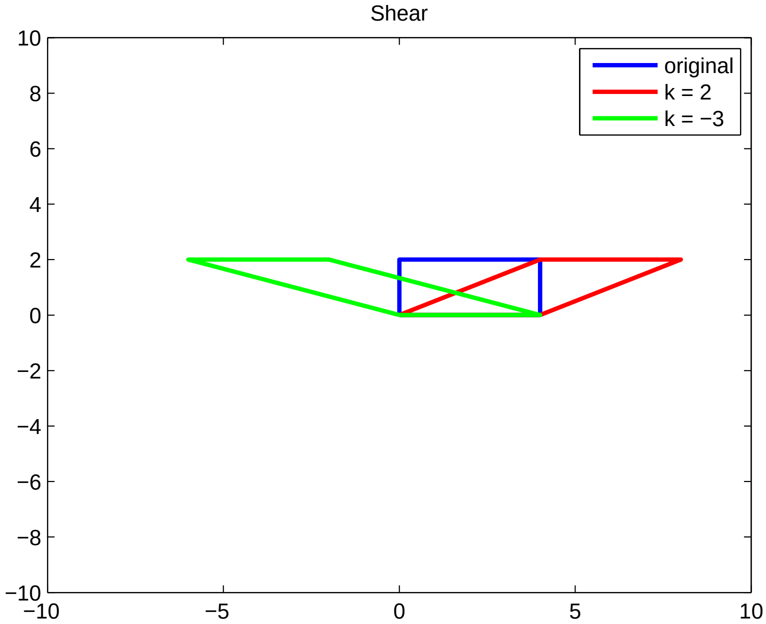
$$(0,0),\ (0,2),\ (4,0),\ (4,2),$$

a sua imagem por uma "shear" com $k = 2$ é

$$(0,0),\ (4,2),\ (4,0),\ (8,2),$$

e a sua imagem por uma "shear" com $k = -3$ é

$$(0,0),\ (-6,2),\ (4,0),\ (-2,2),$$



3.2 O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Definições

- Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ considerámos vectores com duas e três componentes, respectivamente. No caso mais geral de $\mathbb{R}^n$ vamos considerar vectores com n componentes.

- $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
  $(1, 2, 3, 4)$ e $(-1, \frac{3}{4}, 0, 5)$ são dois exemplos de vectores de $\mathbb{R}^4$.

- No caso geral,
  $$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) : u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}.$$
  Os vectores de $\mathbb{R}^n$ também podem ser interpretados como vectores coluna, isto é, como matrizes $n \times 1$:
  $$\mathbb{R}^n = \{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} : u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}.$$
  Por uma questão de comodidade, esta última notação será usada poucas vezes.

- Vimos atrás que é possível representar geometricamente $\mathbb{R}^n$, para $n = 1, 2, 3$. No entanto, tal não é possível para $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, pelo menos da forma como visualizamos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. No entanto, como iremos ver seguidamente, do ponto de vista algébrico é possível conferir a $\mathbb{R}^n$ uma estrutura semelhante à de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

- **Definição.** Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ e α um escalar. Definimos adição e multiplicação por um escalar da seguinte forma:

  Adição

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n) \end{aligned}$$

  Multiplicação por um escalar

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

- **Exemplo:** Dados os vectores $\mathbf{u} = (-1, 4, 3, 7)$ e $\mathbf{v} = (-2, -3, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (-3, 1, 4, 7) \\ 3\mathbf{u} &= (-3, 12, 9, 21) \end{aligned}$$

- **Propriedades da adição e da multiplicação por um escalar:** Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vectores quaisquer de $\mathbb{R}^n$ e α e β escalares. Então:

  (A1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é um vector de $\mathbb{R}^n$ (isto é, $\mathbb{R}^n$ é fechado para a adição de vectores)

  (A2) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

  (A3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

  (A4) Existe um vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
  (existência de um zero em $\mathbb{R}^n$)

  (A5) Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$
  (todo o elemento de $\mathbb{R}^n$ tem um simétrico que pertence a $\mathbb{R}^n$; notação $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$)

  (M1) $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, isto é, $\mathbb{R}^n$ é fechado para a multiplicação por um escalar;

  (M2) $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

  (M3) $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

  (M4) $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$

  (M5) $1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$

- Em virtude de as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas em $\mathbb{R}^n$ verificarem as propriedades numeradas de (A1) a (A5) e (M1) a (M5), diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um *espaço vectorial*. Note-se que embora existam outros espaços vectoriais (por exemplo, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$), apenas $\mathbb{R}^n$ será objecto de estudo nesta disciplina.

3.2.2 Subespaços Vectoriais de $\mathbb{R}^n$

- **Definição.** Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e denotemos por $\mathbf{0}$ o zero de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que S é um *subespaço vectorial* de $\mathbb{R}^n$ se e só se forem verificadas as três condições seguintes:

  (i) $\mathbf{0} \in S$;

  (ii) S é fechado para a adição, isto é,
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S;$$

  (iii) S é fechado para a multiplicação por um escalar, isto é,
$$\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in S \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in S.$$

- **Exemplos.** $S_1 = \mathbb{R}^n$ e $S_2 = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ são exemplos de subespaços de $\mathbb{R}^n$.

- **Exercício 3.2.1** Averiguar se cada conjunto S é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

  (a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 0\}$

  (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 1\}$

  (c) $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \ A\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (S é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$).

- **Teorema.**

  (i) Os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$ são:
    - rectas que contêm a origem
    - $\mathbb{R}^2$ e $\{(0, 0)\}$

  (i) Os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ são:
    - rectas e planos que contêm a origem
    - $\mathbb{R}^3$ e $\{(0, 0, 0)\}$

- **Exercício 3.2.2**

  (a) Dar um exemplo de uma recta no plano $\mathbb{R}^2$ que seja subespaço e uma recta que não o seja;

  (b) Dar um exemplo de uma recta e um plano no espaço $\mathbb{R}^3$ que sejam subespaços;

3.2.3 Combinações Lineares

- **Definição.** Sejam $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que $\mathbf{w}$ é *combinação linear* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r.$$

- **Exercício 3.2.3** Sejam $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

  (a) Averiguar se $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ e $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ são combinações lineares de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;

  (b) Indicar dois vectores que sejam combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

- **Definição.** Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in S$. Se todo o vector de S se puder escrever como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, diz-se que estes vectores *geram* S e escreve-se

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle.$$

- **Teorema.** Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de $\mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, isto é, o conjunto

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r, \ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

  é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. A este subespaço dá-se o nome de *subespaço gerado* pelos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

- **Exemplos.**

  1. Em $\mathbb{R}^2$, seja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. O subespaço gerado por $\mathbf{v}$,

  $$\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

     é a recta que contém $(0, 0)$ e tem a direcção de $\mathbf{v}$.

