Übungszettel 4

Henning Lehmann, Darya Nemtsava, Paul Piecha

4.1

a) i) $\forall a \in \mathbb{R}: [\![a]\!]_{R_1} = \{b \in \mathbb{R} \mid |a| = |b|\} = \{a, -a\}$

ii) $[\![a]\!]_{R_2^p} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z}: a - b = zp\}$ für konstantes $p \in \mathbb{N}$.

$$a - b = z \cdot p$$

$$\Leftrightarrow a - z \cdot p = b$$

$$\Rightarrow [\![a]\!]_{R_2^p} = \{\dots, a - 2p, a - p, a, a + p, a + 2p, a + 3p, \dots\}$$

$$= \{a - zp \mid a, z \in \mathbb{Z}\}$$

$$= [\![a]\!]_{\equiv_p}$$

b) i) $[\![33]\!] \oplus_{25} [\![173]\!] = [\![206]\!]_{\equiv_{25}}$

$$= [\![206 \bmod 25]\!]$$

$$= [\![6]\!]$$

ii) $[\![17]\!] \otimes_{13} [\![23]\!] = [\![4]\!] \otimes_{13} [\![10]\!]$

$$= [\![40]\!]_{\equiv_{13}}$$

$$= [\![40 \bmod 13]\!]$$

$$= [\![1]\!]$$

4.2

a) Zu zeigen: $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(1) Reflexivität: $a_1 \sim a_1 \Rightarrow f(a_1) = f(a_1)$ ✓

(2) Symmetrie: $a_1 \sim a_2 \Rightarrow a_2 \sim a_1$

$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f(a_2) = f(a_1)$ ✓

(3) Transitivität: $(a_1 \sim a_2 \wedge a_2 \sim a_3) \Rightarrow a_1 \sim a_3$

$\Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \wedge f(a_2) = f(a_3))$

$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$

$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_3)$ ✓

Aus (1), (2) und (3) folgt: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Def. von p:

(1) $p : A \rightarrow C, \quad p : a \mapsto [\![a]\!]_\sim$ für alle $a \in A$.

(2) $\forall a_1, a_2 \in A : [\![a_1]\!]_\sim = [\![a_2]\!]_\sim \Leftrightarrow a_1 \sim a_2$

Def. Äquivalenzklasse

Aus (1) und (2) folgt: $p(a_1) = p(a_2) \Leftrightarrow a_1 \sim a_2$