Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (PARTE 1) - Engenharia Informática

19 de Janeiro de 2015 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[1.25 *val.*] 1. (a) Caracterize a função inversa de $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + 2\arccos(x-1)$, identificando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[1.0 *val.*] (b) Comente a afirmação "$\arccos(-1) = -\pi$."

[0.75 *val.*] (c) Calcule $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

[1.0 *val.*] (d) Resolva a seguinte equação: $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arccos(x-1)$.

[2.0 *val.*] 2. Determine o valor lógico da seguinte afirmação:

"A área da região ilimitada $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right\}$ é igual a $\frac{\pi}{4}$."

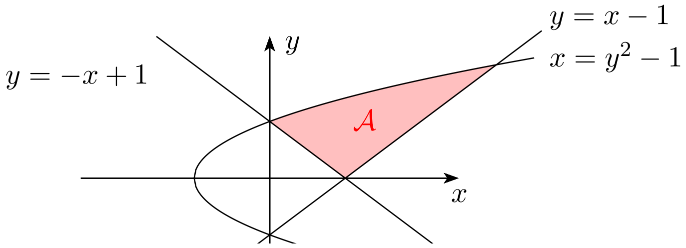
3. Considere a região $\mathcal{B}$ definida por $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right\}$.

[0.75 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.0 *val.*] (b) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy.

[1.25 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{B}$ usando x como variável independente.

4. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:



[2.5 *val.*] (a) Calcule a área de $\mathcal{A}$.

[1.5 *val.*] (b) Usando cálculo integral, indique uma expressão simplificada que lhe permitam calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox.

[1.0 $val.$] 5. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $\ln\left(1-\dfrac{4}{x+2}\right)$ é uma primitiva de $\dfrac{4}{x^2-4}$.

(b) Considere os seguintes integrais:

I. $\displaystyle\int_2^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx\,;$ II. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx\,.$

[1.25 $val.$] (i) Identifique, justificando, qual dos integrais é impróprio e determine a sua natureza;

[0.75 $val.$] (ii) O que pode concluir da natureza do integral $\displaystyle\int_0^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx$? Justifique a sua resposta.

6. Considere as seguinte equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

(i) $x\,y' - y = x^2 e^x\,;$ (ii) $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = x\,;$ (iii) $\sqrt{4-x^2}\,dy - (y+1)^2\,dx = 0\,.$

[0.75 $val.$] (a) Mostre que $y = x\,e^x$ é uma solução da equação diferencial (i).

[1.25 $val.$] (b) Resolva equação diferencial (ii).

[2.0 $val.$] (c) Prove que a equação diferencial (iii) é de variáveis separáveis e resolva-a sujeita à condição inicial $y(0) = 1\,.$

AM I. ENG. INFORMÁTICA

19. Jan. 2015. PARTE 1.

①

a) $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arccos(x-1)$

0.25 $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x-1 \leq 1 \} = [0, 2]$
$0 \leq x \leq 2$

Note-se ainda que f é injectiva em D_f e portanto é invertível naturalmente

0.5 $f^{-1}(y) = ?$ $\quad y = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arccos(x-1) \Rightarrow y - \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \arccos(x-1) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \arccos(x-1)$

$\underset{\text{em } D_f}{\Longleftrightarrow} \cos\left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x-1 \Rightarrow x = 1 + \cos\left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

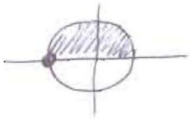
0.5 $D_{f^{-1}} = CD_f = \{ y \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \leq \pi \} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$0 \leq y - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi$

$\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f^{-1}: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] &\longrightarrow [0, 2] \\ y &\longmapsto x = 1 + \cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

b) A afirmação é falsa pois $\arccos(-1) = \pi$ já que $CD_{\arccos} = [0, \pi]$



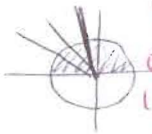
1.0

OBSERVAÇÃO

Pode considerar-se a afirmação como verdadeira desde que se defina para restrição (principal) do cosseno um intervalo conveniente, p.e., $[-\pi, 0]$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3+8}{6}$

0.25



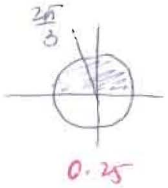
0.25 (justificação)

$= \frac{11}{6}$

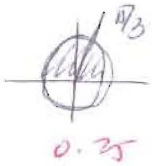
0.