  2. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vectores não colineares. O subespaço gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$,

  $$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

     é o plano que contém $(0, 0, 0)$ e é paralelo aos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

- **Exercício 3.2.4** Determinar uma condição que caracterize os subespaços gerados por cada uma dos conjuntos indicados:

  (a) $C = \{\mathbf{u} = (1, 1, 0, -1),\ \mathbf{v} = (2, 1, 1, 3)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

  (b) $C = \{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2),\ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1),\ \mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

  (c) $C = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0),\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

3.2.4 Dependência Linear. Bases e Dimensão.

- **Definição.** Se $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um subconjunto de vectores do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, então a equação vectorial

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem pelo menos uma solução que é

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Se esta for a única solução, diz-se que B é *linearmente independente*; se existirem mais soluções, diz-se que B é *linearmente dependente*.

- **Exercício 3.2.5** Estudar a dependência linear dos seguintes subconjuntos de vectores B do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ indicado.

  (a) $B = \{(2, 6, -2),\ (3, 1, 2),\ (8, 16, -3)\}$, em $\mathbb{R}^3$;

  (b) $B = \{(1, 1),\ (1, -1)\}$, em $\mathbb{R}^2$.

- **Teorema.**

  (i) Dois vectores em $\mathbb{R}^2$ (ou em $\mathbb{R}^3$) são linearmente dependentes se e só se são paralelos;

  (ii) Três vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes se e só se são complanares.

- **Definição.** Seja B um conjunto de vectores de um subespaço vectorial S de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que B é uma *base* de S se:

  (i) O subespaço gerado por B coincide com S;

  (ii) B é linearmente independente.

- **Exemplos.**

1. O conjunto $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, onde

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{e}_1 & = & (1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 & = & (0, 1, \dots, 0) \\ \cdots & \cdots & \\ \mathbf{e}_n & = & (0, 0, \dots, 1), \end{array}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$, que se designa por *base canónica.*

2. No caso particular de $\mathbb{R}^3$, a base canónica é

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0),\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

- **Exercício 3.2.6** Mostrar que $C = \{(1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1)\}$, também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

- **Teorema.** Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base do subespaço S, então:

(i) Qualquer subconjunto de S com mais de n vectores é linearmente dependente.

(ii) Qualquer outra base de S tem exactamente n vectores.

- **Exemplos.**

1. Como $B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, pelo teorema anterior, quaisquer três vectores (ou mais) de $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes. Por exemplo,

$$B' = \{(1, 2),\ (-1, 3),\ (0, 5)\}$$

é linearmente dependente. Também podemos concluir que qualquer base de $\mathbb{R}^2$ tem de ter exactamente 2 vectores.

2. Qualquer base de $\mathbb{R}^n$ tem exactamente n vectores.

- **Definição.** Se um subespaço vectorial S admitir uma base com n vectores, diz-se que S tem *dimensão* n e escreve-se $\dim S = n$; no caso particular $S = \{\mathbf{0}\}$, diz-se que $\dim S = 0$.

- **Exercício 3.2.7** Indicar uma base e a dimensão do espaço vectorial

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0\ \wedge\ y + z = 0\}.$$

- Quando a dimensão de um subespaço vectorial é conhecida, podemos utilizar o teorema seguinte para averiguar se um dado conjunto de vectores desse subespaço é uma base.

- **Teorema.** Se S é um subespaço vectorial com dimensão n, então:

  (i) Quaisquer n vectores de S que sejam linearmente independentes formam uma base de S.

  (ii) Quaisquer n vectores que geram S constituem uma base de S.

- **Exemplo.** Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, quaisquer 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente independentes formam uma base deste espaço.

3.3 Exercícios Resolvidos

1. Determinar o volume do paralelepípedo com arestas

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{w} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Resolução. Basta calcular o módulo do determinante cujas linhas são as componentes dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = |-10| = 10.$$

2. Considere os pontos do espaço $A(0,1,2),\ B(1,3,4),\ C(3,5,6)$.

(i) Determine a área do triângulo $[ABC]$.

(ii) Determine a equação do plano que contém os três pontos dados.

Resolução.

(i) Consideremos os vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (3,4,4)$ e calculemos o produto vectorial de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (8-8, -(4-6), 4-6) = (0,2,-2).$$

A área do triângulo $[ABC]$ é

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}.$$

(ii) Como os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ considerados na alínea anterior são paralelos ao plano, o seu produto vectorial $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, já calculado acima, é normal ao plano. Sendo assim, a equação do plano será da forma

$$0x + 2y - 2z = D,$$

onde D é uma constante a determinar. Para determinar D basta escolher um ponto do plano, por exemplo, o ponto A, e substituir x, y e z pelas suas coordenadas:

$$0 \times 0 + 2 \times 1 - 2 \times 2 = D,$$

isto é, $D = -2$. Logo a equação do plano que contém os pontos A, B e C é

$$0x + 2y - 2z = -2,$$

ou seja, $y - z = -1$.

3. Escreva a equação de uma recta que contenha o ponto $(1, 1, 1)$ e seja paralela ao plano de equação $x - 2y + 2z = 1$.

