Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº6 — Data limite de entrega: 11/nov/2016 (18h)

Domínios planos

1. Definidos por limitação de curvas:

Represente graficamente a região

b) limitada por $y = x^2 + 2x - 1,\ y = 0\,.$

2. Definidos por interseção de condições:

Represente graficamente as regiões

b) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq x + 1\ \wedge\ y \geq x^2 - x - 2\}\,.$

Integral definido

[A. Conhecimento] Definição e propriedades

3) Seja $f(x) = 2|x-1|\,.$ Determine $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx\,.$

[A. Conhecimento] Aplicações

Calcule a área de cada uma das regiões indicadas:

5) limitada por $y = x^2 + 2x - 1,\ y = 0\,.$

10) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq x + 1\ \wedge\ y \geq x^2 - x - 2\}\,.$

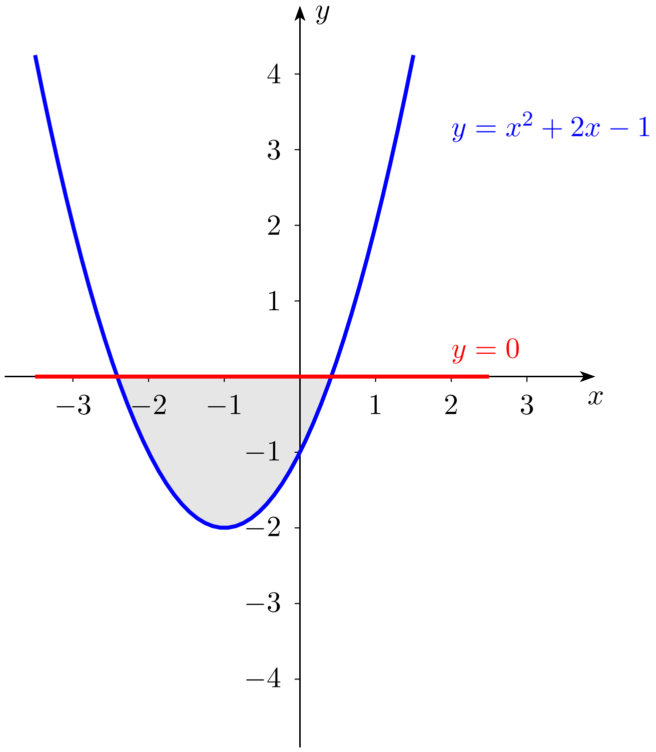
Observação: Note que se tratam das regiões dos exercícios 1 e 2 de Dominios Planos.

DOMÍNIOS PLANOS

1. Definidos por limitação de curvas:

b) Região limitada por $y = x^2 + 2x - 1,\ y = 0$.

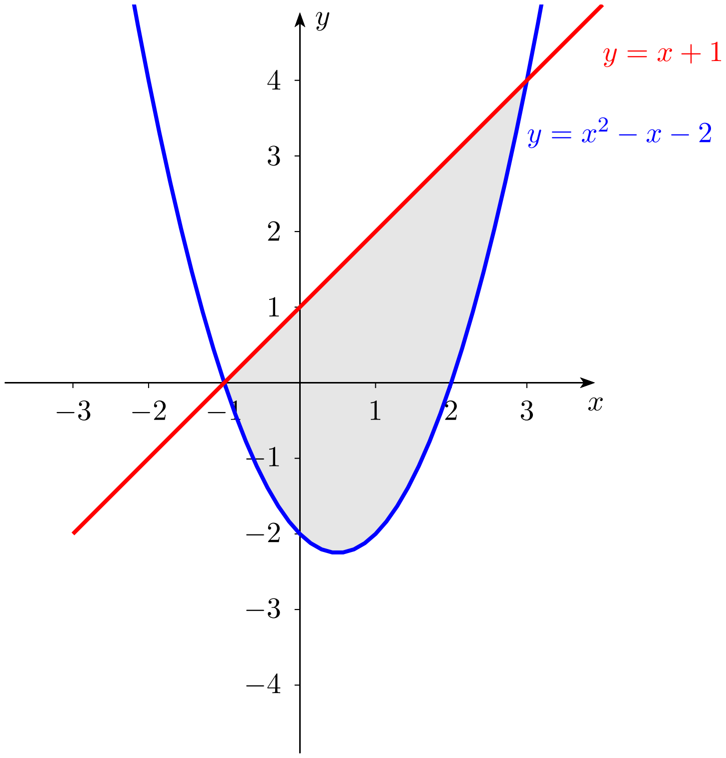
A representação gráfica da região é a seguinte:



2. Definidos por interseção de condições:

b) Região $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \leq x + 1 \ \wedge\ y \geq x^2 - x - 2\}$.

A representação gráfica da região é a seguinte:



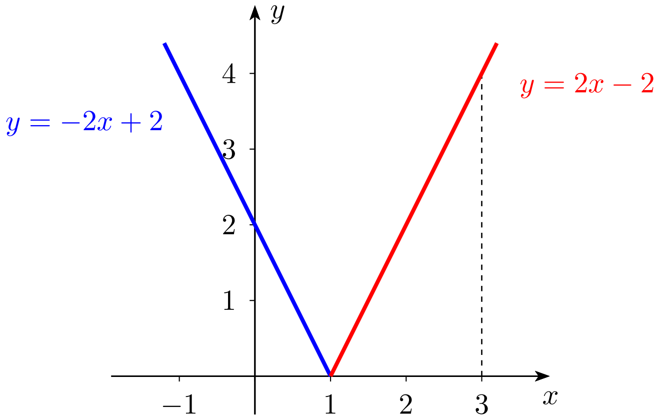
INTEGRAL DEFINIDO

[A. Conhecimento] Definição e propriedades

3) Começamos por notar que

$$f(x) \;=\; 2|x-1| \;=\; \begin{cases} 2(x-1) & , x-1 \geq 0 \\ 2(-x+1) & , x-1 < 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 2x-2 & , x \geq 1 \\ -2x+2 & , x < 1 \end{cases} \;,$$

cuja representação gráfica é



Sempre o integral uma soma relativa à função f, então

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)\,dx \;&=\; \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 -2x+2\,dx + \int_1^3 2x-2\,dx \\ &=\; -2\int_0^1 \underbrace{x^1\cdot 1}_{R2}\,dx + \int \underbrace{2}_{R1}\,dx + 2\int_1^3 \underbrace{x^1\cdot 1}_{R1}\,dx - \int \underbrace{2}_{R1}\,dx \\ &=\; -2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \Big[2x\Big]_0^1 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \Big[2x\Big]_1^3 \\ &=\; \Big[-x^2+2x\Big]_0^1 + \Big[x^2-2x\Big]_1^3 \;=\; (-1+2)-(0)+(9-6)-(1-2) \;=\; 5\,. \end{aligned}$$

[A. Conhecimento] Aplicações

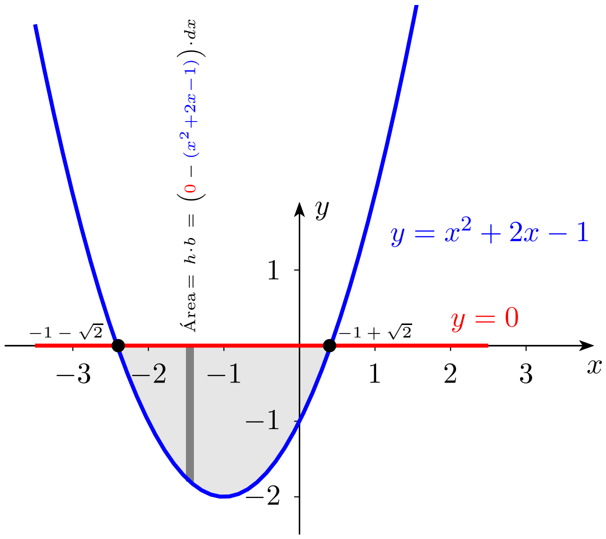
Observamos que as regiões já foram representadas no exercício referente aos domínios planos.

