Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº5 Data limite de entrega: 4/nov/2015 (18h)

PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA [**E. Síntese**]

Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando a técnica de primitivação por decomposição,

$$\boxed{\int (c_1\, f \pm c_2\, g)\, dx \;=\; c_1 \int f\, dx \;\pm\; c_2 \int g\, dx\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

b) $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$; c) $\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$; e) $\left(1+\sqrt{x}\right)^3$; g) $\dfrac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;

[**Exercício extra**]

Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

$$\int \ln(x)\, dx \;=\; x\ln(x) - x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE DOMÍNIOS PLANOS [**Exercício extra**]

Identifique (recta, parábola, circunferência, logaritmo, exponencial, trigonométrica) e represente graficamente as seguintes curvas. Recorrendo ao Geogebra, confirme as respostas dadas.

a) $y = x\,, \quad y = 2x$ e $y = 2x+1$;

b) $y = x^2 - 2x + 2$;

c) $x = y^2 - 1$;

d) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$;

e) $y = e^{-x}$;

f) $y = \ln(x+1)$;

g) $y = \sin(x-\pi)$.

Sugestão de resolução:

PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA [**E. Síntese**]

b) $$\int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx \;=\; \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \;=\; \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{R1}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\,x + c + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2\cos(2x)}_{R6}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\,x + c + \frac{1}{4}\sin(2x)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

c) $$\int \left(\frac{x^3}{4} + \frac{\tan x}{\cos^2 x}\right) dx \;=\; \frac{1}{4}\int \underbrace{x^3 \cdot 1}_{R2} + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4} + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\, dx + c$$

$$= \frac{1}{16}\,x^4 + (-)\int \underbrace{\cos^{-3} x(-\sin x)}_{R2}\, dx + c \;=\; \frac{1}{16}\,x^4 - \frac{\cos^{-2} x}{-2} + c \;=\; \frac{1}{16}\,x^4 + \frac{1}{2}\sec^2 x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

e) $\displaystyle\int (1+\sqrt{x}\,)^3\,dx \;=\; \int (1+\sqrt{x}\,)^2(1+\sqrt{x}\,)\,dx \;=\; \int (1+2\sqrt{x}+x)(1+\sqrt{x}\,)\,dx$

$\displaystyle = \int (1+3\sqrt{x}+3x+x\,\sqrt{x}\,)\,dx \;=\;= \int \underbrace{1}_{R1}\,dx + 3\int \underbrace{x^{\frac{1}{2}}\cdot 1}_{R2} + 3\int \underbrace{x^{1}\cdot 1}_{R2}\,dx + \int \underbrace{x^{\frac{3}{2}}\cdot 1}_{R2}\,dx$

$\displaystyle = x + 3\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\,\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c \;=\; x + 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{x^2+2\,x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \;=\; \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + 2\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \;=\; \int x^2x^{-\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$\displaystyle = \int \underbrace{x^{\frac{3}{2}}\cdot 1}_{R2}\,dx + 2\int \underbrace{x^{-\frac{1}{6}}\cdot 1}_{R2}\,dx \;=\; \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\,\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + c \;=\; \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$

[**Exercício extra**]
De acordo com a definição de primitiva, basta mostrar que

$$\Big(x\ln(x) - x + c\Big)' \;=\; \ln(x)\,.$$

Ora,

$$\Big(x\ln(x)-x+c\Big)' \;=\; \Big(x\ln(x)\Big)' - (x)' + (c)' \;=\; (x)'\ln(x) + x\big(\ln(x)\big)' - 1 + 0 \;=\; \ln(x) + x\,\frac{1}{x} - 1 \;=\; \ln(x)\,.$$

Representação gráfica de domínios planos

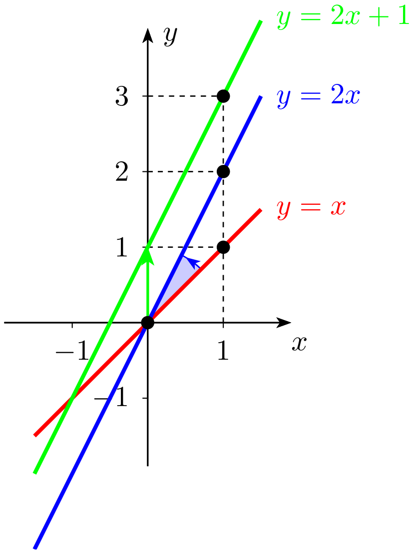
a) $y = x\,,\quad y = 2x$ e $y = 2x+1$

Todas as expressões dadas definem rectas, pelo que para as representar basta determinar dois dos seus pontos. Por exemplo,

