现代密码学

Modern Cryptography

张方国

中山大学计算机学院

Office: Room 305, IM School Building

E-mail: isszhfg@mail.sysu.edu.cn

HomePage: https://cse.sysu.edu.cn/content/2460

第十九讲 DLP（二）

第6章 公钥密码学和离散对数

- 椭圆曲线密码体制

公钥密码学的研究热点

1980 1990 2000 2010 2020

RSA (整数分解**问题**)

ECC(短的密**钥**, 离散**对**数**问题**困**难**)

基于配对的密码体制**(IBE)**

后量子密码体制(格, **纠错码**, 同源等)

ECC

- **传统的ECC**
  基于ECDLP的密码体制，如ECDSA, ECIES, SM2等

- **广义的ECC**
  传统ECC,
  基于双线性对的密码体制
  基于椭圆曲线同源的密码体制

椭圆曲线及其相关问题

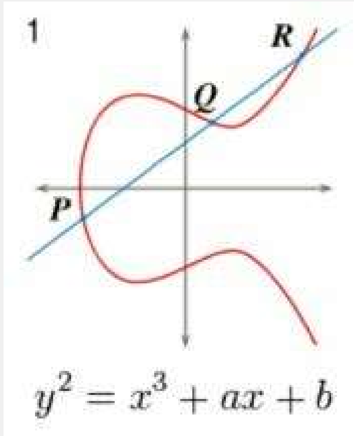
- 什么是椭圆曲线?

椭圆曲线(**Elliptic Curve**) 是由如下形式的方程给出的一条曲线

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

$$\boxed{E : y^2 = x^3 + ax + b} \qquad -(4a^3 + 27b^2) \neq 0$$

在 C上, E 同构于 C/Λ, Λ 是一个格.



密码上: 主要研究曲线在F_p = Z/pZ 或更一般的 F_q 上的解

Number Theory, Physics

- 椭圆曲线与椭圆函数(复分析理论)
- 椭圆曲线与模形式
- 椭圆曲线与费马大定理Fermat's last theorem
- 椭圆曲线与密码学
- 椭圆曲线与弦理论(String Theory)
- 椭圆曲线与纠错码—AG code

张方国，椭圆曲线在密码中的应用:过去,现在,将来... . 山东大学学报（理学版），**2013 Vol. 48 (05): 1-13**

DLP密码体制

当一个群G满足如下性质时，可用于构造密码体制：

- 1，群元素可以（用计算机）紧致的表示；
- 2，群运算可以有效的执行；
- 3，DLP(给定 g, h=g^a, 计算a)是困难的。

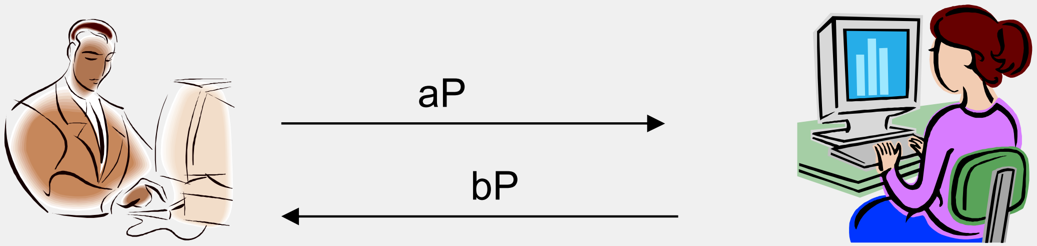
Koblitz, N.: Elliptic curve cryptosystems. Math. Comput. 48, 203–209 (1987).
Miller, V.: Use of elliptic curves in cryptography. CRYPTO'85, LNCS 218, pp. 417–426

- **ECC参数：**

  有限域**Fq**上的椭圆曲线**E**，**#E(Fq)=nh**，**n**是一个素数，**P**是群**E(Fq)**的一个**n**阶生成元。从**[0,n-1]**中随机选**d**。

