Wissenschaftliches Rechnen

Aufgabenblatt 5 (Praxis)

wr@cg.tu-berlin.de

WiSe 2023/2024

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzeln* zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Verwenden Sie die vorgegebene Code-Basis. **Sie dürfen keine weiteren Module importieren**. Die zu implementierenden Funktionen befinden sich in der Datei **main.py**. Ihr Code ist an den mit `# TODO: ...` gekennzeichneten Stellen einzufügen. Die `NumPy`-Funktionen, welche Sie zur Lösung einer Aufgabe nicht verwenden dürfen, sind unter `Forbidden` in der Docstring Beschreibung der entsprechenden Funktion aufgelistet.
- Wir stellen einige rudimentäre Unit-Tests zur Verfügung, welche Sie verwenden sollen, um die Funktionalität ihres Codes zu testen. Sie sollten diese Tests während der Implementierung Ihrer Lösung vervollständigen (Funktionalität beschrieben in Python `unittest`). Sie können die Tests mit dem Aufruf `python3 tests.py -v [Tests.test_<function>]` ausführen.
- Bitte reichen Sie die Datei `main.py` mit Ihren Lösungen bis **Montag, den 29.01.2022, um 08:00 Uhr** auf `https://autolab.cg.tu-berlin.de` mit ihren Zugangsdaten ein. Ein mehrfacher Upload bis zum Abgabeende ist möglich. Die letzte Version wird bewertet.

Aufgabe 1: Diskrete Fourier-Transformation (2 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die diskrete Fourier-Transformation (DFT) mit Hilfe der DFT-Matrix realisiert werden.

Aufgabe 1.1: DFT-Matrix (1 Punkte)

Implementieren Sie die Funktion `dft_matrix()`, welche die normierte DFT-Matrix der Größe $n \times n$ zurückgeben soll.

Aufgabe 1.2: Überprüfung Unitäre Matrix (0.5 Punkt)

Implementieren Sie die Funktion `is_unitary()`, welche überprüft, ob das Argument eine unitäre Matrix ist (d.h. $F^*F = I$ wobei F^* die konjugiert-transponierte von F ist und $F \in \mathbb{R}^{N\times N}$).

Aufgabe 1.3: DFT von δ-Impulsen (0.5 Punkt)

Berechnen Sie in der Funktion `create_harmonics()` mit Hilfe der DFT-Matrix die diskrete Fourier-Transformation von diskreten δ-Impulsen der Form $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ für welche das i-te Element 1 ist und alle anderen 0 sind. Die Gesamtlänge von $\mathbf{e_i}$ soll 128 betragen. Vergleichen Sie die Visualisierung der Signale durch `plot_harmonics()` mit Abbildung **??**.

Aufgabe 2: Schnelle Fourier-Transformation (2 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Cooley-Tukey Variante der schnellen Fourier-Transformation (FFT) für Eingangsdaten der Länge 2^k implementiert werden.

Aufgabe 2.1: Umordnung der Eingangsdaten (0.5 Punkt)

Implementieren Sie die Funktion `shuffle_bit_reversed_order()`, welche die Elemente eines gegebenen Arrays so umordnet, dass der neue Index für ein Element durch die Umkehrung der Bitdarstellung

