Einführung in die Computergrafik

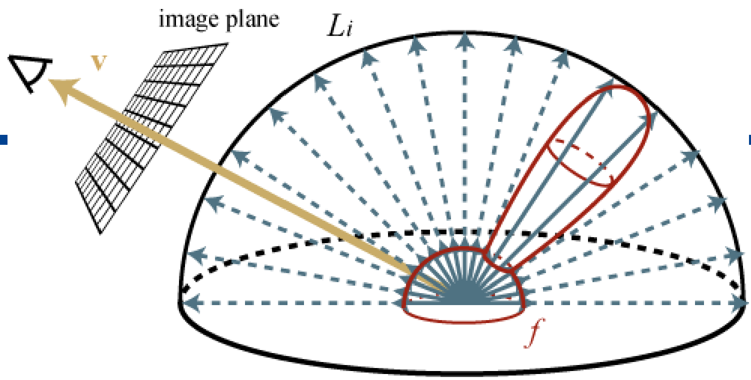
Matthias B. Hullin

Institut für Informatik II, Universität Bonn

Monte Carlo-Integration

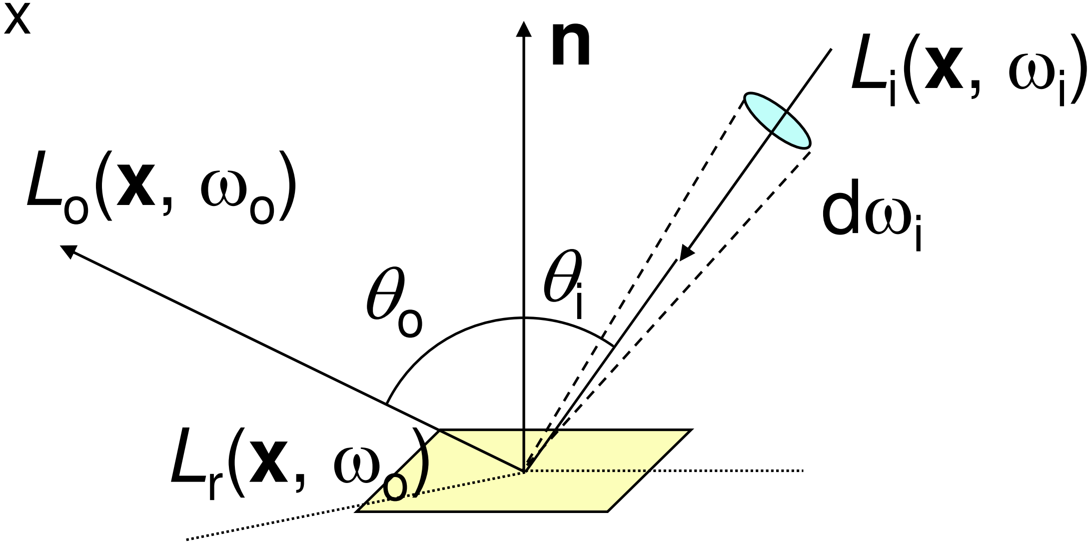
Enthält Material von Jaroslav Křivánek, MFF UK

Reflexionsgleichung



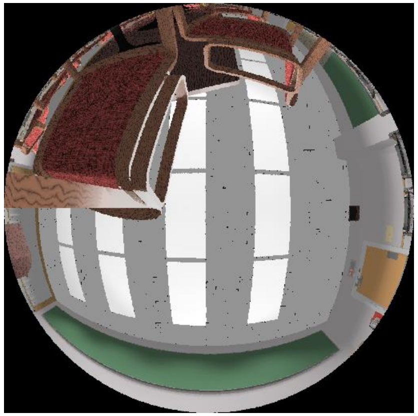
$$\boxed{L_r(\mathbf{x},\omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x},\omega_i)\cdot f_r(\mathbf{x},\omega_i \to \omega_o)\cdot\cos\theta_i \,\mathrm{d}\omega_i}$$

Halbkugel
über x



Rendering = Integrieren von Funktionen

$$L_r(\mathbf{x},\omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x},\omega_i)\, f_r(\mathbf{x},\omega_i \to \omega_o) \cos\theta_i \, d\omega_i$$



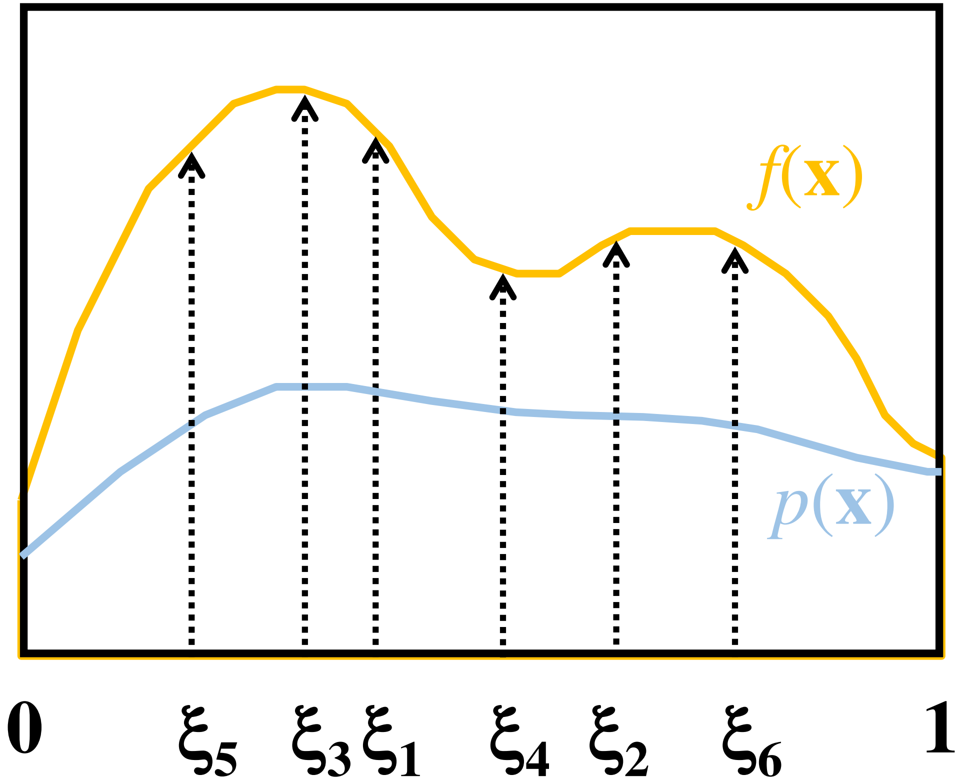
Ankommende Strahldichte (Radianz) $L_i(\mathbf{x},\omega_i)$ für einen Punkt am Boden

Bilder: Greg Ward

- Probleme
  - Unstetiger Integrand (Sichtbarkeit)
  - Beliebig große Werte im Integranden (z.B. Lichtverteilung in Kaustiken, BRDFs von glänzenden Flächen)
  - Komplexe Geometrie

Monte-Carlo-Integration

- Allgemeines Werkzeug zur Schätzung bestimmter Integrale



Integral:

$$I = \int f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Monte-Carlo-Schätzwert für *I*:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}; \quad \xi_i \propto p(\mathbf{x})$$

“Im Mittel” funktioniert es:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

Anwendung von MC auf Reflexionsgleichung

- Schätzer für reflektierte Strahldichte
- Zu schätzendes Integral

$$\int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x},\omega_\mathrm{i})\, f_r(\mathbf{x},\omega_\mathrm{i}\to\omega_\mathrm{o}) \cos\theta_\mathrm{i}\, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$

- PDF für cosinus-proportionale Abtastung:

$$p(\omega) = \frac{\cos\theta}{\pi}$$

- **MC-Schätzer**:

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{integrand}(\omega_{\mathrm{i},k})}{\mathrm{pdf}(\omega_{\mathrm{i},k})}$$

$$= \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{i}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i},k}) f_r(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{i},k}\to\omega_\mathrm{o})$$

Varianz => Bildrauschen

... und jetzt nochmal langsam

Numerische Quadratur

Numerische Integration in 1-D

- **Ziel**: Integriere Funktion $f(x)$ zwischen a und b

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- **Allgemeine Idee:** Näherung durch gewichtete Summe von Funktionswerten

$$I \approx \hat{I} = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Quadraturformeln für numerische Integration

- Allgemeine Formel in 1D:

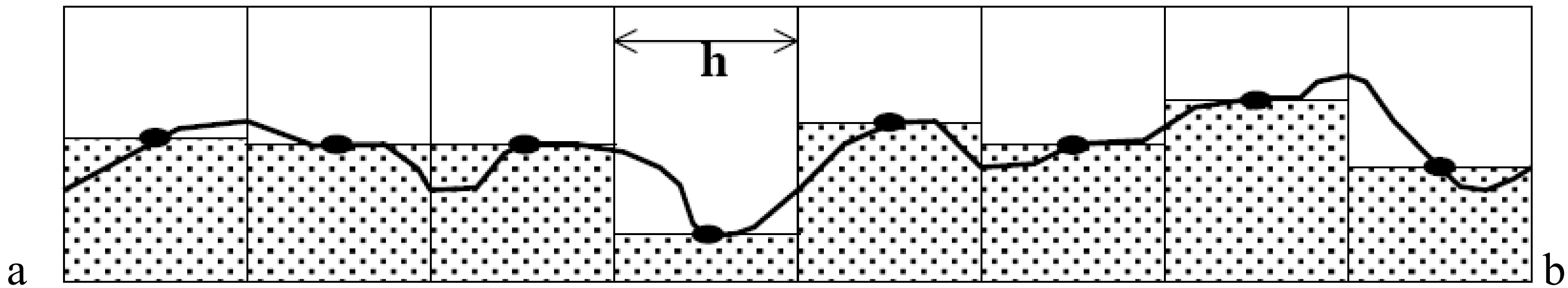
$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

f Integrand (die zu integrierende Funktion)
n Quadratur-Ordnung (Zahl von Messstellen des Integrands)
x_i Knotenpunkte (Ort der Messungen)
$f(x_i)$ Integrandenwerte an Knotenpunkte
w_i Quadraturgewichte

Quadraturformeln für numerische Integration

- Quadraturregeln unterscheiden sich nach der Wahl der Knotenpunktpositionen x_i und der Gewichte w_i
  - z.B. Rechteckregel, Trapezregel, Simpson's Method, Gauss-Quadratur, ...
- Knotenpunkte werden deterministisch platziert

Mittelpunktregel

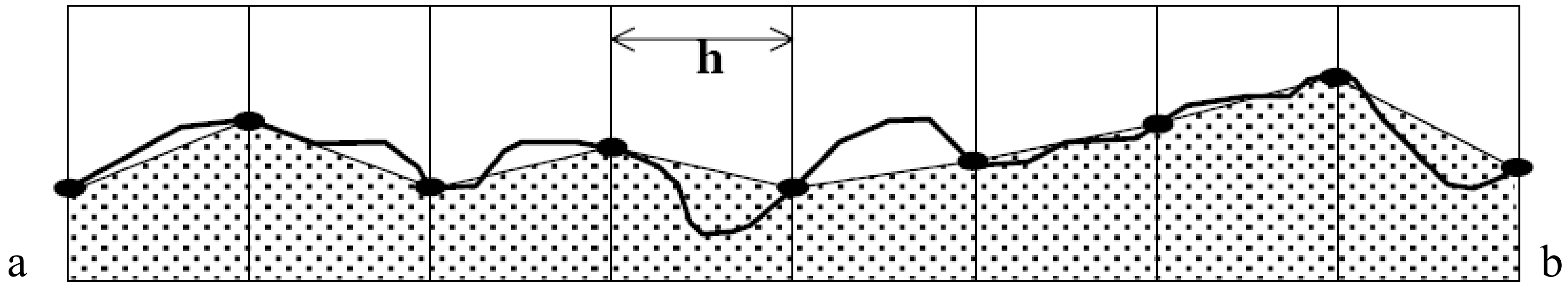


$$\begin{aligned}\hat{I} &= h\sum_{i=1}^{n} f(a+(i-\frac{1}{2})h) \\ &= h\left[f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+\cdots+f(b-\frac{h}{2})\right]\end{aligned}$$

Konvergenz

$\exists \xi \in [a,b]$: $$\hat{I}-I = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = O(n^{-2})$$