  公钥是**Q=dP;** 私钥是**d.**

- 基于一般离散对数的方案可以转化成**ECC**的，例如**Diffie-Hellman**密钥协商 **— ECDH**



abP=K

baP=K

ECC是当前主流的公钥密码体制！

- 比特币与ECC

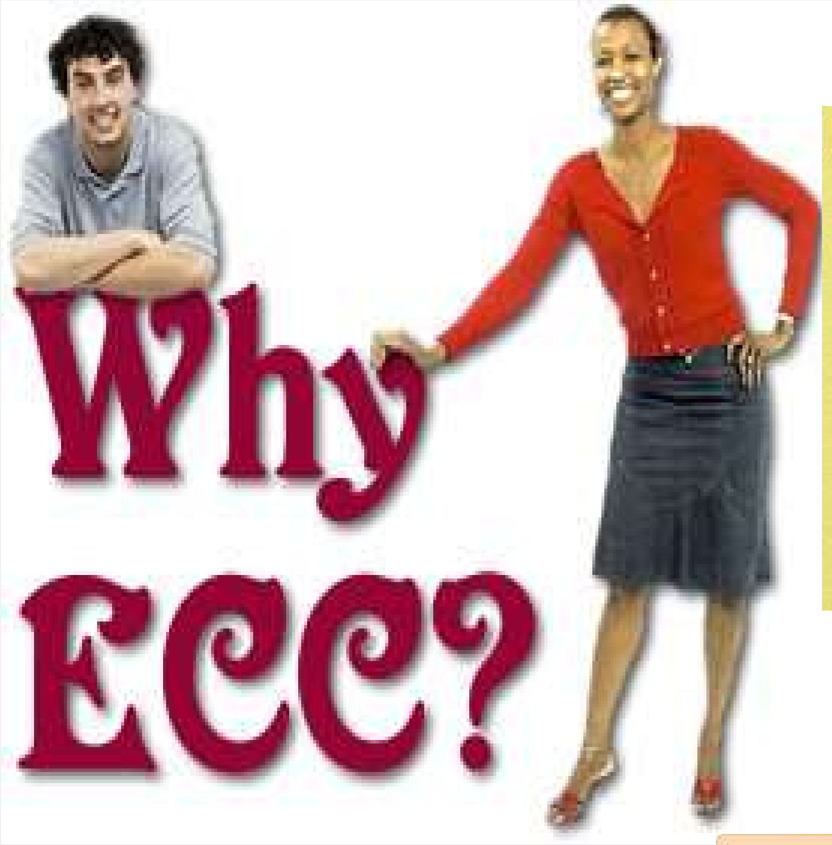
$$E : y^2 = x^3 + 7 \text{ over } F_p, \quad p=2^{256} - 2^{32} - 977$$

- SSH: ECDSA, ECDH
- TLS
- Austrian e-ID Card奥地利电子

- 伪随机数产生器
- 中国商密标准及相关产品：SM2

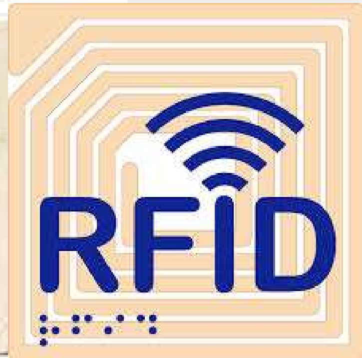
当前ECC标准

- ANSI X9: 62, 63, 92, …
- IEEE: 1363-2000, P1363a, P1363.2, P802.15.3/4, …
- ISO: 14888-3, 9496, 15496, 18033-2, …
- FIPS: 186-2, 2XX, …
- NESSIE, IPA Cryptrec, …
- SECG: SEC1, SEC2, …
- IETF: PKIX, IPSec, SMIME, TLS, …
- SET, MediaPlayer, 5C, WAP, …
- China: SM2



ECC key (bits)	RSA key (bits)	Ratio
163	1024	1:6
256	3072	1:12
384	7680	1:20
512	15360	1:30

