Wiederholung: Definitheit

1. Gegeben ist folgende Matrix $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}_\alpha$ indefinit?

Da A eine reelle, symmetrische Matrix ist, gilt:

A ist indefinit $\iff$ A hat einen positiven und negativen Eigenwert

Weiter ist $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ für $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
Es gibt nun, da A 2×2 ist, genau dann einen positiven u. negativen EW,
wenn $\det(A) = 1 - \alpha^2 < 0$ gilt.
↳ $1 - \alpha^2 < 0 \iff 1 < \alpha^2 \iff 1 < |\alpha|$
und damit ist A genau für $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ indefinit

Sind die Matrizen (s)pd, (s)nd, indefinit?

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$ ist psd

(2) $B = Q \cdot \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot Q^T$ für $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist pd

Wiederholung: Berechnung der SVD

$A = U \Sigma V^T$

↳ U unitär, EV von AA^T in Spalten

↳ V unitär, EV von A^TA in Spalten

↳ Σ hat Wurzeln der EW von A^TA bzw. AA^T auf Hauptdiag.
(absteigend nach Größe sortiert, nicht negativ)

Beispiel $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Schritt 1: Berechne A^TA und EW + Eigenräume

$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & \\ & 4 \end{bmatrix}$ mit EW $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$,
mit $\mathrm{Eig}(A^TA, 9) = \mathrm{lin}(e_1)$
$\mathrm{Eig}(A^TA, 4) = \mathrm{lin}(e_2)$

Schritt 2: Berechne Singulärwerte

$\sigma_1 = \sqrt{\underset{\lambda_2}{9}} = 3$ und $\sigma_2 = \sqrt{\underset{\lambda_1}{4}} = 2$

Schritt 3: Wähle <u>bel.</u> ONB aus EV aus und definiere V

$\rightsquigarrow V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wichtig: Ist $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, so muss in i-ter Spalte von V ein EV zu λ_i stehen

EV von A^TA zum EW $\lambda_2 = 9$, denn $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_2}$

Schritt 4: Berechne Matrix U

Formel: $A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i$

$\rightsquigarrow A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overset{3}{\sigma_1} \cdot u_1 \quad \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overset{2}{\sigma_2} \cdot u_2 \quad \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^T}$

Beispiel $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Schritt 1: Berechne A^TA und EW + Eigenräume

$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit EW $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$

mit $\mathrm{Eig}(A^TA, 4) = \mathrm{lin}(e_1)$

$\mathrm{Eig}(A^TA, 1) = \mathrm{lin}(e_2)$

Schritt 2: Berechne Singulärwerte

$\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$ und $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$ $\rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Schritt 3: Wähle <u>bel.</u> ONB aus EV aus

$\rightsquigarrow V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Schritt 4: Berechne Matrix U

Formel: $A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i$

$\rightsquigarrow A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overset{2}{\overset{\shortparallel}{\sigma_1}} \cdot u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = e_2$

$\rightsquigarrow A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\sigma_2}} \cdot u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = e_3$

jetzt fehlt aber noch u_3!

↳ setze u_3 als bel Vektor, der u_1, u_2 zu ONB ergänzt (∗)

↳ man kann sich überlegen, dass das ein Vektor aus $\mathrm{Kern}(A^T)$ muss

mit $u_3 = e_1$ ist

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

(∗) Anmerkung: Ist $\sigma_j = 0$, dann gilt $Av_j = 0 = 0 \cdot u_j = \sigma_j \cdot u_j$ für bel. u_j.
In diesem Fall kann u_j ebenfalls als bel. zu den bisher gefundenen Spalten von U orthonormaler Vektor gewählt werden

Beispiel $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$

Schritt 1: Berechne A^TA und EW + Eigenräume

$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ mit EW $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, denn:
$\chi_A(t) = (1-t)(4-t) - 4 = t^2 - 5t = -t(5-t)$

hier schneller:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda = 5 \text{ ist EW von } AA^T$$

und weil A^TA und AA^T die selben von 0 verschiedenen EW haben, folgt sofort $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ EW von A^TA

Wenn A nicht quadratisch ist, dann kann es also schneller sein die von 0 verschiedenen EW über die kleinere der beiden Matrizen A^TA bzw. AA^T auszurechnen.

Für die EV von A^TA ergibt sich dann

$$\mathrm{Eig}(A^TA, 5) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Eig}(A^TA, 0) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

entweder LGS lösen, oder einfach orthog. Vektor zu $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ suchen.

