Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº12 Data limite de entrega: 6/jan/2017 (18h)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO) DE PRIMEIRA ORDEM

Exercício 1 Classifique as seguintes EDO quanto ao tipo (*variáveis separáveis* ou *lineares*).

a) $y\,y' + (1+y^2)\,\sin x \,=\, 0\,;$ b) $y\,y' + y^2 \sin x \,=\, y\cos x\,;$ c) $y' + y\,\sin x \,=\, \sin x\,.$

Exercício 2 Classifique e resolva cada uma das seguintes equações diferenciais:

a) $x\cos\left(\frac{y}{x}\right) y' \,=\, \dfrac{y^2}{\sec(\frac{y}{x})}\,;$ b) $x^2\,dy + 5\,y\,dx \,=\, 2\,dx\,.$

Exercício 3 Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$e^{x-y}\,y' \,=\, 1\,, \quad y(1) = 1\,.$$

Sugestão de resolução:

Exercício 1

a) A equação pode ser interpretada como uma EDO de variáveis separáveis, pois

$$\begin{aligned} y\,y' + (1+y^2)\,\sin x \,=\, 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y\,y' \,=\, -(1+y^2)\,\sin x \\ &\Leftrightarrow \quad y' \,=\, -\,\frac{1+y^2}{y}\;\sin x\,, \qquad \text{EDO de variáveis separáveis}\,. \end{aligned}$$

b) A equação pode ser interpretada como uma EDO linear, pois

$$\begin{aligned} y\,y' + y^2\,\sin x \,=\, y\cos x \quad &\Leftrightarrow \quad y\,y' \,=\, -y^2\,\sin x + y\cos x \\ &\Leftrightarrow \quad y' \,=\, \underbrace{-y\,\sin x + \cos x}_{M\,y+B}\,, \qquad \text{EDO linear}\,. \end{aligned}$$

c) A equação pode ser interpretada como uma EDO linear e também como uma EDO de variáveis separáveis. De facto,

$$\begin{aligned} y' + y\,\sin x \,=\, \sin x \quad &\Leftrightarrow \quad y' \,=\, \underbrace{-y\,\sin x + \sin x}_{M\,y+B}\,, \qquad \text{EDO linear} \\ &\Leftrightarrow \quad y' \,=\, -\sin(x)\,y\, + \sin x \\ &\Leftrightarrow \quad y' \,=\, \sin x\;\;(-y+1)\,, \qquad \text{EDO de variáveis separáveis}\,. \end{aligned}$$

Exercício 2

a) Vamos mostrar que a equação pode ser interpretada como uma EDO de variáveis separáveis e resolvê-la recorrendo à técnica associada a esse tipo de equações. Ignorando a restrições relativas a alterações de domínios das sucessivas equações, tem-se

$$
\begin{aligned}
x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = \frac{y^2}{\sec(\frac{y}{x})} \quad &\Leftrightarrow \quad x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = y^2\cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{porque } \sec\Box = \frac{1}{\cos\Box}\\
&\Leftrightarrow \quad x\,y' = y^2\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,y^2\,, \qquad \text{EDO de variáveis separáveis}\\
&\Leftrightarrow \quad y^{-2}\,dy = \frac{1}{x}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad \int y^{-2}\,dy = \int\frac{1}{x}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^{-1}}{-1} = \ln|x| + c \quad \text{(solução geral na forma implícita)}\\
&\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\ln|x|+c}\,,\ c\in\mathbb{R}\,, \quad \text{(solução geral na forma explícita)}\,.
\end{aligned}
$$

b) Ignorando a restrições relativas a alterações de domínios das sucessivas equações, tem-se

$$
\begin{aligned}
x^2\,dy + 5\,y\,dx = 2\,dx \quad &\Leftrightarrow \quad x^2\,\frac{dy}{dx} + 5y\,\frac{dx}{dx} = 2\,\frac{dx}{dx}\\
&\Leftrightarrow \quad x^2\,y' = -5y + 2\\
&\Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{-\frac{5}{x^2}\,y + \frac{2}{x^2}}_{My+B}\,, \qquad \text{EDO linear}\\
&\Leftrightarrow \quad y' + \frac{5}{x^2}\,y = \frac{2}{x^2}\\
&\qquad\qquad \text{FI} : e^{\int\frac{5}{x^2}\,dx} = e^{5\int x^{-2}\,dx} = e^{5\,\frac{x^{-1}}{-1}} = e^{-\frac{5}{x}}\\
&\overset{\times FI}{\Leftrightarrow} \quad \left(y\,e^{-\frac{5}{x}}\right)' = \frac{2}{x^2}\,e^{-\frac{5}{x}}\\
&\Leftrightarrow \quad y\,e^{-\frac{5}{x}} = \frac{2}{5}\int\frac{5}{x^2}e^{-\frac{5}{x}}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad y\,e^{-\frac{5}{x}} = \frac{2}{5}\,e^{-\frac{5}{x}} + c \quad \text{(solução geral na forma implícita)}\\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{5} + c\,e^{\frac{5}{x}}\,,\ c\in\mathbb{R}\,, \quad \text{(solução geral na forma explícita)}\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 3

Comecemos por resolver a equação diferencial, que pode ser interpretada como uma EDO de variáveis separáveis:

$$
\begin{aligned}
e^{x-y}\,y' = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y' = e^{-x+y}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}\,e^{y}\,, \qquad \text{EDO de variáveis separáveis}\\
&\Leftrightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \int e^{-x}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad -\int -e^{-y}\,dy = -\int -e^{-x}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad -e^{-y} = -e^{-x} + c\,,\ c\in\mathbb{R} \quad \text{(solução geral na forma implícita)}\,.
\end{aligned}
$$

Recorrendo agora à condição inicial $y(1) = 1$, tem-se

$$
-e^{-1} = -e^{-1} + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = c\,,
$$

pelo que a solução do problema é dada por

$$
\begin{aligned}
&-e^{-y} = -e^{-x} \quad \text{(solução na forma implícita)}\\
\Leftrightarrow \quad &e^{-y} = e^{-x}\\
\Leftrightarrow \quad &-y = -x\\
\Leftrightarrow \quad &y = x \quad \text{(solução na forma explícita)}\,.
\end{aligned}
$$