Grundlagen der Robotik

11. Konvolution, Frequenzraum

Prof. Sven Behnke

Erinnerung: Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

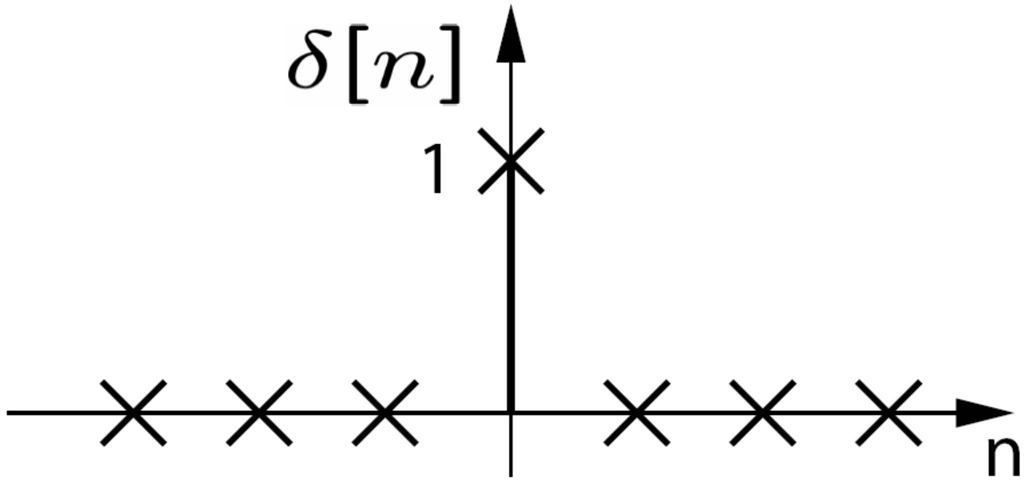
- **Linearität:** erlaubt, das Superpositionsprinzip anzuwenden
- **Zeitinvarianz:** erlaubt, Signale zeitlich zu verschieben
- Systeme, die beide Eigenschaften haben, werden lineare zeitinvariante Systeme genannt (linear time-invariant, LTI)
- Können zeitdiskret oder kontinuierlich sein
- Erlaubt Dekomposition komplexer Signale

$$\mathcal{T}\{s(t)\} = s(t)(1 - e^{-t})$$

Einheitsimpuls

- Sei $\delta[n]$ eine Folge mit:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 0 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

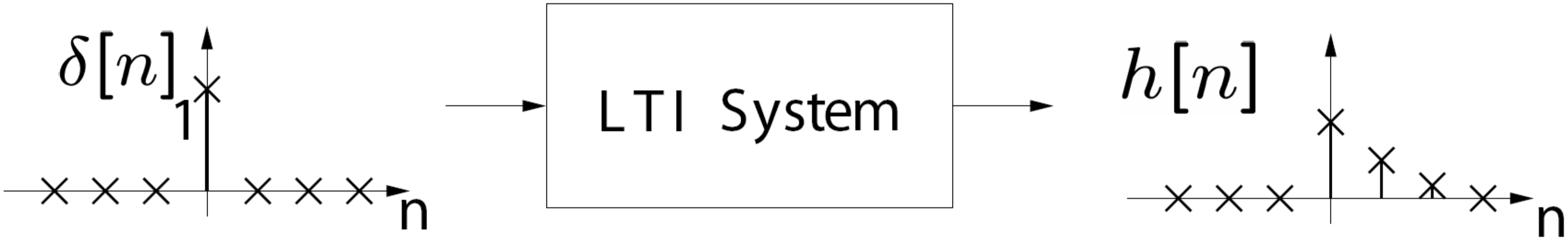


- $\delta[n]$ wird auch als (zeitdiskreter) δ - Impuls oder Dirac-Impuls bezeichnet

Impulsantwort

- Die Ausgabe $h[n]$ eines Systems bei Eingabe eines Einheitsimpulses $\delta[n]$ wird Impulsantwort genannt

$$h[n] = \mathcal{T}\{\delta[n]\}$$



Signalzerlegung

- Beliebige Folgen $f[n]$ können als Linearkombination von Einheitsimpulsen $\delta[n]$ dargestellt werden:

$$f[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f[\nu]\delta[n-\nu]$$

- $f[\nu]$ ist der Wert der Folge f an der Stelle $n = \nu$

- $\delta[n-\nu]$ ist der Einheitsimpuls an der Stelle $n = \nu$

- Summe kombiniert skalierte und verschobene Einheitspulse zu einer Folge, die $f[n]$ gleicht

Konvolution I

- Wenn die Impulsantwort $h[n]$ bekannt ist, können wir die Systemantwort $y[n] = \mathcal{T}\{u[n]\}$ für beliebige Eingaben $u[n]$ wie folgt berechnen:
  - Zerlegung des Eingabesignals:

$$y[n] = \mathcal{T}\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[\nu]\delta[n-\nu]\}$$

  - Aus der Linearität folgt:

$$y[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[\nu]\mathcal{T}\{\delta[n-\nu]\}$$

Konvolution II

- Wir haben:

$$y[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[\nu]\mathcal{T}\{\delta[n-\nu]\}$$

- Wegen Zeitinvarianz können wir die Impulsantwort verschieben:

$$\mathcal{T}\{\delta[n-\nu]\} = h[n-\nu]$$

- **Konvolution a.k.a. Faltung:**

$$y[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[\nu]h[n-\nu]$$

Konvolution als Operation

- Die Konvolution bildet zwei Signale $u[n]$ und $h[n]$ auf ein Signal $y[n]$ ab

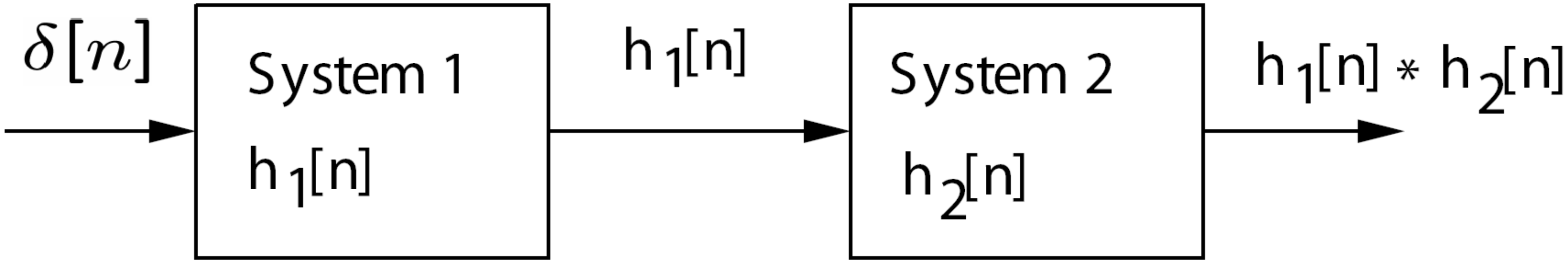
- D.h. die Konvolution kann als binäre Operation betrachtet werden

- Als Kurzschreibweise wird der Operator $*$ verwendet:

$$y[n] = u[n] * h[n]$$

Sequentielle Komposition

- Frage: Wie sieht die Impulsantwort $h[n]$ einer sequentiellen Komposition der Teilsysteme mit $h_1[n]$ und $h_2[n]$ aus?



- Die Impulsantwort $h[n]$ einer sequentiellen Komposition der Teilsysteme mit $h_1[n], h_2[n]$ ist deren Konvolution:

$$\boldsymbol{h[n] = h_1[n] * h_2[n]}$$

Impulsantwort oder Sprungantwort beschreiben System

- Wir können die Systemantwort für beliebige Eingaben mit der Impulsantwort $h[n]$ berechnen.