NOTA: tudo certo mas sem justificação cot. total = 0.75

d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos(x-1) \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \arccos(x-1)$

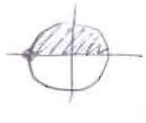


0.25 (já feito em c)



0.25

$\Longleftrightarrow \pi = \arccos(x-1)$ 0.25



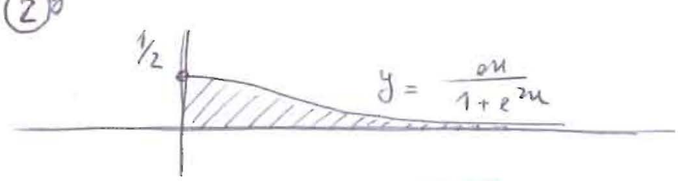
0.25 (sem escrever cos π

$\Longleftrightarrow x - 1 = -1$

$\Longleftrightarrow x = 0$ [illegible]

NOTA: Errar um dos termos e fazer $\arccos(x-1) = \odot \boxed{\Longleftrightarrow} x - 1 = \cos \odot$
a cotação total é 0.5

②

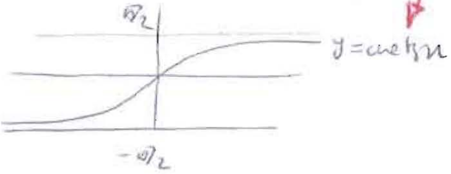


0.25 — 0.25 + 0.25 — 0.25

$$\text{Área} = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx} = \boxed{\lim_{B\to+\infty}} \int_0^B \boxed{\frac{e^x}{1+(e^x)^2}}\,dx = \lim \left[\operatorname{arctg}(e^x)\right]_0^B$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\Big(\underbrace{\operatorname{arctg}(e^B)}_{\substack{+\infty \\ \to \frac{\pi}{2}\ 0.25}} - \underbrace{\operatorname{arctg}(\cancel{e^0})}_{\substack{1 \\ = \pi/4\ 0.5}}\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad 0.25$$

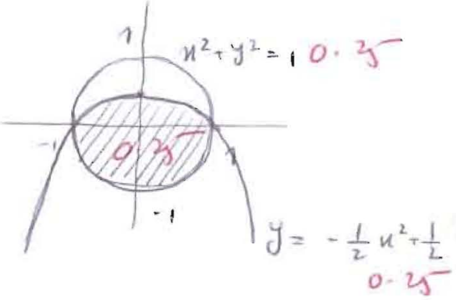
A afirmação é verdadeira.



③

a) $x^2+y^2=1 \longrightarrow \odot \quad C(0,0),\ R=1$

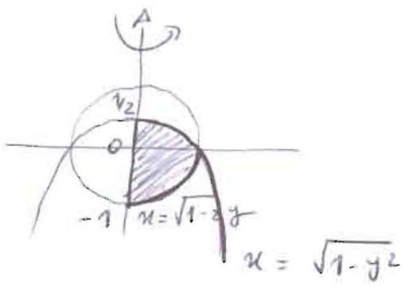
$y = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \longrightarrow$ parábola $\cap$, $V(0,+\frac{1}{2})$



b) $V_{oy} = ?$ $\quad x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2}$ 0.25

$y = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \Rightarrow 2y = -x^2+1 \Rightarrow x^2 = 1-2y \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-2y}$ 0.25