x	$y = x$
0	0
1	1

x	$y = 2x$
0	0
1	2

x	$y = 2x+1$
0	1
1	3



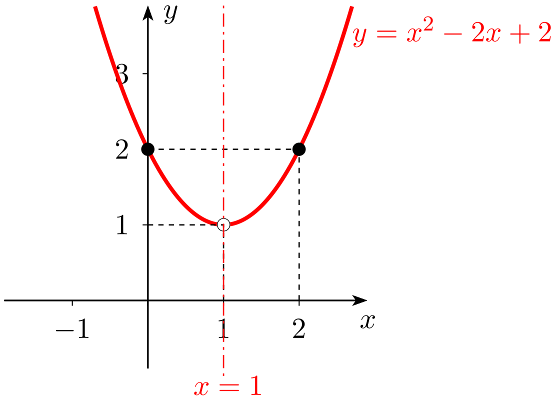
Note-se que a segunda recta tem declive superior à primeira, pelo que é mais inclinada. Por sua vez, a única diferença entre a segunda e a terceira rectas é a ordenada na origem.

b) $y = x^2 - 2x + 2$

Uma vez que se trata de uma parábola precisamos de, pelo menos, três pontos para obter a representação. Por exemplo,

x	$y = x^2 - 2x + 2$
0	2
1	1
2	2

Como $x = 0$ e $x = 2$ têm a mesma imagem, então (por simetria da parábola) o vértice é o ponto correspondente à abcissa $x = 1$ (o valor médio), ou seja, $V = (1, 1)$.



Observações: Existem outras formas de determinar o vértice da parábola. Por exemplo,

1) *completando o caso notável, de modo a escrever a expressão na forma* $y = (x - x_0)^2 + y_0$:

$$y = x^2 - 2x + 2 \;\Leftrightarrow\; y = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + 2 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{y = (x-1)^2 + 1}_{V=(1,1)} .$$

2) *tendo em conta que o vértice corresponde ao ponto onde a tangente ao gráfico é horizontal, que corresponde ao ponto onde a derivada é nula. Como* $f(x) = x^2 - 2x + 2$ *então* $f'(x) = 2x - 2$, *pelo que a abcissa do vértice é dada por*

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

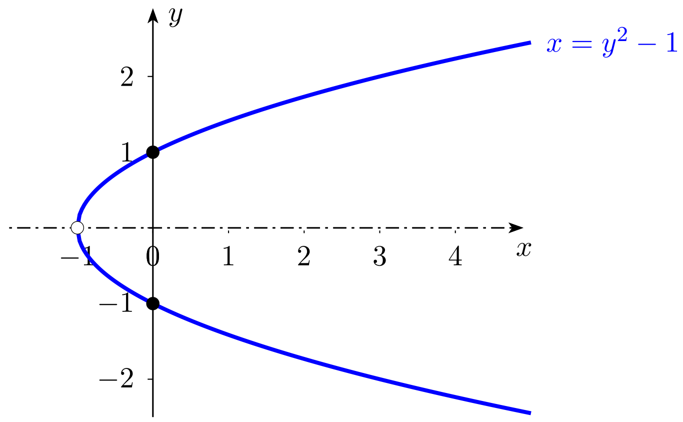
e a ordenada é dada por $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$, *ou seja,* $V = (1,\, 1)$.

c) $x = y^2 - 1$

Voltamos a ter uma parábola. A expressão não define uma função de x mas define uma função de y, pelo que consideraremos, por exemplo, os pontos

y	$x = y^2 - 1$
0	-1
1	0
-1	0

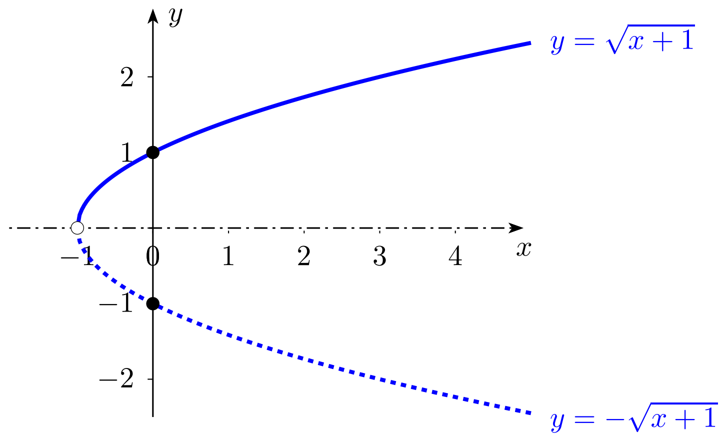
Como $y = 1$ e $y = -1$ têm a mesma imagem, então (por simetria da parábola) o vértice é o ponto correspondente à ordenada $y = 0$ (o valor médio), ou seja, o vértice é $V = (-1, 0)$.