  => $\boldsymbol{h[n]}$ **beschreibt LTI-System vollständig**

- Das Gleiche gilt für die Sprungantwort $a[n]$ auf die Stufenfunktion $s[n]$.
  - Sprungantwort ist häufig einfacher zu bestimmen
  - Man kann direkt die Stabilität / Instabilität des Systems sehen
- Differentiation der Sprungantwort $a[n]$ ergibt Impulsantwort $h[n]$, da Einheitsimpuls Ableitung der Stufenfunktion ist (Linearität der Differentiation)

Beispiel

- Gegeben ein System mit Impulsantwort:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n < 0 \\ (1/2)^n & \text{if} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \underline{s[n](1/2)^n}$$

- Frage: $\mathcal{T}\{\underline{s[n]}\} = a[n]$
- Für $n > 0$:

$$y[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[\nu]h[n-\nu] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{s[\nu]}\,\underline{s[n-\nu]\frac{1}{2}^{n-\nu}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2}^{\nu} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2-(1/2)^n$$

Partialsumme einer geometrischen Reihe

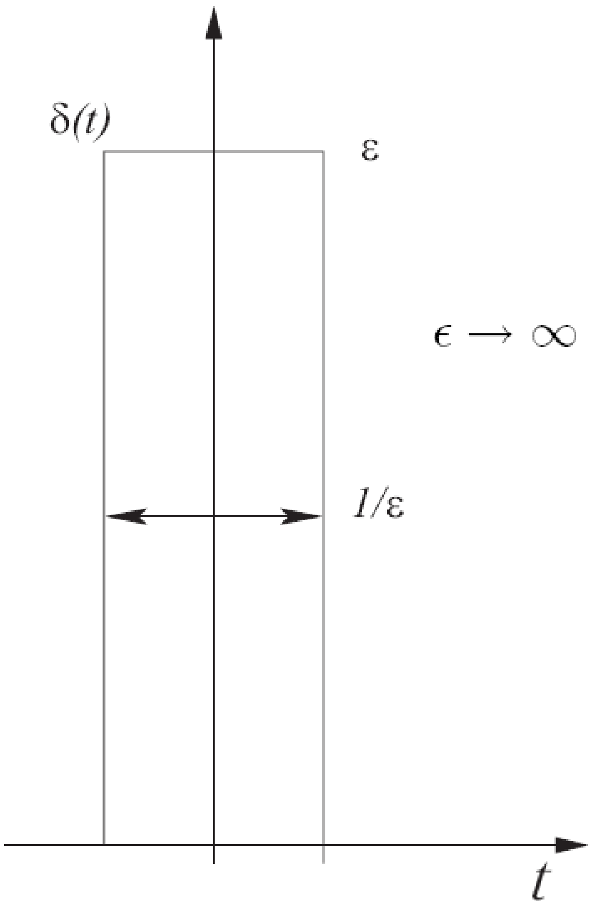
- Allgemein: $y[n] = s[n](2-(1/2)^n)$

Zeitkontinuierlicher Impuls

- Signal $\delta(t)$ soll folgende Eigenschaften haben:

1. $$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



- Auch **Dirac-Delta** genannt

- Ableitung der Stufenfunktion

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = \delta(t)$$

Kontinuierliche Konvolution

- Die Ausgabe $y(t)$ eines linearen zeitinvarianten Systems mit Inpulsantwort $h(t)$ Eingabe von $u(t)$ ist:
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Wie zuvor im diskreten Fall:
  - Konvolution kann als Operation betrachtet werden:
$$y(t) = h(t) * u(t)$$
  - Konvolution mit Impulsantwort berechnet Systemausgabe für beliebige Eingaben
  - Die Impulsantwort einer sequentiellen Kombination von Teilsystemen ist die Konvolution der Impulsantworten der Teilsysteme

Eigenschaften der Konvolution

Für den kontinuierlichen und den diskreten Fall gilt:

- Operation * bildet zwei Signale auf ein Signal ab
- Kommutativität:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Assoziativität:

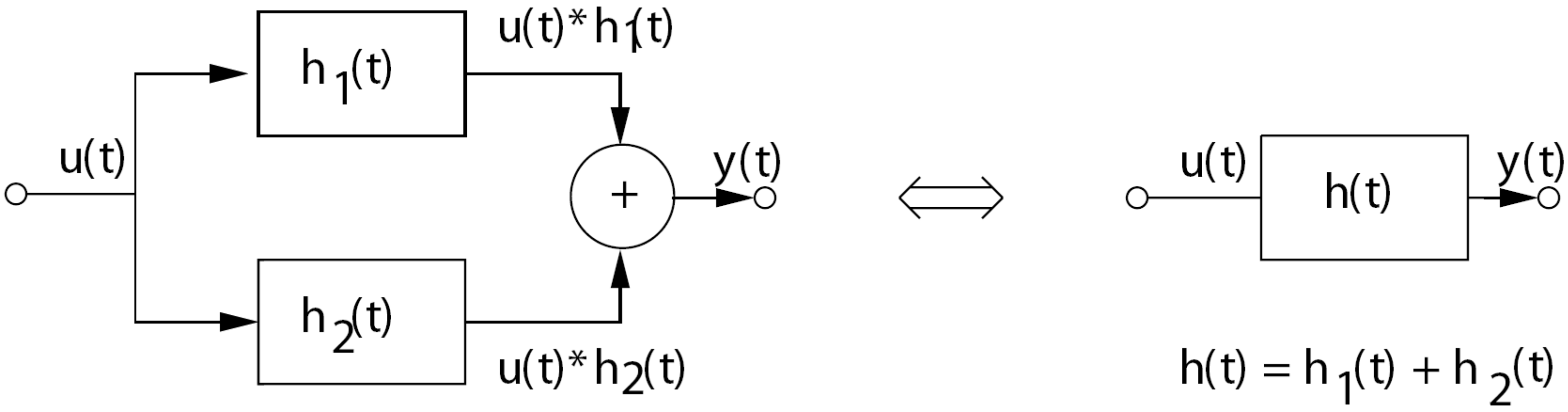
$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

- Distributivität:

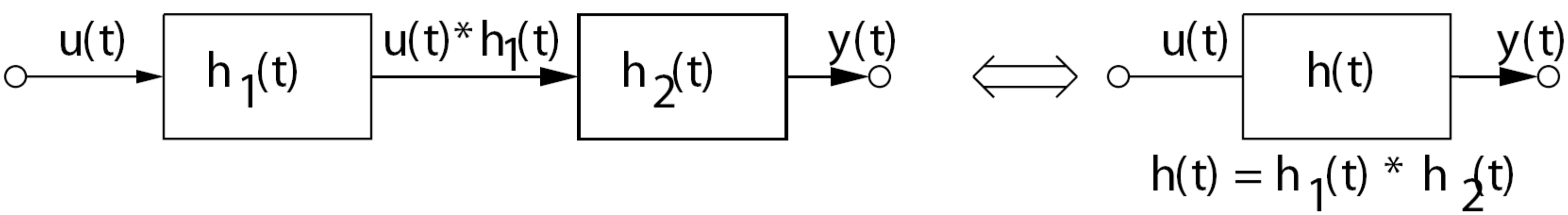
$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$$

