ENGENHARIA INFORMÁTICA (deslizante) – 1º ano

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Frequência 1

04-maio-2016 **Duração:1h30m**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

---

1. Considere a função $f(x)=\frac{3}{\pi}arccos(-\frac{1}{2})-4sen(2x-\frac{\pi}{3})$.

a. Determine o domínio da função.

Resolução:

$$f(x)=\frac{3}{\pi}\frac{2\pi}{3}-4sen(2x-\frac{\pi}{3})=2-4sen(2x-\frac{\pi}{3})$$

$$D_f=\left\{x\in\Re : 2x-\frac{\pi}{3}\in\underbrace{\Re}_{D_{sen}}\right\}=\Re$$

b. Calcule $f(\frac{4\pi}{3})$.

Resolução:

$$f(\frac{4\pi}{3})=2-4sen(2\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=2-4sen(\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=2-4sen(\frac{7\pi}{3})=2-4sen(\frac{\pi}{3})=2-2\sqrt{3}$$

c. Determine os zeros da função.

Resolução:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2-4sen(2x-\frac{\pi}{3})=0\Leftrightarrow sen(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$x=\frac{3\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in Z$$

d. Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

Resolução:

$$y=2-4sen(2x-\frac{\pi}{3})\Leftrightarrow\underbrace{\frac{y-2}{4}}_{CD_f}=sen(\underbrace{2x-\frac{\pi}{3}}_{D_{f_{inj}}})$$

$$D_{f_{inj}}=CD_{f^{-1}}$$

$$D_{f_{inj}}=\left\{x\in\Re : 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}=\left\{x\in\Re : -\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}\right\}=\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{2}\right]$$

$$CD_f=D_{f^{-1}}$$

$$\frac{y-2}{4}\in[-1,1]\Leftrightarrow -1\le\frac{y-2}{4}\le 1\Leftrightarrow -2\le y\le 6$$

$$\frac{y-2}{4}=sen(2x-\frac{\pi}{3})\Leftrightarrow arcsen(\frac{y-2}{4})=2x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+arcsen(\frac{y-2}{4})\right)$$

$$f^{-1}:[-2,6] \quad \rightarrow \quad \left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{2}\right]$$

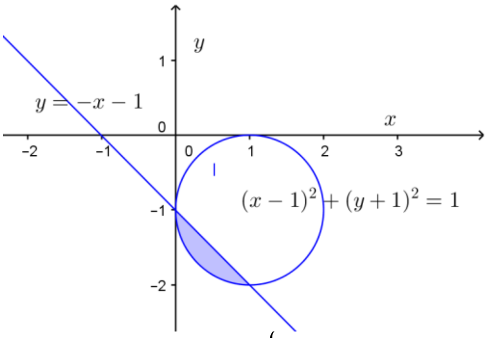
$$x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+arcsen(\frac{y-2}{4})\right)$$

e. Comente a afirmação: $\frac{8\pi}{3}-2arcsen(2x-1)=0$

Resolução:

$arcsen(2x-1)=\frac{4\pi}{3}$, como $\frac{4\pi}{3}\notin CD_{arcsen}$ a equação é impossível considerando a restrição principal.

2. Considere a região E representada na figura seguinte:



a. Reescreva o domínio plano da forma: $E=\{(x,y)\in\Re^2 : g(x)\leq y\leq f(x)\wedge a\leq x\leq b\}$.

Resolução:

$(x-1)^2+(y+1)^2=1\Leftrightarrow (y+1)^2=1-(x-1)^2\Leftrightarrow y+1=\pm\sqrt{1-(x-1)^2}\Leftrightarrow y=-1\pm\sqrt{1-(x-1)^2}$

A curva que corresponde à representada no gráfico é $y=-1-\sqrt{1-(x-1)^2}$

$$E=\{(x,y)\in\Re^2 : -1-\sqrt{1-(x-1)^2}\leq y\leq -x-1\wedge 0\leq x\leq 1\}$$

b. Utilizando o cálculo integral identifique, <u>sem calcular</u>, a expressão que lhe permite determinar:

i. a medida da área do domínio E.

Resolução:

$$A_{OX}=\int_0^1 -x-1-(-1-\sqrt{1-(x-1)^2})dx=\int_0^1 -x+\sqrt{1-(x-1)^2})dx$$

ii. a medida do volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região E em torno do eixo das abcissas.

