Einführung in die Computergrafik

Matthias B. Hullin

Institut für Informatik II, Universität Bonn

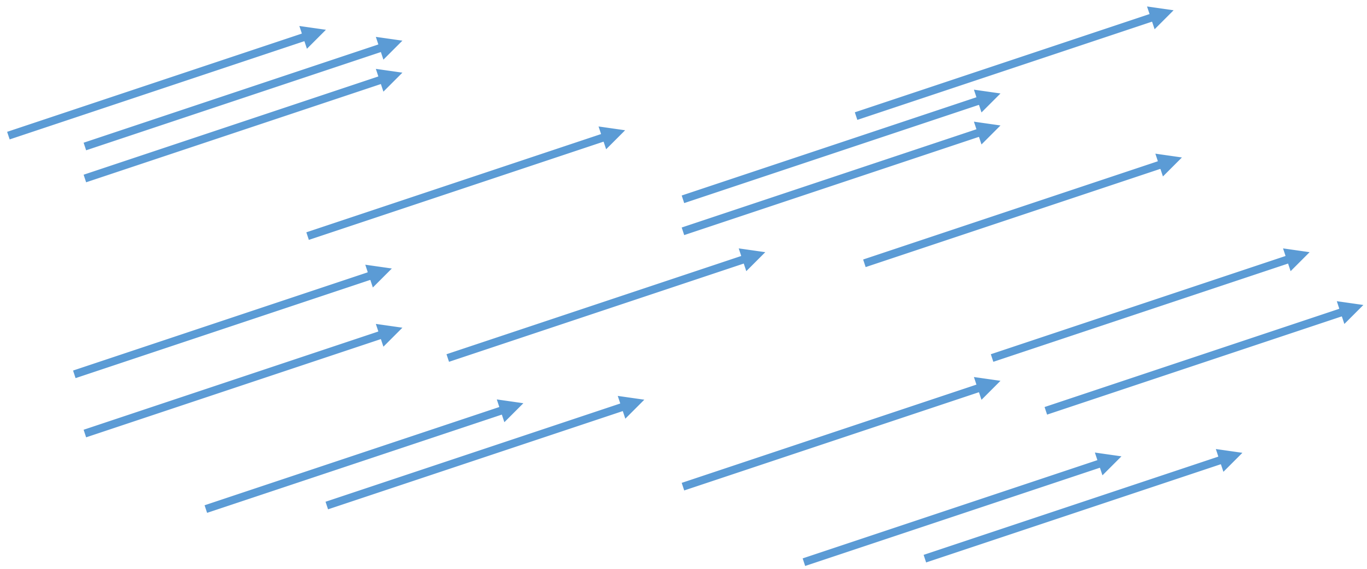
Kleine Auffrischung in euklidischer Geometrie

Vektoren

- Der n-dimensionale reelle euklidische Raum wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.
- Ein Vektor $\mathbf{v}$ in diesem Raum ist ein n-Tupel, also eine geordnete Liste reeller Zahlen:
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ mit $v_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n-1$.
- Die $v_0, \dots, v_{n-1}$ heißen Koeffizienten oder Komponenten von $\mathbf{v}$.
- Beachte die Schreibweise: v Skalar, $\mathbf{v}$ Vektor.

Geometrische Interpretation von Vektoren

- Ein Vektor repräsentiert eine “Verschiebung” (Translation)



- Jeder Vektor steht stellvertretend für alle Pfeile gleicher Länge und Orientierung. Daher schreibt man oft auch $\vec{v}$ statt $\mathbf{v}$. (Manchmal auch nur v, z.B. auf Übungsblatt 2)

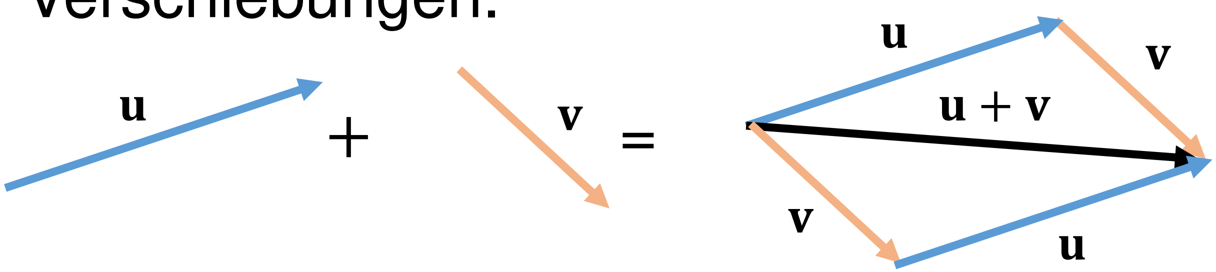
Rechenoperationen

(das Ergebnis ist wieder ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$)

- **Addition**:

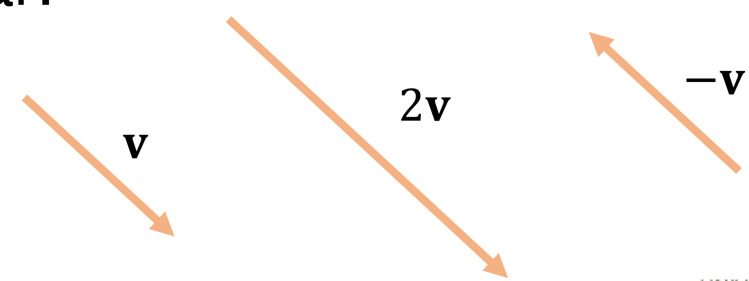
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} + v_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Anschaulich: Die Addition von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ entspricht der Hintereinanderausführung der jeweiligen Verschiebungen.



- **Multiplikation** mit Skalar:

$$a\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a v_0 \\ \vdots \\ a v_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$



Eigenschaften

Für die Vektoraddition:

- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ — Assoziativität
- $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ — Kommutativität
- $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$ — Neutrales Element $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$
- $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$ — Inverses Element $-\mathbf{v}$

Für die Multiplikation mit Skalar:

- $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$ — (gemischte) Assoziativität
- $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ — Distributivität 1
- $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ — Distributivität 2
- $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$ — Neutrales Element 1
- $a\neq 0$: $\frac{1}{a}(a\mathbf{u})=\mathbf{u}$ — Inverses Element $\frac{1}{a}$

Skalarprodukt (auch inneres Produkt / dot product)

Definition:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i v_i \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0; \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

(Dies ist die **Definition** von Orthogonalität. Hieraus folgt unter anderem, dass der Nullvektor orthogonal zu allen Vektoren einschließlich sich selbst ist.)

Alternative Schreibweise: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Norm

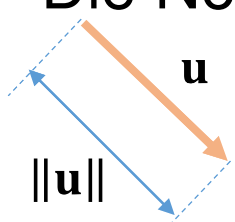
Definition:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2} \quad \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{u}\| = |a|\,\|\mathbf{u}\|$
- $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Dreiecksungleichung)
- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$ (Cauchy-Schwartz-Ungleichung)

- Die Norm entspricht der **Länge** des Vektors.



Häufig sagt man auch „**Betrag**“ und/oder schreibt einfach u.

Einheitsvektoren

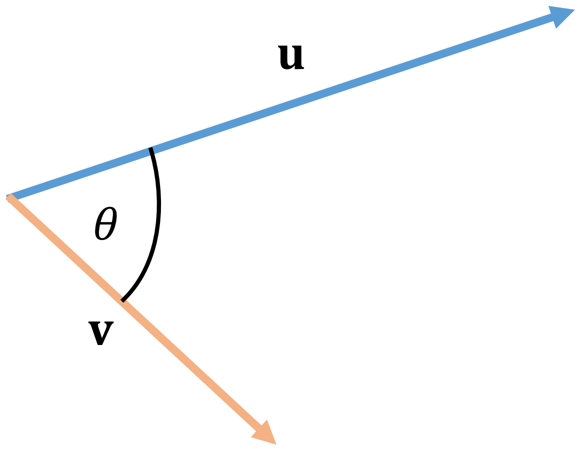
- Ein Vektor der Länge/Norm 1 wird als Einheitsvektor bezeichnet.

- Jeder Vektor außer $\mathbf{0}$ lässt sich auf einen Einheitsvektor **normieren**:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

Skalarprodukt und Winkel

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\big(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big)$



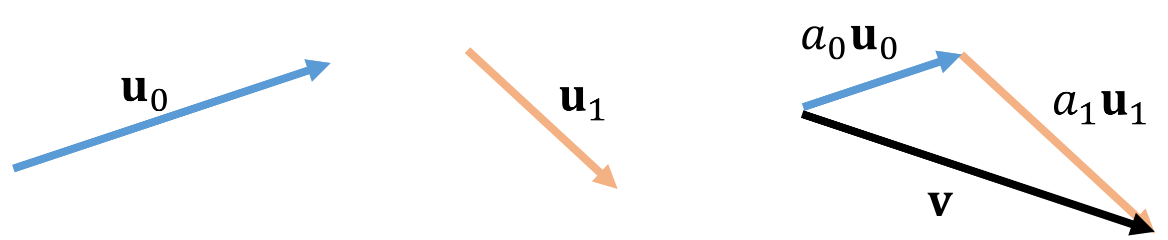
- Gegeben $\mathbf{u}, \mathbf{v}$; gesucht θ

- $\theta = \arccos(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}})$

Lineare Unabhängigkeit

- Gegeben seien Vektoren $\{\mathbf{u}_i\}$, mit denen folgende **Linearkombination** mit Gewichten a_i gebildet wird:

$$\mathbf{v} = a_0\mathbf{u}_0 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$$



Setze $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Wenn die einzigen Gewichte, die die obige Gleichung lösen, $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ sind, heißen die Vektoren $\{\mathbf{u}_i\}$ „**linear unabhängig**".

Beispiel: $u_0 = \binom{6}{3}, u_1 = \binom{-2}{-1}$ sind **nicht** l.u., denn die Gleichung hat die nichttriviale Lösung $a_0 = 1,\ a_1 = 3$.

