Sei im Folgenden $A \in \mathbb{R}^{n,m}$
↳ n Zeilen, m Spalten

Kern einer Matrix

$$Kern(A) := \{ x \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot x = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

- Menge aller Vektoren, die auf 0 abgebildet werden
- ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$
  ↳ insb. ist natürlich immer $0 \in Kern(A)$

Bild einer Matrix

$$Bild(A) := \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^m \} = lin(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$
- wird auch als Spaltenraum bezeichnet

Rang einer Matrix

$$rg(A) := dim(Bild(A))$$

- es ist $rg(A) = rg(A^T)$
  ↳ max. Anzahl lin. unabh. Spalten
  ↳ max. Anzahl lin. unabh. Zeilen
- $rg(A) \leq min\{m, n\}$

Dimensionssatz

$$\underset{\text{Spaltenanzahl}}{m} = dim(Kern(A)) + \underbrace{dim(Bild(A))}_{rg(A)}$$

Insbesondere gilt also
(1) $rg(A) = m - dim(Kern(A))$
(2) $dim(Kern(A)) = m - rg(A)$

Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt:
A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $Kern(A) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $Bild(A) = \mathbb{R}^n$

Lineare Gleichungssysteme

Betrachte das lineare System

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 2x - y &= 1 \\ \text{II} \quad x + y &= 5 \end{aligned}$$

Dieses System kann als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben werden

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Allgemein suchen wir für

- eine Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$
- eine „rechte Seite" $b \in \mathbb{R}^n$

einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax = b$.

↳ x ist dann eine Lösung des Systems

Was bedeutet es, dass x eine Lösung ist?

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^m$ mit $Ax = b$.

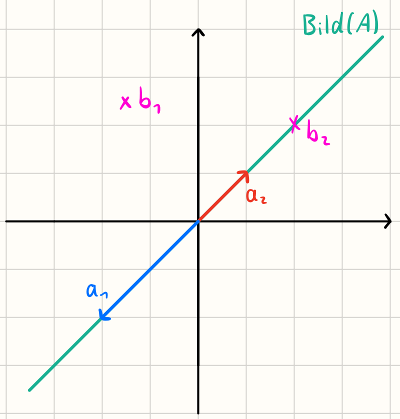
$$\rightsquigarrow b = A \cdot x = \sum_{j=1}^{m} A_{:,j} \cdot x_j$$

- b lässt sich als Linearkombination der Spalten von A schreiben
- eine Lösung x besteht aus den Koeffizienten (einer) der Linearkombinationen

! Zentrale Beobachtung: $Ax = b$ ist lösbar $\Longleftrightarrow$ $b \in \text{Bild}(A)$

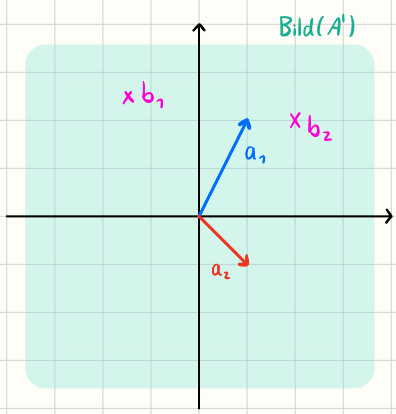
Schauen wir uns das für zwei Beispiele an:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$



- Es ist $b_1 \notin \text{Bild}(A) \Rightarrow Ax = b_1$ unlösbar
- Es ist $b_2 \in \text{Bild}(A) \Rightarrow Ax = b_2$ lösbar

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$



- Es ist $b_1, b_2 \in \text{Bild}(A)$ $\Rightarrow Ax = b_1$ lösbar
  $\Rightarrow Ax = b_2$ lösbar

Lösungsmenge eines Systems $Ax = b$

Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung, also $A\tilde{x} = b$. Dann sind alle Lösungen gegeben durch:

$$\mathcal{L}(A,b) = \{\tilde{x} + y \mid y \in \operatorname{Kern}(A)\}$$

Achtung: · $\mathcal{L}(A,b)$ ist i.A. kein Unterraum, sondern ein affiner Unterraum
↳ affiner UR W ist ein verschobener Unterraum, hier: $\mathcal{L}(A,b) = \tilde{x} + \operatorname{Kern}(A)$
↳ genau dann ein UR, wenn $x = 0$ eine Lösung ist ($\Leftrightarrow b = 0$)

Warum sieht $\mathcal{L}(A,b)$ so aus?

Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ mit $A\tilde{x} = b$ und $y \in \operatorname{Kern}(A)$.
Dann ist $A(\tilde{x} + y) = A\tilde{x} + Ay = A\tilde{x} = b$

Sei $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung und $x \in \mathbb{R}^m$ eine weitere Lösung, also $x, \hat{x} \in \mathcal{L}(A,b)$.
Dann ist $A(x - \hat{x}) = b - b = 0$, also $\exists y:\ x - \hat{x} = y \in \operatorname{Kern}(A)$
$\Leftrightarrow x = \hat{x} + y$

Was sagt uns das über die **mögliche Anzahl von Lösungen?**

Mögliche Anzahl von Lösungen für $Ax = b$:

(1) Es gibt kein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ mit $A\tilde{x} = b$ $\Rightarrow$ 0 Lösungen
(2) $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ mit $A\tilde{x} = b$ und $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(A,b) = \{\tilde{x}\}$ (genau 1 Lösung)
(3) $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ mit $A\tilde{x} = b$ und $\operatorname{Kern}(A) \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen, da $\operatorname{Kern}(A)$ ein UR ist

Insgesamt gilt also:

Schritt 1: Gibt es eine Lösung?
$Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $b \in \operatorname{Bild}(A)$

Schritt 2: Wenn es eine Lösung gibt: Ist die Lösung eindeutig?
Lösung ist eindeutig $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$

„$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$"

(1) $rg(A) = n = m$

Existenz

- die Spalten von A bilden eine Basis des Bildraums $\mathbb{R}^n$ $(= \mathbb{R}^m)$

  ↳ $b \in lin(\{a_1, \dots a_n\})$, da $a_1 \dots a_n$ EZS von $\mathbb{R}^n$

Eindeutigkeit

- wegen der lin. Unabh. von $a_1 \dots a_n$ ist die Darstellung von b eindeutig

  ↳ eindeutige Lösung
- insb. ist $Kern(A) = \{0\}$ und daher muss die Lösung (die existiert) eindeutig sein

(2) $rg(A) = m < n$

Existenz

- Es ist $\dim(Bild(A)) < \mathbb{R}^n$ und daher $Bild(A) \subsetneq \mathbb{R}^m$

  ↳ es gibt $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \notin Bild(A)$

  Für $b \in \mathbb{R}^n$ gilt also

  1) $b \in Bild(A)$ => Es existiert eine Lösung
  2) $b \notin Bild(A)$ => Es existiert keine Lösung

Eindeutigkeit

- wegen $\dim(Kern(A)) = 0$ ist $Kern(A) = \{0\}$

  ↳ Lösung ist eindeutig

(3) $rg(A) = n < m$

Existenz

- n lin. unabh. Vektoren (Spalten) im $\mathbb{R}^n$

  ↳ $\dim(Bild(A)) = n$ => $Bild(A) = \mathbb{R}^n$ => $b \in Bild(A)$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$
- $Ax = b$ ist für alle b lösbar

Eindeutigkeit

- es ist $\dim(Kern(A)) > 0$ => $Kern(A) \neq \{0\}$

  ↳ Lösung ist nicht eindeutig

(4) $rg(A) < m, n$

Existenz

- Es ist $\dim(Bild(A)) < \mathbb{R}^n$ und daher $Bild(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$

  ↳ es gibt $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \notin Bild(A)$

  Für $b \in \mathbb{R}^n$ gi t also

  1) $b \in Bild(A)$ => Es existiert eine Lösung
  2) $b \notin Bild(A)$ => Es existiert keine Lösung