   Resolução. O vector $\mathbf{w} = (1, -2, 2)$ é perpendicular ao plano. Para a recta ser paralela ao plano, o seu vector director terá de ser perpendicular a $\mathbf{w}$. Consideremos por exemplo o vector $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$. O vector $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{w}$, porque

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = 0.$$

   A equação de uma recta nas condições pedidas poderá ser

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ \dfrac{y-1}{1} & = & \dfrac{z-1}{1} \end{cases}.$$

4. Dadas as transformações

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

   definidas por

$$T_1(x, y) = (x - y, 3x) \quad \text{e} \quad T_2(x, y, z) = (xy, z),$$

   (a) Determinar $T_1(2, 1)$ e $T_2(1, 1, 3)$.

   (b) Averiguar se são lineares.

   Resolução.

   (a)
   $T_1(2, 1) = (2 - 1, 3 \times 2) = (1, 6)$
   $T_2(1, 1, 3) = (1 \times 1, 3) = (1, 3)$.

   (b) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dois vectores de $\mathbb{R}^2$ e α um escalar real. Como

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= ((u_1 + v_1) - (u_2 + v_2),\ 3(u_1 + v_1)) \\ &= (u_1 - u_2 + v_1 - v_2,\ 3u_1 + 3v_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v}) &= T_1(u_1, u_2) + T_1(v_1, v_2) \\ &= (u_1 - u_2, 3u_1) + (v_1 - v_2, 3v_1) \\ &= (u_1 - u_2 + v_1 - v_2,\ 3u_1 + 3v_1) \end{aligned}$$

conclui-se que

$$T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v}).$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} T_1(\alpha\mathbf{u}) &= T_1(\alpha u_1, \alpha u_2) \\ &= (\alpha u_1 - \alpha u_2,\ 3\alpha u_1) \\ &= \alpha\,(u_1 - u_2,\ 3u_1) \\ &= \alpha T_1(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

verifica-se a identidade

$$T_1(\alpha\,\mathbf{u}) = \alpha\,T_1(\mathbf{u}).$$

Como são verificadas as duas condições da definição de transformação linear, concluimos que T_1 é linear.

Analisemos agora a linearidade de T_2. O facto de a definição de T_2 envolver o produto de duas variáveis, leva-nos a suspeitar que T_2 não é de facto linear. De qualquer modo temos de apresentar um contra-exemplo que mostre que uma das condições que definem uma transformação linear não se verifica. Consideremos, por exemplo, os vectores tridimensionais $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Atendendo a que

$$T_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_2(2, 3, 4) = (2 \times 3, 4) = (6, 4)$$

e

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{v}) &= T_2(1, 2, 3) + T_2(1, 1, 1) \\ &= (1 \times 2, 3) + (1 \times 1, 1) \\ &= (2, 3) + (1, 1) \\ &= (3, 4), \end{aligned}$$

podemos afirmar que T_2 não é linear, uma vez que

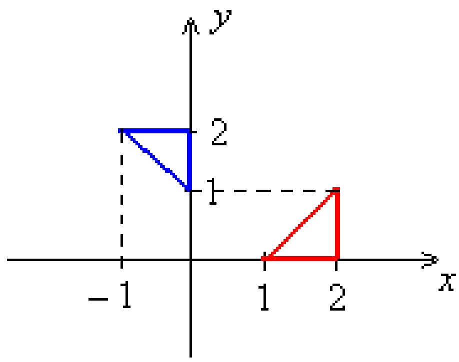
$$T_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq T_2(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{v}).$$

5. Determine e represente geometricamente a imagem do triângulo de vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(2, 1)$ pela transformação matricial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Qual é a acção de f sobre o triângulo?

Resolução. Para determinar a imagem do rectângulo dado, colocamos as coordenadas dos seus vértices como colunas de uma matriz e multiplicamos esta matriz à esquerda por A:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A imagem do triângulo por f é o triângulo de vértices $(0,1)$, $(0,2)$ e $(-1,2)$.



Pode-se observar que a função faz rodar o triângulo em 90 graus, em torno da origem.

6. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y + z = 0\}.$$

(a) Mostre que V é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base e a dimensão de V.

Resolução.

(a) (i) V é um conjunto não vazio ($V \neq \phi$), porque $(0,0,0) \in V$, uma vez que $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$.

(ii) Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vectores de V, sabemos que

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 + 2v_2 + v_3 = 0. \tag{3.1}$$

Pretendemos mostrar que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3) \in V$$

isto é, que

$$u_1 + v_1 + 2(u_2 + v_2) + u_3 + v_3 = 0. \tag{3.2}$$

Para mostrar que (3.2) é verdadeira, basta usar (3.1) e a atender a que

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 + 2(u_2 + v_2) + u_3 + v_3 &= u_1 + 2u_2 + u_3 + v_1 + 2v_2 + v_3 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vector de V e $\alpha \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 0. \tag{3.3}$$

Pretendemos mostrar que

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha\, u_1,\ \alpha\, u_2,\ \alpha\, u_3) \in V$$

isto é, que

$$\alpha\, u_1 + 2\alpha\, u_2 + \alpha\, u_3 = 0. \tag{3.4}$$

Para mostrar que (3.4) é verdadeira, basta usar (3.3) e atender a que

$$\begin{aligned} \alpha\, u_1 + 2\alpha\, u_2 + \alpha\, u_3 &= \alpha(u_1 + 2u_2 + u_3) \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Na condição $x+2y+z = 0$ que caracteriza V, há duas variáveis livres. Fazendo $x = -2y - z$, podemos dizer que y e z são variáveis livres. Isto significa que V tem dimensão 2. Para determinar uma base de V, basta efectuar a seguinte decomposição para os elementos de V:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-2y - z, y, z) \\ &= (-2y, y, 0) + (-z, 0, z) \\ &= y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1), \quad y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Designando $B := \{(-2, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\}$, fica mostrado que B gera V. A forma como se efectuou a separação dos vectores garante a independência linear dos vectores de B. Logo, B é uma base de V.

7. Considere os vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)$$

e o subespaço $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

(a) Averigue se o vector $\mathbf{u} = (0, 3, 3)$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(b) Diga, justificando, se o vector $\mathbf{u}$ pertence a S.

(c) Averigue se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de S.

(d) Determine uma condição que caracterize o subespaço $S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

Resolução.

