17 第六讲 图（上）

笔记本:	浙江大学《数据结构》
创建时间:	2025/4/12 16:18
更新时间:	2025/4/13 14:14
作者:	panhengye@163.com
URL:	https://www.doubao.com/chat/2913230631981826

什么是图（Graph）？

表示“多对多”的关系

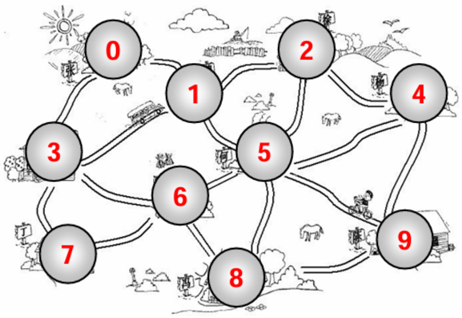
> 线性表和树可以看作是图的特殊情况

包含：

- 一组顶点：通常用V（vertex）表示顶点集合
- 一组边：通常用E（edge）表示边的集合
  - (v, w) → 无向边
  - <v, w> → 有向边（单行线）
  - 不考虑重边和自回路

邻接矩阵表示法

$$G[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若}<v_i, v_j>\text{是G中的边} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|cccccccccc} & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \\ \hline v_0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

如何节省一半的空间呢?

- 将问题转化为如何求总容量，观察这个矩阵：设行数为i，总数为n
  - i = 1时，n =1
  - i = 2时，n = 3
  - i = 3时，n = 6
  - i = 4时，n = 10
- 观察n之间的关系，发现是a1 = 2, d = 1的等差数列
- 所以原数列是二阶等差数列（差分的差分是常数），其通项公式应为二次函数形式

  设通项公式为 $a_n = An^2 + Bn + C$，代入前三项的值：

  1. 当 $n = 1$ 时：$A(1)^2 + B(1) + C = 1$，即 $A + B + C = 1$;
  2. 当 $n = 2$ 时：$A(2)^2 + B(2) + C = 3$，即 $4A + 2B + C = 3$;
  3. 当 $n = 3$ 时：$A(3)^2 + B(3) + C = 6$，即 $9A + 3B + C = 6$。

-

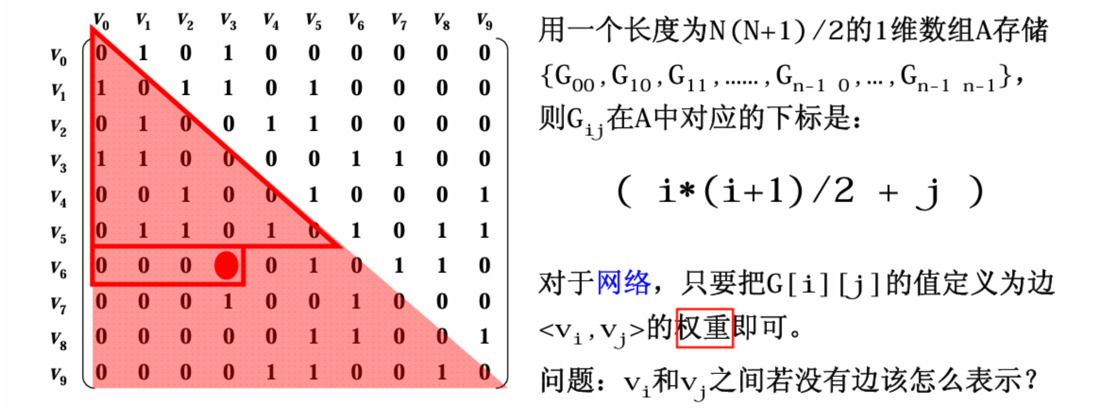
  解方程组:

  - 用第 2 式减第 1 式：$(4A + 2B + C) - (A + B + C) = 3 - 1$，得 $3A + B = 2$;
  - 用第 3 式减第 2 式：$(9A + 3B + C) - (4A + 2B + C) = 6 - 3$，得 $5A + B = 3$;
  - 再用新得到的两式相减：$(5A + B) - (3A + B) = 3 - 2$，得 $2A = 1$，即 $A = \frac{1}{2}$;
  - 代入 $3A + B = 2$：$3 \times \frac{1}{2} + B = 2$，得 $B = \frac{1}{2}$;
  - 代入第 1 式：$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 1$，得 $C = 0$。

  因此，通项公式为：$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$

-

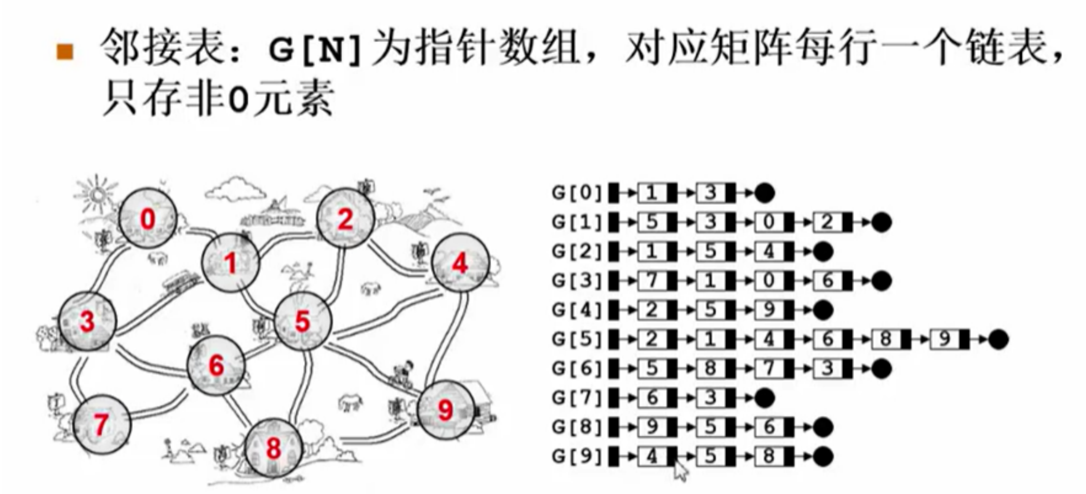
但是如何解决查找问题呢?