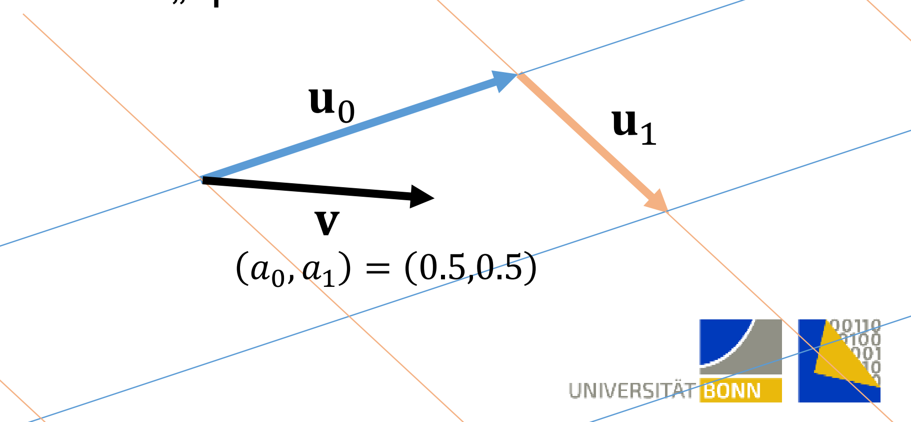
Basis

- Die **Dimension** d eines linearen Vektorraums ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren $\{\mathbf{u}_i\}$, die in ihm existieren können.

- Jede solche maximale Menge von Vektoren bildet eine **Basis** des Vektorraums – jedes Element $\mathbf{x}$ des Raums lässt sich als Linearkombination dieser d Vektoren ausdrücken:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \mathbf{u}_i$$

Man sagt, die Basisvektoren „spannen den Raum auf".



Die a_i heißen **Koordinaten** von $\mathbf{x}$ in der Basis $\{\mathbf{u}_i\}$.

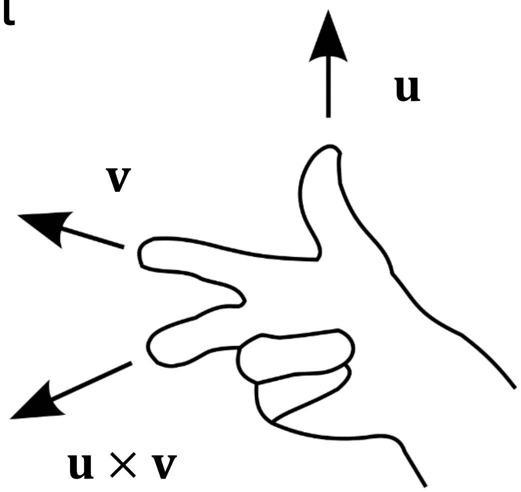
Kanonische Basis

- Die natürliche oder „kanonische" Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden die Vektoren
- $\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- Weil sie paarweise orthogonal und zudem alle Einheitsvektoren sind, sprechen wir von einer **Orthonormalbasis.**

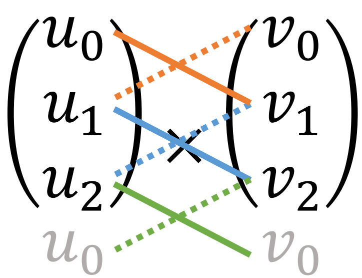
Spezialfall $\mathbb{R}^3$ und Kreuzprodukt

- Im $\mathbb{R}^3$ nennen wir die Basisvektoren gerne $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$, und die Komponenten des Vektors $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Wir definieren zudem ein weiteres Produkt $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:
  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ und $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$
  - $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \sin\big(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big)$
  - $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bilden ein Rechtssystem

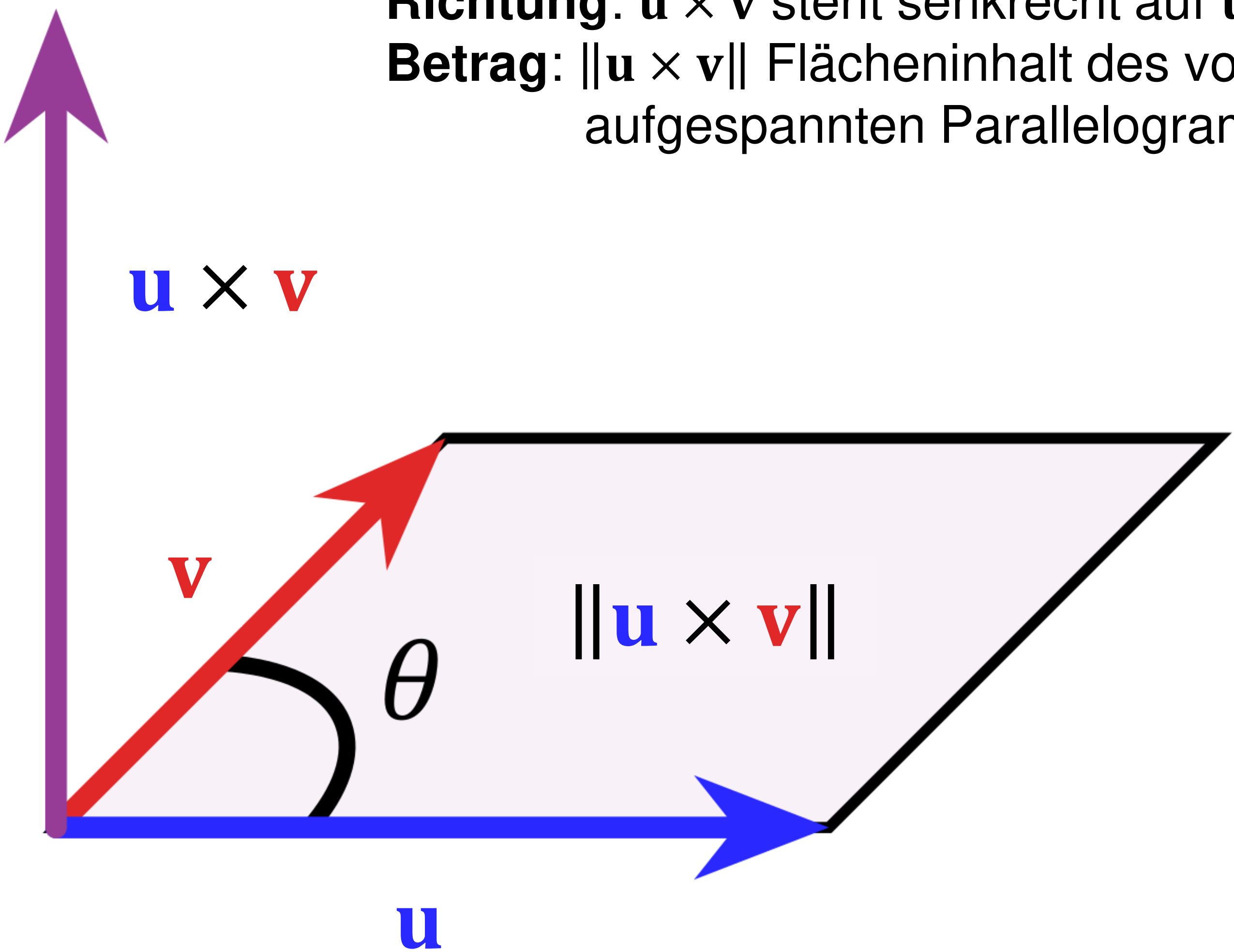


  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u_2 v_0 - u_0 v_2 \\ u_0 v_1 - u_1 v_0 \end{pmatrix}$



Geometrische Deutung des Kreuzprodukts

Richtung: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ steht senkrecht auf $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$
Betrag: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ Flächeninhalt des von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Parallelogramms



Lineare Transformationen

Eine lineare Transformation ist eine Funktion $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $T(a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

Wir drücken diese Transformationen durch $n \times n$ Matrizen aus. Z.B. im $\mathbb{R}^2$:

$$T(\mathbf{u}) = M\mathbf{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{xx}x + m_{xy}y \\ m_{yx}x + m_{yy}y \end{pmatrix}$$

Lineare Transformationen können auch bequem auf mehrere Punkte angewendet werden via Matrix-Matrix-Produkt:

$$M\big[[\mathbf{u}_0][\mathbf{u}_1]\cdots\big] = \big[[M\mathbf{u}_0][M\mathbf{u}_1]\cdots\big]$$

Lineare Transformationen

Abbildung des Einheitsvektors $\mathbf{e}_i$ ist die i-te Spalte der Matrix.

$$T(\mathbf{u}) = M\mathbf{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{xx}x + m_{xy}y \\ m_{yx}x + m_{yy}y \end{pmatrix}$$

Lineare Transformationen sind durch die Bilder der Basisvektoren vollständig bestimmt.

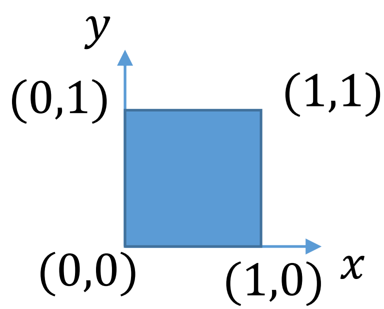
Z.B. im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = a_0\mathbf{x} + a_1\mathbf{y} + a_2\mathbf{z}$$
$$T(\mathbf{v}) = a_0T(\mathbf{x}) + a_1T(\mathbf{y}) + a_2T(\mathbf{z})$$

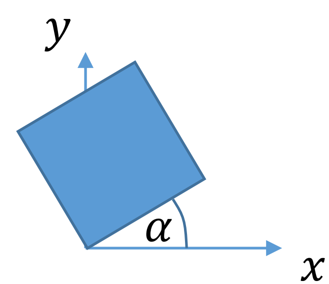
Es genügt also, sich anzusehen, wie die Transformation auf die Koordinatenachsen wirkt.