(a) Escrevendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \\ \Leftrightarrow (0, 3, 3) &= \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1) \\ \Leftrightarrow (0, 3, 3) &= (\alpha + \gamma,\ \beta - \gamma,\ 2\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ \beta - \gamma & = & 3 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema pelo método de eliminação de Gauss, obtemos

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Passando a matriz completa ao sistema correspondente, obtemos

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ \beta - \gamma & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & -\gamma \\ \beta & = & 3 + \gamma \quad (\gamma \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Uma vez que

$$(0,3,3) = -\gamma(1,0,2) + (3+\gamma)(0,1,1) + \gamma(1,-1,1),$$

podemos afirmar que o vector $\mathbf{u}$ é combinação linear dos três vectores dados. Neste caso, é possível escrever $\mathbf{u}$ como combinação linear de várias formas distintas, bastando para isso atribuir valores a γ. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \gamma = 1 \Rightarrow (0,3,3) &= -(1,0,2) + 4(0,1,1) + (1,-1,1) \\ \gamma = 0 \Rightarrow (0,3,3) &= 0(1,0,2) + 3(0,1,1) + 0(1,-1,1). \end{aligned}$$

(b) Como $\mathbf{u}$ é combinação linear dos três vectores dados, isto significa que $\mathbf{u} \in S$. Note-se que, por definição, S é formado por todas as possíveis combinações lineares de $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$.

(c) Em primeiro lugar, vamos estudar a dependência linear dos vectores. Como

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,-1,1) &= (0,0,0) \\ \Leftrightarrow (\alpha+\gamma,\ \beta-\gamma,\ 2\alpha+\beta+\gamma) &= (0,0,0), \end{aligned}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ \beta - \gamma & = & 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema pelo método de eliminação de Gauss (ao cuidado do aluno), constatamos que ele é indeterminado, tendo portanto mais do que uma solução. Assim, os três vectores são linearmente dependentes, não podendo formar uma base de S.

(d) Seja (x, y, z) um vector qualquer de S. Então existem escalares α, β e γ tais que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (\alpha + \gamma,\ \beta - \gamma,\ 2\alpha + \beta + \gamma)\,. \end{aligned}$$

Daqui resulta o seguinte sistema linear, que, por hipótese, é possível:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ 2\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}.$$

Queremos saber quais os valores reais de x, y e z que tornam este sistema possível. Para isso é necessário determinar a forma de escada da matriz completa.

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & -2x + z \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 2x + y - z \end{array}\right].$$

Concluimos então que o sistema linear é possível se e só se $\mathrm{car}[A|\mathbf{b}] = \mathrm{car}(A)$ se e só se $2x + y - z = 0$. Logo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y - z = 0\}.$$

3.4 Exercícios

1. Determine $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ e $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u}=(1,2,-3)$ e $\mathbf{v}=(0,1,-2)$.

2. Sejam
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-3\\-1\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}a\\-1\\b\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\c\\2\end{bmatrix}.$$
Determine a, b e c de modo que

   (a) $\mathbf{w}=\frac{1}{2}\mathbf{u}$ (b) $\mathbf{w}+\mathbf{v}=\mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w}+\mathbf{x}=\mathbf{v}$

3. Represente geometricamente os seguintes vectores:

   (a) $\mathbf{u}=(2,-3,-1)$ (b) $\mathbf{v}=(0,1,4)$ (c) $\mathbf{w}=(0,0,-1)$

4. Represente geometricamente os seguintes vectores, onde é dado o ponto de aplicação e a extremidade.

   (a) $(2,3,-1)$, $(0,0,2)$ (b) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ (b) $(1,1,3)$, $(0,0,1)$

5. Sejam $\mathbf{u}=(3,2,-1)$, $\mathbf{v}=(0,2,3)$ e $\mathbf{v}=(2,6,7)$. Calcule

   a) $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$; b) $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}-2\mathbf{w})$; c) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})-3\mathbf{w}$.

6. Determine a área do triângulo de vértices P, Q e R, onde

   (a) $P=(2,6,-1)$, $Q=(1,1,1)$, $R=(4,6,2)$;

   (b) $P=(1,-1,2)$, $Q=(0,3,4)$, $R=(6,1,8)$.

7. Determine um vector ortogonal a ambos os vectores $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

8. Sabendo que $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=3$ determine

   a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})$; b) $(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}$; c) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}$.

9. Determine o volume do paralelepípedo de arestas $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, sendo

   (a) $\mathbf{u}=(-1,-2,1)$, $\mathbf{v}=(3,0,-2)$, $\mathbf{w}=(2,2,-4)$;

   (b) $\mathbf{u}=(3,1,2)$, $\mathbf{v}=(4,5,1)$, $\mathbf{w}=(1,2,4)$.

10. Simplifique $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\wedge(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

11. Escreva na forma reduzida e cartesiana a equação da recta em $\mathbb{R}^2$ que contém os pontos

    (a) $P(-1,1)$ e $Q(1,2)$

    (b) $P(0,1)$ e $Q(1,1)$.

12. Dados os pontos $A(1,1,1)$, $P(2,-1,3)$ e $Q(1,3,2)$ e o vector $\mathbf{v}=(2,1,0)$, escreva as equações da:

    (a) recta que contém A e tem a direcção de $\mathbf{v}$;

    (b) recta que contém A e P;

    (c) recta OA;

    (d) recta que contém A e Q;

    (e) recta que contém A e é ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$ e a $\mathbf{v}$.

13. Determine as equações da recta que contém os pontos $(-3,1,1)$ e $(1,2,7)$. Verifique se os pontos $(-7,0,5)$ e $(-7,0,-5)$ pertencem a essa recta.

14. Determine a equação do plano que:

    (a) contém o ponto $A(0,4,3)$ e é perpendicular ao vector $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$;

    (b) contém os pontos $(2,1,0)$, $(3,0,2)$ e $(0,4,3)$;

    (c) contém o ponto $(2,3,-4)$ e é paralelo ao plano $3x-y-3z=5$;

    (d) contém os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

15. Condidere os vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Determine:

    (a) Um vector $\mathbf{n}$ ortogonal aos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$;

    (b) A equação do plano que contém a origem e é gerado pelos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$;

16. Considere o plano de equação $5x-y+7z=21$. Determine:

    (a) Um ponto do plano que esteja no eixo Ox;

    (b) Um vector perpendicular ao plano;

    (c) Um vector paralelo ao plano.

