Kapitel 4 Ausgewählte Themen der Mathematik

Mengenkardinalitäten, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten, Analyse

4.1 Abzählbar, überabzählbar

(Bereitstellen beide Richtungen)

"Schubfachprinzip" formal

Mengen A, B $\quad |A| > |B|$ $\quad$ Abbildung $f: A \to B$

$\Rightarrow \quad \exists\, a \neq a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.

(1)

<u>Erinnerung:</u> A, B <u>gleichmächtig</u>

$:\Longleftrightarrow$ Es ex. bijektive Abb. $f: A \to B$

<u>Notation:</u> $A \sim B$ Äquivalenzrelation

<u>Definition 4.2</u> Menge M heißt

- <u>abzählbar unendlich</u> $:\Longleftrightarrow$ $M \sim \mathbb{N}$

  <u>d.h.:</u> $\exists\ f: \mathbb{N} \to M$, f ist bijektiv

  ⌜Bedeutung: Elemente durchnumerieren⌟

- <u>abzählbar</u> $:\Longleftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar ~~unendlich~~ unendlich

- <u>überabzählbar</u> $:\Longleftrightarrow$ M ist unendlich aber <u>nicht</u> abzählbar unendlich.

Theorem 4.3: Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

Beweis: $A \subseteq B$, A, B Mengen, B abzählbar

1. Fall: B endlich $\Rightarrow$ A endlich ✓

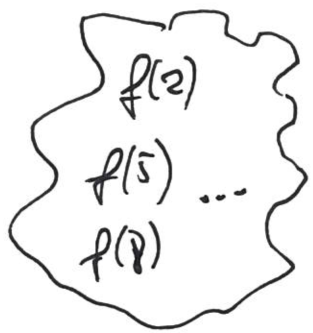
2. Fall: B unendlich, A endlich ✓

3. Fall: A, B unendlich, $\exists f$ $f: \mathbb{N} \to B$ bijektiv

Suche $\underline{g}: \mathbb{N} \to A$ bijektiv

Schema: $A \subseteq B$

Situation



$h(1) = 2$
$h(2) = 5$
$h(3) = 8$

Idee: Schneller Durchlauf

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$1 \longmapsto$ kleinste Index $m \in \mathbb{N}$ $f(m) \in A$

$2 \leq n \longmapsto$ kleinstes $m > h(n-1)$ mit $f(m) \in A$

③

$g : f \circ h \qquad g : \mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$

$g(x) = f(h(x))$ ist gesuchte Abb.

$\underline{g : \mathbb{N} \to A}$

Satz: Injektivität: h wächst monoton, f injektiv

$(f \circ h)(i) = (f \circ h)(j) \Longleftrightarrow i = j$

$f(h(i)) = f(h(j)) \underset{\text{Inj.}}{\Rightarrow} h(i) = h(j) \underset{\text{Monoton}}{\Rightarrow} i = j$

Surjektivität: f surjektiv

und die Wahl von h, kein Element vergessen

$\square$

4

Theorem 4.4: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Abbildungen angeben

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \; \dots \\ & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \end{array}$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=-1$

f: bijektiv

f injektiv zz $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ Äquivalenzumformung

I. a,b gerade $\frac{a}{2}=\frac{b}{2} \Leftrightarrow a=b$

II. a,b ungerade $-\frac{(a-1)}{2} = -\left(\frac{b-1}{2}\right) \Leftrightarrow a=b$

III. O.E. b ungerade, a gerade $\frac{a}{2} = -\left(\frac{b-1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2l}{2} = -\frac{(2k+1-1)}{2} \Leftrightarrow l=-k$ ↯ $a,b \in \mathbb{N}$

↯ zu $a, b \in \mathbb{N}$

<u>f surjektiv</u> $\quad z \in \mathbb{Z}$ „treffen" $\quad \underline{f(1) = 0}$ ✓

