CÁLCULO INTEGRAL

Plano Intensivo de Treino de Regras

Cálculo Integral- Definição e Aplicações:Áreas

A.Conhecimento

Definição e propriedades

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função real de variável real, continua em $[a,b]$*, e* F *uma primitiva de* f *, isto é,* $F(x)=\int f(x)dx$ *. Então* $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

1. Determine $\int_{-1}^{6} \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$.

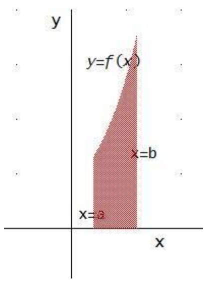
2. Seja $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x\in[-2,1[\\ x^2+x, & x\in[1,5[\end{cases}$. Determine $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

3. Seja $f(x)=2|x-1|$. Determine $\int_0^3 f(x)dx$.

4. Seja $f(x)=\left|sen(x)-\frac{1}{2}\right|, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Determine $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$.

5. Seja $f(x)$ uma função par e $g(x)$ uma função impar tal que $\int_1^3 f(x)dx = 2$ e $\int_2^4 g(x)dx=-2$ .Determine o valor de $\int_{-1}^{-3} 3f(-x)dx + \int_4^2 2g(-x)dx + \int_1^4 3dx$.

Aplicações



Considerando que a área de uma região plana $R=\{(x,y)\in\Re^2 : 0\le y\le f(x)\wedge a\le x\le b\}$ é dada por $A(R)=\int_a^b f(x)\,dx$, identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular a área de cada uma das regiões:

1. Limitada por $x=1, x=e, y=ln(x), y=0$
2. $D_1=\{(x,y)\in\Re^2 : y\le sen(x)\wedge y\ge 0\wedge 0\le x\le\pi\}$
3. $D_2=\{(x,y)\in\Re^2 : y-1\le -2(x-1)^2\wedge y\ge 0\}$

Reproduza a fórmula para os casos seguintes tendo em consideração as respetivas adaptações:

Caso 2: $R = \{(x, y) \in \Re^2 : f(x) \le y \le 0 \wedge a \le x \le b\}$

4. $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : y \le 0 \wedge 0 \le x \le 1 \wedge y \ge -e^{-x}\}$
5. Limitada por $y = x^2 + 2x - 1, y = 0$
6. Limitada por $y = cos(2x), x = \pi / 4, x = 3\pi / 4, y = 0$

Caso 3: $R = \{(x, y) \in \Re^2 : 0 \le f(x) \le y \le g(x) \wedge a \le x \le b\}$

7. Limitada por $x = 1, x = 2, y = ln(x), y = e^x$
8. $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : y \ge 2x^2 - 8x + 9 \wedge y \le 2x - 3\}$
9. Limitada por $y = sen(x), y = cos(x), x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

Caso 4: $R = \{(x, y) \in \Re^2 : f(x) \le y \le g(x) \wedge a \le x \le b\}$

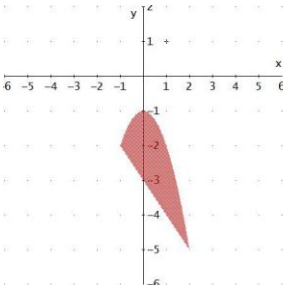
10. $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : y \le x + 1 \wedge y \ge x^2 - x - 2\}$
11. $D_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : y \ge -ln(x + 1) \wedge y \le -x^2 + 2x \wedge 0 \le x \le 1\}$
12. Limitada por $y = x^2 + 4x + 3, y = x + 3$

Resultados da aprendizagem

Cálculo Integral- Aplicações:áreas

B.Compreensão

1. Averigue qual das seguintes regiões corresponde à representada no gráfico e identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular a área segundo o eixo OX. Determine o valor da área da região.



$$A_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq -x^2 - 1 \wedge y \geq -x - 3\}$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq -x^2 + 1 \wedge y \leq -x - 3\}$$
$$A_3 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq -x^2 - 1 \wedge y \geq -x - 3\}$$
$$A_4 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq -x^2 - 1 \wedge y \geq -x + 3\}$$

2. Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular a área de cada uma das regiões, segundo o eixo OX:

   a. Limitada por $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = cos(x), y = sen(x), y = 0$ (caso1-multiplo)

   b. Limitada por $y = 1, y = ln(x), y = \text{-}x + 1$ (caso3-multiplo)

   c. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq 2x - 5 \wedge y + 1 \geq 2(x-2)^2 \wedge y \leq 1\}$ (caso 4-multiplo)

3. Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular a área de cada uma das regiões segundo o eixo das ordenadas:

Caso 5: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq f(y) \wedge c \leq y \leq d\}$

a. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : x - 1 \leq -2(y-1)^2 \wedge x \geq 0\}$

b. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : x \geq 0 \wedge x \leq -2y^2 + 1\}$

c. Limitada por $y = 1, y = e, x = ln(y), x = 0$

Caso 6: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : f(y) \leq x \leq 0 \wedge c \leq y \leq d\}$

d. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : x + 1 \geq (y+1)^2 \wedge x \leq 0\}$

e. Limitada por $x = y^2 + 2y - 1, x = 0$

f. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x \geq -e^{-y}\}$

Caso 7: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq f(y) \leq x \leq g(y) \wedge c \leq y \leq d\}$

g. $D_1 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \geq 2y^2 - 8y + 9 \wedge x \leq \frac{y+3}{2}\right\}$

h. Limitada por $x = e^{-y}, x = 1, y = 1$

i. Limitada por $x = -2(y-1)^2 + 2, x = 2y$

Caso 8: $R=\{(x,y)\in\Re^2 : f(y)\le x\le g(y)\wedge c\le y\le d\}$

j. $D_1=\{(x,y)\in\Re^2 : y\ge x+1\wedge x\ge y^2-y-2\}$

k. Limitada por $x=y^2+4y+3, y=x-3$

l. $D_2=\{(x,y)\in\Re^2 : x\le 1-(y-1)^2\wedge x\ge y-2\}$

C.Aplicação

Calcule a medida da área de cada uma das regiões indicadas

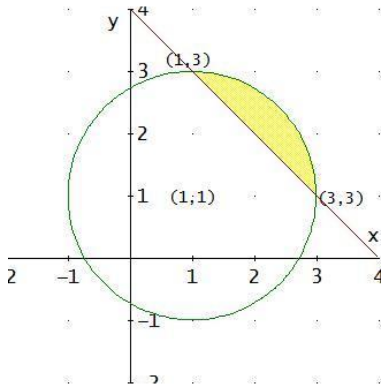
1. Limitada por $y=|x|, y=x^2-1, x=-1, x=1$;
2. Limitada por $y=x^2-4, y=-x^2+4$
3. Limitada por $y^2=2x-2, y=x-5$
4. $F=\{(x,y)\in\Re^2 : (x-2)^2\le y\wedge y\le -2x+4\wedge y\ge -x+2\}$
5. $A=\{(x,y)\in\Re^2 : (y-1)^2\le x-2\le 3y-5\}$
6. $E=\left\{(x,y)\in\Re^2 : x\le |y+1|+2\wedge x\ge \frac{3}{4}y^2\wedge y\le 0\right\}$

Resultados da aprendizagem

Cálculo Integral- Aplicações:áreas

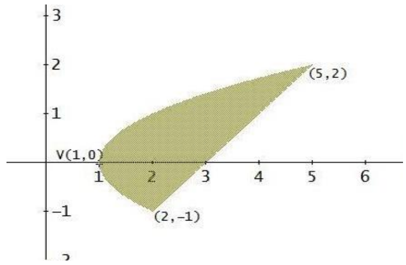
D.Análise

1. Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular a área da região $D_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq x - 2\}$,segundo o eixo das abcissas
2. Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular a área da região $D_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq y^2\}$, segundo o eixo das ordenadas.
3. Averigue qual das seguintes regiões corresponde à região representada no gráfico e identifique, através de <u>um integral simples</u>, uma expressão que permita calcular a área.

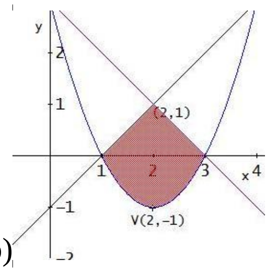


$$B_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 4 \wedge y \geq -x + 4\}$$
$$B_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge y \geq -x + 4\}$$
$$B_3 = \{(x, y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4 \wedge y \leq -x + 4\}$$
$$B_4 = \{(x, y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 4\}$$

4. Para as figuras geométricas seguintes determine as expressões que limitam a região, identifique a região através de um conjunto de condições e identifique uma expressão que lhe permita determinar a respetiva área, utilizando, para o efeito, o cálculo integral:



a)



b)