17. Determine as equações da recta definida pela intersecção dos planos $x-y+3z+1=0$ e $3x-2y-z-2=0$.

18. Averigue se as seguintes transformações são lineares.

    (a) $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad T(x,y)=(x+1,y,x+y)$

    (b) $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad T(x,y,z)=(x+y,y,x-z)$

    (c) $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad T(x,y)=(x^2+x,y-y^2)$

    (d) $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad T(x,y,z)=(2x-3y,3y-2z,2z)$

    (e) $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad T(x,y)=(x+y,0,2x)$

19. Seja $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $L(\mathbf{i})=(2,3)$ e $L(\mathbf{j})=(-1,2)$. Determine:

(a) $L(4,-3)$

(b) $L(x,y)$

20. Seja $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $L(\mathbf{i}) = (1,2,-1)$, $L(\mathbf{j}) = (1,0,2)$ e $L(\mathbf{k}) = (1,1,3)$. Determine:

(a) $L(2,-1,3)$

(b) $L(x,y,z)$.

21. Nas alíneas seguintes, represente geometricamente o vector $\mathbf{u}$ e a sua imagem pela transformação matricial dada.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma rotação (no sentido contrário aos ponteiros do relógio) de um ângulo de $2\pi/3$ radianos; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$;

22. Descreva geometricamente cada uma das seguintes transformações matriciais $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, onde é dada a matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$

isto é, T é uma rotação.

(a) Se $T_1(\mathbf{u}) = A^2\mathbf{u}$, descreva a acção de T_1 sobre $\mathbf{u}$.

(b) Se $T_2(\mathbf{u}) = A^{-1}\mathbf{u}$, descreva a acção de T_2 sobre $\mathbf{u}$.

(c) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, qual é o menor inteiro positivo para o qual $T(\mathbf{u}) = A^k\mathbf{u} = \mathbf{u}$?

24. Determine e represente geometricamente a imagem do rectângulo R de vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,3)$ e $(2,3)$ pelas seguintes transformações lineares:

(a) Simetria em relação ao eixo dos yy;

(b) “Shear” com $k = 3$ na direcção do eixo dos xx;

(c) “Shear” com $k = -2$ na direcção do eixo dos yy, isto é, a transformação matricial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix};$$

(d) Dilatação com $k = 4$;

(e) Contracção com $k = 1/4$.

25. Determine e represente geometricamente a imagem do triângulo T de vértices $(5, 0)$, $(0, 3)$ e $(2, -1)$ pelas seguintes sequências de transformações lineares:

    (a) Transformação do exercício 24b) seguida da transformação do exercício 24e);

    (b) Transformação do exercício 24d) seguida da transformação do exercício 24c), seguida da transformação do exercício 24a);

    (c) Transformação do exercício 24b) seguida da transformação do exercício 24c).

26. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

    $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = -y\}$
    $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x + y - z = 0\}$
    $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 5y = 0 \wedge z = 1\}$
    $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 - z^2 = 0\}$
    $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0 \wedge x - y + z = 0\}$
    $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \leq 0\}$.

    (a) Escolha dois elementos de cada subconjunto e averigue se a sua soma ainda lhe pertence. Escolha também um escalar e um vector e averigue se a multiplicação do vector pelo escalar ainda pertence ao subconjunto.

    (b) Descreva geometricamente cada um dos subconjuntos.

    (c) Averigue se cada subconjunto é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

27. Mostre que o subconjunto S, definido por cada uma das condições seguintes, é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ (supõe-se que (x, y, z, t) representa um vector genérico de $\mathbb{R}^4$):

    (a) $2x = -y + t$ (b) $x + y = z - t$ (c) $x = 0 \wedge z + t = 0$

28. Escreva, se possível, cada um dos seguintes vectores como combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

    (a) $(5, 4)$ (b) $(-1, 3)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(2, -3)$

29. Sendo $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)$ escreva, se possível, cada um dos vectores seguintes como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$:

    (a) $(1, -2, 3)$ (b) $(1, 2, 4)$ (c) $(-1, 1/2, -1)$ (d) $(5, 2, 0)$

30. Averigue se $\mathbb{R}^2$ é ou não gerado por cada um dos seguintes pares de vectores:

    (a) $(1,1)$, $(-2,-2)$ (b) $(0,-1)$, $(3,4)$ (c) $(0,2)$, $(-1,1)$ (d) $(2,3)$, $(-2,-3)$

31. Determine, se possível, uma condição que caracterize o subespaço gerado pelos seguintes vectores e averigue se esses vectores geram $\mathbb{R}^3$:

    (a) $(1,1,1)$, $(2,2,0)$, $(3,0,0)$ (b) $(2,-1,3)$, $(4,1,2)$, $(8,-1,8)$
    (c) $(3,1,4)$, $(2,-3,5)$, $(1,4,-1)$

32. Determine:

    (a) a equação do plano gerado pelos vectores $\mathbf{u} = (1,1,-1)$ e $\mathbf{v} = (2,3,5)$ e que passa em $(0,0,0)$;

    (b) a equação da recta gerada pelo vector $\mathbf{u} = (2,7,-1)$ e que passa em $(0,0,0)$.

33. Sem efectuar cálculos, explique porque é que os vectores seguintes são linearmente dependentes:

    (a) $\mathbf{u} = (1,2)$ e $\mathbf{v} = (-3,-6)$ em $\mathbb{R}^2$
    (b) $\mathbf{u} = (2,3)$, $\mathbf{v} = (-5,8)$ e $\mathbf{w} = (6,1)$ em $\mathbb{R}^2$
    (c) $\mathbf{u} = (1,2,-1)$ e $\mathbf{v} = (2,4,-2)$ em $\mathbb{R}^3$.