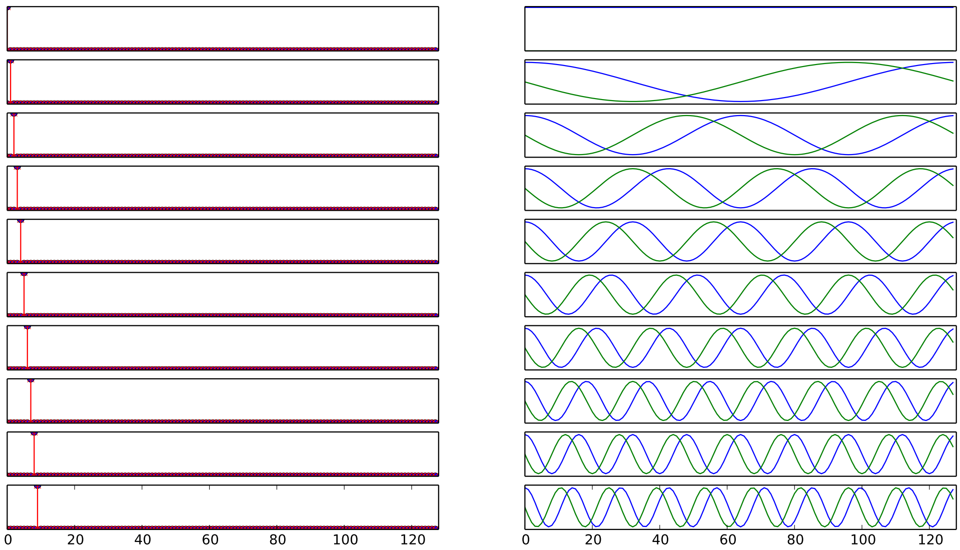
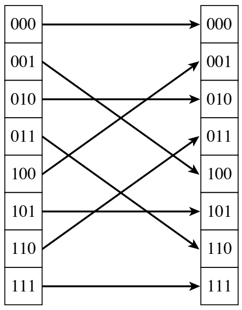


Abbildung 1: Graphische Ausgabe der Funktion `plot_harmonics()`.

des alten Index entsteht.

Für ein Array der Länge 8 sieht diese Umordnung zum Beispiel folgendermaßen aus (links vor dem Umordnen und rechts danach):[1]



Aufgabe 2.2: Schnelle Fourier-Transformation (1.5 Punkte)

Implementieren Sie die FFT in der Funktion `fft()`. Die FFT verwendet implizit einen Baum, welcher von den Blättern, gegeben durch die umgeordneten Elemente der Eingangsdaten, zur Wurzel hin verarbeitet wird. Das Ergebnis ist die gesuchte Fourier-Transformation.

Nummerieren wir die Ebenen des Baumes von den Blättern beginnend mit $m = 0$, so erfolgen auf jeder Ebene $n/2^{m+1}$ diskrete Fourier-Transformationen der Länge 2^{m+1}. Jede dieser Fourier-Transformationen wird aus elementaren Transformationen für zwei Elemente aufgebaut:

$$p = e^{-2\pi ik/2^{m+1}} f[j] \tag{1a}$$
$$f[j] = f[i] - p \tag{1b}$$
$$f[i] = f[i] + p \tag{1c}$$

wobei der Faktor $e^{-2\pi ik/2^{m+1}}$ den korrekten Frequenzanteil für das Ergebnis bestimmt. Die aktuellen Werte in f enthalten dabei für $m = 0$ die umsortierten Eingangsdaten und für höhere Ebenen im Baum die Ergebnisse der Fourier-Transformationen, welche auf tieferliegenden Schichten des Baumes berechnet wurden. Der Abstand von i und j ist durch 2^m gegeben, und i läuft über $k, k + 2^{m+1}, k + 2 \cdot 2^{m+1}, k + 3 \cdot 2^{m+1} \ldots < n$. Daraus folgt, dass zunehmend weiter auseinanderliegende Elemente zusammengefasst werden, je höher man im Baum aufsteigt. Für eine Fourier-Transformation der Länge

[1] Aus: Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. New York, NY, USA: Cambridge University Press.

2^{m+1} muss die Frequenzvariable k von 0 bis 2^m (exklusive) laufen. Aus Effizienzgründen werden auf jeder Ebene des Baumes dabei für jedes k die $n/2^{m+1}$ elementaren Transformationen in Gleichung **??** ausgeführt bevor k erhöht wird. Es erfolgt also eine Umordnung der beiden innersten Schleifen. In Pseudo-Code haben wir damit also:

```
# for all levels m of the tree

  # for all values of k = [0,1,...,2^m[ on the current level

    # compute omega factor for current k

    # for all values of i,j with i = [k,k+2^(m+1),k+2*2^(m+1),...,n[

      # perform elementary transformation
```

Der Ablauf der FFT für ein Signal der Länge 8 ist im Anhang gezeigt. Vergleichen Sie mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Test-Codes die Abweichung eines Signals nach Vor- und Rücktransformation (siehe Abbildung **??**) sowie die Rechenzeit, welche Sie mit `dft_matrix()` und mit `fft()` benötigen (siehe Abbildung **??**).