Atendendo à simetria e consequente sobreposição na rotação, tem-se



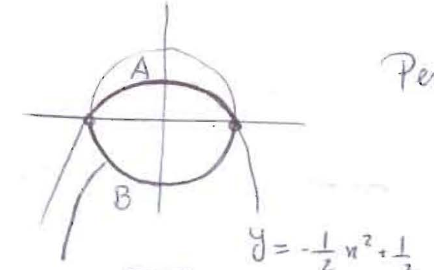
$$V_{oy} = \pi \int_{-1}^{0} R_{ext}^2 - R_{int}^2\,dy + \pi \int_0^{1/2} R_{ext}^2 - R_{int}^2$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy + \pi \int_0^{1/2} \left(\sqrt{1-2y}\right)^2 d$$

0.25 — 0.25

$$= \pi \int_{-1}^{0} (1-y^2)\,dy + \pi \int_0^{1/2} (1-2y)\,d$$

c)



Perímetro = comp(A) + comp(B)

0.25 — 0.25

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left[\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)'\right]^2}\,dx + \underbrace{\int_{-1} \sqrt{1+\left[\left(-\sqrt{1-x^2}\right)'\right]^2}}_{= \frac{2\pi \cancel{R}^1}{2}\ 0.25}$$

(ou simplific

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(-x)^2}\,dx + \pi$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \quad 0.25 \quad + \pi$$

④

a) Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos de intersecção das curvas:

$$\begin{cases} y = x-1 \\ x = y^2-1 \end{cases} \longrightarrow y = y^2-1-1 \Rightarrow y^2-y-2=0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$y = \textcircled{2} \vee y = \textcircled{-1} \quad 0.5$$

$$x = 4-1 = 3 \qquad y = -1-1 = -2$$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+1 \end{cases} \longrightarrow x-1 = -x+1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad 0.25$$

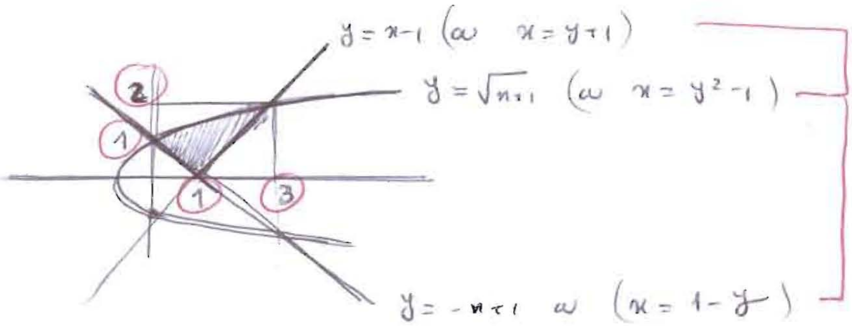
$$y = 1-1 = 0$$

Então

$x = y^2-1$

$x+1 = y^2$

$y = \pm\sqrt{x+1}$



0.25

Recorrendo a x como variável indep, tem-se

$$\text{Área} = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{x+1} - (-x+1)}_{0.25}\, dx + \int_1^3 \underbrace{\sqrt{x+1} - (x-1)}_{0.25}\, dx$$

$$= \int_0^1 \left((x+1)^{1/2} + x - 1\right) dx + \int_1^3 \left((x+1)^{1/2} - x + 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 \; 0.25 + \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 \; 0.25$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(2)^3} + \frac{1}{2} - 1 - \left(\frac{2}{3} \times 1 + 0\right) + \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{3^2}{2} + 3 - \left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{(2)^3}}{1} - \frac{1}{2} +\right.$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 2^3 - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3}} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{11}{2} + 3$$

$$= \frac{28 - 33 + 18}{6}$$

$$= \frac{13}{6} \quad 0.5$$

Alternativa

Recorrendo a y como variável independente, temos

$$\text{Área} = \int_0^1 \underbrace{(y+1) - (1-y)\,dy}_{} \overset{0.25}{} + \int_1^{2} \underbrace{(y+1) - (y^2-1)}_{} \overset{0.25}{}\, dy$$