Schritt 2: Berechne Singulärwerte

$\sigma_1 = \sqrt{5}$ $\quad \rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$

Schritt 3: Wähle <u>bel.</u> ONB aus EV aus und definiere V

$$\rightsquigarrow V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Schritt 4: Berechne Matrix U Formel: $A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i$

$$\rightsquigarrow A \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{5}} \overset{!}{=} \underset{\sqrt{5}}{\sigma_1} \cdot u_1 \qquad \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Wiederholung: Interpolation

Polynominterpolation eines Polynoms

- $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) \leq n-1$.
- n Stützstellen $x_0, \dots, x_{n-1}$ pw. verschieden

Dann ist $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p(x_i) \cdot \ell_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (*)

$\hookrightarrow$ p ist sein eigenes Interpolationspolynom

Wdh.: Koordinatenvektor und Basiswechsel

Sei $B = (\overset{b_1}{1}, \overset{b_2}{x}, \overset{b_3}{x^2})$ eine Basis von $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

Der Koordinatenvektor $K_B(p)$ für $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in V$ ist (formal: $K_B : V \to \mathbb{R}^{\dim(V)}$, linear
$K_B(b_i) = e_i$)

$K_B(p) = (\gamma, \beta, \alpha)^T$, denn $\gamma \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 + \alpha \cdot b_3 = p$

Analog ist z.B. $K_B^{-1}((3,1,0)^T) = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 3 \cdot 1$ („K_B^{-1} dekodiert Koeffizientenvektor")
$= x + 3$

$K_B(p)$ gibt also an: „Wie viel von welchem Vektor aus B brauche ich, um $p \in V$ darzustellen?"

Sei $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ eine weitere Basis von V.
Für den Basiswechsel von B nach $\tilde{B}$ berechnen wir nun:

Suche Koeff. $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)} \in \mathbb{R}$ mit $b_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{(i)} \cdot \tilde{b}_j$ für $1 \leq i \leq 3$

$\rightsquigarrow$ Wie viel von welchen Vektoren aus $\tilde{B}$ brauche ich, um den i-ten Basisvektor aus B darzustellen?

Die Basiswechselabbildung $T_{B,\tilde{B}} : \mathbb{R}^{\dim(V)} \to \mathbb{R}^{\dim(V)}$ ist also
$T_{B,\tilde{B}}(e_i) := K_{\tilde{B}}(K_B^{-1}(e_i)) = K_{\tilde{B}}(b_i)$ für $1 \leq i \leq \dim(V)$

Da $T_{B,\tilde{B}}$ linear ist, ergibt sich die darst. Matrix (Basiswechselmatrix) zu

$$[T_{B,\tilde{B}}] = [K_{\tilde{B}}(b_1) \quad K_{\tilde{B}}(b_2) \quad K_{\tilde{B}}(b_3)] = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

$(1, x, x^2, \dots)$

Aufgabe: Basiswechselmatrix Monombasis → Lagrange-Basis

Wir betrachten $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ und die Stützstellen $x_i = i$, $0 \leq i \leq 4$ (pw. versch.)
sowie die Basen $B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ und $\tilde{B} = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$

1) Bestimme $K_{\tilde{B}}(\overset{=1}{b_1})$

↳ suche $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $\underset{\text{Polynom}}{1} = \sum_{j=0}^{4} \alpha_j \cdot \tilde{b}_j = \sum_{j=0}^{4} \alpha_j \cdot \ell_j$

Mit (*) folgt, dass $1 = \sum_{j=0}^{4} 1 \cdot \ell_j$ gilt.

↳ wir wissen, dass das Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{4} f(x_i) \cdot \ell_i(x)$
die Funktion f an $x_0, \dots, x_4$ interpoliert.
Setze $f = 1$. Wegen $\deg(1) \leq 4$, folgt mit der Vorüberlegung (*), dass schon $p = 1$ (auf ganz $\mathbb{R}$) gilt.

2) Bestimme $K_{\tilde{B}}(b_1)$

↳ suche $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{j=0}^{4} \alpha_j \cdot \tilde{b}_j = \sum_{j=0}^{4} \alpha_j \cdot \ell_j$

nach analoger Überlegung ist

$$x = \sum_{j=0}^{4} x_j \cdot \ell_j$$

$b_2(x_j) = x_j$

3) ... $x^2 = \sum_{j=0}^{4} x_j^2 \cdot \ell_j$

... und im allgemeinen unter unseren Voraussetzungen

$$x^k = \sum_{j=0}^{4} x_j^k \cdot \ell_j \quad , \quad 0 \leq k \leq 4$$

Damit ergibt sich die Basiswechselmatrix also zu

$$A := \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^4 \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^4 \\ x_2^0 & x_2^1 & \dots & x_2^4 \\ x_3^0 & x_3^1 & \dots & x_3^4 \\ x_4^0 & x_4^1 & \dots & x_4^4 \end{bmatrix}$$

→ das ist die Vandermonde-Matrix!

Die Basiswechselmatrix „Lagrange-Basis → Monombasis" ist dann A^{-1}.
↳ wie diese Inverse aussieht, hatten wir uns im 1. Tut zu Interpolation angeschaut