**Instituto Superior de Engenharia de Coimbra**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

26 de Novembro de 2014 Duração: 1h30m

---

**Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova**

---

1. Considere a função $f(x) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin(2x-1)$.

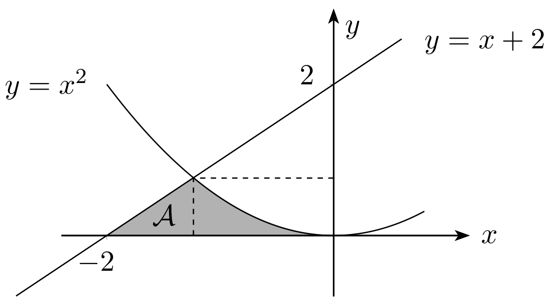
[1.0 *val.*] (a) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

[1.0 *val.*] (b) Resolva a equação $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

[0.5 *val.*] (c) Resolva a inequação $f(x) \geq \dfrac{\pi}{4}$.

[1.5 *val.*] (d) Caracterize a função inversa de $f$ indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

2. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte:

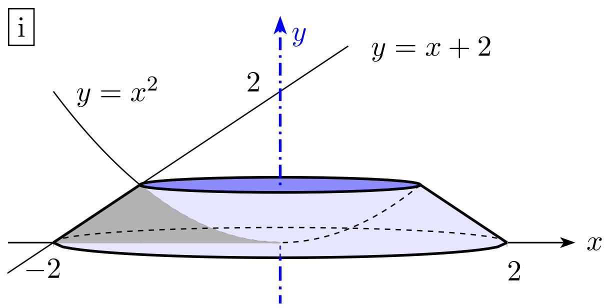


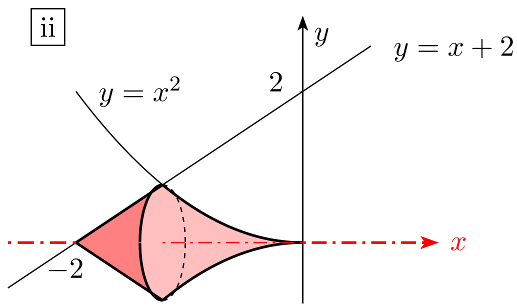

[1.0 *val.*] (a) Identifique, justificando, a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \ \wedge \ f(y) \leq x \leq g(y)\}$.

[1.5 *val.*] (b) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{A}$.

[1.5 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{A}$.

[2.0 *val.*] (d) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução representados em (i) e (ii), obtidos a partir da rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos $Oy$ e $Ox$, respectivamente.




3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -\ln(-x) \ \wedge \ x \geq -(y+1)^2 \ \wedge \ y \geq -1\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[1.0 *val.*] (b) Usando integrais e a variável independente $y$, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{B}$.

[1.25 *val.*] (c) Que pode concluir da existência da medida definida na alínea anterior?

[0.75 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ é uma primitiva de $\dfrac{1}{x^2+x}$.

(b) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2+x}\,dx$.

[1.25 *val.*] i. Identifique, justificando, qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza;

[0.75 *val.*] ii. O que pode concluir da natureza do integral $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$. Justifique a sua resposta.

5. Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

(i) $\sqrt{1-x^2}\; y\,y' = x$; (ii) $x\,y\,y' = y\,x^2 - y^2$; (iii) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

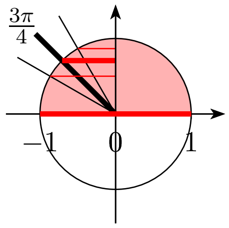
[1.5 *val.*] (a) Justifique que a equação (i) é de variáveis separáveis e resolva-a sujeita à condição inicial $y(0) = 2$.

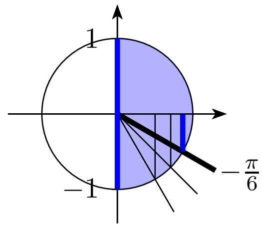
[1.5 *val.*] (b) Identifique, justificando, a equação (ii) quanto ao tipo e determine a sua solução geral.

[1.0 *val.*] (c) Mostre que $y = \dfrac{x}{\ln x}$ é uma solução da equação (iii).

