Einführung in die Computergrafik

Matthias B. Hullin

Institut für Informatik II, Universität Bonn

Signalverarbeitung

Signale

- Wir befassen uns mit physikalischen Messgrößen (z.B. Licht), mit denen wir eine gewisse Information verbinden => **Signal**.

- Zum Beispiel: ein 2D-Bild

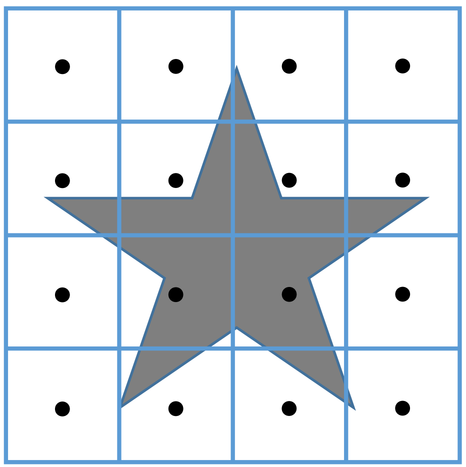
- $I(x, y)$

Variablen: Position / Koordinaten $[\mathrm{m}]$

Wert: "Menge an Licht", z.B. "Irradianz" $[1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}]$

Abtastung und Rekonstruktion

Von der realen (oder virtuellen) Welt auf unseren Bildschirm



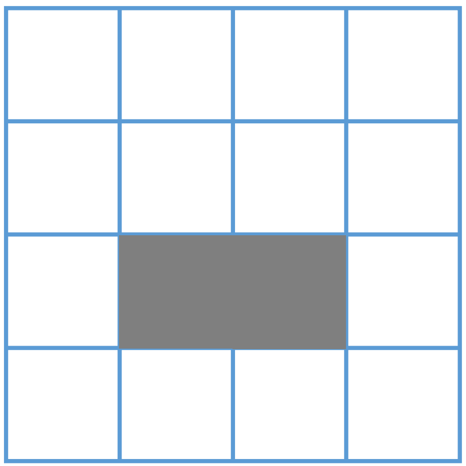
"Reale Welt"
(kontinuierlich)

Kamera:
Filter +
Abtastung

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times m$ Matrix
(diskret)

Interpolation

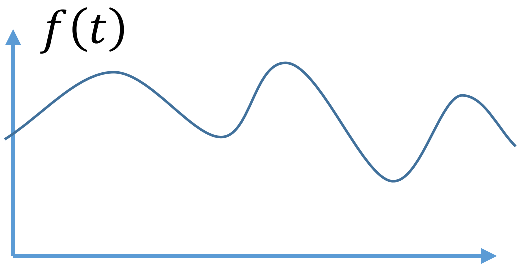


Rekonstruktion
(kontinuierlich)

Dies passiert ständig! Unsere Augen tun das Gleiche (und das Gehirn rekonstruiert)

Abtastung (sampling)

- Schauen wir uns eine 1D-Funktion an



t (könnte auch x sein)

- Zeichne Messwerte in regelmäßigen Abständen auf => periodischer Prozess
- Def. **Frequenz** ν: Maß, wie oft etwas passiert pro Zeiteinheit, Distanzeinheit, ...

$$[\nu_t] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{Hz} \qquad \text{(Zeitfrequenz)}$$

$$[\nu_x] = \frac{1}{[x]} = \frac{1}{\mathrm{m}} \qquad \text{(Ortsfrequenz)}$$

Abtasttheorem

Abtastfrequenz: wie oft zeichnen wir einen Messwert auf?

z.B.

Audio-CD: $\nu_{\mathrm{CD}} = 44\,100\ \mathrm{Hz}$

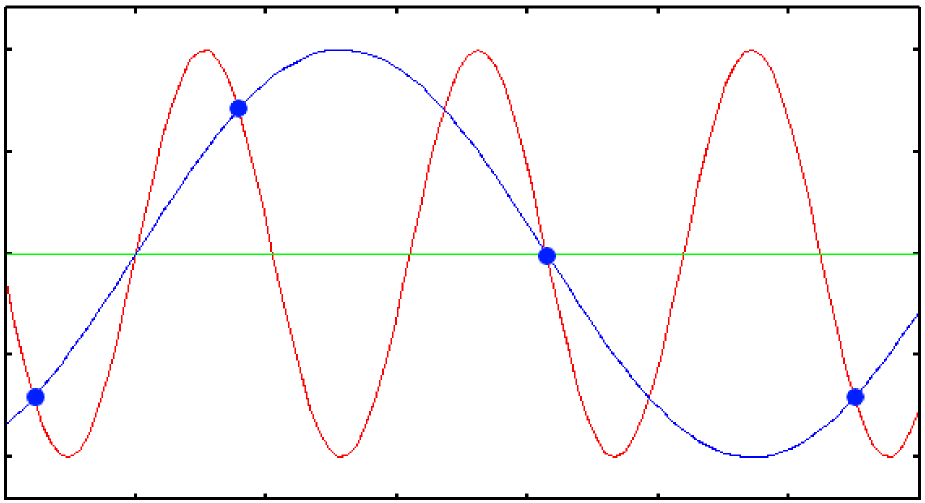
Scannerauflösung: $\nu_{\mathrm{scan}} = 600\ \mathrm{dpi} = \frac{600}{25.4\ \mathrm{mm}}$

