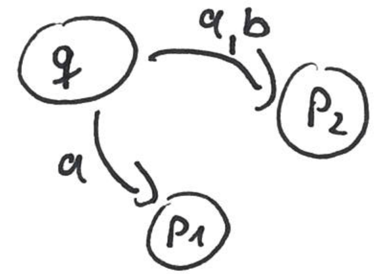
0

Theorem 3.11 Zu jeden NFA mit n Zuständen existiert ein DFA mit 2^n Zuständen, die die gleiche Sprache entscheidet.

Konstruktion (Beweis) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bel. **NFA** $|Q| = n$

$M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$

NFA



$Q' = P(Q)$

$\delta' := Q' \times \Sigma \rightarrow Q' \qquad (q, a) \longrightarrow \bigcup_{p \in q} \delta(p, a)$

$F' := \{ q \in P(Q) \mid q \cap F \neq \emptyset \}$

$q_0' := \{ q_0 \}$ $\qquad \underline{L(M) \overset{?}{=} L(M')}$

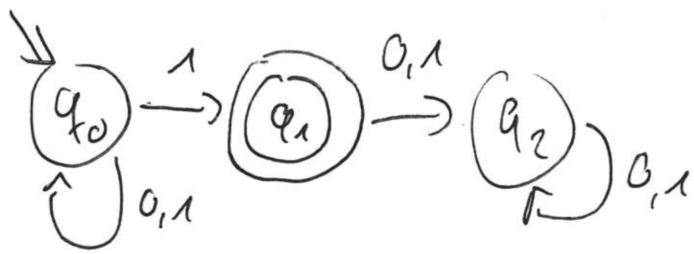
NFA: δ, δ^*

DFA: δ', δ'^*

Bsp NFA $n=1$

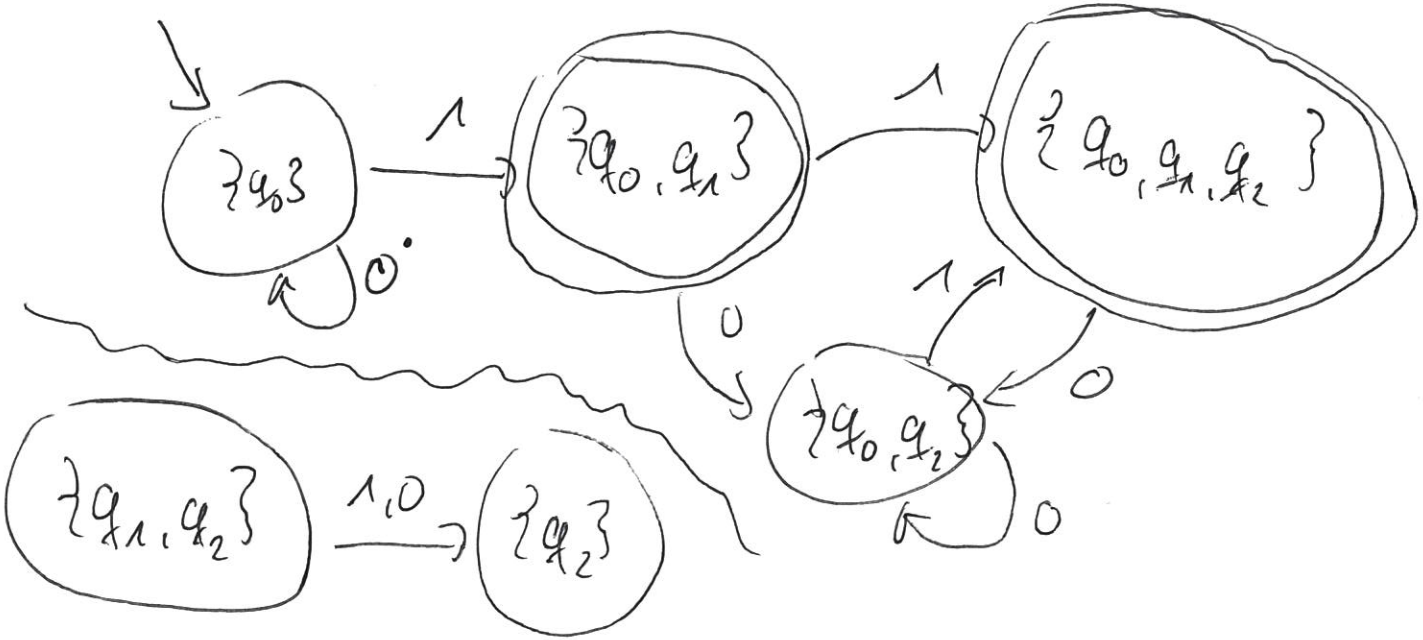
M, $\Sigma = \{0,1\}$

Letztes Zeichen ist eine 1.



DFA M'

$Q' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_0\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$



Beweis 3.11

1. Beh. $L(M) = L(M')$

2. Beh. $\forall q \in Q' : \forall w \in \Sigma^*$

$$\delta'^*(q, w) \overset{!}{=} \bigcup_{p \in q} \delta^*(p, w)$$

Beh. 2 Induktionsbeweis: über $|w|$

Ind. Anfg $|w| = 0$ $\quad w = \varepsilon$

