Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática (parte 1)

4 de Fevereiro de 2015 — Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. (a) Considere a função $f(x) = \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

[1.0 *val.*] (i) Caracterize a função inversa de $f(x)$, identificando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[1.0 *val.*] (ii) Determine os zeros da função $f(x)$.

[1.0 *val.*] (iii) Calcule o valor de $\arccos\left(f(\frac{\pi}{3}) - \frac{3}{2}\right)$.

[1.0 *val.*] (b) Comente, justificando, a seguinte afirmação: "$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\pi)$."

2. Considere a região $\mathcal{A}$ do **segundo quadrante** limitada pelas curvas $x = -y^2$, $x = -1 - 3y^2$ e $x = -4$.

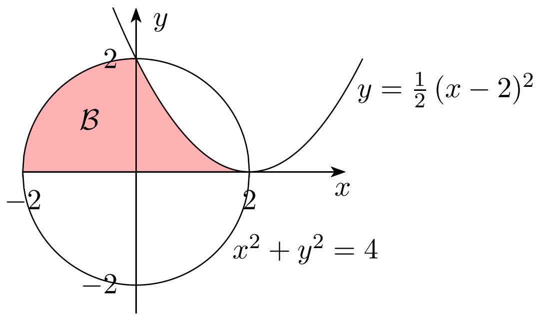
[0.75 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

[1.25 *val.*] (b) Recorrendo a cálculo integral e a x como variável independente, indique uma expressão simplificada que lhe permita a área de a área de $\mathcal{A}$.

[1.0 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

[1.0 *val.*] (d) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

3. Considere a região representada na figura seguinte.



[1.0 *val.*] (a) Represente a região $\mathcal{B}$ na forma $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \wedge f(y) \leq x \leq g(y)\right\}$.

[1.0 *val.*] (b) Tendo em conta a alínea anterior e o facto de $\text{Área}_{\odot} = \pi R^2$ indique, sem cálculos, o valor do integral $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\, dx$. Justifique.

[1.0 *val.*] (c) Calcule a área de $\mathcal{B}$.

[1.0 *val.*] (d) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox.

4. Considere os seguintes integrais:

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx\,;$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx\,;$ (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx\,.$

[1.25 *val.*] (a) Justifique que o integral (iii) é impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

[1.75 *val.*] (b) Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

[1.0 *val.*] (c) O que pode concluir sobre a natureza do integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx\,?$

5. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

(i) $x^2\,y' = y\,;$ (ii) $x\ln(x)\,y' + y = 2\ln x\,;$ (iii) $y' + x\,y = x^3 y^3\,.$

[1.5 *val.*] (a) Determine a solução explícita da equação (i) sujeita à condição inicial $y(1) = 5\,.$

[1.5 *val.*] (b) Resolva a equação (ii).

[1.0 *val.*] (c) Prove que $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é solução da equação diferencial (iii).

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática (parte 2)

4 de Fevereiro de 2015 — Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(e^{-2n}-e^{-2n-2}\right)$.

(a) Prove que a série pode ser interpretada como série de Mengoli e também como série geométrica.

(b) Prove que a série é convergente e calcule a sua soma.

[2.0 *val.*] 2. Determine, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\cos(2n\pi)}{n^2}$.

[4.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int \boxed{\cdot}\ \sec x \,\mathrm{tg}\, x\, dx$.

Complete, justificando, o espaço assinalado com $\boxed{\cdot}$ por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata (Tabelas de Matemática, página 3):

(a) Regra 1; (b) Regra 2; (c) Regra 5; (d) Regra 10; (e) Regra 12.

[2.0 *val.*] 4. Usando a técnica de primitivação por partes, determine $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}\, dx$.

[4.0 *val.*] 5. (a) Usando a técnica de primitivação de funções racionais, determine $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\, dx$.

(b) Usando uma mudança de variável adequada mostre que a primitiva $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^x}\, dx$ reduz-se ao cálculo da primitiva da alínea (a) e estabeleça o respectivo resultado.

[6.0 *val.*] 6. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \left(x+e^x\right)^2 dx$;

(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,\sqrt{\sec x}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}\, dx$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I - Engenharia Informática

4 de Fevereiro de 2015 Duração: 2h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. (a) Caracterize a função inversa de $f(x) = \operatorname{tg}\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+1$, identificando domínio, contradomínio e expressão analítica.

(b) Comente, justificando, a seguinte afirmação: "$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\pi)$."

2. Considere a região $\mathcal{A}$ do **segundo quadrante** limitada pelas curvas $x=-y^2$, $x=-1-3y^2$ e $x=-4$.

[0.75 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

[1.25 *val.*] (b) Recorrendo a cálculo integral e a x como variável independente, indique uma expressão simplificada que lhe permita a área de $\mathcal{A}$.

[1.0 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

[1.0 *val.*] (d) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

3. Considere os seguintes integrais:

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

[0.75 *val.*] (a) Identifique, justificando, quais dos integrais são impróprios.

[1.25 *val.*] (b) Determine, justificando, a natureza de um dos integrais impróprios.

4. Caracterize quanto ao tipo e resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

[1.0 *val.*] (a) $x\ln(x)\,y'+y = 2\ln x$.

[3.0 *val.*] (b) $(x^3+x^2)\,y' = (x-1)\,y$.

[2.0 *val.*] 5. Determine, justificando, a natureza das seguintes série numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3^n}{4^{n+1}}\right)$.

[6.0 *val.*] 6. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int\left(x+e^x\right)^2dx$; (b) $\displaystyle\int\operatorname{tg}^3x\,\sqrt{\sec x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^{2x}+e^x}\,dx$.