1. (a) Tendo em conta os domínios das funções trigonométricas inversas arco seno e arco cosseno, tem-se

$$
\begin{aligned}
f\left(\tfrac{1}{4}\right) &= \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(2\,\tfrac{1}{4} - 1\right) = \\
&= \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

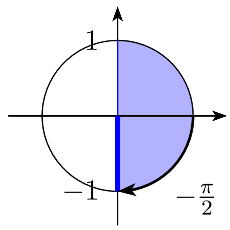



$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{3\pi}{4} + \left(-\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \tfrac{7\pi}{12}\,.
\end{aligned}
$$

(b) Tendo em conta o resultado de $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ já calculado na alínea (a) e o domínio da função arco seno, tem-se

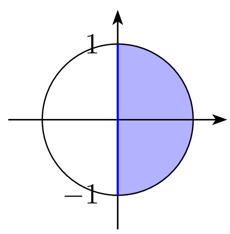
$$
\begin{aligned}
f(x) = \tfrac{\pi}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin(2x-1) = \tfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{3\pi}{4} + \arcsin(2x-1) = \tfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \arcsin(2x-1) = -\tfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0\,.
\end{aligned}
$$

(c) Tendo em conta a alínea (b) e o contradomínio da função arco seno, tem-se

$$
\begin{aligned}
f(x) \geq \tfrac{\pi}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin(2x-1) \geq \tfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\arcsin(2x-1) \geq -\frac{\pi}{2}}_{\text{cond. universal no domínio do arco seno}} \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1\,.
\end{aligned}
$$

(d) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = \dfrac{3\pi}{4} + \arcsin(2x-1) \end{array}$$

O domínio de $f$ é definido a partir do domínio da função arco seno, pelo que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0,\, 1]$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned} y = \frac{3\pi}{4} + \arcsin(2x-1) \quad &\Leftrightarrow \quad y - \frac{3\pi}{4} = \arcsin(2x-1) \\ &\Rightarrow \quad \sin\left(y - \frac{3\pi}{4}\right) = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(y - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = x\,. \end{aligned}$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e a restrição principal da função seno, tem-se

$$\begin{aligned} CD_f = D_{f^{-1}} &= \{y \in \mathbb{R} : -\tfrac{\pi}{2} \leq y - \tfrac{3\pi}{4} \leq \tfrac{\pi}{2}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{3\pi}{4} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{3\pi}{4}\} = \left[\tfrac{\pi}{4},\, \tfrac{5\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{array}{ccc} [0,\, 1] & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & \left[\dfrac{\pi}{4},\, \dfrac{5\pi}{4}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = x & \longleftrightarrow & y = \dfrac{3\pi}{4} + \arcsin(2x-1) \end{array}$$

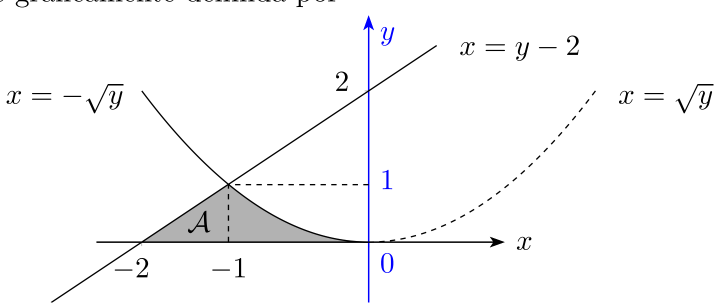
2. (a) Começamos por notar que os pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x+2$ são definidos por

$$x^2 = x + 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -1 \vee x = 2\,.$$

Além disso, as curvas dadas são definidas, em função de $y$, pelas seguintes expressões:

$$\begin{array}{lll} i) & y = x^2 & \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \\ ii) & y = x + 2 & \Leftrightarrow \quad x = y - 2 \end{array}$$

Assim, a região $\mathcal{A}$ é graficamente definida por



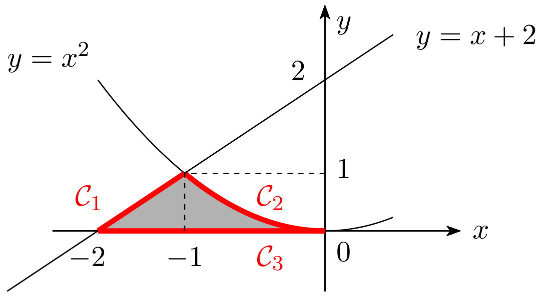

Então

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \;\wedge\; y - 2 \leq x \leq -\sqrt{y}\}\,.$$

(b) Tendo em conta a alínea (a) tem-se imediatamente

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_0^1 \Big(-\sqrt{y} - (y-2)\Big)\,dy \\
&= \int_0^1 \Big(-y^{\frac{1}{2}} - y + 2\Big)\,dy \\
&= \left[-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \\
&= \frac{5}{6}\,.
\end{aligned}$$

(c) O perímetro da região $\mathcal{A}$ é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes três curvas:

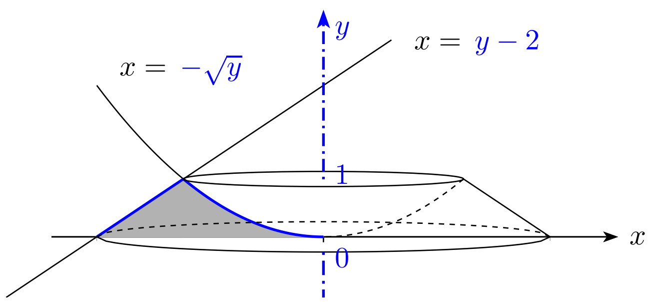



Tendo em conta o teorema de Pitágoras e a fórmula integral para cálculo de comprimentos de curvas, tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro}(\mathcal{A}) &= \text{Comprimento}(\mathcal{C}_1) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_2) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_3) \\
&= \sqrt{1^2+1^2} + \int_{-1}^0 \sqrt{1+\Big(\big(x^2\big)'\Big)^2}\,dx + 2 \\
&= \sqrt{2} + \int_{-1}^0 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx + 2 \\
&= \sqrt{2} + \int_{-1}^0 \sqrt{1+4x^2}\,dx + 2\,.
\end{aligned}$$

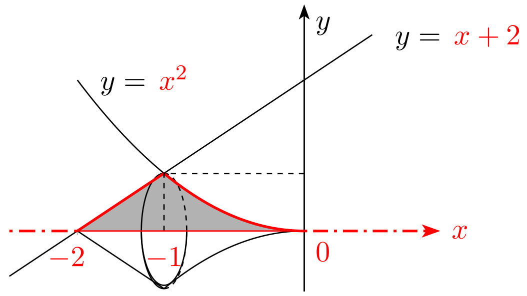
(d) i) O volume do sólido de revolução representado na figura (i), que é obtido pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos $Oy$, é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi \int_0^1 \Big((\underbrace{y-2}_{R_{\text{ext}}})^2 - (\underbrace{-\sqrt{y}}_{R_{\text{int}}})^2\Big)\,dy \\
&= \pi \int_0^1 \Big(y^2 - 4y + 4 - y\Big)\,dy \\
&= \pi \int_0^1 \Big(y^2 - 5y + 4\Big)\,dy\,.
\end{aligned}$$

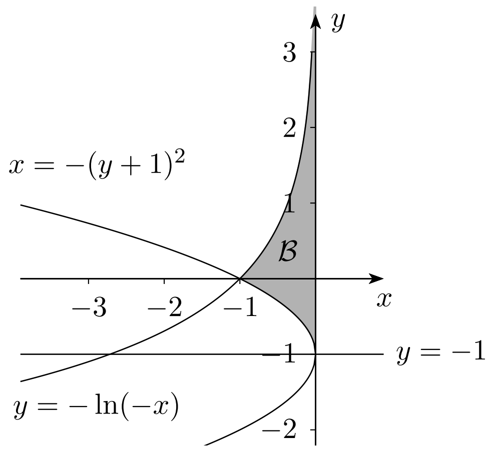


ii) O volume do sólido de revolução representado na figura (i), que é obtido pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno dos eixos $Ox$, é dado por

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi\int_{-2}^{-1}(\underbrace{x+2}_{R_{\text{ext}}})^2\,dx+\pi\int_{-1}^{0}(\underbrace{x^2}_{R_{\text{ext}}})^2\,dx\\ &= \pi\int_{-2}^{-1}(x+2)^2\,dx+\pi\int_{-1}^{0}x^4\,dx\,.\end{aligned}$$



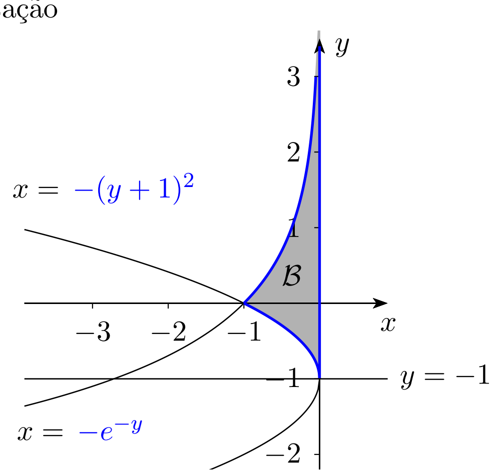

3. (a) A representação gráfica da região $\mathcal{B}$ é a seguinte:




(b) Começamos por notar que a curva logarítmica (em $x$) é definida em função de $y$ pela seguinte expressão:

$$y=-\ln(-x)\;\Leftrightarrow\;-y=\ln(-x)\;\Leftrightarrow\;e^{-y}=-x\;\Leftrightarrow\;-e^{-y}=x$$