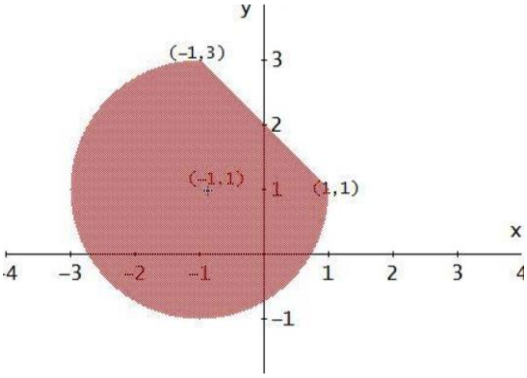
E.Sintese

1. Explicite, utilizando integrais simples, dois processos diferentes para calcular a área da seguinte região limitada por $x = \sqrt{3}y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$.
2. Explicite, utilizando integrais simples, dois processos diferentes para calcular a área da seguinte região $R = \{(x, y) \in \Re^2 : e^{-1} - 2 \leq x \leq 0 \wedge e^{-y} - 2 \leq x \leq -(y-1)^2 \wedge y \leq 1\}$.
3. Utilizando conceitos de geometria elementar e o cálculo integral, determine a área da seguinte região plana:

$$F = \{(x, y) \in \Re^2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \wedge y + 1 \geq (x+1)^2 \wedge x + 1 \leq (y-1)^2 \wedge y \leq 1\}$$

F.Avaliação

1. Determine a medida da área da seguinte região:



2. Encontre o valor de $k \in \Re$ para o qual a área do primeiro quadrante definida pela parábola $y = kx^2$, pelo eixo OX e pela reta $x = 1$ seja igual a 1.

3. Encontre o valor de $k \in \Re^+$ para o qual a área da região $A = \{(x, y) \in \Re^2 : y \geq \frac{1}{k} x - 2 \wedge x \geq ky^2\}$ seja igual a 2.

4. Calcule por definição a medida da área da região limitada por $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 0$, considerando uma decomposição do intervalo de integração em n subintervalos de igual amplitude e uma soma de Riemann com a escolha adequada dos pontos $c_i = x_i$ em cada subintervalo da decomposição.

Plano de Treino Intensivo de Regras

Cálculo Integral- Aplicações-Volumes

A.Conhecimento

I-Considerando que o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região plana $R = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$ em torno do eixo OX é dado por $V_{OX}(R) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, identifique o volume $V_{OX}(R)$ para cada uma das seguintes regiões:

1. Limitada por $x = 1, x = e, y = ln(x), y = 0$
2. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq sen(x) \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq \pi\}$
3. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : y - 1 \leq -2(x-1)^2 \wedge y \geq 0\}$

Reproduza a fórmula para os casos seguintes tendo em consideração as respetivas adaptações:

Caso 2: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : f(x) \leq y \leq 0 \wedge a \leq x \leq b\}$

4. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq -e^{-x}\}$
5. Limitada por $y = x^2 + 2x - 1, y = 0$
6. Limitada por $y = cos(2x), x = \pi/4, x = 3\pi/4, y = 0$

Caso 3: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \wedge a \leq x \leq b\}$

7. Limitada por $x = 1, x = 2, y = ln(x), y = e^x$
8. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq 2x^2 - 8x + 9 \wedge y \leq 2x - 3\}$
9. Limitada por $y = sen(x), y = \cos(x), x = 0, x = \pi/4$

II-Identifique, através de um integral simples, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de cada uma das regiões em torno do eixo OY

Caso 4: $R = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq f(y) \wedge c \leq y \leq d\}$

1. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : x - 1 \leq -2(y-1)^2 \wedge x \geq 0\}$
2. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : x \geq 0 \wedge x \leq -2y^2 + 1\}$
3. Limitada por $y = 1, y = e, x = ln(y), x = 0$

Caso 5: $R=\{(x,y)\in\Re^2 : f(y)\le x\le 0 \wedge c\le y\le d\}$

4. $D_1=\{(x,y)\in\Re^2 : x+1\ge (y+1)^2 \wedge x\le 0\}$
5. Limitada por $x=y^2+2y-1, x=0$
6. $D_2=\{(x,y)\in\Re^2 : x\le 0 \wedge 0\le y\le 1 \wedge x\ge -e^{-y}\}$

