

Primitivação de funções trigonométricas - Tabelas, páginas 6 e 7

- Tabelas de Matemática - página 6: I. **potências**
- Tabelas de Matemática - página 7: II. **produtos** de potências
- Tabelas de Matemática - página 7: III. produtos de **senos e cossenos com argumentos diferentes**

B. Compreensão

Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas.

1) $\int \cos^3(2x) \sin^2(2x) dx;$

4) $\int x \cos^2(x^2) dx;$

C. Aplicação

Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas.

5) $\int \sin(5x - 1) \cos(3x + 1) dx;$

Primitivação de funções racionais - Tabelas de Matemática, página 8

A. Conhecimento

Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções racionais.

Caso 4-(4) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} dx;$

Sugestão de resolução:

Primitivação de funções trigonométricas

B. Compreensão

- 1) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R2, R6 e R7), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Neste caso a função é definida por um **produto** de potências de seno e cosseno e o **expoente do cosseno é ímpar**, pelo que vamos aplicar a técnica descrita no caso II.(2) da página 7 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned} \int \cos^3(2x) \sin^2(2x) &= \int \cos(2x) \underbrace{\cos^2(2x)}_{= 1 - \sin^2(2x)} \sin^2(2x) dx \\ &= \int \cos(2x) (1 - \sin^2(2x)) \sin^2(2x) dx \\ &= \int \cos(2x) (\sin^2(2x) - \sin^4(2x)) dx \\ &= \int (\cos(2x) \sin^2(2x) - \cos(2x) \sin^4(2x)) dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) \sin^2(2x) dx}_{R2} - \underbrace{\frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) \sin^4(2x) dx}_{R2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^3(2x)}{3} - \frac{1}{2} \frac{\sin^5(2x)}{5} + c \\ &= \frac{1}{6} \sin^3(2x) - \frac{1}{10} \sin^5(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- 4) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R2 e R6), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Neste caso a função é definida por uma **potência** de cosseno, de **exponente par**, pelo que vamos aplicar a técnica descrita no caso I.(2) da página 6 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int x \underbrace{\cos^2(x^2)}_{= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x^2))} dx &= \int x \frac{1}{2} (1 + \cos(2x^2)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (x + x \cos(2x^2)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \underbrace{x^1 \cdot 1}_{R2} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \underbrace{2x \cos(2x^2)}_{R6} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x^2) + c \\
 &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \sin(2x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

C. Aplicação

- 5) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (por exemplo, a regra R2 não é aplicável porque os argumentos do seno e do cosseno são diferentes), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Como a função é definida por um **produto de seno e cosseno com argumentos diferentes**, vamos aplicar a técnica descrita no caso III da página 7 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int \sin(5x - 1) \cos(3x + 1) dx &= \int \frac{1}{2} \left(\cos(5x - 1 + 3x + 1) + \cos(5x - 1 - (3x + 1)) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\cos(8x) + \cos(2x - 2)) dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{8} \int \underbrace{8 \cos(8x)}_{R6} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \underbrace{2 \cos(2x - 2)}_{R6} dx \\
 &= \frac{1}{16} \sin(8x) + \frac{1}{4} \sin(2x - 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Primitivação de funções racionais - Tabelas de Matemática, página 8

A. Conhecimento

Caso 4-(4) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R5, R2 e R19), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções racionais (quocientes de polinómios). Como a fracção é imprópria (grau do numerador = grau do denominador = 2), começamos por efectuar a divisão dos polinómios. Assim,

$$\begin{array}{r}
 x^2 \qquad \qquad \qquad +1 \\
 -(x^2 \qquad -2x \qquad +1) \\
 \hline
 2x
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

e então

$$\underbrace{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{2x}{x^2 - 2x + 1}}_{\text{fracção própria}}.$$

A fracção própria resultante da divisão também não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Começamos por isso por determinar a factorização do denominador. Como

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 0}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1.$$

então

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1).$$

A raiz $x = 1$ de multiplicidade dois, determina duas fracções simples da decomposição, pelo que

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{A}{\underbrace{x-1}_{\cdot(x-1)}} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}.$$

Substituindo, **na igualdade definida pelos numeradores** da primeira e da última fracções, x por $x = 1$ (a raiz do denominador!) e por $x = 0$ (por exemplo), obtemos um sistema linear de duas equações e duas incógnitas que permite determinar os valores de A e B :

$$\begin{array}{c|c} & 2x = A(x-1)+B \\ \hline x=1 & 2 = 0+B \\ x=0 & 0 = -A+B \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=B=2 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2},$$

e consequentemente a fracção racional imprópria tem decomposição definida por

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{2x}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção própria}} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

O cálculo da primitiva pode agora ser realizado recorrendo à decomposição anterior e às regras de primitivação imediata.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2-2x+1} dx &= \int \left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \int \underbrace{1}_{R1} dx + 2 \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5} dx + 2 \int \underbrace{(x-1)^{-2} \cdot 1}_{R2} dx \\ &= x + 2 \ln|x-1| + 2 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c = x + 2 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$