0

Relationen / Abbildungen

Paar Beziehungen ✓. Formale Definition ✓ Wichtige / interessante Relation ✓

$n \in \mathbb{N}$

$$\equiv_n := \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a,b \text{ haben bei Division mit } n \text{ den gleichen Rest } r \in \{0,1,2,\dots,n-1\} \}$$

$a \equiv_n b$ "a kongruent zu b modulo n"

Wohldefiniert ?

(Direkt:) $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

1

Beweis: Z.z.: a hat eindeutige Darstellung $a = k \cdot n + r$

$k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$a \in \mathbb{Z}$ liegt eindeutig irgendwo

$[(k-1)n, kn), [\dots), [-2n, -n), [0, n), [2n, 3n), (\dots], [(k-1)n, kn), [\dots$ ← disjunkte Abdeckung!

1. Fall $a \geq 0$, $k \geq 1$

$(k-1)n \leq a < k \cdot n$

$0 \leq r = a - (k-1)n = \underbrace{(a - k \cdot n)}_{<0} + n < n$

eindeutig und $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $\square$

2. Fall $a < 0$, $k < 0$

$(k-1)n \leq a < kn$

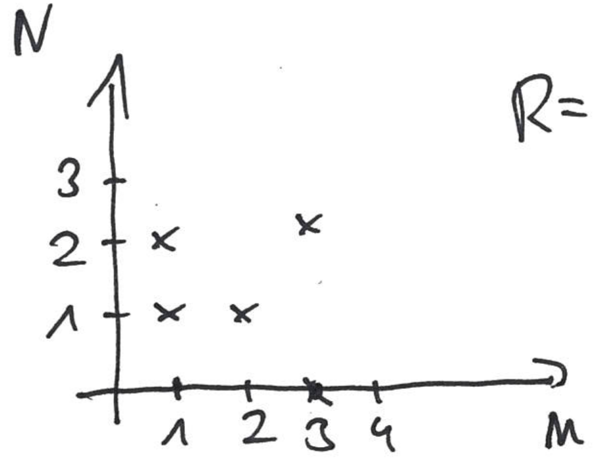
genauso! $\longrightarrow$ $l = (k-1)$ $r = a - (k-1)n$

$\dots 12 \equiv_5 7 \equiv_5 2 \equiv_5 -3 \equiv_5 -8 \dots$

②

5. $| := \{(v,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : v \cdot c = w\}$

6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),\dots\}$

Darstellung!

7. M Menge "$\subseteq$" Relation auf $P(M)$

8. $\{(P_1,P_2,P_3) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ liegen auf einer Geraden $\}$

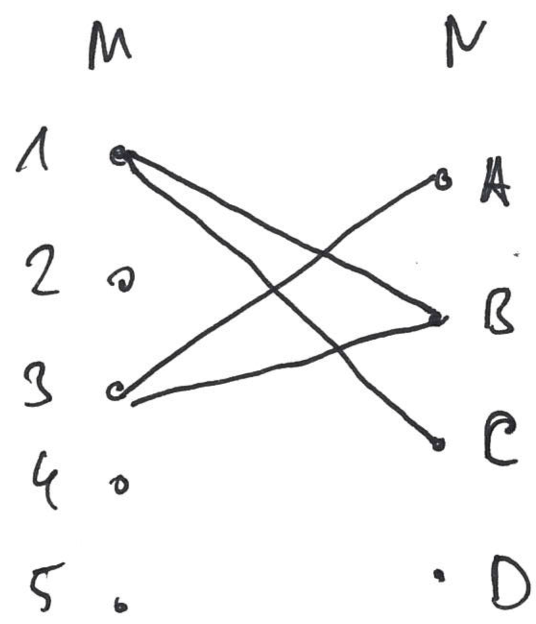
9. $\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_3 + d = 0\}$

Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$

10. <u>Häufig</u>: Binäre Relation v. Endliche Mengen!

③

<u>Darstellung</u>:



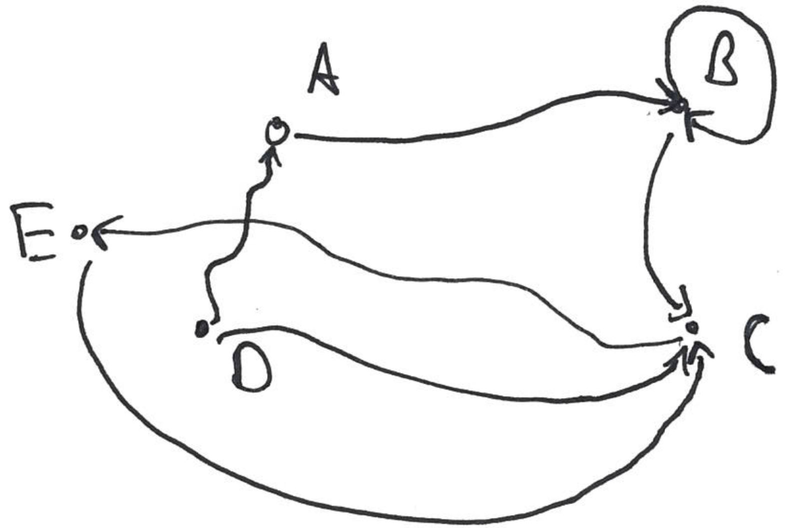
bipartiten Graph

$\{(1,B),(1,C),(3,A),(3,B),\ldots\}$

$\longrightarrow$ Ordnung!