Beispiele linearer Transformationen im $\mathbb{R}^2$

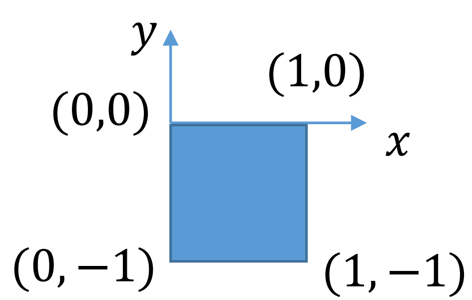
- Input: Einheitswürfel



- $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$: Rotation

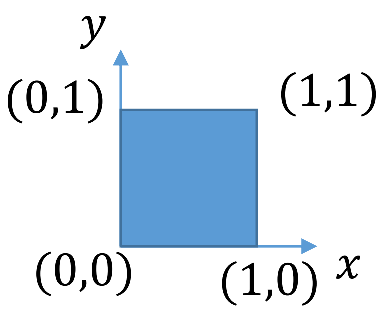


- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Spiegelung

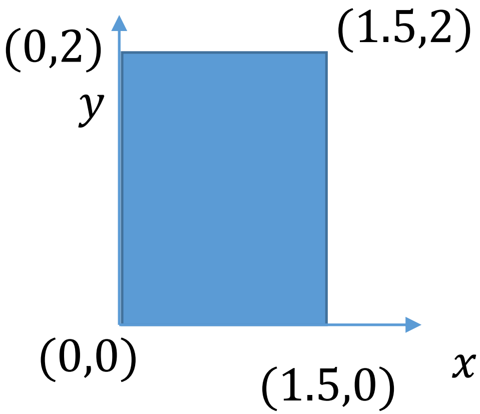


Beispiele linearer Transformationen im $\mathbb{R}^2$

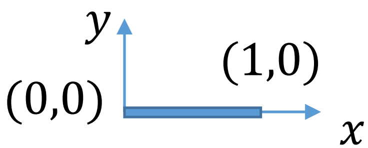
- Input: Einheitswürfel



- $\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: Skalierung

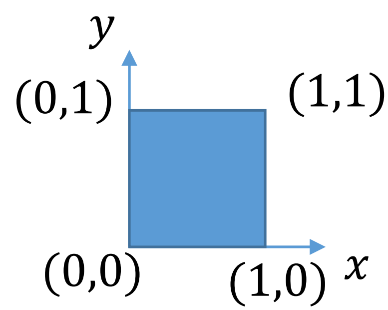


- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Projektion

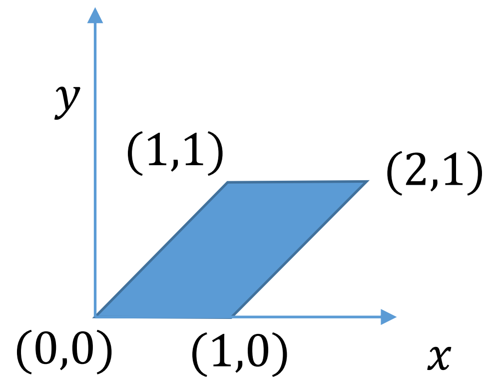


Beispiele linearer Transformationen im $\mathbb{R}^2$

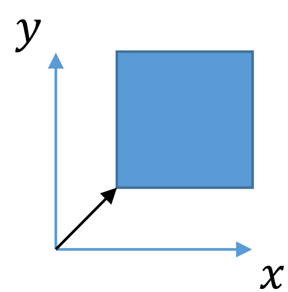
- Input: Einheitswürfel



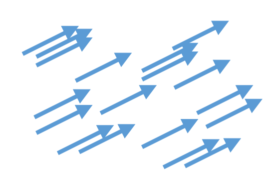
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Scherung



- Was ist mit Translation?
  Keine lineare Transformation.



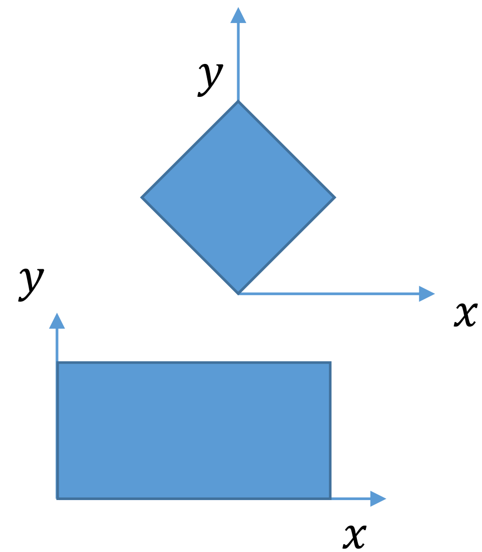
- Außerdem: Vektoren selbst repräsentieren Verschiebung.



All diese Pfeile sind derselbe Vektor.

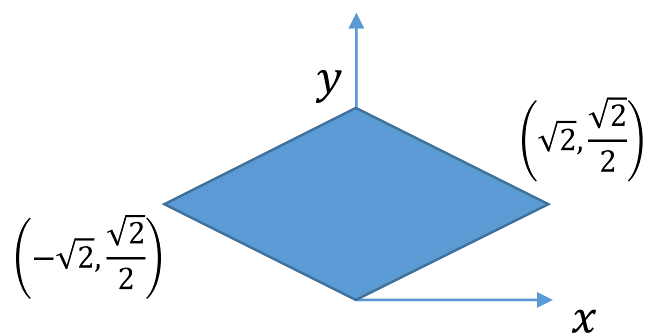
Verkettung / Hintereinanderausführung

- z.B. Rotiere um 45°, dann skaliere um Faktor 2 in x-Richtung



- $M_{\mathrm{rot},45°} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
- $M_{\mathrm{scale}X,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $M_{\mathrm{total}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$



Hintereinanderausführung als Matrixprodukt wirkt von rechts nach links

Quiz: Rotation um beliebige Achse

- Wie man um beliebige Achse (durch den Ursprung) rotiert, werden wir noch ausführlicher lernen. (Eulerwinkel, Quaternionen, Rodrigues-Formel, usw.)
- Wir können es jedoch auch schon mit den zur Verfügung stehenden Mitteln konstruieren.
- Z.B. im $\mathbb{R}^3$: Rotiere um Winkel α um Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Rotiere um 45° um z-Achse → $M_{\mathrm{rot},z=45°}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Rotiere um α um y-Achse → $M_{\mathrm{rot},y=\alpha}$
3. Rotiere um -45° um z-Achse → $M_{\mathrm{rot},z=-45°}$

Gesamttransformation:

$$M_{\mathrm{tot}} = M_{\mathrm{rot},z=-45°}\, M_{\mathrm{rot},y=\alpha}\, M_{\mathrm{rot},z=45°}$$

UNIVERSITÄT BONN

Starre Transformationen

- Eine Transformation T heißt **starr** (engl. rigid), wenn sie Abstände erhält, d.h., wenn für alle Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\|T(\mathbf{p}) - T(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$$

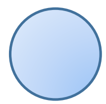
Starre Transformationen umfassen

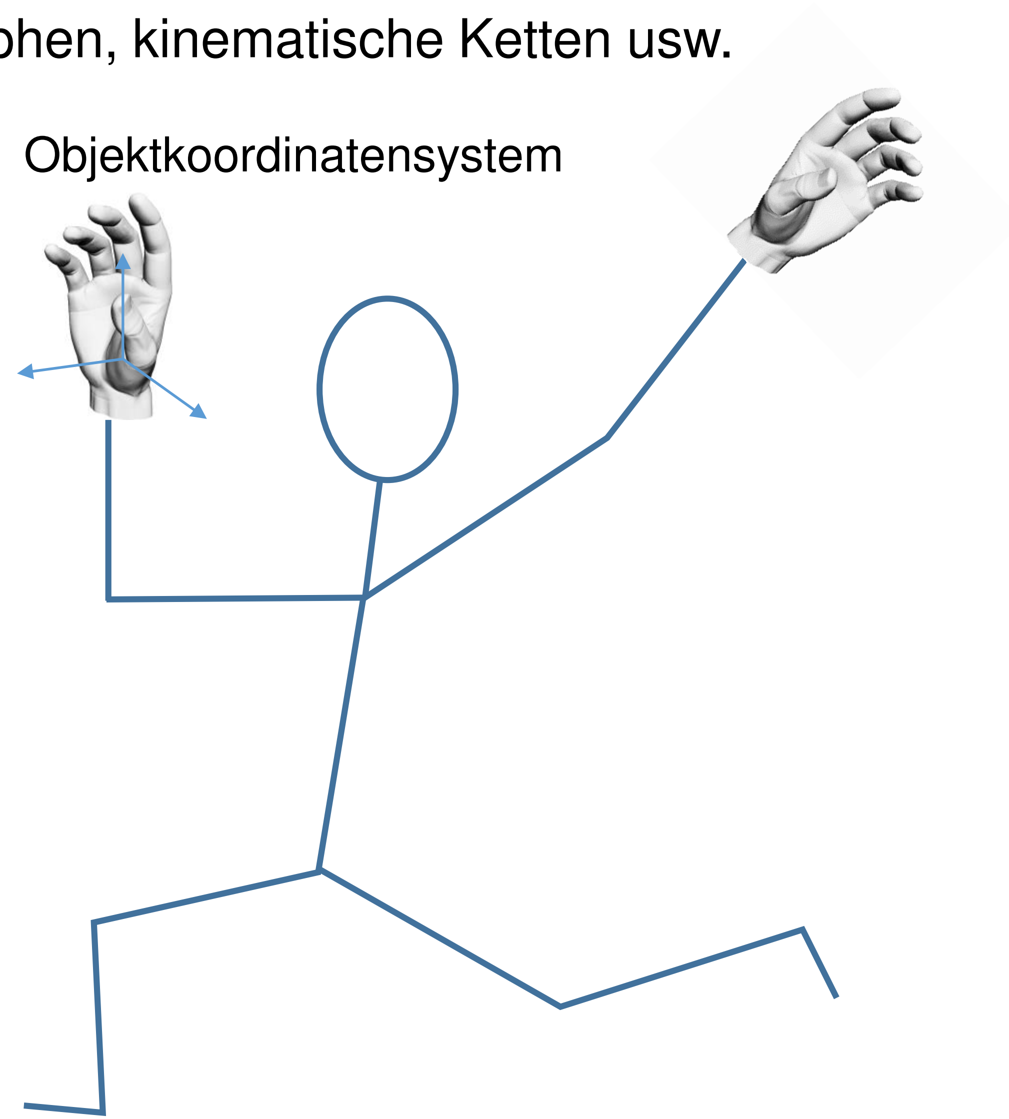
- Rotationen (linear) – $\det(M) = 1$
- Spiegelungen (linear) – $\det(M) = -1$
- Translationen (nichtlinear, aber *machen* wir gleich linear mittels homogener Koordinaten).

Rotations- und Spiegelungsmatrizen sind **orthogonal**, d.h. $M^\top = M^{-1}$ und Spalten- und Zeilenvektoren von M bilden eine Orthonormalbasis

Koordinatensysteme

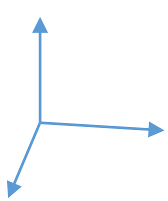
Sehr wichtig für Szenengraphen, kinematische Ketten usw.





