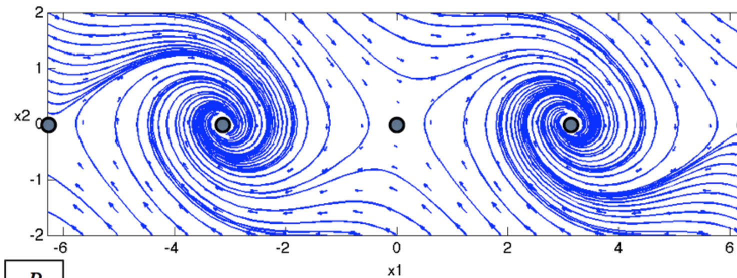
Grundlagen der Robotik

9. Zustandsrückführung

Prof. Sven Behnke

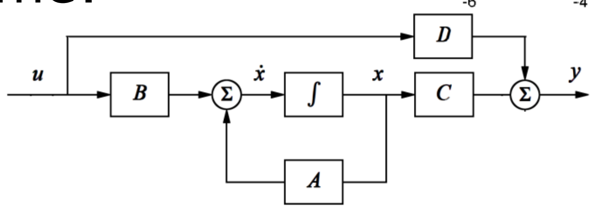
Letzte Vorlesung

- Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in höherdimensionalen Zustandsräumen
- Fixpunkte: $\dot{x}_e = F(x_e) = 0$



- Stabilität
  - Lineare Systeme:

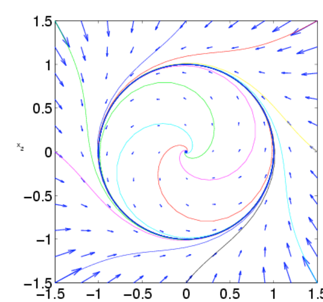
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$



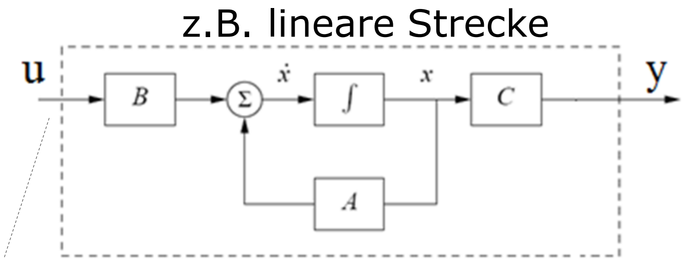
$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall\, \lambda_i \in \lambda(A)$$

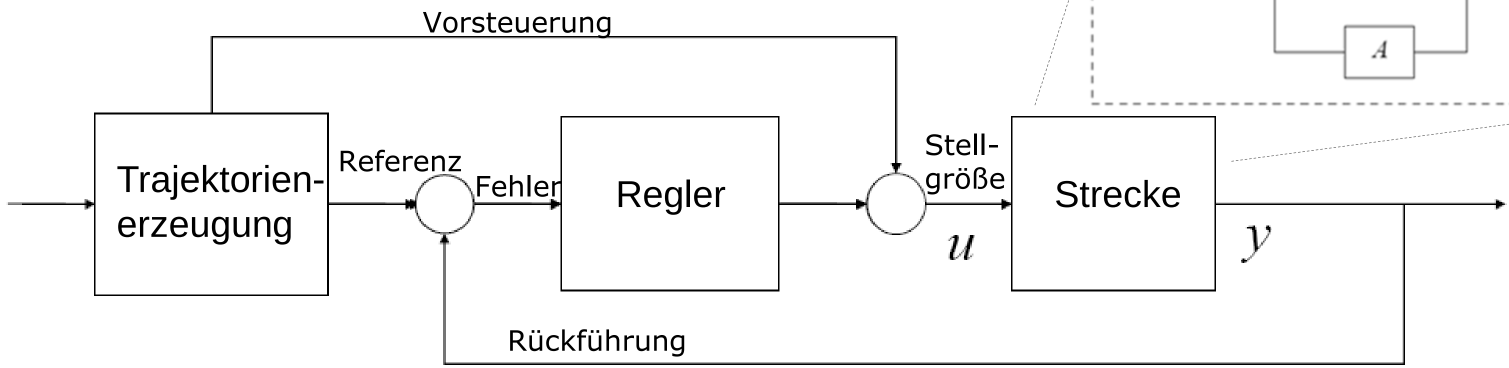
  - Nichtlineare Systeme:
    Linearisiere um den Fixpunkt herum!
  - Stabilitätsanalyse mit Ljapunow-Funktion
  - Einzugsgebiet
- Periodische Attraktoren / Grenzzyklen
  - Invariante Menge

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \;\; \forall\, t \in R$$



Erinnerung: Regler





Gestalte Regler so, dass

i) System stabil ist

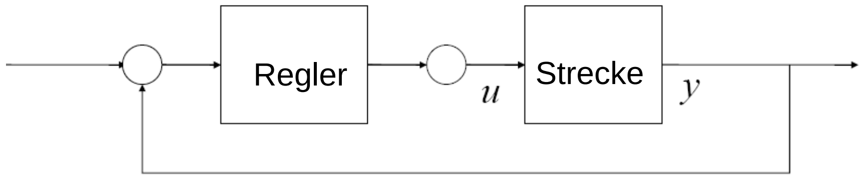
ii) Performanz:

- Halte System auch bei Störungen im Gleichgewicht (Rückweisung von Störungen)
- Bewege das System in einen gewünschten Zustand (folge der Referenz)

iii) Robustheit gegenüber Modellfehlern

[Karl Johan Aström und Richard M. Murray: Feedback Systems]

Fragen



$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Kann das Kontrollsignal u die Dynamik beeinflussen?