$$= \int_0^1 2y \, dy + \int_1^{2} (-y^2+y+2)\, dy$$

$$= 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \underset{0.25}{} + \left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_1^{2} \underset{0.25}{}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{4}{2} + 4 - \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{3} + 6 + \frac{1}{3} + \frac{5}{2}$$

$$= 7 - \frac{7}{3} - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{42-14-15}{6}$$

$$= \frac{13}{6} \quad 0.5$$

b) Tendo em conta a alínea anterior, temos

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 \underbrace{(\sqrt{x+1})^2 - (-x+1)^2}_{0.5}\, dx + \pi \int_1^3 \underbrace{(\sqrt{x+1})^2 - (x-1)^2}_{0.5}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x+1 - (x^2-2x+1)\right) dx + \pi \int_1^3 \left(x+1 - (x^2-2x+1)\right) dx$$

$$= \underbrace{\pi \int_0^1 (-x^2+3x)\, dx + \pi \int_1^3 (-x^2+3x)\, dx}_{0.5}$$

$$= \pi \int_0^3 (-x^2+3x)\, dx$$

⑤

a) Basta verificar que $\left(\ln\left(1-\frac{4}{x+2}\right)\right)' = \frac{4}{x^2-4}$ $\oplus$

ora

$$\left(\ln\left(1-\frac{4}{x+2}\right)\right)' = \frac{\left(1-\frac{4}{x+2}\right)'}{1-\frac{4}{x+2}} \underset{0.25}{} = \frac{-\left(\frac{4}{x+2}\right)'}{\frac{x+2-4}{x+2}} = \frac{-\left(-\frac{4}{(x+2)^2}\right)}{\frac{x-2}{x+2}} \underset{0.25}{}$$

$$= \underset{\oplus}{\frac{4}{(x+2)^2}} \cdot \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \underset{0.25}{\frac{4}{x^2-4}} \quad \text{c.q.d.}$$

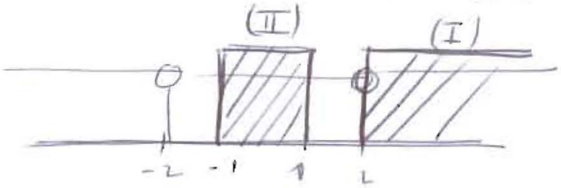
b)

i) Seja $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$

0.25 $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$



No caso do integral I temos $[\overset{\downarrow}{2}, 6] \not\subset D_f$ e além disso

0.25 $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{4}{x^2-4} = \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty \longrightarrow$ f é ilimitada em $[2,6]$

Logo o integral I é impróprio de 2.ª espécie. Assim

$$\int_2^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx \overset{0.25}{=} \lim_{A \to 2^+} \int_A^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx$$

$$\underset{(a)}{=} \lim_{A \to 2^+} \overset{0.25}{\left[\ln\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) \right]_A^6} = \lim_{A \to 2^+} \left(\ln\left(1 - \frac{4}{8}\right) - \ln\left(1 - \frac{}{A}\right.\right.$$

$$= \lim_{A \to 2^+} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\ln\Big(\underbrace{1 - \underbrace{\frac{4}{A+2}}_{\to 4^+}}_{\to 1^-}\Big)}_{\to 0^+} \right) = +\infty \longrightarrow \text{o int. é divergente}$$

$\underset{\to +\infty}{}$

0.25

ii) uma vez que $\displaystyle\int_0^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx \overset{0.5}{=} \underbrace{\int_0^{2} \frac{6}{x^2-4}\,dx}_{[illegible]} + \underbrace{\int_2^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx}_{\text{int. impróprio}}$

div
(A)

Então o integral é div.

