Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº7 Data limite de entrega: 18/nov/2016 (18h)

Cálculo integral - Aplicações - Áreas

E. Síntese

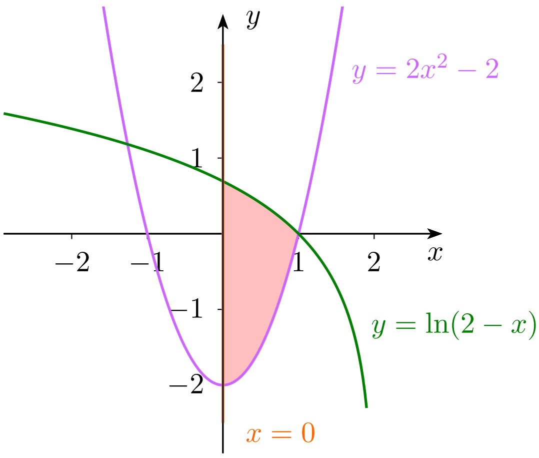
1. Explicite, utilizando integrais simples, dois processos diferentes para calcular a área da região limitada por $x = \sqrt{3}\, y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = 0\,.$

Cálculo integral - Aplicações - Volumes

D. Análise

2. Averigue qual das seguintes regiões corresponde à representada no gráfico e identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular o volume dos sólidos de revolução que se obtêm pela rotação da região em torno do eixo OX e do eixo OY.

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2 \ \wedge \ y \leq \ln(x - 2) \ \wedge \ x \geq 0\} \\
B_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2 \ \wedge \ y \leq \ln(2 - x) \ \wedge \ x \geq 0\} \\
B_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2 - 2 \ \wedge \ y \leq \ln(x - 2) \ \wedge \ x \geq 0\} \\
B_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2 - 2 \ \wedge \ y \leq \ln(2 - x) \ \wedge \ x \geq 0\}
\end{aligned}$$



Cálculo integral - Aplicações - Comprimentos

C. Aplicação

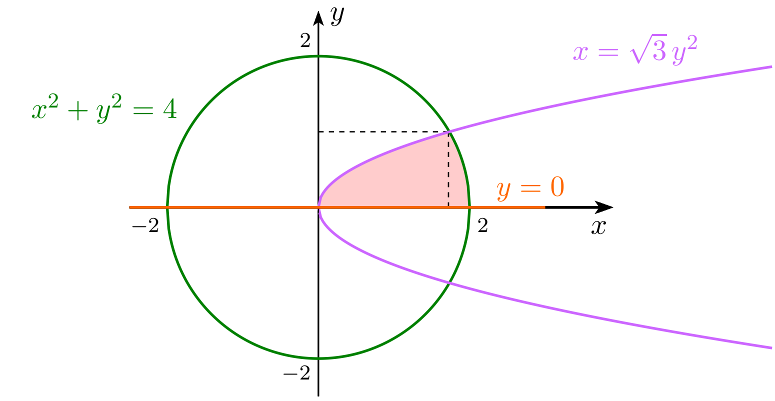
Explicite, utilizando integrais simples, uma expressão que lhe permita determinar a medida do perímetro de cada uma das regiões indicadas

1. Limitada por $y = |x|,\ y = x^2 - 1,\ x = -1,\ x = 1\,.$

Cálculo integral - Aplicações - Áreas

E. Síntese

1. A região pretendida tem a seguinte representação (também poderá ser considerada a região simétrica desta relativamente ao eixo Oy):



As expressões das funções associadas a cada umas das curvas são

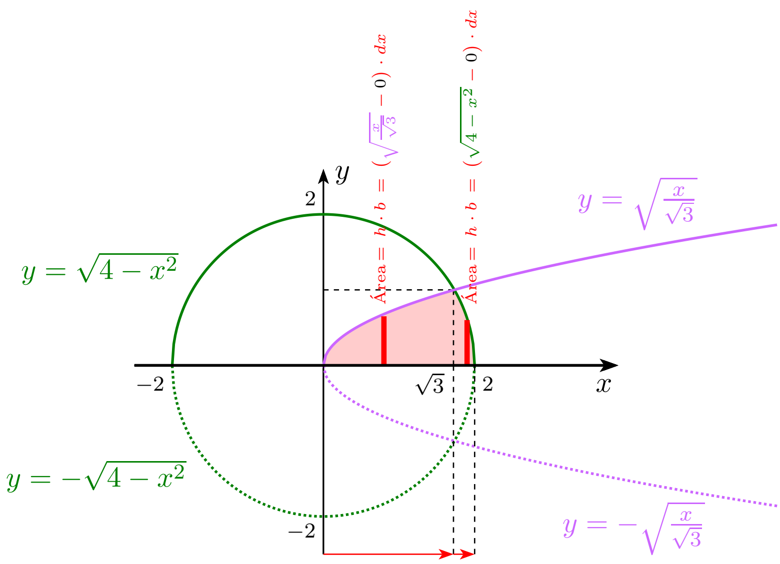
$$\text{i)}\ \ x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$
$$\text{ii)}\ \ x = \sqrt{3}\, y^2 \Leftrightarrow y^2 = \tfrac{x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\tfrac{x}{\sqrt{3}}}$$

