Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Álgebra Linear – Exercícios de revisão para o 1º teste (**complexos e capítulos I e II**)

Engenharia Informática e Curso Europeu de Informática

---

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica $a + bi$. Na alínea (b) use as fórmulas de De Moivre.

   (a) $\dfrac{1+i}{2-3i} + \dfrac{1-i}{-2+3i}$.

   (b) $(1-i)^6(\sqrt{3}+i)^3$.

2. Determine em $\mathbb{C}$ todas as soluções das seguintes equações:

   (a) $x^2 - 2x + 3 = 0$

   (b) $z^4 = 2(\sqrt{3}\,i - 1)$.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a matriz X tal que $AXA^{-1} = (A+B)^\top$.

   (b) Obtenha uma expressão para A^k, com $k \in \mathbb{N}$.

4. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Todo o sistema linear com mais incógnitas que equações é possível e indeterminado;

   (b) Se A e B são matrizes invertíveis $n \times n$, então $\det(AB^\top A^{-1}B^{-1}) = 1$;

   (c) Toda a matriz 3×3, triangular superior, tem característica 3.

5. Sejam A e B matrizes quadradas invertíveis e C uma matriz não necessariamente quadrada. Considere a matriz por blocos $X = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que
   $$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

   (b) Usando a fórmula da alínea anterior, calcule a inversa da matriz
   $$X = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

6. (a) Dada uma matriz quadrada A tal que $A^3 = O$, considere as matrizes $B = I - A$ e $C = I + A + A^2$. Calcule o produto BC e indique qual é a inversa de B.

   (b) Usando o método de eliminação de Gauss, resolva e classifique o sistema linear
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ x & & & - & 2z & - & 2t & = & 0 \\ -x & & & - & 2z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

   Indique duas soluções do sistema.

(v.s.f.f.)

(c) Suponha que A é uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = -2$. Determine, enunciando as propriedades em que se baseia, o seguinte:
(i) $A\ \mathrm{adj}(A)$ (ii) $\det(2A)$ (iii) $\mathrm{car}(A)$

7. Seja α um parâmetro real e considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ \alpha+1 & 2 & \alpha+1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em função de α.
(b) Considerando $\alpha = 1$, classifique o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e resolva-o.
(c) Considere $\alpha = -1$.
   (i) Determine o valor de z usando a regra de Cramer.
   (ii) Calcule a inversa de A, usando a adjunta.

8. Para cada alínea, dê um exemplo de uma matriz 3×3:
(a) anti-simétrica ($A^\top = -A$);
(b) triangular inferior (entradas acima da diagonal nulas);
(c) matriz de código com todas as entradas não nulas ($\det(A) = \pm1$).

9. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = I$.
(a) Indique quais os valores que $\det(A)$ pode tomar.
(b) A que matriz corresponde A^{23}? Justifique.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{bmatrix}$, onde k é um valor real.
(a) Determine o(s) valor(es) de k por forma a que A seja invertível.
(b) Indique o valor da característica de A em função dos valores de k.

11. Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
(a) Calcule C^{-1}, usando o método de Gauss-Jordan.
(b) Na codificação de certa uma mensagem, um espaço em branco foi representado por 0, a letra A por 1, B por 2, C por 3, etc. Usou-se o alfabeto português (23 letras). Sabendo que C foi a matriz de código usada e que a sequência de números recebida pelo receptor foi

$$22, 22, 64, 35, 33, 88, 29, 17, 61$$

qual é a frase contida na mensagem? Justifique.