1. $z = 2 \cdot l$ $\quad$ 2. $z = -2 \cdot l$ $\quad l \in \mathbb{N}$

3. $z = 2 \cdot l + 1$ $\quad$ 4. $z = -(2l + 1)$ $\quad l \in \mathbb{N}_0$

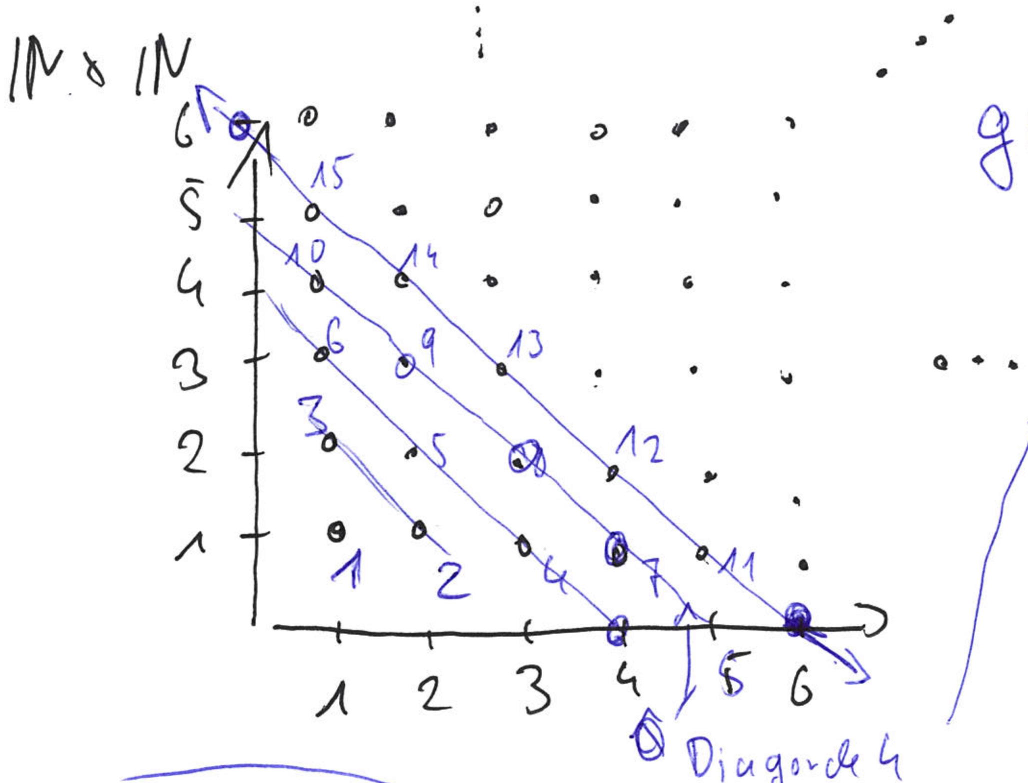
$f(n) = z$ angeben $\quad$ 1. $n = 4l$ $\quad$ 2. $n = 4l + 1$ $\quad$ 3. $n = 4l + 2$ $\quad$ 4. $n = 4l + 3$ $\quad$ <u>fertig</u>

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

⑥

Cantor'sche Paarungsprinzip

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



Schema

$$g(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y$$

$$g(4,1) = 6 + 1 = 7$$
$$g(3,2) = 6 + 2 = 8$$
$$g(2,3) = 6 + 3 = 9$$
$$g(1,4) = 6 + 4 = 10$$

n-te Diagonale: # Punkte bis zum Ende Diagonale n $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$G: y = -x + (n+1) \Rightarrow \underline{y + x = n+1}$

$$g(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y \underset{(x+y)=n+1}{=} \frac{n(n-1)}{2} + y$$

<u>Labels auf Diagonale</u> n (von rechts unten nach links oben)

$$\frac{n(n-1)}{2}+1,\ \frac{n(n-1)}{2}+2,\ \dots,\ \frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Zuordnung korrekt?, g ist bijektiv (formal zeigen!) $\square$

<u>Theorem 4.5</u> A, B Mengen abzählbar

$\Rightarrow A \cup B$ abzählbar, $A \times B$ abzählbar.

<u>Beweis:</u> <u>Summe</u>: endliche Mengen klar

O.E. A <u>endlich</u>, B unendlich (exemplarisch für $A \cup B$)

<u>$A \cup B$</u>: $f: \mathbb{N} \to B$ bijektive Abb. ex.

