QUIZ Temp

条件概率Conditional Probability：已知事件A发生后发生B的概率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

条件概率推论：

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

乘积定理：

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)...P(E_n|E_{n-1} \cap ... \cap E_1)$$

Bayes'定理：

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)}$$

独立Dependence：事件相互独立定义为当一件事件发生时，不会影响另一事件的概率。**和Disjoint无关！**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- 当A和B相互独立时，A, A^C互与B, B^C独立

联合独立Joint Independence：需要同时满足以下条件

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) & (1) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) & (2) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) & (3) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) & (4) \end{cases}$$

- 只满足前三个条件称做**Pairwise Independent**，**不能**推导出第四个
- 例子：投两个均匀骰子，事件A为和为7，事件B为第一个骰子是3，事件C为第二个骰子是4，满足Pairwise Independent，但不满足Joint Independence

赌徒破产问题：考虑A和B正在玩一个游戏，在每一局中A有p的概率获胜，B有q的概率获胜，每输一局，输的一方就要给另一方1个游戏币。假设当前A有K个游戏币，总共要得到T个游戏币才能胜利，则A获胜的概率是

$$\begin{cases} P(K) = \dfrac{1-(\frac{q}{p})^K}{1-(\frac{q}{p})^T}, & p \neq q \\ P(K) = \dfrac{K}{T}, & p = q \end{cases}$$

随机变量Random Variables：当事件发生时，随机变量是关于结果的函数，，通常写作X, Y，其Domain是关于$X : \Omega \to R$的Sample Space

随机变量类型：

- 离散：有可数Countable个值（finite or infinite but can be count）
- 连续

概率密度函数Probability Mass Function (pmf)：是一个在$[0,1]$中的数字列表，索引为X中x可能的值

$$P_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

期望Expectation：如果X是一个离散随机变量，其pmf为$P_X(x)$，则X的期望写作$\mathbb{E}[X]$或$\mathbb{E}X$或μ

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{x:p(x)>0} x \cdot p(x)$$

`**期望的线性**：X, Y是在相同Sample Space上的随机变量，$c \in \mathbb{R}$，则

- $\mathbb{E}[X \pm Y] = \mathbb{E}[X] \pm \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$

期望的性质：

- 如果g是一个函数，那么$g(x)$的期望为

$$E[g(X)] = \sum_{x \in X} g(x) \cdot P(X = x)$$

方差Variance：如果X是一个离散随机变量，其均值为$\mu = E[X]$，则X的方差定义为

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2] - (E(X))^2 \end{aligned}$$

标准差SD：方差的平方根

$$SD(X) = \sqrt{VarX}$$

方差的性质：

- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

累计分布函数CDF：如果X是一个随机变量，则X的cdf定义为

$$F_X(x) := P(X \leq x)$$

CDF的性质：

- F是单调递增函数
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

常用分布：

- Bernoulli：只有一个实验，结果可以被二分类（成功和失败），成功的概率是p

$$\begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[X] = p \\ Var[X] = p(1 - p) \end{cases}$$

- Binomial：n个互相独立的实验，每个实验成功的概率是p。如果X代表成功的数量，则

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{cases} E[X] = np \\ Var[X] = np(1-p) \end{cases}$$

- Negative Binomial：描述在一系列Bernoulli实验中，不同试验次数**正好**达到某一成功次数的概率，令成功的概率为p，想要达到的成功次数为r，则

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$\begin{cases} E[X] = \dfrac{r}{p} \\ Var[X] = \dfrac{r(1-p)}{p^2} \end{cases}$$

- Hypergeometric R.V.：描述从已知有限的成功和失败中集合中，**不放回**抽取一定数量，变量为成功的数量。令总集合数为N，其中成功的数量是$\mathcal{K}$，抽取的次数n，则

$$P(X = k) = \frac{\binom{\mathcal{K}}{k}\binom{N-\mathcal{K}}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{cases} E[X] = \dfrac{n\mathcal{K}}{N} \\ Var[X] = n \cdot \dfrac{\mathcal{K}}{N} \dfrac{N-\mathcal{K}}{N} \cdot \dfrac{N-n}{N-1} \end{cases}$$