Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

25 de Novembro de 2015 Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

1. Considere a função $f(x) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\cos(2x - \pi)$.

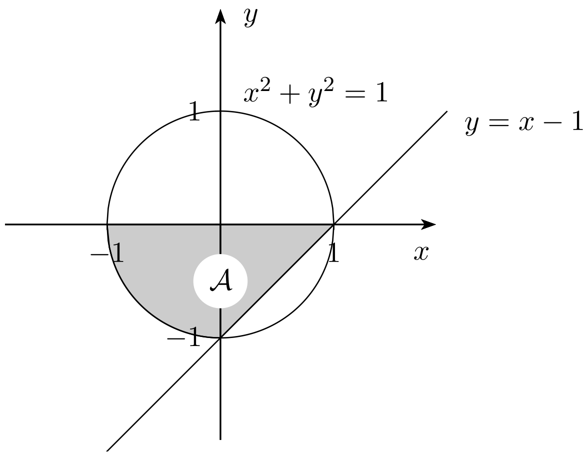
[1.0 *val.*] (a) Calcule o valor de $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

[0.75 *val.*] (b) Resolva a equação $f(x) = 0$.

[1.5 *val.*] (c) Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 *val.*] (d) Resolva, caso seja possível, a equação $\pi - \arcsin(x-1) = 0$.

2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \ \wedge \ f(y) \leq x \leq g(y)\}$.

[1.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{A}$.

[2.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução que se obtêm a partir da rotação da região $\mathcal{A}$ em torno

i. do eixo Ox;

ii. do eixo Oy.

3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \geq -x^2 \ \wedge \ y \leq e^{-x} \ \wedge \ -1 \leq x \leq 0\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área de $\mathcal{B}$

i) em função da variável x;

ii) em função da variável y.

[1.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

4. Considere os seguintes integrais:

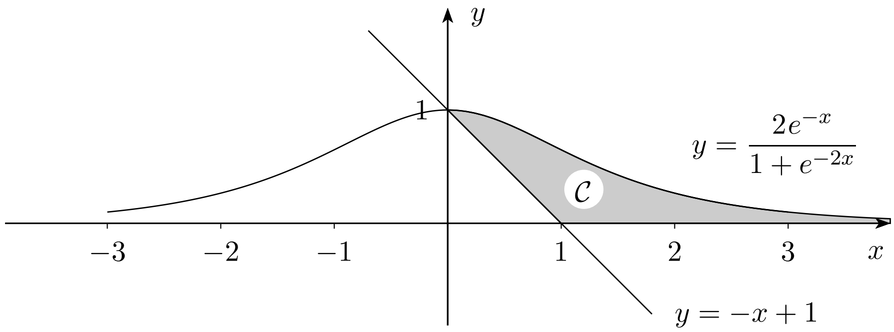
$$\text{(i)} \int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx\,; \qquad \text{(ii)} \int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx\,; \qquad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx\,.$$

[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, qual dos integrais é definido e determine o seu valor.

[1.25 *val.*] (b) Identifique, justificando, qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

[1.0 *val.*] (c) O que pode concluir da natureza do integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$? Justifique a sua resposta.

5. Considere a região $\mathcal{C}$ representada na figura seguinte:

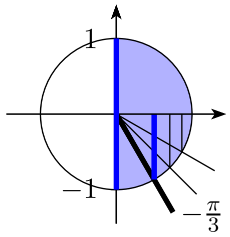


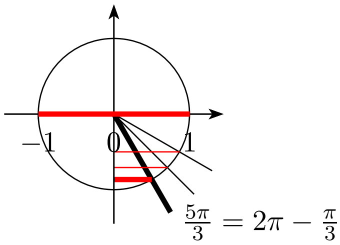
[1.5 *val.*] (a) Usando integrais, identifique, sem calcular, uma expressão simplificada que lhe permita determinar a área da região $\mathcal{C}$.

[1.25 *val.*] (b) O que pode concluir da medida obtida na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta.