$$\delta'^*(q, \varepsilon) \underset{\text{Def. } \delta'^*, \text{ DFA}}{=} q \underset{\text{Def. } M', \delta}{=} \bigcup_{p \in q} \{p\} \underset{\text{Def. NFA}}{=} \bigcup_{p \in q} \delta^*(p, \varepsilon)$$

Induktionsschluss: Leser/Hörer!

③

1. Beh. (Bew.) (direkt) $w \in \Sigma^*$

$$M' \text{ akzeptiert } w \underset{\text{Def. DFA } M'}{\iff} \delta'^*(q_0', w) \in F'$$

$$\underset{\text{Def. } F'}{\iff} \underbrace{\delta'^*(q_0', w)}_{\overset{\text{2. Beh.}}{=} \bigcup_{p \in q_0'} \delta^*(p, w)} \cap F \neq \emptyset \qquad q_0' = \{q_0\}$$

$$\underset{q_0' = \{q_0\}}{\iff} \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$$

$$\underset{\text{Def. NFA } M}{\iff} M \text{ akzeptiert } w$$

$\square$

NFA $\rightsquigarrow$ DFA $\quad$ n Zustände $\rightsquigarrow$ $\underline{2^n \text{ Zustände}}$

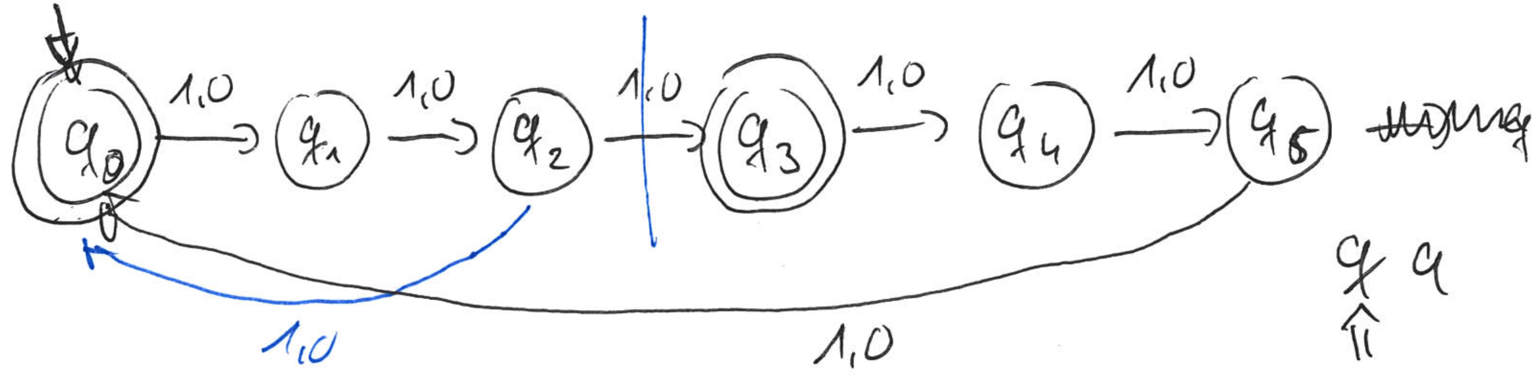
könnte notwendig sein

3.2.4 Minimierung endlicher Automaten

Ziel DFA $M \to$ DFA M' $\quad L(M) = L(M')$

M' soll weniger Zustände enthalten

Bsp $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ohne Rest durch 3 teilbar} \}$ $\quad \Sigma = \{0,1\}$