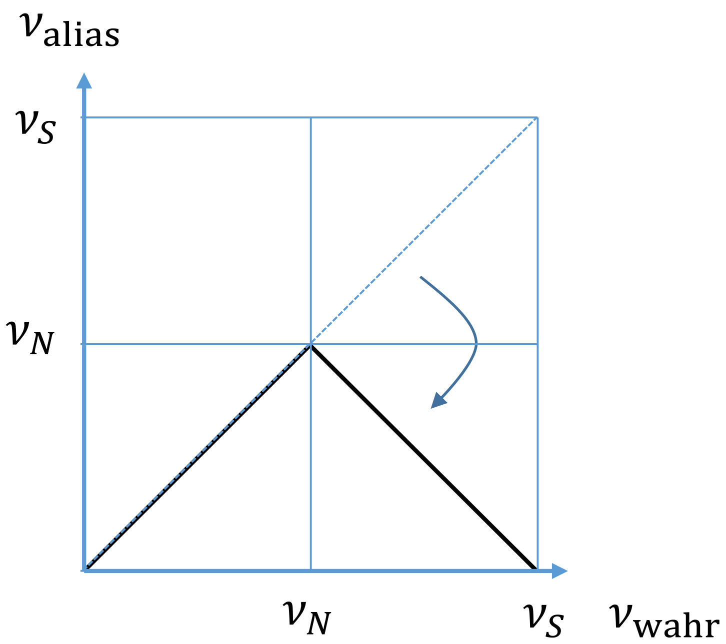
Abtasttheorem (Nyquist/Shannon):

Abtastung mit Rate/Frequenz ν_S kann Signalfrequenzen bis höchstens $\nu_N = \nu_S/2$ wiedergeben ("Nyquistfrequenz" / Nyquistlimit)

Aliasing

- Frequenzen oberhalb von ν_N sind nicht mehr eindeutig darstellbar



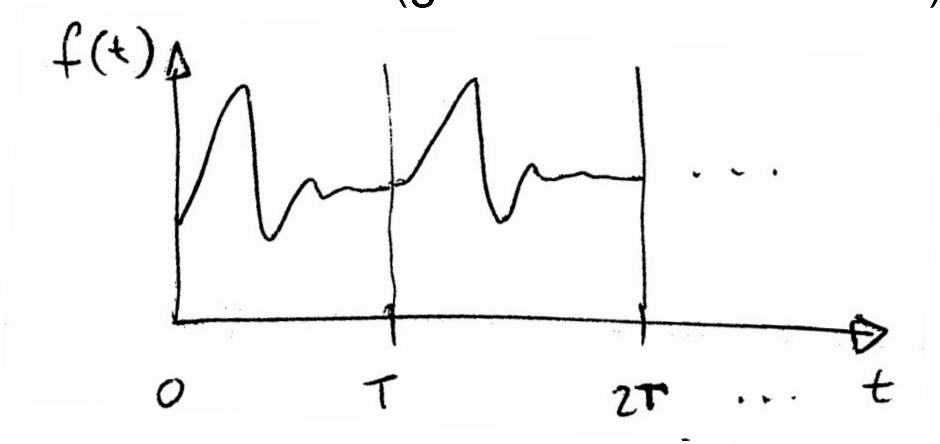


- **Aliasing**: verschiedene Frequenzen erzeugen die gleichen Messwerte

Welche Frequenzen sind enthalten?

Fourier (1822): "Jede Menge"

Jedes periodische Signal kann als unendliche Reihe von Sinus- und Cosinustermen (genannt **Fourierreihe**) dargestellt werden.



Alle Sinus- und Cosinusfunktionen, die "in die Periode passen":

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(\nu_k 2\pi t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\nu_k 2\pi t)$$

mit Frequenzen ν_k = ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{T}$: $\nu_k = \frac{k}{T}$

⇔ Periode T = ganzzahliges Vielfaches von $T_k = \frac{1}{\nu_k}$

Fourierreihe

Def. **Winkelfrequenz** (angular frequency):

$\omega = 2\pi\nu \quad \Rightarrow \quad f(\omega t)$ ist 1-periodisch

Wie erhalten wir α_k, β_k?