Z.B.:

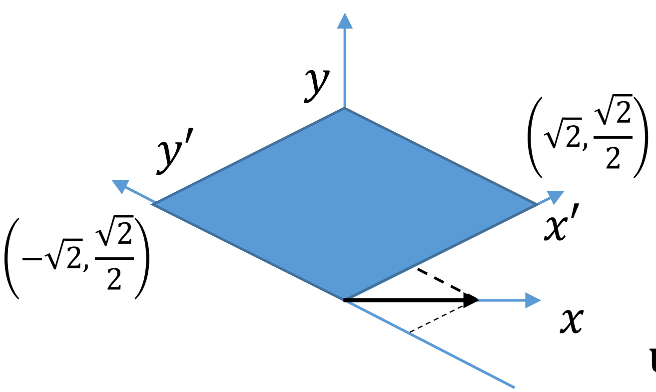
- **Gegeben**: Position von Ball und Hand in Weltkoordinaten
- **Gesucht**: Ball in Koordinatensystem der Hand ausgedrückt



Koordinatensysteme

Transformationen wirken auf das Koordinatensystem und alle Objekte, die in ihm leben.

- Gegeben: Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ von Koordinaten bezogen auf kanonische Achsen x, y
- Gesucht: Vektor $\mathbf{u}'$ von Koordinaten bezüglich der durch T transformierten Achsen x', y' ausgedrückt
- Lösung: $\mathbf{u}' = T^{-1}\mathbf{u}$ (Transformation eines Koordinatensystems wirkt invers auf die Koordinaten der in ihm lebenden Vektoren)



$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{x}' - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{y}'$$

Repräsentation von Punkten im Raum

- Vektoren werden oft auch genutzt, um Punkte im Raum anzugeben. In etwa:

- Der Vektor $\mathbf{v}$ verschiebt den Ursprung $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ an einen neuen Punkt. **Umgangssprachlich** bezeichnen wir diesen Punkt auch mit dem Vektor $\mathbf{v}$.
- **Vorsicht**! Das Gleichsetzen von Punkten und Verschiebungen birgt Gefahren. Darum wollen wir sie lieber gleich deutlich unterscheidbar machen.

- Durch Verbindung eines Vektorraums mit einem Ursprung erhalten wir den **affinen Raum** A^n. Seine Elemente sind Positionen, nicht Verschiebungen.

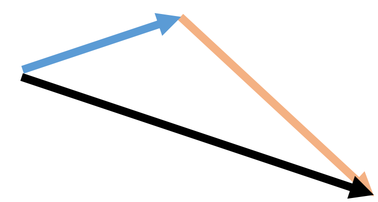
Operationen im affinen Raum

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$ korrespondieren mit einem $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$\longrightarrow$: eindeutig; $\longleftarrow$: mehrdeutig

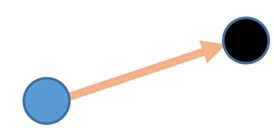
- Vektor plus Vektor = Vektor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+d \end{pmatrix}$$



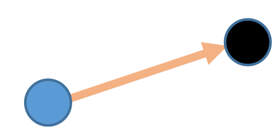
- Punkt plus Vektor = Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \end{pmatrix}$$



- Punkt minus Punkt = Verschiebung

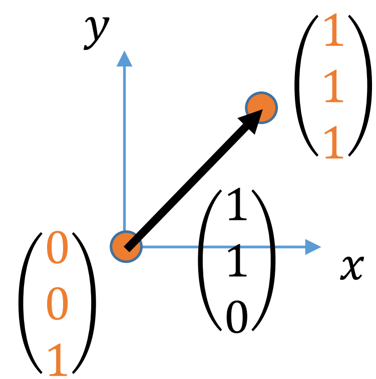
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



UNIVERSITÄT BONN

Punkte und Verschiebungen

- **Affiner Raum**: Elemente sind Positionen/Punkte!
- **Vektorraum**: Elemente sind Verschiebungen
- **Homogene Koordinaten** vereinigen beide Räume, indem wir Vektoren um eine Komponente erweitern.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$
- $w = 0$ (oder weglassen): Verschiebung
- $w = 1$: Punkt (Vertex)



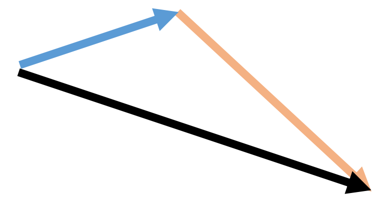
- **Äquivalenzrelation** $\mathbf{x} \asymp c\mathbf{x}$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ stellen denselben Punkt dar.

Einfache Arithmetik mit homogenen Koordinaten

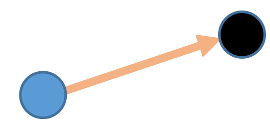
- Verschiebung plus Verschiebung = Verschiebung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+d \\ [0] \end{pmatrix}$$



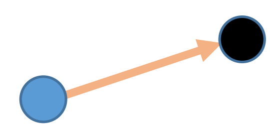
- Punkt plus Verschiebung = Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Punkt minus Punkt = Verschiebung

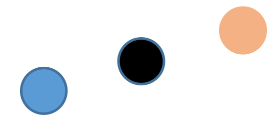
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ [0] \end{pmatrix}$$



Einfache Arithmetik mit homogenen Koordinaten

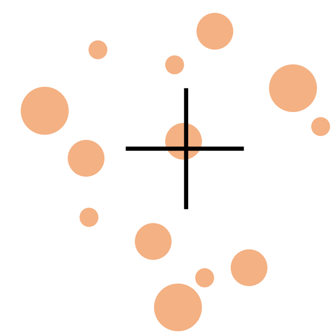
- Punkt plus Punkt = Mittelpunkt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \\ 2 \end{pmatrix} \asymp \begin{pmatrix} (a+c)/2 \\ (b+d)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Summe vieler Punkte (gewichtet oder ungewichtet) = Schwerpunkt

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \asymp \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i}$$



Transformationen in homogenen Koordinaten

- Die alten $n \times n$-Matrizen werden um eine Zeile und eine Spalte erweitert.

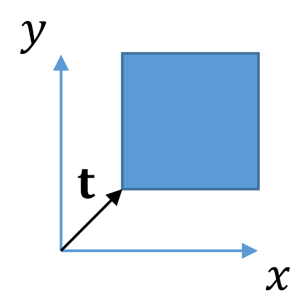
- $M_{\text{hom,2D}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix} & p_w \end{pmatrix}$

- $M_{\text{hom,3D}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} & p_w \end{pmatrix}$

Translation ist jetzt eine lineare Transformation

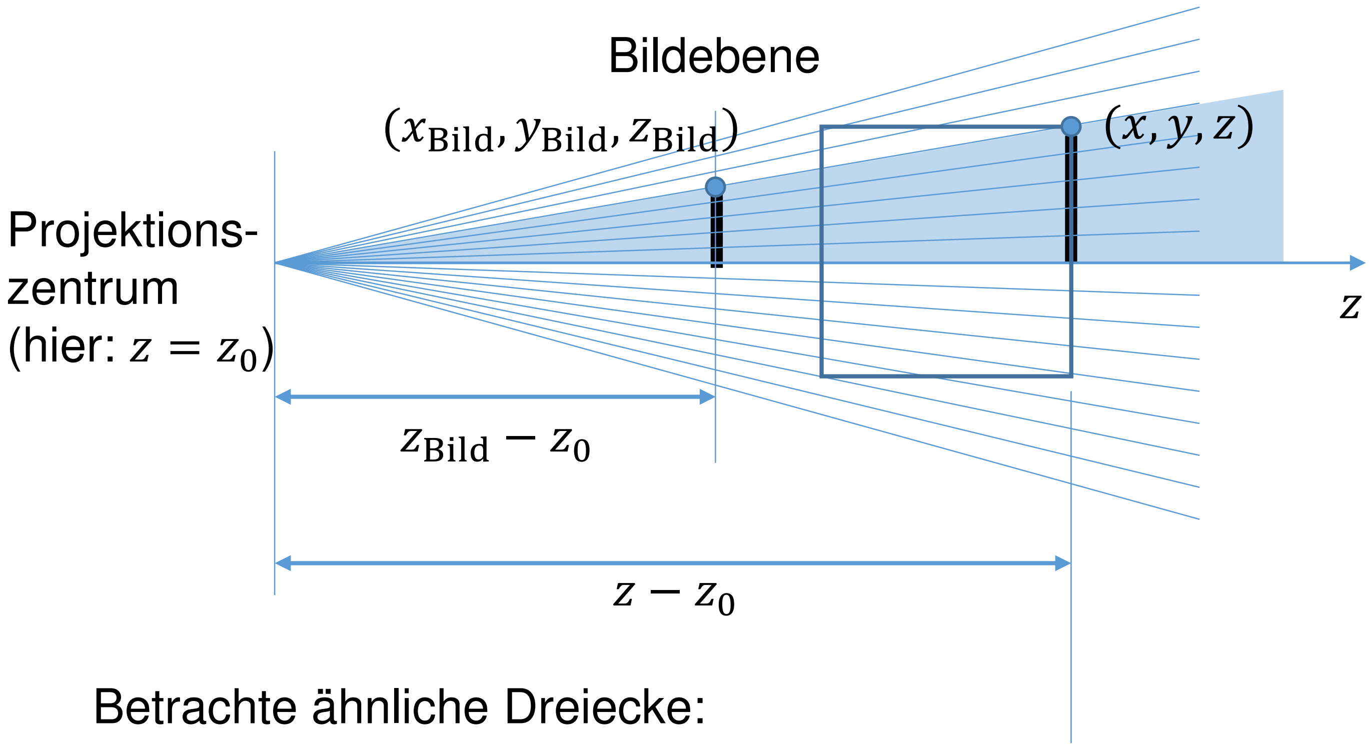
- $$M_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{pmatrix} \\ (0\quad 0\quad 0) & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{pmatrix} =: \mathbf{t}$$

- $$M_{trans}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\1\end{pmatrix}$$



- Translation ist auch eine starre Transformation (längenerhaltend), jedoch in homogenen Koordinaten nicht orthogonal