  Bsp.: $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$ => u kann x_2 nicht ändern

  Äquivalent zur Frage, ob ein u existiert, dass es erlaubt, jeden Punkt des Zustandsraums zu erreichen

➔ **Steuerbarkeit** linearer Systeme hängt von A und B ab

➔ Wichtig für die Auslegung von **Zustandsrückführung**

- Enthält die Messung y genug Information über das System?

  Bsp: $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$ $\quad y = x_1$ => x_2 nicht aus y bestimmbar

➔ **Beobachtbarkeit** linearer Systeme hängt von A und C ab

➔ Wichtig für die Auslegung von **Beobachtern**, die den Systemzustand aus Messungen schätzen

Steuerbarkeit von IO-Systemen

- Gegeben: $$\dot{x} = f(x,u) \qquad x \in \mathrm{R}^n, x(0)$$ $$y = h(x,u) \qquad u \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}$$
- **Definition:** Ein IO-System ist **steuerbar**, wenn für alle $x_0, x_f \in \mathrm{R}^n$ und jede Zeit $T > 0$ ein Kontrollsignal $u: [0,T] \to R$ existiert, das den Systemzustand von $x(0)=x_0$ nach $x(T)=x_f$ bewegt.

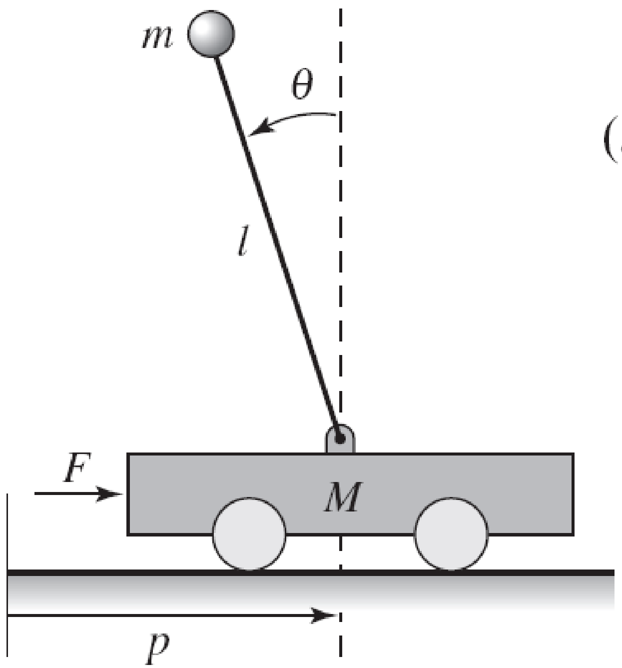
  Bemerkungen:
  - System muss nicht in x_f bleiben
  - Steuerbarkeit hängt nicht von der Ausgabe y ab

- Für lineare Systeme existiert ein einfacher **Steuerbarkeitstest:** $$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, \ x(0)$$ $$y = Cx + Du \quad u \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}$$

  Steuerbar gdw. **Steuerbarkeitsmatrix hat vollen Rang**

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Beispiel: Linearisiertes Pendel auf Wagen



$$(M+m)\ddot{p} - ml\cos\theta\,\ddot{\theta} = -c\dot{p} - ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + F$$
$$(J+ml^2)\ddot{\theta} - ml\cos\theta\,\ddot{p} = -\gamma\dot{\theta} + mgl\sin\theta$$

Frage: Können wir lokal den Zustand des Systems durch geeignete Wahl der Stellgröße F steuern?

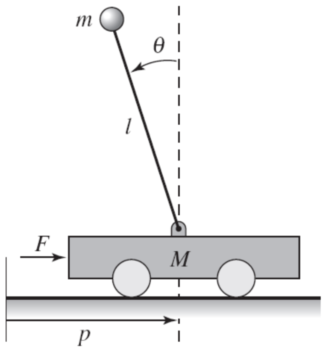
Ansatz: Approximiere die Systemdynamik für kleine Winkel θ durch ein lineares System.

- Vereinfachung: $c = \gamma = 0$
- Linearisiere um Fixpunkt: $x_e = (p, \theta = 0, \dot{p} = 0, \dot{\theta} = 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2l^2g/\mu & 0 & 0 \\ 0 & M_t mgl/\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t/\mu \\ lm/\mu \end{bmatrix}$$

$$\mu = M_t J_t - m^2 l^2,\ M_t = M + m \qquad J_t = J + ml^2$$

Beispiel: Linearisiertes Pendel auf Wagen II



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2 l^2 g/\mu & 0 & 0 \\ 0 & M_t m g l/\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t/\mu \\ lm/\mu \end{bmatrix}$$

- Steuerbarkeitsmatrix:

$$W_r = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & J_t/\mu & 0 & g l^3 m^3/\mu^2 \\ 0 & lm/\mu & 0 & g l^2 m^2 (m+M)/\mu^2 \\ J_t/\mu & 0 & g l^3 m^3/\mu^2 & 0 \\ lm/\mu & 0 & g^2 l^2 m^2 (m+M)/\mu^2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathrm{B} & \mathrm{AB} & \mathrm{A^2B} & \mathrm{A^3B} \end{array} \end{array}$$

$$\det(W_r) = \frac{g^2 l^4 m^4}{(\mu)^4} \neq 0$$

➔ Linearisiertes System ist steuerbar!