Multipliziere mit $\cos(\nu_l 2\pi t)$ und integriere:

$$\int_0^T f(t) \cos(\nu_l 2\pi t)\, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \underbrace{\int_0^T \cos(\nu_k 2\pi t) \cos(\nu_l 2\pi t)\, dt}_{={}^{T}/_{2}\delta_{kl}} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \underbrace{\int_0^T \sin(\nu_k 2\pi t) \cos(\nu_l 2\pi t)\, dt}_{=0}$$
$$= \alpha_l \cdot {}^{T}/_{2}$$

warum?

Fourieranalyse und -synthese

$$\alpha_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}\,dt$$
$$\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}\,dt$$

"Fourier-Analyse"

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos\frac{2\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin\frac{2\pi kt}{T}$$

"Fourier-Synthese"

Exkursion: Orthogonale Funktionen

Wann sind zwei **Vektoren** orthogonal?

Wenn ihr **inneres Produkt** 0 ist (Skalarprodukt/dot product)

Komplex konjugiert

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y = -2 + 1 + 1 = 0$$

Paarweise multiplizieren,
dann aufaddieren

Exkursion: Orthogonale Funktionen

Zwei **Funktionen** f, g heißen orthogonal auf dem Intervall $[a, b]$ genau wenn

Komplex konjugiert

$$\langle f, g\rangle_a^b = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt = 0$$

Punktweise multiplizieren, dann aufintegrieren

Beispiel 1: $\sin(\cdot), \cos(\cdot)$ auf Intervall $[0,2\pi]$

Beweis:

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)dt$$

$$\underset{(1)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2\mathrm{t})\Big|_0^{2\pi}$$

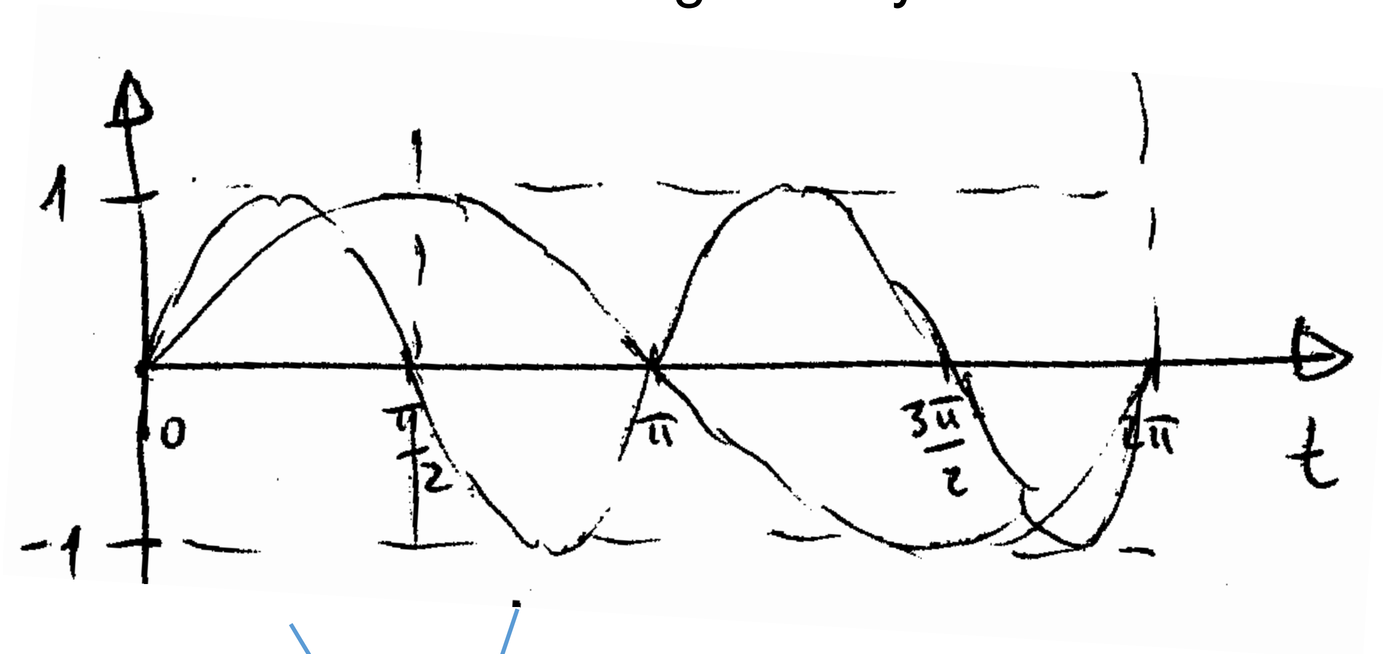
$$= -\frac{1}{4}\cdot(1-1) = 0$$

(1) Verwende trigonomische Identität

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Exkursion: Orthogonale Funktionen

