Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 1) - Engenharia Informática - Época de recurso

10 de Fevereiro de 2016 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. Considere a função $f(x) = \cos\left(e^{2\ln x}\,\pi\right)$.

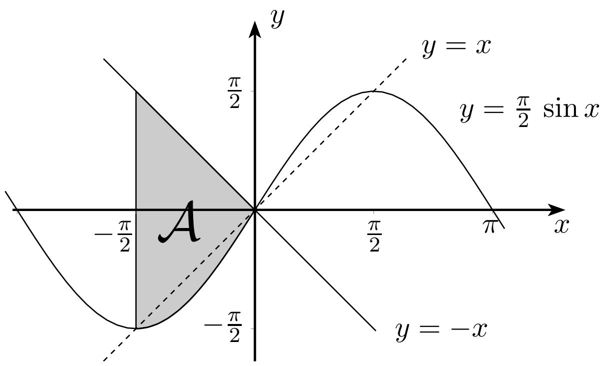
[0.5 *val.*] (a) Determine o domínio da função de f.

[1.25 *val.*] (b) Calcule o valor de $f\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$.

[1.5 *val.*] (c) Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 *val.*] (d) Resolva, a equação $\arcsin x = f(1)$.

2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

[1.5 *val.*] (b) Indique uma expressão simplificada que permita calcular a área de $\mathcal{A}$.

[2.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução que se obtêm a partir da rotação da região $\mathcal{A}$ em torno

i. do eixo Ox;

ii. do eixo Oy.

3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -(x-1)^2 + 1 \ \wedge \ y \geq x^2 - 1 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{B}$

(i) em função da variável x;

(ii) em função da variável y.

[1.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

4. Considere a função real de variável real $f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{x}}$.

[1.0 *val.*] (a) Prove que o integral $\displaystyle\int_9^{+\infty} f(x)\,dx$ é impróprio de $1^{\underline{a}}$ espécie e determine a sua natureza.

[2.25 *val.*] (b) Considere as expressões

(I) $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{49} f(x)\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{49}^{81} f(x)\,dx$.

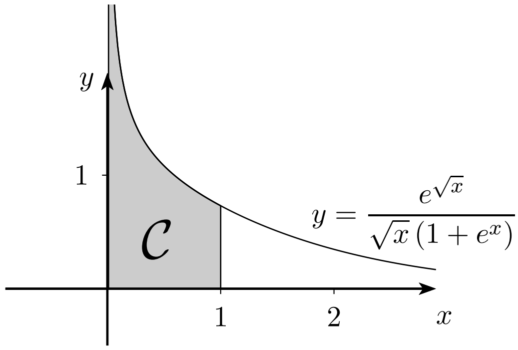
Determine o valor lógico das seguintes afirmações:

(i) Todas as expressões têm significado matemático.

(ii) O integral definido é igual a 8 .

(iii) O integral impróprio é divergente.

5. Considere a região $\mathcal{C}$, ilimitada, representada na figura seguinte:



[1.25 *val.*] (a) Usando integrais, identifique, sem calcular, uma expressão simplificada que permita determinar a área da região $\mathcal{C}$.

[1.5 *val.*] (b) A medida da alínea anterior é finita? Justifique convenientemente a sua resposta.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 2) - Engenharia Informática - Época de recurso

10 de Fevereiro de 2016 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Usando a técnica de primitivação por decomposição e as regras de primitivação imediata, determine

$$\int \frac{\sec^2 x\,(1-\operatorname{tg} x)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,dx\,.$$

[2.5 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x}{1+\boxed{\cdot}}\,dx\,.$

Complete, justificando, o espaço assinalado com $\boxed{\cdot}$ por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata (Tabelas de Matemática, página 3):

(a) Regra 2; (b) Regra 5; (d) Regra 19.

[2.5 *val.*] 3. Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\frac{\sqrt[6]{\ln x}}{\sqrt[3]{\ln x}+1}\,dx$ recorrendo à mudança de variável $\ln x = t^6$, com $x \in [1,+\infty[$.

[2.0 *val.*] 4. Usando a técnica de primitivação por partes, determine $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{e^x-1}\,dx\,.$

[7.0 *val.*] 5. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3}\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sec^5 x\,\operatorname{cotg}^2 x}\,dx\,;$

(c) $\displaystyle\int \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx\,.$

[4.0 *val.*] 6. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

i) $(x\,y)'-y=-\dfrac{4}{x^2y}\,;$ ii) $x\,y'+2\,y=\dfrac{1}{y}\,;$ iii) $y'=\dfrac{2x^2-2y}{x}\,.$

(a) Mostre, sem resolver a equação, que $y=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$ é uma solução de (i).

