11.10.2022

(1)

2.1 Mengen

Menge: Zusammenfassung, wohlunterscheidbare Objekte

Objekte, heißen Elemente

Schreibweise / Notation $\{L, u, d, S\} = \{u, d, S, L\}$

Abkürzungen: $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$ Mengen als Objekte

$M' = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $\{\{1\}, 1, \{1, 2, 3\}\}$

Wichtige Mengen von Zahlen

Symbole verwenden für Abkürzung

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$

$\mathbb{Q} \hat{=}$ rationalen

$\mathbb{R} \hat{=}$ reellen Zahlen

Sprachgebrauch	Notation
"x Element von M"	$x \in M$
"x kein Element von M"	$x \notin M$ $\qquad \notin \quad \notin$

explizite Angabe — z.B. Symbole $\mathbb{N}$ $\quad M = \{1, 2, 7\}$

implizite Aussage — $M := \{x \in N \mid x \text{ besitzt Eigenschaft } A\}$

"ist definiert als" "für die gilt" (: statt |)

$A(x)$

BSP $\quad D := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$

$2 \mid n$ Symbol "2 teilt n"

$a, b \in \mathbb{Z}$: $\quad a \mid b :\Longleftrightarrow$ es ex. $k \in \mathbb{Z}$, so dass $a \cdot k = b$

"b ist Vielfaches von a" $\quad$ "a teilt b" $\quad$ "definitionsgemäß äquivalent"

"a ist Teiler von b"

$D = \{ n \in \mathbb{N} \mid 2 | n \}$

$P = \{ n \in \mathbb{N} \mid \underline{n \text{ ist Primzahl}} \}$

$p \in \mathbb{N} \; \Big(p \in \text{Primzahl} :\Longleftrightarrow$

$\quad p > 1 \text{ und } \big(a | p \Rightarrow (a = 1 \text{ oder } a = p) \big) \Big)$

wenn, dann

Klammern

$\mathbb{R}$ Menge der rationalen Zahlen
plus die Menge der <u>irrationalen</u> Zahlen

↳ unendlichen, nicht periodischen
Dezimalzahlen Def

<u>Symbole:</u> $\underline{\pi, e}$ $\sqrt{2}$

Grenzwerte $2 \cdot \pi$ $\quad x = \sqrt{2} :\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 2$

$\{x \mid x$ hat Eigenschaft $A\}$.

$= \{x \mid A(x)\}$ Was darf für A gelten?

$R = \{x \mid x \notin x\}$ <u>Paradoxie</u>

Frage: $R \notin R$ oder $R \in R$

<u>Multimenge:</u> $\{1, 1, 2\}$

A, B seien Mengen

$A \subseteq B$ $:\Longleftrightarrow$ jedes Element aus A ist auch Element von B

↑ Symbol

"A ist Teilmenge von B"

"B ist Obermenge von A"

"$\subseteq$" Mengeninklusion

gelegentlich "$\subset$" echte Teilmenge

$A \subset B \;:\Longleftrightarrow\; A \subseteq B$, es ex. $x \in B$ mit $x \notin A$ (5)

"Mengenhierarchie" $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$

Wichtige Teilmenge von $\mathbb{R}$ Intervalle

$a, b \in \mathbb{R}$

Relation Def.

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ "abgeschlossenes Intervall"

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ "offenes Intervall"

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ "halboffenes Intervall"

Symbol $\{\} = \emptyset$ "leere Menge"

A, B seien Mengen

"A und B sind gleich"

$A = B \;:\Longleftrightarrow$ A und B haben exakt die Elemente

BSP

$\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$

$S := \{n \in \mathbb{N} \mid 2 | n\} = \{x \mid 2 \cdot n = x,\ n \in \mathbb{N}\}$

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \in S \text{ und } 5 | n\} = \{x \mid 10 \cdot n = x,\ n \in \mathbb{N}\}$

$A = B \iff \underline{A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A}$ Beweistechnik

"genau dann, wenn" beidseitige Inklusion