- Beispiel 2: $\sin(\cdot)\,, \sin(2\,\cdot)$ sind orthogonal auf $[0{,}2\pi]$
- Beweis durch Untersuchung von Symmetrien:



Das Integral über diese beiden Teilstücke (ungeachtet seines genauen Wertes) ist betragsgleich, mit umgekehrten Vorzeichen.

Was bleibt zu tun?

1. $\sin, \cos$ loswerden mit Eulerformel
2. Diskrete Signale
3. Nichtperiodische Signale

Komplexe Fourierreihe

Euler-Formel:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin \mathrm{x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\mathrm{i}}$$

- Hiermit sind übrigens auch definiert: $e^{x \in \mathbb{C}}, \sin(x \in \mathbb{C})$, ...

Verwende diese Identitäten, um Fourierreihe umzuschreiben:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}}$$ mit komplexen Koeffizienten

"Primal domain"
"Time domain"
"Spatial domain"

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt$$

"Fourier domain"
"Frequency domain"

Fourier auf diskreten Repräsentationen

$x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \quad \hat{x} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ diskret fouriertransformierter Vektor

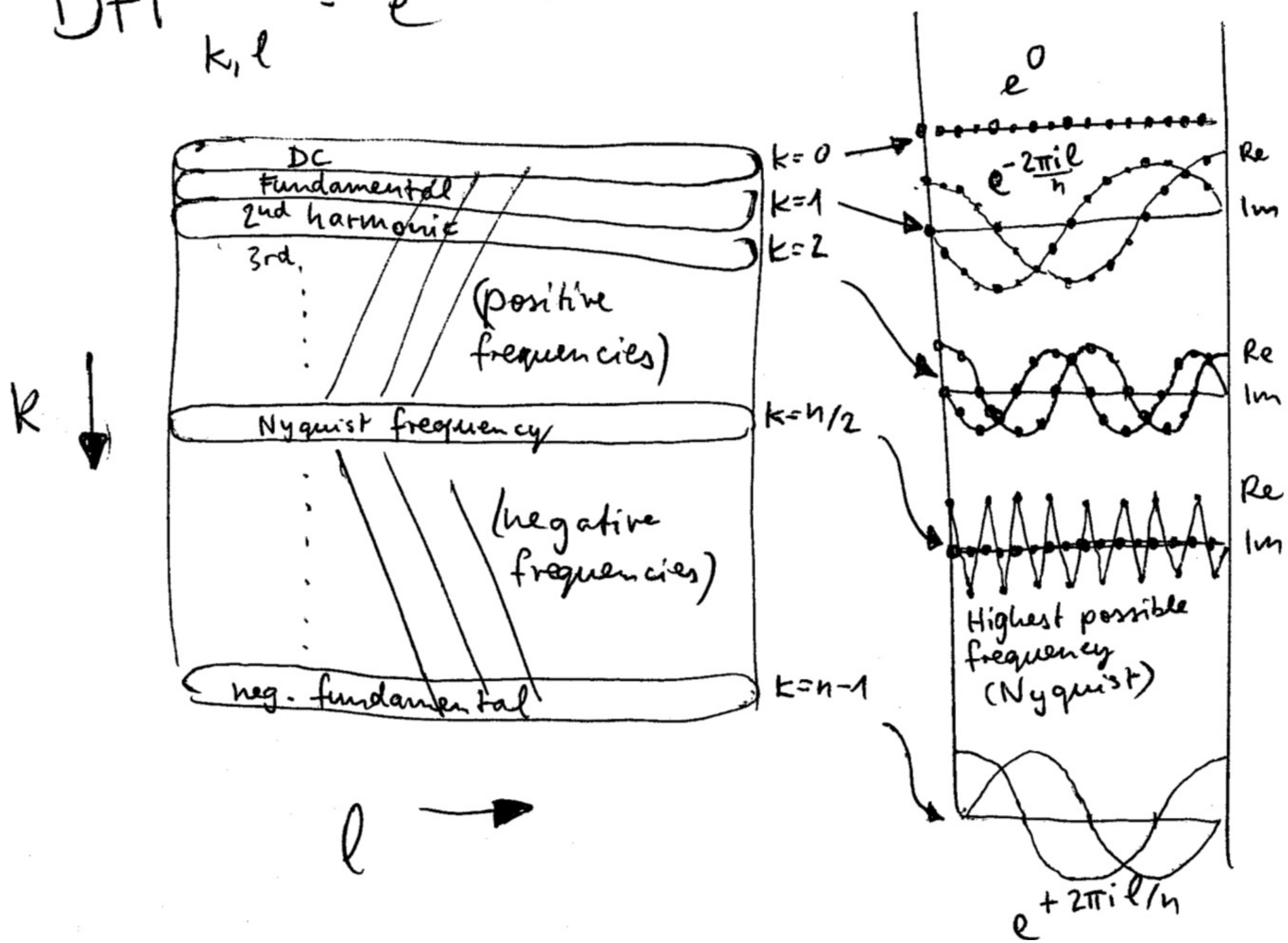
$$\hat{x}_k = \sum_{l=0}^{n-1} x_l \, e^{-\frac{2\pi i k l}{n}} \qquad \text{(DFT)}$$