我们希望更短的秘钥：



实数域上的椭圆曲线

定义6.3 设$a, b \in R$是满足$4a^3 + 27b^2 \neq 0$的常实数。方程

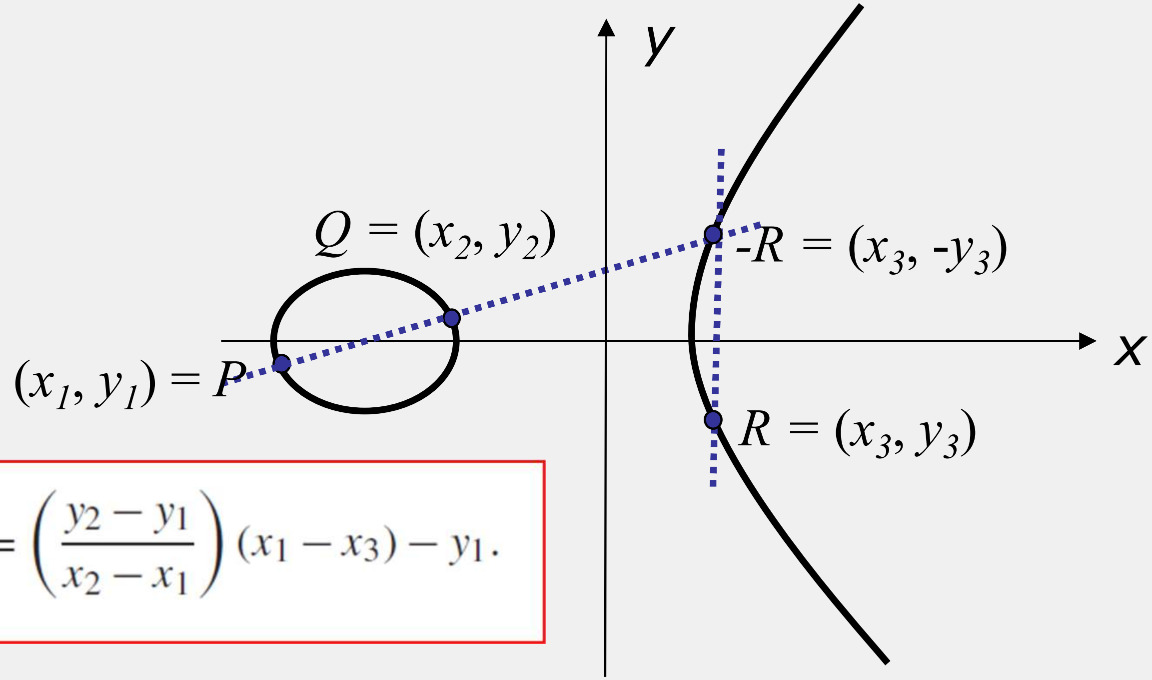
$$y^2 = x^3 + ax + b$$

的所有解$(x, y) \in R \times R$连同一个无穷远点$\mathcal{O}$组成的集合E称为一个非奇异椭圆曲线。

条件$4a^3 + 27b^2 \neq 0$是保证方程$y^2 = x^3 + ax + b$有3个不同解的充要条件。如果$4a^3 + 27b^2 = 0$，则对应的椭圆曲线称为奇异椭圆曲线。

