QUIZ 3

- Poisson Discrete R.V.：是一种对于二项式随机变量的近似（很大n，小p的情况），在特定的场合下（如在一段时间进入建筑的人数，高速上的车辆，收到的电话），事件成功发生的平均次数为λ，则发生k次的概率是

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\begin{cases} E[X]=\lambda \\ Var[X]=\lambda \end{cases}$$

  - 当n足够大且p足够小时，可以用Poisson分布近似Binomial分布

连续随机变量：如果X是一个连续随机变量，则存在一个非负的函数$f=f_x$，对于任意a,b有

$$P(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

其中f叫做**probability density function(pdf)**

- 仅考虑**Intervals**概率
- 在任意单个点的概率为0

连续随机变量的期望：

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

连续随机变量期望的性质：

- $E[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$
- 线性：$E[aX+b]=aE[X]+b$
- $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

常用分布：

- Uniform Distribution：在$[a,b]$上的均匀分布被定义为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\begin{cases}E[X]=\frac{b+a}{2}\\ Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}\end{cases}$$

Cumulative Distribution Function：关于X的累积分布函数被定义为

$$F(y)=F_X(y)=P(-\infty<x\le y)=\int_{-\infty}^{y}f(x)\,dx$$

CDF的性质：

- $\lim_{y\to\infty}F_X(y)=1$
- $\lim_{y\to-\infty}F_X(y)=0$
- $P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$
- $P(X>a)=1-F_X(a)$

CDF和PDF的相互转化：

$$\frac{d}{dy}F_X(y)=f(x)$$

The Demoivre-Laplace Limit Theorm（用Normal分布近似Binomial分布）：定义S_n为在n次实验中成功出现的次数，每次成功的概率为p，则对任意$a<b$，

$$P\{a\le\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$$

- 需要$np(1-p)\ge 10$，当n更大近似更好

- 是**中心极限定理**的特殊情况

Binomial discrete $\xrightarrow{\text{approx}}$	Normal continuous
$P(X=n)$	$P(n-\frac{1}{2} < X < n+1/2)$
$P(X>n)$	$P(X > n+1/2)$
$P(X<n)$	$P(X < n-1/2)$
$P(X\geq n)$	$P(X > n-1/2)$
$P(X\leq n)$	$P(X < n+1/2)$

常见连续分布：

- Normal Random：写作$X \sim N(\mu, \sigma^2)$I

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  - Standard normal：$\mu = 0, \sigma^2 = 1, f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$
  - 标准化：

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

  - 标准正态分布CDF：$\Phi(x)$，对于负值，$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
  - 需要先标准化后再使用$\Phi(x)$

- Exponential：$\lambda > 0$为参数，表明直到某件事发生的时间

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
E[X] = \dfrac{1}{\lambda} \\
Var[X] = \dfrac{1}{\lambda^2} \\
F(x) = 1 - e^{-\lambda y}
\end{cases}
$$

  - Exponential的无记忆性：$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

联合分布：有大于一个的随机变量

- 离散：$P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$
- 连续：$P_{XY}((x, y) \in A) = \int \int_A f_{XY}(x, y)\, dxdy$
- Marginal：沿着X或Y方向求和
- 需要先求Marginal，再得到$E[X], E[Y], Var[X], Var[Y]$
- **Continuous CDF：**

$$
F(a, b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x, y)\, dydx
$$

- PDF和CDF转换：

$$
f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)
$$

联合独立Joint Independence：

$$
P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)
$$