Parallele und Serielle Kombination von Teilsystemen

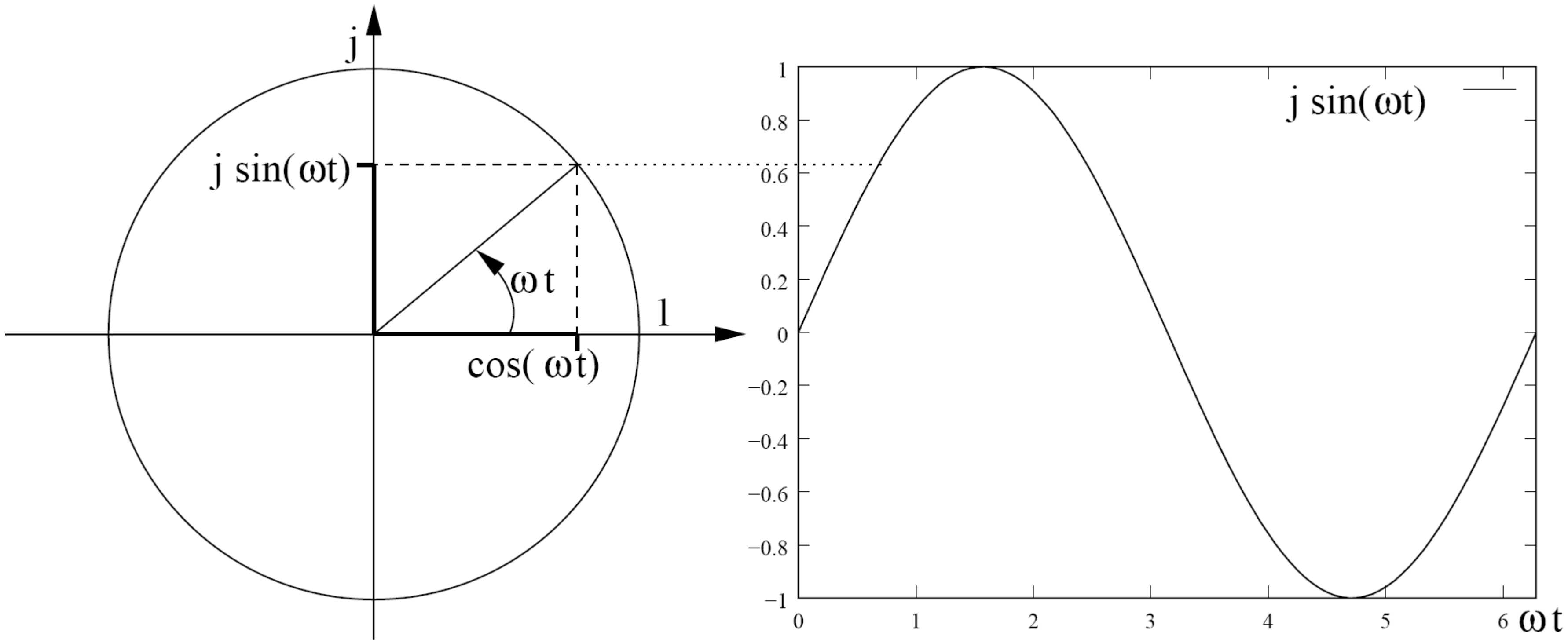
- Parallel:



- Seriell:



Komplexe Exponentialfunktion auf dem Einheitskreis



$$cos(\omega t) = Re\{e^{j\omega t}\}$$

- Euler'sche Formel: $cos(\omega t) + j sin(\omega t) = e^{j\omega t}$

Eigenfunktionen von LTI-Systemen

Beobachtung:

- Bei Eingabe eines sinusoiden Signals $u(t) = \hat{u}e^{j\omega t}$ in ein LTI-System liefert dieses eine sinusoide Ausgabe mit gleicher Frequenz, multipliziert mit $H \in \mathbb{C}$:

$$y(t) = \mathcal{T}\{u(t)\} = H\hat{u}e^{j\omega t}$$

- Die komplexe Exponentialfunktion ist eine Eigenfunktion von LTI-Systemen

Anwendung: Klirrfaktor

- Ziel: Charakterisierung der Nichtlinearität eines Systems

- Nichtlinearitäten erzeugen harmonische Oberwellen: Ausgabefrequenzen mit ganzzahligen Vielfachen der Eingabefrequenz

- Klirrfaktor: Verhältnis der harmonischen Sinusoide mit Frequenz $\neq \omega$, zum Gesamtsignal:

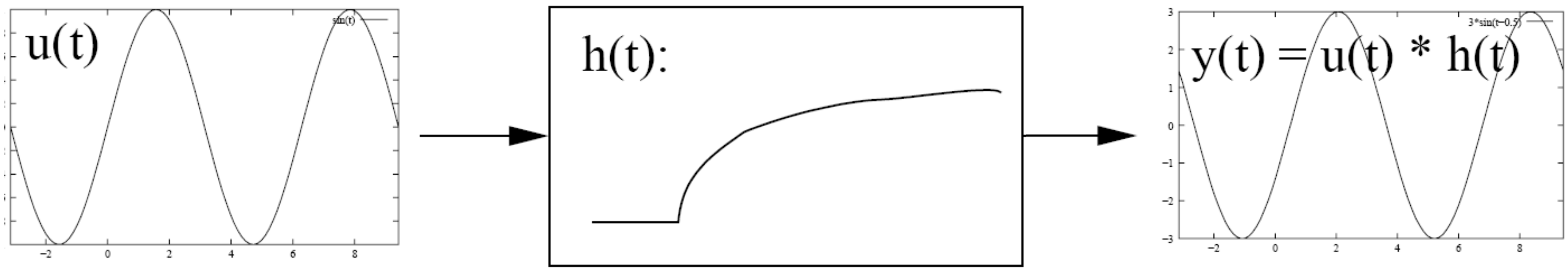
$$k = \frac{\bar{U}_{\text{Harmonics}}}{\bar{U}_{\text{Entiere\_Signal}}} = \frac{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \ldots}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \ldots}}$$

Transferfunktion $H(j\omega)$

Wir betrachten ein LTI-System

- Ist charakterisiert durch Impulsantwort $h(t)$
- Sinusoidale Eingabe: $u(t) = \hat{u}e^{j\omega t}$
- Erwartete Ausgabe: $Hu(t)$

Frage: Wie soll man H berechnen?



Transferfunktion $H(j\omega)$

- Faltung von $u(t)$ mit $h(t)$ erzeugt Ausgabe: $y(t)$

$$u(t) = \hat{u}e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\hat{u}e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{H(j\omega)} \quad \underbrace{\hat{u}e^{j\omega t}}_{u(t)} \end{aligned}$$

- H ist abhängig von der Frequenz $j\omega$
  => Notation als Transferfunktion: $H(j\omega)$

Fourier-Integral

- Die Transferfunktion $H(j\omega)$ kann durch das Fourier-Integral berechnet werden:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

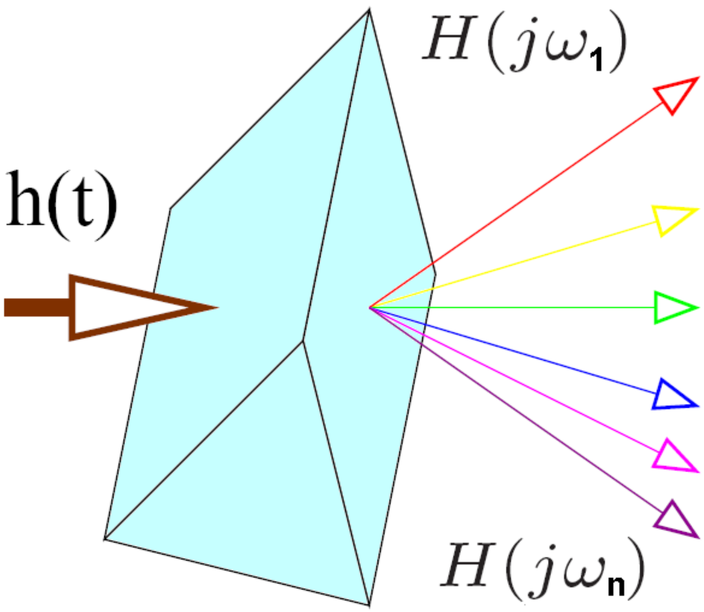
- Damit können wir leicht die Ausgabe für sinusoidale Eingaben berechnen:

$$y(t) = H(j\omega) u(t) \Big|_{u(t)=\hat{u}e^{j\omega t}}$$

- Skalierung der Amplitude
- Phasenverschiebung

Fourier-Integral Illustration

- Impulsantwort wird in einzelne Frequenzen aufgespalten



$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Einfache Berechnung der Systemantwort für jede Eingabe-Frequenz $j\omega$ einzeln durch Multiplikation mit komplexer Zahl $H(j\omega)$