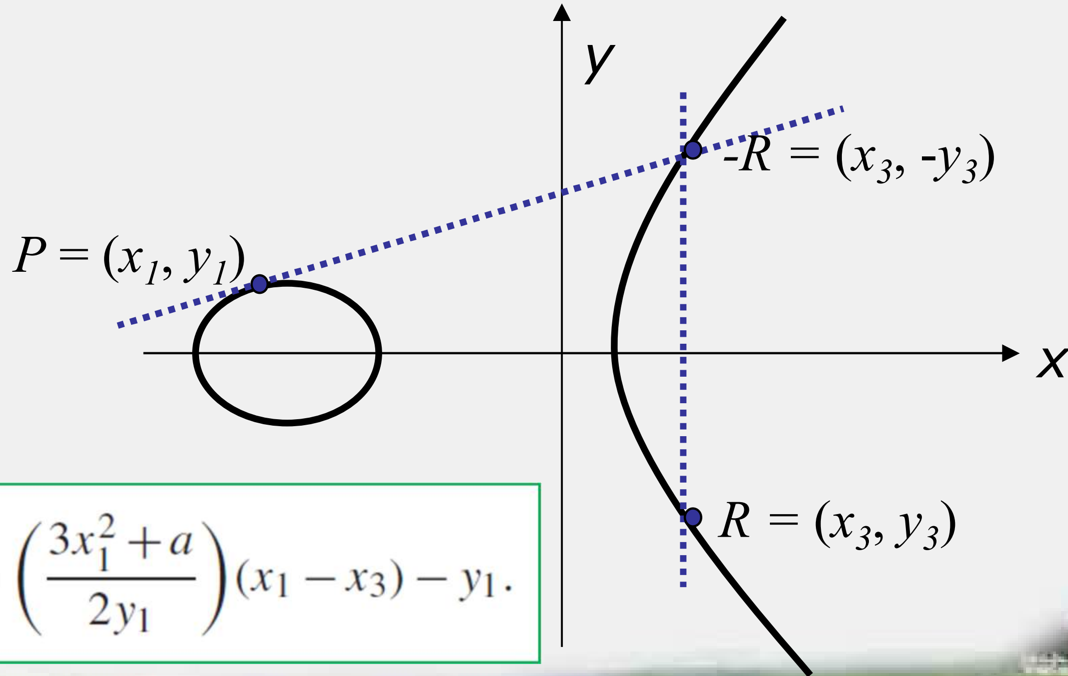
椭圆曲线群运算：切割线法则

- 点加
  $P + Q = R, P \neq Q$



$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2 \quad \text{and} \quad y_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1.$$

- 倍点
  $P + P = 2P = R$



$$x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2 - 2x_1 \quad \text{and} \quad y_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1.$$

椭圆曲线群运算

假定E是一个非奇异椭圆曲线。在E上定义一个二元运算，使其成为一个阿贝尔群。这个二元运算通常用加法表示。无穷远点$\mathcal{O}$将是单位元。因此，有$P+\mathcal{O}=\mathcal{O}+P=P$对于所有的$P\in E$。

假设$P,Q\in E$，其中$P=(x_1,y_1),Q=(x_2,y_2)$。

- 如果$x_1\neq x_2$，则$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_3,y_3)$，其中$x_3=\lambda^2-x_1-x_2$，$y_3=\lambda(x_1-x_3)-y_1$，$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；
- 如果$x_1=x_2$和$y_1=-y_2$，则$(x,y)+(x,-y)=\mathcal{O}$。因此，(x,y)和$(x,-y)$是关于椭圆曲线加法运算互逆的；
- 如果$x_1=x_2$和$y_1=y_2$，则$x_3=\lambda^2-x_1-x_2$，$y_3=\lambda(x_1-x_3)-y_1$，$\lambda=\frac{3x_1^2+a}{2y_1}$

群运算满足封闭性，结合律，单位元，逆元，交换律成立

因此，$(E,+)$是一个阿贝尔群。

模素数的椭圆曲线

定义在有限域GF(p)上的椭圆曲线

设$p>3$是素数。Z_p上的椭圆曲线可以与实数域上的一样定义，只是R上的运算用Z_p上的类似运算代替。

定义6.4 $p>3$是素数。Z_p上的同余方程

$$y^2 \equiv x^3+ax+b \pmod p \qquad (6.6)$$

的所有解$(x,y)\in Z_p\times Z_p$，连同一个特殊的点$\mathcal{O}$，即无穷远点。共同构成Z_p上的椭圆曲线$y^2=x^3+ax+b$。其中$a,b\in Z_p$是满足$4a^3+27b^2\neq 0$的常量。

按照实数上的椭圆曲线定义群的方式，我们得到一个完全类似的阿贝尔群。

有限交换群！

椭圆曲线的性质

定义在Z_p（p是素数），$p > 3$上的椭圆曲线E大致有p个元素。

Hasse定理 E上的点数如果记为$\sharp E$，那么它满足下面的不等式

$$p+1-2\sqrt{(p)} \le \sharp E \le p+1+2\sqrt{(p)}$$

计算$\sharp E$的准确值比较困难，但有一个有效的算法计算它，这个算法由Schoof发现。

如果可以计算$\sharp E$，进一步要找到E的一个循环子群，在其中离散对数问题是难解的。所以要对群E的结构有所了解。

计算点数的SEA算法！从O(log^{8}p)到O(log^{6}p)。

椭圆曲线的性质

定理6.1 E是定义在Z_p上的一个椭圆曲线，其中p是素数，$p>3$。则存在正整数n_1和n_2，使得$(E,+)$同构于$Z_{n_1}\times Z_{n_2}$，并且有$n_2|n_1$和$n_2|p-1$。