Trapezregel



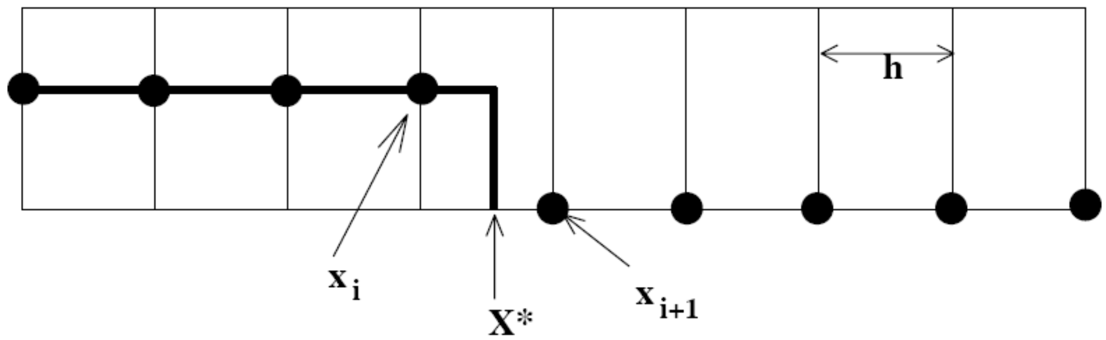
$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2} \left[f(a+(i-1)h) + f(a+ih) \right]$$
$$= h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

Konvergenz

$\exists \xi^* \in [a,b]: \quad \hat{I} - I = \frac{-(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi^*) = O(n^{-2})$

Unstetige Funktionen

- Konvergenz 1-D:
  - Unstetigkeit ist bis auf Genauigkeit h lokalisiert
  - $O\left(I - \hat{I}\right) = O(h) = O\left(\frac{b-a}{n}\right) = O(n^{-1})$



- s-D: $O\left(n^{-1/s}\right)$

„Curse of Dimensionality"

- Für eine s-dimensionale Funktion f :

$$\hat{I} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_s=1}^{n} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_s} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$$

  - mit Gewichten w_{ij}.

- Für ähnliche Ergebnisse wie in 1D, benötigen wir hier n^s Stützstellen (f muss n^s-mal ausgewertet werden)
- Konvergenzrate fällt auf $O\left(n^{-r/s}\right)$
  - Ausgehend von einer 1D-Quadratur, die mit $O(n^{-r})$ konvergiert
  - Langsame Konvergenz für höhere Dimensionalität
  - Exponentiell langsamer mit steigender Dimension

Quadraturformeln in mehreren Dimensionen

- **Deterministische Quadratur vs. Monte Carlo**

    - In 1D: deterministisch besser als Monte Carlo
    - In 2D etwa gleichwertig
    - Ab 3D: MC immer besser

- Quadraturregeln sind NICHT die Monte-Carlo-Methode

Monte Carlo

Geschichte der Monte-Carlo-Methode

- Entwicklung der Atombombe, Los Alamos 1940
  John von Neumann, Stanislav Ulam, Nicholas Metropolis

- Weitere Entwicklung und praktische Anwendungen ab den frühen 50ern

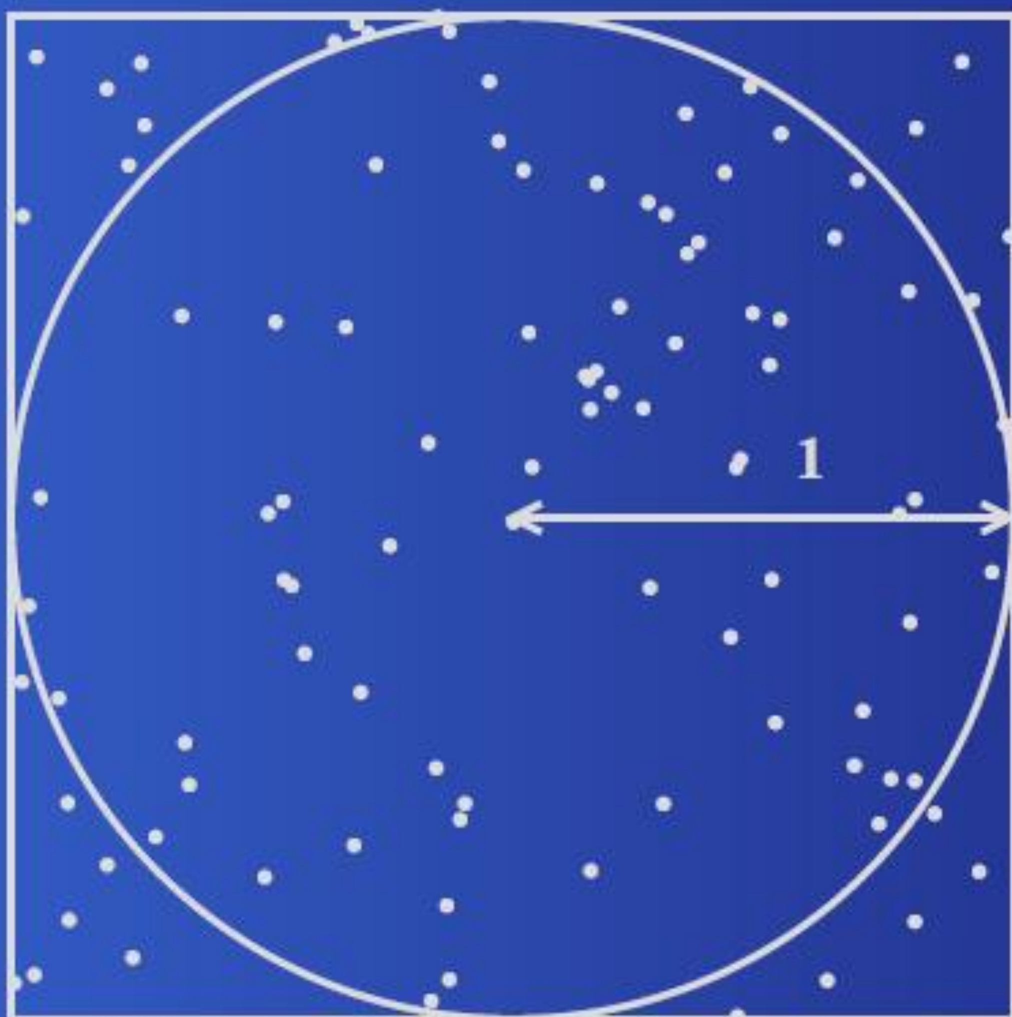
Monte-Carlo-Methode

- Wir simulieren viele zufällige Vorkommnisse des gleichen Ereignistyps, e.g.:
  - Neutronen – Emission, Absorption, Kollision mit Wasserstoffkernen
  - Verhalten von Computernetzwerken, Verkehrssimulation.
  - Soziologische und ökonomische Modelle – Demographie, Inflation, Versicherung, usw.

Monte Carlo – Anwendungen

- Finanzmarktsimulationen
- Verkehrsflusssimulationen
- Umweltwissenschaften
- Teilchenphysik
- Quantenfeldtheorie
- Astrophysik
- Molekularmodelle
- Halbleitergeräte
- Optimierungsprobleme
- **Lichtausbreitungsberechnung**
- ...

Example: calculation of π



Area of square: $A_s = \cancel{1}\ 4$
Area of circle: $A_c = \pi$
Fraction p of random points inside circle:

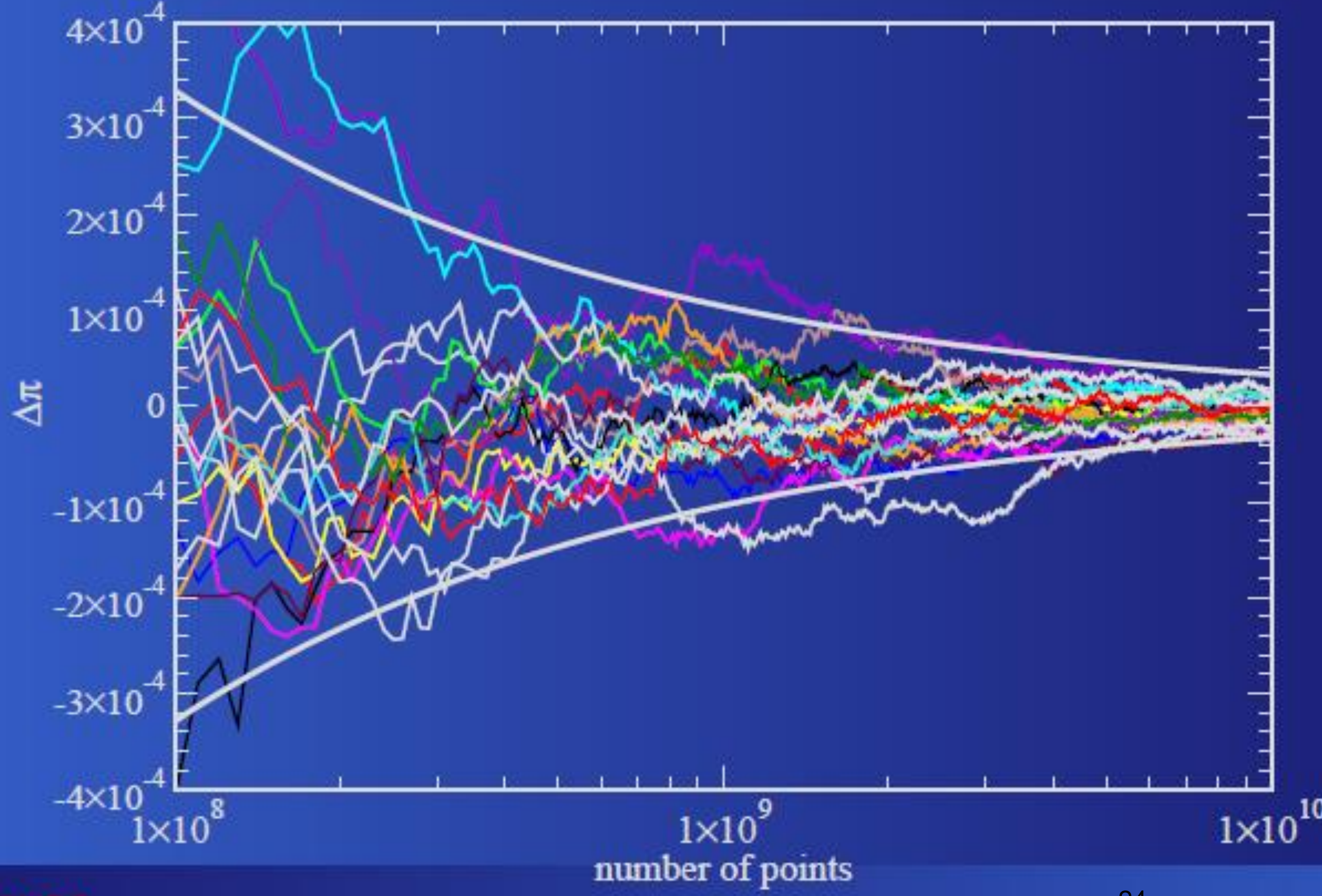
$$p = \frac{A_c}{A_s} = \frac{\pi}{4}$$

Random points: N
Random points inside circle: N_c

$$\Rightarrow \quad \pi = \frac{4N_c}{N}$$

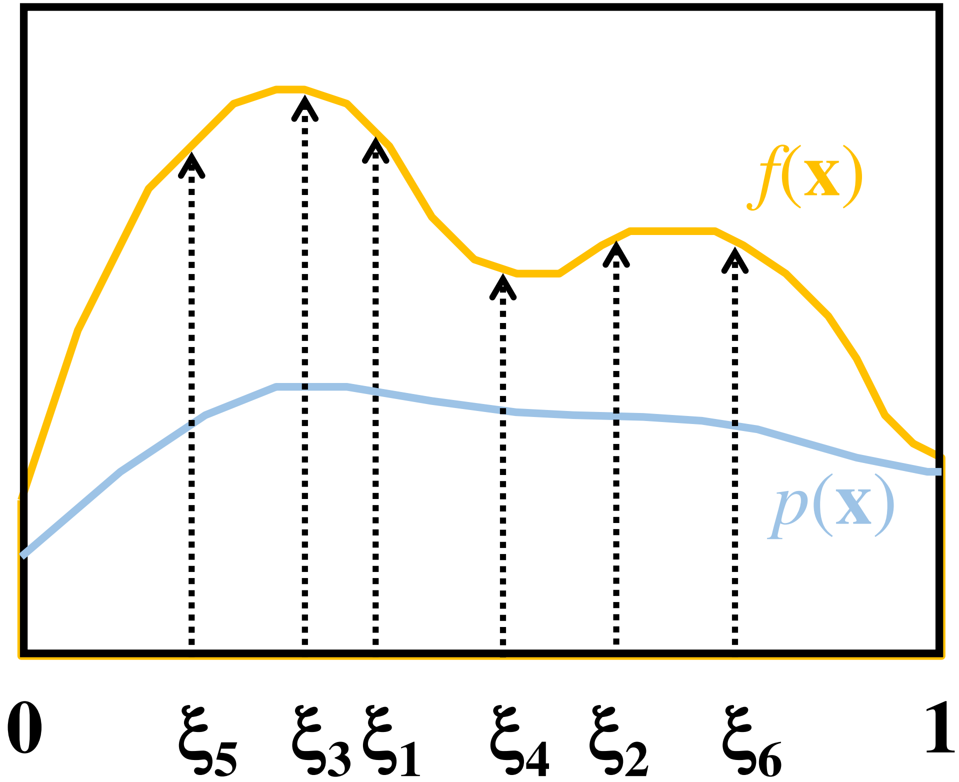
Folie: Iwan Kawrakov

Calculation of π (cont'd)



