Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 1. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

(i) Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind (für jede Gleichung ergeben sich natürlich andere a und b):
a) $(2+5i)+(3-7i)=a+bi$,
b) $(2+5i)(3-7i)=a+bi$,
c) $\frac{1}{3+7i}=a+bi$,
d) $\overline{z}=a+bi$, wobei $z=\frac{1}{3+7i}$.

(ii) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $\frac{3}{2+5i}$. Dabei setzen wir $|z|:=\sqrt{z\overline{z}}$ für $z\in\mathbb{C}$.

Lösung:

(i) a) $(2+5i)+(3-7i)=(2+3)+(5-7)i=5-2i$,
b) $(2+5i)(3-7i)=2\cdot 3+2\cdot(-7i)+5i\cdot 3+5i\cdot(-7i)=6-14i+15i-35i^2 \underset{i^2=-1}{=} 41+i$,
c) $\frac{1}{3+7i}=\frac{1}{3+7i}\cdot\frac{3-7i}{3-7i}=\frac{3-7i}{3^2+7^2}=\frac{3}{58}-\frac{7}{58}i$,
d)

$$\overline{\frac{1}{3+7i}}=\overline{\frac{3}{58}-\frac{7}{58}i}=\frac{3}{58}+\frac{7}{58}i.$$

(ii) Ist $z=x+yi$ mit $x,y\in\mathbb{R}$, so ist $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Wenn man nun also den Betrag von $\frac{3}{2+5i}$ bestimmen soll, so könnte man verleitet sein, zunächst den Real- und den Imaginärteil dieser Zahl zu bestimmen. Dieses Vorgehen führt natürlich auch zum Ziel. Aber es geht leichter. Wir wissen, dass für alle komplexen Zahlen z und w gilt, dass $|zw|=|z|\cdot|w|$ ist. Ist $w\neq 0$, so ist

$$|z|=\left|z\cdot\frac{w}{w}\right|=\left|\frac{z}{w}\cdot w\right|=\left|\frac{z}{w}\right|\cdot|w|$$

und somit

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}.$$

Also ist

$$\left|\frac{3}{2+5i}\right|=\frac{|3|}{|2+5i|}=\frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Aufgabe 2.
Beweisen Sie

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|Re(z)| \leq |z|$.
(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|Im(z)| \leq |z|$.
(iii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.
(iv) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2.$$

(v) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Lösung:

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig und $z = x + yi$ und $w = s + ti$ mit $x, y, s, t \in \mathbb{R}$.

(i) Es ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$.
(ii) Es ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$.
(iii) Wir wissen, dass für nicht-negative reelle Zahlen a und b gilt: $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Somit reicht es zu zeigen, dass $|z|^2 \leq (|x|+|y|)^2$ ist. Einerseits ist $|z|^2 = x^2 + y^2$. Anderseits ist nach binomischer Formel $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$. Nun ist $2|x||y| \geq 0$ und $|x|^2 = x^2$ bzw. $|y|^2 = y^2$. Somit haben wir $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \geq x^2 + y^2 = |z|^2$.
(iv) Es ist $z+w = (x+s)+(y+t)i$ und somit $|z+w|^2 = (x+s)^2+(y+t)^2 = x^2 + 2xs+s^2+y^2+2yt+t^2 = x^2+y^2+s^2+t^2+2(xs+yt) = |z|^2+|w|^2+2(xs+yt)$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $Re(z\overline{(w)}) = xs + yt$ ist. Es ist aber $z\overline{(w)} = (x+yi)(s-ti) = xs - xti + ysi - yti^2 = (xs+yt) + (ys-xt)i$, was die Behauptung zeigt.
Man kann es natürlich auch ohne die Einführung von x, y, s, t beweisen. Hierzu bemerkt man zunächst, dass $z + \overline{z} = 2Re(z)$ und somit $z\overline{w} + \overline{z}w = 2Re(z\overline{w})$ ist. Außerdem benutzt man die Definition des Betrags $|z| = z\overline{z}$. Nun ist $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$. Wenn man dies nun ausmultipliziert und die eben gemachte Beobachtung anwendet, erhält man auch die Behauptung.
(v) Wie in Teil (iii) reicht es zu zeigen, dass $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$ gilt. Nach (iv) ist $|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2$. Nach (i) ist $|Re(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}|$ und somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|Re(z\overline{w})| + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

(i) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^2 - (4+2i)z - 2 - 8i = 0.$$

(ii) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung
$$2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z - 16 = 0.$$
Hinweis: Es gibt zwei ganzzahlige Lösungen.