Perspektivische Verkürzung



Betrachte ähnliche Dreiecke:

$$\frac{x}{z - z_0} = \frac{x_{\text{Bild}}}{z_{\text{Bild}} - z_0}$$

$\Rightarrow$ Projektion von Punkt $(x, y, z)^\top$ in die Bildebene:

$$(x, y)_{\text{Bild}} = (x, y)\,\frac{z_{\text{Bild}} - z_0}{z - z_0}$$

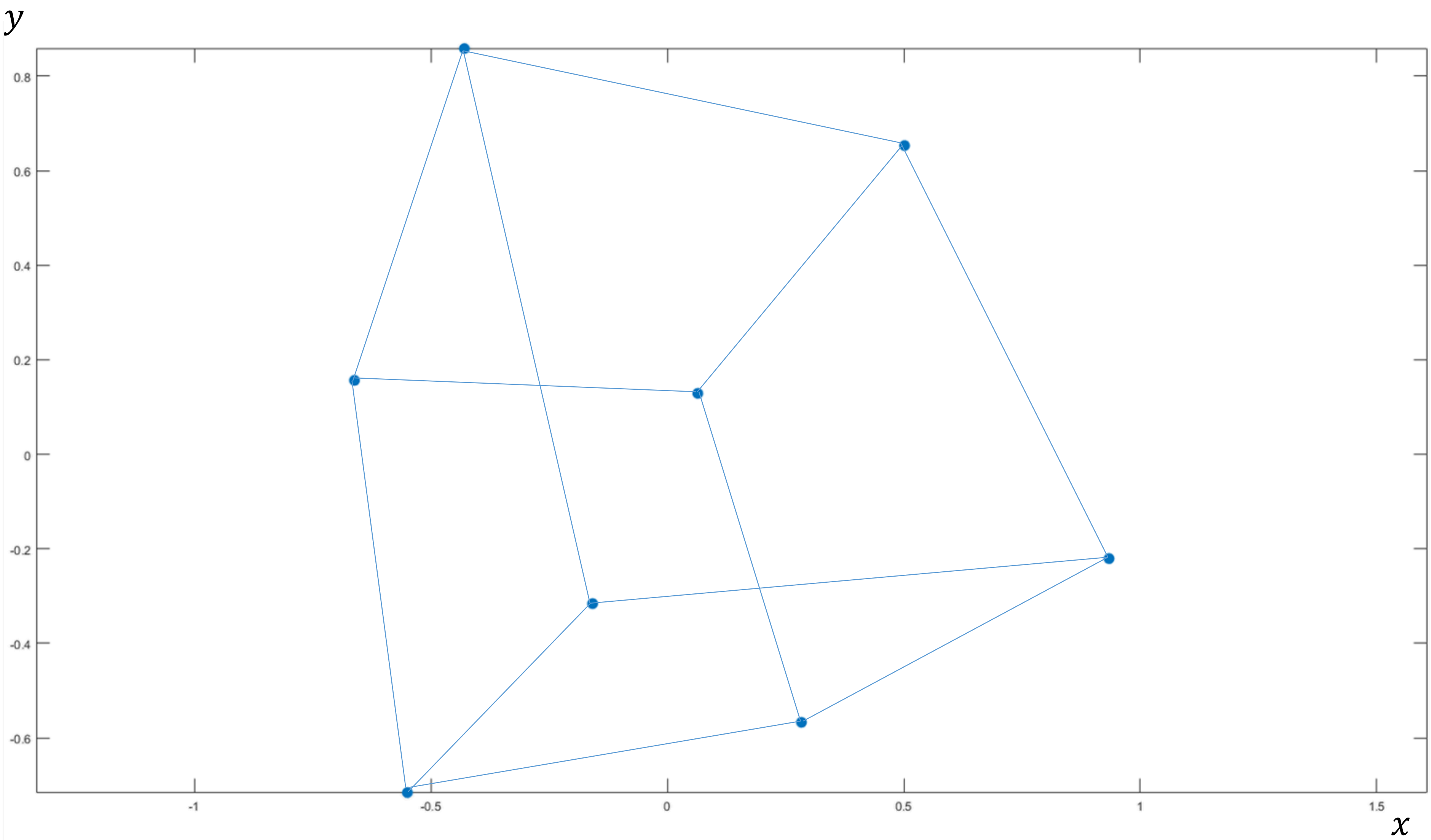
Perspektivische Projektion in hom. Koord.

- $M_{\text{proj},z_0} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{z_{\text{Bild}} - z_0} \end{pmatrix} & \frac{-z_0}{z_{\text{Bild}} - z_0} \end{pmatrix}$
- $M_{\text{proj},z_0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ {}^{z-z_0}\!/_{z_{\text{Bild}}-z_0} \end{pmatrix}$
- Nach Division von $\frac{z-z_0}{z_{\text{Bild}}-z_0}$: $(x, y, z)_{\text{Bild}} = \frac{z_{\text{Bild}}-z_0}{z-z_0}(x, y, z)$

Perspektivische Abbildung eines Würfels

- $\text{points} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $M_{\mathrm{rot},x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M_{\mathrm{rot},y} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $M_{\mathrm{proj}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}$
- $\alpha = \beta = 30° \Rightarrow M_{\mathrm{total}} = M_{\mathrm{proj}} M_{\mathrm{rot},y} M_{\mathrm{rot},x} \approx \begin{pmatrix} 0.866 & -0.250 & -0.433 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.433 & 0.750 & 0 \\ 0.250 & 0.217 & 0.375 & -2.000 \end{pmatrix}$
- Projektion: Berechne $M_{\mathrm{total}} \cdot \text{points}$ und teile jeden Punkt durch sein w.

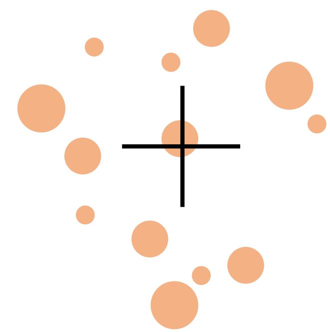
Perspektivisch projizierter Würfel



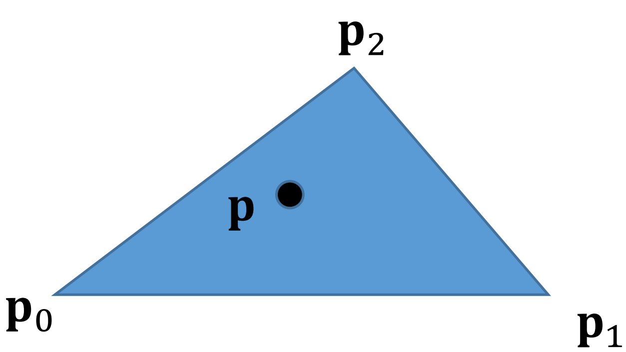
Baryzentrische Koordinaten [Möbius 1827]

- Summe vieler Punkte mit zugehörigem Gewicht ρ_i
  = Schwerpunkt/Baryzentrum

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \asymp \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i}$$



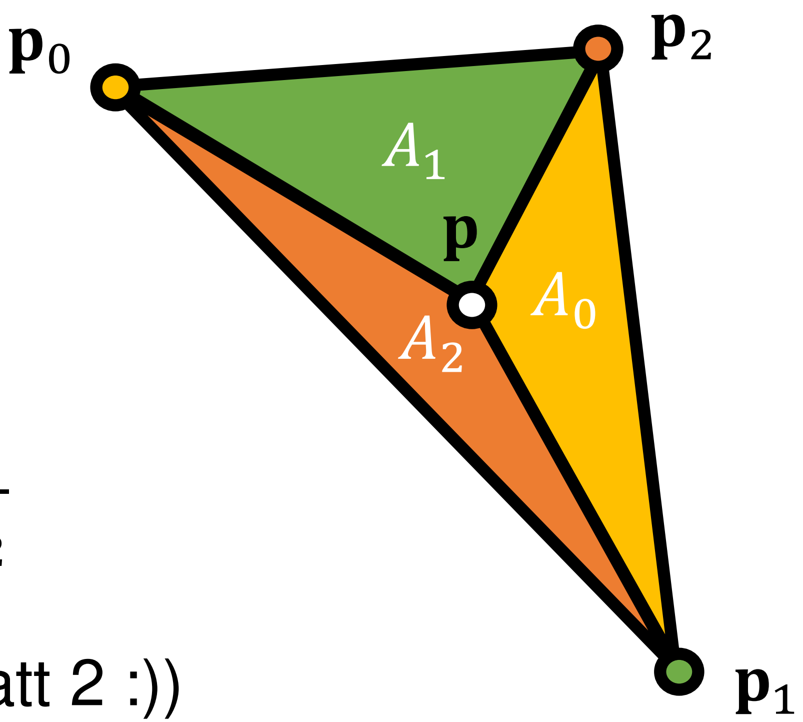
- Gegeben: Dreieck $\Delta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$,
  Punkt $\mathbf{p}$ in der
  Ebene des Dreiecks



- Gesucht: Gewichte ρ_0, ρ_1, ρ_2
  so dass
  $\mathbf{p} = \rho_0 \mathbf{p}_0 + \rho_1 \mathbf{p}_1 + \rho_2 \mathbf{p}_2$ und $\sum_i \rho_i = 1$

Baryzentrische Koordinaten (Schwerpunktskoord.)

- sind von immenser Bedeutung in der Computergrafik (Schnittpunktberechnung, Rasterisierung und Interpolation, Texture Mapping, ...)



Lösung:

$$\rho_i = \frac{A_i}{A_0 + A_1 + A_2}$$

(zu zeigen in Übungsblatt 2 :))

Basis und Koordinatensystem

Koordinatensystem

- Eine Menge $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ mit Punkt $O \in \mathbb{A}^n$ und Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ heißt Koordinatensystem von $\mathbb{A}^n$.

- Jeder Vektor $\mathbf{v} = (O, \mathbf{p})$ des Punktes $\mathbf{p} \in \mathbb{A}^n$ heißt Ortsvektor von $\mathbf{p}$. Der Punkt O besitzt die Koordinaten $(0, \dots, 0)$ und heißt Ursprung des Koordinatensystems. Die Punkte $\mathbf{p}_i = O + \mathbf{e}_i$ heißen Einheitspunkte, $(O, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ heißt affine Basis.

- Liegt das Koordinatensystem bereits fest, so identifiziert man häufig Punkte durch Ortsvektoren und verwendet die Bezeichnungen Punkt $\mathbf{p}_i$ und Vektor $\mathbf{v}_i$ synonym.

Wechsel des Koordinatensystems

Wechsel des Koordinatensystems betreffen Ursprung und Basis!