Monte-Carlo-Integration

- Allgemeines Werkzeug zur Schätzung bestimmter Integrale



Integral:

$$I = \int f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Monte-Carlo-Schätzwert für *I*:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}; \qquad \xi_i \propto p(\mathbf{x})$$

“Im Mittel” funktioniert es:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

Monte-Carlo-Integration

- Stützstellen werden zufällig (oder pseudozufällig) platziert

- Konvergenz der Varianz: $\sigma^2 = O(N^{-1})$
(Standardabweichung: $\sigma = O\left(N^{-1/2}\right)$)
    - **Konvergenz unabhängig von Dimension**
    - **Schneller als klassische Quadraturregeln** für 3 und mehr Dimensionen

- Spezielle Verfahren zur Wahl von Stützstellen existieren
    - Quasi-Monte Carlo
    - Schnellere asymptotische Konvergenz als MC für "glatte" Funktionen

Monte-Carlo-Integration

- **Vorteile**
  - Einfach zu implementieren
  - Robuste Lösung für komplexe Integrande und Integrationsgebiete
  - Effektiv für hochdimensionale Integrale

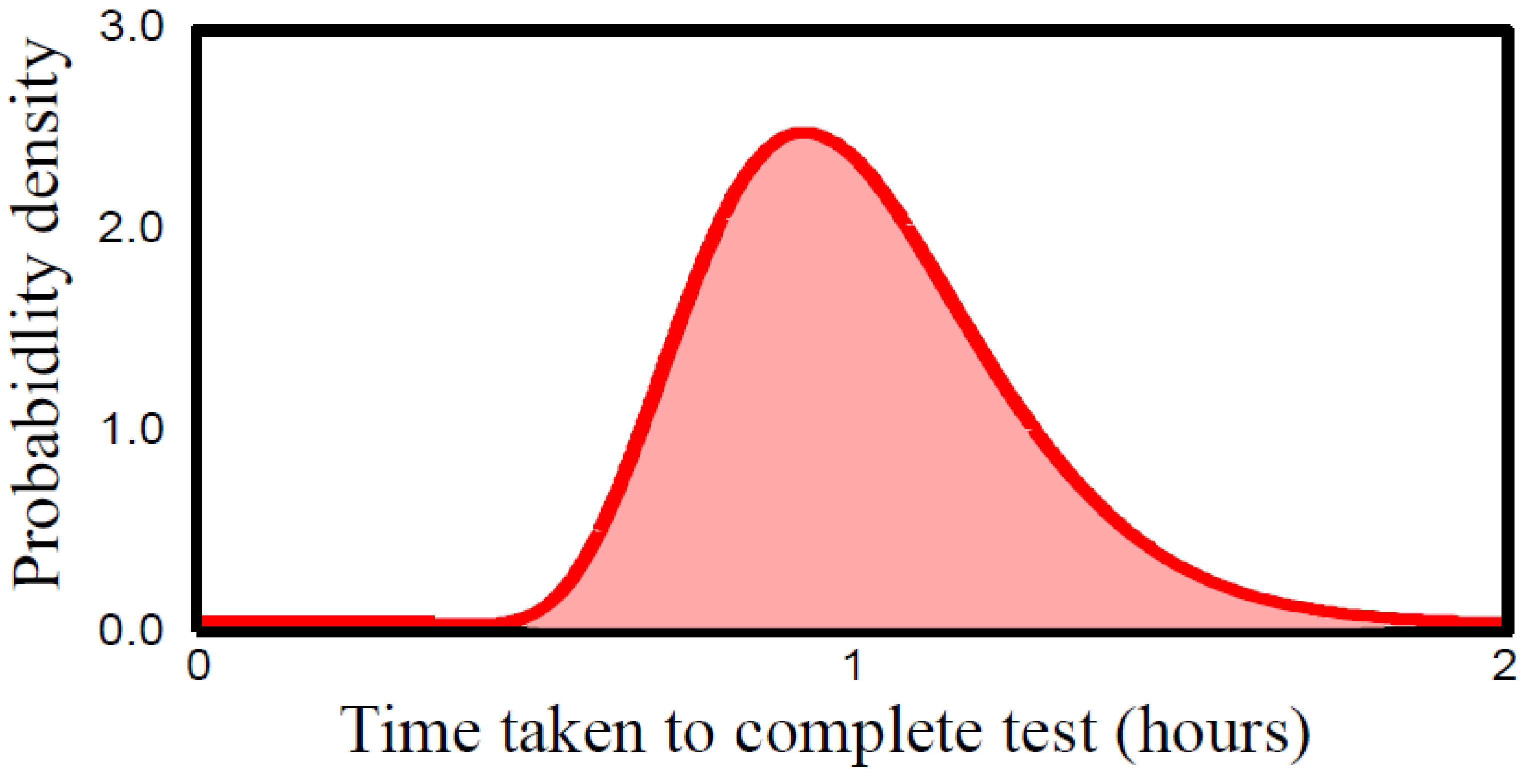
- **Nachteile**
  - Relativ langsame Konvergenz – um die Standardabweichung zu halbieren, braucht es viermal so viele Samples
  - Rendering: Bilder enthalten Rauschen, das langsam verschwindet

Zufallsvariablen

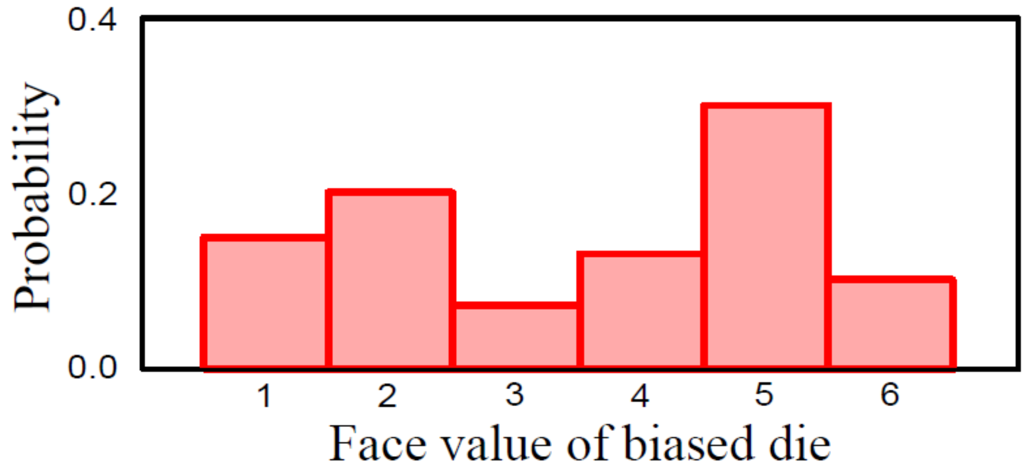
Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable X beschreibt eine Größe, die unsicher ist
- Es kann sich um das Ergebnis eines Experiments (Münze werfen) or einer realweltlichen Messung handeln (z.B. Temperatur messen)
- Wenn wir das Experiment mehrmals ausführen, erhalten wir verschiedene Werte
- Einige Werte treten häufiger auf. Diese Information wird von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt.

Kontinuierliche Zufallsvariable



Diskrete Zufallsvariablen



Zufallsvariable

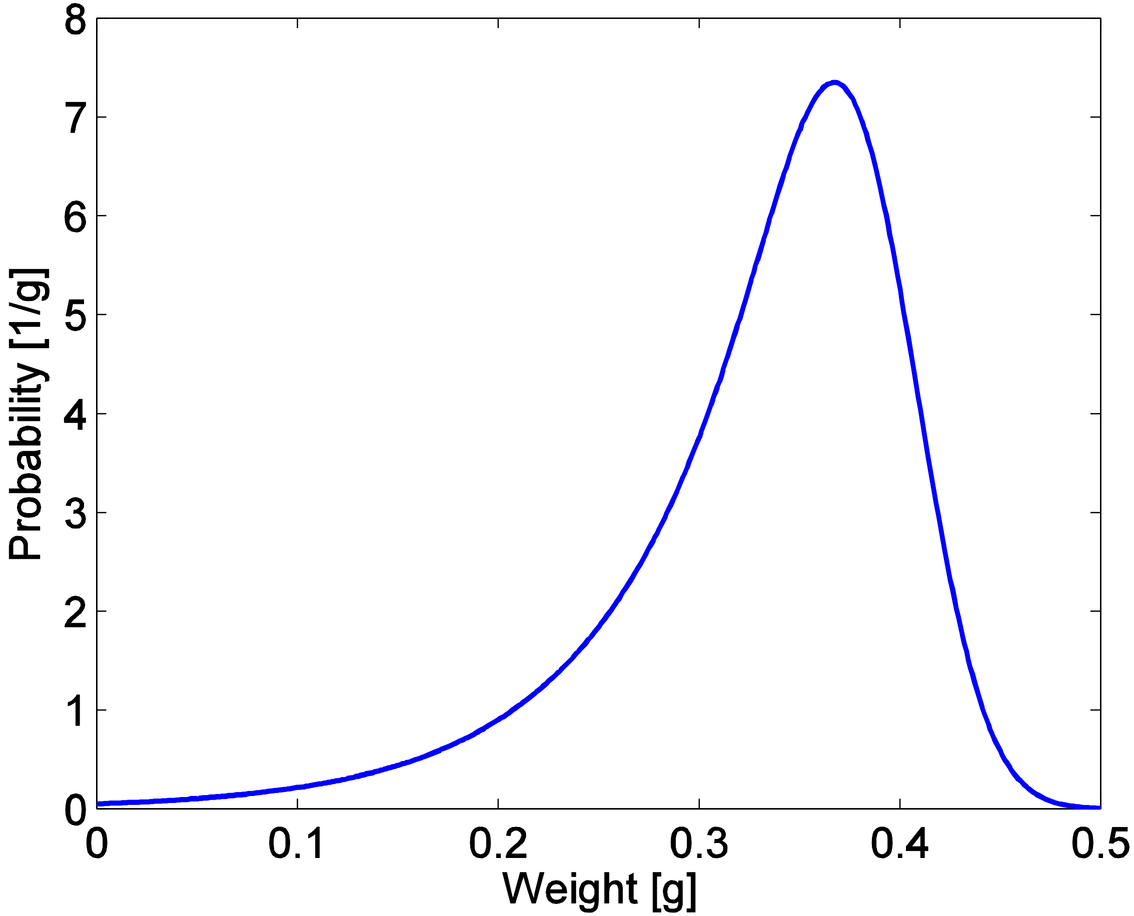
- Zufallsvariable X
    - Eine Funktion, um Ergebnisse zufälliger Experimente zu repräsentieren
    - Z.B. Münzwurf:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, \omega = \text{Kopf} \\ 1, \omega = \text{Zahl} \end{cases}$$

- $Y = f(X)$ ist auch eine Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF)

- engl. Probability Density Function
- Beschreibt Verteilung kontinuierlicher Zufallsvariablen
  - z.B. Wahrscheinlichkeitsdichte für Gewicht von Erbsen



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF)

- PDF $p(x)$ beschreibt Verteilung von kontinuierlicher Zufallsvariable
- Nichtnegativ, aber womöglich keine obere Schranke
- Integriert zu 1 ("*partition of unity*")
- Wahrscheinlichkeit für Ereignisse in $[x_1, x_2]$:

$$\Pr(\{x: x_1 \leq x \leq x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