Caso 6: $R=\{(x,y)\in\Re^2 : 0\le f(y)\le x\le g(y) \wedge c\le y\le d\}$

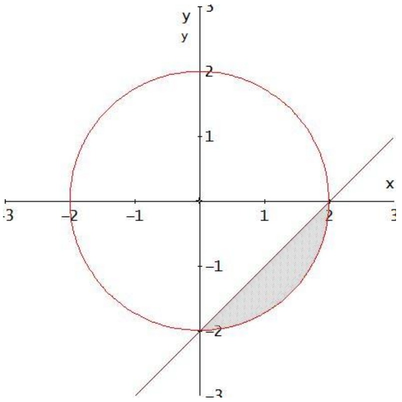
7. $D_1=\{(x,y)\in\Re^2 : x\ge 2y^2-8y+9 \wedge y\ge 2x-3\}$
8. Limitada por $x=e^{-y}, x=1, y=1$
9. Limitada por $x=-2(y-1)^2+2, x=2y$

Resultados da aprendizagem

Cálculo Integral- Aplicações:volumes

B.Compreensão

Averigue qual das seguintes regiões corresponde à representada no gráfico e identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular o volume do sólido de revolução segundo o eixo OX e o eixo OY.



$$A_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x - 2\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq -x - 2\}$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \wedge y \geq -x - 2\}$$

$$A_4 = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq x - 2\}$$

Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno de OX da região:

1. Limitada por $y = 1, y = ln(x), y = -x + 1$ (caso3-múltiplo)
2. Limitada por $y = 0, y = -x^2 + 2x + 3, y = x + 1$ (caso 3-múltiplo)

Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno de OY da região:

3. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq x + 1 \wedge y \geq 2x^2 \wedge x \geq 0\}$(caso 6– múltiplo)
4. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq -ln(x+1) \wedge y \leq -x^2 + 2x \wedge 0 \leq x \leq 1\}$(caso 6– múltiplo)

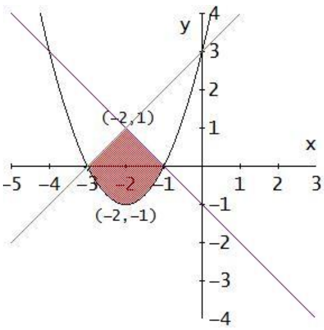
C.Aplicação

Calcule a medida do volume do sólido de revolução obtido pela rotação de cada uma das regiões indicadas em torno do eixo referenciado em cada uma das regiões indicadas

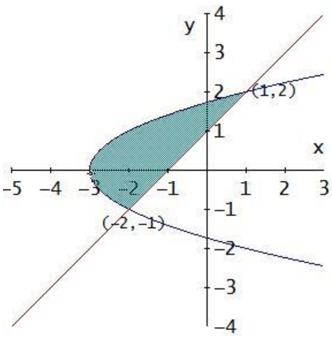
1. Limitada por $y = |x|, y = x^2 - 1$; (OY)
2. Limitada por $y = x^2 - 4, y = -x^2 + 4, x = 0$ (OY)
3. Limitada por $y^2 = 2x - 2, y = x - 5, y = 0$;(OY)
4. Limitada por $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = cos(x), y = sen(x), y = 0$ (OX)
5. $A = \{(x,y) \in \Re^2 : (y-1)^2 \leq x - 2 \leq 3y - 5\}$(OY)
6. $E = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x \leq |y+1| + 2 \wedge x \geq \frac{3}{4}y^2 \wedge y \leq 0\right\}$(OY)
7. $F = \{(x,y) \in \Re^2 : (x-2)^2 \leq y \wedge y \leq -2x + 4 \wedge y \geq -x + 2\}$ (OX)

D.Análise

1. Para as figuras geométricas seguintes determine as expressões que limitam a região, identifique a região através de um conjunto de condições e explicite uma expressão que lhe permita determinar o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de cada uma das regiões em torno do eixo OX, utilizando para o efeito, o cálculo integral:

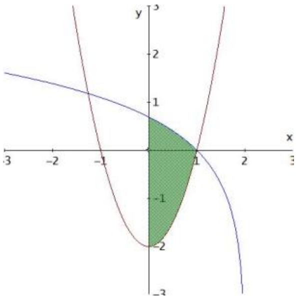


a)



b)

2. Averigue qual das seguintes regiões corresponde à representada no gráfico e identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular o volume do sólido de revolução segundo o eixo OX e o eixo OY



$$B_1 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 - 2 \wedge y \leq ln(x-2) \wedge x \geq 0\right\}$$
$$B_2 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 - 2 \wedge y \leq ln(2-x) \wedge x \geq 0\right\}$$
$$B_3 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : y \geq 2x^2 - 2 \wedge y \leq ln(x-2) \wedge x \geq 0\right\}$$
$$B_4 = \left\{(x,y) \in \Re^2 : y \geq 2x^2 - 2 \wedge y \leq ln(2-x) \wedge x \geq 0\right\}$$

