Lineare Algebra

BA-INF-021, MB 05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 11

Präsenzaufgabe. Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Bestimmen Sie falls möglich die Inverse.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ -8 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte)**.** Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grade kleiner gleich fünf. Geben Sie die darstellende Matrix des folgenden Endomorphismus

$$f(t) \mapsto (t \cdot f(t))'$$

über dem Vektorraum V an. Ist diese Abbildung invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die darstellende Matrix der inversen Abbildung bezüglich derselben Basis.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ eine Abbildung, wobei gilt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei $B := \{b_1, b_2, b_3\}$, gegebenen durch $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Man bestimme $\mathtt{DM}_B(f) := \mathtt{DM}_{B,B}(f)$.

Aufgabe 4 (1+2+2+4 Punkte)**.** Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ gegeben. Sei weiterhin B die kanonische Basis und

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bilder Av für $v \in C$ bezüglich der Basis B.
(b) Bestimmen Sie die Bilder Av für $v \in C$ bezüglich der Basis C.
(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen T_C^B und T_B^C.
(d) Man bestimme jeweils $\mathtt{DM}_B(f)$, $\mathtt{DM}_{C,B}(f)$, $\mathtt{DM}_{B,C}(f)$ sowie $\mathtt{DM}_C(f)$.

Hinweis: Für eine Basis B ist $\mathtt{DM}_B = \mathtt{DM}_{B,B}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass für einen Vektorraum V mit Basen B und C gilt:

$$\mathrm{DM}_{B,C}(\mathrm{id}) = T_C^B.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die zwei Basen

$$B := \{e_1, e_2, e_3\} \text{ und } C := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Geben Sie die Transformationsmatrizen T_C^B und T_B^C an und berechnen Sie die Darstellung des bezüglich der kanonischen Basis gegebenen Vektors $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis C.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 30. Juni, 12:00 Uhr.