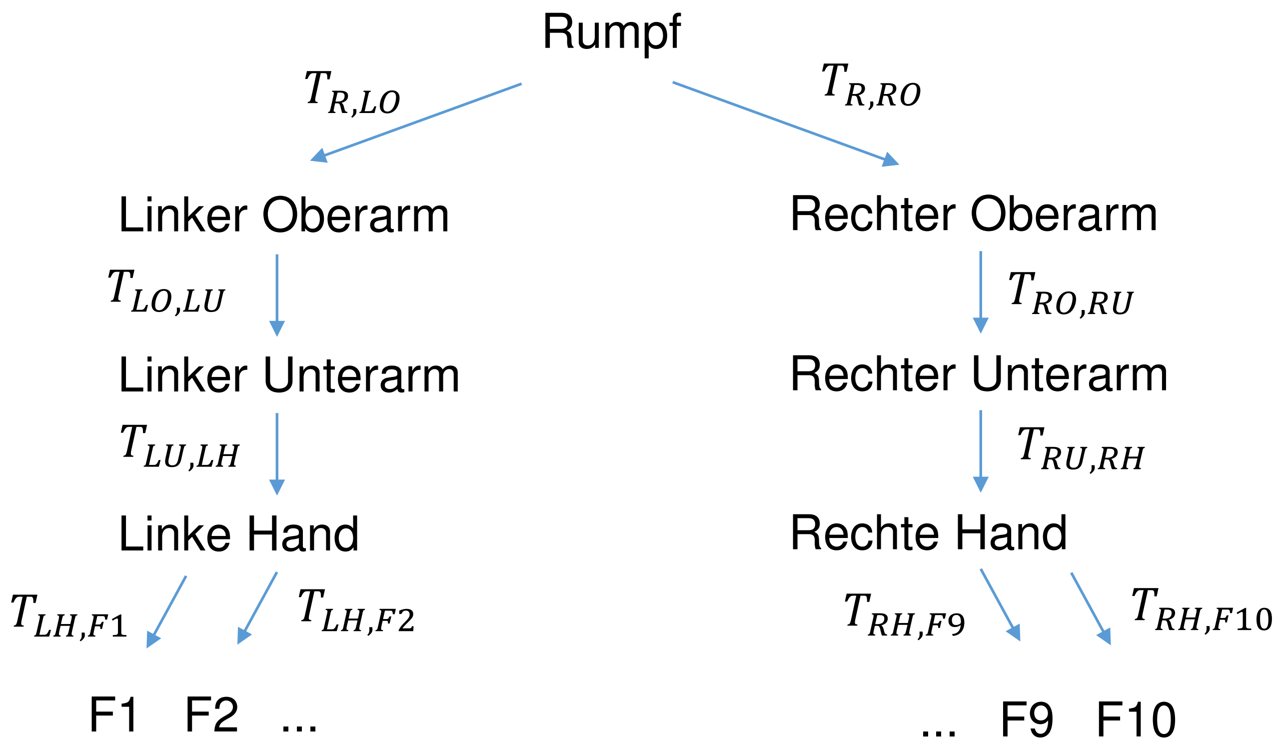
Gegeben: Abbildung T, die ein Koordinatensystem K auf ein anderes abbildet

$$K = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \xrightarrow{T} K' = (O', \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$$

- Die Koordinaten eines Punktes in K' berechnen sich aus denen in K durch Anwendung der Transformation T^{-1}.
- Umgekehrt berechnen sich die Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem K aus denen in K' durch Anwendung der Transformation T.

Relative Lage von starren Körpern (z.B. Knochen)

- Menschmodell



Szenengraph: Azyklischer Graph
mit relativen Transformationen als Kanten
und Objekten als Knoten

Richtig rotieren im $\mathbb{R}^3/\mathbb{A}^3$

Drehsinn

Von $+\infty$ auf jeder der drei Achsen,

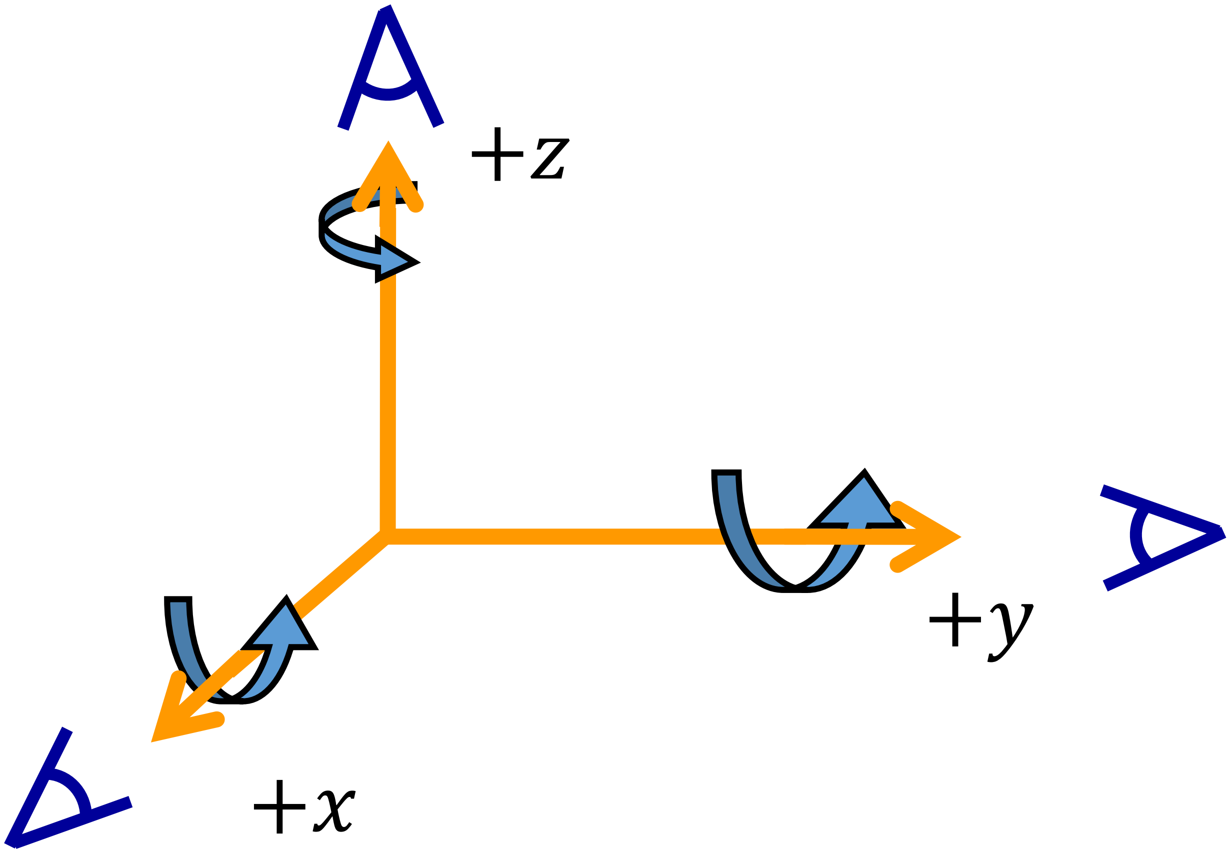
in Richtung Ursprung gesehen,

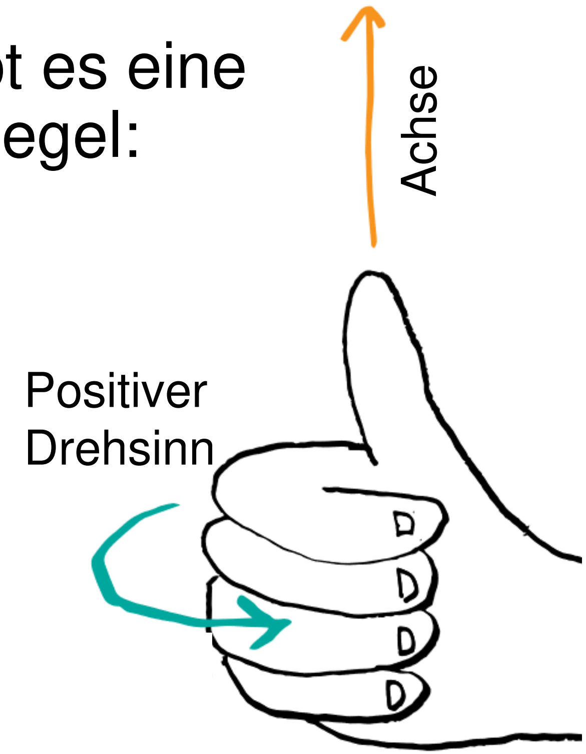
ist eine Rotation gegen den Urzeigersinn

mathematisch positiv.

Drehsinn

Auch hierfür gibt es eine Rechte-Hand-Regel:





Rotation um Koordinatenachsen

- $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

- $R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

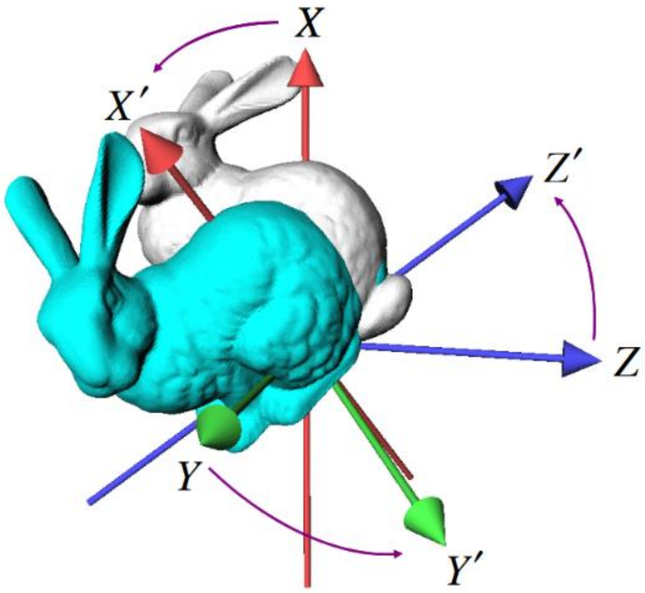
- $R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die jeweilige Rotationsachse ist ein **Eigenvektor** von R – sie bleibt von der Rotation unberührt

z.B. $R_x(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

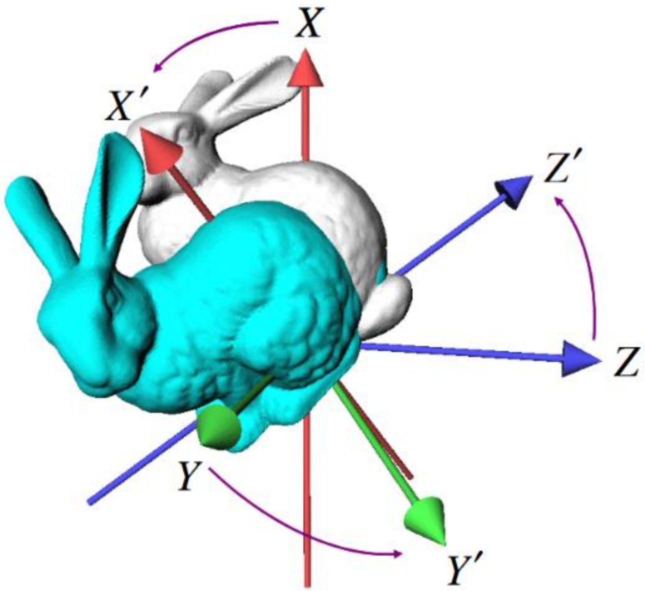
Orientierung und Rotation

- Orientierung von Objekten im Raum ist durch eine Rotation festgelegt.
  - Beginne mit einer Startorientierung (weißer Hase im Standardkoordinatensystem)
  - Neue Orientierung (blauer Hase) wurde durch Rotation aus der Startorientierung beschrieben