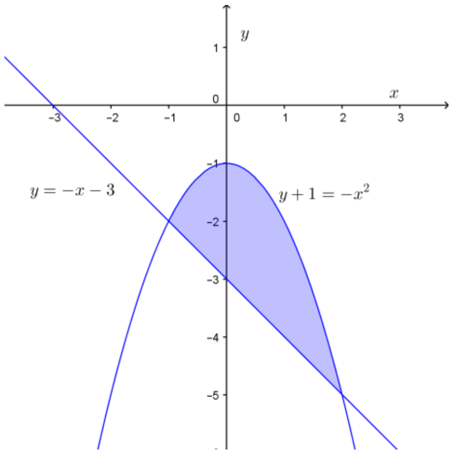
Resolução:

$$V_{OX}=\pi\int_0^1 (-1-\sqrt{1-(x-1)^2})^2-(-x-1)^2dx$$

3. Considere a região $B=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq -x-3 \wedge y+1\leq -x^2\}$.

   a. Represente graficamente a região *B*.

   Resolução:



   b. Usando integrais, calcule a área de *B*.

Resolução:

Cálculo dos pontos de interseção:

$$\begin{cases} y=-x^2-1 \\ y=-x-3 \end{cases} \begin{cases} y=-x^2-1 \\ -x^2-1=-x-3 \end{cases} \begin{cases} y=-x^2-1 \\ -x^2+x+2=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2 \vee y=-5 \\ x=-1 \vee x=2 \end{cases}$$

$$A_{OX}=\int_{-1}^{2} -x^2-1-(-x-3)dx=\int_{-1}^{2} -x^2+x+2dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)=\frac{9}{2}$$

   c. Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de *B*.

Resolução:

$$P=\int_{-1}^{2}\sqrt{1+\left[\left(-x^2-1\right)'\right]^2}dx+\int_{-1}^{2}\sqrt{1+\left[\left(-x-3\right)'\right]^2}dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}dx+\int_{-1}^{2}\sqrt{2}$$

   d. Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos sólidos de revolução obtidos a partir da rotação da região *B* em torno:

      i. do eixo *OX*;

Resolução:

$$V_{OX}=\pi\int_{-1}^{2}(-x-3)^2-(-x^2-1)^2dx$$

      ii. do eixo *OY*.

Resolução:

Existência de sobreposição na rotação em torno do eixo *OY*

$y=-x-3 \Leftrightarrow x=-y-3$

$y+1=-x^2 \Leftrightarrow x^2=-y-1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-y-1}$

$$V_{OY}=\pi\int_{-5}^{-3}(\sqrt{-y-1})^2-(-y-3)^2\,dy+\pi\int_{-3}^{-1}(\sqrt{-y-1})^2\,dy$$

4. Considere a função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}$.

   a. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $2arctg(\sqrt{x+1})+1$ é uma primitiva de f.

Resolução:

$$\left(2arctg(\sqrt{x+1})+1\right)'=2\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=2\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x+1}(2+x)}$$

   b. Considere os seguintes integrais:

$$\text{I. }\int_0^2 f(x)dx \qquad \text{II. }\int_{-1}^2 f(x)dx \qquad \text{III. }\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

Determine, justificando convenientemente a sua resposta, o valor lógico das seguintes proposições:

Resolução:

$D_f=\{x\in\Re:\sqrt{x+1}(x+2)\neq 0 \wedge x+1\geq 0\}=\left]-1,+\infty\right[$

I. $D_{int}=[0,2]\subset D_f=\left]-1,+\infty\right[$ é uma proposição verdadeira e $D_{int}=[0,2]$ é um intervalo limitado logo trata-se de um integral definido.

II. $D_{int}=[-1,2]\subset D_f=\left]-1,+\infty\right[$ é uma proposição falsa uma vez que $-1\notin D_f$.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}=+\infty$ logo f é não limitada.

$D_{int}=[-1,2]$ é limitado logo trata-se de um integral impróprio de 2ª espécie.

III. $D_{int}=[-2,-1]\subset D_f=\left]-1,+\infty\right[$ é uma proposição falsa logo é uma expressão sem significado

a. O integral impróprio de 2ª espécie é convergente;

Resolução:

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}dx=\lim_{t\to-1}\int_t^2\frac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}dx=\lim_{t\to-1}\left[2arctg(\sqrt{x+1})+1\right]_t^2$$

$$=0-2arctg(\sqrt{3})=-2\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$$

b. Todas as expressões têm significado matemático;

Resolução:

Falso uma vez que a expressão III não tem sentido.

c. O integral definido é igual a 0.