34. Estude a dependência linear dos seguintes vectores:

    (a) $(2,-1,4), (3,6,2)$ e $(2,10,-4)$ (b) $(3,1,1), (-11,-1,5)$ e $(4,0,-3)$
    (c) $(6,0,-1)$ e $(1,1,4)$ (d) $(1,3,3), (0,1,4), (5,6,3)$ e $(7,2,-1)$

35. Verifique se os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ são complanares:

    (a) $(1,0,-2), (3,1,2)$ e $(1,-1,0)$ (b) $(2,-1,4), (4,2,3)$ e $(2,7,-6)$

36. Sem efectuar cálculos, explique porque é que os seguintes conjuntos de vectores não são bases dos conjuntos indicados:

    (a) $(1,2), (0,3)$ e $(2,7)$ para $\mathbb{R}^2$ (b) $(-1,3,2)$ e $(6,1,1)$ para $\mathbb{R}^3$

37. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases para os conjuntos indicados?

    (a) $(2,1)$ e $(3,0)$ para $\mathbb{R}^2$ (b) $(0,0)$ e $(1,3)$ para $\mathbb{R}^2$
    (c) $(3,1,-4), (2,5,6)$ e $(1,4,8)$ para $\mathbb{R}^3$ (d) $(1,0,0), (2,2,0)$ e $(3,3,3)$ para $\mathbb{R}^3$

38. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$?

    (a) $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,1,1,1), (0,1,1,1)\}$;

    (b) $\{(1,-1,0,2), (3,-1,2,1), (3,-1,2,1)\}$;

    (c) $\{(0,0,1,1), (-1,1,1,2), (1,1,0,0), (2,1,2,1)\}$.

39. Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores

    (a) $(1,0,2)$;

(b) $(1,0,2),(0,1,3)$;

40. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $(1,0,1,0)$ e $(0,1,-1,0)$.

41. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ é formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

42. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que o conjunto solução de um sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.

43. Determine a dimensão e uma base para o conjunto solução dos seguintes sistemas homogéneos:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} 3x+y+z+t=0 \\ 5x-y+z-t=0 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x-4y+z=0 \\ 4x+8y-3z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$$

44. Determine a dimensão e indique uma base para:

(a) os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(i) o plano $3x-2y+5z=0$ (ii) o plano $x-y=0$

(iii) a recta $x=2t \wedge y=-t \wedge z=4t$ $(t \in \mathbb{R})$ (iv) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b=a+c\}$

(b) o subespaço de $\mathbb{R}^5$, $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1+x_2=0 \wedge x_3=x_4\}$

(c) o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y+z+w=0\}$

Capítulo 4

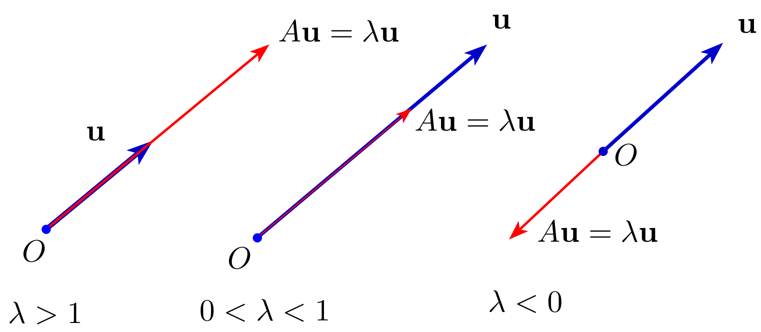
Valores e Vectores Próprios

4.1 Definições e Exemplos

- **Definição.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um vector não nulo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um *vector próprio* de A se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que
$$A\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}\,.$$
Ao escalar λ chama-se *valor próprio* de A; também se diz que $\mathbf{u}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

- **Exemplo.** Sejam $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.
Como
$$A\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}\,,$$
então $\mathbf{u}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

- Geometricamente, $\mathbf{u}$ é um vector próprio da matriz A se o vector $A\mathbf{u}$, resultante da multiplicação de A por $\mathbf{u}$, for paralelo a $\mathbf{u}$.



4.2 Cálculo de valores e vectores próprios

- **Teorema.** Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$.

- $c(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é dito o *polinómio característico* de A; as raízes deste polinómio de grau n são os valores próprios de A; o número de valores próprios (não necessariamente distintos) de A, é menor ou igual a n.

- Ao conjunto dos valores próprios de A chama-se *espectro* de A e representa-se por $\sigma(A)$.

- `eig`(A) é o comando que se usa no Matlab para calcular os valores próprios da matriz A.

- Como os valores próprios são obtidos através das raízes de um polinómio de coeficientes reais, pode acontecer que uma matriz com entradas em $\mathbb{R}$ tenha valores próprios complexos, ocorrendo estes em pares conjugados.

- $\det(A - \lambda I) = 0$ é dita a *equação característica* de A.

- **Teorema.** Sejam A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A.

  (i) Se $\mathbf{u}$ é um vector próprio de A associado a λ então $\alpha\mathbf{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ também é um vector próprio de A associado a λ.

  (ii) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vectores próprios associados a λ então $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ também é um vector próprio associado a λ.

- **Exercício 4.2.1** Demonstrar o teorema anterior.

- Sejam A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A. Pelo teorema anterior, o conjunto
$$E(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \; A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$, que se chama *espaço próprio* de A associado ao valor próprio λ.

- O espaço $E(\lambda) \setminus \{\mathbf{0}\}$ é formado por todos os vectores associados ao valor próprio λ.

- O espaço próprio $E(\lambda)$ pode ainda ser representado na forma
$$E(\lambda) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \ (A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$
Fazendo $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ldots u_n]^\top$, a equação matricial $(A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ representa um sistema homogéneo nas incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Como $\det(A - \lambda I) = 0$ e, portanto, $\operatorname{car}(A - \lambda I) < n$, concluimos que este sistema é sempre indeterminado.

- **Exercício 4.2.2** Determine os valores e os vectores próprios da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Observação.** Suponhamos que o polinómio característico $c(\lambda)$ tem grau ≥ 3. Se não conseguirmos decompor $c(\lambda)$ em factores (nestas condições não podemos aplicar a lei do anulamento do produto!), podemos ainda tentar o seguinte resultado:

"Se um polinómio $p(x)$ tiver raízes inteiras, então elas são divisores do termo independente de $p(x)$."

