- Matriz Identidade

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propriedades

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

$(A^T)^T = A$

- Matriz transposta

$A^T = \overbrace{m \times n}^{A} = \overbrace{n \times m}^{A^T}$

Colunas passam a linhas

- Matriz simétrica

$A^T = A$

- Matriz anti-simétrica

$A^T = -A$

- Matriz Inversa

A^{-1}

- Matriz nil potente

$A^K = 0$

- Matriz ortogonal

$A^T \times A = I$

Rígido

- Matriz Permutável

$AX = XA = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right)$

- Outras Propriedades

$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B)$

$2AB = 2(A \cdot B)$

$(AB)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B$

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A^T \cdot I = A^T$

$A^2_{m \times m} = I \rightarrow A^3_{m \times m} = A_{m \times m}$

- Eliminação de Gauss - Forma de Escada; Característica; Forma Reduzida

- Operações Elementares
  - Trocar 1 linha por outra
  - Multiplicar por um escalar $\neq 0$
  - Adicionar um múltiplo escalar de outra linha

- Nota

Abaixo do pivot têm que ser tudo $\emptyset$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Forma Reduzida
  - Todos os pivot tem que ser 1
  - Pivot é a única entrada não nula

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Característica

Car(A) = nº de linhas não nulas = nº Pivôs

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Car}(2) = 2$$

P.V.

• Sistema de equações Lineares ($Ax = b$)

Sistemas

- **Possíveis**
  - ~~determinados~~ **determinados**
    - 1 solução
    - $Car(A|B) = Car(A) =$ Nº incógnitas/colunas
  - **Indeterminados**
    - Infinitas soluções
    - $Car(A|b) = Car(A) <$ nº de incógnitas/colunas
- **Impossíveis**
  - sem solução
  - $Car(A|B) > Car(A)$

Nota:
~~sistema~~ sistema homogeneo
$Ax = \emptyset$ (sempre solução)

• Resolução de um sistema Linear

Formula $= [A|b]$, ou seja

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

• Para resolver e obter soluções, faz-se a matriz escada

• matriz Inversa - método de Eliminação de GAUSS - Jordan

$$A = [A \mid I] \xrightarrow[\text{Eliminação ascendente}]{\text{Eliminação descendente } +} [I \mid A^{-1}]$$

↑ matriz quadrada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nota:
se na Escada a $Car(A)$ não der o máximo pivôs, então não dá para Inverter!!

$\boxed{A.B = B.A = I}$ → se com B dá a condição, então A é invertível

- se B e C são Inversas de A, então $B = C$
  - matriz Invertível só admite uma inversa

$A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$ ➡ $BA = I \Leftrightarrow B = A^{-1}$

Teoremas: (matrizes invertíveis)

$(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ / $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad n \in \mathbb{N}$

$(A^{-1})^{-1} = A$ / $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- matrizes em Bloco

Ex.:

$C = \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline B & \emptyset \end{array}\right] \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix}$

$CD = \begin{bmatrix} I1 + AA \\ B1 + \emptyset A \end{bmatrix}$

Situações a ter em Conta
- Ao colocar uma Constante em evidência adicionar I
- Só se podem adicionar matrizes nas pontas
- $A \times I = A$

- Determinantes
  - $1\times1 \rightarrow A = [a]$, $\det(A) = a$
  - $2\times2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$
  - $n \geq 2 \rightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$
    ↳ Complemento/Co-fator
  - $3\times3 \longrightarrow$ Regra de Sarrus

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} = a.e.i + d.h.c + g.b.f - c.e.g - f.h.a - i.b.d$

- $n \times n$ ⟶ Teorema La Place

Ex.: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13}$ *

Notas
- Fixar uma Linha (Com ≠ 0)
- As restantes linhas formam uma matriz menor e através desta desenvolver o Co-Fator

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-1) \cdot (-1) = 1$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 \times 1 - 1 \cdot (-1)) = -1$

* $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \emptyset = \emptyset$

Nota:

Quando Existirem poucos Zeros usar a Eliminação de Gauss

Teoremas (Pág 29)

1° Linha/Coluna Com Zeros ⇒ det = 0

2° trocar Linhas/Colunas ⇒ det muda de sinal

3° multiplica det. por K ⇒ multiplica cada escalar

4° duas Linhas/Colunas = s ⇒ det = ∅

5° soma de multiplos escalares de Linha/Coluna = C… det = 0

6° (…)

- Determinantes - Propriedades
  - $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
  - A invertível se $\det(A) \neq 0$
  - A é invertível então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
  - $\det(A) = \det(A^T)$
  - $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
  - det triangular (sup/inf.) = Produto Diagonal

Obs.: $\det(A \pm B) \neq \det(A) \pm \det(B)$

- $\det(2A) \neq 2\det(B)$

A é invertível se $Car(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq \emptyset$

- Matriz adjunta
  - Transposta da matriz co-fatores $adj(A) = Cof(A)^T$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Propriedades:

1º ~~adjunta~~ $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I$

2º $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$

- Regra de Cramer
  - sistema linear ($Ax = b$) Ex.: $det(A) = 6$

trocar cada coluna por b, em cada troca calcular det

$$x_i = \frac{det(A_i \mid b)}{det(A)}$$

- Codificação de mensagens

Ex.: S E N D ␣ M O N E Y

5 8 10 21 7 2 10 8 3 (msg final 3x3)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 21 & 10 \\ 8 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$C \cdot m_I = m_F \Leftrightarrow C^{-1} C \cdot m_I = C^{-1} \cdot m_F \Leftrightarrow m_I = C^{-1} \cdot m_F$