E.Síntese

1. Explicite, utilizando integrais simples, expressões que lhe permitam calcular o volume dos sólidos de revolução obtidos pela rotação da região $D = \left\{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq \sqrt{3}y^2\right\}$ em torno de cada um dos eixos coordenados.
2. Explicite, utilizando integrais simples, expressões que lhe permitam calcular o volume dos sólidos de revolução obtidos pela rotação da região $R = \left\{(x,y)^2 \in \Re^2 : e^{-1} - 2 \leq x \leq 0 \wedge e^{-y} - 2 \leq x \leq -(y-1)^2 \wedge y \leq 1\right\}$ em torno de cada um dos eixos coordenados.

F.Avaliação

1. Encontre o valor de $k \in \Re$ para o qual o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo do OX da região do 1º quadrante definida pela parábola $y = kx^2$, pelo eixo dos X e pela recta $x = 1$ seja igual a 1.
2. Encontre o valor de $k \in \Re^+$ para o qual o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo do OY da região $A = \{(x,y)^2 \in \Re^2 : y \geq \frac{1}{k}x - 2 \wedge x \geq ky^2\}$ seja igual a 2.

Resultados das Aprendizagens

Cálculo Integral- Aplicações-comprimentos

A.Conhecimento

O comprimento da curva $y = f(x)$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada pela expressão $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular o comprimento da curva que limita cada uma das regiões.

1. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y-1 \leq -2(x-1)^2 \wedge y \geq 0\}$
2. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq -e^{-x}\}$

B.Compreensão

Cálculo de Perímetros:

Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular o comprimento do perímetro de cada uma das regiões:

1. $D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq 2x^2 - 8x + 9 \wedge y \leq 2x - 3\}$
2. $D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : y \leq x+1 \wedge y \geq x^2 - x - 2\}$

Casos múltiplos:

Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular o comprimento do perímetro de cada uma das regiões:

3. Limitada por $y = 1, y = ln(x), y = -x+1$
4. Limitada por $y = 0, y = -x^2 + 2x + 3, y = x + 1$
5. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq x+2 \wedge y \prec -x+2\}$

Funções do tipo $x = f(y)$

Identifique, através de um integral simples, uma expressão que permita calcular o comprimento da curva que limita cada uma das regiões

6. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : x-1 \leq -2(y-1)^2 \wedge x \geq 0\}$
7. Limitada por $x = y^2 + 2y - 1, x = 0$

Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permita calcular o comprimento do perímetro de cada uma das regiões:

8. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : x \geq 2y^2 - 8y + 9 \wedge y \geq 2x - 3\}$
9. $D = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x+1 \wedge x \geq y^2 - y - 2\}$

C.Aplicação

Explicite, utilizando integrais simples, uma expressão que lhe permita determinar a medida do comprimento do perímetro de cada uma das regiões indicadas

1. Limitada por $y=|x|, y=x^2-1, x=-1, x=1$;
2. Limitada por $y=x^2-4, y=-x^2+4$
3. $D=\{(x,y)^2 \in \Re^2 : y \geq e^{-x} \wedge x \leq -y^2+4 \wedge 0 \leq x \leq 3\}$

D.Análise

Considere a seguinte região do plano limitada por $(x+2)^2+)(y-1)^2=1, y+1=(x+1)^2, y=-x$.

Sabendo que o perímetro total da figura é $\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\frac{ln(\sqrt{5}-2)}{2}$ calcule o valor do perímetro correspondente à parábola.

E.Sintese

1. Estabeleça, por dois processos diferentes, a expressão que lhe permite calcular o comprimento do perímetro região limitada por $x=\sqrt{3}y^2$, $x^2+y^2=4$, $y=0$.
2. Estabeleça, por dois processos diferentes, a expressão que lhe permite calcular o comprimento do perímetro da região $R=\{(x,y)^2 \in \Re^2 : e^{-1}-2 \leq x \leq 0 \wedge e^{-y}-2 \leq x \leq -(y-1)^2, y \leq 1\}$

F.Avaliação

Considere a região plana definida por $R=\{(x,y)^2 \in \Re^2 : y+1 \leq -x^2 \wedge y \geq -x-3\}$. Prove que a medida do comprimento do perímetro da região R é igual a $3\sqrt{2}+\int_{-5}^{-2}\sqrt{\frac{4t+3}{4t+4}}dt+2\int_{-2}^{-1}\sqrt{\frac{4t+3}{4t+4}}dt$