Observação: A curva anterior define duas funções de x, uma referente à parte de cima da parábola (relativamente ao eixo de simetria $y = 0$) e outra referente à parte de baixo da parábola. Para obter as expressões dessas funções, basta resolver a equação em ordem a y, tendo-se

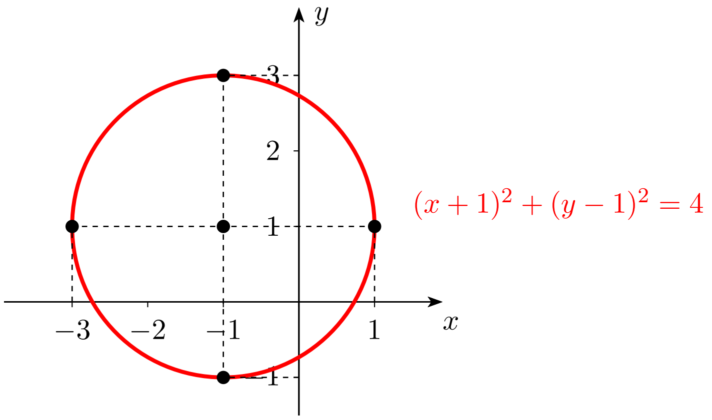
$$x = y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{x+1}\,.$$

pelo que



d) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

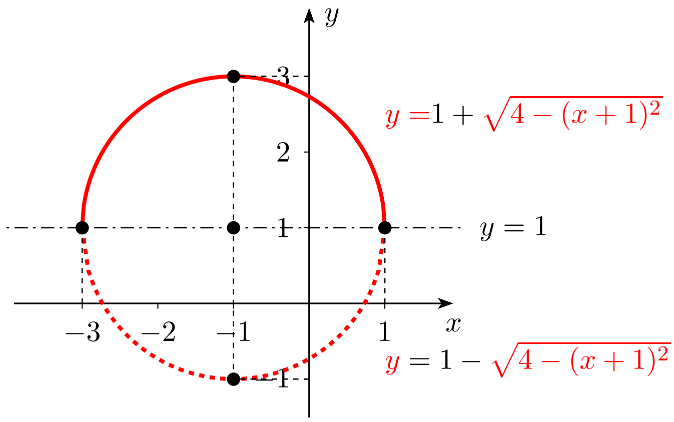
Neste caso temos uma circunferência de centro $(-1, 1)$ e raio $R = 2$. Então,



Observação: Tal como no caso anterior, a curva define duas funções de x, uma referente à semi-circunferência superior (relativamente ao eixo de simetria horizontal que passa pelo centro) e outra referente à semi-circunferência inferior. Para obter as expressões dessas funções, basta resolver a equação em ordem a y, tendo-se

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = 4 - (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 1 = \pm\sqrt{4 - (x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{4 - (x+1)^2}\,.\end{aligned}$$

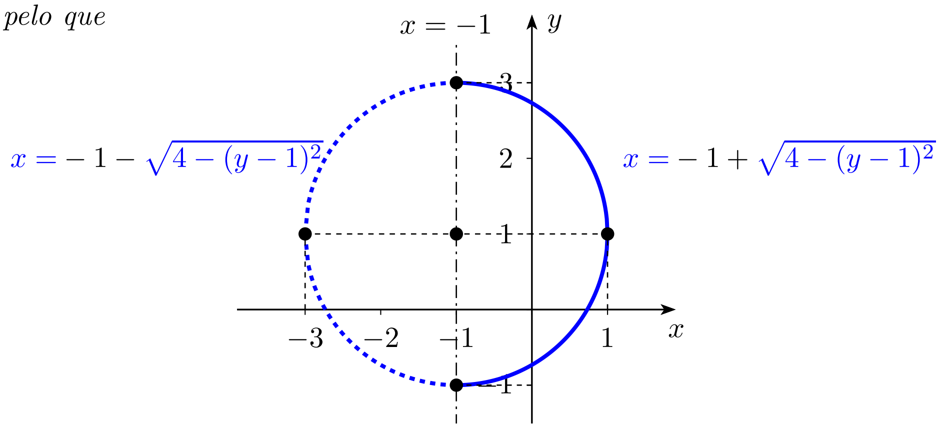
pelo que



Também podemos considerar que a circunferência define duas funções de y, uma referente à semi-circunferência esquerda (relativamente ao eixo de simetria vertical que passa pelo centro) e outra referente à semi-circunferência direita. Para obter as expressões dessas funções, basta resolver a equação em ordem a x, tendo-se

