Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº8 | Data limite de entrega: 25/nov/2016 (18h)

Integrais impróprios

D. Análise

(iii) Analise cada uma das expressões apresentadas e identifique qual(is) representa(m) um integral impróprio, justificando convenientemente a sua resposta. Determine o seu valor no caso de ser possível o seu cálculo.

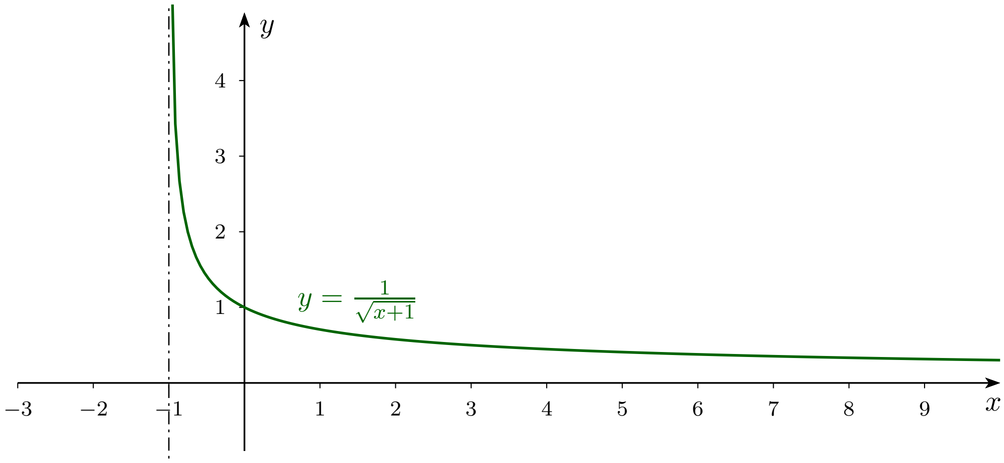
(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\,;$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\,;$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\,;$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\,.$

Sugestão de resolução:

Comecemos por determinar o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$:

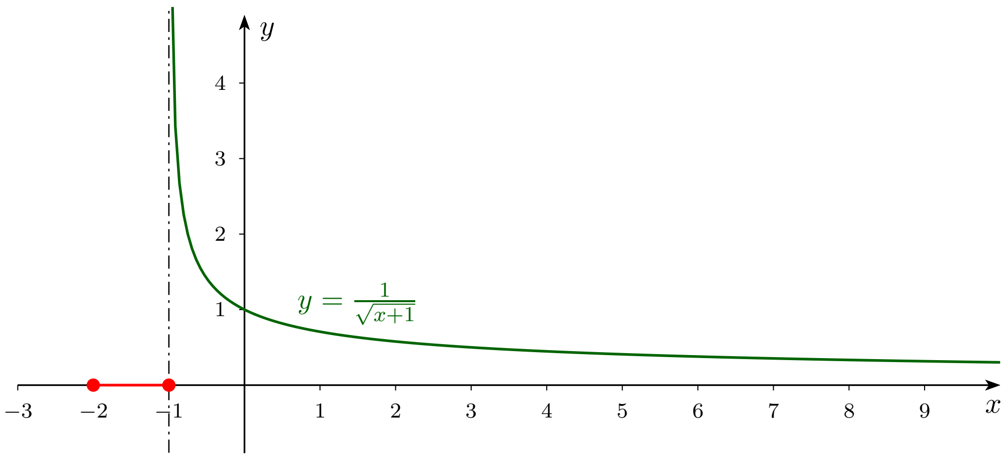
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x+1} \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \ \wedge \ x+1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \ \wedge \ x \neq -1\right\} =]-1, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Note-se ainda que a função é contínua no seu domínio, pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas.



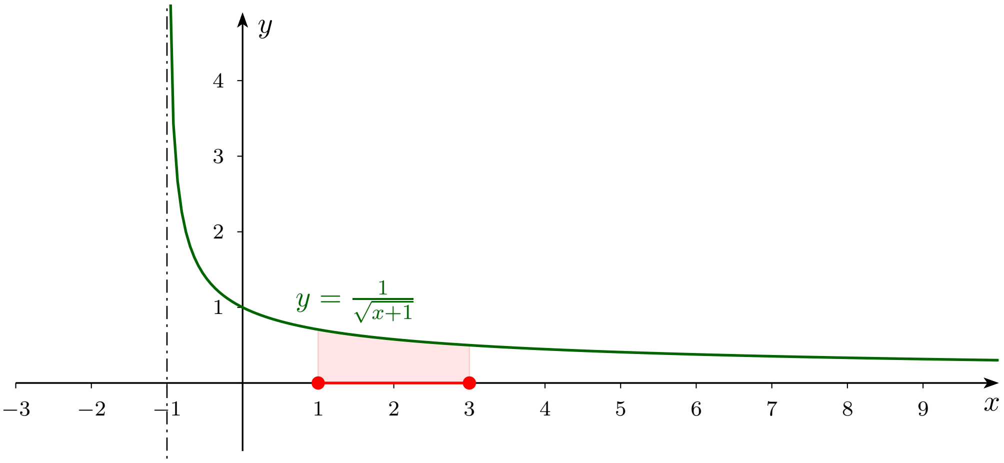
(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

O integral **não está definido** pois o intervalo de integração $[-2, -1]$ é referente a pontos que não pertencem ao domínio da função $f(x)$!