0.25

⑥

a) $y = x \cdot e^x$ é solução da eq. dif (i):

$x \cdot y' - y = x^2 \cdot e^x$: $x \cdot (x e^x)' - (x e^x) = x^2 \cdot e^x$ 0.25

$\Leftrightarrow x\,(1 \cdot e^x + x \cdot e^x) - x e^x = x^2 \cdot e^x$ 0.25

$\Leftrightarrow \cancel{x \cdot e^x} + x^2 \cdot e^x - \cancel{x e^x} = x^2 \cdot e^x$ ✓ 0.25

NOTA: se resolveu directo a equação mas não definiu o valor de C que dá origem à solução particular: $\boxed{0.25}$

b) $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x$ eq. dif. linear de 1º ordem 0.25 (Pode ser implícito)

$$F.I.: \quad e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \cancel{C}} \quad 0.25$$

$$= e^{\ln|1-x^2|^{-1/2}}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad 0.25$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int -2x\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx \quad 0.25$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C$$

$$\Rightarrow y = -(1-x^2) + C\cdot\sqrt{1-x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \quad 0.25$$

c) $\sqrt{4-x^2}\,dy - (y+1)^2\,dx = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2}\,dy = (y+1)^2\,dx$$

$$\Rightarrow (y+1)^{-2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$ es. va. separadas 0.25

$$\Rightarrow \int (y+1)^{2}\,dy = 2\int \frac{1/2}{\boxed{\sqrt{4}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx \quad 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{(y+1)^{-1}}{-1} = \frac{2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$ 0.25 0.25

$$\Rightarrow -\frac{1}{y+1} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \quad 0.5$$

$$-\frac{1}{y+1} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad 0.25$$

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I (parte 2) - Engenharia Informática
19 de Janeiro de 2015 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Prove, justificando, que:

(a) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-2n}}{3^n}$ é <u>geométrica</u>, <u>convergente</u> e de soma $\dfrac{1}{11}$;

(b) a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$ é de <u>Mengoli</u> e <u>convergente</u>.

[2.0 *val.*] 2. Determine, justificando, a natureza das seguintes série numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{8}{n^6}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{e}{n}\right)$.

[4.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int \cdot \quad \sin x \, dx$.

Complete, justificando, o espaço assinalado com $\cdot$ por forma a que possam ser aplicadas as seguintes regras de primitivação imediata (Tabelas de Matemática, página 3):

(a) Regra 1; (b) Regra 2; (c) Regra 5; (d) Regra 7; (e) Regra 18; (f) Regra 19.

[3.0 *val.*] 4. Determine, a primitiva $\displaystyle\int e^{2x}(1+e^x)^2 \, dx$ usando para o efeito:

(a) a técnica de primitivação por decomposição e imediata;

(b) a técnica da primitivação por partes.

[3.5 *val.*] 5. (a) Usando a técnica de primitivação de funções trigonométricas, determine $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cosec} x} \, dx$.

(b) Usando a mudança de variável $x = 2\sin t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, mostre que a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3} \, dx$ reduz-se ao cálculo da primitiva da alínea (a) e estabeleça o respectivo resultado.

6. Calcule as seguintes primitivas:

[2.0 *val.*] (a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-4} \, dx$;

[2.0 *val.*] (b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^2}{\sqrt{1-x^6}} \, dx$;

[1.5 *val.*] (c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Resolução Exame - 19. jan. 15

Parte 2

1 a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-2n}}{3^n}$ é geométrica pois

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{-2n-2}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{-2n}}{3^n}} = \frac{2^{-2n-2}\,3^n}{2^{-2n}\,3^{n+1}} = 2^{-2} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{12} = \text{Razão}$$

Como $\left|\frac{1}{12}\right| < 1$ a série é convergente

Soma: $\frac{u_1}{1-R} = \frac{\frac{2^{-2}}{3}}{1-\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{11}$

e a proposição é verdadeira.

b) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$

$$\frac{4}{n^2-4} = \frac{4}{(n-2)(n+2)} = \frac{A}{n-2} - \frac{A}{n+2}$$

$$\Rightarrow 4 = A(n+2) - A(n-2)$$

$$\Rightarrow 4 = An + 2A - An + 2A \Rightarrow A = 1$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4} = \sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n-2}}_{u_n} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{u_{n+p}}$$ série de Mengoli

com $n+p-2 = n+2$

$p = 4$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2} = 0$

$\Rightarrow$ a série é convergente

2 a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{8}{n^6}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{n^6}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

Série de
Dirichlet com
$\alpha = 2 > 1$ logo
convergente

Então a série que se obtém multiplicando por 2 é também convergente

b) $\lim_{n \to +\infty} tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{e}{n}\right) = tg\frac{\pi}{2} = +\infty \neq 0$ logo pela condição necessária de convergência a série dada é divergente.

3. $\int \boxed{\quad} \cdot \sin x \, dx$

a) Regra 1 : $\boxed{K \sin^{-1} x}$, $K \in \mathbb{R}$ pois $K \sin^{-1} x \cdot \sin x = K \in \mathbb{R}$

b) Regra 2 $\int f' f^p$: $\boxed{K \cos^p x}$ pois $(\cos x)' = -\sin x$

c) Regra 5 $\int \frac{f'}{f}$: $\boxed{\frac{K}{\cos x}}$ pois $(\cos x)' = -\sin x$

d) Regra 7 $\int f' \sin f$: $\boxed{K} \in \mathbb{R}$ pois $f = x$ e $f' = 1$

e) Regra 18 $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$: $\boxed{\frac{K}{\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x}}}$ $a, b, K \in \mathbb{R}$ pois
$f = \cos x$ e $f' = -\sin x$

f) Regra 19 $\int \frac{f'}{1+f^2}$: $\boxed{\frac{K}{a^2 + b^2 \cos^2 x}}$, $a, b, K \in \mathbb{R}$ pois
$f = \cos x$ e $f' = -\sin x$

4 a) $\int e^{2x}(1+e^{x})^{2}\,dx$

$$= \int e^{2x}(1+2e^{x}+e^{2x})\,dx$$

$$= \int e^{2x}+2e^{3x}+e^{4x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{4x}+C$$

b) 1º Processo

$$\int \underbrace{e^{x}}_{D}\,\underbrace{e^{x}(1+e^{x})^{2}}_{P}\,dx$$

$$= \frac{(1+e^{x})^{3}}{3}e^{x} - \int \frac{(1+e^{x})^{3}}{3}\cdot e^{x}\,dx$$

$$= \frac{(1+e^{x})^{3}e^{x}}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{(1+e^{x})^{4}}{4} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

2º processo

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{P}\,\underbrace{(1+e^{x})^{2}}_{D}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(1+e^{x})^{2} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,2(1+e^{x})\,e^{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(1+e^{x})^{2} - \int e^{3x}(1+e^{x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(1+e^{x})^{2} - \int e^{3x}+e^{4x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(1+e^{x})^{2} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{4x} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

5 a) $$\int \frac{tg^2 x}{cosec\, x}\, dx = \int \frac{sen^2 x}{cos^2 x} \cdot sen\, x\, dx =$$

$$= \int sen^3 x \cos^{-2} x\, dx = \int sen\, x (1 - \cos^2 x) \cos^{-2} x\, dx =$$

$$= \int sen\, x \cos^{-2} x - sen\, x \cos^2 x \cos^{-2} x\, dx$$

$$= -\int \underbrace{-sen\, x}_{f'} \underbrace{\boxed{\cos^{-2} x}}_{f}\, dx - \int sen\, x\, dx$$

$$= - \frac{\cos^{-1} x}{-1} + \cos x + C$$

$$= \cos^{-1} x + \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) $x = 2 \sin t$

