(0)

Szenarien für das Urnenmodell

n Elemente, k Ziehungen

Zurücklegen \ Reihenfolge	Ohne	Mit
Ohne	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Mit	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Multimenge!

verschiedener Möglichkeiten

Daraus auch Wahrscheinlichkeiten ableiten!

Lotto: 1 Tipp 6 Zahlen WS von exakt 4 Richtigen!

Urnenmodell

Ohne Reihenfolge
Ohne Zurücklegen

Ziehe 6 aus 49!

(1)

Fester Tipp 6 Zahlen

$$WS = \frac{\text{positive Fälle}}{\text{alle Fälle}} = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \cong 0.0009 \in [0,1]$$

(alle gleich WS)

⌜0.09 pro 100⌟

alle 4 elementigen Teilmengen einer 6 elementigen Menge

alle 6 elementigen Teilmengen einer 49 elementigen Menge

Für jede 4 elementige Teilmenge des Tipps, ergänze den Tipp mit 2 Elementen, die nicht zum (ganzen) Tipp gehörten 49-6 = 43 Möglichkeiten, daraus 2 auswählen $\binom{43}{2}$.

iii) <u>Geburtstagsparadoxon</u>

Party mit 23 Gästen:

Wie wahrscheinlich ist es, dass 2 Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben?

<u>Antwort</u> > 50 %?

<u>Ann:</u> Keine Schaltjahre! 23 Personen unterscheidbar!

<u>1-23 Gäste</u>!

<u>Trick</u>: <u>Komplement</u>! Wie ws. ist es, dass gilt: keine zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag?

(3)

Personen: $1, 2, 3, \ldots, 23$

$M = \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$

Geburtstage der 23 Personen als Vektor $(7, 8, 7, \ldots, 225) \in M^{23}$

365^{23} viele verschiedene Geburtstagsvektoren!

Wie viele davon haben komplett verschiedene Einträge?

\# verschiedener solcher Möglichkeiten $\frac{n!}{(n-k)!}$ ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

$$WS \hat{=} \frac{\#\text{ positiven Fälle}}{\#\text{ aller Fälle}} = \frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}} \hat{=} 0.493 \hat{=} 49{,}3\,\%$$

⌜49,3 pro 100⌟

<u>Komplement:</u> $1 - 0.493 > 0{,}5$

Vorsicht WS!

$$\frac{\#\ \text{pos Fälle}}{\#\ \text{alle Fälle}} \quad !?$$

↑ alle gleich WS!

(P_1, P_2) Wie wahrscheinlich ist es, dass beide im gleichen Halbjahr Geburtstag haben?

H1, H2 mit gleicher WS

P_1	P_2		Vektor (H_1 H_2) verwenden?
H1	H1	1.	(2,0)
H2	H2	2.	(0,2)
H1	H2	3.	(1,1)
H2	H1		(1,1)

3. Möglichkeiten, wie sich Geburtstage verteilen!

„Falsche" Modellierung!

(5)

Geburtstagsparadoxon

Alternativer Ansatz: Vektor mit 365 Einträgen:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{365})$$

$$\sum_{i=1}^{\overset{n}{365}} x_i = \underset{k}{23}$$

Alle Möglichkeiten wie sich 23 Geburtstage verteilen:

$$(1, 0, 4, 1, \ldots, 0)$$

\# verschiedener solcher Vektoren

$$\binom{n+k-1}{k} \leftarrow \underline{\text{Tabelle}}$$

Positive Fälle

23 Positionen sind mit 1 belegt:

$$\Big(\underset{\Uparrow}{\overset{x_1}{\_\_}},\ \overset{x_2}{\_\_},\ \underset{\Uparrow}{\overset{x_3}{\_\_}},\ \_\_,\ \underset{\Uparrow}{\overset{x_i}{\_\_}},\ \ldots,\ \underset{\Uparrow}{\overset{x_{365}}{\_\_}} \Big)$$

k-Auswahl

$\binom{n}{k}$ viele solcher Vektoren (Tabelle)

6

$$\text{"WS"} \overset{?}{=} \frac{\binom{365}{23}}{\binom{365+23-1}{23}} \quad ↯ \text{ Falsch!}$$

← nicht alle gleich WS.

$(23, 0, \ldots 0)$ ist nicht so WS wie $(2, 0, 7, 1, \ldots, 0)$

$\ulcorner$ $(2, 0)$ ist nicht so WS wie $(1, 1)\lrcorner$

iv) <u>Würfeln</u> Wahrscheinlichkeiten

5 Würfel $\{1,1,1,2,5\}$

$(1,2,1,1,5)$ $(1,1,1,2,5)$ 2 Würfel eine Multimenge!