(b) Resolva a equação de variáveis separáveis (ii).

(c) Determine a solução particular da equação (iii) que verifica a condição inicial $y(1)=2\,.$

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática - Época de recurso

10 de Fevereiro de 2016 | Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

1. Considere a função $f(x) = \cos\left(e^{2\ln x}\,\pi\right)$.

[1.25 *val.*] (a) Caracterize a função inversa de f, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 *val.*] (b) Resolva, a equação $\arcsin x = f(1)$.

2. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -(x-1)^2 + 1 \ \wedge\ y \geq x^2 - 1 \ \wedge\ 0 \leq x \leq 1\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular a área de $\mathcal{B}$ em função da variável x.

[1.5 *val.*] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém a partir da rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy.

[1.5 *val.*] (d) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] 3. Considere as expressões

(I) $\displaystyle\int_{-4}^{0} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{49} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{49}^{81} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$.

Determine o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Todas as expressões têm significado matemático.

(b) O integral impróprio é convergente.

[8.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\,(1-\operatorname{tg} x)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{e^x - 1}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sec^5 x \operatorname{cotg}^2 x}\,dx$.

[2.0 *val.*] 5. Resolva a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' = \frac{2x^2 - 2y}{x}$$

sujeita à condição inicial $y(1) = 2$.

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Calculus I - Informatics Engineering - Exam

February 10th, 2016 2h

1. Considerer the function $f(x) = \cos\left(e^{2\ln x}\,\pi\right)$.

[1.25 *val.*] (a) Characterize the inverse function of f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

[0.75 *val.*] (b) Solve the equation $\arcsin x = f(1)$.

2. Consider the region $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \le -(x-1)^2 + 1 \ \wedge\ y \ge x^2 - 1 \ \wedge\ 0 \le x \le 1\}$.

[1.0 *val.*] (a) Perform a graphical representation of region $\mathcal{B}$.

[1.5 *val.*] (b) Using integrals and variable x, define a simplified expression that allows to calculate the area of region $\mathcal{B}$.

[1.5 *val.*] (c) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate the volume of the solid obtained by revolving region $\mathcal{B}$ around y-axis.

[1.5 *val.*] (d) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate perimeter of region $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] 3. Consider the following expressions:

(I) $\displaystyle\int_{-4}^{0} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{49} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{49}^{81} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx$.

Say (and justify) whether it is true or false:

(a) All expressions have mathematical meaning.

(b) The improper integral is convergent.

[8.0 *val.*] 4. Using integration techniques, determine each of the following indefinite integrals:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\,(1 - \operatorname{tg} x)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{e^x - 1}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sec^5 x\,\operatorname{cotg}^2 x}\,dx$.

[2.0 *val.*] 5. Determine the solution of equation

$$y' = \frac{2x^2 - 2y}{x}$$

that verifies the initial condition $y(1) = 2$.

1. (a) O domínio natural de f é definido a partir do domínio do logaritmo, uma vez que nenhuma das outras funções envolvidas na expressão de f tem qualquer restrição associada. Assim,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \left]0, +\infty\right[$$

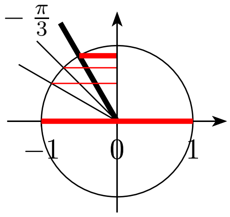
(b) Tendo em conta a propriedade dos logaritmos

$$p \ln(a) = \ln(a^p), \quad a > 0, \, p \in \mathbb{R},$$

tem-se

$$f\left(\sqrt{\tfrac{20}{3}}\right) = \cos\left(e^{2\ln\sqrt{\frac{20}{3}}}\pi\right) = \cos\left(e^{\ln\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2}\pi\right) = \cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{20\pi}{3} = 7\pi - \frac{\pi}{3}$



(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = \cos\left(e^{2\ln x}\pi\right) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir da restrição principal da função cosseno e do domínio natural do logaritmo, pelo que