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{x}_l \, e^{\frac{2\pi i k l}{n}} \qquad \text{(iDFT)}$$

Diskrete Fouriertransformation

- Betrachte DFT, iDFT als quadratische Matrizen!

$$DFT^{(n)}_{k,l} = e^{-\frac{2\pi i k l}{n}}$$



Bestandsaufnahme

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}}$$

"Primal domain"
"Time domain"
"Spatial domain"

$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \hat{x}_l \, e^{\frac{2\pi ikl}{n}}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} dt$$

"Fourier domain"
"Frequency dom."

$$\hat{x}_k = \sum_{l=0}^{n-1} x_l \, e^{-\frac{2\pi ikl}{n}}$$

(kontinuierlich, periodisch)

(diskret)

Animation von Lucas V. Barbosa
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier_transform_time_and_frequency_domains.gif

UNIVERSITÄT BONN

Was bleibt zu tun?

1. $\sin, \cos$ loswerden mit Eulerformel
2. Diskrete Signale
3. Nichtperiodische Signale

Von periodischen zu nichtperiodischen Funktionen

$$f_{(T)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt$$

Lassen wir $T \to \infty$ gehen:

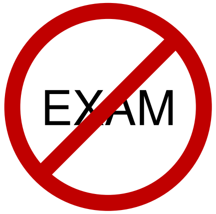
$$\lim_{T\to\infty} f_{(T)}(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tilde{t}) e^{-\frac{2\pi i k \tilde{t}}{T}} d\tilde{t} \right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tilde{t}) e^{-\frac{2\pi i k}{T}(\tilde{t}-t)} d\tilde{t} \right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tilde{t}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i k}{T}(\tilde{t}-t)} \frac{1}{T} d\tilde{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{t}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \nu (\tilde{t}-t)} d\nu \, d\tilde{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{t}) e^{-2\pi i \nu \tilde{t}} d\tilde{t}}_{=F(\nu)} \, e^{2\pi i \nu t} d\nu$$



Fourier-Paare

- $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$ Frequenzraum
- $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$ Zeitraum

$\mathcal{F}^{-1}$ $\mathcal{F}$

Prominente Fourier-Paare:

$f(t)$	$F(\nu)$	
1	$\delta(\nu)$	Konstante – Diracpuls
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	${}^{1}\!/_{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - {}^{k}\!/_{T})$	Kamm (comb/shah)
$\mathrm{rect}(t)$	$\sin(\nu)/\nu$	Rechteck – sinc
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\pi/\alpha}\, e^{-(\pi\nu)^2/\alpha}$	Gaußfunktion

Eigenschaften der Fouriertransformation

Primal domain	Fourier domain	Name
$\alpha f + \beta g$	$\alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$	Linearität
$(f * g)(x)$ $(f \cdot g)(x)$	$\left(\hat{f} \cdot \hat{g}\right)(\nu)$ $\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\nu)$	**Faltungssatz** **(convolution theorem)**
$f(\alpha x)$	${}^{1}/_{\lvert\alpha\rvert}\, \hat{f}\left({}^{\nu}/_{\alpha}\right)$	Skalierung
$f(x, y)$	$\mathcal{F}_y\left(\mathcal{F}_x(f)\right)$	Separierbarkeit (1)
$f(x) g(y)$	$\hat{f}(\nu_x) \hat{g}(\nu_y)$	Separierbarkeit (2)
${}^{d^n f(x)}/_{dx^n}$	$(2\pi i \nu)^n \hat{f}(\nu)$	Ableitungen

