Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A, falls es ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$

- v heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ
  ↳ v wird durch A nur skaliert / gespiegelt
- spec(A) ist die Menge aller EW von A

Es ist: λ EW von A
$$\begin{aligned} &\iff \exists v \neq 0 : Av = \lambda v \\ &\iff \exists v \neq 0 : Av - \lambda v = 0 \\ &\iff \exists v \neq 0 : (A - \lambda I) v = 0 \\ &\iff \operatorname{Kern}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\iff \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ bezeichnen wir $\operatorname{Kern}(A - \lambda I)$ als den Eigenraum von A zum EW λ
↳ $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ ist also die Menge aller Vektoren x mit $Ax = \lambda x$
⇝ Menge der EV zum EW λ und der Nullvektor.

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

Frage: Sind Summen und skalare Vielfache von EV wieder EV?

Seien $v, w \in \operatorname{Eig}(A, \lambda) \setminus \{0\}$.
Dann ist $A(v+w) = Av + Aw = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$
↳ also $v+w$ EV zum EW λ?
Ja, aber nur, falls $v + w \neq 0$, da 0 nach Def. kein EV ist

Analog für $\alpha \in \mathbb{R}$: $A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$
↳ $\alpha \cdot v$ ist EV, falls $\alpha \neq 0$, da sonst $\alpha v = 0$.

Dies ist nicht überraschend, da ja $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I)$ ein UR ist!
↳ wir müssen nur aufpassen, dass wir nicht zu 0 kombinieren.

Charakteristisches Polynom

- der Ausdruck $\chi_A := \det(A - t \cdot I)$ ist ein Polynom in t von Grad n
  ↳ hat genau n (evtl. komplexe) Nullstellen
- nach obiger Überlegung ist $\lambda \in \operatorname{spec}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$

Algebraische Vielfachheit $a(\lambda)$

- Vielfachheit der Nullstelle λ von χ_A
- ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda_i - t)^{m_i}$ für $\lambda_i \neq \lambda_j$, dann ist m_i die VFH der Nullstelle λ_i

Geometrische Vielfachheit des EW λ

- Dimension des zugehörigen Eigenraums
  ↳ $\dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda))$

Bemerkungen: • für $\lambda \in spec(A)$ ist immer $1 \leq \dim(Eig(A,\lambda)) \leq a(\lambda)$

• da χ_A als Polynom über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen besitzt,
gilt $n = \sum_{i=1}^{\ell} a(\lambda_i)$ für $\lambda_i \neq \lambda_j$ und $|spec(A)| = \ell$

• ist p ein reelles Polynom mit $p(\lambda) = 0$, dann auch $p(\bar{\lambda}) = 0$

$\rightsquigarrow$ eine reelle Matrix mit ungerader Dimension besitzt immer einen reellen EW

↳ Komplexe EW in Komplex-konjugierten Paaren

Beispiele zur Berechnung von EW und EV

$A = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 3 \end{bmatrix}$

- EW einer Diagonalmatrix stehen auf Diagonale
  - $\hookrightarrow \chi_A(t) = (3-t)^2 \rightsquigarrow$ 3 ist EW mit $a(3) = 2$

    $\dim(\mathrm{Kern}(A - 3I)) = 2$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$

- EW einer Dreiecksmatrix stehen auf der Diagonale
  - $\hookrightarrow$ denn $\det(B - t \cdot I) = (1-t)^3$
- weiter ist

$$\mathrm{Kern}(A - 1 \cdot I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{lin}(\{e_1\})$$

$\rightsquigarrow a(1) = 3$ und $\dim(\mathrm{Eig}(B, 1)) = 1$

$C = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

- $\chi_A(t) = \det(C - tI) = (-t)^2 + 1 = t^2 + 1 = (i - t)(-i - t)$
  - $\hookrightarrow$ reelle Matrizen können komplexe EW haben!

$$C - iI = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} - i \cdot \mathrm{I}} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also $\mathrm{Eig}(C, i) = \mathrm{Kern}(C - iI) = \mathrm{lin}(\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\})$

und analog $\mathrm{Eig}(C, -i) = \mathrm{Kern}(C + iI) = \mathrm{lin}(\{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\})$

Zusammenhang: spec(A) und rg(A) / kern(A)

- ist $0 \in \mathrm{spec}(A)$, dann $\exists v \neq 0 : \; Av = 0 \cdot v = 0$
  - $\hookrightarrow \mathrm{Eig}(A, 0) = \mathrm{Kern}(A - 0 \cdot I) = \mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}$.
    - $\hookrightarrow \dim(\mathrm{Eig}(A, 0)) = \dim(\mathrm{Kern}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$

- es gilt also: $\quad 0 \in \mathrm{spec}(A) \iff \mathrm{Kern}(A) \neq \{0\} \iff \mathrm{rg}(A) < n$

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda) \setminus \{0\}$. Dann gilt:

- $A^2 v = A(Av) = \lambda A v = \lambda^2 v$
- $Av = \lambda v \iff v = \lambda A^{-1} v \iff A^{-1} v = \lambda^{-1} v$

Diagonalisierung

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar $\iff$ $\exists S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und Diagonalmatrix D mit $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