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \le e^{2\ln x}\pi \le \pi \ \wedge \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le e^{\ln x^2} \le 1 \ \wedge \ x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x^2 \le 1 \ \wedge \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1 \ \wedge \ x > 0\} = \left]0, 1\right] \end{aligned}$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned} y = \cos\left(e^{2\ln x}\pi\right) \quad &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arccos y = e^{2\ln x}\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\arccos y = e^{2\ln x} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{\pi}\arccos y\right) = 2\ln x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\pi}\arccos y\right) = \ln x \\ &\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\pi}\arccos y\right)} = x \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}\arccos y} = x\,. \end{aligned}$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e os domínios das funções logaritmo e arco cosseno, tem-se

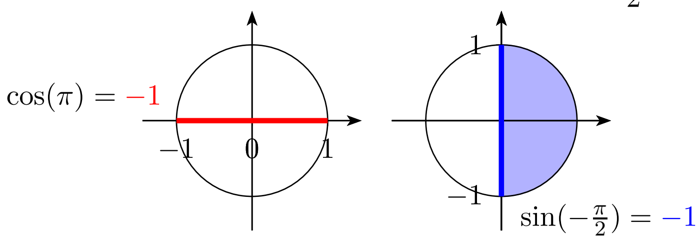
$$CD_f = D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R} : \underbrace{\frac{1}{\pi}\arccos y \ge 0}_{\text{condição universal}} \ \wedge \ -1 \le y \le 1\} = [-1, 1],$$

pelo que

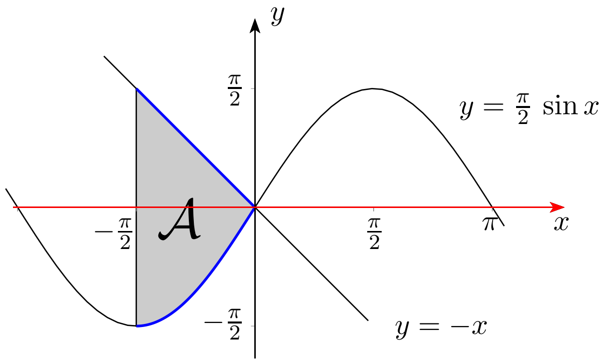
$$\begin{array}{ccc} \left]0, 1\right] & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & [-1, 1] \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}\arccos y} = x & \longleftrightarrow & y = \cos\left(x^2\pi\right) \end{array}$$

(d) Tendo em conta o domínio da função arco seno, tem-se

$$\arcsin x = f(1) \Leftrightarrow \arcsin x = \cos(\pi) \Leftrightarrow \arcsin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}.$$



2. (a) Uma vez que as curvas já estão definidas em função da variável x,



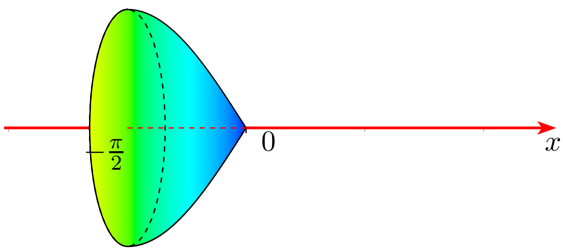
pelo que

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \wedge \frac{\pi}{2}\sin x \leq y \leq -x\right\}.$$

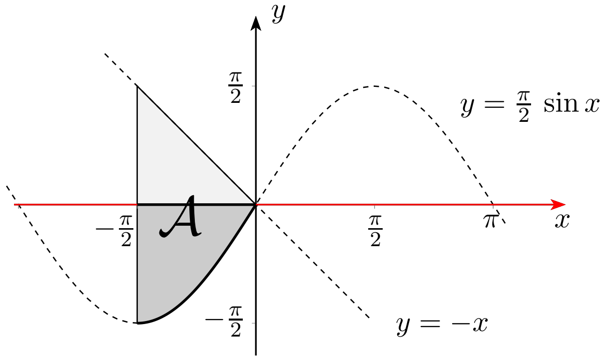
(b) Tendo em conta a alínea (a), tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-x - \frac{\pi}{2}\sin x\right) dx.$$

(c) i. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Ox, é o representado na figura seguinte:

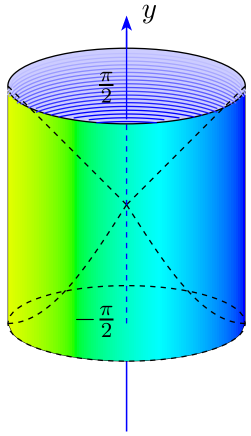


Recorrendo a integrais definidos, e tendo em conta que o sólido gerado pela parte relativa ao segundo quadrante fica embutida no sólido gerado pela parte relativa ao terceiro quadrante, o volume do sólido anterior é dado por