Grafische Darstellung der Transfer-funktion $H(j\omega)$: Bode-Diagramm

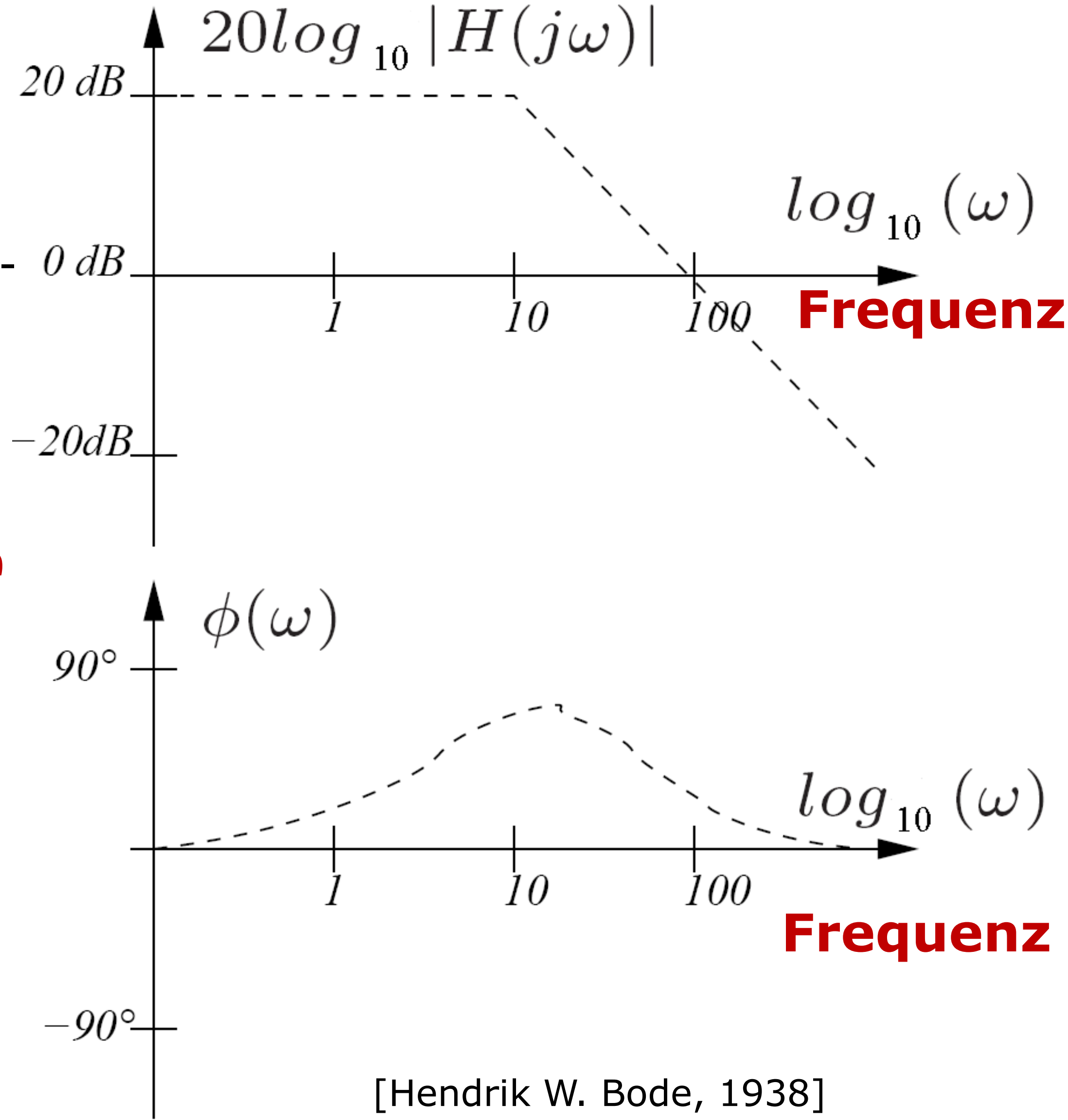
Verstärkungsfaktor

Verstärkung der Amplitude

Keine Amplituden-änderung

Abschwächung der Amplitude

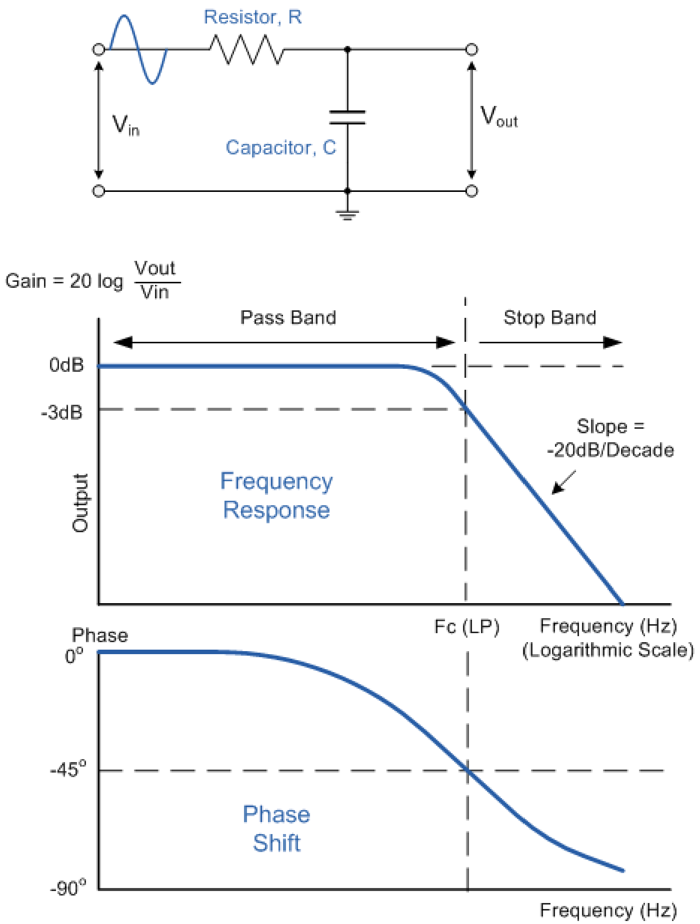
Phasenverschiebung



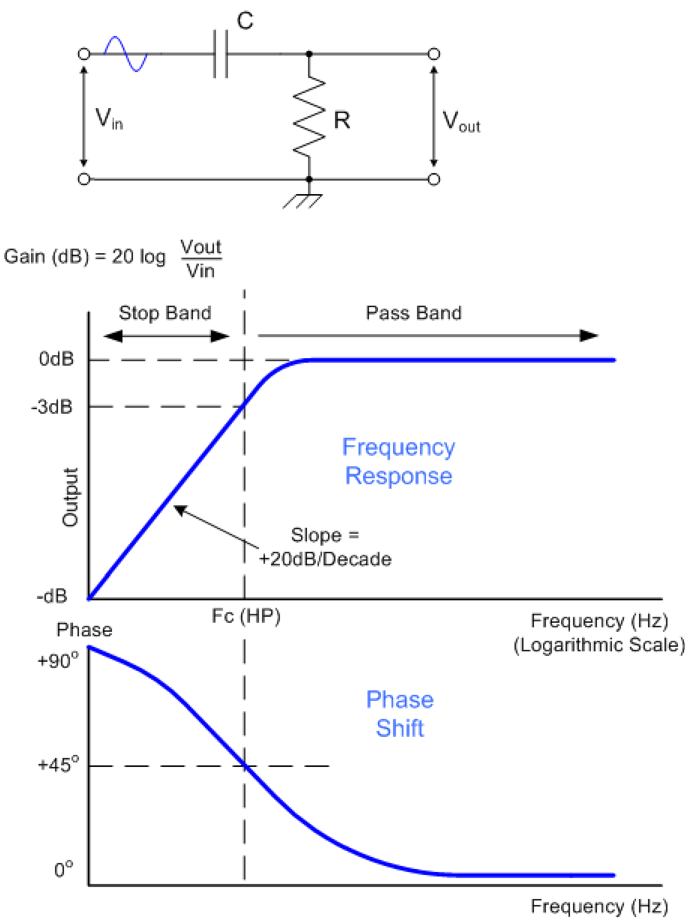
[Hendrik W. Bode, 1938]