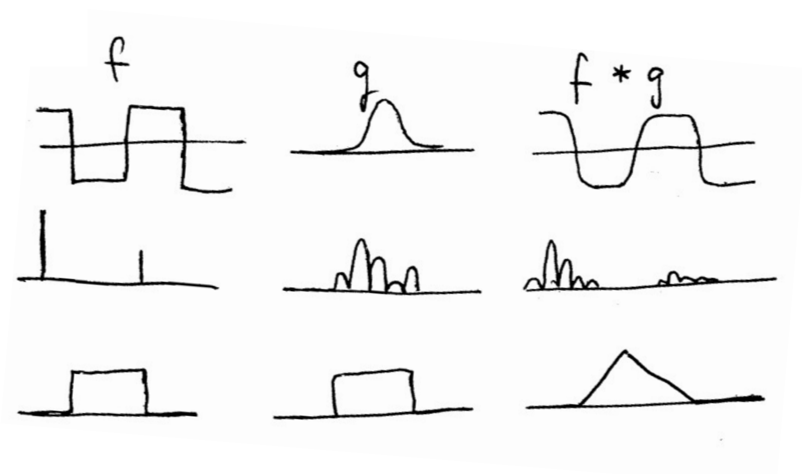
Faltung / Convolution

Wenn hier "+" steht: "Kreuzkorrelation"

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{t})g(t - \tilde{t})d\tilde{t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tilde{t})g(\tilde{t})d\tilde{t}$$

Faltung "schmiert" eine Funktion mit der anderen aus.
Beispiele:



(Faltung mit Gaussfunktion glättet Kanten)

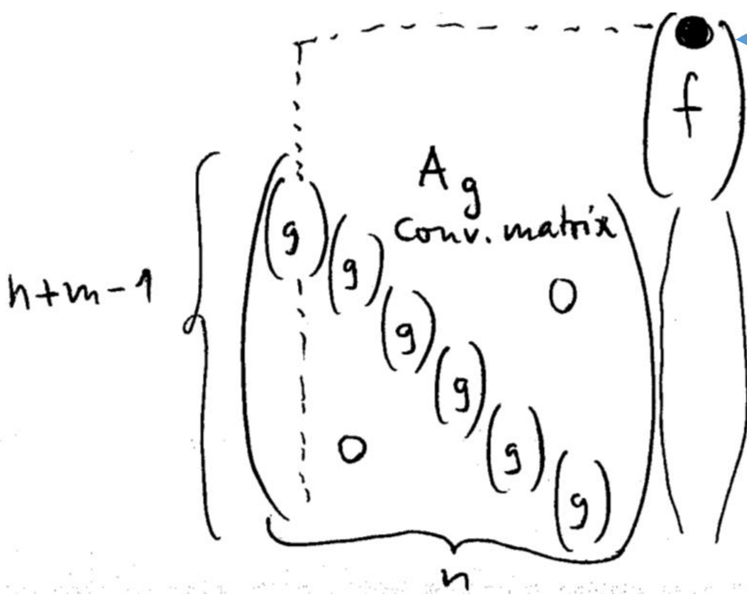
(Faltung mit Deltafunktionen erzeugt Kopien)

Faltung auf Vektoren

- Faltung funktioniert analog auf Vektoren. Sie kann dann als Matrix-Vektor-Multiplikation ausgedrückt werden:

$$f = (f_1, \dots, f_n)^\top, g = (g_1, \dots, g_m)^\top$$

$$(f * g)_i = \sum_j f_j g_{i-j+1} = A_g f$$



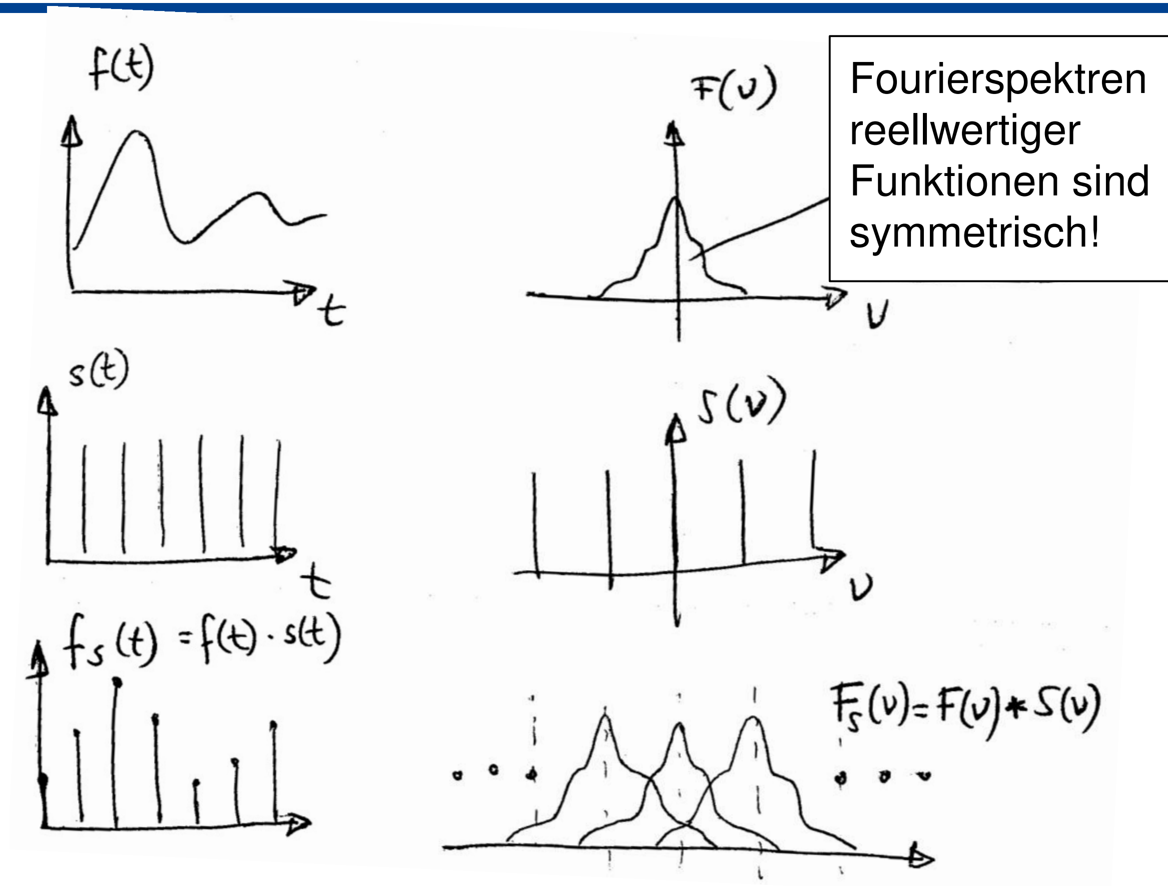
Jeder Eintrag in f erzeugt eine verschobene + skalierte Kopie von g

Abtastung und Rekonstruktion

Kontinuierliches Signal

Abtastfunktion

Abgetastetes (diskretisiertes) Signal



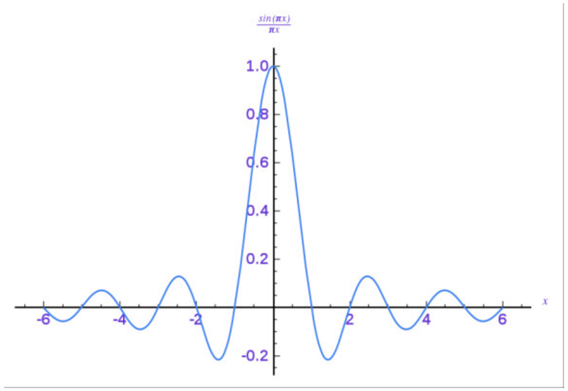
Abtastung erzeugt **Kopien** des Frequenzspektrums unseres Signals.

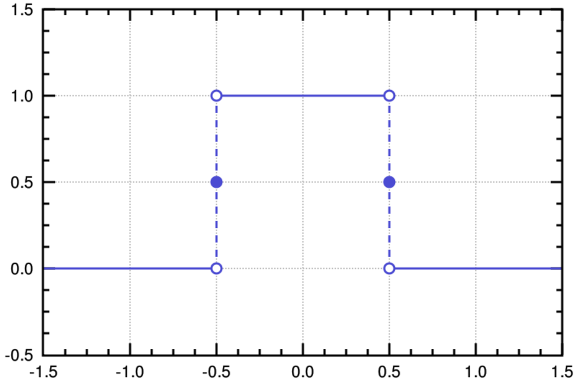
Nyquist/Shannon Abtasttheorem: Wenn ein Signal mit mindestens der doppelten maximalen darin enthaltenen Frequenz abgetastet wird, überlappen diese Kopien nicht und das **Signal kann perfekt rekonstruiert werden**.