Kumulative Dichtefunktion (CDF)

- Berechnet aus PDF durch Integration

$$P(x) = \Pr\{X \leq x\}$$

$$\Pr\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} p(x')dx'$$

- PDF ist Änderungsrate der kumulativen Wahrscheinlichkeit

$$dP(x) = p(x)dx \quad \leftrightarrow \quad p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

Kumulative Dichtefunktion (CDF)

- PDF

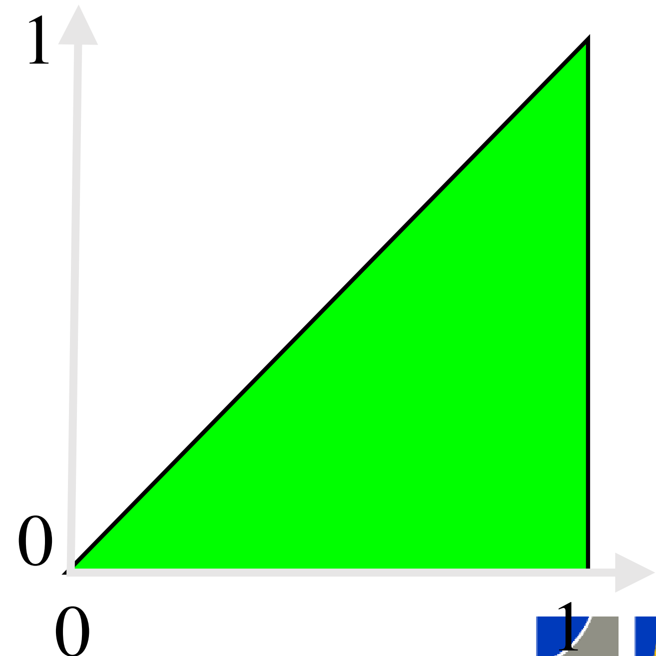
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- CDF

$$P(x) = \Pr(X < x)$$

$$P(x) = \int_0^x p(x')dx'$$

$$\Pr(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta p(x')dx'$$
$$= P(\beta) - P(\alpha)$$



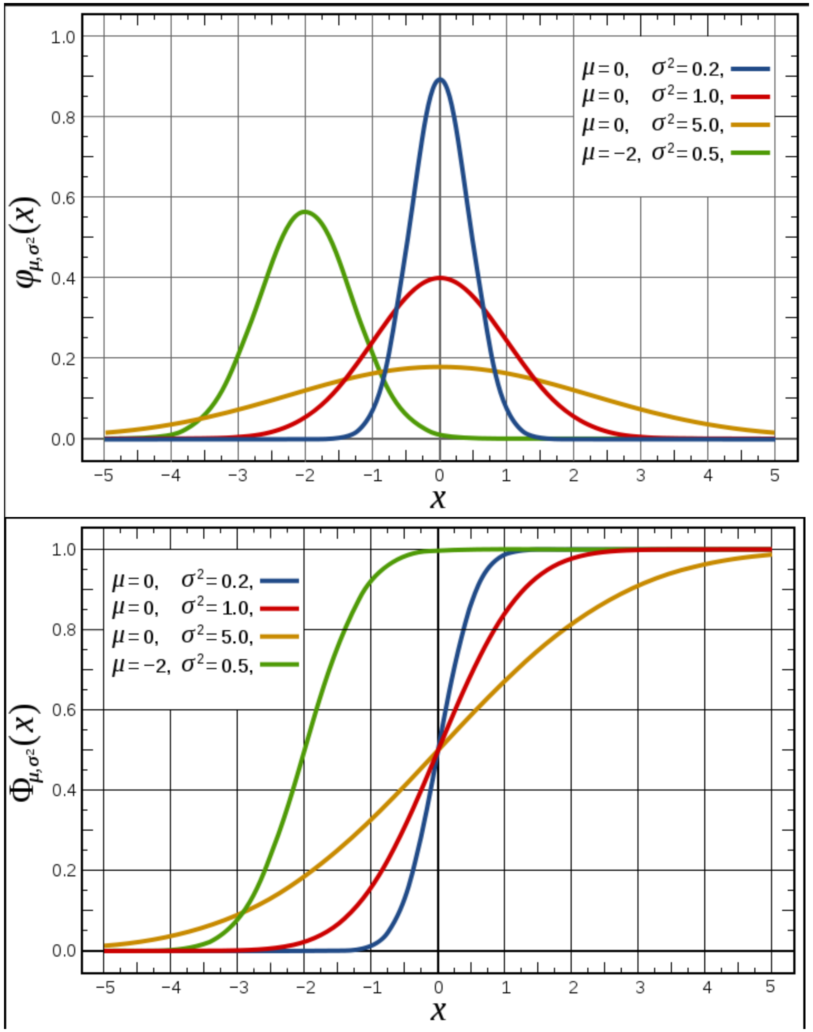
Achtung: $\Pr(X = \alpha)$
$= P(\alpha) - P(\alpha)$
$= 0$

Kontinuierliche Zufallsvariable (2)

Gaußsche (Normal-) Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte
(PDF)

Kumulative Verteilung
(CDF)



Iwikipedia

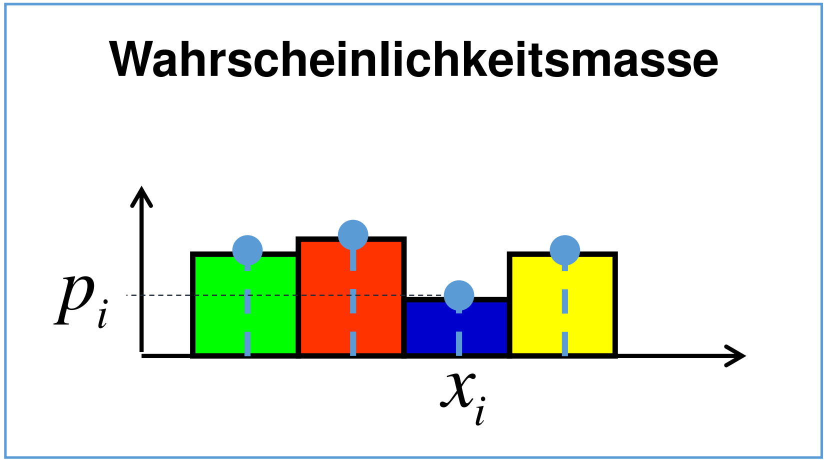
Diskrete Zufallsvariable

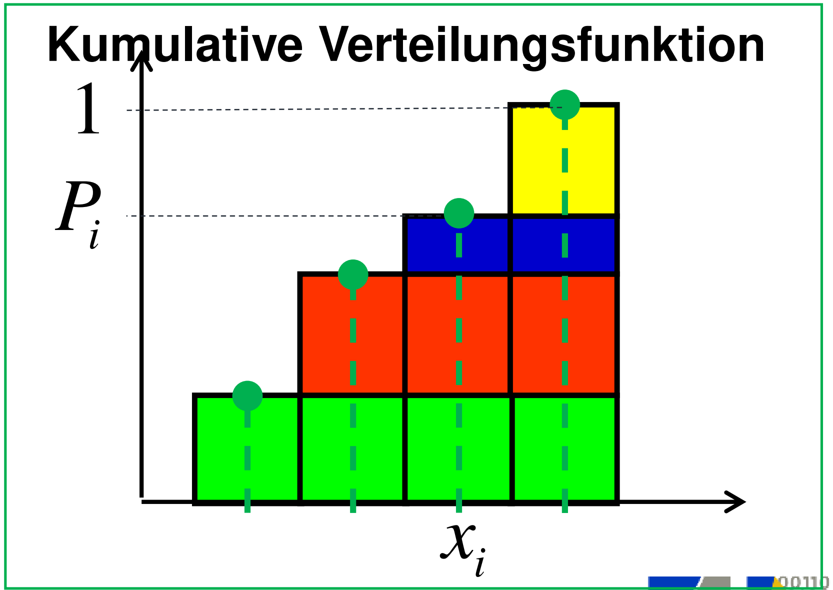
- Endliche Menge von Werten für x_i
- Jedes tritt mit Wahrscheinlichkeit p_i ein

$$p_i \equiv \Pr(X = x_i) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- **Kumulative Verteilungs-funktion**

$$P_i \equiv \Pr\left(X \leq x_i\right) = \sum_{j=1}^{i} p_j \qquad P_n = 1$$





Erwartungswert und Varianz

- **Erwartungswert**

$$E[X] = \int_D \mathbf{x}\, p(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

- **Varianz**

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

  - Eigenschaften der Varianz

$$V[\sum_i X_i] = \sum_i V[X_i]$$ (wenn X_i unabhängig)

$$V[aX] = a^2 V[X]$$

Transformation einer Zufallsvariablen

- Y ist Zufallsvariable $\quad Y = f\left(X\right)$

- Erwartungswert von Y

$$\boxed{E\left[Y\right] = \int_D f(\mathbf{x})\ p(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}}$$

Monte-Carlo-Integration

Schätzer für ein Integral

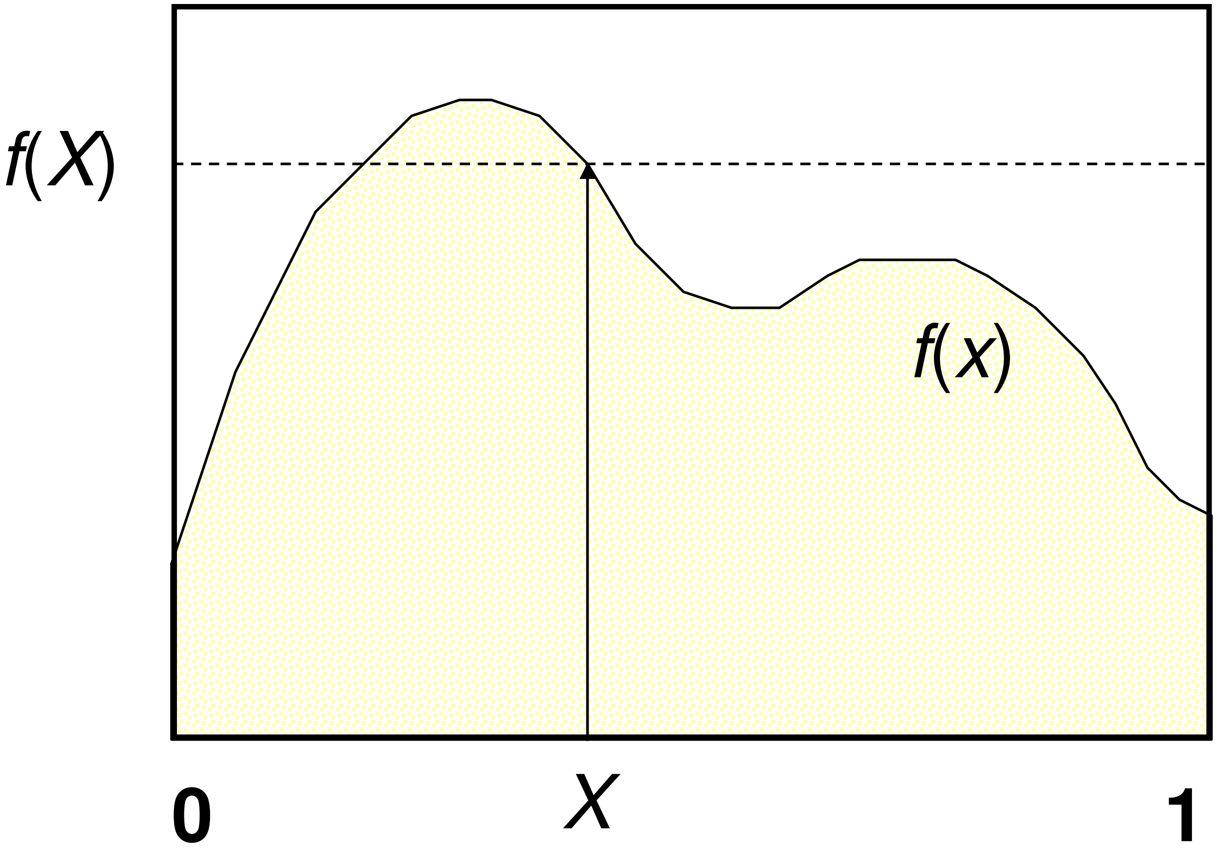
Zu schätzendes Integral:

$$I = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sei X eine Zufallsvariable mit PDF $p(x)$. Dann wird die Zufallsvariable F_{prim}, gegeben durch die Transformation $\frac{f(X)}{p(X)}$, **Primärschätzer** (primary estimator) des obigen Integrals genannt.

$$F_{\text{prim}} = \frac{f(X)}{p(X)}$$

Primärschätzer eines Integrals



Schätzer vs. Schätzung

- **Schätzer (estimator) ist eine Zufallsvariable**
  - Definiert durch Transformation einer anderen Zufallsvariablen

- **Schätzung (estimate)** ist eine konkrete Realisierung (Ergebnis) des Schätzers

- Keine Sorge: diese Unterscheidung ist vor allem für Beweise wichtig, in der Praxis aber weniger.