Tiefpass- und Hochpass-Filter

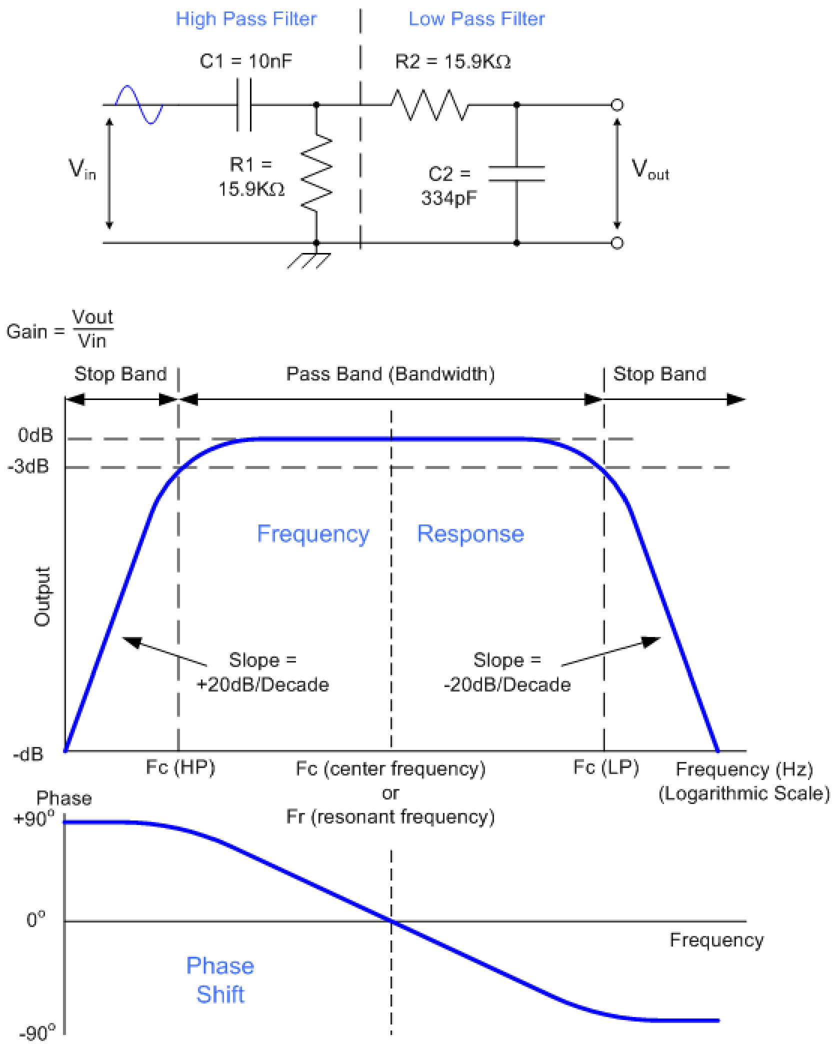
Tiefpass



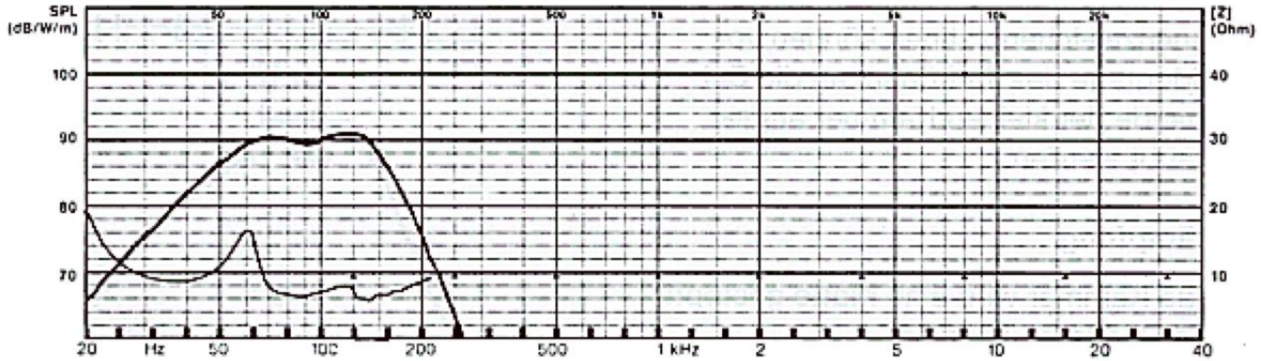
Hochpass



Bandpass-Filter



Charakterisierung eines Lautsprechers



- Transferfunktion H(.) beschreibt Frequenzcharakteristik
- Ignoriert nichtlineare Effekte

Anwendung des Fourier-Integrals auf Signale

- Das Fourier-Integral $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

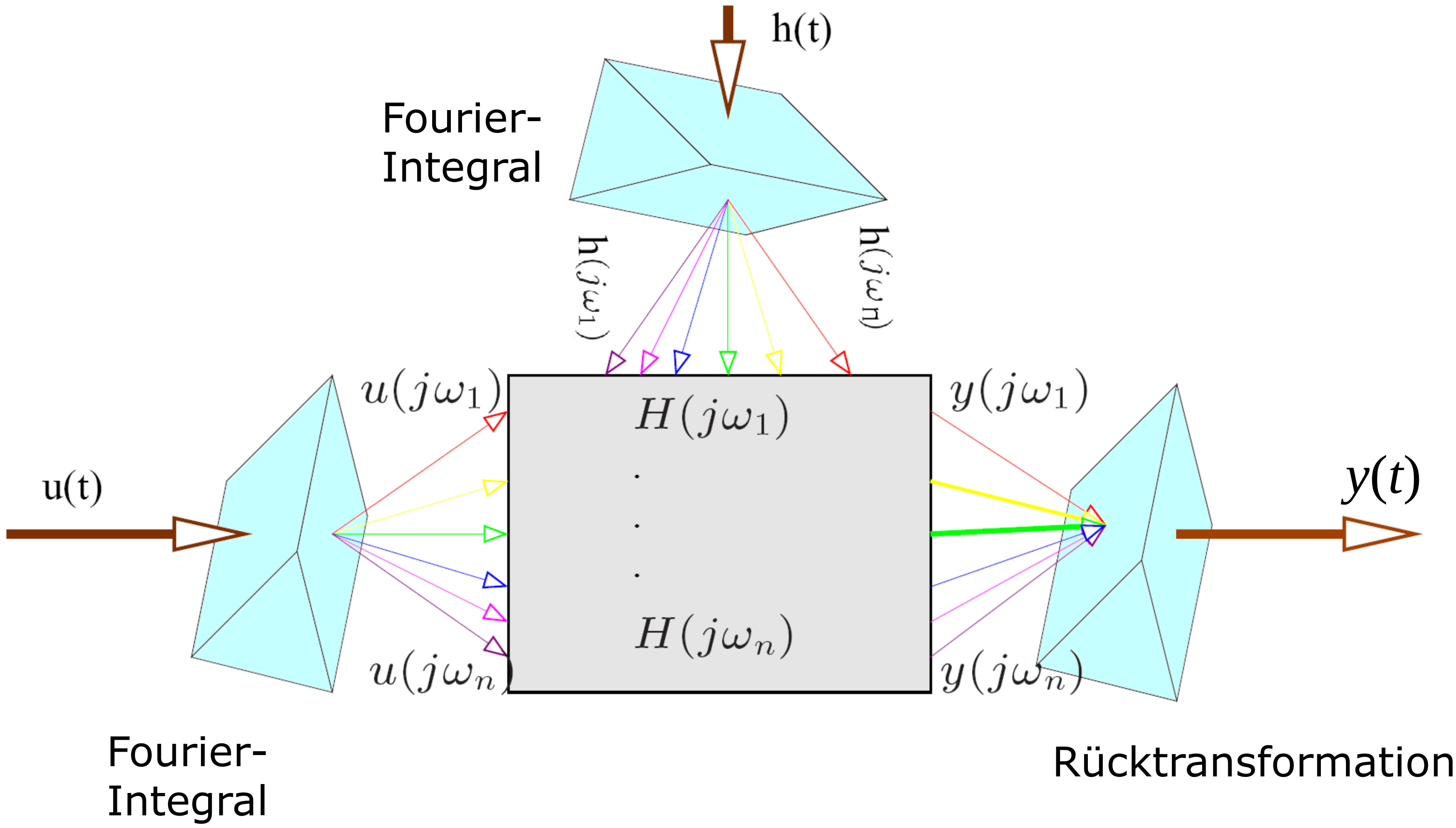
  kann auf Signale angewendet werden (z.B. $u(t)$)
- Es repräsentiert Signale $f(t)$ als Superposition einzelner Frequenzen ω mit Gewicht:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- In der Gegenrichtung kann $f(t)$ als Integral über verschiedene Frequenzen repräsentiert werden

$$f(t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Motivation: Ausgabe-Berechnung via Frequenzraum