Beobachtung: $A = SDS^{-1} \iff AS = SD$
$\iff AS_{\cdot,j} = ASe_j = SDe_j = d_{j,j} \cdot S_{\cdot,j}$ für alle $1 \leq j \leq n$

- hat A die EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$, dann ist also $A = SDS^{-1}$ genau dann, wenn:
  1) $D = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
  2) j-te Spalte von S ist EV zum EW λ_j
     ↳ Spalten linear unabhängig

Kriterien für die Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus EV gibt
$\iff$ Für alle $\lambda \in \text{spec}(A)$ gilt: $a(\lambda) = \dim(\text{Eig}(A,\lambda))$
$\iff$ $\exists S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $S^{-1}AS = \text{diag}(\dots)$ $(= D)$

Sind die oben betrachteten Matrizen diagonalisierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 3 \end{bmatrix}$$

- Ja, ist ja schon eine Diagonalmatrix
  ↳ wähle z.B. $S = I$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- Nein, denn es ist $\dim(\text{Eig}(B,1)) = 1 < 3 = a(1)$

$$C = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

- Ja! Wegen $\binom{i}{1} \in \text{Eig}(C,i)$ und $\binom{i}{-1} \in \text{Eig}(C,-i)$ ist z.B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}}_{S^{-1}}$$

Bemerkungen: 1) hat Matrix A n verschiedene EW, dann ist A diagonalisierbar

2) Reihenfolge der EW in D muss zur Reihenfolge der Spalten von S passen (siehe oben)

Symmetrische relle Matrizen

Sei: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$. Dann gilt:

1) A hat nur reelle Eigenwerte
2) EV zu verschiedenen EW sind orthogonal zueinander

$\rightsquigarrow$ $\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und $D = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$

$\Rightarrow$ Symmetrische Matrizen sind orthogonal reell diagonalisierbar
↳ „reelle Eigenzerlegung"

Sei: $A = QDQ^T$. Muss A symmetrisch sein?
↳ $A^T = (QDQ^T)^T = Q^{TT} D^T Q^T = QDQ^T = A$

Beispielanwendung: Kriterium für positive Definitheit (letzte Woche)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt: A ist pd $\Leftrightarrow$ alle EW von A sind positiv

Sei A pd. Dann gilt für alle $x \neq 0$: $x^T A x > 0$.
Ist v EV zum EW λ von A, dann folgt $0 < v^T A v = v^T(\lambda v) = \lambda \|v\|_2^2$
und wegen $\|v\|_2^2 > 0$ ist $\lambda > 0$.

Seien nun alle EW von A größer als Null.
Da A symmetrisch ist, existiert eine reelle Eigenzerlegung von A, also $A = QDQ^T$.
↳ $D = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Q orthogonal

Für $x \neq 0$ ist dann
$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T Q D Q^T x \\ &= (Q^T x)^T D (Q^T x) \quad \text{setze } y := Q^T x \\ &= y^T D y \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0 \quad \text{da } \lambda_i > 0 \text{ für alle } 1 \le i \le n \\ &\qquad \text{und } y \neq 0, \text{ da } x \neq 0 \text{ und } Q \text{ invertierbar} \end{aligned}$$

Power Iteration

Sei: A diagonalisierbar und $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$.
Ziel: Bestimme EV zum (betragsmäßig größten) EW λ_1.

Algorithmus: (1) wähle Startvektor $x^{(0)}$

(2) until converged : $x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \cdot \frac{1}{\|Ax^{(k)}\|}$

Was ist die Idee hinter dem Algorithmus?

- A ist diag-bar $\Rightarrow \exists$ Basis aus EV von A.
  ↳ $B = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ also insb. $v_1 \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$
- also ist $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ und wir nehmen an, dass $\alpha_1 \neq 0$ gilt

Wir beobachten: $Ax^{(0)} = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i v_i = \lambda_1 \left(v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \alpha_2 v_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \alpha_n v_n\right)$

Also: $x^{(k)} = A^k \cdot x^{(0)} = \lambda_1^k \underbrace{\left(\alpha_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \cdot \alpha_2 v_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \cdot \alpha_n v_n\right)}_{=: r_k}$ mit $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ für $i > 1$

Daraus folgt für unseren Algorithmus nun

$$\frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|} = \frac{\lambda_1^k \alpha_1}{|\lambda_1^k| \cdot |\alpha_1|} \cdot \frac{v_1 + \frac{1}{\alpha_1} r_k}{\|v_1 + \frac{1}{\alpha_1} r_k\|} \longrightarrow \frac{v_1}{\|v_1\|} \text{ für } k \to \infty, \text{ da } r_k \to 0.$$

Wann liefert der Algo keinen EV zum EW λ_1?

- $x^{(0)} = 0$
- $x^{(0)} = 0 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$, also „kein Anteil" von v_1 im Startvektor $x^{(0)}$
  ↳ Dann auch $x^{(k)} = 0 \cdot v_1 + \ldots$ für alle $k > 1$
  ↳ Aber: aufgrund numerischer Fehler konvergiert $x^{(k)}$ i.d.R. trotzdem gegen $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$