Capítulo 4

Resolución de ecuaciones no lineales

En muchos problemas, aparece en forma natural, la necesidad de calcular el valor de x donde una función f se anula, es decir, una raíz de f. En general, con las herramientas analíticas que se usan para estudiar y graficar funciones suaves (derivables) sólo podemos analizar si hay un intervalo $[a, b]$ donde el gráfico de f cruza el eje x.

En este capítulo, veremos distintos métodos que nos permitirán aproximar el valor de una raíz, éste valor suele hallarse por aproximaciones sucesivas y por ende los métodos a utilizar son iterativos. En muchas ocasiones, sólo tiene sentido encontrar una solución aproximada. A veces, el cálculo exacto no es posible ya sea porque se trata de una raíz irracional ($f(x) = x^2 - 2$) o porque la función viene dada por coeficientes cuyos valores se conocen sólo en forma aproximada. Lo importante al utilizar métodos que estimen el valor deseado es, como venimos marcando en estas notas, poder controlar el error que se comete al utilizar un valor aproximado en lugar del exacto.

El problema se plantea de la siguiente manera: Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o bien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) se quiere encontrar r tal que

$$f(r) = 0.$$

El cálculo aproximado de raíces puede dividirse en dos etapas. En la primera, se separan las raíces. Es decir, se busca un subintervalo de $[a, b]$ que contenga una y sólo una raíz de f. Para asegurar la existencia de al menos una raíz en el intervalo propuesto se utiliza el teorema de Bolzano. Para asegurar que no hay más de una raíz se usa el teorema de Rolle, es decir, se verifica que la derivada primera no cambie de signo en dicho intervalo. En la segunda etapa, se aplica un método para aproximar la raíz aislada.

Antes de describir el primer método de estas notas, el de bisección, recordamos el teorema de Bolzano.

TEOREMA 4.1. **Bolzano** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$. *Si* $f(a)f(b) < 0$ *(o sea* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen distinto signo) entonces existe alguna raíz de* f *en el intervalo* $[a, b]$.

1. Método de bisección

Este método, que se apoya en la idea geométrica del teorema de Bolzano, permite construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a la solución de $f(x) = 0$ de la siguiente manera.

Supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Calculemos $c = \frac{a+b}{2}$. Supongamos, por ejemplo, que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces

1. Si $f(c) = 0$ listo.
2. Si $f(c) < 0$, habrá una raíz en $[a, c]$.
3. Si $f(c) > 0$, habrá una raíz en $[c, b]$.

Ahora se elige el subintervalo, cuya longitud es la mitad de $[a, b]$ y que contiene a la raíz. Este proceso se sigue sucesivamente.

Así se genera una sucesión $x_1 = \frac{a+b}{2} \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$, $x_3 \in [a_3, b_3]$ ... donde cada intervalo $[a_n, b_n]$ mide la mitad del anterior,

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \frac{b-a}{2} \\ b_2 - a_2 &= \frac{b_1 - a_1}{2} &= \frac{b-a}{4} \\ &\vdots \\ b_n - a_n &= \cdots &= \frac{b-a}{2^n} \end{aligned}$$

Además,

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \quad \dots \quad \leq b$$

$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \quad \dots \quad \geq a$$

Entonces a_n y b_n son sucesiones monótonas y acotadas y en consecuencia convergen, es decir, existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Y como

$$|b_n - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r.$$

En cada paso se verifica $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ y tomando límite (usando que f es continua) resulta

$$f(r)^2 \leq 0.$$

Entonces r es la raíz buscada pues cumple, $f(r) = 0$.

Por otra parte el error se puede acotar de la siguiente forma. Tenemos que

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

entonces

$$|r - x_n| \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{b-a}{2^n}.$$

Resumiendo, hemos demostrado,

TEOREMA 4.2. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f(a)f(b) < 0$ *entonces, el método de bisección genera una sucesión* x_n *tal que,*

1. $x_n \to r$ *con* $f(r) = 0$,
2. $|r - x_n| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.

Una de las ventajas que tiene el método de bisección es que converge para cualquier f continua, es decir no hace falta derivabilidad como en otros métodos que veremos más adelante.

EJEMPLO 4.3. Calculemos $\sqrt{2}$.

Tomemos $f(x) = x^2 - 2$ y $[a, b] = [1, 3]$. Se tiene $f(1) = -1 < 0 < f(3) = 7$ y con un gráfico de f podemos asegurar que no hay otra raíz positiva. La suecsión que produce el método es:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 2 & f(x_1) = 2 & [a_1, b_1] = [1, 2] \\
x_2 = 1{,}5 & f(x_2) = 0{,}25 & [a_2, b_2] = [1, 1{,}5] \\
x_3 = 1{,}25 & f(x_3) = -0{,}4375 & [a_3, b_3] = [1{,}25, 1{,}5] \\
x_4 = 1{,}375 & f(x_4) = -0{,}109375 & [a_4, b_4] = [1{,}375, 1{,}5] \\
x_5 = 1{,}4375 & f(x_5) = 0{,}06640625 & [a_5, b_5] = [1{,}375, 1{,}4375] \\
x_6 = 1{,}40625 & f(x_6) = -0{,}022\ldots & [a_6, b_6] = [1{,}40625, 1{,}4375] \\
x_7 = 1{,}421875 & f(x_7) = 0{,}02\ldots & [a_7, b_7] = [1{,}40625, 1{,}421875] \\
x_8 = 1{,}4140625 & \qquad\ldots &
\end{array}$$

Para x_8, vemos que la aproximación lograda tiene 4 cifras exactas. Fue necesario hacer ocho pasos para obtener cuatro cifras exactas ($\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$).

Del análisis hecho en general sabíamos que,

$$|\sqrt{2} - x_8| \leq \frac{b-a}{2^8} = \frac{2}{2^8} = \frac{1}{128}.$$

Entonces el error relativo es

$$\frac{|\sqrt{2} - x_8|}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{128\sqrt{2}} \leq 0{,}005\ldots \sim \frac{5}{1000}.$$

La desventaja del método de bisección es que converge muy lentamente, por ejemplo en comparación con el método de Newton-Raphson que veremos más adelante.

En cada paso la cota del error, $(b-a)/2^n$, se reduce a la mitad,

$$|e_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

En consecuencia se reduce $\frac{1}{10}$ en tres o cuatro pasos (se gana una cifra en tres o cuatro pasos).

2. Método regula falsi

Este método llamado "regula falsi" o de falsa posición puede verse tanto como una variante del método de bisección como del método Newton-Raphson, que veremos en la próxima sección.

Supongamos, nuevamente, que tenemos una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua que verifica $f(a)f(b) < 0$ (entonces existe una raíz, r, en $[a,b]$, por el teorema de Bolzano) y supongamos que la raíz es única en ese intervalo.

Definimos x_1 como la intersección de la recta secante L con el eje x (en lugar de tomar el promedio $\frac{b-a}{2}$, como se hace con el método de bisección).

La recta L, que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ tiene ecuación:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Como x_1 es el valor de x que cumple $y = 0$, se tiene,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Si $f(x_1) \neq 0$ entonces $f(a)f(x_1) < 0$ o bien $f(b)f(x_1) < 0$. Supongamos $f(b)f(x_1) < 0$, definimos x_2 con el mismo procedimiento anterior con el intervalo $[x_1, b] = I_1$, y así sucesivamente.

Observemos que puede suceder que $|I_n|$ no tienda a cero, pero sin embargo $x_n \to r$ para toda f continua.