Fourier-Transformation

- Anwendung des Fourier-Integrals auf Signale $h(t), u(t), \ldots$ kann als Transformation verstanden werden
- Notation:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; F(j\omega)$$ (Transformation in Frequenzraum)

$$F(j\omega) \;-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ f(t)$$ (Transformation in Zeit-Domäne)

Fouriertransformation einfacher Signale

Signal in der Zeit		**Frequenzdarstellung**
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	1
1	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$2\pi\delta(\omega)$
$s(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\mathrm{rect}(t/T)$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$T\,\mathrm{si}(\omega T/2)$
$e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\!-$	$\pi/j[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

$\mathrm{si}(x)$ steht für $sin(x)/x$

Fouriertransformation: Eigenschaften

- Bekannte Korrespondenzen:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!- F(j\omega), \qquad f_1(t) \circ\!\!-\!\!\!- F_1(j\omega), \qquad f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!- F_2(j\omega)$$

- Dann gelten auch die Korrespondenzen:
  - Zeitliche Ableitung: $\frac{d}{dt} f(t) \circ\!\!-\!\!\!- j\omega F(j\omega)$
  - Linearität:

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!- k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega)$$

  - Zeitliche Skalierung:

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\!- \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a}), \quad a \in \mathbb{R}$$

Dualität der Fouriertransformation

- Beobachtung:
  Gleichungen für Vorwärtstransformation (von Zeit- in Frequenzraum) und Rückwärtstransformation unterscheiden sich nur durch den Faktor $1/(2\pi)$ und die Integrationsvariablen (t oder $j\omega$)

- Durch Einsetzen kann man zeigen, dass wenn

  $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\, F(j\omega)$ gilt,

  dann gilt auch: $F(jt) \circ\!\!-\!\!\!-\, 2\pi f(-\omega)$

Beispiel für Dualität

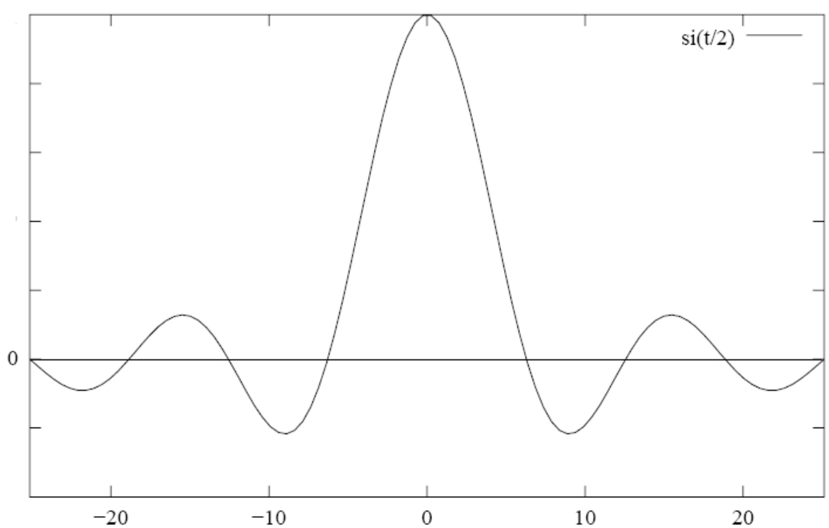
- Bekannte Transformation für $\mathrm{rect}(t)$:

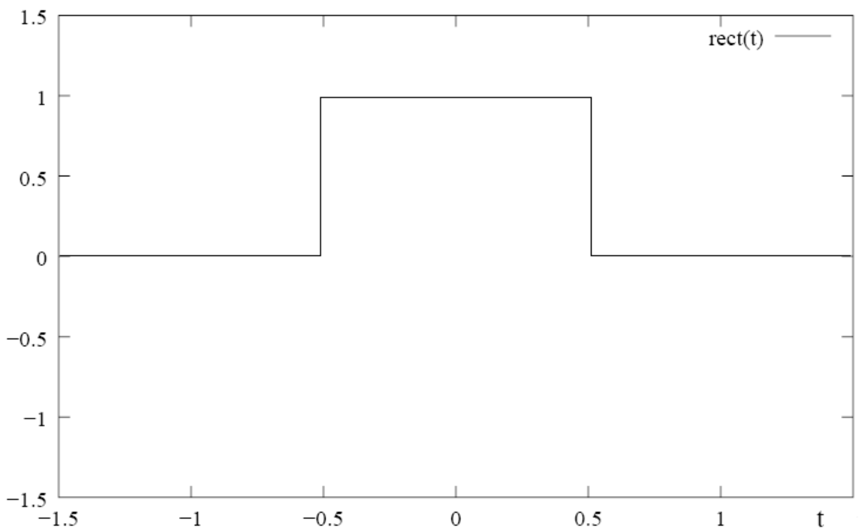
$$\mathrm{rect}(t) \circ\!\!-\!\!-\; \mathrm{si}(\omega/2)$$

$\mathrm{si}(x)$ steht für $sin(x)/x$

- Mit Dualität $F(jt) \circ\!\!-\!\!-\; 2\pi f(-\omega)$ erhalten wir:

$$\mathrm{si}(\frac{t}{2}) \circ\!\!-\!\!-\; 2\pi\,\mathrm{rect}(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$$





Fouriertransformation: Verschiebungsinvarianz

- Bekannte Transformation:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!- F(j\omega)$$