5) Área da região limitada por $y = x^2+2x-1,\ y=0$.

Começamos por notar que as abcissas que definem os extremos da região no eixo Ox são dados por

$$x^2+2x-1=0 \;\Leftrightarrow\; x=\tfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} \;\Leftrightarrow\; x=\tfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; x=-1-\sqrt{2} \quad\vee\quad x=-1+\sqrt{2}\,,$$

pelo que descrevendo a região em função da variável x, tem-se



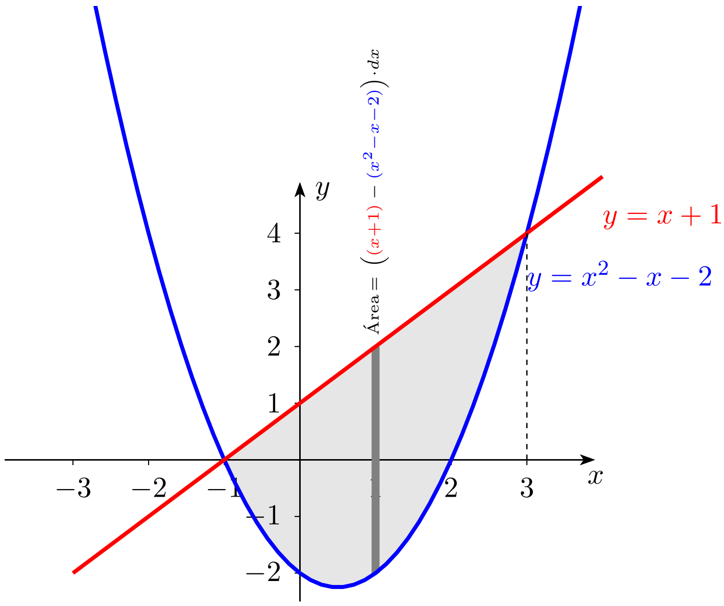
$$\begin{aligned}
\text{Área} \;&=\; \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} \Big(0 - (x^2+2x-1)\Big)\,dx \;=\; \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-x^2-2x+1)\,dx \;=\; \Big[-\frac{x^3}{3} - 2\,\frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} \\
&=\; \Big(-\frac{1}{3}(-1+\sqrt{2})^2 - (-1+\sqrt{2})^2 - 1 + \sqrt{2}\Big) - \Big(-\frac{1}{3}(-1-\sqrt{2})^2 - (-1-\sqrt{2})^2 - 1 - \sqrt{2}\Big).
\end{aligned}$$

10) Área da região $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \le x+1 \;\wedge\; y \ge x^2 - x - 2\}$.

Os pontos de intersecção da recta e da parábola são os pontos de abcissas $x = -1$ e $x = 3$,

$$\underbrace{x^2 - x - 2}_{\text{parábola}} = \underbrace{x+1}_{\text{recta}} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -1 \;\vee\; x = 3$$

pelo que descrevendo a região em função da variável x, tem-se



e então

$$\begin{aligned}
\text{Área} \;&=\; \int_{-1}^{3} \Big((x+1) - (x^2-x-2)\Big)\,dx \;=\; \int_{-1}^{3} \big(-x^2+2x+3\big)\,dx \;=\; \Big[-\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} + 3x\Big]_{-1}^{3} \\
&=\; \Big(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\Big) - \Big(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1)\Big) \;=\; -9+9+9 - \Big(\frac{1}{3} + 1 - 3\Big) \\
&=\; 9 - \frac{1}{3} + 2 \;=\; \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$