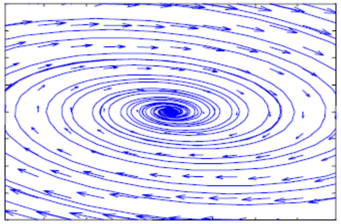
Konzepte zur Regelung

- **Systembeschreibung**: Eine Eingabe, eine Ausgabe, Zustandsraum

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad x \in \mathrm{R}^n, x(0)$$
$$y = h(x,u) \qquad u \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}$$

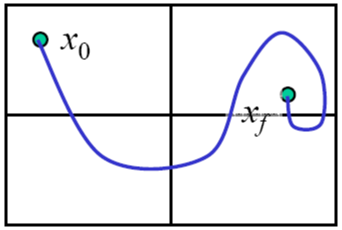
- **Stabilität**: Stabilisiere das System um Fixpunkt
  - Für gegeben Fixpunkt $x_e \in \mathrm{R}^n$, finde Regelungsverhalten $u=\alpha(x)$ so, dass

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e \text{ for all } x(0) \in \mathrm{R}^n$$



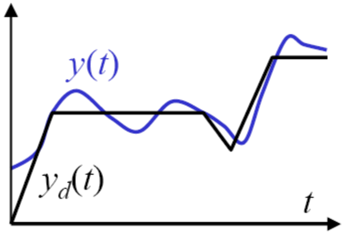
- **Steuerbarkeit**: Bringe das System in einen Zustand
  - Gegeben $x_0, x_f \in \mathrm{R}^n$, finde Kontrollaktionen u(t), sodass

$\dot{x} = f(x,u(t))$ das System in x_f bringt: $x(t_0) = x_0 \to x(T) = x_f$

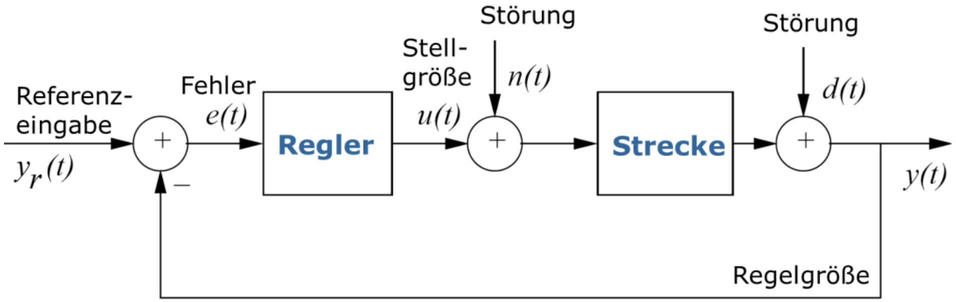


- **Folgeverhalten**: Folge einer Trajektorie
  - Gegeben $y_d(t)$, finde $u=\alpha(x,t)$ sodass

$$\lim_{t\to\infty} \left(y(t) - y_d(t) \right) = 0 \text{ for all } x(0) \in \mathrm{R}^n$$



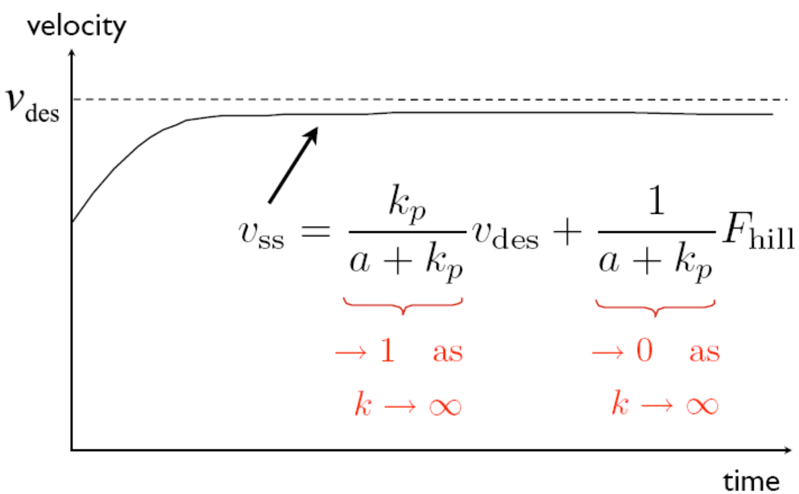
Proportional-Regler (P-Regler)



$$u(t) = k_p e(t)$$

$$m\dot{v} = -av + F_{\text{eng}} + F_{\text{hill}}$$

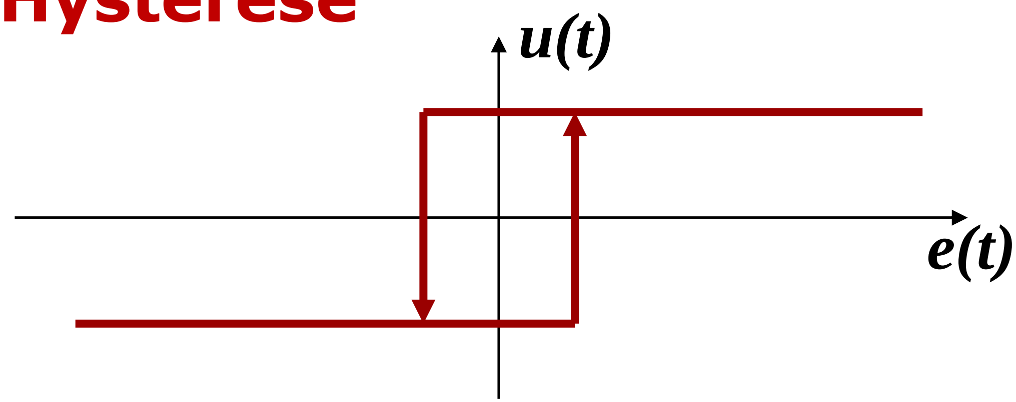
$$F_{\text{eng}} = k_p(v_{\text{des}} - v)$$



