Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

27 de Novembro de 2013 Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

1. Considere a função $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(2x)$.

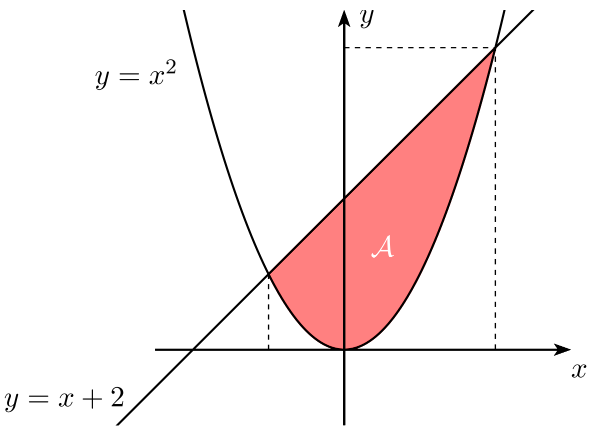
[0.5 *val.*] (a) Calcule o valor de $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

[0.5 *val.*] (b) Determine os zeros de $f(x)$.

[0.5 *val.*] (c) Justifique que $f(x)$ não é injectiva e determine uma restrição de injectividade para a função.

[1.0 *val.*] (d) Nas condições da alínea anterior, caracterize a função inversa de f indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

[1.0 *val.*] i. a área de $\mathcal{A}$;

[1.5 *val.*] ii. o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy;

[1.0 *val.*] iii. o perímetro de $\mathcal{A}$.

3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -1 \ \wedge \ y \leq x - 1 \ \wedge \ y \leq -\ln x\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.0 *val.*] (b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox.

[1.5 *val.*] (c) Usando integrais, **calcule** a área de $\mathcal{B}$ em função do eixo Oy.

[0.75 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $\displaystyle\int \ln x \, dx = x\big(\ln(x) - 1\big) + c, \ c \in \mathbb{R}$.

(b) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$; (II) $\displaystyle\int_1^3 \ln x \, dx$; (III) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x \, dx$.

[1.5 *val.*] i. Indique, justificando, quais dos integrais são impróprios.

[1.0 *val.*] ii. Determine a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

5. Considere a seguinte função, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$.

[0.75 $val.$] (a) Determine o domínio de f e estude a função quanto à continuidade.

[1.5 $val.$] (b) Indique, justificando, valores a e b tais que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ seja um integral:

i. definido;

ii. impróprio de 1ª espécie;

iii. impróprio de 2ª espécie.

[1.0 $val.$] 6. (a) Mostre que a equação diferencial $\sqrt{1-y^2}\,dx - x\,dy = 0$ é de variáveis separáveis e determine a **solução** $y = f(x)$.

[1.0 $val.$] (b) Utilizando a mudança de variável $\boxed{v = y\,x}$, $x > 0$ mostre que a equação diferencial $v + \sqrt{x^2 - v^2} = xv'$ reduz-se à equação diferencial da alínea (a).

[0.75 $val.$] 7. (a) Sejam t a variável relativa ao tempo e $y = y(t)$ a relativa à temperatura no instante t. Sabendo que $y' = y'(t)$ traduz a velocidade da variação da temperatura no instante t, determine uma equação diferencial que traduza a seguinte "lei": *A diferença entre a velocidade de arrefecimento e o triplo da temperatura é igual à exponencial do tempo.*

[1.25 $val.$] (b) Determine o integral geral da equação da alínea anterior.
NOTA: Se não resolveu a alínea (a), considere a equação $xy' - 3y = 1$.