Atendendo à representação




tem-se, em função de $y$,

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_{-1}^{0}\Big(0-\big(-(y+1)^2\big)\Big)\,dy+\int_{0}^{+\infty}\Big(0-\big(-e^{-y}\big)\Big)\,dy\\ &= \int_{-1}^{0}(y+1)^2\,dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-y}\,dy\,.\end{aligned}$$

(c) Uma vez que a área de $\mathcal{B}$ é, em particular, definida por um integral impróprio (de 1ª espécie), então a área só será finita se esse integral impróprio for convergente. Ora,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy &= \lim_{B\to+\infty} -\int_0^B -e^{-y}\,dy = \lim_{B\to+\infty} -\Big[e^{-y}\Big]_0^B \\ &= \lim_{B\to+\infty} -\Big(\underbrace{e^{-B}}_{\to 0} -1\Big) = 1\,,\end{aligned}$$

pelo que o integral é convergente e portanto a área de $\mathcal{B}$ é finita.

4. (a) Tendo em conta a definição de primitiva, basta mostra que a derivada de $-\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$ é $\dfrac{1}{x^2+x}$. Recorrendo às regras de derivação tem-se então

$$\begin{aligned}\Big(-\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)' &= -\frac{\Big(1+\frac{1}{x}\Big)'}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{0+(x^{-1})'}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{-x^{-2}}{\frac{x+1}{x}} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x^2}\,\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}\,.\end{aligned}$$

(b) Comecemos por determinar o domínio da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ :

$$\begin{aligned}D_f &= \Big\{x\in\mathbb{R}:\, x^2+x\neq 0\Big\} = \Big\{x\in\mathbb{R}:\, x(x+1)\neq 0\Big\} = \Big\{x\in\mathbb{R}:\, x\neq 0 \wedge x\neq -1\Big\} \\ &= ]-\infty,\,-1[\,\cup\,]-1,\,0[\,\cup\,]0,\,+\infty[\,.\end{aligned}$$

i. O integral (I) é impróprio porque o intervalo de integração $[0,\,1]$ não está contido no domínio da função $f$ (devido a $x=0$) e a função é ilimitada nesse intervalo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2+x} = +\infty\,.$$

Tendo em conta o Teorema Fundamental do Cálculo e a primitiva de $f$ dada na alínea (a) tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dy &= \lim_{A\to 0^+}\int_A^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{A\to 0^+}\Big[-\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_A^1 \\ &= \lim_{A\to 0^+}\Big(-\ln(2)+\underbrace{\ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{A}}_{\to+\infty}\Big)}_{\to+\infty}\Big) = +\infty\,,\end{aligned}$$

pelo que o integral é divergente.

ii. Uma vez que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{x^2+x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

e o último integral é divergente então o integral $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x}\,dx$ também é divergente.

5. (a) Ignorando a restrições relativas a alterações de domínios das sucessivas equações, tem-se

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2}\; y\, y' = x \quad &\Leftrightarrow \quad y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{y}\,, \quad \text{equação de variáveis separáveis}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{y}\\
&\Leftrightarrow \quad y\,dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\sqrt{1-x^2} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Atendendo à condição inicial $y(0) = 2$ tem-se agora

$$\frac{2^2}{2} = -\sqrt{1-0} + c \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -1 + c \ \Leftrightarrow\ c = 3\,,$$

pelo que a solução pretendida é definida pela igualdade $\dfrac{y^2}{2} = -\sqrt{1-x^2} + 3\,.$

(b) A equação (ii) é linear de 1ª ordem, pelo que

$$\begin{aligned}
x\,y\,y' = y\,x^2 - y^2 \quad &\Leftrightarrow \quad y' = \frac{y\,x^2}{x\,y} - \frac{y^2}{x\,y}\\
&\Leftrightarrow \quad y' = x - \frac{y}{x}\\
&\Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x}\,y = x\,, \quad \text{equação linear de } 1^{\text{a}} \text{ ordem}\\
&\qquad \text{F.I. } e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|\\
&\overset{\times(x)}{\Leftrightarrow} \quad y'\,x + y = x \cdot x\\
&\Leftrightarrow \quad \big(y\,x\big)' = x^2\\
&\Leftrightarrow \quad y\,x = \int x^2\,dx\\
&\Leftrightarrow \quad y\,x = \frac{x^3}{3} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Para verificar que $y = \dfrac{x}{\ln x}$ é uma solução da equação (iii), basta confirmar que a função verifica a equação. Substituindo então a função na equação (iii), tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} - \frac{\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2}{x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x'\,\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{x}{\ln x}\,\frac{1}{x} - \frac{\frac{x^2}{\ln^2 x}}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln x - x\,\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{x^2}{\ln^2 x}\,\frac{1}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \quad \checkmark\,.
\end{aligned}$$