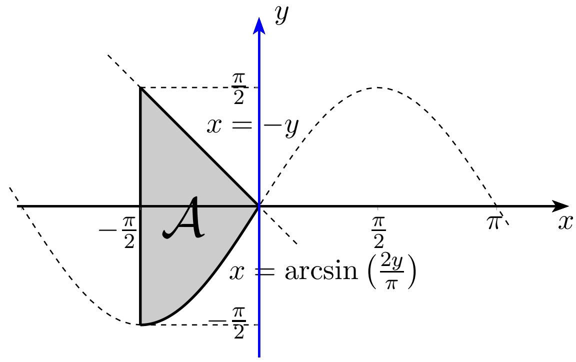
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \pi \Big(\underbrace{\frac{\pi}{2}\sin x}_{R_{\text{ext}}}\Big)^2 dx = \frac{\pi^3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 x\, dx.$$

ii. O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos Oy, é o representado na figura seguinte:



Atendendo a que as curvas que delimitam a região $\mathcal{A}$ são definidas, em função de y, pelas seguintes funções,

- $y = \frac{\pi}{2}\sin x \;\Leftrightarrow\; \frac{2y}{\pi} = \sin x \;\Rightarrow \arcsin\left(\frac{2y}{\pi}\right) = x$
- $y = -x \;\Leftrightarrow\; -y = x$

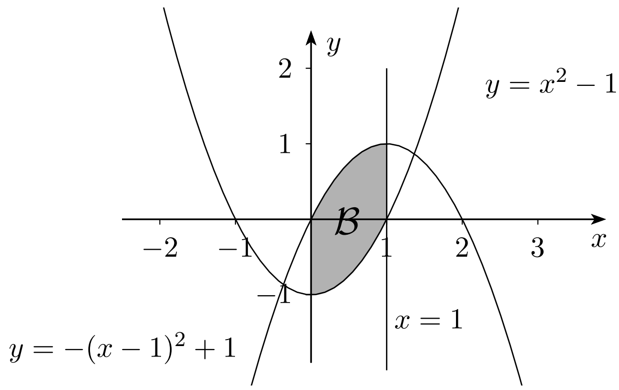


então, recorrendo a integrais definidos o volume do sólido anterior é dado por

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \pi \Big(\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{R_{\text{ext}}} \Big)^2 - \pi \Big(\underbrace{\arcsin\left(\frac{2y}{\pi}\right)}_{R_{\text{int}}} \Big)^2 dy + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \pi \Big(\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{R_{\text{ext}}} \Big)^2 - \pi \big(\underbrace{-y}_{R_{\text{int}}} \big)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi^2}{4} - \arcsin^2\left(\frac{2y}{\pi}\right)\right) dy + \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - y^2 \right) dy\,.$$

3. (a) A representação gráfica da região $\mathcal{B}$ é a seguinte:



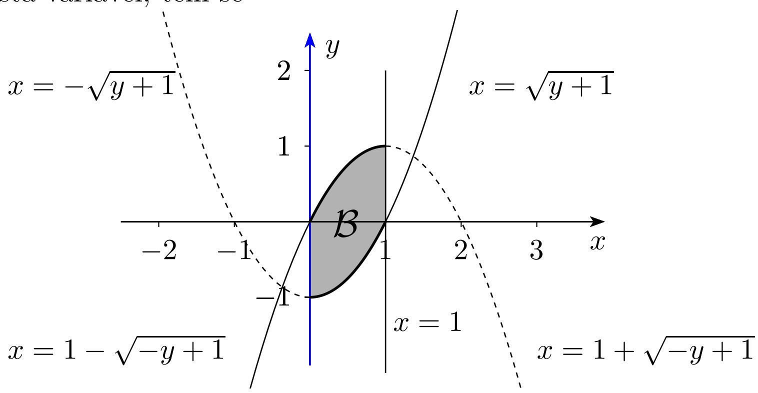
(b) (i) Uma vez que as curvas já são dadas em função de x, tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{B}) \;=\; \int_0^1 \big(-(x-1)^2 + 1\big) - \big(x^2 - 1\big)\, dx \;=\; \int_0^1 \big(2 - x^2 - (x-1)^2\big)\, dx\,.$$

(ii) As curvas dadas são definidas, em função de y, pelas seguintes expressões:

- $y=-(x-1)^2+1 \;\Leftrightarrow\; -y+1=(x-1)^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{-y+1}=x-1 \;\Leftrightarrow\; 1\pm\sqrt{-y+1}=x$
- $y=x^2-1 \;\Leftrightarrow\; y+1=x^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{y+1}=x$

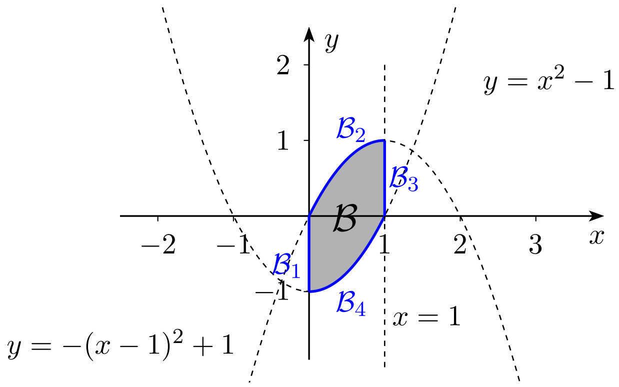
pelo que, em função desta variável, tem-se



e portanto

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_{-1}^{0}\sqrt{y+1}\;dy+\int_{0}^{1}\left(1-(1-\sqrt{-y+1}\,)\right)\,dy\\
&= \int_{-1}^{0}\sqrt{y+1}\;dy+\int_{0}^{1}\sqrt{-y+1}\;dy\,.
\end{aligned}$$

(c) O perímetro da região $\mathcal{B}$ é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes três curvas:



$$\begin{aligned}
&\text{Perímetro}(\mathcal{B})\\
=\;& \text{Comprimento}(\mathcal{B}_1)+\text{Comprimento}(\mathcal{B}_2)+\text{Comprimento}(\mathcal{B}_3)+\text{Comprimento}(\mathcal{B}_4)\\
=\;& 1\;+\int_0^1\sqrt{1+\Big(\big(-(x-1)^2+1\big)'\Big)^2}\;dx\;+\;1\;+\int_0^1\sqrt{1+\Big(\big(x^2-1\big)'\Big)^2}\;dx\\
=\;& 1\;+\int_0^1\sqrt{1+\Big(-2(x-1)\Big)^2}\;dx\;+\;1\;+\int_0^1\sqrt{1+\Big(2x\Big)^2}\;dx\\
=\;& 1\;+\int_0^1\sqrt{1+4(x-1)^2}\;dx\;+\;1\;+\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\;dx\,.
\end{aligned}$$

4. (a) Comecemos por determinar o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{x}}$:

$$D_f \;=\; \left\{x\in\mathbb{R}:\;x\neq 0\;\wedge\;\frac{4}{x}\geq 0\right\}\;=\;\left\{x\in\mathbb{R}:\;x\neq 0\;\wedge\;x\geq 0\right\}\;=\,]0,+\infty[\,.$$

Note-se ainda que a função é contínua em D_f, por ser definida pela composição de funções contínuas (um radical e uma função racional).

O intervalo de integração está contido no domínio da função $f(x)$ mas é ilimitado, pelo que o integral é impróprio de 1ª espécie. Assim,

$$\int_9^{+\infty} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx \;=\; \lim_{B\to+\infty} \int_9^B 2\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \lim_{B\to+\infty} 2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_9^B$$

$$= \lim_{B\to+\infty} 4\left[\sqrt{x}\right]_9^B \;=\; \lim_{B\to+\infty} 4\,\big(\underbrace{\sqrt{B}}_{\to+\infty} -3\big) \;=\; +\infty\,,$$

pelo que o integral é divergente.

(b) (i) A afirmação é falsa, pois o integral (I) não está definido, porque a função $f(x)$ não está definida em nenhum ponto do intervalo de integração $[-4, 0]$.

(ii) O integral (III) é um integral definido pois o intervalo de integração $[49, 81]$ é um subconjunto limitado do domínio de $f(x)$. Assim, atendendo à primitiva já calculada na alínea (a), tem-se

$$\int_{49}^{81} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx \;=\; 4\Big[\sqrt{x}\Big]_{49}^{81} \;=\; 4\Big(\sqrt{81}-\sqrt{49}\Big) \;=\; 4\,\Big(9-7\Big) \;=\; 8\,,$$

pelo que a afirmação é verdadeira.

