ENGENHARIA INFORMÁTICA (deslizante) – 1º ano

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Frequência 2

13-junho-2016 **Duração:2h**

Importante:
A resolução completa de cada pergunta inclui a justificação do raciocínio utilizado bem como a apresentação de todos os cálculos efetuados. Não é permitida utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

1-Considere a seguinte equação diferencial $(t-1)dx-(\sqrt{4-x^2})dt=0$.

a)Justifique que se trata de uma equação diferencial de variáveis separáveis e determine a solução $x=f(t)$.

Resolução:

$(t-1)dx-(\sqrt{4-x^2})dt=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\dfrac{1}{(t-1)}dt$ é uma equação diferencial de variáveis separáveis

b)Resolva a equação diferencial dada sujeita à condição $f(0)=-1$.

Resolução:

$$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{1}{(t-1)}dt \Leftrightarrow \int\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=ln|t-1|+C \Leftrightarrow arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=ln|t-1|+C$$

Para $f(0)=-1$ tem-se $arcsen\left(-\dfrac{1}{2}\right)=ln|0-1|+C \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6}=C$

2-Considere a seguinte equação diferencial $\dfrac{1}{2x}y'-y=\dfrac{cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x^3}}$.

a)Mostre que $y(x)=4e^{x^2}sen(\sqrt{x})$ é solução da equação diferencial dada.

Resolução:

$$y(x)=4e^{x^2}sen(\sqrt{x}) \Leftrightarrow y'(x)=4\left(e^{x^2}\right)'sen(\sqrt{x})+4e^{x^2}\left(sen(\sqrt{x})\right)'$$

$$\Leftrightarrow y'(x)=4\left(2xe^{x^2}\right)sen(\sqrt{x})+4e^{x^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}cos(\sqrt{x})\right)$$

$$\Leftrightarrow y'(x)=8xe^{x^2}sen(\sqrt{x})+2e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}cos(\sqrt{x})$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$\frac{1}{2x}\left(8xe^{x^2}sen(\sqrt{x})+2e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}cos(\sqrt{x})\right)-4e^{x^2}sen(\sqrt{x})=\frac{cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x^2}sen(\sqrt{x})+\frac{1}{x}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}cos(\sqrt{x})-4e^{x^2}sen(\sqrt{x})=\frac{cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}e^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}cos(\sqrt{x})=\frac{cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x^3}}$$

É uma proposição verdadeira para todo o x

b)Resolva a equação dada e calcule a solução geral da equação que passa pelo ponto $(0,1)$.

$$y' - 2xy = \frac{2x\,cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x^3}} \Leftrightarrow y' \underbrace{-2x}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{2cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x}}}_{Q(x)}$$ é uma equação linear de 1ª ordem.

Cálculo do fator integrante

$$I(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

Multiplicar ambos os membros da equação pelo fator integrante:

$$y' - 2xy = \frac{2cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow e^{-x^2}\left(y' - 2xy\right) = e^{-x^2}\left(\frac{2cos(\sqrt{x})e^{x^2}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x^2}\left(y' - 2xy\right)}_{\left(ye^{-x^2}\right)'} = \frac{2cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left(ye^{-x^2}\right)' = \frac{2cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow ye^{-x^2} = \int \frac{2cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx + C$$

$$ye^{-x^2} = 4\int \frac{cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx + C \Leftrightarrow y = 4e^{x^2}\left(sen(\sqrt{x}) + C\right)$$

Solução particular

Para $(0,1)$ obtém-se $y = 4\left(sen(0) + C\right) \Leftrightarrow 1 = 4\left(sen(0) + C\right) \Leftrightarrow 1 = 4C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$

3- Complete $[..]$ com expressões por forma a obter primitivas imediatas, justificando qual a regra que foi aplicada

i. $\int \frac{[..]}{\sqrt{cos\,ec^3(2x)}}dx$ ii. $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx$

Resolução:

i. $\int \frac{[..]}{\sqrt{cos\,ec^3(2x)}}dx = \int [..] cos\,ec^{-3/2}(2x)dx = \int [k\,cos(2x)] sen^{3/2}(2x)x$ aplicação da Regra 2

ou $\int \frac{[..]}{\sqrt{cos\,ec^3(2x)}}dx = \int [..] cos\,ec^{-3/2}(2x)dx = \int [k\,cos\,ec(2x)\,cot\,g(2x)] cos\,ec^{-3/2}(2x)x$ aplicação da Regra 2

ii. $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx = \frac{1}{e}\int \frac{e^x}{4+e^{[2x]}}dx$ ou $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx = \int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[2x-2]}}dx$ aplicação da Regra 19

ou $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx = \frac{1}{e}\int \frac{e^x}{4+e^{[x]}}dx$ ou $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx = \int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[x-1]}}dx$ aplicação da Regra 5

ou $\int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[..]}}dx = \int \frac{e^{x-1}}{4+e^{[K]}}dx$ aplicação da Regra 3

4-Resolva primitiva $\int \frac{sen\,x(1-cos\,x)}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx$ utilizando a técnica da decomposição e a primitivação imediata.