- **Stabilität & Performanz**
  - Geschwindigkeit nähert sich der Sollgeschwindigkeit an wenn $k_p \to \infty$
  - Bei kleinem k_p: glatte Antwort, kein Überschwingen, keine Oszillationen
- **Rückweisung von Störungen**
  - Auswirkung von Störungen (z.B. Steigungen) geht gegen Null wenn $k_p \to \infty$
- **Robustheit**
  - Qualitatives Verhalten hängt nicht von spezifischen Werten a, m *oder* k_p ab, wenn k_p groß genug gewählt wird

P-Regler: Analyse

- Fehler werden kleiner, wenn Proportionalfaktor k_p steigt
- Grenzwert: Unendlich hohe Verstärkung.
  ➔ Linearer Regler wird zum Zweipunkt-Regler
- **Problem**: Schnelle Oszillationen
- Idee: **Hysterese**

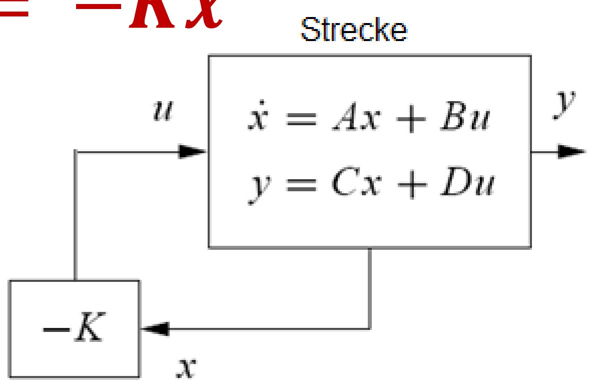


  - Verhindert schnelle Schwingungen zwischen den Ausgabezuständen

  ➔ Grenzzyklen: Regelgröße oszilliert um den Referenzwert

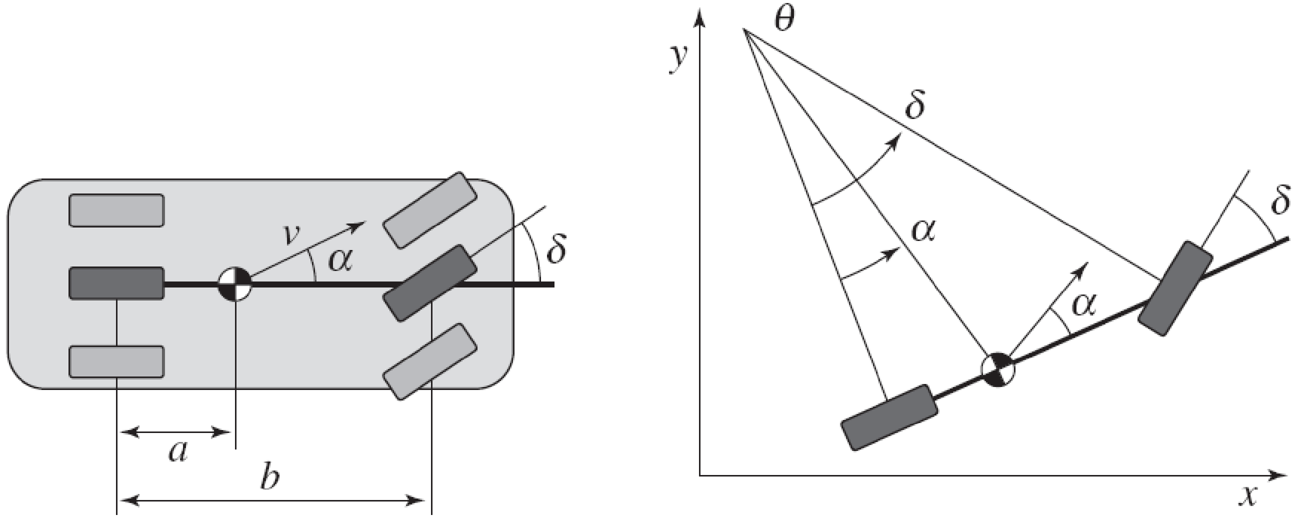
Zustandsrückführung für Lineare Systeme

- Gegeben: $\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ x(0)$
  $y = Cx + Du \qquad u \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$
- Ziel: Finde ein Reglerverhalten $\boldsymbol{u = -Kx}$ *so*, dass das Feedbacksystem
  $$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$
  am Nullpunkt $x_e = 0$ stabil ist



  Bemerkungen
  - Stabilität hängt von Eigenwerten ab
    => wähle K so, dass $(A - BK)$ stabil ist
  - Performanz hängt auch von Eigenwerten ab
- Frage: Wann können wir jeden gewünschten Eigenwert erzeugen?
- Antwort: Genau dann, wenn (A, B) steuerbar ist

Beispiel: Fahrzeuglenkung



- Vereinfachte Dynamik der seitlichen Abweichung $x_1 \approx y$ und der Richtung $x_2 = \theta$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \gamma = a/b$$