(iii) O integral (II) é impróprio de segunda espécie, porque o intervalo de integração $[0,\, 49]$ é limitado, $f(x)$ está definida e é continua em $]0,\, 49[$ e $f(x)$ é ilimitada em $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{4}{x}} \;=\; +\infty\,.$$

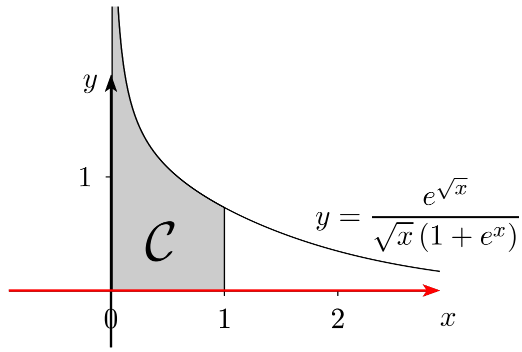
Assim, atendendo à primitiva já calculada na alínea (a), tem-se

$$\int_0^{49} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx \;=\; \lim_{A\to0^+} \int_A^{49} \sqrt{\frac{4}{x}}\,dx \;=\; \lim_{A\to0^+} 2\Big[\sqrt{x}\Big]_A^{49}$$

$$= \lim_{A\to0^+} 2\Big(\sqrt{49}-\underbrace{\sqrt{A}}_{\to0}\Big) \;=\; 14\,,$$

pelo que o integral é convergente e portanto a afirmação é falsa.

5. (a) Tendo em conta a representação dada e usando x como variável independente, tem-se



$$\text{Área}(\mathcal{C}) \;=\; \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,(1+e^x)}\,dx}_{\text{integral impróprio}}\,.$$

(b) Uma vez que a região $\mathcal{C}$ é ilimitada, a sua área só é finita se o integral impróprio de (segunda espécie) for convergente. Como

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,(1+e^x)}\,dx \;=\; \lim_{A\to0^+} \int_A^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}\,dx \;=\; \lim_{A\to0^+} 2\int_A^1 \underbrace{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}}_{R19}\,dx$$

$$= \lim_{A\to0^+} 2\Big[\operatorname{arctg}(e^{\sqrt{x}})\Big]_A^1 \;=\; \lim_{A\to0^+} 2\Big(\operatorname{arctg}(e) - \underbrace{\operatorname{arctg}(\underbrace{e^{\sqrt{A}}}_{\to1})}_{\to\frac{\pi}{2}}\Big)$$

$$= 2\operatorname{arctg}(e) - \pi\,,$$

então o integral impróprio é convergente e portanto a área de $\mathcal{C}$ é finita.

1. Recorrendo à decomposição das primitivas e à técnica de primitivação imediata, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2 x\,(1-\operatorname{tg} x)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,dx &= \underbrace{\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}}_{R19}\,dx - \int \frac{\sec^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,dx \\
&= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2}\int \underbrace{2\operatorname{tg} x\,\sec^2 x\,(1-\operatorname{tg}^2 x)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= x - \frac{1}{2}\,\frac{(1-\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= x - \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x} + c\,,\; c\in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. Começamos por observar que existem múltiplas possibilidades para cada caso. No que se segue vamos apresentar um exemplo para cada um deles.

   (a) A regra 2 tem a forma $f^p f'$ pelo que se $\boxed{\cdot} = -1 + (x^3+2x^2)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+4x}{1+\boxed{-1+(x^3+2x^2)^2}}\,dx &= \int \frac{3x^2+4x}{(x^3+2x^2)^2}\,dx = \int (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^{-2}\,dx \\
&= \frac{(x^3+2x^2)^{-1}}{-1} + c\,,\; c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

   (b) A regra 5 tem a forma $\frac{f'}{f}$ pelo que se considerarmos $\boxed{\cdot} = x^3+2x^2$, tem-se

$$\int \frac{3x^2+4x}{1+\boxed{x^3+2x^2}}\,dx = \int \frac{3x^2+4x}{1+x^3+2x^2}\,dx = \ln\left|1+x^3+2x^2\right| + c\,,\; c\in\mathbb{R}\,.$$

   (c) A regra 19 tem a forma $\frac{f'}{1+f^2}$ pelo que se considerarmos $\boxed{\cdot} = (x^3+2x^2)^2$, tem-se

$$\int \frac{3x^2+4x}{1+\boxed{(x^3+2x^2)^2}}\,dx = \int \frac{3x^2+4x}{1+(x^3+2x^2)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x^3+2x^2) + c\,,\; c\in\mathbb{R}\,.$$