Erwartungswert

- Ziel: MC-Integration einer Funktion $f(x)$ durch Ziehen von Werten gemäß einer PDF $p(x)$

- Erwartungswert von $f(x)$ bezüglich $p(x)$ (Gebiet D)

$$E_p[f(x)] = \int_D f(x)p(x)dx \qquad E_p[f(x)] = \sum_x f(x)p(x)$$

(kontinuierlich) (diskret)

= gewichteter Mittelwert

- Gewichtung gemäß einer Wahrscheinlichkeit (PDF).

$$dx \to p(x)dx$$

Erwartungswert

- Beispiel: Uniforme Verteilung $p(x) = 1/(b-a)$

- Mittelwert!

$$E_p[f(x)] = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Erwartungstreuer Schätzer

- Ein allgemeiner statistischer Schätzer heißt **erwartungstreu (unbiased),** wenn er – “im Mittel” – den korrekten Wert *Q* einer zu schätzenden Größe liefert (ohne systematischen Fehler).
- Genauer:

$$\boxed{E[F] = Q}$$

Schätzer der Größe Q
(Zufallsvariable)

Geschätzte Größe
(Hier geht es um Integrale, aber es könnte irgendetwas Beliebiges sein. Dies ist eine Zahl, keine Variable)

Erwartungstreuer Schätzer

Der Primärschätzer F_{prim} ist ein erwartungstreuer Schätzer des Integrals I.

Proof:

$$
\begin{aligned}
E\left[F_{\text{prim}}\right] &= \int_{\Omega} \frac{f(x)}{p(x)}\, p(x)\, \mathrm{d}x \\
&= I
\end{aligned}
$$

Varianz des Primärschätzers

- Erwartungstreue Schätzer erzeugen einen Fehler statistischer Natur, die Varianz:

$$V\left[F_{\text{prim}}\right] = \sigma^2_{\text{prim}} = E[F_{\text{prim}}{}^2] - E[F_{\text{prim}}]^2 = \int_\Omega \frac{f(x)^2}{p(x)}\,\mathrm{d}x - I^2$$

(für einen erwartungstreuen Schätzer)

Wenn wir nur einen einzigen Funktionswert verwenden, ist die Varianz üblicherweise zu hoch.

In der Praxis brauchen wir mehr Werte => Sekundärschätzer.

Sekundärschätzer eines Integrals

- Betrachte N unabhängige Zufallsvariablen X_i

- Der Schätzer F_N gemäß der untigen Formel heißt **Sekundärschätzer** von I.

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

- Als Mittelwert erwartungstreuer Primärschätzer ist auch der Sekundärschätzer erwartungstreu.

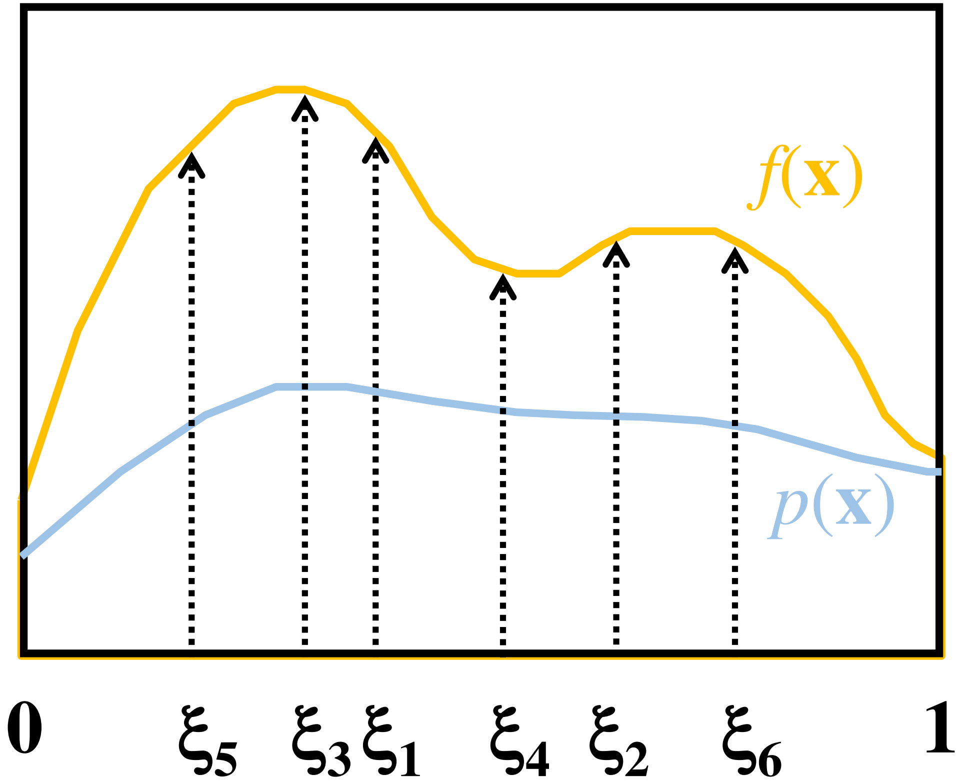
Varianz des Sekundärschätzers

$$
\begin{aligned}
V\left[F_N\right] &= V\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\cdot N\cdot V\left[\frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\
&= \frac{1}{N}V\left[F_{\text{prim}}\right]
\end{aligned}
$$

Varianz ist N-mal kleiner und
Standardabweichung $\sqrt{N}$-mal
(d.h. Fehler konvergiert mit $1/\sqrt{N}$)

Monte-Carlo-Integration

- Allgemeines Werkzeug zur Schätzung bestimmter Integrale



Integral:

$$I = \int f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Monte-Carlo-Schätzwert für *I*:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}; \quad \xi_i \propto p(\mathbf{x})$$

“Im Mittel” funktioniert es:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

Monte-Carlo-Integration illustriert

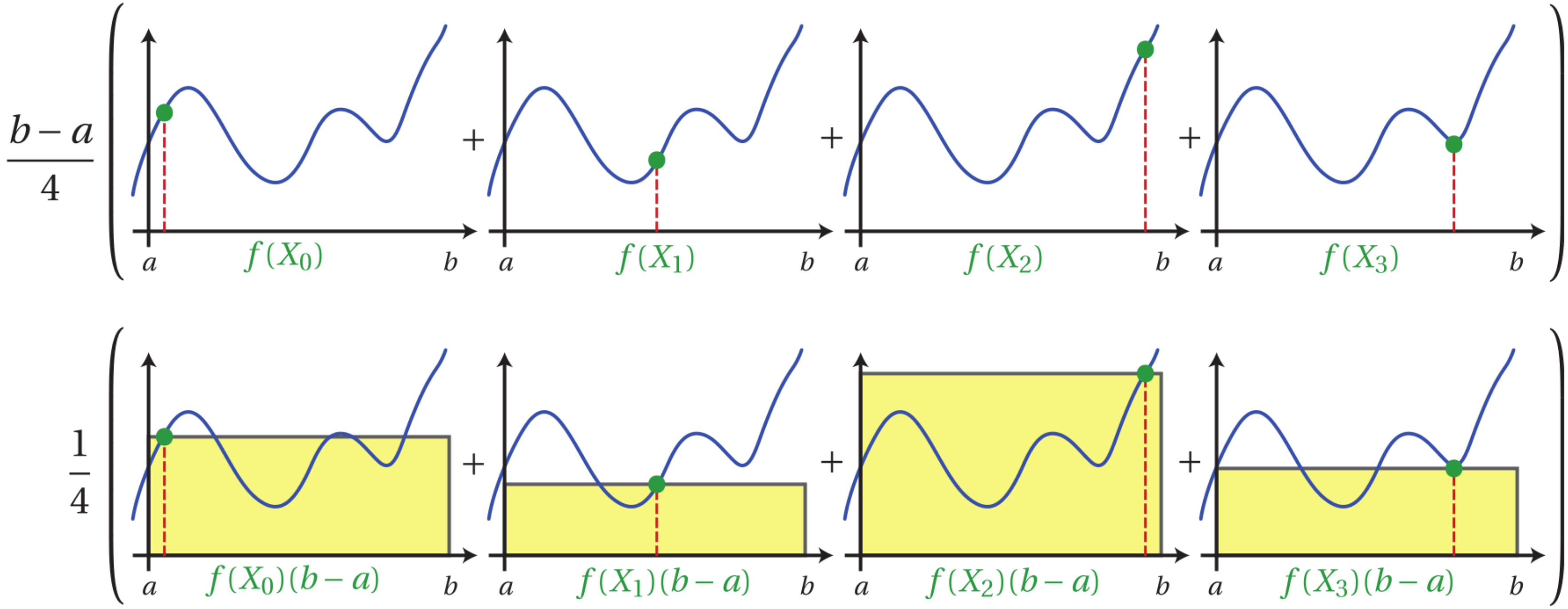


Figure A.1: An illustration of the two interpretations of the basic Monte Carlo estimator in Equation A.12 using four samples: computing the mean value, or height, of the function and multiplying by the interval length (top), or computing the average of several rectangular areas (bottom).

- Quelle: Dissertation Wojciech Jarosz, UC San Diego

Eigenschaften von Schätzern

Erwartungstreuer Schätzer

- Ein allgemeiner statistischer Schätzer heißt **erwartungstreu (unbiased),** wenn er – “im Mittel” – den korrekten Wert *Q* einer zu schätzenden Größe liefert (ohne systematischen Fehler).
- Genauer:

$$E[F] = Q$$

Schätzer der Größe Q
(Zufallsvariable)

Geschätzte Größe
(Hier geht es um Integrale, aber es könnte irgendetwas Beliebiges sein. Dies ist eine Zahl, keine Variable)

Bias/Verzerrung eines Schätzers

- Wenn $E[F] \neq Q$

  heißt der Schätzer "verzerrt" (*biased*).

- **Bias** ist der systematische Fehler des Schätzers:

$$\beta = Q - E[F]$$

UNIVERSITÄT BONN

Konsistenz

- Betrachte Sekundärschätzer mit *N* Samples:

$$F_N = F_N(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

- Schätzer F_N ist **konsistent** wenn

$$\boxed{Pr\left\{\lim_{N\to\infty} F_N = Q\right\} = 1}$$

d.h., wenn der Fehler $F_N - Q$ **sicher** gegen 0 geht..

Konsistenz

- Hinreichende Bedingung für Konsistenz eines Schätzers:

$$\lim_{N\to\infty} \underbrace{\beta[F_N]}_{\textbf{bias}} = \lim_{N\to\infty} V[F_N] = 0$$

- Erwartungstreue an sich ist nicht hinreichend für Konsistenz – die Varianz könnte unendlich sein.
- Aber wenn die Bias verschwindet **und** Varianz eines Primärschätzers endlich ist, ist der dazugehörende Sekundärschätzer zwingend konsistent.

