Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Álgebra Linear – Exercícios de revisão sobre os **capítulos III e IV**

(Engenharia Informática e Curso Europeu de Informática)

---

1. (a) Determine o valor real de a de modo que os vectores $\mathbf{u} = (a, 2, a)$ e $\mathbf{v} = (4, -3, 0)$ sejam perpendiculares.

   (b) Escreva a equação da recta que contém o ponto $(1, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano de equação $x - 2z = 1$.

   (c) Determine a equação do plano que passa na origem e é paralelo aos vectores $\mathbf{u} = (4, -2, 3)$ e $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$.

   (d) Determine e represente geometricamente a imagem do triângulo T de vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$ pela transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, onde

   $$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ \theta = \frac{\pi}{2}.$$

   Que efeito tem esta transformação sobre o triângulo?

   (e) Averigue se transformação

   $$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (0, x - y, 2x + y)$$

   é linear.

2. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ considere os vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = (2, 2, 1)$.

   (a) Averigue se conjunto $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine uma condição que caracterize o subespaço vectorial $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \rangle$.

   (c) Averigue se $(0,\ 8,\ -4) \in \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle$.

   (d) Relacione $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle$ com $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \rangle$.

3. Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_4 = x_1 + x_3\}$.

   (a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Determine o valor de a de modo que o vector $\mathbf{u} = (1, 3, a, -2)$ pertença a S.

   (c) Determine uma base e a dimensão de S.

4. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Determine os espaços próprios de A.

   (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz P e uma matriz D tais que $A = PDP^{-1}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A. (**Sugestão:** Calcule o determinante usando o desenvolvimento de Laplace na $3^{\underline{a}}$ linha.)

(b) Usando os valores próprios de A, calcule $\det(A)$ e diga se A é singular ou não singular.

(c) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$.

(d) Diga, justificando, se A é diagonalizável ou não.