$252 = \binom{n+k-1}{k}$ viele verschiedene Multimengen! Vorsicht!

<u>1 Wurf, Straße, wie WS</u> ? $\overset{\text{I.}}{\{1,2,3,4,5\}}$ $\overset{\text{II.}}{\{2,3,4,5,6\}}$

$\leadsto \dfrac{2}{252}$

6^5 verschiedene Tupel insgesamt

ohne alle gleiche WS

Wieviele Tupel repräsentieren nun I und II ?

z.B. $(1,2,4,3,5)$ $(2,3,4,1,5)$ $5!$ viele verschiedene <u>Permutationen</u>!

$$\text{WS} \cong \frac{\#\text{ pos. Fälle}}{\#\text{ alle Fälle}} = \frac{\overset{\text{I. + II.}}{\downarrow}\; 2 \cdot 5!}{6^5} \cong 0.0308 \simeq 3.1\,\%$$

4.3 Algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper)

Rechenregeln, beruhen auf Axiomen, mussten bewiesen werden

Beweise dafür führen für neue Konstrukte! dann beliebig anwendbar!

$\mathbb{R}, +, \circ, -,$: bei reellen Zahlen

$\oplus_n, \odot_n$ auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}$

<u>Definition 4.15</u>: Eine Abbildung $\circ : M \times M \to M$ $\ulcorner (M, \circ) \lrcorner$

für Menge M heißt <u>Verknüpfung</u> auf M.

Diese heißt:

assoziativ $:\Longleftrightarrow \forall a,b,c \in M \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

kommutativ $:\Longleftrightarrow \forall a,b \in M \quad a \circ b = b \circ a$

$\circ(a,b) = \circ(b,a)$

<u>Statt</u>: $\circ(a,b)$ Schreibweise $a \circ b$ $\quad +(1,3)\,,\ 1+3$

Reihenfolge wichtig!

BSP 1) $\mathbb{R}$ Addition, Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

<u>Division</u>, $b : a$ $\ulcorner a | b \lrcorner$ $\quad :(b,a) := x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \cdot a = b$

<u>keine</u> Verknüpfung auf $\mathbb{R}$

<u>nicht</u> definiert für $b \neq 0$ und $a = 0$.

(10)

2) $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad *(x,y) := x$

$\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \perp(x,y) := -x-y$

	2.	1.
$*$	ass.	n. komm.
$\perp$	komm.	n. ass.

Bew: 1. $*(1,2) = 1 \neq 2 = *(2,1)$

2. $\underbrace{*(*(a,b),c)}_{((a \circ b) \circ c)} \underset{\text{Def. } *}{=} *(a,b) \underset{\text{Def. } *}{=} a \underset{\text{Def. } *}{=} *(a,b) \underset{\text{Def. } *}{=} \cancel{*(a,*(b,c))}$ $\quad *(a,*(b,c))$

3) X Menge

$\mathrm{Abb}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ Abbildung} \}$

$\circ : \mathrm{Abb}(X) \times \mathrm{Abb}(X) \to \mathrm{Abb}(X)$ $\quad (\mathrm{Abb}(X), \circ)$

Komposition von Abbildung

$\circ(f,g) := f \circ g$

$(f,g) \mapsto \underline{f \circ g} : X \to X$

mit $a \mapsto f(g(a))$

$(f \circ g)(a) := f(g(a))$

$\circ$ assoziativ ?

$f, g, h \in \mathrm{Abb}(X) \qquad \circ(\circ(f,g),h) \overset{?}{=} \circ(f,\circ(g,h))$

$$\forall a \in X \quad \circ(\circ(f,g),h)(a) \underset{\text{Def}}{=} \circ(f,g)(h(a)) \underset{\text{Def.}}{=} f(\underline{g}(h(a))) \underset{\text{Def.}}{=} f(\circ(g,h)(a)) \underset{\text{Def.}}{=} \circ(f,\circ(g,h))(a)$$

Ausgezeichnete Elemente

Definition 4.16: (neutrales Element)

Sei $\circ$ Verknüpfung auf M (also $(M,\circ)$)

$e \in M$ heißt neutrales Element für $\circ$

falls gilt $\quad e \circ a = a = a \circ e \quad \forall a \in M.$