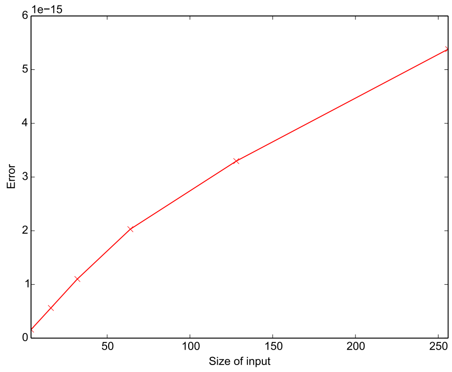


Abbildung 2: Fehler zwischen originalem Signal und vor- und rückwärts transformiertem Signal mit der FFT.

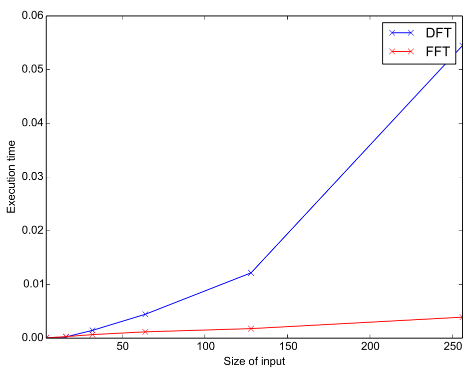


Abbildung 3: Vergleich der benötigten Rechenzeit bei Berechnung mit den Funktionen `dft_matrix()` und `fft()`.

Aufgabe 3: Verarbeitung von Audiosignalen (1 Punkte)

Aufgabe 3.1: Tonerzeugung (0.5 Punkt)

Erzeugen sie in der Funktion `generate_tone()` ein mittleres C: Sinusschwingung mit der Frequenz f = 261.63 Hz, abgetastet im Intervall $[0, 1)s$ mit einer vorgegebenen Anzahl an Abtastwerten (`num_samples`). Der zur Verfügung gestellte Test-Code speichert den von Ihnen zurückgegebenen Ton in `data/mid-c.wav`. Zum Vergleich ist die Datei `data/mid-c_ref.wav` gegeben.

Aufgabe 3.2: Tiefpassfilter (0.5 Punkt)

In der Funktion `low_pass_filter()` soll ein einfacher Tiefpassfilter implementiert werden, welcher die hohen Frequenzen eines gegebenen Signals unterdrückt. Um den Filter zu realisieren soll:

a) die Fourierdarstellung des Signals berechnet werden,

b) die hohen Frequenzen über 1000 Hz in der Frequenzdarstellung auf Null gesetzt werden,

c) das Signal aus dem Frequenzraum wieder in den Ortsraum transformiert werden.

Der zur Verfügung gestellte Test-Code speichert das von Ihnen gefilterte Signal in `data/speech-filtered.wav`. Vergleichen sie dieses mit der vorgegebenen Datei `data/speech-filtered_ref.wav`.

Anhang: Beispiel für FFT Ablauf

Für jedes Quadrupel (m, k, i, j) wird eine der elementaren Transformationen in Gleichung **??** ausgeführt:

Eingangsdaten: [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8]

Nach Shuffle:
[0.1+0.j 0.5+0.j 0.3+0.j 0.7+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 0 , j = 1
[0.6+0.j -0.4+0.j 0.3+0.j 0.7+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 2 , j = 3
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 4 , j = 5
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 6 , j = 7
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 1.2+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 0 : i = 0 , j = 2
[1.6+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 1.2+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 0 : i = 4 , j = 6
[1.6+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j 2.0+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 1 : i = 1 , j = 3
[1.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j 2.0+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 1 : i = 5 , j = 7
[1.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j 2.0+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 0 : i = 0 , j = 4
[3.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 1 : i = 1 , j = 5
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 2 : i = 2 , j = 6
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.4j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4-0.4j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 3 : i = 3 , j = 7
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.4j -0.4+0.166j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4-0.4j -0.4-0.966j]