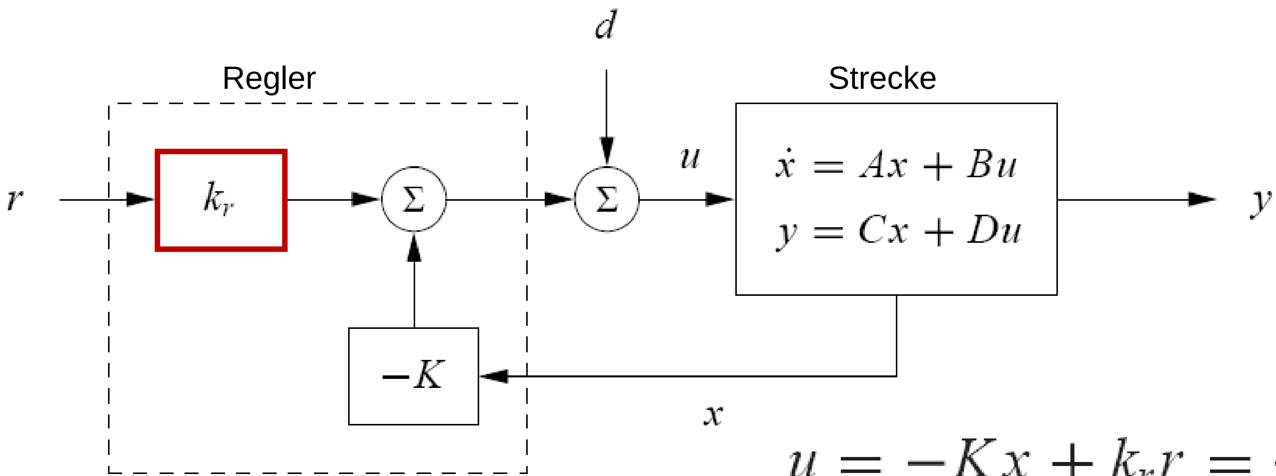
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

- Steuerbarkeitsmatrix: $W_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Steuerbar, weil $\det W_r = -1 \neq 0$

Beispiel: Fahrzeuglenkung II

- Folge einer Referenz r durch Zustandsrückführung:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$u = -Kx + k_r r = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_r r$$

- Resultierende Dynamik des Gesamtsystems:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BK)x + Bk_r r = \begin{bmatrix} -\gamma k_1 & 1 - \gamma k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \gamma k_r \\ k_r \end{bmatrix} r$$

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Berechne Eigenwerte mit charakteristischem Polynom:

$$\det(sI - A + BK) = \det \begin{bmatrix} s + \gamma k_1 & \gamma k_2 - 1 \\ k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (\gamma k_1 + k_2)s + k_1$$

Beispiel: Fahrzeuglenkung III

- Gewünschtes charakteristisches Polynom:

$$p(s) = s^2 + 2\zeta_c\omega_c s + \omega_c^2$$

- Wahl der Feedback-Gainfaktoren: $s^2 + (\gamma k_1 + k_2)s + k_1$

$$k_1 = \omega_c^2, \qquad k_2 = 2\zeta_c\omega_c - \gamma\,\omega_c^2$$

- Fixpunkt und eingeschwungene Ausgabe:

  Ansatz: $0 = (A - BK)x_e + Bk_r r$

  ➔ $x_e = -(A - BK)^{-1}Bk_r r, \qquad y_e = Cx_e + Du_e$

- Um Referenz r zu erreichen:

$$k_r = -1/\left(C(A - BK)^{-1}B\right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$k_r = k_1 = \omega_c^2$$

- Reglerverhalten:

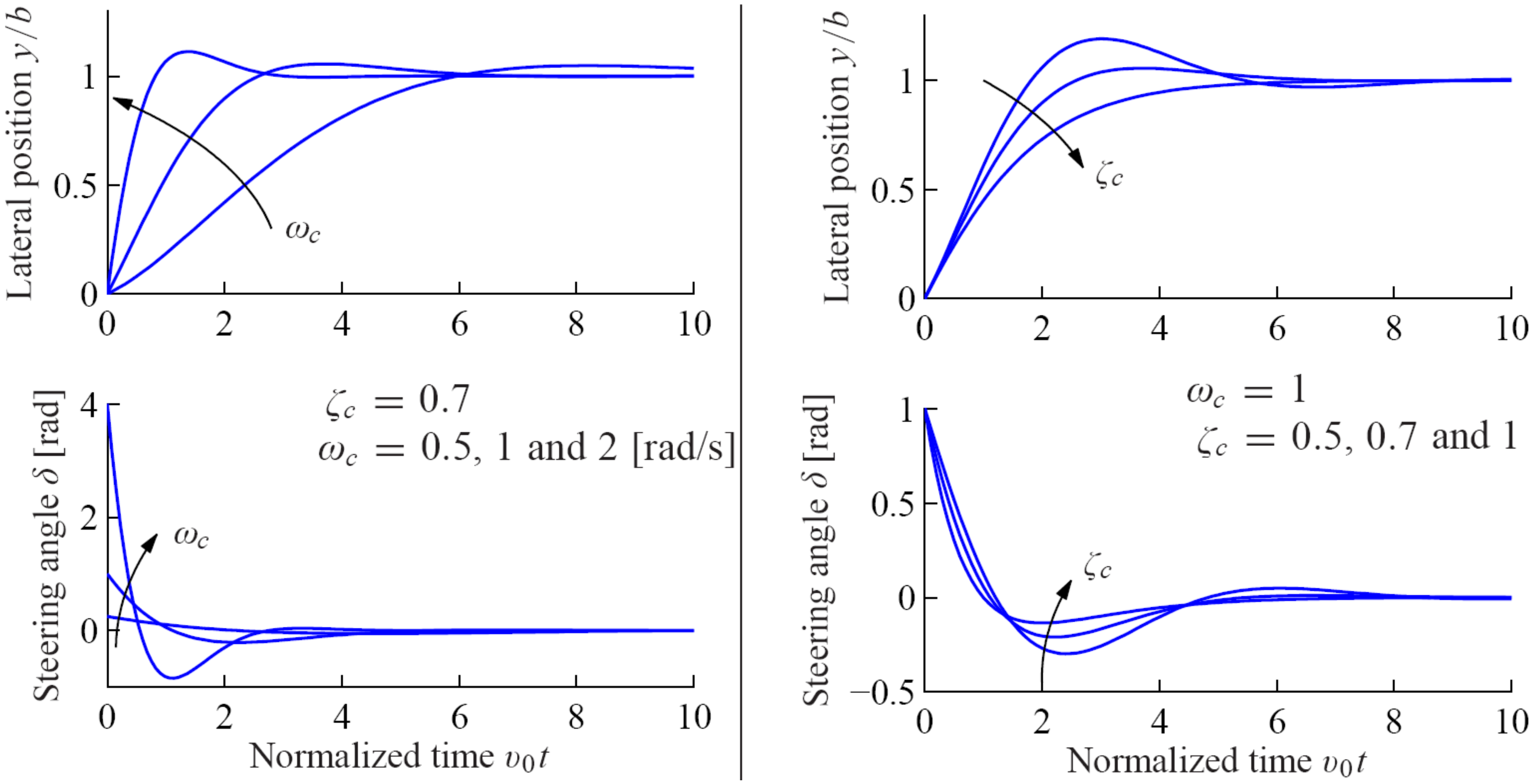
$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 + k_r r$$