- **Observação.** No caso de matrizes 3×3, é conveniente desenvolver o determinante $\det(A - \lambda I)$ de modo a escrever o polinómio característico na forma
$$c(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 + b\lambda + c).$$
Aplicando a lei do anulamento do produto, facilmente se podem calcular as 3 raízes do polinómio. Já no caso em que o desenvolvimento do determinante leva ao polinómio característico escrito na forma
$$c(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d,$$
a situação é mais complicada. No entanto, se o polinómio tiver alguma raiz inteira, pode-se usar a observação anterior.

- **Definições.**
  (i) Seja $c(\lambda)$ o polinómio característico de A. Diz-se que λ é um valor próprio de A com *multiplicidade algébrica* k se λ é uma raíz de $c(\lambda)$ com multiplicidade k; escreve-se $ma(\lambda) = k$.
  (ii) λ diz-se um valor próprio de *multiplicidade geométrica* l se $\dim E(\lambda) = l$; escreve-se $mg(\lambda) = l$.

- **Teorema.** $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

- **Exercício 4.2.3** Verificar este teorema para a matriz do exercício anterior.

4.3 Propriedades dos valores próprios

- **Propriedade 1.** Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se existir uma matriz P invertível tal que $A = PBP^{-1}$ então A e B têm o mesmo polinómio característico (e portanto os mesmo valores próprios).

  Demonstração. Sejam $c_A(\lambda)$ o polinómio característico de A e $c_B(\lambda)$ o polinómio característico de B. O teorema resulta das seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
c_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\, I) \\
&= \det(PBP^{-1} - \lambda\, I) \\
&= \det(PBP^{-1} - \lambda\, PP^{-1}) \\
&= \det\Big(P(B - \lambda\, I)P^{-1}\Big) \\
&= \det(P)\det(B - \lambda\, I)\det(P^{-1}) \\
&= \det(P)(\det(P))^{-1}\det(B - \lambda\, I) \\
&= \det(B - \lambda\, I) \\
&= c_B(\lambda) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- **Propriedade 2.** Seja A uma matriz $n \times n$. Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são os valores próprios de A (não necessariamente distintos) então

$$\det(A) = \lambda_1\, \lambda_2 ... \lambda_n$$

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 \,+\, \lambda_2 \,+ ... +\, \lambda_n\,,$$

  onde $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço de A que é a soma dos elementos da diagonal de A.

- **Exercício 4.3.1** Verifique a Propriedade 2 para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- **Propriedade 3.** Uma matriz A é invertível se e só se os seus valores próprios são todos não nulos.

  Demonstração. Como o determinante é o produto dos valores próprios, podemos dizer que $\det(A) \neq 0$ se e só se todos os valores próprios de A forem não nulos. Como A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$, fica demonstrado o resultado. $\blacksquare$

- **Propriedade 4.** As matrizes A e A^T têm o mesmo polinómio característico.

Sejam $c_A(\lambda)$ o polinómio característico de A e $c_{A^\top}(\lambda)$ o polinómio característico de $A^\top$. O teorema resulta das seguintes identidades:

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left((A - \lambda I)^\top\right) \\ &= \det(A^\top - \lambda I) \\ &= c_{A^\top}(\lambda) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- **Propriedade 5 (Teorema de Cayley-Hamilton).** Se

$$c(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

é polinómio característico de A, então

$$c(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = 0\,.$$

- **Aplicações do teorema de Cayley-Hamilton: cálculo de A^k e A^{-1}**

Basicamente, o teorema de Cayley-Hamilton diz que uma matriz quadrada anula o seu polinómio característico. Uma das implicações mais importantes deste teorema é a possibilidade de escrever uma *potência* A^k, onde k é um inteiro positivo, como uma combinação linear de potências de A com expoente inferior a n. Por exemplo, relativamente à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico é

$$c(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

o teorema garante que

$$A^2 - 4A + 4I = 0,$$

isto é,

$$A^2 = 4A - 4I.$$

Daqui podemos concluir, após alguns cálculos, que

$$\begin{aligned} A^3 &= 12A - 16I \\ A^4 &= 32A - 48I, \end{aligned}$$

podendo-se obter expressões análogas para qualquer A^k.

Outra aplicação, é o cálculo da matriz *inversa* A^{-1}. No caso da matriz A dada acima, sabe-se que o seu polinómio característico é

$$A^2 - 4A + 4I = 0,$$

isto é,

$$A^2 - 4A = -4I \Leftrightarrow A(A-4I) = -4I \Leftrightarrow A\left(\frac{A-4I}{-4}\right) = I,$$

donde se conclui que

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 4I).$$

4.4 Diagonalização de matrizes

- Chama-se matriz diagonal a uma matriz quadrada cujas entradas fora da diagonal são todas nulas.

- **Definição.** Diz-se que uma matriz $n \times n$ é diagonalizável se existirem matrizes D diagonal, e P invertível, tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

- **Exemplo.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
  A é diagonalizavel, porque $A = PDP^{-1}$ (basta fazer os cálculos!)

- **Como averiguar se A é diagonalizável?**

  Teorema 1. Seja A uma matriz $n \times n$. Se A tem n valores próprios distintos então A é diagonalizável.

  Teorema 2. Seja A uma matriz $n \times n$. A matriz A é diagonalizavel se e só se, para cada valor próprio de A, as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem: $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

- **Se A for diagonalizável, como determinar P e D?**

  1º) Determinar uma base para cada espaço próprio de A; denotemos os vectores que constituem essas bases (num total de n) por $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$.

2º) Formar a matriz P de colunas $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ e $D = \text{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n)$, onde $\mathbf{p}_i$ é um vector próprio associado ao valor próprio λ_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Se P e D forem determinadas conforme indicado nos passos 1º) e 2º) então

$$A = PDP^{-1}.$$

• **Exercício 4.4.1** Averiguar se $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e, em caso afirmativo, determinar P e D na decomposição $A = PDP^{-1}$.