Definition 3.12 Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$p \equiv q \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall w \in \Sigma^* \left(\delta^*(p, w) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(q, w) \in F \right)$$

Äquivalenzrelation! $\underset{\checkmark}{\underline{\text{symm.}}}$ $\underset{\checkmark}{\underline{\text{refl.}}}$ $\underline{\text{transitiv}}$ ✓

$[\![p]\!] \subseteq Q$ Äquivalenzklasse von Q

<u>Definition 3.13</u> (Äquivalenzklassenautomat zu M)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA bilde $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$

derart, dass

Q' = Menge der Äquivalenzklassen

$q_0' = [\![q_0]\!]$

$F' = \{ [\![q]\!] \mid q \in F \}$

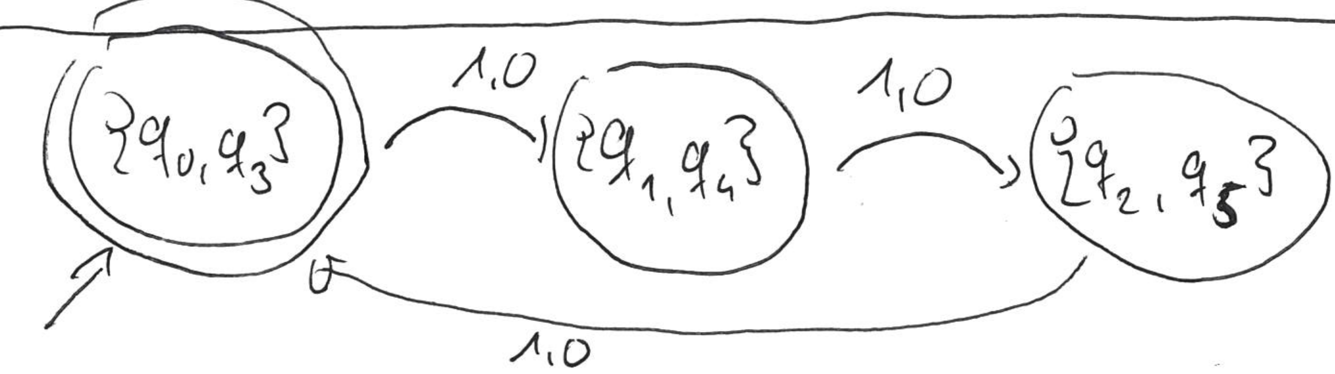
$\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ $\quad \underline{\delta'([\![q]\!], a) := [\![\delta(q,a)]\!]}$ wohldefiniert!

$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$

$Q/_{\equiv}$, $\mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z}$

Einteilung von Q in Äquivalenzklassen bezgl. "$\equiv$"

Bsp



<u>Theorem 3.14</u> M' ist wohldefiniert und es gilt $L(M) = L(M')$

<u>Theorem 3.15</u> M' ist DFA mit kleinstmöglicher Zustandsmenge der $L(M)$ entscheidet.