Resolução:

$$\int \frac{sen\,x(1-cos\,x)}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx=\int \frac{sen\,x-sen\,x\,cos\,x}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx=\int \frac{sen\,x}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx+\int \frac{sen\,x\,cos\,x}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx$$

$$=\int \frac{sen\,x}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx+\int \frac{sen\,x\,cos\,x}{\sqrt{4-9cos^2(x)}}dx=\int \frac{sen\,x}{2\sqrt{1-\underbrace{\frac{9}{4}cos^2(x)}_{f^2}}}dx-\frac{1}{18}\int \underbrace{-18sen\,x\,cos\,x}_{f'}\left(\underbrace{4-9cos^2(x)}_{f}\right)^{-1/2}dx$$

$$=\frac{1}{3}arcsen\left(\frac{3}{2}cos(x)\right)-\frac{1}{9}\left(4-9cos^2(x)\right)^{1/2}+C, C\in\Re$$

5-Calcule $\int \frac{\sqrt[6]{ln\,x}}{x(\sqrt[3]{ln\,x}+1)}dx$ recorrendo à mudança de variável $ln\,x=t^6$ com $x\in[1,+\infty[$.

Resolução:

Mudança de variável

$x\to t \qquad\qquad t\to x$

$ln\,x=t^6 \qquad\qquad t=\sqrt[6]{ln\,x}$

$x=e^{t^6}$

$dx=6t^5e^{t^6}dt$

$$\int \frac{\sqrt[6]{ln\,x}}{x(\sqrt[3]{ln\,x}+1)}dx=\int \frac{t}{e^{t^6}(t^2+1)}6t^5e^{t^6}dt=6\int \frac{t^6}{t^2+1}dt$$, fração imprópria,

$$\begin{array}{l|l}
t^6+0t^5+0t^4+0t^3+0t^2+0t+0 & t^2+1 \\
\underline{-t^6 \qquad -t^4} & t^4-t^2+1 \\
\qquad -t^4 & \\
\qquad \underline{t^4 \qquad +t^2} & \\
\qquad\qquad t^2 & \\
\qquad\qquad \underline{-t^2 \qquad -1} & \\
\qquad\qquad\qquad -1 &
\end{array}$$

$$6\int \frac{t^6}{t^2+1}dt=6\left(\int t^4-t^2+1+\frac{-1}{t^2+1}dt\right)=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-arctgt\right)$$

Retomando *x:*

$$6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{ln\,x}\right)^5}{5}-\frac{\left(\sqrt[6]{ln\,x}\right)^3}{3}+\left(\sqrt[6]{ln\,x}\right)-arctg\left(\sqrt[6]{ln\,x}\right)\right)+C, C\in\Re$$

6-Resolva a primitiva $\int \frac{2}{x}arctg(ln\,x)dx$ utilizando para o efeito a técnica de primitivação por partes.

Resolução:

$$\int \underbrace{\frac{2}{x}}_{u}\underbrace{arctg(\ln x)}_{v}dx = \int \frac{2}{x}dx\,arctg(\ln x) - \int \int \frac{2}{x}dx\left(arctg(\ln x)\right)' dx$$

$$= 2\ln x\,arctg(\ln x) - \int 2\ln x\frac{1/x}{1+(\ln x)^2}dx = 2\ln x\,arctg(\ln x) - \ln\left(1+(\ln x)^2\right) + C, C \in \Re$$

7-Determine as seguintes primitivas:

a. $\int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ b. $\int \frac{2}{sec^5(x)\cot g^2(x)}dx$ c. $\int \frac{3x^2-3x-2}{(x-1)(x^2-1)}dx$

Resolução:

a.

$$\int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{4}{\sqrt{x}}dx - 2\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx = 4\int x^{-1/2}dx - 2\int x^{-1/6}dx + \int x^{1/6}dx$$

$$= 8x^{1/2} - \frac{12}{5}x^{5/6} + \frac{6}{7}x^{7/6} + C, C \in \Re$$

b.

$$\int \frac{2}{sec^5(x)\cot g^2(x)}dx = 2\int \frac{cos^5(x)sen^2(x)}{cos^2(x)}dx = 2\int cos^3(x)sen^2(x)dx = 2\int cos(x)cos^2(x)sen^2(x)dx$$

$$= 2\int cos(x)(1-sen^2(x)sen^2(x)dx = 2\int cos(x)sen^2(x) - cos(x)sen^4(x)dx = 2\left(\frac{sen^3(x)}{3} + \frac{sen^5(x)}{5}\right) + C, C \in \Re$$

c.

$\frac{3x^2-3x-2}{(x-1)(x^2-1)}$ fração própria

Fatorização do denominador

$(x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

Decomposição em elementos simples

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)} \Leftrightarrow 3x^2-3x-2 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$$

$$\begin{array}{r} x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\begin{cases} 3-3-2=2A \Leftrightarrow A=-1 \\ 3+3-2=4C \Leftrightarrow C=1 \\ -2=-1-B+1 \Leftrightarrow B=2 \end{cases}$$

Cálculo da primitiva

$$\int \frac{3x^2-3x-2}{(x-1)(x^2-1)}dx = \int \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)}dx = \int \frac{-1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$= (x-1)^{-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C, C \in \Re$$

Cotação

1a	1b	2a	2b	3	4	5	6	7a	7b	7c
0,5	1	1	1,5	3	2	3	2	2	2	2