Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Exame de **Álgebra Linear** (Época Normal)

Engenharia Informática e Curso Europeu de Informática

27 de Janeiro de 2016 Duração: 2h30m

Nota: Deve justificar convenientemente todas as respostas.

---

1. Considere o número complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$. Escreva-o na forma polar (ou trigonométrica) e, de seguida, usando as fórmulas de De Moivre, calcule z^3, simplificando o mais possível o resultado.

2. Sendo c um parâmetro real, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique, justificando, duas maneiras de ordenar as matrizes A^T, A e B por forma a que o produto destas três matrizes fique definido. Não é necessário calcular os produtos.

   (b) Discuta o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de acordo com o valor do parâmetro real c.

   (c) Supondo que $c = 2$, use o método de eliminação de Gauss para classificar e determinar o conjunto solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (d) Sem usar a regra de Sarrus, calcule $\det(B)$.

   (e) Sem calcular explicitamente a matriz $F = -2BB^T$, calcule $\det(F)$.

   (f) Calcule a inversa de B usando um método à sua escolha.

   (g) Determine a matriz X que verifica a equação $\left(X^{-1}B\right)^{-1} = B$.

3. Sejam I a matriz identidade e O a matriz nula. Suponha que ambas são $n \times n$. Dada a matriz definida por blocos $A = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & O \end{bmatrix}$, calcule A^{23}.

4. Considere os pontos do espaço $P(1, 2, 2)$, $Q(2, -1, 0)$ e $R(1, -1, 1)$.

   (a) Calcule a área do triângulo de vértices P, Q e R.

   (b) Determine as equações cartesianas da recta que passa no ponto P e é perpendicular ao triângulo.

5. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ e $\mathbf{w} = (0, -2, 1)$.

   (a) Estude a dependência linear dos três vetores.

   (b) Se possível, escreva $\mathbf{w}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

   (c) Explique porque é que o conjunto $C = \{\mathbf{u}, \ \mathbf{v}\}$ forma uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por C.

   (d) Encontre uma condição que caracterize o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por C.

(v.s.f.f.)

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A e conclua que $\sigma(A) = \{0, 1, 3\}$. (**Sugestão:** Calcule o determinante usando o desenvolvimento de Laplace na 2ª linha).

(b) Sem calcular os espaços próprios de A, explique porque é que A é diagonalizável.

(c) Determine o espaço próprio $E(1)$.

(d) Dê exemplos de dois vetores próprios associados a $\lambda = 1$.

Cotações: **1.** 1.25 **2.**(a)1.0 (b)1.5 (c)1.5 (d)0.75 (e)0.75 (f)1.0 (g)1.0 **3.** 1.25
4.(a)1.0 (b)1.0 **5.**(a)1.0 (b)1.0 (c)0.75 (d)1.25 **6.**(a)1.5 (b)0.75 (c)1.25 (d)0.5