Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

1. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 10.-14.4.

Thema: Die reellen und die komplexen Zahlen

Videos: Video-01-reelle Zahlen I, Video-02 Vollständigkeit, Video-03 komplexe Zahlen

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden vom 11.-14.4.: Am Montag, den 10.4., ist Ostermontag. Da dies ein gesetzlicher Feiertag ist, fallen an diesem Tag alle Übungen (und natürlich auch die Vorlesung) aus. Die Teilnehmer*innen der Montagsgruppen mögen bitte eine der anderen Gruppen besuchen. Bitte nutzen dabei alle Gruppen - auch die Randzeiten.

Aufgabe 1. (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Bestimmen Sie jeweils den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen und bestimmen Sie ihren Betrag.

(i) $(3+5i)+(2-i)$,
(ii) $(3+5i)(2-i)$,
(iii) $\frac{3+5i}{2-i}$,
(iv) $i^{2022}+i^{99}+i^{9}$.

Aufgabe 2. Komplexe Nullstellen reeller Polynome
Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen und $\alpha \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle des Polynoms

$$P(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

d.h. es sei $P(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $P(\overline{\alpha}) = 0$ ist.

Aufgabe 3. Nullstellen von Polynomen
Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ anzugeben.

(i) $z^2 + (1+i)z + i = 0$,
(ii) $z^3 - z^2 + 2 = 0$.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 17.4. und dem 21.4., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen oder vor der Vorlesung am Mittwoch, den 18.4., dem Dozenten geben.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1. (Rechnen mit komplexen Zahlen)

(i) Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b, so dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind (für jede Gleichung ergeben sich natürlich andere a und b):
a) $(2+5i)+(3-7i) = a+bi$,
b) $(2+5i)(3-7i) = a+bi$,
c) $\frac{1}{3+7i} = a+bi$,
d) $\overline{z} = a+bi$, wobei $z = \frac{1}{3+7i}$.

(ii) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $\frac{3}{2+5i}$. Dabei setzen wir $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|Re(z)| \leq |z|$.
(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|Im(z)| \leq |z|$.
(iii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.
(iv) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2.$$

(v) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Aufgabe 3.

(i) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (4+2i)z - 2 - 8i = 0.$$

(ii) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z - 16 = 0.$$

Hinweis: Es gibt zwei ganzzahlige Lösungen.

Bemerkung: Die Lösungen sind stets in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ anzugeben.