3. Considerando a mudança de variável apresentada, tem-se

$$\text{m.v.}: \boxed{\ln x = t^6} \;\Rightarrow\; x = e^{t^6} \;\Rightarrow\; x' = 6t^5 e^{t^6}$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,\frac{\sqrt[6]{\ln x}}{\sqrt[3]{\ln x}+1}\,dx \overset{mv}{=} \int \frac{1}{e^{t^6}}\,\frac{\sqrt[6]{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}+1}\,6t^5 e^{t^6}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,6t^5\,dt = \int \frac{6t^6}{t^2+1}\,dt\,.$$

A função resultante da mudança de variável é uma fracção imprópria (grau do numerador = 2 = grau do denominador), pelo que o cálculo da primitiva será realizado recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples, começando pelo cálculo da divisão dos polinómios:

$$\begin{array}{llll|l}
6t^6 & & & & t^2+1 \\ \cline{5-5}
-(6t^6 & +6t^4) & & & 6t^4-6t^2+6 \\ \cline{1-4}
 & -6t^4 & & & \\
 & -(-6t^4 & -6t^2) & & \\ \cline{1-4}
 & & 6t^2 & & \\
 & & -(6t^2 & +6) & \\ \cline{1-4}
 & & & -6 &
\end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{6t^6}{t^2+1}}_{\text{fracção imprópria}} = 6t^4 - 6t^2 + 6 + \underbrace{\frac{-6}{t^2+1}}_{\text{fracção própria}} .$$

A fracção própria resultante já é primitivável de forma imediata. Então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6t^6}{t^2+1}\, dt &= \int \left(6t^4 - 6t^2 + 6 - \frac{6}{t^2+1}\right) dt \\
&= 6\int \underbrace{t^4}_{R2}\, dt - 6\int \underbrace{t^2}_{R2}\, dt + \int \underbrace{6}_{R1}\, dt - 6\int \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{R19}\, dt \\
&= 6\,\frac{t^5}{5} - 6\,\frac{t^3}{3} + 6t - 6\,\mathrm{arctg}\, t + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Atendendo à mudança de variável $\ln x = t^6$ e ao facto de $t>0$, tem-se $t = \sqrt[6]{\ln x}$ e portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{e^{3x}} - \sqrt{e^x}}{e^x+1}\, dx &\overset{mv}{=} \int \frac{6t^6}{t^2+1}\, dt \\
&= \frac{6}{5}\, t^5 - 2\, t^3 + 6t - 6\,\mathrm{arctg}\, t + c \\
&\overset{mv}{=} \frac{6}{5}\, \sqrt[6]{\ln^5 x} - 2\sqrt{\ln x} + 6\,\sqrt[6]{\ln x} - 6\,\mathrm{arctg}\, t + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int e^{2x}\sqrt{e^x-1}\, dx = \int \underbrace{e^x}_{d}\ \underbrace{e^x\,(e^x-1)^{\frac{1}{2}}}_{p}\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \int \underbrace{e^x\,(e^x-1)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\, dx \;=\; \frac{(e^x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ \bullet\ (e^x)' \;=\; e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} e^x\,\frac{2}{3}\,(e^x-1)^{\frac{3}{2}} - \int e^x\,\frac{2}{3}\,(e^x-1)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\, e^x\,\sqrt{(e^x-1)^3} - \frac{2}{3}\int \underbrace{e^x (e^x-1)^{\frac{3}{2}}}_{R2}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\, e^x\,\sqrt{(e^x-1)^3} - \frac{2}{3}\,\frac{(e^x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\, e^x\,\sqrt{(e^x-1)^3} - \frac{4}{15}\,\sqrt{(e^x-1)^5} + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Uma vez que a função é uma fracção racional própria (grau do numerador $=1<3=$ grau do denominador), o cálculo da primitiva será realizado recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples, o que é feito tendo por base os zeros do seu denominador. Como

$$(x-1)^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x-1=0 \,\vee\, x-1=0 \,\vee\, x-1=0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x=1 \vee x=1 \vee x=1}_{\text{multiplicidade três}},$$

então existem três elementos simples, todos determinados pela raiz múltipla $x=1$:

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x-1)^2} + \underbrace{\frac{B}{(x-1)^2}}_{\cdot(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}\,.$$

