3. Übungsblatt

Afg. 1

1. Hilfssatz: sei $b = a'$.

dann: $b + b' = 1 \Leftrightarrow a' + (a')' = 1$ - Inverses Elem.

$b \cdot b' = 0 \Leftrightarrow a' \cdot (a')' = 0$ - Inverses Elem.

z.Z.: $a = (a')'$.

$a = a + 0$ - Neutrales Elem.

$= a + (a' \cdot (a')')$ - Inverses Elem. (s.o.)

$= (a + a') \cdot (a \cdot (a')')$ - Distributivgesetz

$= 1 \cdot (a \cdot (a')')$ - Inverses Elem.

$= (a' + (a')') \cdot (a + (a')')$ - Inverses Elem. (s.o.)

$= ((a')' + a') \cdot ((a')' + a)$ - Kommutativgesetz (x 2)

$= (a')' + a' \cdot a$ - Distributivgesetz

$= (a')' + a \cdot a'$ - Kommutativgesetz

$= (a')' + 0$ - Inverses Elem.

$= (a')'$ - Neutrales Elem.

2. z.Z.: $x_1' \cdot x_3 = (x_1' \cdot x_2) \cdot x_3 + (x' \cdot x_2') \cdot x_3$

$x_1' \cdot x_3 = x_1' \cdot 1 \cdot x_3$ - Neutrales Elem.

$= x_1' \cdot (x_2 + x_2') \cdot x_3$ - Inverses Elem.

$= (x_1' \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2) \cdot x_3$ - Distributivgesetz

$= x_3 \cdot (x_1' \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2)$ - Kommutativgesetz

$= (x_1' \cdot x_2) \cdot x_3 + (x_1' \cdot x_2') \cdot x_3$ - Distributivgesetz

3. $a \oplus a = a' \cdot a + a \cdot a'$ - Lt. Definition

$= a' \cdot a + 0$ - Inverses Element

$= a' \cdot a$ - Neutrales Element

$= a \cdot a'$ - Kommutativgesete

$= 0$ - Neutrales Element

4. $z \cdot (x+y) + (y \cdot z') = z \cdot x + z \cdot y + y \cdot z'$ - Distributivgesetz

$= z \cdot x + y \cdot z + y + z'$ - Kommutativgesetz

$= z \cdot x + y \cdot (z + z')$ - Distributivgesetz

$= z \cdot x + y \cdot 1$ - Inverses Elem.

$= z \cdot x + y$ - Neutrales Elem.

Afg 2

1. $f(w,x,y,z) = (w \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (z \vee \bar{x}) \wedge (\bar{w} \vee z)$

$f(1,1,1,1) = (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$

$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1$

$= 1$

$f(0,1,1,1) = (0 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)$

$= 0 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1$

$= 0$

$\Rightarrow$ f ist erfüllbar.

2. $g(x,y) = \overline{x \vee y} \rightarrow (x \leftrightarrow y)$

$= \overline{x \vee y} \rightarrow ((x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}))$ - Def. Äquivalenz

$= \overline{\overline{x \vee y}} \vee ((x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}))$ - Def. Implikation

$= \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee ((x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}))$ - De-Morgan-Regel

$= \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y))$ - Kommutativgesetz

$= (\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (x \wedge y)$ - Assoziativgesetz

$= ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})}) \vee (x \wedge y)$ - Kommutativgesetz

$= 1 \vee (x \wedge y)$ - Inverses Element

$= 1$ - Eliminationsgesetz

$\Rightarrow$ g ist allgemeingültig.

3. $h(x,y) = [\overline{x \vee y} \rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})] \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$

$= [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})] \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$ - De-Morgan-Regel

$= [(\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})] \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$ - Def. Implikation

$= [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})}] \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$ - Kommutativgesetz

$= 1 \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$ - Inverses Elem.

$= 0 \vee [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$ - Def. Implikation

$= (x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)$ - Neutrales Elem.

