Technische Informatik - 1. Übung

Darya Nemtsava
Henning Lehmann

Afg. 1:

1. $A \cap B = \{1, 5\}$
2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
3. $A \cap A = A$
4. $A \cup A = A$
5. $\overline{A} = G \setminus A = \{0, 4, 6\}$
6. $A \setminus B = \{2, 3\}$
7. $B \setminus A = \{6\}$
8. $\overline{A \cap B} = G \setminus (A \cap B) = \{0, 2, 3, 4, 6\}$
9. $\overline{A \cup B} = G \setminus (A \cup B) = \{0, 4\}$
10. $A \times B = \{(1,1), (1,5), (1,6), (2,1), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,5), (3,6), (5,1), (5,5), (5,6)\}$
11. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 3, 6\}$
12. $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{6\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{5,6\},$
$\{1,5,6\}\}$

Afg. 2:

1

$$x \cdot y = b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)}$$
$$= b^{\log_b(x) + \log_b(y)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b\left(b^{\log_b(x)+\log_b(y)}\right) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$x^n = \left(b^{\log_b(x)}\right)^n = b^{n \cdot \log_b(x)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

$$\log_b(x/y) = \log_b\left(\frac{b^{\log_b(x)}}{b^{\log_b(y)}}\right) = \log_b\left(b^{\log_b(x) - \log_b(y)}\right)$$
$$= \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(1/x) = \log_b\left(1/b^{\log_b(x)}\right) = \log_b\left(b^{-\log_b(x)}\right)$$
$$= -\log_b(x)$$

(2)

$$x = a^{\log_a(x)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$$

(3)

$$\log_2(3{,}47) = \frac{\ln(3{,}47)}{\ln(2)} \approx \frac{1{,}24}{0{,}69} \approx 1{,}79$$

(4)

$$\frac{\log_2(4) + \log_2(9) + \log_2(6)}{\log_2(6)} = \frac{\log_2(36)}{\log_2(6)} + \frac{\log_2(6)}{\log_2(6)}$$

$$= \frac{\log_2(6) + \log_2(6)}{\log_2(6)} + 1 = \frac{2\log_2(6)}{\log_2(6)} + 1 = 2 + 1 = 3$$

Afg. 3:

Induktionsanfang

$n=0$

$\sum_{i=0}^{0} q^i = 0$

$\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-1}{1-q} = \frac{0}{1-q} = 0$ ✓

Induktionsannahme: $\forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Induktionsschluss

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{q^{n+1}\cdot(1-q)}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \qquad \square$$

Für $q=1$ gilt die Induktionsannahme nicht, da man $\frac{1-1^{n+1}}{1-1}$ rechnet und hierbei durch 0 teilt.

Afg. 4:

Der Fehler in dem Beweis liegt darin, dass die Induktionsvoraussetzung für eine feste, aber beliebige Menge von Kühen gelten muss; jedoch ist bei der zweiten Anwendung der Induktionsvoraussetzung die Menge nicht beliebig, da sie bewusst so gewählt wurde, dass sie keine lila Kuh enthält: Wenn in einer Reihe von $n+1$ Kühen die einzige lila Kuh an erster Stelle steht, dann ist unter den hinteren n Kühen trivialerweise keine lila Kuh anwesend. Damit wurde die Induktionsvoraussetzung inkorrekt angewendet und der Beweis ist falsch.