Tendo agora em consideração a igualdade dos numeradores da primeira e última fracções, tem-se agora

$$\begin{array}{r|rcl}
 & x^2-3x+2 & = & A(x-1)^2+B(x-1)+C \\ \hline
x=1 & 0 & = & 0+0+C \\
x=0 & 2 & = & A-B+C \\
x=-1 & 6 & = & 4A-2B+C
\end{array}
\quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} C=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{array}\right. .$$

Assim, fracção racional própria tem a seguinte decomposição em elementos simples,

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx - \int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2}\,dx \\
&= \ln|x-1| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c \\
&= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a definição de secante e recorrendo às técnicas de primitivação para produtos de potências de senos e cossenos (Tabelas de Matemática, página 7), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sec^5 x \operatorname{cotg}^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^5 x}\,\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^3 x \sin^2 x}}\,dx \\
&= \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos x \cos^2 x \sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\sin^2 x\,dx \\
&= \int \cos x\,(\sin^2 x - \sin^4 x)\,dx \\
&= \int \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{R2}\,dx - \int \underbrace{\cos x \sin^4 x}_{R2}\,dx \\
&= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à decomposição das primitivas e à técnica de primitivação imediata, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx &= \int \frac{x^2-2x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int \left(x^{2-\frac{1}{2}} - 2x + \sqrt{x}\right) dx \\
&= \int \underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{R2}\,dx - 2\int \underbrace{x}_{R2}\,dx + \int \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\,\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

6. (a) Substituindo $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$ na equação (i), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left(x\,\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)' - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} = -\frac{4}{x^2\,\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}} \\
\Leftrightarrow\ & \left((4+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} = -\frac{4}{x\,\sqrt{4+x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\,(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} = -\frac{4}{x\,\sqrt{4+x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} = -\frac{4}{x\,\sqrt{4+x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{x\,\sqrt{4+x^2}} - \frac{4+x^2}{x\,\sqrt{4+x^2}} = -\frac{4}{x\,\sqrt{4+x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-4-x^2}{x\,\sqrt{1+x^2}} = -\frac{4}{x\,\sqrt{1+x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-4}{x\,\sqrt{1+x^2}} = -\frac{4}{x\,\sqrt{1+x^2}} \ \checkmark
\end{aligned}$$

pelo que a função é uma solução da equação diferencial.

(b) Recorrendo à técnica de resolução para equações de variáveis separáveis, tem-se

$$\begin{aligned}
x\,y' + 2\,y = \frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad & x\,y' = \frac{1}{y} - 2y \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{y} - 2y\right)\frac{1}{x}\,, \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = \frac{1-2y^2}{y}\,\frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{y}{1-2y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{4}\int \frac{-4y}{1-2y^2}\,dy = \ln|x| + c \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{4}\,\ln|1-2y^2| = \ln|x| + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à técnica de resolução para equações lineares, tem-se

$$\begin{aligned}
y' = \frac{2x^2-2y}{x} \quad\Leftrightarrow\quad & y' + \frac{2}{x}\,y = 2x\,, \quad \text{EDO linear} \\
& FI:\ e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln(x^2)} = x^2 \\
\overset{\times x^2}{\Leftrightarrow}\quad & \left(y\,x^2\right)' = 2x^3 \\
\Leftrightarrow\quad & y\,x^2 = 2\int x^3\,dx \\
\Leftrightarrow\quad & y\,x^2 = 2\,\frac{x^4}{4} + c \\
\Leftrightarrow\quad & y\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^4 + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Tendo agora em consideração a condição inicial, tem-se

$$y(1) = 2:\quad 2\cdot 1^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^4 + c \ \Rightarrow\ 2 = \frac{1}{2} + c \ \Rightarrow\ \frac{3}{2} = c\,,$$

pelo que a solução é definida, implicitamente, por

$$y\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{3}{2}\,.$$

Todas as questões do exame estão incluídas numa das frequências, pelo que deverá consultar a resolução respectiva tendo em conta a seguinte correspondência:

1. (a) coincide com a questão 1(c) da parte 1
   (b) coincide com a questão 1(d) da parte 1

2. coincide com a questão 3 da parte 1

3. (a) coincide com a questão 4(b)(i) da parte 1
   (b) coincide com a questão 4(b)(iii) da parte 1

4. (a) coincide com a questão 1 da parte 2
   (b) coincide com a questão 4 da parte 2
   (c) coincide com a questão 5(a) da parte 2
   (d) coincide com a questão 5(b) da parte 2

5. coincide com a questões 6(c) da parte 2