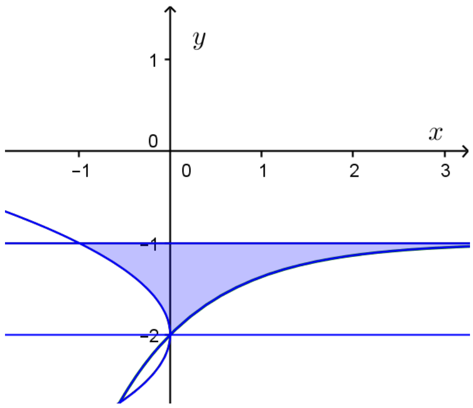
Resolução:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)}dx = \left[2arctg(\sqrt{x+1})+1\right]_0^2$$

$$= 2arctg(\sqrt{3}) - 2arctg(1) = 2\frac{\pi}{6} - 2arctg(1) = \frac{\pi}{3} - 2arctg(1)$$

Falso pois o valor do integral definido não é zero.

5. Considere a região A representada na figura seguinte



a. Justificando convenientemente a sua escolha, verifique se algum dos seguintes conjuntos corresponde à região representada no gráfico. Em caso negativo, defina o conjunto.

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \leq ln(-y-1) \wedge x \geq -(y+2)^2 \wedge -2 \leq y \leq -1\right\}$$

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \leq -ln(-y-1) \wedge x \geq -(y+2)^2 \wedge -2 \leq y \leq -1\right\}$$

$$A_3 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \geq -ln(-y-1) \wedge x \geq -(y+2)^2 \wedge -2 \leq y \leq -1\right\}$$

$$A_4 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \leq -ln(-y-1) \wedge x \geq -y^2 + 2 \wedge -2 \leq y \leq -1\right\}$$

Resolução:

A_1 não é o conjunto pretendido uma vez que para $x = 1$ obtém-se $1 = ln(-y-1) \Leftrightarrow y = -e-1$ que não é ponto da curva, o que acontece para a outra função $1 = -ln(-y-1) \Leftrightarrow y = -e^{-1} - 1$.

A_3 não é o conjunto pretendido uma vez que $x \geq -ln(-y-1)$ não representa o domínio identificado: o ponto $(1,-2)$ não pertence ao domínio e, no entanto, verifica a condição pois $1 \geq -ln(2-1)$.

A_4 não é o conjunto pretendido uma vez que o vértice da parábola é $(0,-2)$

Como $(0,0)$ verifica a condição $x \geq -(y+2)^2$ pois $0 \geq -(0+2)^2$ é verdadeiro, o conjunto que representa o domínio identificado é A_2

b. Usando integrais, identifique, sem calcular, uma expressão simplificada que lhe permita determinar o volume do sólido de revolução obtido por rotação da região A em torno do eixo das abcissas.

Resolução:

Pontos de intersecção:

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=-(y+2)^2 \end{cases} \begin{cases} y=-1 \\ x=-(-1+2)^2 \end{cases} \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x=-(y+2)^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{-x}=y+2 \Leftrightarrow y=-2\pm\sqrt{-x}$$

$$x=-ln(-y-1) \Leftrightarrow -x=ln(-y-1) \Leftrightarrow e^{-x}=-y-1 \Leftrightarrow= y=-e^{-x}-1$$

$$\int_{-1}^{0}\left(2+\sqrt{x}\right)^2-(-1)^2\,dx+\int_{0}^{+\infty}\left(-e^{-x}-1\right)^2-(-1)^2\,dx$$

c. O que pode concluir da medida obtida na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta

Resolução:

Para o volume existir é necessário que o integral impróprio de 1ª espécie seja convergente:

$$\int_{0}^{+\infty}\left(-e^{-x}-1\right)^2-(-1)^2\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}e^{-2x}+e^{-x}dx=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}\right]_0^t=\frac{1}{2}+e$$

Cotação

1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b	5a	5b	5c
0,5	1	0,75	1,25	0,5	1	2	1	1,5	1,5	2,5	1	2,5	1	1	1