LudS - Übungszettel 2

Henning Lehmann
Darya Nemtsava
Paul Piecha

Afg. 2.1

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

Induktionsanfang: $n = 1$

$\sum_{i=1}^{1} i \cdot 2^i = 1 \cdot 2^1 = 2$, $\quad (1-1) \cdot 2^{n+1} + 2 = 0 \cdot 4 + 2 = 2$ ✓

Induktionsannahme:

$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$ gilt für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \, 2^i = (n+1)2^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i \overset{\text{lt. Induktionsannahme}}{=} (n+1)2^{n+1} + (n-1)2^{n+1} + 2$$
$$= 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} + 2$$
$$= n \cdot 2^{n+2} + 2$$

$\Rightarrow$ Die Annahme gilt für $n+1$. $\square$

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n} \wedge n \geq 2$

Induktionsanfang: $n=2$

$$\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i}\right)= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsannahme:

$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}$ gilt für alle $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss:

$$\prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right) \overset{\text{lt. Induktionsannahme}}{=} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot \frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{n+1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{n}{n\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$ Annahme gilt für $n+1$. $\square$

Bonus:

$$\prod_{i=2}^{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-1)}}\cdot\frac{\cancel{(n-1)}}{n}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$\square$

Afg. 2.2

1.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

Alternativ: $\forall x \in \mathbb{Q} : \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : \exists x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = z^n$

2.

$\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \neg(\neg(x \in \mathbb{Q}) \vee \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \wedge \neg(\sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$

Alternativ:

$\neg(\forall x \in \mathbb{Q} : \sqrt{x} \in \mathbb{Q})$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$

$\neg(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : \exists x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = z^n)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : \neg(\exists x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = z^n)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : \forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n \neq z^n$