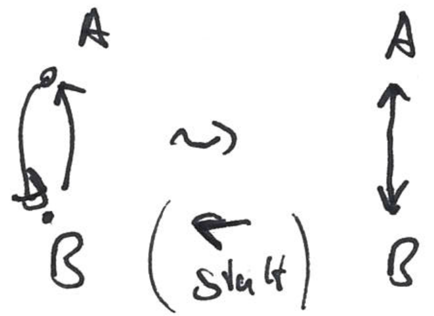
11. $M = N$ endlich!

„gerichteter Graph"



<u>Darstellung</u>

$R = \{ (A,B), (B,B), (C,E), (E,C), \ldots \}$



(5)

<u>Definition 2.11</u> Sei R binäre Relation auf M.

a) R <u>reflexiv</u> $:\Leftrightarrow \forall a \in M : aRa$

b) R <u>symmetisch</u> $:\Leftrightarrow \forall a,b \in M: (aRb \Rightarrow bRa)$

c) R <u>antisymmetisch</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall a,b \in M: ((aRb \wedge bRa) \Rightarrow (a=b))$$

$R = \{(a,a),(a,b)\}$ $R = \{(a,a)\}$ symmetisch und antisymmetisch

$P_1 := \{ \dots$

d) R <u>transitiv</u> $:\Leftrightarrow \forall a,b,c \in M: ((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRc))$.

e) R Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetisch, und transitiv

BSP

1. "$<$" auf $\mathbb{R}$

<u>nicht symmetrisch</u> $1<2$, $2<1$ $\lightning$

<u>nicht reflexiv</u> $1<1$ $\lightning$

<u>transitiv</u> $a<b<c \Rightarrow a<c$

$((a<b$ und $b<a) \Rightarrow a=b)$ <u>antisymmetrisch</u> $f.a.$!

2. "$\leq$" <u>reflexiv</u> $a \leq a \ \forall a \in \mathbb{R}$

$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow (a=b)$

3. "$\equiv_n$" Äquivalenzrelation!

<u>reflexiv</u>, <u>symmetrisch</u>, <u>transitiv</u>

4. "$\subseteq$" auf $P(M)$ <u>refl.</u>, <u>transitiv</u>, <u>antisymmetrisch</u>

Bedeutungen in der Graph-Darstellung

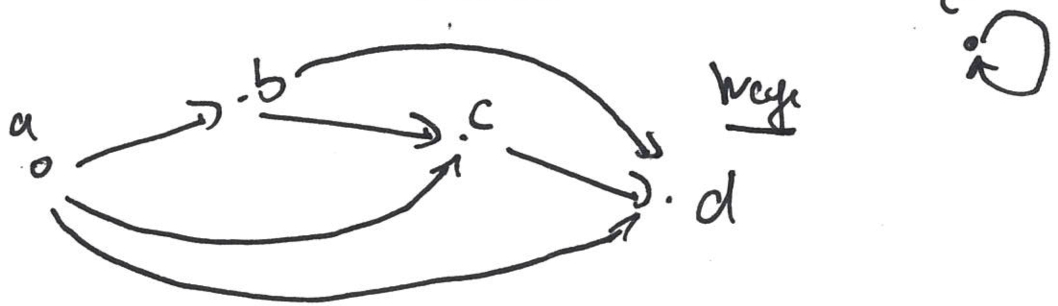
(7)

reflexiv $\Rightarrow$ stets Schlingen

symmetrisch $\Rightarrow$ Schlingen oder Doppelpfeile

antisymmetrisch $\Rightarrow$ keine Dopppfeile

transitiv $\Rightarrow$ es ex. Abkürzungen von gerichteten Wegen



2.4.2 Abbildungen . Spezielle Relationen

Bekannt durch reellwertige Funktionen

Vorschrift für ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\mathbb{R}$

$T \subseteq \mathbb{R}$

Jedem $x \in T$ wird ein $y \in \mathbb{R}$ eindeutig zugeordnet

Definition 2.12: A, B Mengen. Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt Abbildung (Funktion) falls gilt:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$.