<u>Beweis:</u> Th. 3.14 δ' unabhängig vom Repräsentanten

z.z. $[\![p]\!] = [\![q]\!] \overset{\text{z.z.}}{\Longrightarrow} \delta'([\![q]\!], a) = \delta'([\![p]\!], a) \quad \forall a \in \Sigma$

$$\begin{array}{ccc} \delta'([\![q]\!], a) & = & \delta'([\![p]\!], a) \\ \parallel & & \parallel \\ [\![\delta(q,a)]\!] & \overset{\vee}{\doteq} & [\![\delta(p,a)]\!] \end{array}$$

$$[\![p]\!] = [\![q]\!] \underset{p \equiv q,\ \mathrm{Def.} \equiv}{\Longrightarrow} \forall w \in \Sigma^* \left(\delta^*(p, w) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(q, w) \in F \right)$$

$$\underset{w' = aw}{\Longrightarrow} \forall a \in \Sigma \left(\forall w \in \Sigma^* : \underbrace{\delta^*(p, aw)}_{= \delta^*(\delta(p,a), w)} \in F \Longleftrightarrow \underbrace{\delta^*(q, aw)}_{= \delta^*(\delta(q,a), w)} \in F \right)$$

(8)

$$\underset{\text{Def. } \delta^*, \delta}{\Longrightarrow} \quad \forall a \in \Sigma \left(\underline{\forall w \in \Sigma^* : \delta^*(\delta(p,a),w) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(\delta(q,a),w) \in F} \right)$$

$$\underset{\text{Def. } \equiv}{\Longrightarrow} \quad \forall a \in \Sigma : [\![\delta(p,a)]\!] = [\![\delta(q,a)]\!]$$

$$\underset{\text{Def. } \delta'}{\Longrightarrow} \quad \forall a \in \Sigma : \delta'([\![q]\!], a) = \delta'([\![p]\!], a)$$

<u>Akzeptiert gleiche Sprache</u> V.

~~Sei~~ $w \in \Sigma^*$ und $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ Zustandsfolge für M beim Durchlauf mit w

$$\underset{\delta'^*, \delta^*}{\Longleftrightarrow} \quad M' \text{ durchläuft Zustände } \underset{= [\![q_0']\!]}{[\![q_0]\!]}, \underset{= [\![q_1']\!]}{[\![q_1]\!]}, \underset{= [\![q_2']\!]}{[\![q_2]\!]}, \dots, \underset{= [\![q_n']\!]}{[\![q_n]\!]} \text{ für } w \in \Sigma^*$$

<u>Noch zu zeigen:</u> $[\![p]\!] = [\![q]\!] \Longrightarrow (p \in F, q \in F) \mid \underset{\text{XOR}}{\text{oder}} \; (p \notin F, q \notin F)$

Beweis dieser Aussage

$$[\![p]\!] = [\![q]\!] \overset{\text{Def} \equiv}{\Longrightarrow} \forall w \in \Sigma^* \left(\delta^*(q,w) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(p,w) \in F \right)$$

$$\underset{(w=\varepsilon)}{\Longrightarrow} \delta^*(q,\varepsilon) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(p,\varepsilon) \in F$$

$$\underset{\text{Def. } \delta^*}{\Longrightarrow} p \in F \Longleftrightarrow q \in F \quad \square$$

Aussage

<u>Zu zeigen:</u> M' ist minimal bzg. Zustandsmenge

Überflüssige Zustände entfernen!

Die von $[\![q_0]\!]$ nicht erreichbar sind.

Definition 3.16 (Nerode-Relation)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, $x, y \in \Sigma^*$

$$x \, R_L \, y \;:\Longleftrightarrow\; \forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L)$$

<u>Äquivalenzrelation</u> ✓ $\qquad \Sigma^* / R_L$

Σ^* in Äquivalenzklassen aufteilt!

Index von R_L := # Äquivalenzklassen $\qquad$ Schreibweise: $\text{index}(R_L)$

Nerode-Index

BSP $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|$ ist durch 3 teilbar $\}$ (11)

$\Sigma = \{1, 0\}$

R_L hat 3 Klassen index$(R_L) = 3$

Σ^* / R_L

$W_{3n} = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| = 3 \cdot n, n \in \mathbb{N}_0 \}$

$W_{3n+1} = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| = 3n+1, n \in \mathbb{N}_0 \}$

$W_{3n+2} = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| = 3n+2, n \in \mathbb{N}_0 \}$

A) Jeder Automat hat mindestens index(R_L) viele Zustände LB

B) M' hat maximal index(R_L) viele Zustände UB