Abtastung und Rekonstruktion

Verbleibende Aufgaben

1. Angenommen, das Signal ist bandbegrenzt. Wie rekonstruieren wir es?
   - Multipliziere mit Rechteckfenster im Fourierraum $\Leftrightarrow$ falte mit sinc im Zeitraum



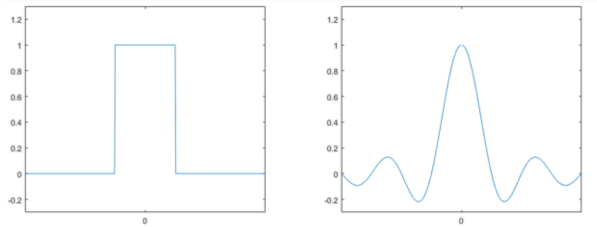


   - Problem: sinc hat unendlichen Träger – benötige unendlich viele Stützstellen zur Rekonstruktion eines einzigen Funktionswerts

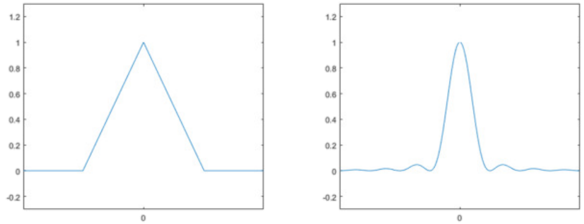
Rekonstruktionsfilter und ihre Frequenzspektren

Time domain — Fourier

- "Nearest Neighbor" (rect) — sinc



- Lineare Interpolation $(\mathrm{rect} * \mathrm{rect})$ — sinc^2



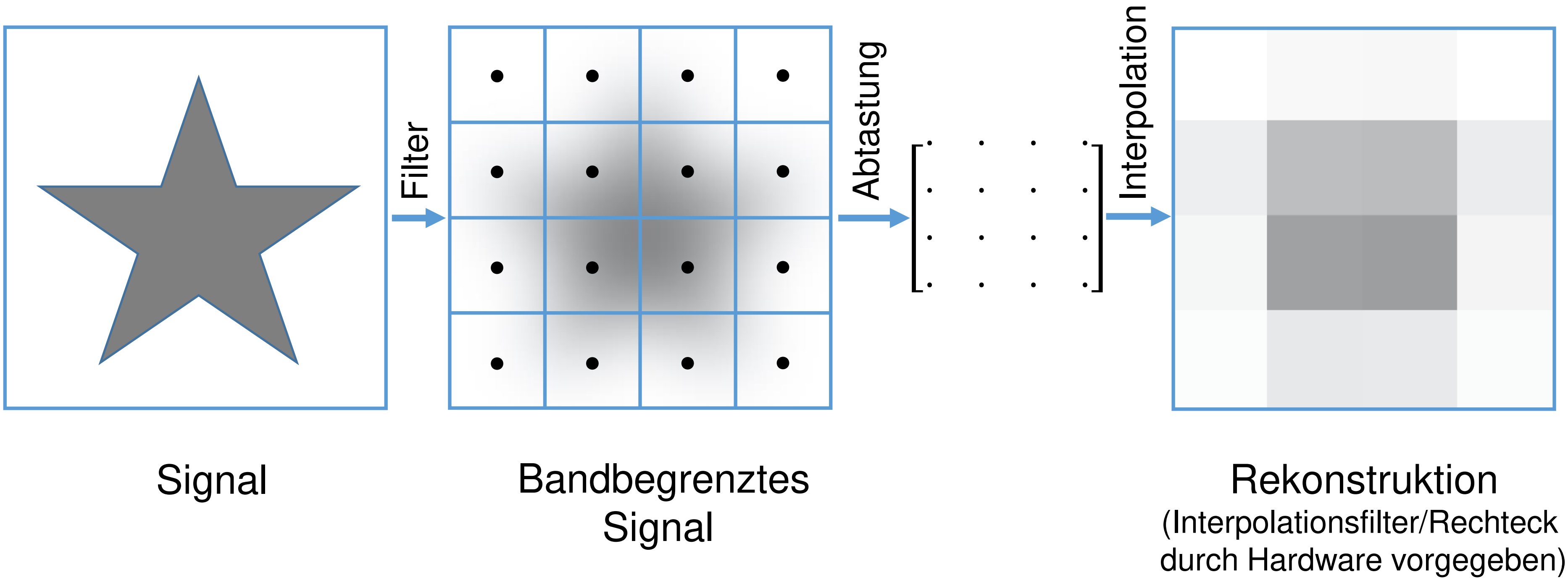
- Kubisch (Mitchell-Netravali), Gauß, Lanczos, ...,

Abtastung und Rekonstruktion

2. Wie begrenzen wir die Bandbreite eines Signals?
   - Falte mit Tiefpassfilter **vor** Abtastung (z.B. elektrisch, optisch)

Abtastung und Rekonstruktion

Von der realen (oder virtuellen) Welt auf unseren Bildschirm



Prä-Aliasing ↔ **Post-Aliasing**