Algorithmen und
Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Anne Driemel
Frederik Brüning, Jan Eube
Institut für Informatik

Abgabe: 23.01.2023 bis 10.00 Uhr

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1: Triangulationen ineinander überführen (4 Punkte)

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge von endlich vielen Punkten in der Ebene. Zeigen Sie, dass zwei beliebige Triangulationen von P durch endlich viele Flips ineinander überführt werden können. Nehmen Sie an, dass keine vier verschiedenen Punkte aus P auf einem gemeinsamen Kreisrand liegen und keine drei verschiedenen Punkte aus P auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 13.2: Knotengrad in Triangulationen (4 Punkte)

Sei T eine Triangulation mit n Knoten. Sei d_i der Knotengrad des i-ten Knotens. Zeigen Sie, dass der durchschnittliche Knotengrad $k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ von T kleiner als 6 ist.

Aufgabe 13.3: Warenlager (Dynamische Programmierung) (7 Punkte)

Der Logistikfachmann Ferdinand Faul ist so lange in einer Warenhalle geblieben, dass die Türen der Halle verschlossen wurden und er nun in dieser gefangen ist. Der einzige Ausweg ist ein Dachfenster. Um dieses zu erreichen möchte Ferdinand nun Kisten aufeinander stapeln. In der Halle befinden sich Kisten von n verschiedenen Produkttypen $p_1, \ldots, p_n$. Eine Kiste von Produkt p_i hat das Gewicht $w_i \in \mathbb{R}_+$ und Höhe $h_i \in \mathbb{N}$. Um das Dachfenster zu erreichen, muss Ferdinand einen Turm exakt der Höhe $h \in \mathbb{N}$ bauen. Ein Turm der Höhe $h+1$ würde nicht in die Halle passen und von einem Turm der Höhe $h-1$ würde er das Fenster nicht erreichen. Von jedem Produktyp p_i gibt es ausreichend Kisten, sodass sie aufeinandergestapelt die Höhe h überschreiten. Da Ferdinand faul ist möchte er einen Turm von möglichst geringem Gesamtgewicht bauen. Entwickeln Sie ein dynamsiches Programm, dass die passenden Kisten für einen Turm mit minimalem Gesamtgewicht ermittelt oder ausgibt, dass kein Turm der Höhe h konstruiert werden kann. Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus, sie sollte in $O(nh)$ liegen. Geben Sie außerdem die zugrunde liegende Rekursionsgleichung an und zeigen Sie die Korrektheit dieser.

Aufgabe 13.4: Arbitrage (Kürzeste Wege) (5 Punkte)

Arbitrage bezeichnet das Ausnutzen von Preisunterschieden für gleiche Waren auf verschiedenen Märkten. Ein einfaches Beispiel ist das Ausnutzen von Wechselkursen, also das Handeln mit Währungen. Angenommen, ein Händler startet mit 1\$ (Dollar). Damit kauft er zunächst 95.739¥ (Yen). Pro Yen erhält er 0.0063£ (britische Pfund). Schließlich kauft er zum Kurs 1.6583\$/£ wieder Dollar und hat jetzt $95.739 \cdot 0.0063 \cdot 1.6583 = 1.0002131$ Dollar (Wechselkurse vom 02.06.2009). Insgesamt ergab sich also ein Gewinn von 0.021%.

Gegeben seien n Währungen $c_1, \ldots, c_n$ und eine $(n \times n)$-Matrix R, die die aktuellen Wechselkurse enthält. Die Einträge von R sind positiv und auf der Hauptdiagonalen stehen Einsen. Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine Wechselkursmatrix R in Zeit $O(n^3)$ bestimmt, ob ein Arbitrage-Geschäft möglich ist. Begründen Sie die Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.