Rendering-Algorithmen

- **Unbiased**
  - Path tracing
  - Bidirectional path tracing
  - Metropolis light transport

- **Biased & Consistent**
  - Progressive photon mapping

- **Biased & not consistent**
  - Photon mapping
  - Irradiance / radiance caching

Efficienz eines Schätzers

- **Effizienz** eines erwartungstreuen Schätzers:

$$\boxed{\epsilon[F] = \frac{1}{V[F]\,T[F]}}$$

Varianz

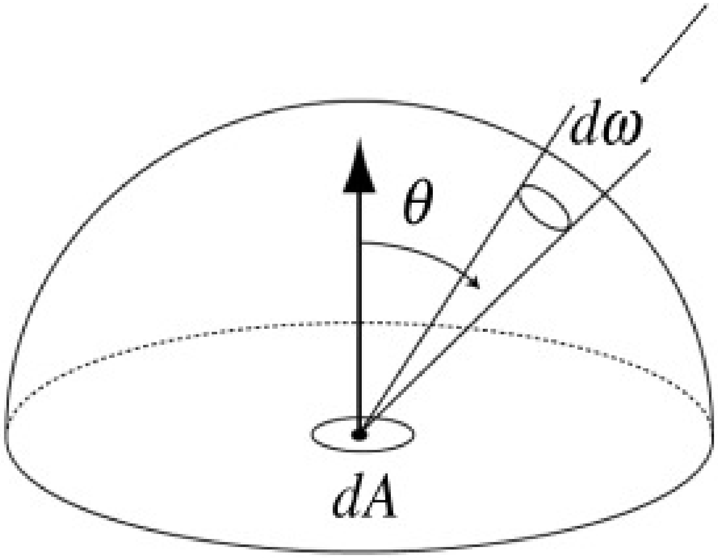
Rechenzeit
(z.B. Zahl der verfolgten Strahlen)

MC-Schätzer für Beleuchtungsberechnung

Irradianz-Schätzer – uniformes Sampling

- Zu schätzendes Integral:

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$



- PDF für uniformes Sampling:

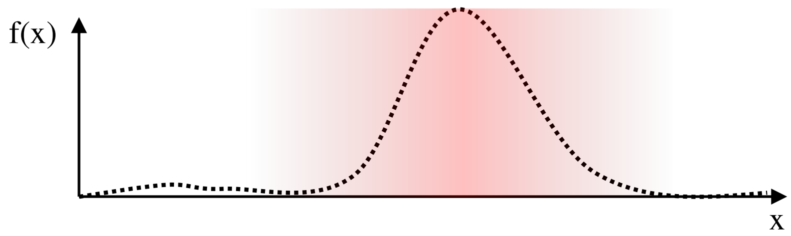
$$\boxed{p(\omega) = \frac{1}{2\pi}}$$

- Schätzer:

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_{\mathrm{i},k})}{p(\omega_{\mathrm{i},k})} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k}) \cdot \cos\theta_{\mathrm{i},k}$$

Abtaststrategie

- Idee: Taste Regionen dichter ab, wenn sie mehr zum Integral beitragen



- $p(x) \sim f(x)$ ist theoretisch optimal (Varianz=0)

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{p(X_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{c \cdot f(X_i)} = \frac{1}{c}$$

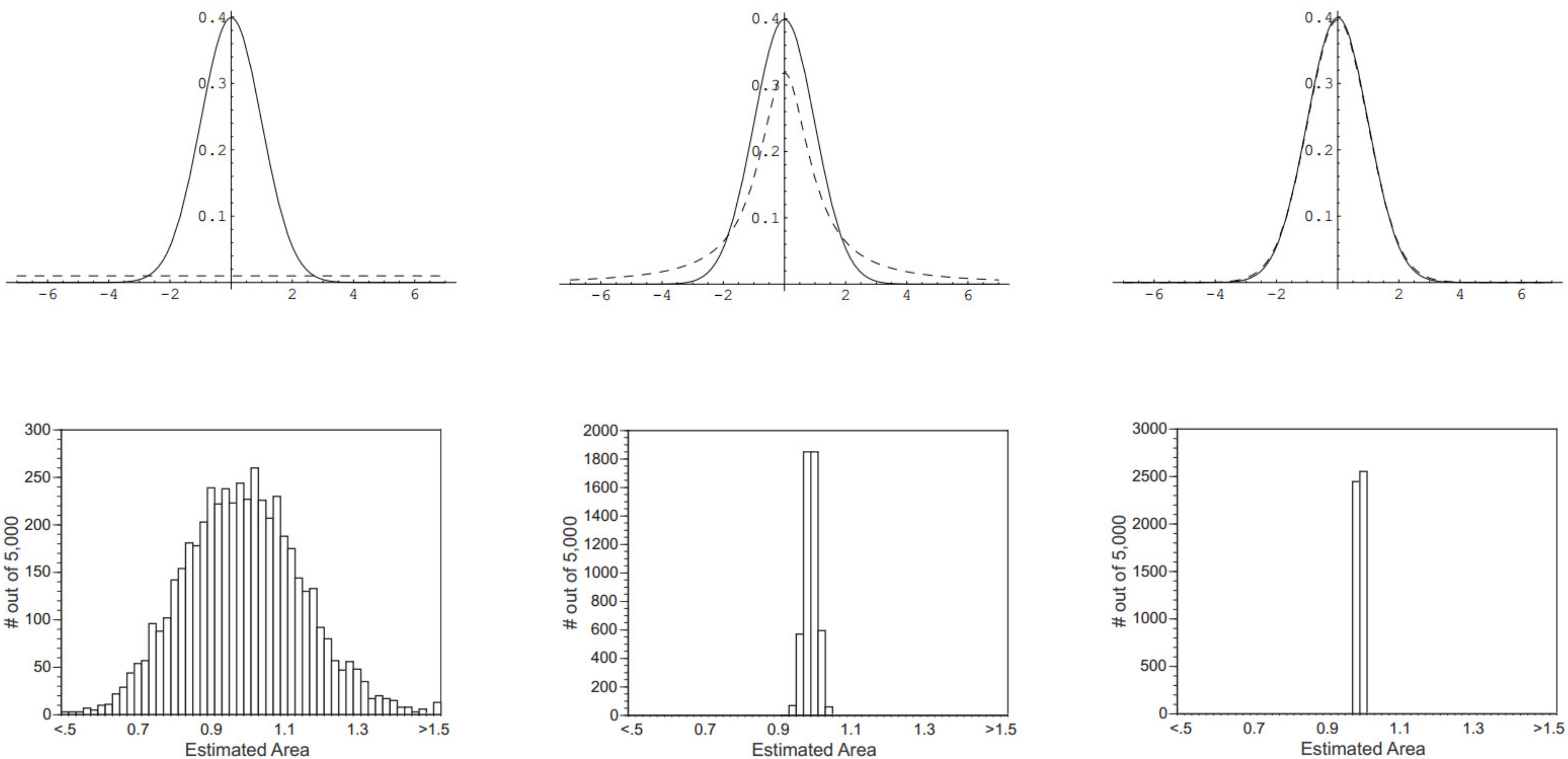
- Problem: Um die Proportionalitätskonstante c zu berechnen, muss das Integral bereits gelöst sein!

$$1 = \int_a^b p(x)dx = \int_a^b c \cdot f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{c} = \int_a^b f(x)dx$$

UNIVERSITÄT BONN

Abtaststrategie

- Idee: Wähle PDF $p(x)$ “so ähnlich wie möglich” zu $f(x)$!
  - Importance Sampling



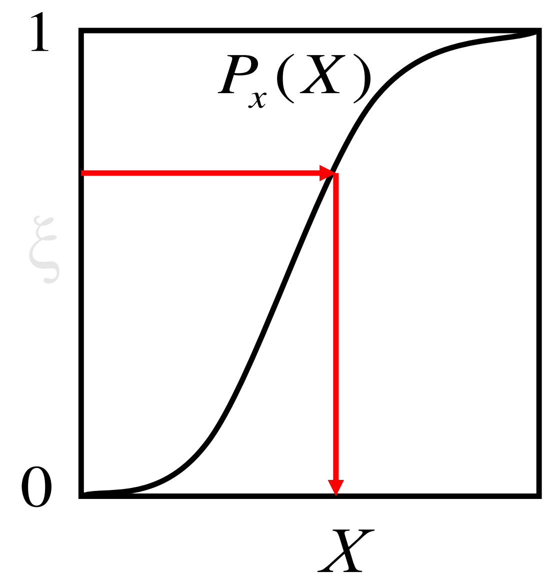
Abtaststrategie:

- **Im Folgenden:** Verfahren zur Erzeugung von Zufallszahlen, die einer gegebenen PDF folgen
  - Inversionsmethode
  - Verwerfungsmethode (rejection sampling)

Inversionsmethode

- CDF

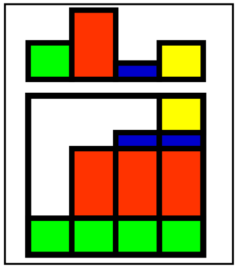
$$P_x(X) = \int_{-\infty}^{X} p(x)dx$$



- Konstruktion von Samples
  - Für eine gleichverteilte Zufallsvariable ξ

$$P_x^{-1}(\xi) = X$$

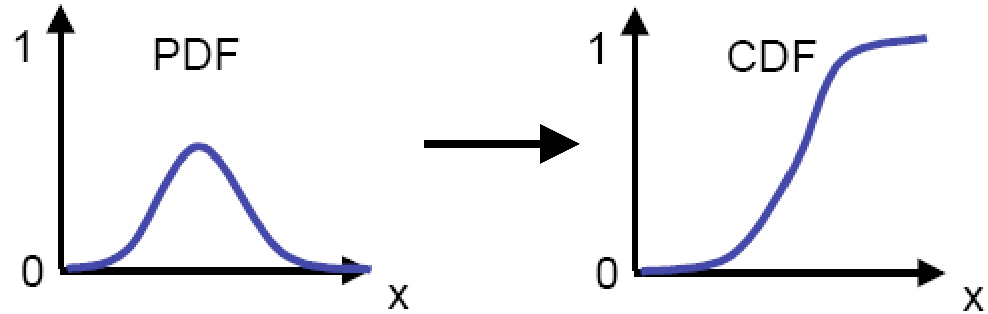
- Voraussetzungen
  1. Integral von $p(x)$ ist bekannt
  2. P_x^{-1} monoton und bekannt



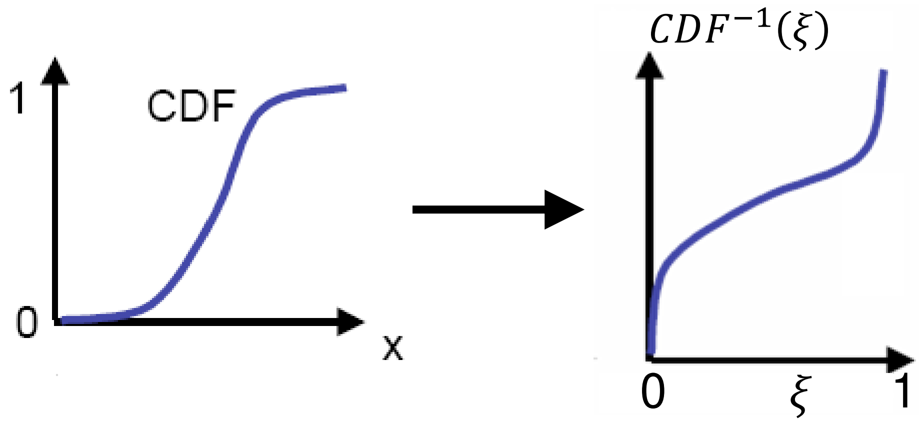
discrete case

Zusammenfassung Inversionsmethode

- Berechne CDF



- Invertiere CDF



- Ziehe Zufallszahl als $CDF^{-1}(\xi)$ (ξ uniform verteilt über [0,1])