Raum aller Rotationen

- Rotationen lassen sich mit drei Parametern vollständig beschreiben!
- Beispiel:
  - x': 2D (Punkt auf Einheitskugel)
  - y': 1D (Punkt Einheitskreis senkrecht zu x')
  - z': festgelegt durch $z' = x' \times y'$

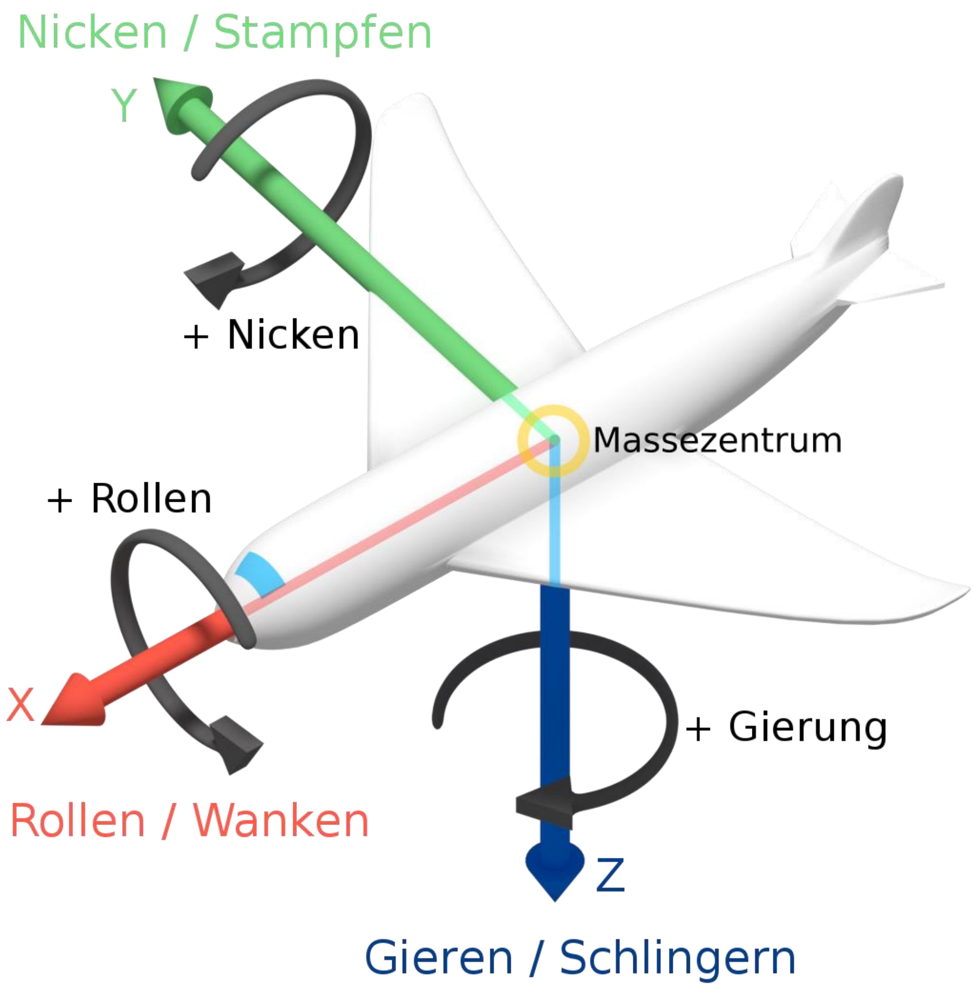


Euler-Transformationen

- Zur Beschreibung beliebiger Rotationen wird häufig die Eulertransformation verwendet.
- Hintereinanderausführung dreier Drehungen um jeweilige Winkel ϕ, θ, ψ.
- „Echte Eulerwinkel“ (z-x-z, x-y-x, ...)
- „Tait-Bryan-Winkel“ (x-y-z, y-z-x, ...)
  - Verwendung z.B. in der Schifffahrt. Drehachsen heißen „Gieren,Nicken,Rollen“ (engl. „yaw,pitch,roll“)
- Auswahl, Lage und Reihenfolge der Drehachsen in der Literatur nicht einheitlich, hängen von Konvention ab. Die Anwendung von Rotationen ist nicht kommutativ!
- *Intrinsische* Rotation (um objekteigene Achsen) vs. *extrinsische* Rotation (um „erdfeste“ Achsen)

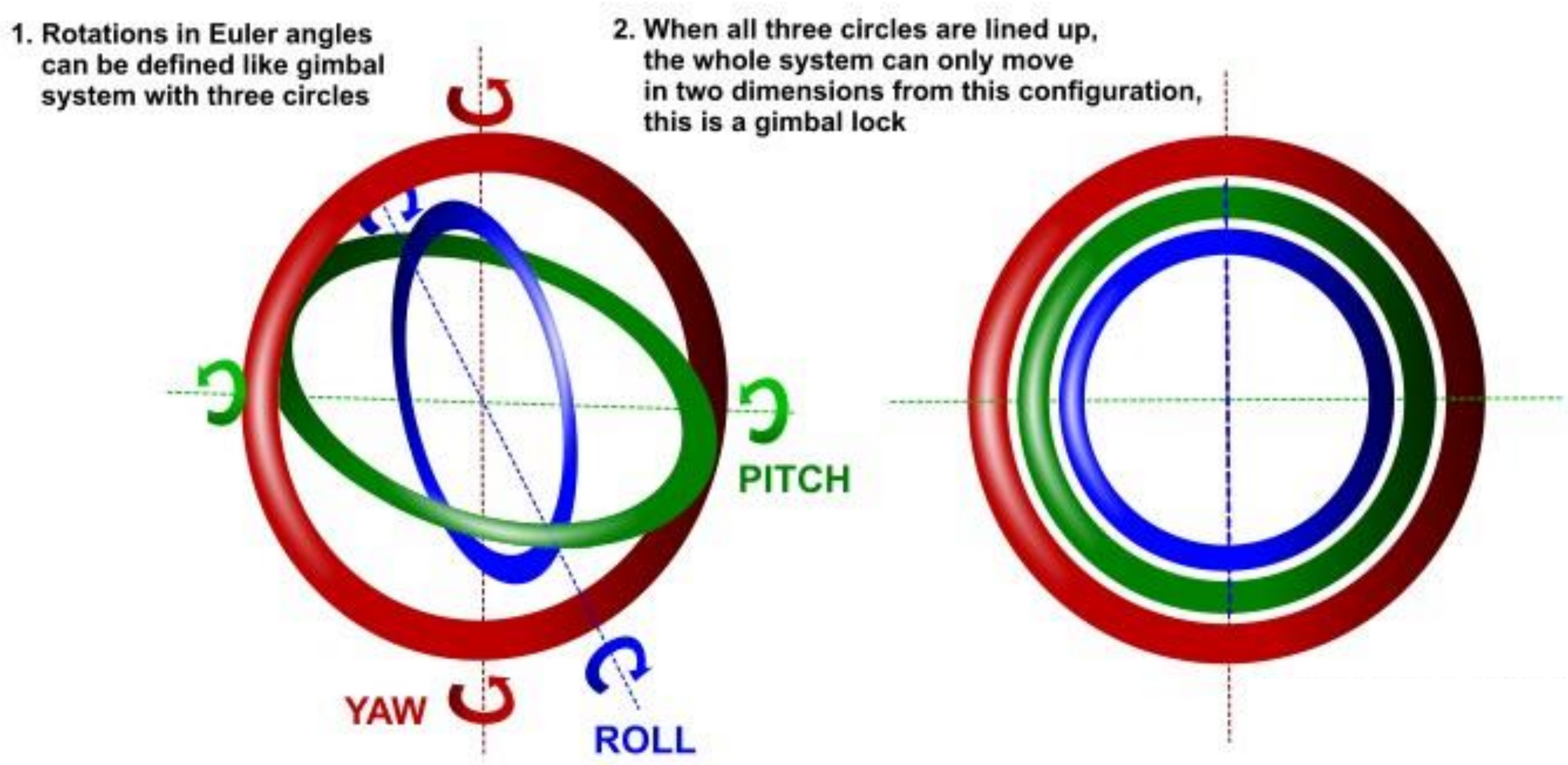
DIN 9300 - Luftfahrt

- Intrinsische Reihenfolge z, y', x''
- Extrinsische Reihenfolge x, y, z



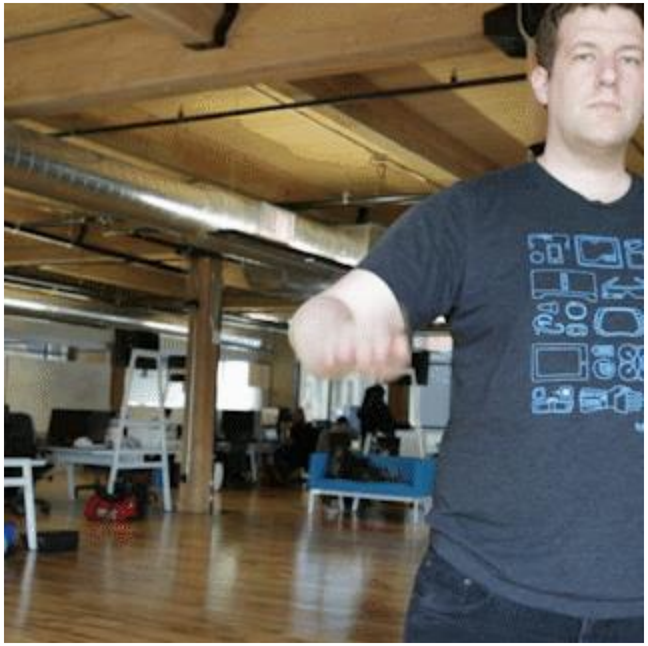
Kardanische Blockade / Gimbal Lock

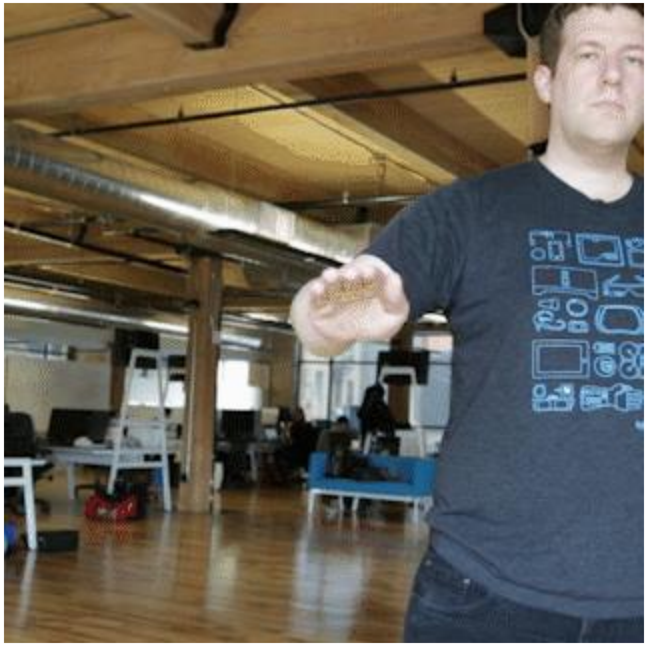
- Wenn zwei der kardanischen Achsen zusammenfallen, hat das System nur noch 2 statt 3 Freiheitsgrade.