e as coordenadas dos pontos de intersecção da parábola com a circunferência são dados por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = \sqrt{3}\, y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x}{\sqrt{3}} = 4 \\ y^2 = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}\, x^2 + x - 4\sqrt{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} \vee x = \underbrace{\cancel{-\frac{8}{\sqrt{3}}}}_{<0!}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{3}\,.$$

Nesta abcissa tem-se

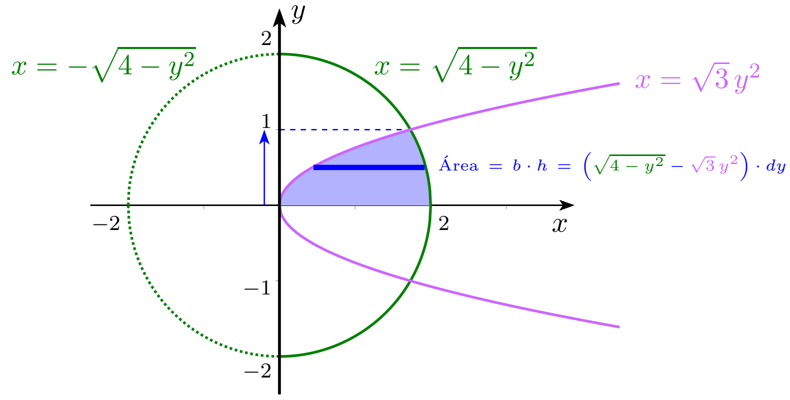
$$x = \sqrt{3}\, y^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \sqrt{3}\, y^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \ \vee\ y = -1\,.$$



Então,

$$\text{Área} \ = \ \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}} - 0\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\sqrt{4 - x^2} - 0\right) dx$$

O cálculo da área também pode ser feito em função de y. Nesse caso e atendendo às coordenadas dos pontos de intersecção já anteriormente determinadas, tem-se



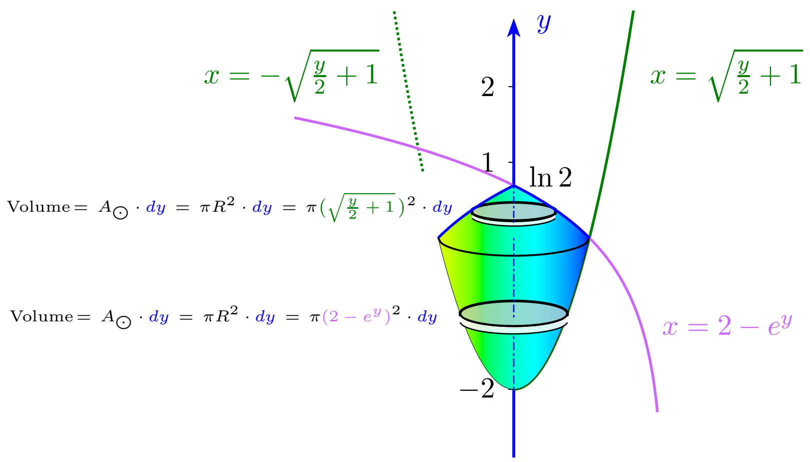
$$\text{Área} \;=\; \int_0^1 \left(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{3}\,y^2\right) dy$$

Cálculo integral - Aplicações - Volumes

D. Análise

2. A região é definida pela condição B_4.

   O sólido que se obtém pela rotação da região B_4 em torno do eixo Oy é



Cálculos auxiliares:

$$y = \ln(2-x)$$
$$\Leftrightarrow\; e^y = 2 - x$$
$$\Leftrightarrow\; x = 2 - e^y$$