1. (a) Tendo em conta o contra-domínio da função arco seno, tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{6}{\pi}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{8\pi}{3}-\pi\right) \\ &= \frac{6}{\pi}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

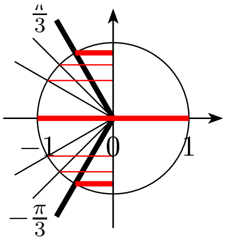




$$\begin{aligned} &= \frac{6}{\pi}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 4\,\frac{1}{2} \\ &= -2-2 \\ &= -4\,. \end{aligned}$$

(b) Tendo em conta o resultado de $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ já calculado na alínea (a) e o domínio da função arco seno, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{6}{\pi}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\cos(2x-\pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; -2-4\cos(2x-\pi) = 02mm \\ &\Leftrightarrow\; -4\cos(2x-\pi) = 2 \\ &\Leftrightarrow\; \cos(2x-\pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\; 2x-\pi = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \;\vee\; 2x-\pi = -\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow\; 2x = \frac{5\pi}{3} + k\,2\pi \;\vee\; 2x = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{5\pi}{6} + k\,\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xleftrightarrow{\quad f \quad} & ? \\ ? = x & \xleftrightarrow{\quad f^{-1} \quad} & y = -2-4\cos(2x-\pi) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir da restrição principal da função cosseno, pelo que

$D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \le 2x-\pi \le \pi\} = \{x \in \mathbb{R}:\ \pi \le 2x \le 2\pi\} = \{x \in \mathbb{R}:\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\} = \left[\frac{\pi}{2},\,\pi\right]$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$
\begin{aligned}
y = -2-4\cos(2x-\pi) \quad &\Leftrightarrow \quad y+2 = -4\cos(2x-\pi)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y+2}{-4} = \cos(2x-\pi)\\
&\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arccos\left(\frac{y+2}{-4}\right) = 2x-\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \pi+\arccos\left(\frac{y+2}{-4}\right) = 2x\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{y+2}{-4}\right) = x\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e o domínio da função arco cosseno, tem-se

$$
\begin{aligned}
CD_f = {\color{red}D_{f^{-1}}} \quad &= \quad \{y\in\mathbb{R}:\ -1\le \tfrac{y+2}{-4}\le 1\} = \{y\in\mathbb{R}:\ 4\ge y+2\ge -4\}\\
&= \quad \{y\in\mathbb{R}:\ 2\ge y\ge -6\} = [-6,\,2]
\end{aligned}
$$

pelo que

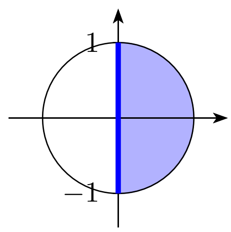
$$
{\color{red}\left[\frac{\pi}{2},\,\pi\right]} \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} \quad {\color{red}[-6,\,2]}
$$

$$
{\color{red}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{y+2}{-4}\right)} = x \quad \longleftrightarrow \quad y = -2-4\cos(2x-\pi)
$$

(d) Como

$\pi-\arcsin(x-1) = 0 \Leftrightarrow \pi = \arcsin(x-1)\,,$

mas o contradomínio da função arco seno é dado por $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$,



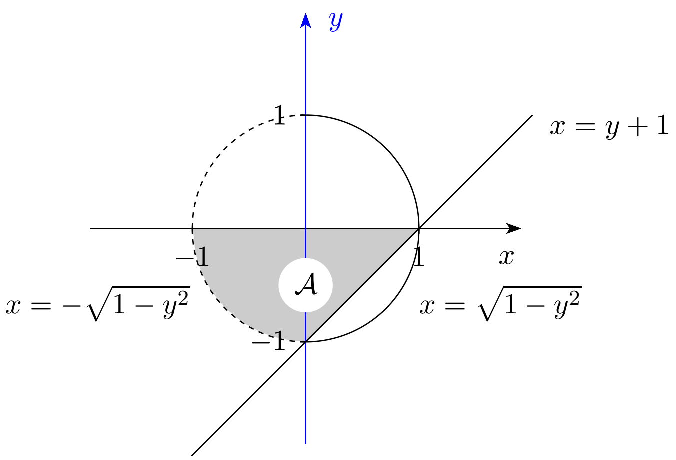
então a equação é impossível.

