Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - parte 2 - Engenharia Informática

20 de Janeiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[1.0 *val.*] 1. Indique, justificando, o valor lógico da afirmação: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{8n^7}}$ é uma série de <u>Dirichlet</u>, <u>convergente</u>.

[1.0 *val.*] 2. Prove, justificando, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}(1-e^{-1})$ é uma série de <u>Mengoli</u>, <u>convergente</u> e de <u>soma</u> $\frac{1}{e}$.

[2.0 *val.*] 3. Determine, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.

[2.0 *val.*] 4. Usando as regras de primitivação imediata, determine $\displaystyle\int \frac{e^{6x+1}+e^{3x}}{\sqrt{25-e^{6x}}}\,dx$.

[2.0 *val.*] 5. Usando a técnica de primitivação por partes, determine $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

[5.0 *val.*] 6. Sabe-se que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx = \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Prove a igualdade anterior recorrendo

(a) à definição de primitiva;

(b) às regras de primitivação imediata;

(c) à técnica de primitivação por substituição.

[7.0 *val.*] 7. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\sin(2x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{3x^3-6x^2+5x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \left(\ln 3 + \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - parte 1 - Engenharia Informática

20 de Janeiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[4.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

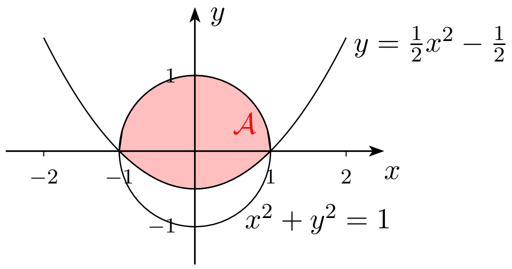
(a) Determine o domínio e o contradomínio de $f(x)$.

(b) Calcule o valor de $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

(c) Determine os zeros de $f(x)$.

(d) Caracterize a função inversa de f indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[4.5 *val.*] 2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



(a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(b) Usando unicamente cálculo integral, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área de $\mathcal{A}$;

ii. o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy;

iii. o perímetro de $\mathcal{A}$.

[3.5 *val.*] 3. Considere a região do plano $\mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1 \wedge y \leq e^{-x} \wedge y \geq x + 1\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

(b) Utilizando cálculo integral, calcule a área da região $\mathcal{B}$.

(c) Usando cálculo integral, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno de Oy.

[4.0 *val.*] 4. (a) Usando a definição de primitiva, prove que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx = \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(b) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$.

i. Indique, justificando, quais dos integrais são impróprios.

ii. Determine a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

[1.0 *val.*] 5. Determine o integral geral da equação diferencial de variáveis separáveis $x\,y' = y + \dfrac{1}{y}$.

[3.0 *val.*] 6. Considere as seguinte equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

(i) $x\,y' = y + x^2$; (ii) $x\,y' = y - x\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$; (iii) $x\,y = y$.

(a) Identifique as equações diferenciais e classifique-as, justificando, quanto ao tipo.

(b) Determine o integral geral de <u>uma</u> das equações diferenciais dadas.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I - Engenharia Informática

20 de Janeiro de 2014 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(a) Determine os zeros de $f(x)$.

(b) Caracterize a função inversa de f indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[4.0 *val.*] 2. Considere a região $\mathcal{A}$ definida por $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

(b) Usando unicamente cálculo integral, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área de $\mathcal{A}$;

ii. o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy;

iii. o perímetro de $\mathcal{A}$.

[5.0 *val.*] 3. (a) Sabe-se que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx = \operatorname{arctg}(2\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}$. Prove a igualdade anterior recorrendo

i. à definição de primitiva;

ii. às regras de primitivação imediata;

iii. à técnica de primitivação por substituição.

(b) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx$.

i. Indique, justificando, quais dos integrais são impróprios.

ii. Determine a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

[4.0 *val.*] 4. Considere as seguinte equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

(i) $x\,y' = y + x^3\sqrt{x+1}$; (ii) $\dfrac{e^{-x^2}}{x^3}\,y' = y + \dfrac{1}{y}$.

(a) Classifique, justificando, o tipo de cada uma das equações anteriores.

(b) Determine o integral geral de <u>uma</u> das equações diferenciais dadas.

[2.0 *val.*] 5. Determine, justificando, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$.

[3.0 *val.*] 6. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\sin(2x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$.