$dx = 2 \cos t$

$t = \arcsin \frac{x}{2}$

$$\int \frac{(2 \sin t)^3}{\left(\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}\right)^3} \cdot 2 \cos t\, dt$$

$$= \int \frac{8 \sin^3 t}{\left(\sqrt{4(1 - \sin^2 t)}\right)^3} \cdot 2 \cos t\, dt$$

$$= \int \frac{8 \sin^3 t}{(2 \cos t)^3} \cdot 2 \cos t\, dt = 2 \int \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} \cdot \cos t\, dt$$

$$= 2 \int \sin^3 t \cos^{-2} t\, dt \underset{a)}{=} \cos^{-1} t + \cos t + C$$

Retomando x

$$= \cos^{-1}\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

6 a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

Passo 1: fração própria

Passo 2: Fatorização do denominador

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

Passo 3: Decomposição em elementos simples

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$4=A(x+2)+B(x-2)$$

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 4=4A \Rightarrow A=1 \\ x=-2 & 4=-4B \Rightarrow B=-1. \end{array}$$

Passo 4: Cálculo da primitiva

$$\int \frac{4}{x^2-4}\,dx=\int \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,dx=$$

$$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

b) $$\int \frac{x^5+x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx=\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx+\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$$

$$=\int x^5 \underbrace{(1-x^6)}_{f}{}^{-1/2}\,dx+\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(\boxed{x^3})^2}}\,dx$$

$\Rightarrow f'=-5x^5$ $\qquad\qquad f \Rightarrow f'=3x^2$

$$=-\frac{1}{5}\int -5x^5(1-x^6)^{-1/2}\,dx+\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\,\frac{(1-x^6)^{1/2}}{1/2}+\frac{1}{3}\arcsin x^3+C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$=-\frac{2}{5}\sqrt{1-x^6}+\frac{1}{3}\arcsin x^3+C,\ C\in\mathbb{R}$$

c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{\boxed{1+x^2}} dx$$

$f \Rightarrow f' = 2x$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I - Engenharia Informática

19 de Janeiro de 2015 Duração: 2h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[1.25 *val.*] 1. (a) Caracterize a função inversa de $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\arccos(x-1)$, identificando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 *val.*] (b) Resolva a seguinte equação: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos(x-1)$.

[2.5 *val.*] 2. Mostre que a área da região $\mathcal{A}$ definida por $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le \operatorname{arctg}(x)\right\}$ é igual a $\frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.

3. Considere a região $\mathcal{B}$ definida por $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge \ y \le -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right\}$.

[0.75 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.0 *val.*] (b) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy.

[1.25 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{B}$ usando x como variável independente.

[1.5 *val.*] 4. (a) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$.

[1.0 *val.*] (b) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $\ln\left(1 - \frac{4}{x+2}\right)$ é uma primitiva de $\frac{4}{x^2-4}$.

(c) Considere os seguintes integrais:

I. $\displaystyle\int_2^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx$; II. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx$.

[1.25 *val.*] (i) Identifique, justificando, qual dos integrais é impróprio e determine a sua natureza;

[0.75 *val.*] (ii) O que pode concluir da natureza do integral $\displaystyle\int_0^6 \frac{4}{x^2-4}\,dx$? Justifique a sua resposta.

5. Considere as seguinte equações diferenciais ordinárias de 1ªordem:

(i) $x\,y' - y = x^2 e^x$; (ii) $y' + \frac{x}{1-x^2}\,y = \arcsin x$.

[0.75 *val.*] (a) Mostre que $y = x\,e^x$ é uma solução da equação diferencial (i).

[2.25 *val.*] (b) Determine a solução geral da equação diferencial (ii).

[2.0 *val.*] 6. Determine, justificando, a natureza das seguintes série numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{8}{n^6}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$.

[3.0 *val.*] 7. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cosec} x}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}\,dx$.