$g: \mathbb{N} \to A \cup B$ konstruieren

$A' = \{a_1, \ldots, a_\ell\} = A \setminus B$ $\quad$ A endlich

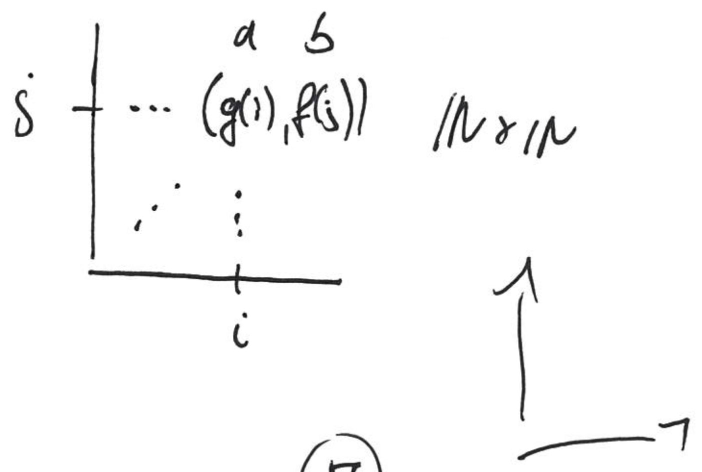
$g(i) = a_i \qquad i = 1, \ldots, \ell$ $\qquad$ g ist bijektiv

$g(i) = f(i-\ell) \qquad i = \ell+1, \ell+2, \ldots$

$A \times B \qquad A, B$ unendlich.

$f: \mathbb{N} \to B \qquad g: \mathbb{N} \to A$ bijektive Abb. ex.

$h: A \times B \to \mathbb{N}$ bijektiv



$$(a,b) \longmapsto \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j$$

wenn $g(i) = a$ und $f(j) = b$

$\square$

Weitere Beweistechnik:

Theorem 4.8 $\mathbb{R}$ ist überzählbar.

Beweis: indirekt $\leadsto$ **Ann.** $\mathbb{R}$ abzählbar unendlich.

$\underset{\text{Th. 4.3}}{\Longrightarrow}$ $(0,1)$ ist auch abzählbar unendlich. d.h.

$f: \mathbb{N} \to (0,1)$ ex. bijektiv

Diagonalisierungstrick

$f(1) = a_1 = 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \dots$
$f(2) = a_2 = 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}$
$f(3) = a_3 = 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \dots$
$f(4) = a_4 = 0.$

Konstruiere $b \in (0,1)$ $\quad b := 0.b_1 b_2 b_3 \dots$

$$b_i := \begin{cases} a_{ii} - 2, & a_{ii} > 2 \\ a_{ii} + 2, & a_{ii} \le 2 \end{cases}$$

$b \in (0,1)$ muss in der Aufzählung vorkommen

$$\Rightarrow \quad b = f(j) \quad \text{für ein } j \in \mathbb{N}$$

$$a_{jj} \neq b_j \quad \left(\forall i \in \mathbb{N} \quad a_{ii} \neq b_i \right) \quad \text{↯} \quad \text{So ein } f \text{ ex. nicht.}$$

$\square$

„Bilder von Abb. sind <u>nicht</u> mächtiger als die Ausgangsmenge"

$f: A \to B$ surjektiv auf das Bild von A bezgl. f einschränken $f(A)$. $f': A \to f(A) \subseteq B$

<u>Theorem 4.6</u> Seien A, B Mengen und A <u>abzählbar unendlich</u> und <u>$f: A \to B$</u> surjektiv. Dann ist B abzählbar.

<u>Beweis:</u> B endlich $\vee$ B unendlich, A abzählbar unendlich.

<u>Schema:</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B & \\ \mathbb{N} \arrow[u, "g"] \arrow[ur] & & \\ & \mathbb{N} \arrow[ul, "\pi"] \arrow[uu, bend right, "h = f \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

$g: \mathbb{N} \to A$ bijektiv ex.

h ist <u>surjektiv</u>

$h' = h \circ \pi \quad h'$ <u>injektiv</u> machen

<u>Trick:</u> π vorschalten

$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$1 \mapsto 1$

$2 \leq n \longmapsto$ kleinste k mit

$h(k) \notin \{h(1), h(2), h(3), \ldots, h(n-1)\}$

$\Rightarrow h' = h \circ \pi$ <u>bijektiv</u> (beweisen, argumentieren)

$\Rightarrow B$ abzählbar unendlich. $h' : \mathbb{N} \to B$ $\square$

<u>Anwendung:</u>

<u>Theorem 4.7</u> $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich!

<u>Aufsammeln!</u>