Lösung:

(i) Zunächst ergänzen wir quadratisch:
$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - (4+2i)z - 2 - 8i \\ &= z^2 - 2(2+i)z - 2 - 8i \\ &= z^2 - 2(2+i)z + (2+i)^2 - (2+i)^2 - 2 - 8i \\ &= (z-(2+i))^2 - (2+i)^2 - 2 - 8i. \end{aligned}$$
Es ist $(2+i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot i + i^2 = 3 + 4i$ und somit haben wir
$$0 = (z-(2+i))^2 - 5 - 12i$$
bzw.
$$(z-(2+i))^2 = 5 + 12i.$$
Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch $x + iy := z - (2+i)$. Dann ist
$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x+iy)^2 = 5 + 12i.$$
Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn die Real- und die Imaginärteile übereinstimmen. Die vorstehende Gleichung ist also äquivalent zu dem Gleichungssystem

(1) $$x^2 - y^2 = 5$$
(2) $$2xy = 12.$$

Aus (2) folgt, dass x und y ungleich Null sind und dass außerdem $y = \frac{6}{x}$ ist. Wir setzen dies in (1) ein und erhalten
$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5.$$
Wenn wir diese Gleichung mit x^2 multiplizieren, ergibt sich
$$(x^2)^2 - 5x^2 - 36 = 0.$$
Dies ist eine quadratische Gleichung in x^2 und es ergibt sich mit der wohlbekannten $p-q-$Formel die Lösung
$$x^2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{5+13}{2} = 9.$$

Da $\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{169}{4}} < 0$ ist, ist dies keine Lösung für x^2. Aus $x^2 = 9$ folgt dann, dass $x = 3$ oder $x = -3$ sein muss. Für y ergibt sich somit $y = 2$ oder $y = -2$. Also haben wir $x + iy = 3 + 2i$ oder $x + iy = -3 - 2i$ und wegen $z = x + iy + 2 + i$ haben wir die Lösungen $z = 5 + 3i$ oder $z = -1 - i$. Wir müssen noch zeigen, dass beides tatsächlich Lösungen sind. Dies sieht man aber wegen

$$(z - 5 - 3i)(z + 1 + i) = z^2 - (4 + 2i)z - (2 + 8i).$$

Da ein komplexes Polynom vom Grad 2 höchstens 2 komplexe Nullstellen hat (wenn man Vielfachheiten mitzählt, sind es genau 2 Nullstellen), haben wir alle Nullstellen gefunden.

(ii) Bekannter Fakt: Es sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, d.h. $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und weiter sei $a \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle von f, dann ist a ein Teiler von a_0. Dabei heißt eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von $b \in \mathbb{Z}$, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $b = ac$ ist. Achtung: Ist a ein Teiler von b, dann auch $-a$. (Warum?)
Wenn wir also aufgrund des Tipps eine ganzzahlige Nullstellen von $f(z) := 2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z - 16$ suchen, dann sollten wir uns die Teiler von -16 anschauen. Dies sind $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$. Da $2^4 = 16$ ist, sind die positiven Teiler, die größer oder gleich 2 sind, sicherlich keine Nullstellen von f. Aber $f(1) = 0$. Weiteres herumprobieren zeigt, dass auch $f(-2) = 0$ ist. Wir könnten jetzt zunächst eine Polynomdivision durch $(z - 1)$ durchführen und dann den Rest durch $(z + 2)$ dividieren. Oder wir teilen f gleich durch $(z-1)(z+2) = z^2+z-2$. Es ist $(2z^4+2z^3+4z^2+8z-16) : (z^2+z-2) = 2z^2+8$ bzw. $(2z^4+2z^3+4z^2+8z-16) = (z^2+z-2)(2z^2+8) = (z-1)(z+2)(2z^2+8)$. Damit $2z^2 + 8 = 0$ ist, muss $z^2 = -4$ sein. Dies ist für $z = i\sqrt{4}$ und $z = -i\sqrt{4}$ der Fall. Wir haben also 4 Nullstellen gefunden. Da ein komplexes Polynom vom Grad 4 höchstens 4 Nullstellen haben kann, haben wir alle Nullstellen gefunden.