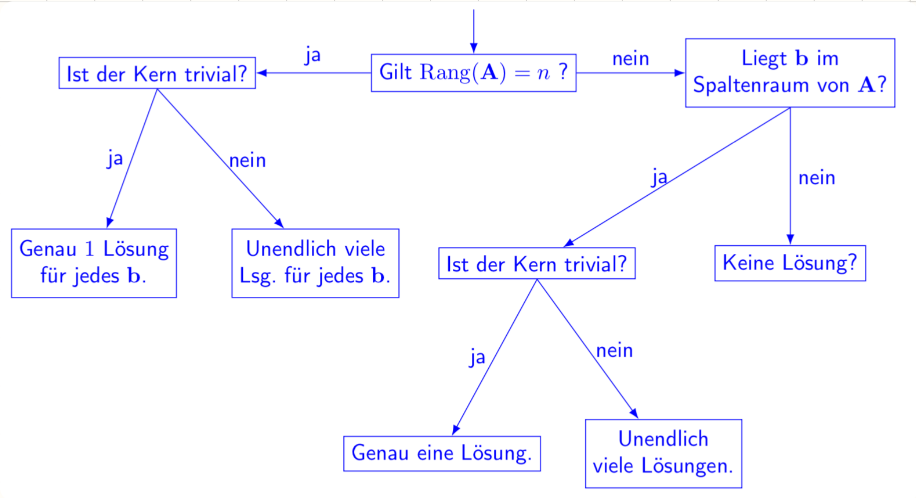
Eindeutigkeit

- es ist $\dim(Kern(A)) > 0$ => $Kern(A) \neq \{0\}$

  ↳ Lösung ist nicht eindeutig

Zusammenfassung

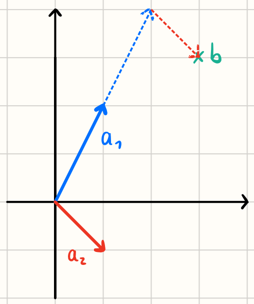
	Rang(A)		dim(Kern(A))	# Lösungen
System mit regulärer Matrix	$rg(A) = m = n$	voller Rang	0	1
unterbestimmtes System	$rg(A) = n < m$	voller Zeilenrang	$m - rg(A) > 0$	∞
überbestimmtes System	$rg(A) = m < n$	voller Spaltenrang	0	0 oder 1
System mit Rangdefizit	$rg(A) < m, n$		$m - rg(A) > 0$	0 oder ∞



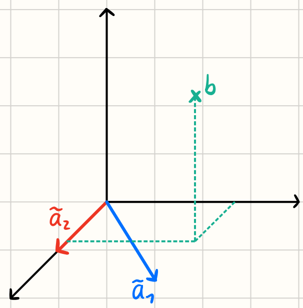
Zwei geometrische Perspektiven

Spaltenperspektive

- haben wir oben schon gesehen
- wir versuchen den Vektor b als Linear Komb. der Spalten von A zu schreiben



$Ax = b$ ist lösbar



$Ax = b$ ist unlösbar

Faustregel: (1) je mehr lin. unabh. Zeilen, desto größer wird der abzudeckende Raum
(2) je mehr lin. unabh. Spalten, desto größer ist der abgedeckte Raum
↳ „größer" in Bezug auf die Dimension

Zeilenperspektive

wird nochmal überarbeitet...

Algorithmen zur Lösung von $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & \\ & a_{2,2} & \\ & & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- falls $a_{i,i} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq 3$, dann gibt es genau eine Lösung
  ↳ $x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad 1 \leq i \leq 3$

- falls es ein $j \in \{1,2,3\}$ gibt mit $a_{j,j} = 0$ und $b_j \neq 0$, dann gibt es keine Lösung
- falls es ein $j \in \{1,2,3\}$ mit $a_{j,j} = 0$ gibt und für alle $i \in \{1,2,3\}$ gilt: $a_{i,i} = 0 \Rightarrow b_i = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} \\ & & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- falls $a_{i,i} \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, dann gibt es genau eine Lösung
  ↳ andere Fälle kann man sich analog zu oben überlegen

- Lösungen erhält man durch **Rückwärtseinsetzen**

$$x_3 = \frac{1}{a_{3,3}} \cdot b_3 \qquad x_2 = \frac{1}{a_{2,2}}\left(b_2 - a_{2,3} \cdot x_3\right) \qquad x_1 = \frac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - a_{1,2} \cdot x_2 - a_{1,3} \cdot x_3\right)$$

- Laufzeit: $O(n^2)$
- für eine untere Δ-Matrix benutzt man analog Vorwärtseinsetzen
  ↳ beginne mit $a_{1,1}$

Ziel des Gauß-Algorithmus

↳ Transformiere Matrix A in obere Dreiecksmatrix

Erlaubte Operationen
(1) Zeilen vertauschen
(2) Zeile mit $\lambda \neq 0$ skalieren
(3) Vielfaches einer Zeile zu anderer Zeile addieren

(Spalten-) Pivoting

- bei Gauß kann es sein, dass Pivotelement $= 0$ ist
  ↳ dann muss man versuchen aktuelle Zeile mit Zeile weiter unten tauschen

Im Allgemeinen gilt:
- im k-ten Schritt betrachte Elemente $a_{i,k}$, $i \geq k$ und tausche die Zeile mit betragsmäßig größtem Element nach oben
  ↳ erhöht numerische Stabilität

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\text{Pivoting}}{\overset{I \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{III - \frac{1}{2}I}{\overset{II - \frac{1}{2}I}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right] \overset{III - II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Bemerkung

Alle drei Operationen können als Matrixmultiplikation ausgedrückt werden! (Whaaat ?!)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Zeilen vertauschen

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeile mit $\lambda \neq 0$ skalieren

$$\begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vielfaches von einer Zeile zu einer anderen addieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- diese Matrizen heißen Elementarmatrizen
  ↳ sind alle invertierbar (wie sehen die Inversen aus?)

Warum ändert sich die Lösungsmenge durch den Gauß-Algo. nicht?

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $E \in \mathbb{R}^{m,m}$ invertierbar. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = b \iff (EA)x = Eb$$

„$\Rightarrow$" klar

„$\Leftarrow$" Ist $(EA)x = Eb$, dann ist auch $E^{-1}EAx = E^{-1}Eb \Rightarrow Ax = b$

Jeder Schritt im Algorithmus entspricht Mult. von links mit invertierbarer Matrix

↳ also verändert sich die Lösungsmenge nicht.