ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Teste 1

24-junho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Considere a função real de variável real $f(x) = arccos(-\frac{1}{2}) - arcsen(3x-1)$.

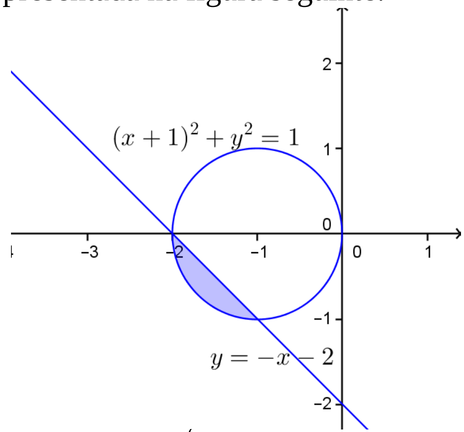
   a. Comente a afirmação $f(\frac{1}{6}) = \frac{5\pi}{6}$.

   b. Resolva a equação $2cot\,g\left(f(\frac{1}{6}) - 3x \right) + 2 = 0$.

   c. Averigue se a equação $f(x) = -\frac{\pi}{3}$ é possível. Justifique convenientemente a sua resposta.

   d. Caracterize a função inversa de f indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

2. Considere a região do plano A representada na figura seguinte:



   a. Reescreva o domínio plano na forma $E = \{(x,y) \in \Re^2 : a \le x \le b \wedge f(x) \le y \le g(x)\}$.
   b. Usando integrais indique, <u>sem calcular</u>, expressões simplificadas que lhe permitam determinar:
      i. a área da região A.
      ii. o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região A em torno do eixo das ordenadas.

3. Considere a região do plano, definida pelo seguinte conjunto

$$E = \{(x,y) \in \Re^2 : x \ge y^2 - 1 \wedge x \le (y+1)^2 \wedge x \le 1\}$$

   a. Represente geometricamente a região E.
   b. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar:
      i. a área do domínio E.
      ii. o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região E em torno do eixo das abcissas.
      iii. o perímetro total da região A

4. Considere a função real de variável real $f(x)=\begin{cases}-x+2, x\geq 1\\ -\sqrt{-x+2}, x<1\end{cases}$.

   a. Averigue a continuidade da função.

   b. Considere g uma função impar e $\int_{-1}^{2} g(x)dx=-1$. Calcule o valor do integral $\int_{1}^{2}(f+g)(x)dx$.

5. Considere a seguinte função $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$.

   a. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $2arctg(\sqrt{x-1})+\pi$ é uma primitiva de $f(x)$.

   b. Justifique convenientemente que o integral $\int_{4}^{+\infty} f(x)dx$ é impróprio de 1ª espécie. Determine a sua natureza.

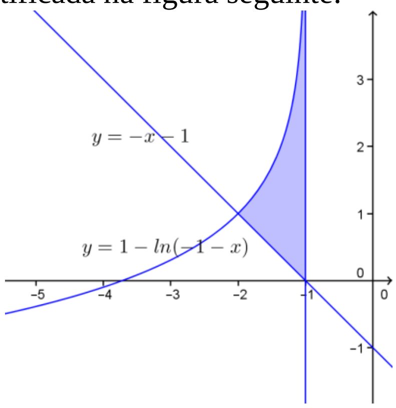
   c. Considere os seguintes integrais:

   I) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ II) $\int_{-4}^{0} f(x)dx$ III) $\int_{1}^{4} f(x)dx$

   Identifique qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie, justificando convenientemente a sua escolha. Determine a sua natureza.

   d. Justificando convenientemente a sua escolha, determine a e b por forma que a expressão $\int_{a}^{b} f(x)dx$ represente um integral impróprio misto.

6. Considere a região do plano E, identificada na figura seguinte:



   a. Usando integrais, identifique, <u>sem calcular</u>, uma expressão simplificada que lhe permita determinar a área da região E.

   b. Usando integrais, identifique, <u>sem calcular</u>, uma expressão simplificada que lhe permita determinar o volume do sólido que se obtém por rotação da região E em torno do eixo das ordenadas.

   c. Que pode concluir da existência da medida obtida na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta.