Schreibweise/Notation: $f: A \to B$ „f ist Abbildung von A nach B"

9

1. Für jedes $a \in A$ bezeichnet $f(a)$ das eindeutige Element $b \in B$. <u>Schreibweise</u>: $f(a) = b$

"a wird auf b abgebildet"
$\overset{\shortparallel}{f(a)}$

$f: A \to B$ A, B Mengen

<u>auch</u>:

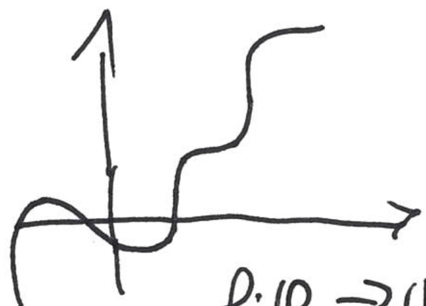
2. A heißt <u>Definitionsbereich von f</u> (Definitionsmenge)
   B heißt <u>Wertebereich von f</u> (Zielbereich, Zielmenge)

3. $f(A) := \{ b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b \} \subseteq B$
   ~~Also~~ heißt das "<u>Bild von A unter f</u>"
   $A' \subseteq A$ $f(A')$ "<u>Bild von A' unter f</u>"
   <u>genauso</u>

Tupel

4. $G(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$

heißt "<u>Graph von f</u>"



5. $B' \subseteq B$ $\quad f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \subseteq A$

heißt "<u>Urbild von B' unter f</u>"

<u>Notation:</u> $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Funktionsvorschrift: (Abbildungsvorschrift)

$f(a) = a^3$

$a \longmapsto a^3$

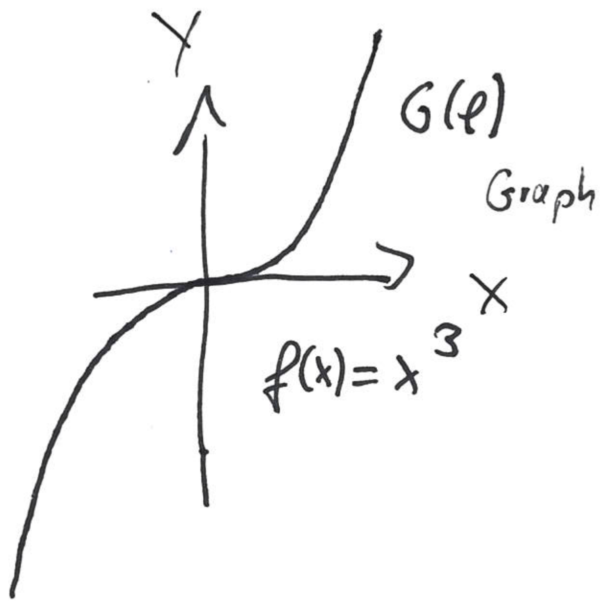
<u>zugeordnet</u>

BSP

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

$f(x) = x^3$ $\qquad f(a) = b \qquad a f b$



2. $\text{floor}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$

$\text{floor}(-1{,}2) = -2 \qquad \text{floor}(3{,}2) = 3$

3. $\text{sgn}: \mathbb{Z} \to \{0,1\}$

$x \mapsto \begin{cases} 0: & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 1: & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$ (durch 2 teilbar) ($2 | x$)

4. $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad (x, y) \longmapsto x + y$

$g(x, y) = x + y$

12

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$x \longmapsto (x, 2x)$

5. wohldefiniert? a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto$ das $y \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = x$

nicht eindeutig

$(4, 2) \mid (4, -2)$

"nur" Relation

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$

$x \longmapsto$ den kleinsten Index $n \in \mathbb{N}_0$ so dass

$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} > x$ gilt.

existiert nicht / nicht definiert bspw. für $x = 3$

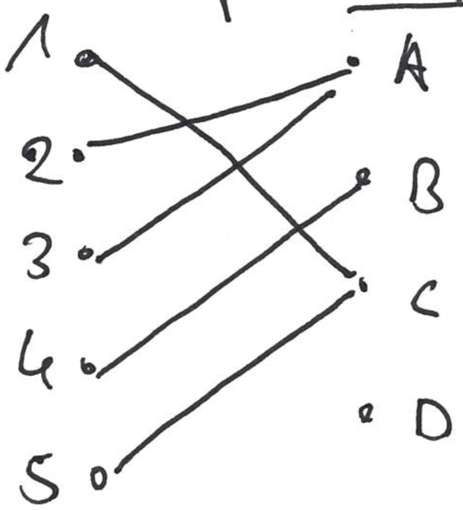
Definitionen 2.13

$f : A \to B$ Abbildung

1. f ist <u>injektiv</u> $:\Leftrightarrow \forall a, a' \in A : (f(a) = f(a')) \Rightarrow (a = a')$
2. f ist <u>surjektiv</u> $:\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
3. f ist <u>bijektiv</u> $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv,

bipartiten Graph

f <u>n. surjektiv, n. injektiv</u>



$(1,C),(5,C)$

f <u>bijektiv</u>