EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Resultados da Aprendizagem

Equações diferenciais

A.Conhecimento

1. Indique as variáveis independentes, as variáveis dependentes, a ordem e o grau de cada equação diferencial:

a. $\frac{d^2y}{dx^2}=x^2-3y$ b. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$ c. $\frac{d^2x}{dy^2}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=6$

2. Mostre que a função dada é solução da equação diferencial indicada.

a. $y(x)=sin(x)-1+ce^{-sin(x)}$ $(c\in\Re)$, $\frac{dy}{dx}+ycos(x)=\frac{sin(2x)}{2}$

b. $y(x)=c_1e^{5x}+c_2e^{-5x}$ $(c\in\Re)$, $\frac{d^2y}{dx^2}-25y=0$

3.Determine para cada família de funções, a função que satisfaz as condições indicadas:

a. $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}, c_1,c_2\in\Re$, $y(0)=1\wedge y'(0)=2$

b. $y(x)=c_1cost+c_2sint, c_1,c_2\in\Re$, $y(0)=1\wedge y'(0)=1$

4. Determine a solução geral de cada equação diferencial de variáveis separáveis $y'=N(x)M(y)$

a. $(1+y)-(1-x)y'=0$ b. $\frac{1}{x}-\frac{y'}{y}=0$

5. Determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais lineares de 1ªordem $y'+P(x)y=Q(x)$

a. $y'+ytgx=\sec x$ b. $y'senx+y\cos x=sen^2x$

B.Compreensão

1.Justifique que a equação diferencial:

a. $e^{x+1}dy+(e^{x+1}y-1)dx=0$ é linear de 1ª ordem.

b. $\frac{dx}{dy}\sqrt{y}-\sqrt{x}=y\sqrt{x}$ é de variáveis separáveis.

Determine o integral particular/solução particular que passa pelos respetivos pontos: $(x,y)=(0,2)$ e $(x,y)=(9,4)$.

2.Considere a equação diferencial $y'-yx=g(x)$, com $g(x)$ uma função real de variável real.

a. Dê exemplo de uma função $g(x)$ para a qual a equação seja de variáveis separáveis. Resolva a equação exemplificada.

b. Dê exemplo de uma função $g(x)$ para a qual a equação seja linear de 1ª ordem. Resolva a equação exemplificada.

c. Imponha condições iniciais para determinar soluções particulares em cada um dos casos anteriores.

C.Aplicação

Resolva as seguintes equações diferenciais:

a. $xln(x)y'+y=2ln(x)$

b. $\frac{dx}{dy}+e^{x}y=e^{x}y^{2}$

c. $2xy+6x+\left(x^{2}-4\right)y'=0$

d. $y'-2xe^{-y}=0$

e. $1-\frac{y'}{y^{2}+1}=0$

f. $y'+\left(\frac{1}{x}-1\right)y=\frac{e^{2x}}{x}$

D.Análise

De entre as equações seguintes identifique as que são equações diferenciais e distinga as equações diferenciais de variáveis separáveis e as lineares de 1ª ordem, justificando convenientemente a sua resposta.

a. $y'-e^{-y}(x-x^{4})=0$

b. $\frac{dy}{dt}+ycost=0$

c. $y^{2}x+x=0$

d. $y''+ycost=0$

e. $(y')^{2}+yt^{2}=t$

f. $\frac{1}{x}y'+y=1$

E.Sintese

1.Sejam y_1, y_2 duas soluções distintas da equação diferencial $y'+p(x)y=q(x)$ onde p e q são funções contínuas num intervalo aberto $D\subset\Re$.

a. Mostre que $y=y_1+c(y_2-y_1), c\in\Re$ é solução geral da equação.

b. Qual a relação que deve ser satisfeita pelas constantes α,β, para que $\alpha y_1+\beta y_2$ seja também solução da equação dada

2.Uma Equação Diferencial $y'=G(x,y)$ diz-se *Homogénea* se $G(tx,ty)=G(x,y)$ (função homogénea de grau 0).

a. Prove que a equação diferencial $(y^{2}-xy)+x^{2}y'=0$ é Homogénea.

b. Fazendo a mudança de variável $y=vx$ resolva a equação diferencial de variáveis separáveis obtida.

c. Determine a solução geral da equação diferencial dada.

3.Uma equação da forma $y'+P(x)y=Q(x)y^{n}$ para $n\neq 0, n\neq 1$ é uma equação diferencial de Bernoulli.

a. Prove que a equação diferencial $y'+\frac{2}{x}y=x^{6}y^{3}$ é de Bernoulli.

b. Fazendo a mudança de variável $z=y^{1-n}$ resolva a equação diferencial linear de 1ª ordem obtida.

c. Determine a solução geral da equação diferencial dada.

F.Avaliação

1.Determine a família de funções que satisfazem em cada ponto (x, y) a condição: "A soma da derivada com o dobro da ordenada é igual ao quadrado da abcissa". Obtenha o elemento da família de curvas que passa pelo ponto de coordenadas $(0,1)$.

2.Seja f uma função definida para todo o $x \in \Re$, cujas derivadas de qualquer ordem existem e são contínuas em $\Re$. Suponha que $f'(x) = 3f(x)$ e que $f(2) = 1$. Nestas condições, determine $f^{(20)}(2)$.