<u>Cotação</u>

1a	1b	1c	1d	2a	2bi	2bii	3a	3bi	3bii	3biii	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c
0,75	1	0,75	1,5	1	1	1	1	1,25	1,25	1	1	1,5	0,5	0,75	1,25	0,5	1	1	1

ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Teste 2

24-junho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das afirmações:

   a. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n^2+n-2}$ é uma série de Mengoli, convergente de soma igual $\frac{11}{6}$.

   b. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{2-2n}}{3^{n-1}}$ é uma série geométrica, convergente, de soma igual a $\frac{1}{11}$.

2. Determine justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

   a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log 2^n}{\sqrt{n^5}}$ b. $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)^{2n^2}$

3. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

   (i) $\left(\frac{1}{x}-y\right)+xy'=0$ (ii) $x^2y'=xy-g(x)$ (iii) $(t^2+1)x'-\frac{2xt}{t^2+1}=0$

   a. Identifique, justificando, a equação (i) quanto ao tipo e determine a sua solução geral.

   b. Determine $g(x)$ por forma a que $y=x\,ln(x)$ seja solução da equação (ii).

   c. Justifique que a equação (iii) é de variáveis separáveis e resolva-a sujeita à condição $x(0)=1$.

4. Complete a seguinte expressão em $[\,.\,]$ por forma a obter primitivas imediatas, justificando qual(is) a(s) regra(s) aplicada(s) $\int \frac{e^{2x+1}}{4+9e^{[.]}}dx$.

5. Considere a seguinte função $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

   a. Calcule a primitiva $\int f(x)dx$ utilizando para o efeito a técnica de primitivação por partes.

   b. Utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas calcule

   $$\int \frac{1}{cot\,g^2(x)co\,sec(x)}dx$$

   c. Considerando a substituição $x=2sen(t), t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, mostre que $\int f(x)dx$ se reduz à primitiva da alínea anterior e estabeleça o respetivo resultado.

6. Calcule as seguintes primitivas:

d. $\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} dx$.

e. $\int \frac{(1+e^x)(1+e^{2x})}{e^{-2x}} dx$

f. $\int \frac{2sen^3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\, sec(\sqrt{x}+1)} dx$

g. $\int \frac{1}{x} arcsen(ln(x)) dx$

Cotação

1	2	3a	3b	3c	4	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d
2	2	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

ENGENHARIA INFORMÁTICA – 1º ano /2º Semestre

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame

24-junho-2015 **Duração:2h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Considere a função real de variável real $f(x)=arccos(-\frac{1}{2})-arcsen(3x-1)$.

   a. Averigue se a equação $f(x)=-\frac{\pi}{3}$ é possível. Justifique convenientemente a sua resposta.

   b. Caracterize a função inversa de f indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

2. Considere a região do plano, definida pelo seguinte conjunto

$$E=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x\geq y^2-1\wedge x\leq(y+1)^2\wedge x\leq 1\right\}$$

   a. Represente geometricamente a região *E*.

   b. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar:

      i. a área do domínio *E*.

      ii. o perímetro total da região *A*

   c. Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região *E* em torno do eixo das abcissas.

3. Considere a seguinte função $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$.

   a. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $2arctg(\sqrt{x-1})+\pi$ é uma primitiva de $f(x)$.

   b. Considere os seguintes integrais:

   I) $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$ II) $\displaystyle\int_{-4}^0 f(x)dx$ III) $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx$

   Identifique qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie, justificando convenientemente a sua escolha. Determine a sua natureza.

4. Determine justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

   a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{n^2+n-2}$ b. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{2-2n}}{3^{n-1}}$

5. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

   a. $\left(\dfrac{1}{x}-y\right)+xy'=0$ b. $(t^2+1)x'-\dfrac{2xt}{t^2+1}=0$

6. Considere a seguinte função $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$.

   a. Utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas calcule

$$\int \frac{1}{\cot g^2(x)\cos ec(x)}dx$$

   b. Considerando a substituição $x=2sen(t), t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, mostre que $\int f(x)dx$ se reduz à primitiva da alínea anterior e estabeleça o respetivo resultado.

7. Calcule as seguintes primitivas:

   a. $\int \dfrac{2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2-3x+2)}dx$.

   b. $\int \dfrac{1}{x}arcsen(\ln x)dx$

Cotação

1a	1b	2a	2bi	2bii	2c	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b
0,75	1,25	1	1,5	1,5	1,5	0,5	2	1	1	1	1	1,5	1,5	1,5	1,5