Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 6. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.

(i) Untersuchen Sie, für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen in $x = 0$ stetig sind:

a) $f(x) := \begin{cases} ax + b & \text{, falls } x < 0, \\ 1 & \text{, falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $g(x) := \begin{cases} a\exp(bx) & \text{, falls } x < 0, \\ 1 + x & \text{, falls } x \geq 0. \end{cases}$

(ii) Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{|x|}(x - [x])$ stetig ist.

Lösung:

(i) a) Es ist

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} ax + b = b$$

und

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} 1 = 1.$$

Damit f in $x = 0$ stetig ist, müssen diese beiden einseitigen Grenzwerte gleich sein. Also muss $b = 1$ sein und $a \in \mathbb{R}$ kann beliebig gewählt werden.

b) Es ist

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \nearrow 0} ae^{bx} = ae^0 = a,$$

da die Exponentialfunktion stetig ist, und

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} 1 + x = 1.$$

Damit g in $x = 0$ stetig ist, müssen diese beiden einseitigen Grenzwerte gleich sein. Also muss $a = 1$ sein und $b \in \mathbb{R}$ kann beliebig gewählt werden.

(ii) Wir wollen alle $x_0 \in \mathbb{R}$ bestimmen, in denen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{|x|}(x - [x])$ stetig ist. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung.
1. Fall: $x_0 \in \mathbb{Z}$: Ist $x_0 \in \mathbb{Z}$, so ist $[x] = x_0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + 1[$ und $[x] = x_0 - 1$ für alle $x \in [x_0 - 1, x_0[$. Da die Wurzel- und die Betragsfunktion stetig ist, haben wir dann

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} \sqrt{|x|}(x - [x]) = \lim_{x \nearrow x_0} \sqrt{|x|}(x - ([x_0] - 1)) = \sqrt{|x_0|}$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} \sqrt{|x|}(x - [x_0]) = 0.$$

Die beiden einseitigen Grenzwerte sind nur für $x_0 = 0$ gleich und somit ist die Funktion in $x_0 = 0$ stetig und in $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht stetig.
2. Fall: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: Ist $x_0 \notin \mathbb{Z}$, so ist $[x_0] < x_0$ und somit $[x] = x_0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + 1[$. Wir haben dann dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{|x|}(x - [x_0]) = \sqrt{|x_0|}(x_0 - [x_0]) = f(x_0).$$

f ist also in $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und in 0 stetig.

Aufgabe 2.

(i) Es sei $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom ungeraden Grades. Man zeige, dass $P(x)$ wenigstens eine reelle Nullstelle hat.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \exp(x) + x$. Zeige, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$ gibt.

Lösung:

(i) Es sei $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom ungeraden Grades, etwa $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $a_n > 0$ ist (Ansonsten können wir $-P(x)$ betrachten. P hat genau dann eine Nullstelle, wenn $-P$ einen hat). Wir können $P(x)$ schreiben als

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n}.$$

Für $k \in \{0, 1, \ldots n - 1\}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} a_k x^{k-n} = 0 = \lim_{x \to -\infty} a_k x^{k-n}.$$

Ist also $|x|$ hinreichend groß, so gilt

$$-\frac{a_n}{2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \leq \frac{a_n}{2}$$

und somit für diese x

$$\frac{1}{2}a_nx^n \leq P(x) = a_nx^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kn^k \leq \frac{3}{2}a_nx^n$$

Bis hierhin haben wir nicht benötigt, dass n ungerade ist. Da aber n ungerade ist, ist $\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ und somit folgt aus den obigen Abschätzungen

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

Es gibt also $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und $P(x_1) < 0$ und $P(x_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt P mindestens eine Nullstelle.

(ii) Es ist

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

und

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 1 - 1 = 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f im Intervall $]-1, 0[$ mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{, sonst} \end{cases},$$

auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Lösung:

Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen offensichtlich für $(x,y) \neq (0,0)$ stetig.

Wir müssen nun noch zeigen, dass f in $(0,0)$ stetig ist. Wenn wir die Dreiecksungleichung anwenden, so erhalten wir

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} + \frac{|x|y^2}{y^2} = |y| + |x|.$$

Also ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0) = f(0,0)$$

und f stetig in $(0,0)$.