$$u = k_1(r - x_1) - k_2x_2 = \omega_c^2(r - x_1) - (2\zeta_c\omega_c - \gamma\,\omega_c^2)x_2$$

Proportional **Dämpfung** **➔ PD-Regler**

Fahrzeuglenkung: Antwort auf Stufenfunktion

$$u = \omega_c^2(r - x_1) - (2\zeta_c\omega_c - \gamma\,\omega_c^2)x_2$$



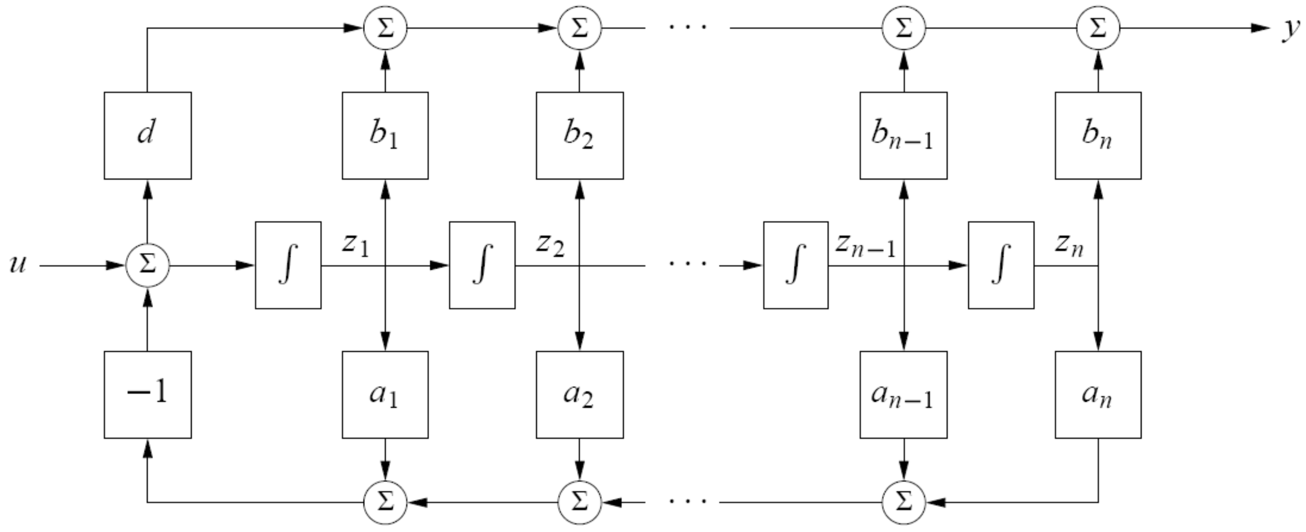
Normalform zur Steuerung

- Koordinatenänderung durch Transformation T: $\boldsymbol{z = Tx}$
- Normalform:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix} z + du.$$

- Block-Diagram:



Normalform zur Steuerung

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix} z + du.$$

- Charakteristisches Polynom:

$$\lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

- Steuerbarkeitsmatrix (voller Rang):

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 & \cdots & * \\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation in die Normalform

- Gegeben A, B ergibt die Nutzung der Transformation T:

$$z = Tx \qquad \tilde{A} = TAT^{-1}, \qquad \tilde{B} = TB$$

- Steuerbarkeitsmatrix: $\tilde{W}_r = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{B} &= TAT^{-1}TB = TAB \\
\tilde{A}^2\tilde{B} &= (TAT^{-1})^2 TB = TAT^{-1}TAT^{-1}TB = TA^2B \\
&\vdots \\
\tilde{A}^n\tilde{B} &= TA^nB
\end{aligned}$$

$$\tilde{W}_r = T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = TW_r$$

- Nach T auflösen: $T = \tilde{W}_r W_r^{-1}$

Beispiel für Transformation

- Gegeben: Lineares System $$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
- Gesucht: Normalform $$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Bestimmung der Koeffizienten aus charakt. Polynom:

$$\lambda(s) = \det(sI - A) = s^2 - 2\alpha s + (\alpha^2 + \omega^2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_1 &= -2\alpha, \\ a_2 &= \alpha^2 + \omega^2 \end{aligned}$$

- Steuerbarkeitsmatrix:

$$W_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformation:

$$T = \tilde{W}_r W_r^{-1} = \begin{bmatrix} -(a_1 + \alpha)/\omega & 1 \\ 1/\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/\omega & 1 \\ 1/\omega & 0 \end{bmatrix}$$

- Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tx = \begin{bmatrix} \alpha x_1/\omega + x_2 \\ x_2/\omega \end{bmatrix}$$

Kanonische Zustandsrückführung

- Open-Loop:
$$\frac{dz}{dt} = \tilde{A}z + \tilde{B}u = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \tilde{C}z = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} z.$$
  - Charakteristisches Polynom: $\lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$
- Regler: $u = -\tilde{K}z + k_r r = -\tilde{k}_1 z_1 - \tilde{k}_2 z_2 - \cdots - \tilde{k}_n z_n + k_r r$
- Closed-Loop:
$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 - \tilde{k}_1 & -a_2 - \tilde{k}_2 & -a_3 - \tilde{k}_3 & \dots & -a_n - \tilde{k}_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} k_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} z.$$
  - Charakteristisches Polynom:
$$s^n + (a_1 + \tilde{k}_1)s^{n-1} + (a_2 + \tilde{k}_2)s^{n-2} + \cdots + (a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1})s + a_n + \tilde{k}_n$$
  - Gewünschtes Polynom: $p(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_{n-1}s + p_n$
- Wähle K: $\tilde{k}_1 = p_1 - a_1, \quad \tilde{k}_2 = p_2 - a_2, \quad \dots \quad \tilde{k}_n = p_n - a_n$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \cdots & p_n - a_n \end{bmatrix} \qquad k_r = \frac{a_n + \tilde{k}_n}{b_n} = \frac{p_n}{b_n}$$

Zuweisung von Eigenwerten

- Lineares System: $\dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du$
- Koordinatentransformation in die Normalform: $z = Tx$
- Regler: $u = -\tilde{K}z + k_r r = -\tilde{K}Tx + k_r r$
- Wenn (A, B) steuerbar, existiert ein Regler $u = -Kx + k_r r$ mit charakteristischem Polynom:

$$p(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_{n-1}s + p_n$$

- Ackermann-Formel:

$$K = \tilde{K}T = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 & p_2 - a_2 & \cdots & p_n - a_n \end{bmatrix} \tilde{W}_r W_r^{-1}, \qquad k_r = \frac{p_n}{a_n}$$

$$W_r = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \qquad \tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

- Für einfache Systeme: Bestimme die Gainfaktoren k_i durch Berechnung des charakteristischen Polynoms $\lambda(s) = \det(sI - A + BK)$ und Gleichsetzung der Koeffizienten mit den gewünschten

Regler mit Integralteil

- **Problem:** Zustandsrückführung erreicht gewünschte Ausgabe nur bei genauer Kalibrierung des Referenz-Gains k_r
- **Idee**: Integriere Fehler in zusätzlicher Zustandsdimension z:

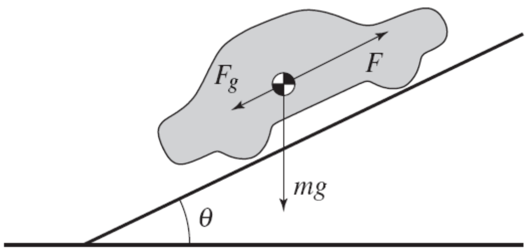
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ y - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ Cx - r \end{bmatrix}$$

- Wenn das System eingeschwungen ist, dann ist $\dot{z} = 0$ und daher $y = r$
- Zustandsrückführung: $u = -Kx - \underline{k_i z} + k_r r$
- Fixpunkt: $x_e = -(A - BK)^{-1} B(k_r r - \underline{k_i z_e})$
- Fixpunkt z_e, der den Ausgabefehler Null macht, wird erreicht, wenn das System stabil ist

$$\dot{z} = y - r = 0$$

PI-Regler Beispiel: Tempomat

- Linearisierte Dynamik um Fixpunkt: v_e, u_e



$$\frac{dx}{dt} = ax - b_g\theta + bw, \qquad y = v = x + v_e$$

$$x = v - v_e,\ w = u - u_e$$

- Zustand erweitert durch Integrator:

$$\frac{dx}{dt} = ax - b_g\theta + bw, \qquad \frac{dz}{dt} = y - v_r = v_e + x - v_r$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -b_g \\ 0 \end{bmatrix}\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ v_e - v_r \end{bmatrix}$$

- Regler mit Zustandsrückführung:

$$w = -k_p x - k_i z + k_r v_r$$

- Wähle Gain-Faktoren k_p, k_i und k_r so, dass System stabil ist und Referenz folgt!

Beispiel: Tempomat II

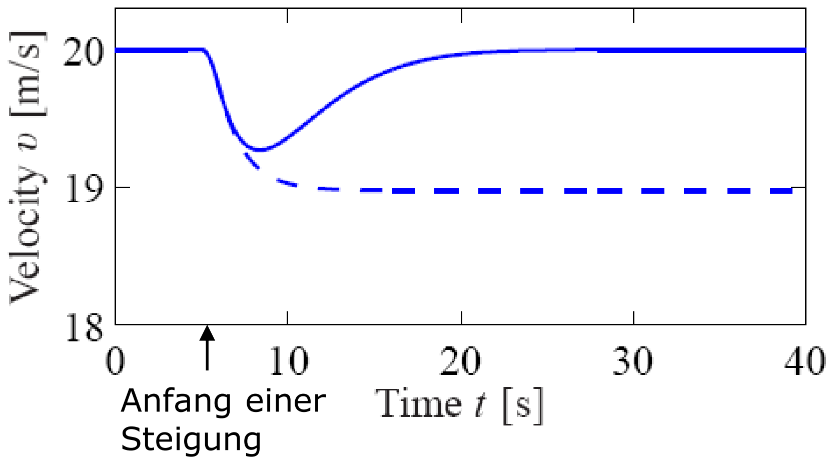
- Gewünschtes charakteristisches Polynom:

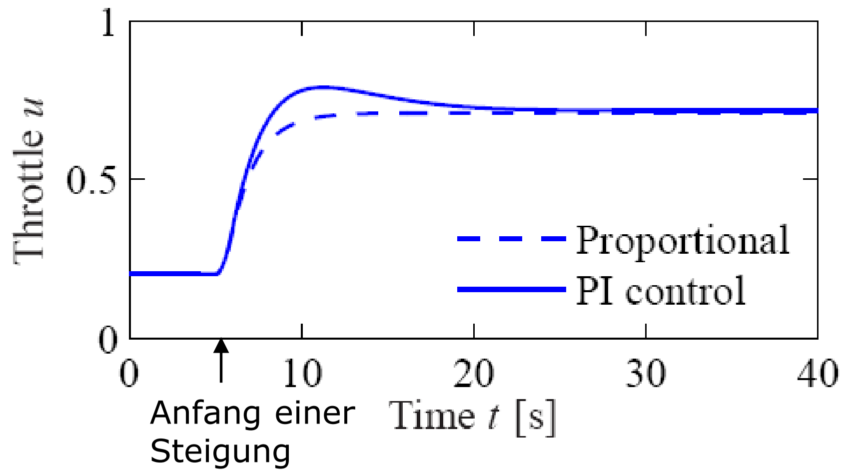
$$\lambda(s) = s^2 + a_1 s + a_2$$

- Mit Störung $\theta = 0$:

$$\det\bigl(sI - (A - BK)\bigr) = s^2 + (bk_p - a)s + bk_i$$

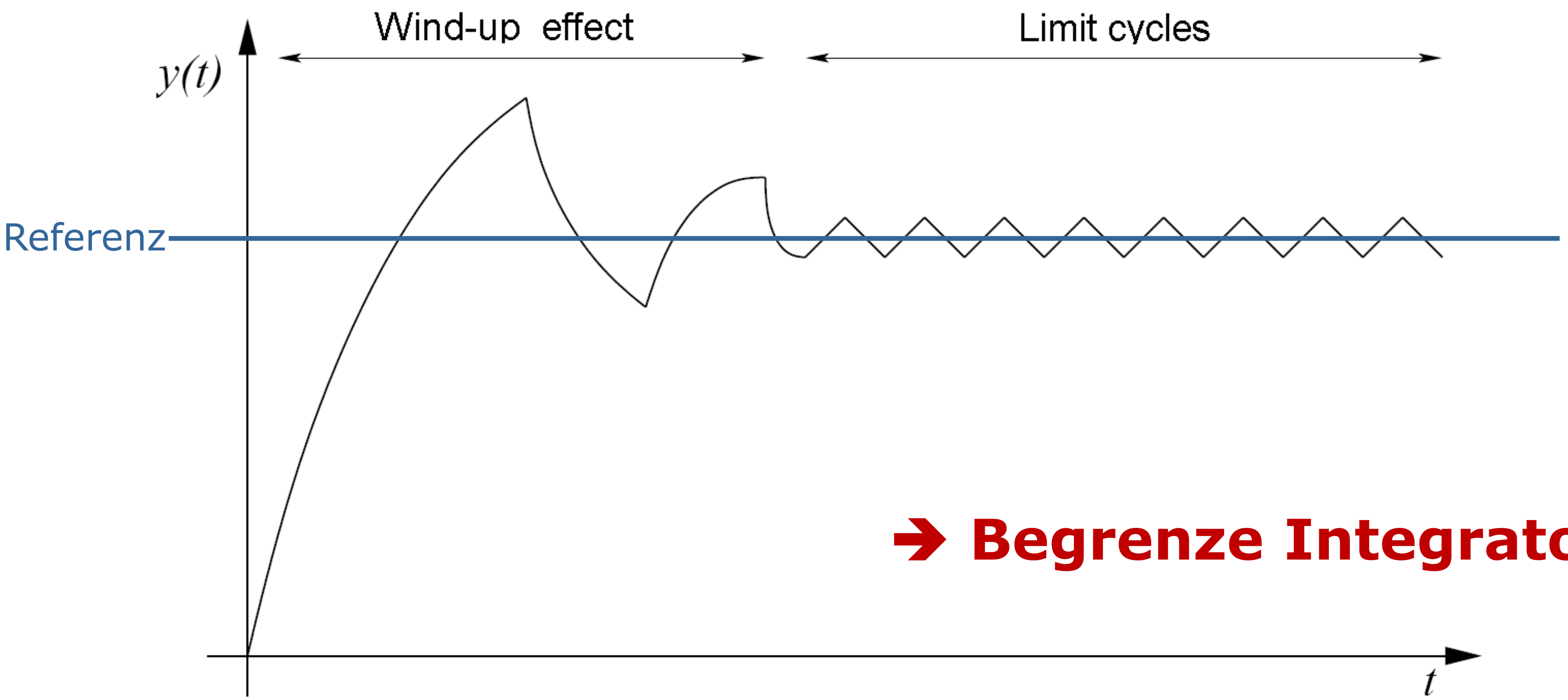
$$k_p = \frac{a_1 + a}{b}, \qquad k_i = \frac{a_2}{b}, \qquad k_r = -1/\bigl(C(A - BK)^{-1}B\bigr) = \frac{a}{b}$$





Wind-up-Effekt

- Stellgröße $u(t)$ ist begrenzt => Nichtlinearität
- Integrator akkumuliert Regelabweichung $e(t)$
- Überschwingen



➔ **Begrenze Integrator!**