思考邻接矩阵表示法的利弊

- 好处
  - 直观易懂
  - 方便检查任意一对顶点间是否存在边
  - 方便检查任意一顶点的所有“邻接点” （有边直接相连的顶点）
  - 方便计算任意顶点的度（degree）
    - 概念：
      - 从该点出发：出度
      - 指向该点：入度
    - 使用：
      - 无向图：对应行（或列）非0元素的个数
      - 有向图：对应行非零元素的个数是“出度”；对应列非零元素的个数是“入度”
- 坏处
  - 有大量的0：
    - 存放稀疏图的时候浪费空间
    - 存放稠密图（尤其是完全图）很合算
  - 浪费时间

邻接表表示法



优缺点：

- 优点

    - 方便找任一顶点的所有“邻接点”
    - 节约稀疏图的空间
    - 方便计算无向图的度
- 缺点
    - 对于有向图，只能计算“出度”；需要构造“逆邻接表”来方便计算“入度”
    - 检查任意一对顶点间是否存在边时非常困难

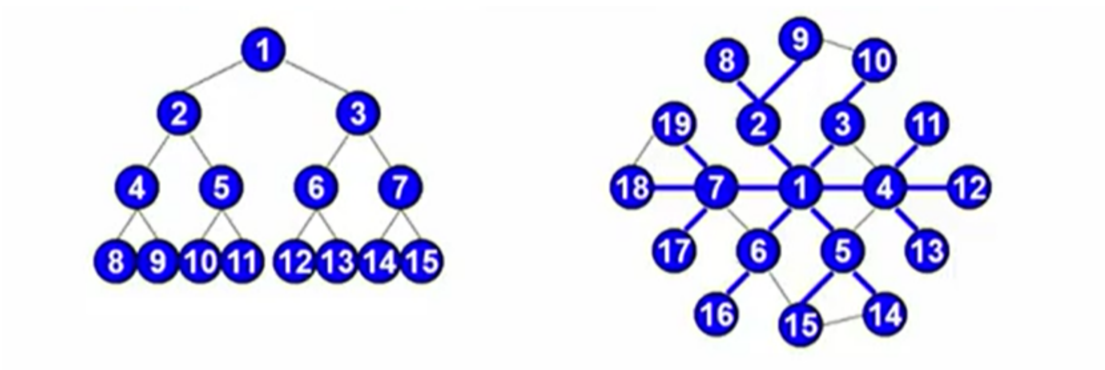
图的遍历

深度优先搜索 - depth first search

对应树的遍历中的先序

广度优先搜索 - breadth first search

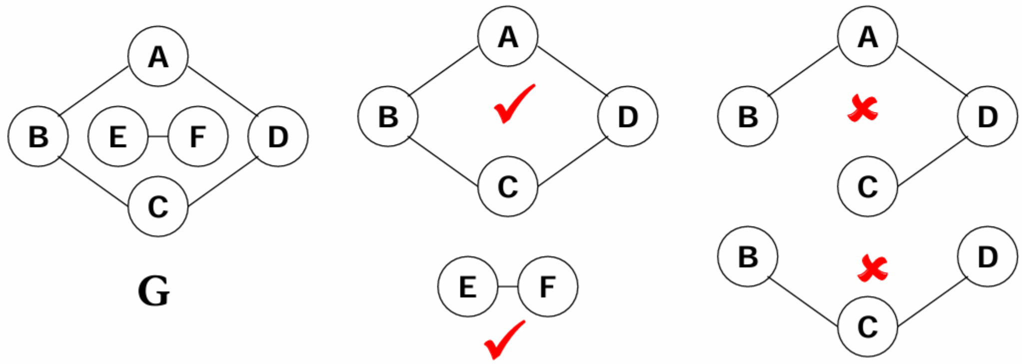
对应树中的层序遍历



为什么要有两种遍历方法?

- 连通：如果从V到W存在一条（无向）路径，则称V和W是连通的
- 路径：V到W的路径是一系列顶点{V， v_1， v_2， …， v_n， W}的集合，其中任一对相邻的顶点间都有图中的边。路径的长度是路径中的边数（如果带权，则是所有边的权重和）。如果V到W之间的所有顶点都不同，则称简单路径
- 回路：起点等于终点的路径
- 连通图：图中任意两顶点均连通

- **连通分量**：无向图的**极大**连通子图
  - 极大顶点数：再加1个顶点就不连通了
  - 极大边数：包含子图中所有顶点相连的所有边



那么对于有向图呢？

- **强连通**：有向图中顶点V和W之间存在双向路径，则称V和W是强连通的
- **强连通图**：有向图中任意两顶点均强连通
- **强连通分量**：有向图的极大强连通子图