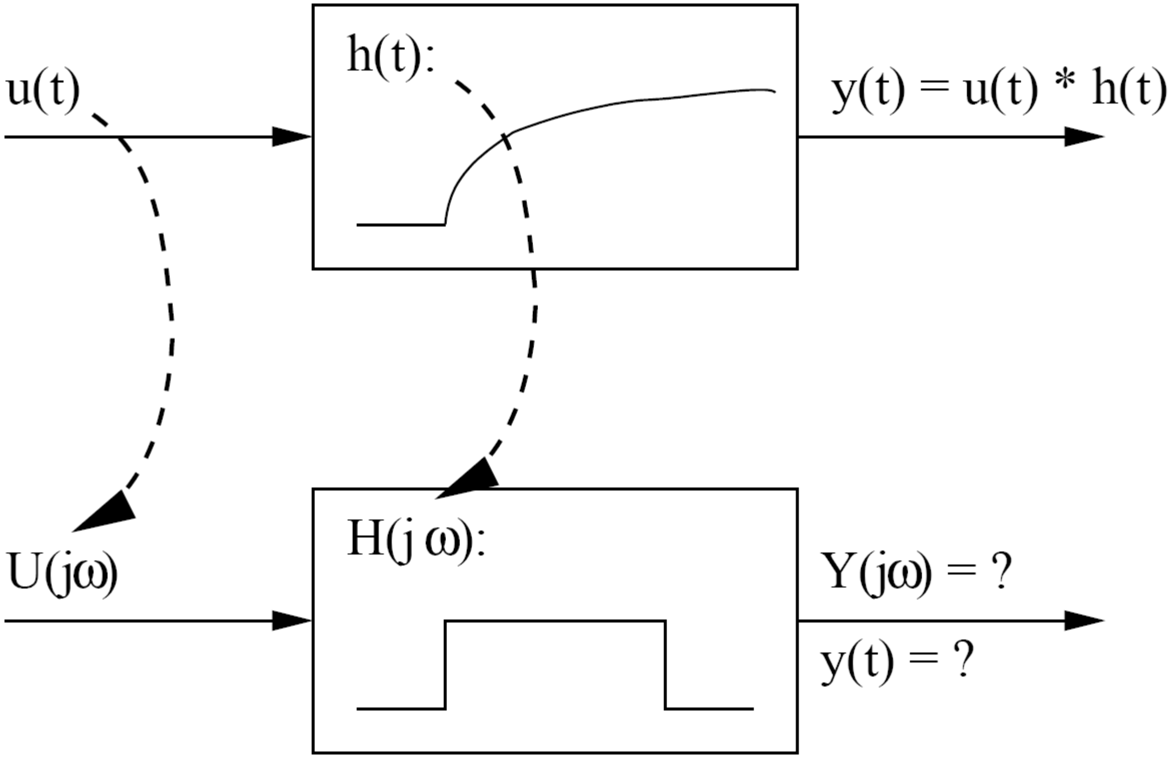
- Durch Substitution $t - t_0 \longrightarrow x$ im Fourier-Integral kann man zeigen:

$$f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!- e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

- Zeitverschiebung verändert Betrag nicht, verursacht aber frequenzabhängige Phasenverschiebung

Konvolutionstheorem I

- Wir haben:



- Vermutung: $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$

Konvolutionstheorem II

- Ausgabe in Zeit-Domäne ist Faltung:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Sie hat die Fouriertransformation (Spektrum):

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt$$

- Wenn $u(t), h(t)$ quadratisch integrierbar sind, kann man die Reihenfolge der Integration vertauschen:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dtd\tau$$

Konvolutionstheorem III

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) H(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad H(j\omega) \\
&= U(j\omega) H(j\omega)
\end{aligned}
$$

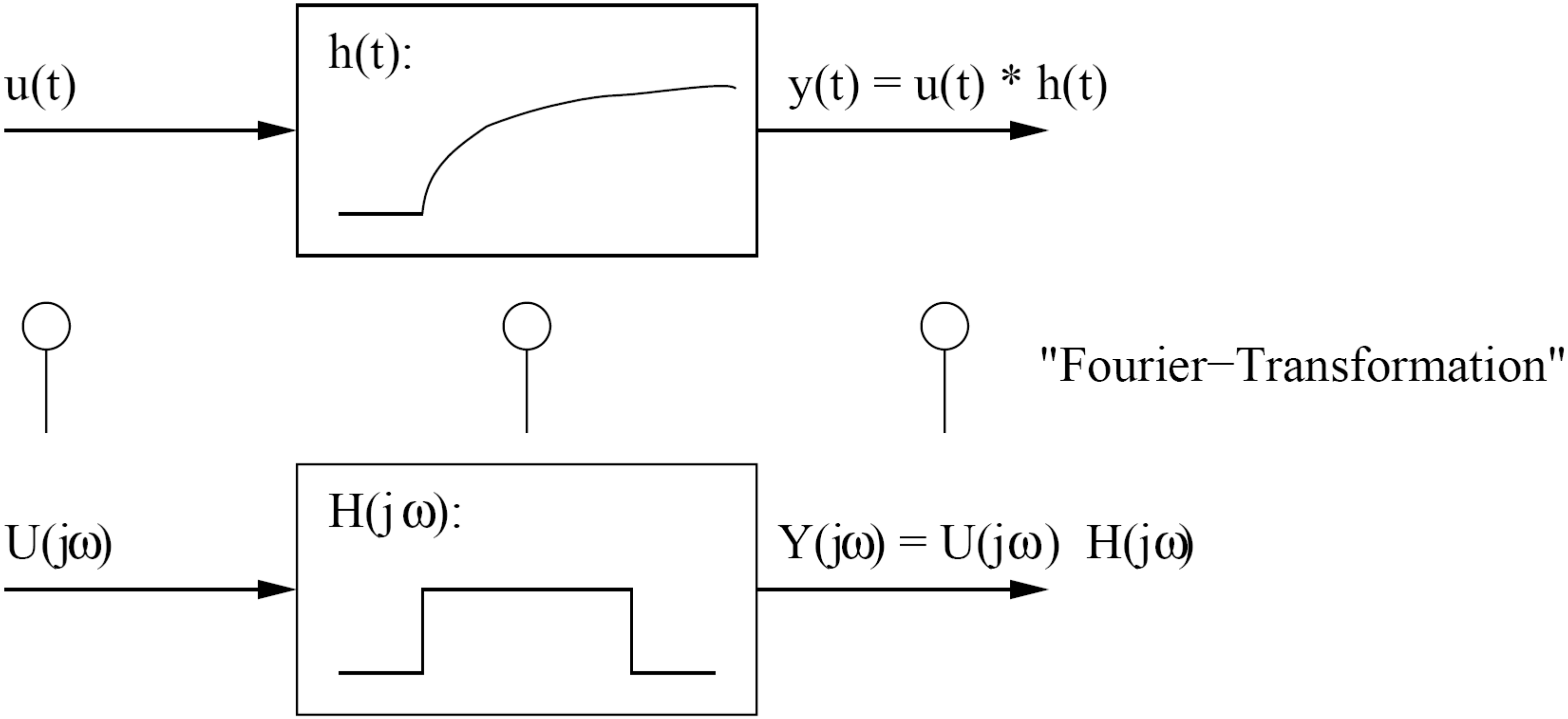
Phasenverschiebung
wegen Zeitverschiebung

- Die Ausgabe $Y(j\omega)$ eines Systems mit Transferfunktion $H(j\omega)$ bei Eingabe von $U(j\omega)$ ist:

$$Y(j\omega) = U(j\omega) H(j\omega) \quad \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \quad y(t) = u(t) * h(t)$$

Multiplikation im Frequenzraum **Konvolution im Zeitraum**

Konvolutionstheorem



Konvolutionstheorem: Beispiel

- Gegeben: $u(t) = \delta(t)$ und $H(j\omega) = \mathrm{rect}(j\omega)$
  (idealer Tiefpass)
- Gesucht: $Y(j\omega)$ und $y(t)$

- Lösung:

$$Y(j\omega) = U(j\omega)\, H(j\omega) = 1\ \mathrm{rect}(j\omega) = \mathrm{rect}(j\omega)$$

