Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº11 Data limite de entrega: 16/dez/2016 (18h)

Primitivação por substituição (mudança de variável) - Tabelas, página 4 (casos 1, 2, 3, 4 e 6)

1. Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação por substituição.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx\,,$

2. Identifique, sem resolver, a técnica de primitivação adequada para o cálculo de cada uma das seguintes primitivas.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx\,;$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx\,;$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx\,.$

Sugestão de resolução:

---

1. a) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 2 da página 4 das Tabelas de Matemática $R(\,x,\,\sqrt{a^2+b^2x^2}\,,\,\ldots\,)$, tem-se

$$\text{m.v.}\ \boxed{x = 2\tan(t)}\,,\qquad t \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{\pi}{2}\right[\ \text{(para garantir a invertibilidade da m.v)}$$

e ainda

$$x' = 2\,\sec^2(t)$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x\,\sqrt{4+x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{2}{\sqrt{4+4\tan^2 t}}\,2\,\sec^2 t\,dt\\
&= \int \frac{2}{\sqrt{4}\,\sqrt{1+\tan^2 t}}\,2\,\sec^2 t\,dt\\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t}}\,2\,\sec^2 t\,dt\\
&= \int \frac{1}{|\sec t|}\,2\,\sec^2 t\,dt\\
&= 2\int \underbrace{1\cdot\sec t}_{R12}\,dt\,,\qquad |\sec t| = \sec t\ \text{ porque } t\in\left]-\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{\pi}{2}\right[\\
&= 2\ln|\sec t + \tan t| + c\,,\qquad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que para $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right[$

$$x = 2\tan(t) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2} = \tan(t) \;\Leftrightarrow\; \arctan\left(\frac{x}{2}\right) = t\,,$$

então

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x\,\sqrt{4+x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{2}{\sqrt{4+4\tan^2 t}}\,\sec^2 t\,dt\\
&= 2\ln|\sec t + \tan t| + c\\
&\overset{\text{m.v}}{=} 2\ln\left|\sec\Big(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big) + \tan\Big(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big)\right| + c\,,\qquad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

b) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 4 da página 4 das Tabelas de Matemática, $R(x,\, x^{\frac{p}{q}},\, x^{\frac{r}{s}}, \dots)$, tem-se

$$\text{m.v. } \boxed{x = t^m}\,, \text{ onde } m = m.m.c\{2,\, 3\} = 6\,.$$

Então

$$\text{m.v. } \boxed{x = t^6}\,, \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \text{ (para garantir a invertibilidade da m.v)}$$

e ainda

$$x' = 6\,t^5$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\,dx \quad &\overset{\text{m.v}}{=} \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^6} + \sqrt{t^6}}\,6\,t^5\,dt \\
&= \int \frac{1}{t^2 + |t|^3}\,6\,t^5\,dt\,, \qquad |t| = t \text{ porque } t \in \mathbb{R}_0^+ \\
&= \int \frac{6\,t^5}{t^2 + t^3}\,dt \\
&= \int \frac{6\,t^5}{t^2\,(1+t)}\,dt \\
&= \int \frac{6\,t^3}{1+t}\,dt\,, \quad \text{função racional imprópria - Tabelas pág 8}\,.
\end{aligned}$$

Efectuando a divisão dos polinómios, tem-se

$$\begin{array}{rrrr|l}
6\,t^3 & & & & t+1 \\ \cline{5-5}
-(\,6\,t^3 & +6\,t^2) & & & 6\,t^2 - 6\,t + 6 \\ \cline{1-4}
 & -6\,t^2 & & & \\
 & -(\,-6\,t^2 & -6\,t\,) & & \\ \cline{1-4}
 & & 6\,t & & \\
 & & -(\;\;6\,t & +6\,) & \\ \cline{1-4}
 & & & -6 &
\end{array}$$

pelo que

$$\frac{6\,t^3}{1+t} = 6\,t^2 - 6\,t + 6 + \frac{-6}{1+t}$$

e então

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\,dx \quad &= \quad \int \frac{6\,t^3}{1+t}\,dt \\
&= \int \left(6\,t^2 - 6\,t + 6 + \frac{-6}{1+t}\right)dt \\
&= 6\int \underbrace{t^2}_{R2}\,dt - 6\int \underbrace{t}_{R2}\,dt + \int \underbrace{6}_{R1}\,dt - 6\int \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{R5}\,dt \\
&= 6\,\frac{t^3}{3} - 6\,\frac{t^2}{2} + 6\,t - 6\,\ln|1+t\,| + c \\
&\qquad\quad \text{m.v}: \; x = t^6\,,\; t \in \mathbb{R}_0^+ \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{x} = t \\
&\overset{\text{m.v}}{=} 2\,(\sqrt[6]{x}\,)^3 - 3\,(\sqrt[6]{x}\,)^2 + 6\,\sqrt[6]{x} - 6\,\ln|1 + \sqrt[6]{x}\,| + c \\
&= 2\,\sqrt{x} - 3\,\sqrt[3]{x} + 6\,\sqrt[6]{x} - 6\,\ln(1 + \sqrt[6]{x}\,) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. a) Tem-se

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx\,,$$

pelo que a primitiva é imediata.

b) Tem-se

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int x^3\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \int \underbrace{x^2}_{d}\;\underbrace{x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{p}\,dx\,,$$

pelo que a primitiva pode ser calculada recorrendo à técnica de primitivação por partes.

c) Tem-se

$$\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{R18}\,dx\,,$$

pelo que a primitiva é imediata.

d) Nenhuma das regras elementares de primitivação (primitivação imediata, primitivação por partes, primitivação de funções trigonométricas e primitivação de funções racionais) é aplicável, pelo que a primitiva tem que ser resolvida recorrendo a uma mudança de variável (página 4, caso 1, mv: $x = \sin t\,,\;\; t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{mv}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt \;=\; \int \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt \;=\; \int \cos t\,\cos t\,dt \;=\; \int \cos^2 t\;dt\,.$$

A primitiva resultante dessa mudança de variável pode ser resolvida recorrendo às técnicas de primitivação de funções trigonométricas (potência par de cosseno).

e) A primitiva não é imediata (as regras R2, R5 e R19 não são aplicáveis) mas a função é definida por um quociente de polinómios, pelo que podemos usar a técnica de primitivação de funções racionais.

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx \;=\; \int \Big(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\Big)\,dx\,.$$

f) Tem-se

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx \;=\; \int \sin x\cos^{-2} x\,dx \;=\; -\int \underbrace{-\sin x\cos^{-2} x}_{R2}\,dx\,,$$

pelo que a primitiva é imediata (embora a função seja definida por um produto de potências de seno e cosseno, não é necessário recorrer às técnicas da página 7).