2. (a) Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de y, pelas seguintes expressões:

$$i)\quad x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1-y^2 \Leftrightarrow= x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$ii)\quad y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$$

Assim, a região $\mathcal{A}$ é graficamente definida por



pelo que

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0 \ \wedge\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y+1\}\,.$$

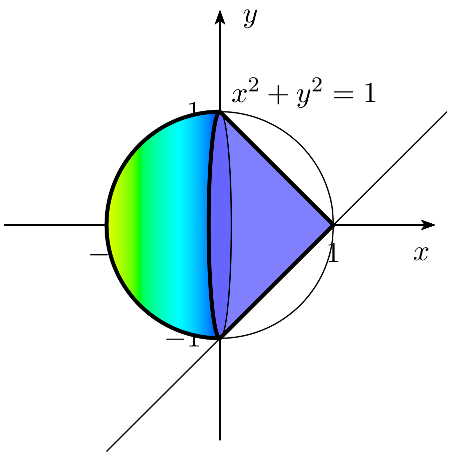
(b) Tendo em conta a alínea (a) tem-se imediatamente

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^{0} \left(y+1 - \left(-\sqrt{1-y^2}\,\right)\right) dy \\ &= \int_{0}^{1} \left(y+1+\sqrt{1-y^2}\right) dy \end{aligned}$$

Alternativa: A área também pode ser calculada recorrendo a x *como variável independente. Nesse caso, tem-se*

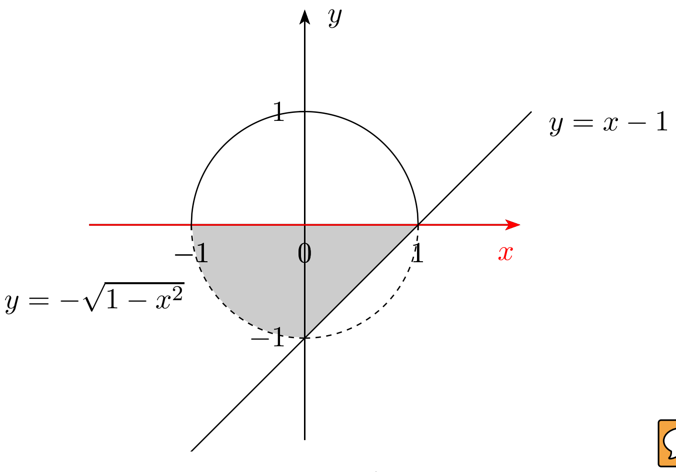
$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^{0} 0 - \left(-\sqrt{1-x^2}\,\right) dx + \int_{0}^{1} 0 - (x-1)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,)\, dx - \int_{0}^{1} (x-1)\, dx\,. \end{aligned}$$

(c) i. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Ox, é composto por uma semi-esfera e por um cone, conforme representado na figura seguinte:

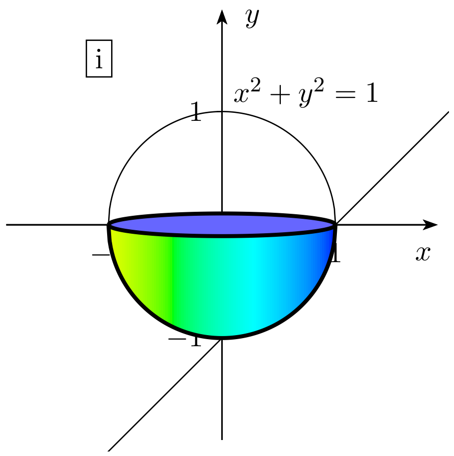


Recorrendo a integrais definidos, o volume do sólido anterior é dado por

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \int_{-1}^{0} \pi \Big(\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{R_{\text{ext}}} \Big)^2 dx + \int_{0}^{1} \pi\, (\underbrace{x-1}_{R_{\text{ext}}})^2\, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{0} (1-x^2)\, dx + \pi \int_{0}^{1} (x-1)^2\, dx\,. \end{aligned}$$

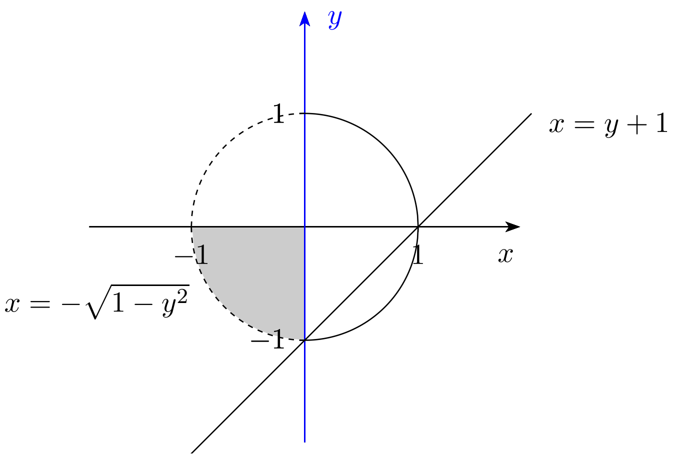


ii. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Ox, é uma semi-esfera, conforme representado na figura seguinte:

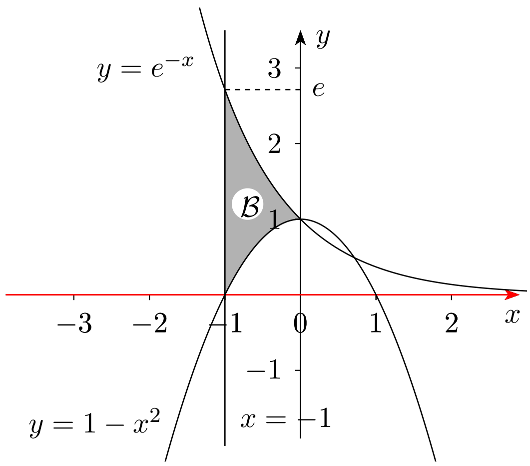


Recorrendo a integrais definidos, o volume do sólido anterior é dado por

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \int_{-1}^{0} \pi \left(\underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{R_{\text{ext}}} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^{0} \left(1 - y^2\right) dy \,. \end{aligned}$$



3. (a) A representação gráfica da região $\mathcal{B}$ é a seguinte:



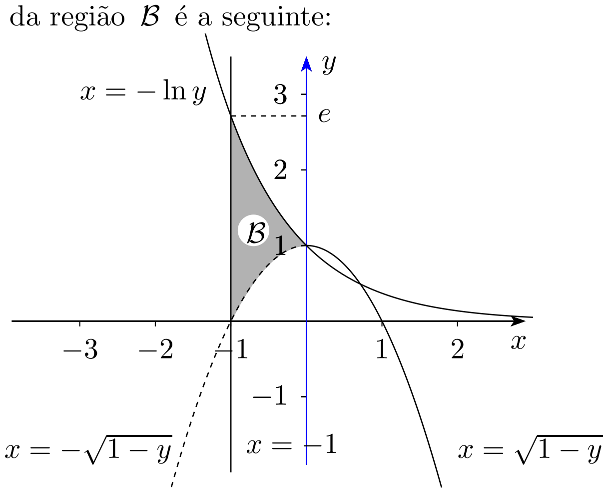
(b) i) Tendo em conta a alínea anterior, tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{B}) = \int_{-1}^{0} e^{-x} - (1 - x^2)\, dx \,.$$

ii) Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de y, pelas seguintes expressões:

$$y \;=\; e^{-x} \;\Leftrightarrow\; \ln y \;=\; -x \;\Leftrightarrow =\; x = -\ln y$$
$$y \;=\; 1-x^2 \;\Leftrightarrow\; y-1 \;=\; -x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 \;=\; 1-y \;\Leftrightarrow\; x \;=\; \sqrt{1-y}$$

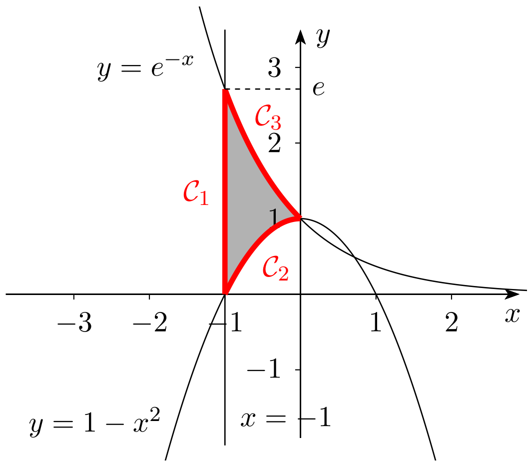
Atendendo à representação
A representação gráfica da região $\mathcal{B}$ é a seguinte:



tem-se então, em função de y,

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{B}) \;&=\; \int_0^1 -\sqrt{1-y} - (-1)\, dy + \int_1^e -\ln y - (-1)\, dy \\ &=\; \int_0^1 \big(-\sqrt{1-y}+1\big)\, dy + \int_1^e \big(1-\ln y\big)\, dy\,.\end{aligned}$$