Verwerfungsmethode / Rejection Sampling

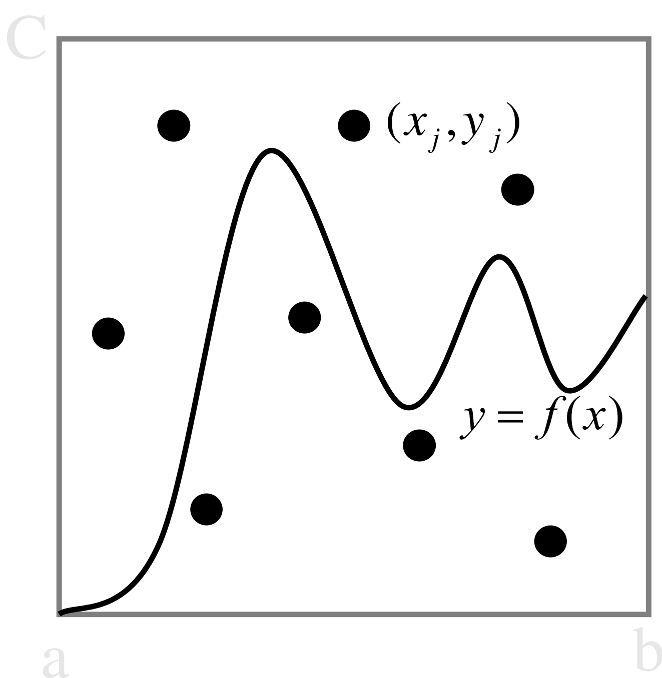
- Problem: Manchmal ist die CDF nicht einfach berechenbar
- Idee: Rejection Sampling

$$I = \int_a^b f(x)dx = \iint_{y<f(x)} dxdy$$

$$A_{\text{Rectangle}} = C \cdot (b-a)$$

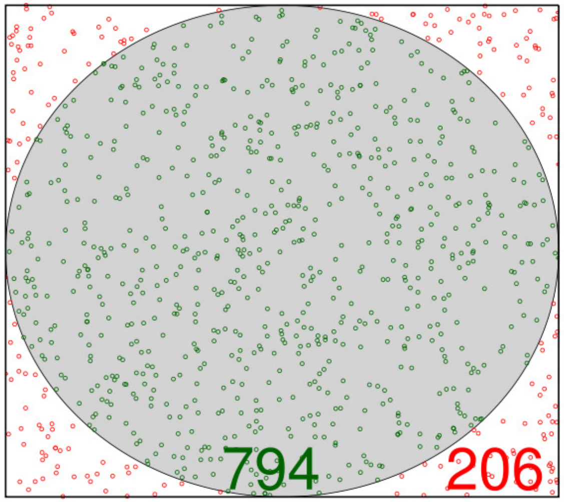
$$I \approx A_{\text{Rectangle}} \cdot \frac{\#\{i : y_i < f(x_i)\}}{\#\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}}$$

$$\text{Efficiency} = \frac{I}{A_{\text{Rectangle}}}$$



Rejection Sampling

- Beispiel: Bestimmung von π
- Berechnung der Kreisfläche im Einheitskreis



$$\frac{\pi}{4} = 0.7854\ldots \approx \frac{794}{794+206} = 0.794$$

- Effizienz: π/4

Importance Sampling (IS)

- **Erinnerung:** Gute Wahl der PDF kann die Varianz bei MC-Schätzung erheblich reduzieren.

$$\int_a^b f(x)dx = E_p[F_N]; \quad F_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

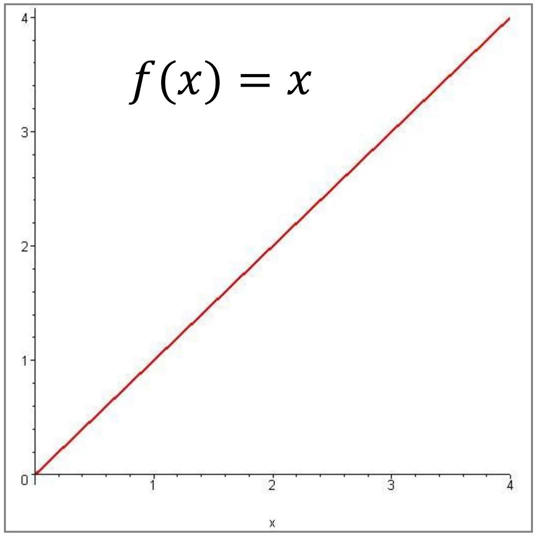
- Grundidee beim Importance Sampling: Wähle p so ähnlich zu f wie möglich.
  - Abtastung des Integrationsbereich gemäß des Wertes im Integranden: „großer Beitrag = mehr Samples“
  - Schnellere Konvergenz

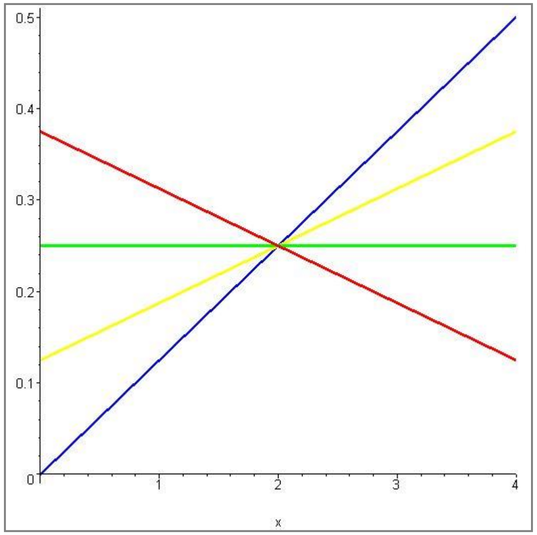
Importance Sampling

- Beispiel:
  - Berechne Integral von f(x) = x mittels MC-Integration mit Importance Sampling:

$$I = \int_0^4 x dx = 8$$

PDF	Varianz	#Samples für std. dev von 0.008
(6-x)/16	56.8/N	887,500
1/4	21.3/N	332,812
(x+2)/16	6.4/N	98,432
x/8	0	1

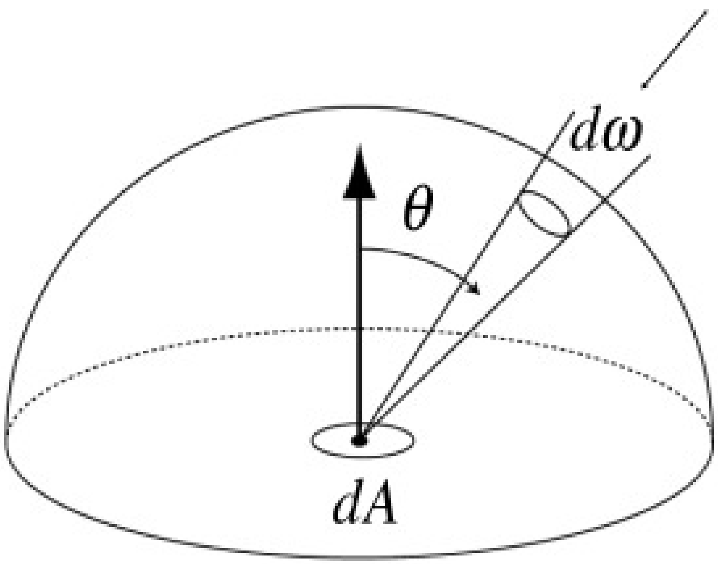




Irradianz-Schätzer – Cosinus-Sampling

- Zu schätzendes Integral:

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$



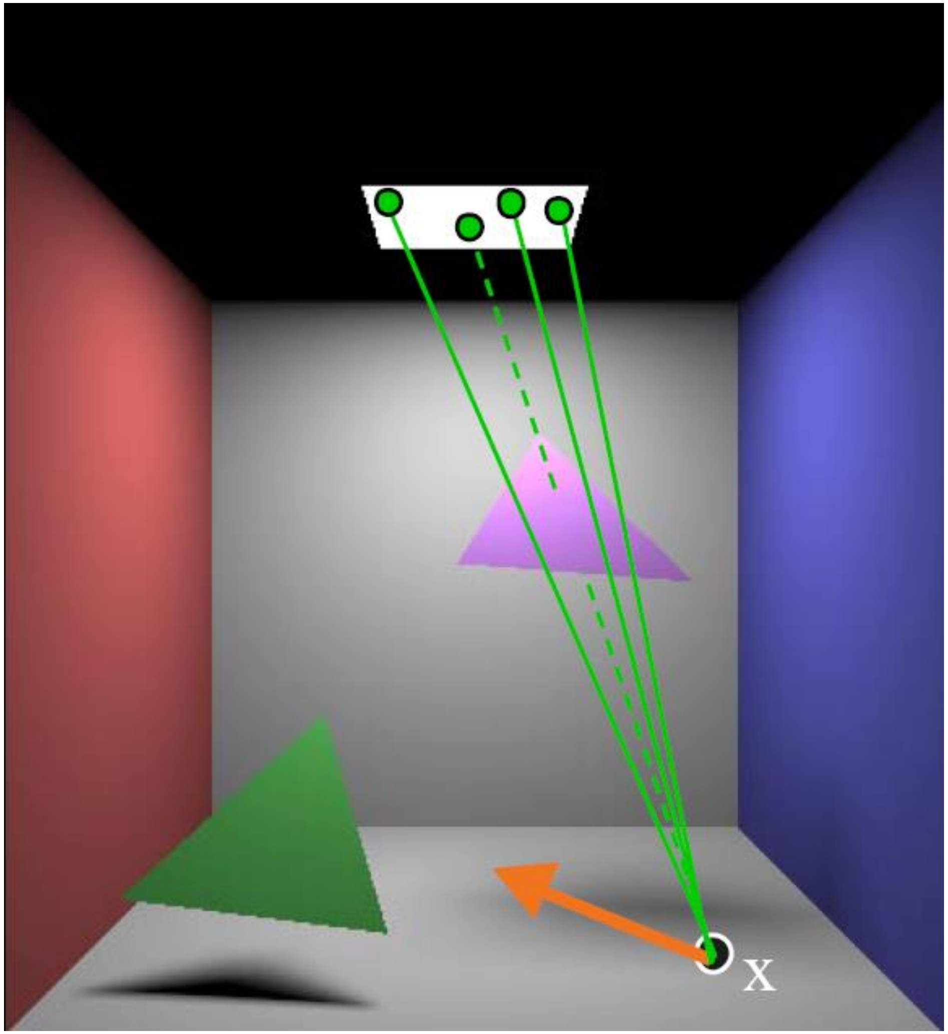
- PDF für cosinus-gewichtetes Sampling:

$$\boxed{p(\omega) = \frac{\cos\theta}{\pi}}$$

- Schätzer:

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_{\mathrm{i},k})}{p(\omega_{\mathrm{i},k})} = \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k})$$

Irradianz-Schätzung – Abtastung der Lichtquelle



Irradianz-Schätzung – Abtastung der Lichtquelle

- Formuliere das Reflexionsintegral um (Substitution):

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x},\omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \,\mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$

$$= \int_A L_\mathrm{e}(\mathbf{y} \to \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot \underbrace{\frac{\cos\theta_\mathbf{y} \cdot \cos\theta_\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}}_{G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x})} \,\mathrm{d}A$$

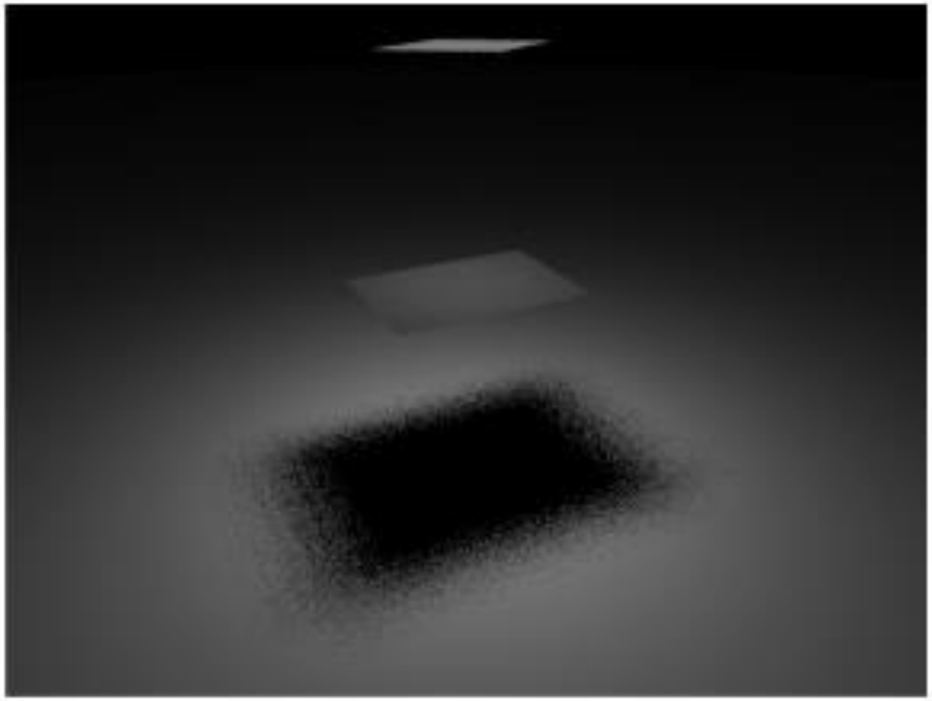
- PDF für uniformes Sampling der Oberfläche:

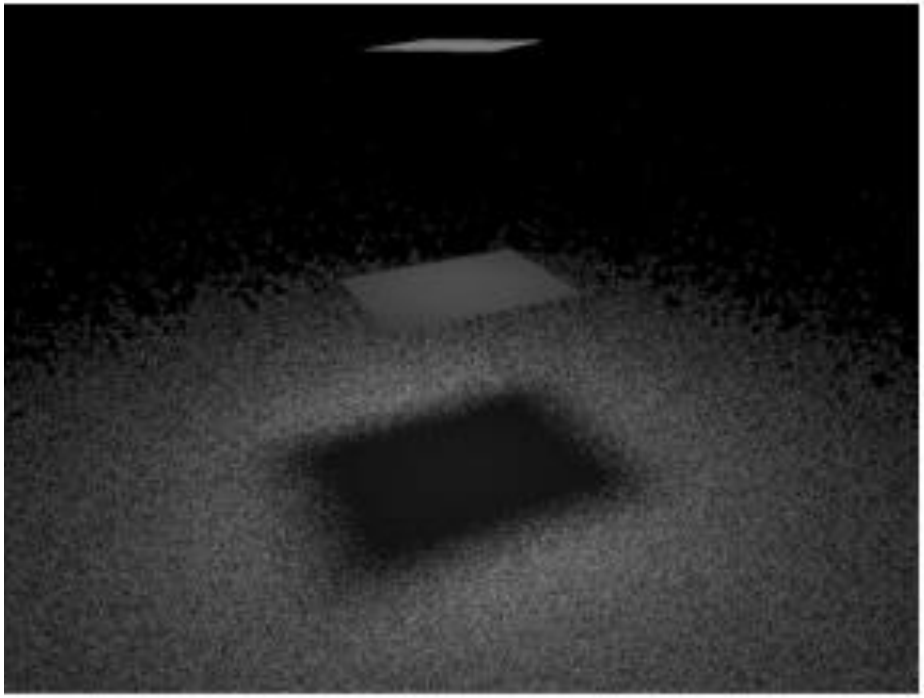
$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{|A|}$$

- **Schätzer**

$$F_N = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{e}(\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

Light source vs. cosine sampling



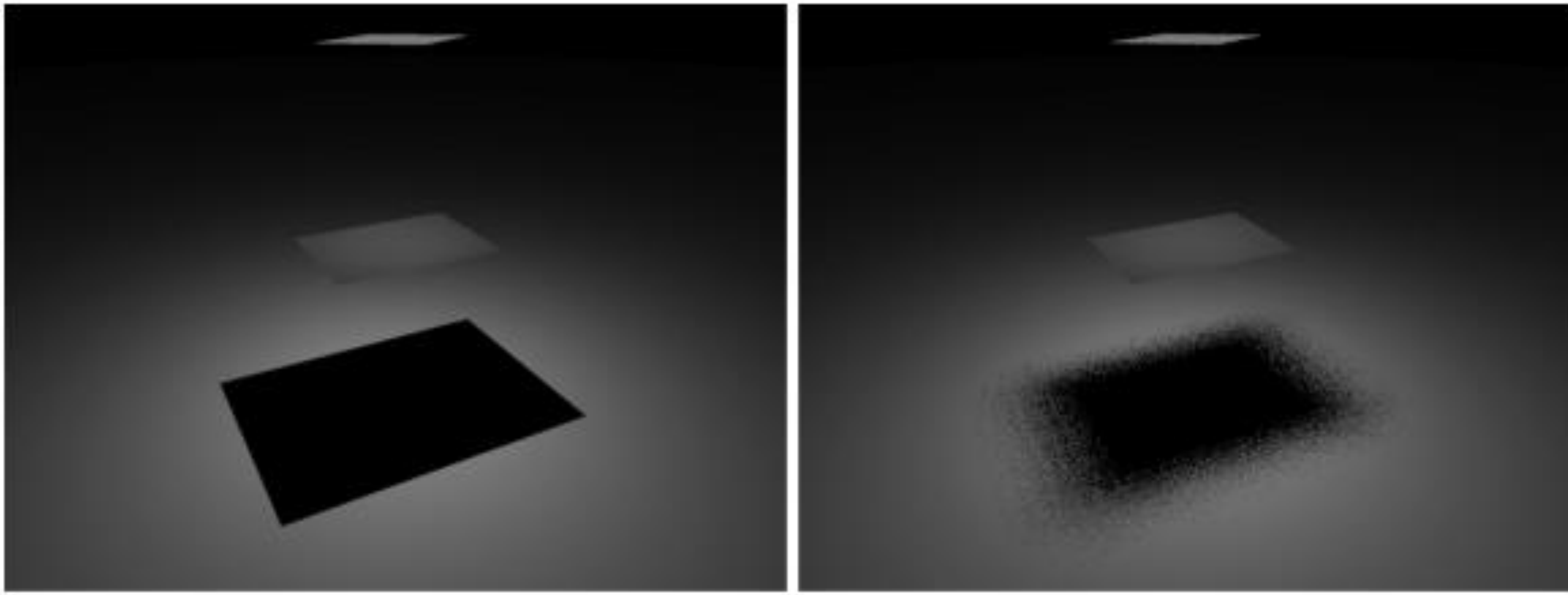


Light source **area sampling**

Cosine-proportional sampling

Images: Pat Hanrahan

Example – Area Sampling

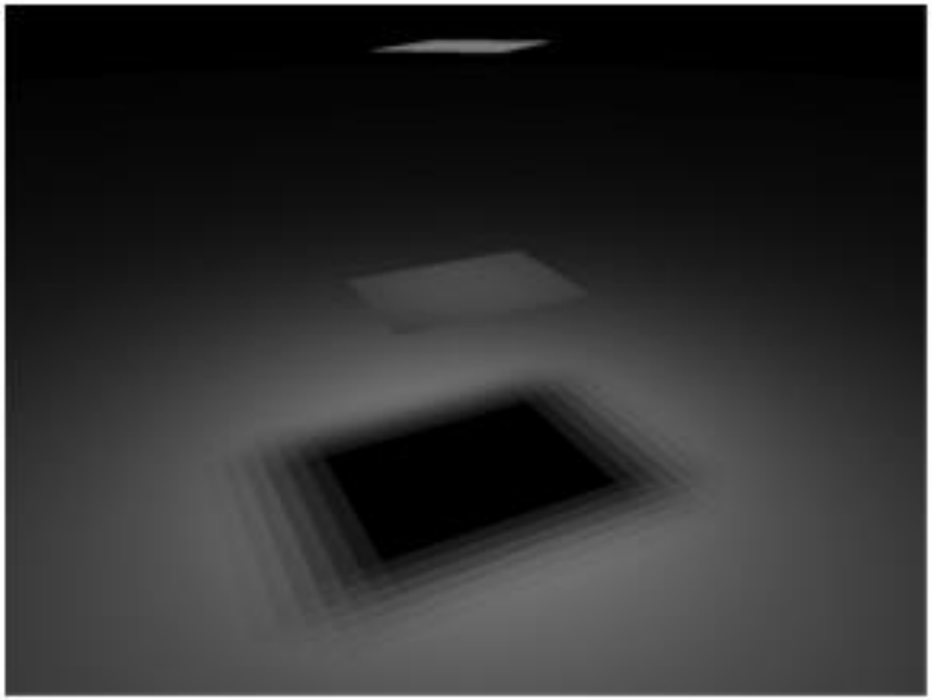


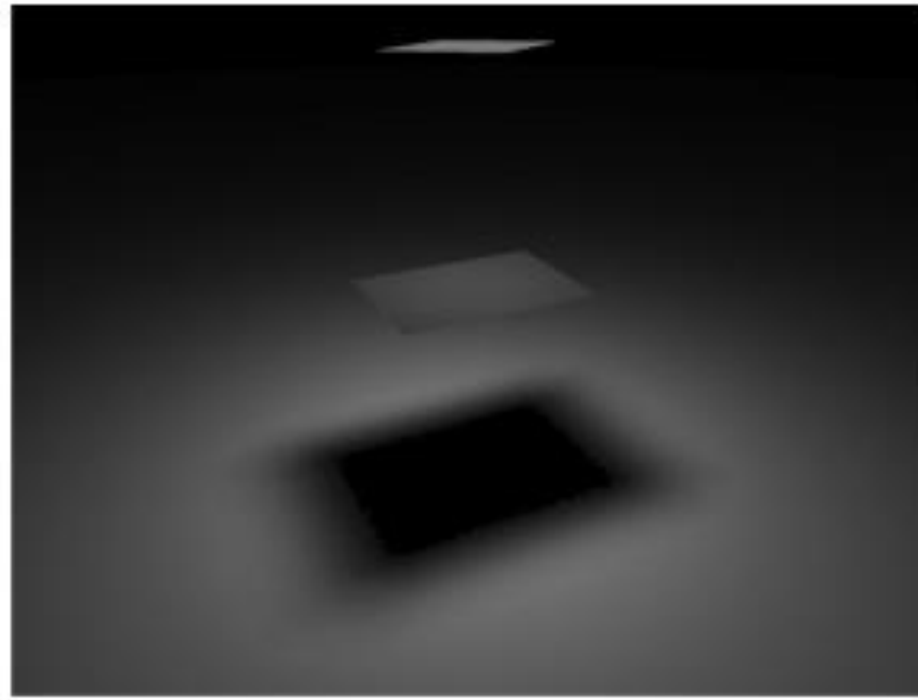
1 shadow ray per eye ray

Center

Random

Example – Area Sampling



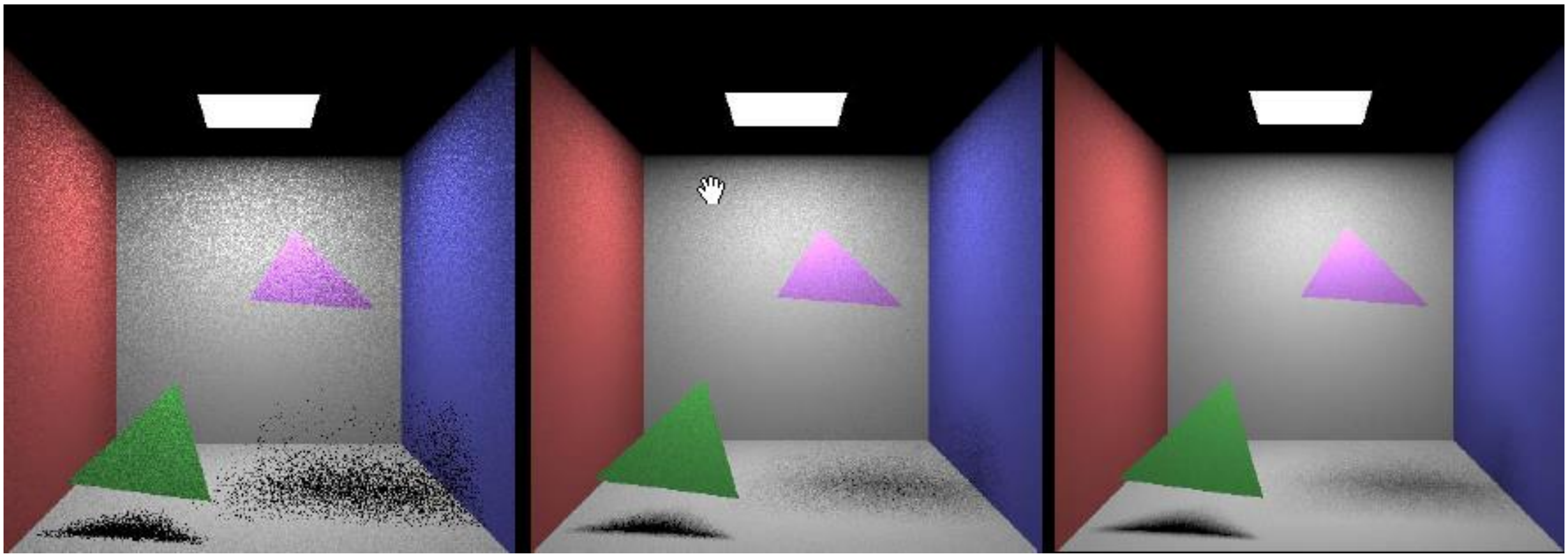


16 shadow rays per eye ray

Uniform grid

Stratified random

Area light sources



1 sample per pixel　　9 samples per pixel　　36 samples per pixel

Direkte Beleuchtung auf Oberfläche mit beliebiger BRDF

- Zu schätzendes Integral

$$L_{\mathrm{o}}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{o}}) = \int_A L_{\mathrm{e}}(\mathbf{y}\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}\to\mathbf{x}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot V(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\,\mathrm{d}A$$

- Schätzer basierend auf uniformem Sampling der Lichtquelle

$$F_N = \frac{|A|}{N}\sum_{k=1}^{N} L_{\mathrm{e}}(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot V(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})$$