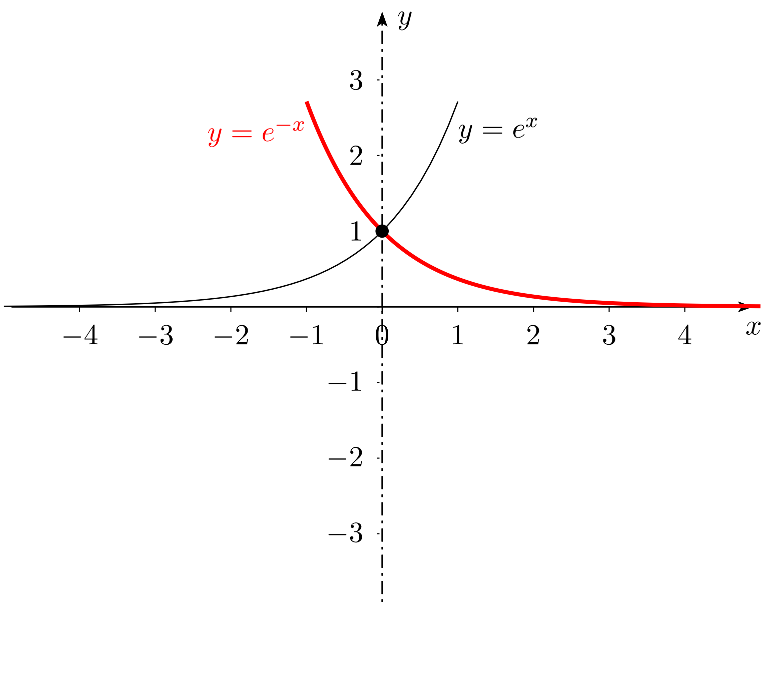
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{4-(y-1)^2},$$

pelo que



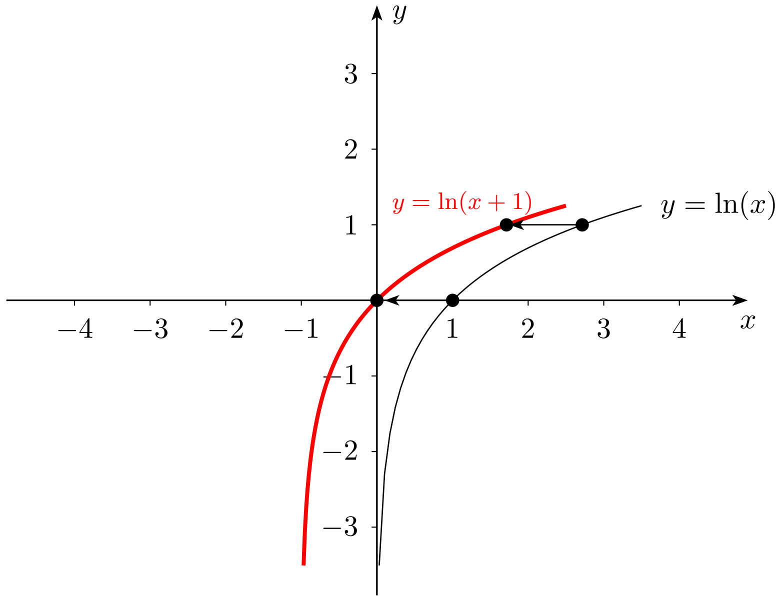
e) $y = e^{-x}$

O gráfico de $y = e^{-x}$ pode obter-se do gráfico de $y = e^{x}$ efectuando uma **simetria horizontal**, relativamente ao eixo Oy. Então



f) $y = \ln(x+1)$

O gráfico de $y = \ln(x+1)$ pode obter-se do gráfico de $y = \ln(x)$ efectuando uma **translação horizontal** de 1 unidade para a esquerda. Então



g) $y = \sin(x - \pi)$

O gráfico de $y = \sin(x - \pi)$ pode obter-se do gráfico de $y = \sin(x)$ efectuando uma **translação horizontal** de π unidades para a direita. Então