

QUIZ 3

- Poisson Discrete R.V.：是一种对于二项式随机变量的近似（很大 n ，小 p 的情况），在特定的场合下（如在一段时间进入建筑的人数，高速上的车辆，收到的电话），事件成功发生的平均次数为 λ ，则发生 k 次的概率是

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\begin{cases} E[X] = \lambda \\ Var[X] = \lambda \end{cases}$$

- 当 n 足够大且 p 足够小时，可以用Poisson分布近似Binomial分布

连续随机变量：如果 X 是一个连续随机变量，则存在一个非负的函数 $f = f_x$ ，对于任意 a, b 有

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

其中 f 叫做**probability density function(pdf)**

- 仅考虑**Intervals**概率
- 在任意单个点的概率为0

连续随机变量的期望：

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

连续随机变量期望的性质：

- $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$
- 线性： $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

常用分布：

- Uniform Distribution：在 $[a, b]$ 上的均匀分布被定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[X] = \frac{b+a}{2} \\ Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

Cumulative Distribution Function：关于 X 的累积分布函数被定义为

$$F(y) = F_X(y) = P(-\infty < x \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx$$

CDF的性质：

- $\lim_{y \rightarrow \infty} F_X(y) = 1$
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_X(y) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > a) = 1 - F_X(a)$

CDF和PDF的相互转化：

$$\frac{d}{dy} F_X(y) = f(x)$$

The Demoivre-Laplace Limit Theorem（用Normal分布近似Binomial分布）：定义 S_n 为在 n 次实验中成功出现的次数，每次成功的概率为 p ，则对任意 $a < b$ ，

$$P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

- 需要 $np(1-p) \geq 10$ ，当 n 更大近似更好

- 是中心极限定理的特殊情况

Binomial discrete	$\xrightarrow{\text{approx}}$	Normal continuous
$P(X=n)$		$P(n-\frac{1}{2} < X < n+\frac{1}{2})$
$P(X>n)$		$P(X > n+\frac{1}{2})$
$P(X<n)$		$P(X < n-\frac{1}{2})$
$P(X\geq n)$		$P(X > n-\frac{1}{2})$
$P(X\leq n)$		$P(X < n+\frac{1}{2})$

常见连续分布：

- Normal Random：写作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Standard normal： $\mu = 0, \sigma^2 = 1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- 标准化：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- 标准正态分布CDF： $\Phi(x)$ ，对于负值， $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- 需要先标准化后再使用 $\Phi(x)$
- Exponential： $\lambda > 0$ 为参数，表明直到某件事发生的时间

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} \\ F(x) = 1 - e^{-\lambda y} \end{cases}$$

- Exponential的无记忆性： $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

联合分布：有大于一个的随机变量

- 离散： $P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$
- 连续： $P_{XY}((x, y) \in A) = \int \int_A f_{XY}(x, y) dx dy$
- Marginal：沿着X或Y方向求和
- 需要先求Marginal，再得到 $E[X], E[Y], Var[X], Var[Y]$
- **Continuous CDF：**

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y) dy dx$$

- PDF和CDF转换：

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)$$

联合独立Joint Independence：

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

基本初等函数求导公式

$$(1) \quad (C)' = 0$$

$$(3) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(5) \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(7) \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(9) \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(11) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(13) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(15) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(2) \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(4) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(6) \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(8) \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(10) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(12) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(14) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(16) \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导, 则

$$(1) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(3) \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$(2) \quad (Cu)' = Cu' \quad (C \text{ 是常数})$$

$$(4) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

反函数求导法则

若函数 $x = \varphi(y)$ 在某区间 I_y 内可导、单调且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数

$y = f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

1. $\int a \, dx = ax + C$
2. $\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, 其 a 是常数 $a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, 其 $a > 0, a \neq 1$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$
9. $\int \sec x \, dx = \operatorname{ReArth} \tan \frac{x}{2} + C = \ln|\sec x + \tan x| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$
10. $\int \csc x \, dx = \operatorname{ReLn} \tan \frac{x}{2} + C = \ln|\csc x - \cot x| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C$
11. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
12. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
16. $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
17. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
18. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \, dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$
20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$