4.5 Exercícios Resolvidos

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

   (b) Determine os subespaços próprios da matriz A.

   (c) Averigue se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, determine uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \det(A - \lambda\, I) \\ &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(\lambda + 1) \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 2(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)\,[-\lambda(\lambda - 1) + 2] \\ &= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) \end{aligned}$$

Fazendo $c(\lambda) = 0$, obtemos

$$\lambda + 1 = 0 \;\vee\; -\lambda^2 + \lambda + 2 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda = -1 \;\vee\; \lambda = -1 \;\vee\; \lambda = 2,$$

donde se conclui que os valores próprios de A são $\{-1,\, -1,\, 2\}$, em que

$$ma(-1) = 2, \quad ma(2) = 1.$$

(b) O subespaço próprio associado ao valor próprio -1 é

$$E(-1) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 :\; (A + \, I)\mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Para conhecermos os vectores de $E(-1)$ de forma explícita, é necessário resolver o sistema homogéneo, possível e indeterminado,

$$(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

$$(A+I)\mathbf{u}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u_1+u_2+u_3 & = & 0 \\ u_1+u_2+u_3 & = & 0 \\ u_1+u_2+u_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Vamos resolver este sistema usando as técnicas estudadas anteriormente:

$$[A|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_1+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Podemos observar que há $n-\mathrm{car}(A)=3-1=2$ variáveis livres, que são $u_2=\alpha$ e $u_3=\beta$. Passando a matriz em forma de escada ao sistema correspondente e resolvendo, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & -\alpha-\beta \\ u_2 & = & \alpha \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}) \\ u_3 & = & \beta \end{array} \right. .$$

Como

$$\begin{array}{rcl} (u_1,u_2,u_3) & = & (-\alpha-\beta,\alpha,\beta) \\ & = & (-\alpha,\alpha,0)+(-\beta,0,\beta) \\ & = & \alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \end{array}$$

temos

$$E(-1)=\langle\,(-1,1,0),\ (-1,0,1)\,\rangle.$$

Para o valor próprio $\lambda=2$, temos

$$E(2)=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3:\ (A-2\,I)\mathbf{u}=\mathbf{0}\}.$$

$$(A-2\,I)\mathbf{u}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2u_1+u_2+u_3 & = & 0 \\ u_1-2u_2+u_3 & = & 0 \\ u_1+u_2-2u_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Calculando a forma de escada da matriz completa

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Passando ao sistema correspondente, temos

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 - 2u_2 + u_3 & = & 0 \\ -u_2 + u_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & \alpha \\ u_2 & = & \alpha \\ u_3 & = & \alpha \end{array}\right. \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad .$$

Como

$$\begin{array}{rcl} (u_1, u_2, u_3) & = & (\alpha, \alpha, \alpha) \\ & = & \alpha(1,1,1), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \end{array}$$

temos

$$E(2) = \langle\, (1,1,1)\, \rangle.$$

(c) Como

$$mg(-1) = \dim E(-1) = 2 = ma(-1)$$

e

$$mg(2) = \dim E(2) = 1 = ma(2),$$

a matriz A é diagonalizável. As matrizes P e D que verificam a relação $P^{-1}AP = D$ são

$$P = \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

e

$$D = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Recorde-se que as colunas de P são os vectores das bases dos subespaços próprios e que D é uma matriz diagonal, sendo a sua diagonal constituída pelos valores próprios de A.

4.6 Exercícios

1. Para cada matriz, encontre todos os valores próprios e os respectivos espaços próprios:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Indique a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

2. Para cada matriz do exercício anterior, verifique que o traço da matriz é a soma dos valores próprios e que o determinante é o produto dos valores próprios (tendo em conta a multiplicidade algébrica de cada um).

3. Determine os valores próprios das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

4. Mostre que:

   (a) Os valores próprios de um matriz triangular são os elementos da diagonal da matriz.

   (b) Se A é não singular e λ é um valor próprio de A então $1/\lambda$ é um valor próprio de A^{-1}.

   (c) Se $B = S^{-1}AS$ e $\mathbf{u}$ é um vector próprio de B associado ao valor próprio λ, então $S\mathbf{u}$ é um vector próprio de A associado a λ.

5. Duas matrizes $n \times n$, A e B, dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Supondo que A e B são semelhantes, mostre que:

   (a) A^T e B^T também são semelhantes;

   (b) A^3 e B^3 também são semelhantes;

   (c) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$;

   (d) $\det(A) = \det(B)$.

6. Mostre que $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

7. Averigue se as matrizes do exercício 1 são diagonalizáveis e, em caso afirmativo, determine duas matrizes diagonalizantes.

8. Determine $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ e μ de modo que os vectores $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ sejam vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}$.

9. Uma matriz quadrada com valores próprios distintos é diagonalizável. Mostre que o recíproco não é verdadeiro, recorrendo à matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10. (a) Mostrar que se λ é valor próprio de A então λ^k é valor próprio de A^k.
    (b) Seja A uma matriz tal que $A^k = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Verifique que A possui apenas o valor próprio zero.

11. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Verifique que 1 é valor próprio de A associado ao vector próprio $(-1, 1, -1)$. Além do valor próprio 1, a matriz A possui o valor próprio 2 com multiplicidade algébrica igual a 2. Indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal, caso tal matriz exista.

12. Para cada uma das seguintes matrizes use a factorização SDS^{-1} para calcular A^6.
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

13. Considere o polinómio $p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + 4$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
    (a) Verifique que $p(A) = 0$;
    (b) Determine a equação característica de A;
    (c) Mostre que A satisfaz a sua equação característica.
    (d) Usando o teorema de Cayley-Hamilton, calcule A^3 e A^{-1}.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
    (a) Escreva o polinómio característico e determine os valores próprios de A;
    (b) Determine os espaços próprios de A e determine uma base para cada um deles.
    (c) Calcule, aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, $-A^4 + 6A^3 - 11A^2 + 4I$.
    (d) Usando o teorema de Cayley-Hamilton, calcule A^{-1}.