(c) O perímetro da região $\mathcal{B}$ é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes três curvas:



$$\begin{aligned}\text{Perímetro}(\mathcal{B}) \;&=\; \text{Comprimento}(\mathcal{C}_1) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_2) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_3) \\ &=\; e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\Big(\big(e^{-x}\big)'\Big)^2}\, dx \;+\; \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\Big(\big(1-x^2\big)'\Big)^2}\, dx \\ &=\; e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\big(-e^{-x}\big)^2}\, dx \;+\; \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\big(-2x\big)^2}\, dx \\ &=\; e + \int_{-1}^{0} \sqrt{1+e^{-2x}}\, dx \;+\; \int_{-1}^{0} \sqrt{1+4x^2}\, dx\,.\end{aligned}$$

4. Comecemos por determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2-1} \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Note-se ainda que a função é contínua em D_f , por ser definida pelo quociente de funções contínuas (uma função constante e um radical).

(a) O integral (ii) é definido porque o intervalo de integração $[2,3]$ é um subconjunto de D_f e portanto $f(x)$ está definida e é contínua em $[2,3]$. Assim, recorrendo ao Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^3 2x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_2^3 \\ &= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8}^2 - \sqrt[3]{9}\right) = \frac{3}{4}\left(4 - \sqrt[3]{9}\right), \end{aligned}$$

(b) O integral (i) é impróprio de 2ª espécie, porque $f(x)$ está definida e é continua em $[-3, -1[$, mas é ilimitada em $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\overbrace{x}^{\to -1}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-1}}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dy &= \lim_{B\to -1^-} \int_{-3}^{B} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx = \lim_{B\to -1^-} \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right]_{-3}^{B} \\ &= \lim_{B\to -1^-} \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(B^2-1)^2} - 4\right) = -3, \end{aligned}$$

pelo que o integral é convergente.

(c) Uma vez que

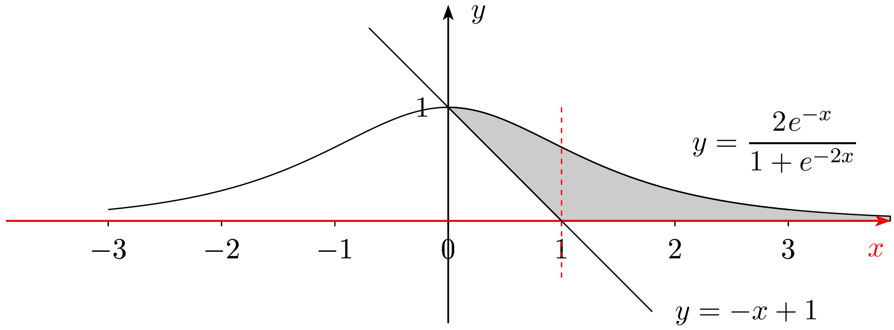
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx}_{1^{\text{a}} \text{ espécie}} + \underbrace{\int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx}_{2^{\text{a}} \text{ espécie}}$$

então o integral é de 3ª espécie (misto). Como o integral de 2ª espécie é convergente (alínea a), então é necessário determinar a natureza do integral de 1ª espécie.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dy &= \lim_{A\to -infty} \int_{A}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx = \lim_{A\to -\infty} \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right]_{A}^{-3} \\ &= \lim_{B\to -\infty} \frac{3}{4}\left(4 - \sqrt[3]{(A^2-1)^2}\right) = -\infty, \end{aligned}$$

pelo que o integral de 1ª espécie é divergente e portanto o integral de 3ª espécie também é divergente.

5. (a) Tendo em conta a representação dada e usando x como variável independente, tem-se



$$\text{Área}(\mathcal{C}) \;=\; \underbrace{\int_0^1 \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} - (-x+1)\,dx}_{\text{integral definido}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx}_{\text{integral impróprio}}\,.$$

(b) A área de $\mathcal{C}$ só é finita se o integral impróprio for convergente. Como

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx &= \lim_{B\to+\infty} -2\int_1^B \frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} -2\Big[\arctan(e^{-x})\Big]_1^B \\ &= \lim_{B\to+\infty} -2\Big(\underbrace{\arctan(\underbrace{e^{-B}}_{\to 0})}_{\to 0} + 2\arctan(e^{-1})\Big) = 2\arctan(e^{-1})\,,\end{aligned}$$

então o integral impróprio é convergente e portanto a área de $\mathcal{C}$ é finita.