$= (x \leftrightarrow y) \wedge \overline{(x \leftrightarrow y)}$ - Def. Antivalenz

$= 0$ - Inverses Elem.

$\Rightarrow$ h ist unerfüllbar.

Aufgabe 3. 1)

$f(x,y) = (x \cdot (x' + y))'$ = Negationstheorem

$x' + (x' + y)'$ = Negationstheorem

$x' + x \cdot y'$ = Neutrales El. Konjunktion

$x' \cdot 1 + x \cdot y'$ = Inverses El. Disjunktion

$x'(y + y') + x \cdot y'$ = Distributivgesetz Disjunktion

$x' \cdot y + x' \cdot y' + x \cdot y' + 0$ = $(x \cdot x = x \wedge x = x)$

$= x' \cdot y + x' \cdot y' + x \cdot x \cdot y' + 0$ = Konjunktion Invers El.

$= x' \cdot y + x' \cdot y' + x \cdot x \cdot y' + y \cdot y' \cdot x$ = Distributivgesetz Disjunktion

$= x' \cdot y + y'(x' + x \cdot x) + y \cdot y' \cdot x$ = Distributivgesetz Disjunktion

$= x' \cdot y + y'(x' + x \cdot x + y \cdot x)$ = Distributivgesetz Disjunktion

$= x' \cdot y + y'(x' + x(x + y))$ = Kommutativgesetz Disjunktion

$= y'(x' + x(x + y)) + x' \cdot y$

Aufgabe 3.3) $f(x,y) = (x\cdot(x'+y))'$ = Negationstheorem

$x' + (x'+y)'$ = Negationstheorem

$x' + x\cdot y'$

$g(x,y) = y'\cdot(x' + x(x+y)) + x'\cdot y$ = Distributivgesetz Disjunktion

$y'\cdot x' + y'\cdot x\cdot(x+y) + x'\cdot y$ = Distributivgesetz Disjunktion

$y'\cdot x' + y'\cdot x\cdot x + y'\cdot x\cdot y + x'\cdot y = (x \wedge x = x)$

$y'\cdot x' + y'\cdot x + y'\cdot x\cdot y + x'\cdot y$ = Inverses El. Konjunk

$y'\cdot x' + y'\cdot x + 0 + x'\cdot y$ = Distributivgesetz Disjunktion

$\cancel{y'(x'+x) + x'\cdot y}$ = ~~Inverses El. Disjunktion~~

$\cancel{y' + x'\cdot y}$

$x'(y+y') + y'\cdot x$ = Inverses Element Disjunk

$x'\cdot 1 + y'\cdot x$ = Neutrales El. Konjunktion

$x' + y'\cdot x$

$f(x,y) = g(x,y) \quad \square$

Aufgabe 3.4) Fall 1. : $x = 0$

$f(x,y) = (0\cdot(1+y))' = (0\cdot y)' = 0' = 1$

$g(x,y) = y'(1 + 0(0+y)) + 1\cdot y =$

$= y'(1 + 0\cdot y) + y = y'(1+0) + y =$

$= y'\cdot 1 + y'\cdot 0 + y = y'\cdot 1 + y = y' + y = 1$

Fall 2 : $x = 1$

$f(x,y) = (1(0+y))' = (1\cdot y)' = y'$

$g(x,y) = y'(0 + 1(1+y)) + 0\cdot y =$

$= y'(0+1) + 0 = y'$

Afg. 4

1. DNF: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$

KNF: $(a+b+c) \cdot (a+\bar{b}+c) \cdot (a+\bar{b}+\bar{c}) \cdot (\bar{a}+b+\bar{c}) \cdot (\bar{a}+\bar{b}+c)$

2. $\neg(\neg a \cdot \neg b \cdot c + a \cdot \neg b \cdot \neg c + a \cdot b \cdot c)$

$= (a+b+\neg c) \cdot (\neg a + b + c) \cdot (\neg a + \neg b + \neg c)$

Es fällt auf: Die Negation einer DNF nach dem Negationstheorem führt zur KNF der negierten Funktion.