$n_2=1$是可能的。事实上，$n_2=1$当且仅当E是循环群。同时，如果$\sharp E$或者是一个素数，或者是两个不同素数的乘积，那么E也必定是循环群。

一旦整数n_1和n_2确定，则$(E,+)$具有一个循环子群同构于Z_{n_1}，这意味着它可以用于$ElGamal$密码体制的情形。

通用算法适用于椭圆曲线的离散对数问题，而指数演算法对椭圆曲线情形的适用性不得而知。

有一个方法揭示了椭圆曲线与有限域的同构，这对某些类型的椭圆曲线给出了一个有效的算法。

这个技巧属于Menezes,Okamoto和Vanstone，它适用于所谓超奇异曲线，这是一类特殊椭圆曲线，它们被建议用于密码体制。

另外一类弱椭圆曲线，就是所谓的“迹一”的曲线。这些曲线定义在Z_p上，具有p个元素。这些曲线上的离散对数问题是易解的。

点压缩与ECIES

在实际中，实现椭圆曲线上的ElGamal密码体制存在着一些困难。

在Z_p中实现ElGamal密码体制有一个二倍的消息扩张因子。椭圆曲线的实现有一个大约四倍的消息扩张因子。之所以如此，因为大致有p个明文，但每个密文有四个域元素组成。

更为严重的是，密文空间由E上的点组成，没有一个方便的方法能够确定地生成E上的点。

一个较为有效的ElGamal型体制用在所谓的ECIES(椭圆曲线集成加密方案)。

ECIES不仅结合了消息认证码，而且结合了对称密钥加密，描述十分复杂。我们用一个简单的版本来描述，主要实现用于ECIES的基于ElGamal 公钥加密方案的椭圆曲线。

点压缩与ECIES

点压缩，可以降低椭圆曲线上点的存储空间。椭圆曲线E上的一个（非无穷）点是一个对(x,y)。给定一个x的值，y有两个可能的值。这两个可能的y值模p是互为相反数。因为p是奇数，两个可能的$y \mod p$中，一个是奇数，一个是偶数。因此可以通过指定x的值，连同$y \mod 2$一个比特确定E上唯一点$P=(x,y)$。这减少了大约50%的存储空间，代价是需要额外的计算来重构P点的y坐标。

点压缩运算可以表示为函数

$$Point-Compress: E \setminus \{O\} \to Z_p \times Z_2$$

具体定义为：

$$Point-Compress(P) = (x, y \mod 2)$$

其中$P=(x,y)\in E$。逆运算Point-Decompress从$(x, y \mod 2)$重构E上的点$P=(x,y)$。

密码体制6.2 简化的ECIES

令E是定义在$Z_p(p>3$是素数$)$上的一个椭圆曲线，E包含一个素数阶n的循环子群$H=<P>$，其上的离散对数问题是难解的。

设$P=Z_p^*$，$C=(Z_p\times Z_2)\times Z_p^*$，定义

$$K=\{(E,P,m,Q,n):Q=mp\}$$

值P,Q和n是公钥，$m\in Z_n^*$是私钥。

对$K=(E,P,m,Q,n)$，一个（秘密）随机数$k\in Z_n^*$，以及$x\in Z_p^*$，定义

$$e_K(x,k)=(Point-Compress(kP),xx_0 \mod p)$$

其中$kQ=(x_0,y_0)$和$x_0\neq 0$。

对密文$y=(y_1,y_2)$，这里$y_1\in Z_p\times Z_2$和$y_2\in Z_P^*$，定义

$$d_K(y)=y_2(x_0)^{-1} \mod p$$

其中

$$(x_0,y_0)=mPoint-Decompress(y_1)$$

计算椭圆曲线的乘积（标量乘）

可以利用平方-乘算法在乘法群中有效地计算幂α^a。

类似，我们可以使用一个“倍数-和”算法计算椭圆曲线点P的倍数aP。

设c是一个整数，c的一个带符号的二进制表示可以如下：

$$(c_4, c_3, c_2, c_1, c_0) = (0,1,0,1,1) \ or \ (1,0,-1,0,-1)$$

其中$c = 11$。

假定$c = (c_{l-1}, \ldots, c_0)$，则运用下列算法可以计算椭圆曲线上的点集$cP$。

计算椭圆曲线的乘积（标量乘）

算法6.5 倍数-和差算法$(P,(c_{l-1},\ldots,c_0))$

$Q \leftarrow \mathcal{O}$

for $i \leftarrow l-1$ downto 0

do

$$\begin{cases} Q \leftarrow 2Q \\ if\ c_i = 1 \\ then\ Q \leftarrow Q+P \\ else\ if\ c_i = -1 \\ then\ Q \leftarrow Q-P \end{cases}$$

return(Q)