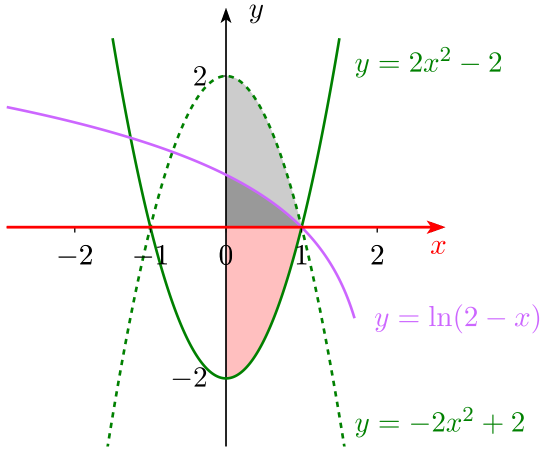
$$y = 2x^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow\; y + 2 = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}+1}$$

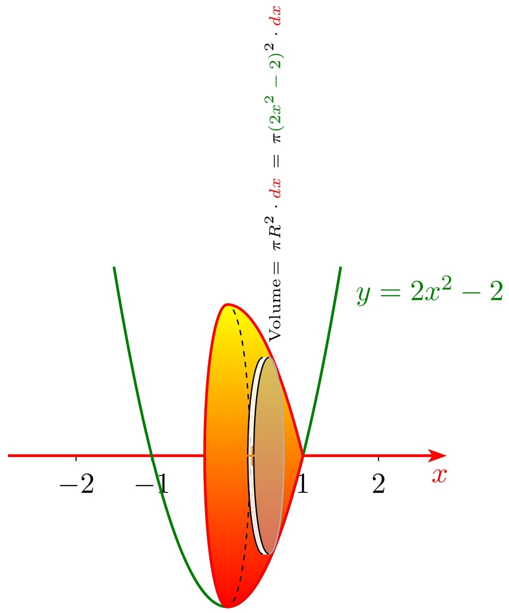
cujo volume é dado por

$$\int_{-2}^{0} \pi \left(\sqrt{\frac{y}{2}+1}\right)^2 dy \;+\; \int_0^{\ln 2} \pi \left(2 - e^y\right)^2 dy$$

$$= \;\pi \int_{-2}^{0} \left(\frac{y}{2}+1\right) dy \;+\; \pi \int_0^{\ln 2} \left(4 - 2e^y + e^{2y}\right) dy\,.$$

Relativamente ao sólido que se obtém pela rotação da região B_4 em torno do eixo Ox, começamos por notar que a rotação da curva é $y = 2x^2 - 2$ gera um contorno que é exterior ao definido pela curva $y = \ln(2-x)$, razão pela qual esta última será desprezada para efeitos de cálculo.





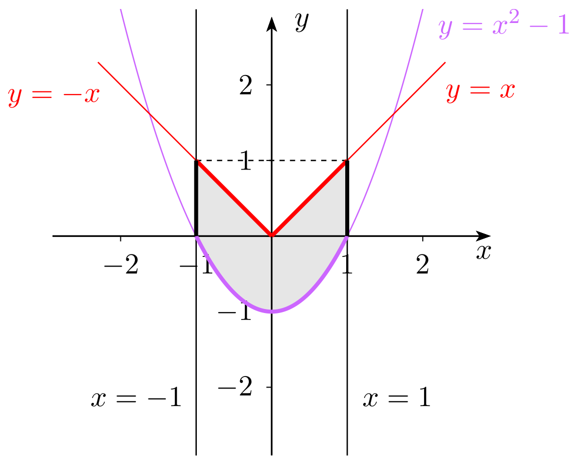
O volume do sólido anterior, que se obtém pela rotação da região B_4 em torno do eixo Ox, é dado por

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \pi\,(2x^2-2)^2\,dx \\ = \;& \pi \int_0^1 \left(4x^4 - 8x^2 + 4\right) dx\,. \end{aligned}$$

Cálculo integral - Aplicações - Comprimentos

C. Aplicação

1. Comecemos por representar graficamente a região dada:



Tendo em conta as diversas curvas que delimitam a região e atendendo ao teorema de Pitágoras, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 1 + \sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{1^2+1^2} + 1 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [(x^2-1)']^2}\,dx \\ &= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+[2x]^2}\,dx \\ &= 2 + 2\sqrt{2} + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx\,. \end{aligned}$$