Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zu 4. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(i)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

(iii)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+34n^2+7n+8}{n^5+787n^3-3n^2-n+9},$$

(iv)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{3^n},$$

(v)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}.$$

Lösung:

(i) Es ist nach der dritten Binomischen Formel

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\end{aligned}$$

Da $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ ist, gilt weiter

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n},$$

wobei die letzte Ungleichung für alle $n \geq 5$ gilt. Da die harmonische Reihe divergent ist, ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

divergent.

(ii) Nach (i) ist

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

und somit - wie man leicht überprüft - eine monotone Nullfolge. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

konvergiert also nach dem Leibniz-Kriterium.

(iii) Es ist

$$\frac{n^3 + 34n^2 + 7n + 8}{n^5 + 787n^3 - 3n^2 - n + 9} \in \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+34n^2+7n+8}{n^5+787n^3-3n^2-n+9}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 34n^4 + 7n^3 + 8n^2}{n^5 + 787n^3 - 3n^2 - n + 9} = 1.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergent ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 34n^2 + 7n + 8}{n^5 + 787n^3 - 3n^2 - n + 9}$$

nach dem Vergleichskriterium ebenfalls.

(iv) Wir wenden das Quotientenkriterium an. Es ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Nach dem Korollar zum Quotientenkriterium konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$$

also absolut.

(v) Da für alle natürlichen Zahlen n stets $n^n \geq n!$ ist, ist für alle n

$$\left|(-1)^n\frac{n^n}{n!}\right| \geq 1$$

und somit die Folge

$$\left((-1)^n\frac{n^n}{n!}\right)$$

keine Nullfolge. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}$$

ist also divergent.

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium.

Lösung:

Es sei also

$$a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

Für das Quotientenkriterium betrachten wir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\right| \\
&= \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \text{, falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 & \text{, falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Für das Wurzelkriterium müssen wir uns $\sqrt[n]{|a_n|}$ anschauen. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$$

und

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Wir haben also

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$$

und da bekanntermaßen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

ist, folgt aus dem Schachtelungssatz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$$

und somit die Reihe (absolut) konvergent ist.

Fazit: Es gibt absolut konvergente Reihen, auf die das Wurzelkriterium, nicht aber das Quotientenkriterium anwendbar ist. Man kann zeigen, dass es den umgekehrten Fall nicht gibt. Das Wurzelkriterium ist also etwas stärker als das Quotientenkriterium.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sind (a_n) und (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

so konvergiert die Reihe $\sum a_n$, wenn die Reihe $\sum b_n$ konvergiert.

(ii) Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

und der Grenzwert ist a_1.

Lösung:

(i) Es seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < 1.$$

Für diese n ist also $|a_n| \leq |b_n|$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum a_n$, wenn die Reihe $\sum b_n$ konvergiert.

(ii) Es sei (a_n) eine Nullfolge. Wir betrachten die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=2}^{N+1} a_n \\
&= a_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n - \sum_{n=2}^{N} a_n - a_{N+1} \\
&= a_1 - a_{N+1}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) \\
&= \lim_{N\to\infty}(a_1 - a_{N+1}) \\
&= \lim_{N\to\infty} a_1 - \lim_{N\to\infty} a_{N+1} \\
&= a_1,
\end{aligned}$$

da (a_n) eine Nullfolge ist.