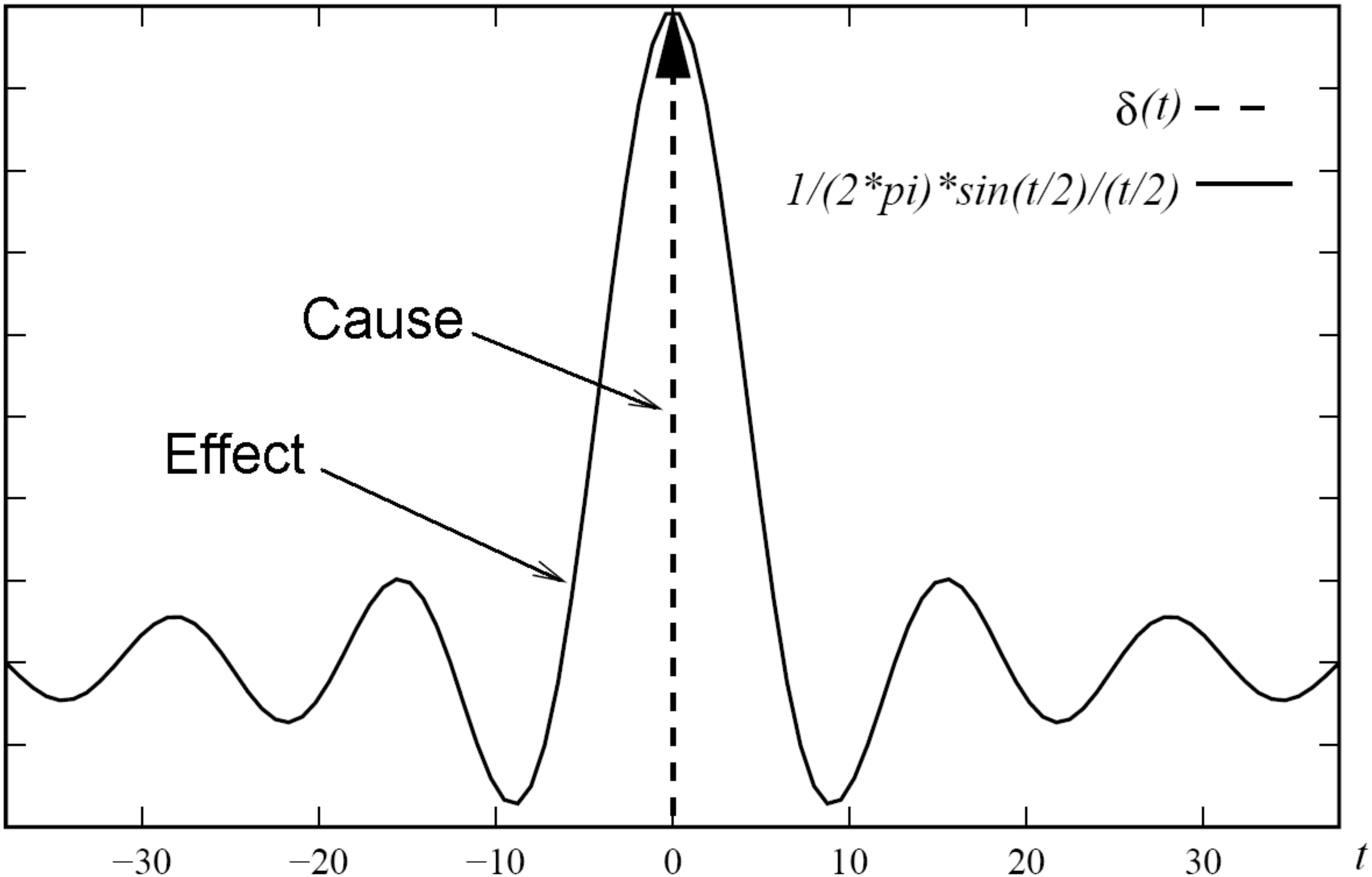
- Mit $\mathrm{rect}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\; \mathrm{si}(\omega/2)$ erhalten wir durch Dualität

$$\mathrm{rect}(j\omega) \;-\!\!\!-\!\!\circ\, 1/(2\pi)\, \mathrm{si}(t/2)$$

- Impulsantwort des idealen Tiefpasses:

$$y(t) = 1/(2\pi)\, \mathrm{si}(t/2)$$

Impulsantwort einen idealen Tiefpasses



- Kausalität verletzt => Nicht physikalisch realisierbar!

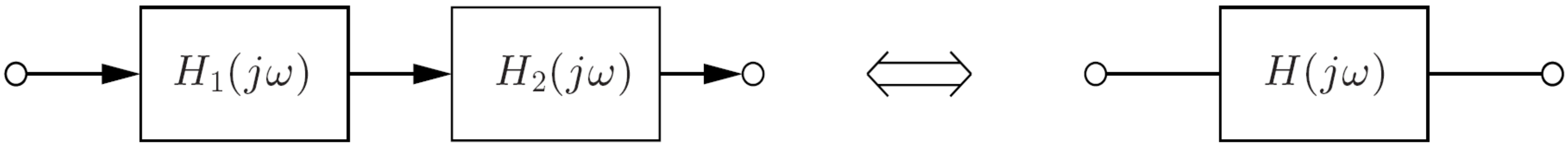
Anwendung des Konvolutionstheorems

- Die Impulsantwort der seriellen Verkettung von Teilsystem ergibt sich als Konvolution der Einzelimpulsantworten:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

- Konvolution im Zeit-Raum entspricht elementweiser Multiplikation im Frequenzraum:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$$



$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$

Konvergenz der Fouriertransformation

- Fouriertransformation:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Rücktransformation:

$$f(t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

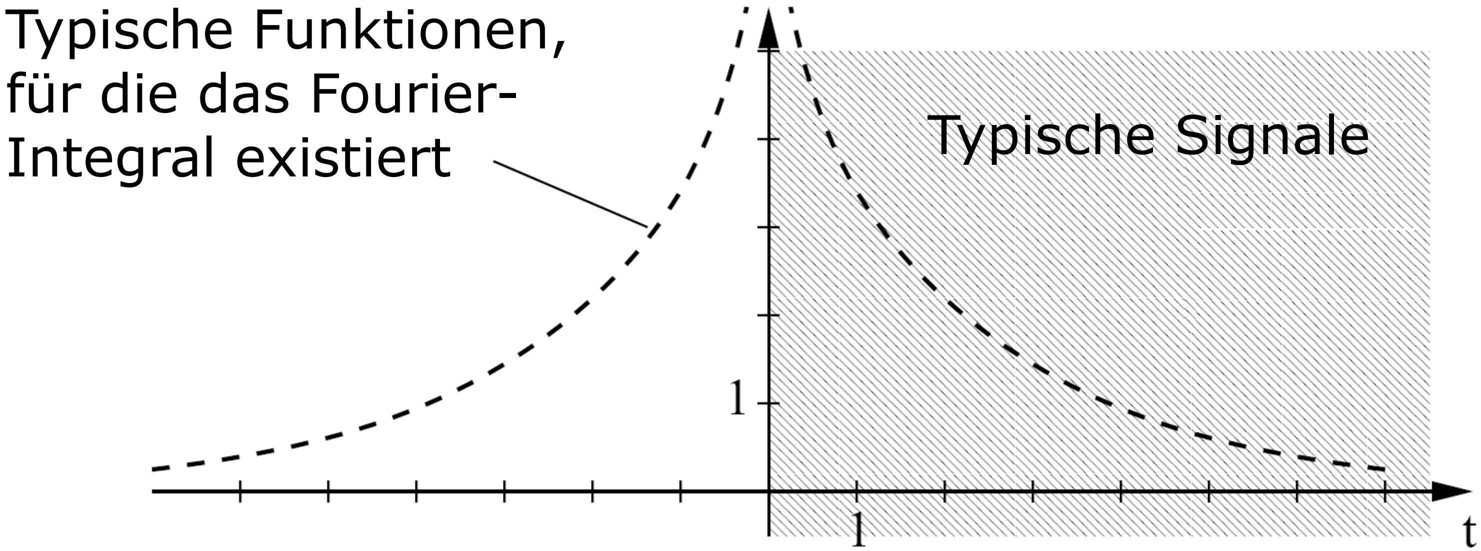
- **Problem:** Das Integral existiert nicht immer

  Konvergenz nur wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ existiert

Problem: Konvergenz des Fourier-Integrals

- Typische Signale sind kausal, d.h. sie haben die Form:

$$f_{kausal}(t)=s(t)f(t)$$



Laplace-Transformation

- Idee: nutze statt komplexer Frequenz $j\omega$
  $s := \sigma + j\omega$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$

- Für kausale Funktionen ergibt sich das Fourier-Integral:

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\varepsilon}^{\infty} .$$

$$= \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

- **Exponentiell abfallendes Gewicht** für $f(t)$
- Durch geeignete Wahl von $\sigma \in \mathbb{R}$ kann Konvergenz sichergestellt werden

Laplace-Transformation

- Wir haben die Konvergenz des Fourier-Integrals gesichert:

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega t)} dt$$

- Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir $\sigma + j\omega$ durch die komplexe Zahl s:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$