(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

O intervalo de integração $[1,\,3]$ é um subconjunto do domínio de f e é limitado pelo que o integral é **definido**.



Assim,

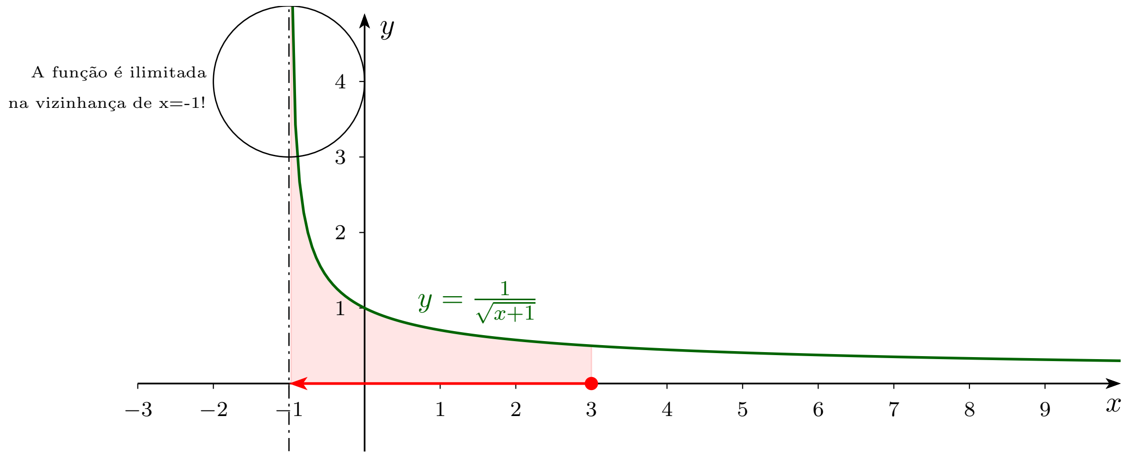
$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \;=\; \int_1^3 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^3 \;=\; 2\Big(\sqrt{4}-\sqrt{2}\Big) \;=\; 4-2\sqrt{2}\,.$$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

O intervalo de integração $[-1,3]$ não é um subconjunto do domínio de $f(x)$, pois o $x=-1$ pertence ao intervalo de integração mas não pertence ao domínio. Logo, o comportamento da função $f(x)$ na vizinhança deste ponto carece de análise . Uma vez que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \;=\; +\infty\,,$$

então $f(x)$ é ilimitada no intervalo $[-1,\,3]$. Como o intervalo $[-1,3]$ é limitado, então o integral é **impróprio de segunda espécie**.



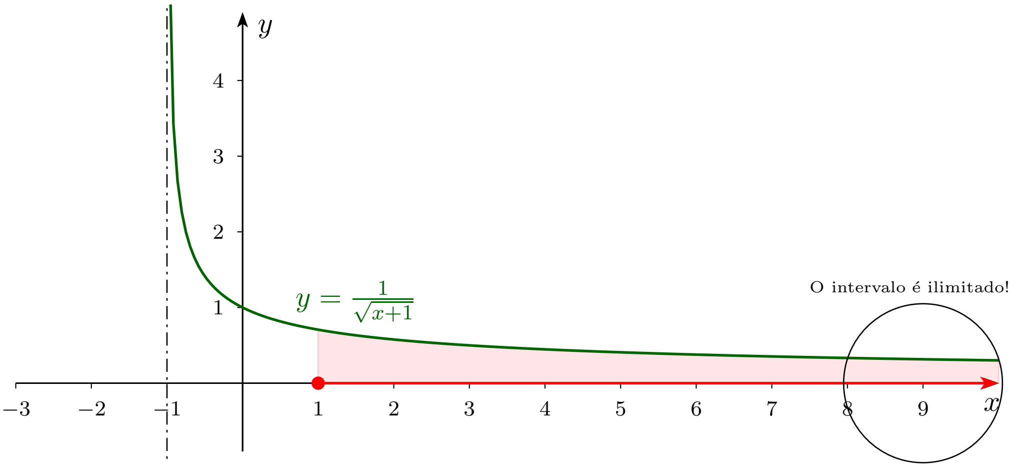
Uma vez que

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \;=\; \lim_{t\to -1^+} \int_t^3 (x{+}1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \lim_{t\to -1^+} \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_t^3 \;=\; =\; \lim_{t\to -1^+} 2\Big(\sqrt{4}-\underbrace{\sqrt{t+1}}_{\to 0}\Big) \;=\; 4\,,$$

então integral é convergente e tem valor 4.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

O intervalo de integração $[1,+\infty[$ é um subconjunto do domínio de $f(x)$ mas é ilimitado, pelo que o integral é **impróprio de primeira espécie**.



Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{t} \;=\; \lim_{t\to+\infty} 2\Big(\underbrace{\sqrt{t+1}}_{\to+\infty} - \sqrt{2}\Big) \;=\; +\infty\,,$$

então o integral é divergente.