二项式定理证明和相关题目

前置知识
讲解098 - 乘法快速幂
讲解099 - 题目3，阶乘余数表、阶乘逆元表的线性递推求法

本节课讲述
二项式定理证明和相关题目

下节课讲述
二项式反演的四种形式、证明、相关题目

二项式反演比较难理解，但是我进行了大量的备课，下节课一定能让你懂，觉得好帮我扩散！

左程云

二项式定理证明和相关题目

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

当a ＝ 1，b ＝ 1时，就是著名的杨辉三角，也叫帕斯卡三角

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

二项式定理证明和相关题目

(1+1)的0次方、1次方...5次方的展开

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10   10  5   1
```

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10  5  1
```

可以得到一个结论，也就是著名的组合恒等式

$$C(i,j) = C(i-1,j) + C(i-1,j-1)$$

$$\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-1}$$

这可以用于打表，大规模生成组合的方法数，生成n * n的表时间复杂度O(n^2)，单次查询O(1)
当然也可以用阶乘余数表、阶乘逆元表来求解c(n, k)，生成的时间复杂度O(n)，单次查询O(1)

二项式定理证明和相关题目

证明：二项式定理

二项式定理的形式

我们要证明的二项式定理为：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

其中，$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是二项式系数。

证明方法：数学归纳法

第一步：验证基例 $n=1$

当 $n=1$ 时，有：

$$(a+b)^1=a+b$$

根据二项式定理的右侧展开：

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b$$

因此，基例 $n=1$ 的情况成立。

第二步：归纳假设

假设对于 $n=m$ 时，二项式定理成立，即：

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

我们接下来要证明 $n=m+1$ 时，二项式定理也成立。

第三步：归纳步骤

我们需要证明对于 $n=m+1$ 时，$(a+b)^{m+1}$ 的展开形式依然符合二项式定理，即：

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k$$

根据归纳假设：

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)(a+b)^m=(a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

将 $(a+b)$ 乘到每一项中，展开为：

$$=a\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k+b\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

分别对两部分进行处理。

左程云

二项式定理证明和相关题目

第四步：对两部分求和

1. 第一部分

第一个和式是：

$$a\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^{k}$$

2. 第二部分

第二个和式是：

$$b\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^{k+1}$$

此时，我们对第二部分的下标 k 进行调整，换元 $k'=k+1$：

$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{m+1-k}b^{k}$$

第五步：合并两个求和式并应用组合数性质

现在我们可以将两部分相加，得到：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{m+1-k}b^{k}$$

合并两项后，结果可以表示为：

$$\binom{m}{0}a^{m+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)a^{m+1-k}b^{k}+\binom{m}{m}a^{0}b^{m+1}$$

应用组合数性质：根据组合数的性质，$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$，所以我们可以将上式进一步化简为：

$$\binom{m}{0}a^{m+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^{k}+\binom{m}{m}a^{0}b^{m+1}$$

因此，化简之后，整个表达式变为：

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^{k}$$

二项式定理证明和相关题目

第六步：归纳结束

因此，我们已经证明了对于 $n = m + 1$ 的情况，二项式定理依然成立。结合数学归纳法，我们得出结论：对于所有非负整数 n，二项式定理成立。

结论

二项式定理的正确形式为：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

证明完毕。

二项式定理证明和相关题目

利用阶乘余数表和阶乘逆元表，计算任意 c(n, k) % MOD 的结果，步骤如下

1，注意，0!是1，0的0次方也是1

2，根据乘法同余，正序递推0!、1!、2!、..i! ..n!，% MOD意义下的余数，结果记录在fac[i]

3，根据逆元概念，逆序递推n!、(n-1)!、..i! ..1!，% MOD意义下的逆元，结果记录在inv[i]

4，计算任意c(n, k)，利用如下函数即可

```
long c(int n, int k) {
    return (((fac[n] * inv[k]) % MOD) * inv[n - k]) % MOD;
}
```

这个内容在讲解099，题目3，有非常详细的讲述，不会的同学可以学习讲解099

二项式定理证明和相关题目

题目1

杨辉三角

给定数字n，打印杨辉三角的前n行

1 <= n <= 20

测试链接 : https://www.luogu.com.cn/problem/P5732

二项式定理证明和相关题目

题目2
计算系数
多项式为，(ax + by)的k次方，其中a、b、k为常数
计算这个多项式展开后，x的n次方 * y的m次方，这一项的系数
0 <= k <= 1000
0 <= a、b <= 10^6
n + m == k
测试链接 : https://www.luogu.com.cn/problem/P1313

二项式定理证明和相关题目

题目3
组合数问题
组合公式c(i, j)，表示从i个物品中选出j个物品的方案数
如果该数值是k的整数倍，那么称(i, j)是一个合法对
给定具体的一组数字n和m，当i和j满足：0 <= i <= n，0 <= j <= min(i, m)
返回有多少合法对
一共有t组测试，所有测试的k都为同一个值
每组测试给定n和m，打印每组测试的答案
1 <= t <= 10^4
2 <= k <= 21
0 <= n、m <= 2000
测试链接 : https://www.luogu.com.cn/problem/P2822

涉及二维前缀和的内容，在讲解048，有需要的同学可以看一下，不过本题理解难度不大，听我讲也能理解

二项式定理证明和相关题目

题目4
分割的方法数
给定一个长度为n的数组A，将其分割成数组B和数组C，满足A[i] = B[i] + C[i]
也就是一个数字分成两份，然后各自进入B和C，要求B[i], C[i] >= 1
同时要求，B数组从左到右不能降序，C数组从左到右不能升序
比如，A = { 5, 4, 5 }，一种有效的划分，B = { 2, 2, 3 }，C = { 3, 2, 2 }
返回有多少种有效的划分方式
1 <= n <= 10^7
1 <= A[i] <= 10^7
最终结果可能很大，对1000000007取余
来自真实大厂笔试题，对数器验证

转化为二项式定理是本题的重点