Mehrdeutigkeit von Eulerwinkeln

- Mehrere Möglichkeiten, eine Orientierung mit Eulertransformationen auszudrücken

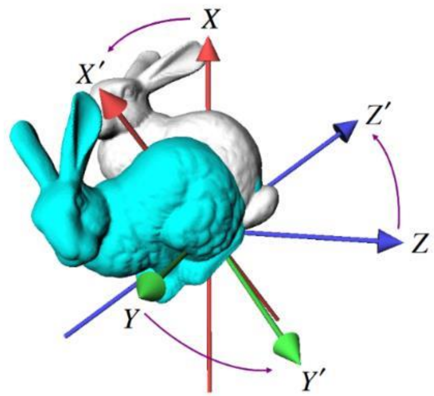


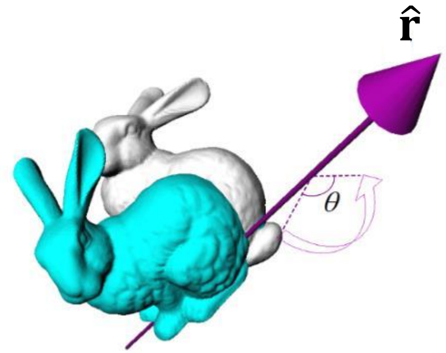


- Interpolation führt oft zu unerwarteten Ergebnissen, insbesondere in der Nähe des „gimbal lock“

Achse-Winkel-Darstellung

- In der Achse-Winkel-Darstellung einer Rotation R wird die Rotation mittels eines normierten Vektors $\hat{\mathbf{r}}$ und eines Winkels θ beschrieben. Manchmal wird nur ein Vektor $\mathbf{r}$ spezifiziert, dessen Länge den Winkel angibt.





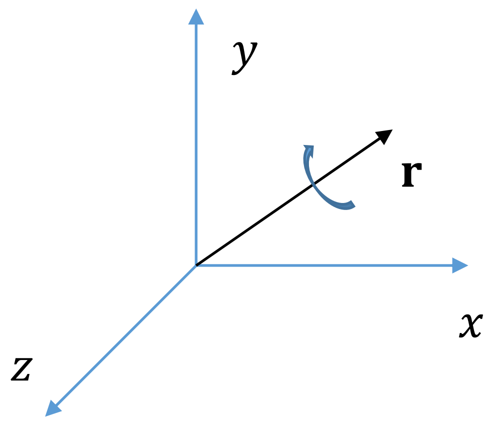
- Diese Darstellung existiert immer, da für Rotationsmatrizen R im $\mathbb{R}^3$ stets ein Eigenvektor $\mathbf{r}$ existiert, für den gilt:

$$R\mathbf{r} = 1\mathbf{r}$$

- Ein solcher Vektor und jedes skalare Vielfache wird von der Rotation auf sich selbst abgebildet.

Rotation um beliebige Achse

- Drehung $R_{\mathbf{u}}(\theta)$ um beliebige Achse in Richtung des normierten Vektors $\mathbf{r}$ um Winkel θ:



1. Rotiere $\mathbf{r}$ auf die x-Achse mit Rotation R
2. Rotiere um Winkel θ um $\mathbf{e}_x$ mit Rotation $R_x(\theta)$
3. Rotiere $\mathbf{r}$ zurück mit R^{-1}

Rotation um beliebige Achse

Wie berechnen wir R?

0. Falls $\mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_x$: $R = I$

1. Orthonormale Basis $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ bestimmen:
   - erster Basisvektor ist $\mathbf{r}$.
   - zweiter Basisvektor $\mathbf{s}$ soll senkrecht auf $\mathbf{r}$ stehen. Konstruiere z.B.:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_x}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{e}_x\|}$$

   - dritter Basisvektor $\mathbf{t} = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$

Rotation um beliebige Achse

3. Rotation R bestimmen:

   Schreiben wir die Vektoren $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ in die Spalten unserer Transformationsmatrix, so ist diese orthogonal und transformiert

   $$\mathbf{e}_x \to \mathbf{r}, \qquad \mathbf{e}_y \to \mathbf{s}, \qquad \mathbf{e}_z \to \mathbf{t}$$

   Das ist genau R^{-1}. Da R orthogonal, gilt $R^{-1} = R^{\top}$. Wir erhalten also R, indem wir $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ in die Zeilen einer 3×3-Matrix schreiben.

4. Die Gesamtrotation ergibt sich dann gemäß
   $$R_{\text{total}} = R^{-1} R_x(\theta) R$$

Rotation um beliebige Achse: Rodrigues-Formel

Statt mit dieser Matrixrotation kann der rotierte Vektor auch direkt mit der Rodrigues-Formel berechnet werden:

Theorem: Ist $(\mathbf{r}, \theta)$, $\|\mathbf{r}\| = 1$ die Achse-Winkel-Repräsentation einer Rotation R im $\mathbb{R}^3$, gilt für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$R\mathbf{v} = \cos\theta\,\mathbf{v} + \sin\theta(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos\theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}$$

Beweis: Wir zerlegen $\mathbf{v}$ in Komponenten parallel und senkrecht zur Rotationsachse $\mathbf{r}$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$

$$\mathbf{v}_{\|} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}, \qquad \mathbf{v}_{\perp} = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

Da $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, folgt

$$R\mathbf{v}_{\|} = \mathbf{v}_{\|} \text{ und } R\mathbf{v}_{\perp} = \cos\theta\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

Daraus erhalten wir mit der Identität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}
R\mathbf{v} &= R\mathbf{v}_{\|} + R\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\|} + \cos\theta\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} + \cos\theta\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v} + (\cos\theta - 1)\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{r} \times \mathbf{v} + (1 - \cos\theta)\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\
&= \cos\theta\,\mathbf{v} + \sin\theta(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos\theta)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

UNIVERSITÄT BONN

Rotationen in der Ebene mit komplexen Zahlen

Gegeben die komplexen Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$

Sei $x = a + ib,\ \ y = c + id$ mit $i^2 = -1$

Multiplikation:

$$xy = yx = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Schreiben wir x, y in Vektorform:

$x = \begin{pmatrix} \Re(x) \\ \Im(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \ y = \begin{pmatrix} \Re(y) \\ \Im(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$ so ergibt sich

$$xy = yx = \underbrace{\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ist $|y| = 1$, dann gilt: $y = e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ und M ist Drehmatrix

$\Rightarrow$ Multiplikation mit komplexer Zahl vom Betrag 1 entspricht einer *Drehung* in der komplexen Ebene

Quaternionen (Rodrigues, Hamilton)

- Einzahl: **die** Quaternion (lat. quaternio, -onis f. „Vierheit“)

- 4D-Erweiterung der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} \ni x = a + bi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{H} \ni x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$

Betrag: $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Multiplikation ist nicht kommutativ!

Faktor 2

Faktor 1

×	1	*i*	*j*	*k*
1	1	*i*	*j*	*k*
i	*i*	−1	*k*	−*j*
j	*j*	−*k*	−1	*i*
k	*k*	*j*	−*i*	−1

Vokabeln:

Reine Quaternion, $\Re(x) = 0$

Einheitsquaternion, $|x| = 1$

Einheitsquaternionen repräsentieren die 3D-Drehgruppe SO(3).

Einheitsquaternionen und Drehungen

- Wir interpretieren die Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ als die Achsen x, y, z des kartesischen Koordinatensystems. Vektoren werden also als reine Quaternionen dargestellt: $\mathbf{r} = \left(r_x, r_y, r_z\right) = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}$
- Eine Drehung um einen Winkel θ um die Achse $\mathbf{r}$, ausgedrückt durch den Einheitsvektor $\mathbf{r}$, kann wie folgt als eine Einheitsquaternion dargestellt werden:

$$q = e^{\frac{\theta}{2}\left(r_x\mathbf{i}+r_y\mathbf{j}+r_z\mathbf{k}\right)} \overset{\substack{\text{Quat}\\ \text{Euler}}}{=} \cos\frac{\theta}{2} + \left(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

- Die Rotation kann wie folgt auf einen gewöhnlichen Vektor p angewendet werden:

$$p' = qpq^{-1} \text{ m. } q^{-1} \overset{|q|=1}{=} \cos\frac{\theta}{2} - \left(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

UNIVERSITÄT BONN

Von der Quaternion zur Rotationsmatrix

- Eine Quaternionenrotation $p' = qpq^{-1}$ mit $q = q_r + q_i\mathbf{i} + q_j\mathbf{j} + q_k\mathbf{k}$ kann als Matrixrotation $p' = Rp$ dargestellt werden mit

- $R = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_j^2 + q_k^2) & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_j q_k + q_j q_r) \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2(q_k^2 + q_i^2) & 2(q_j q_k - q_i q_r) \\ 2(q_j q_k - q_j q_r) & 2(q_j q_k + q_i q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_j^2) \end{pmatrix}$

- Hintereinanderausführung von Rotationen erfolgt, wie bei Matrizen, durch Multiplikation von rechts nach links.

$$R_1 \circ R_2 \asymp R_2 R_1 \asymp q_2 q_1$$

Orientierungen aus MoCap-Daten schätzen

Meinard Müller, Information Retrieval for Music and Motion, Springer 2007, S.207

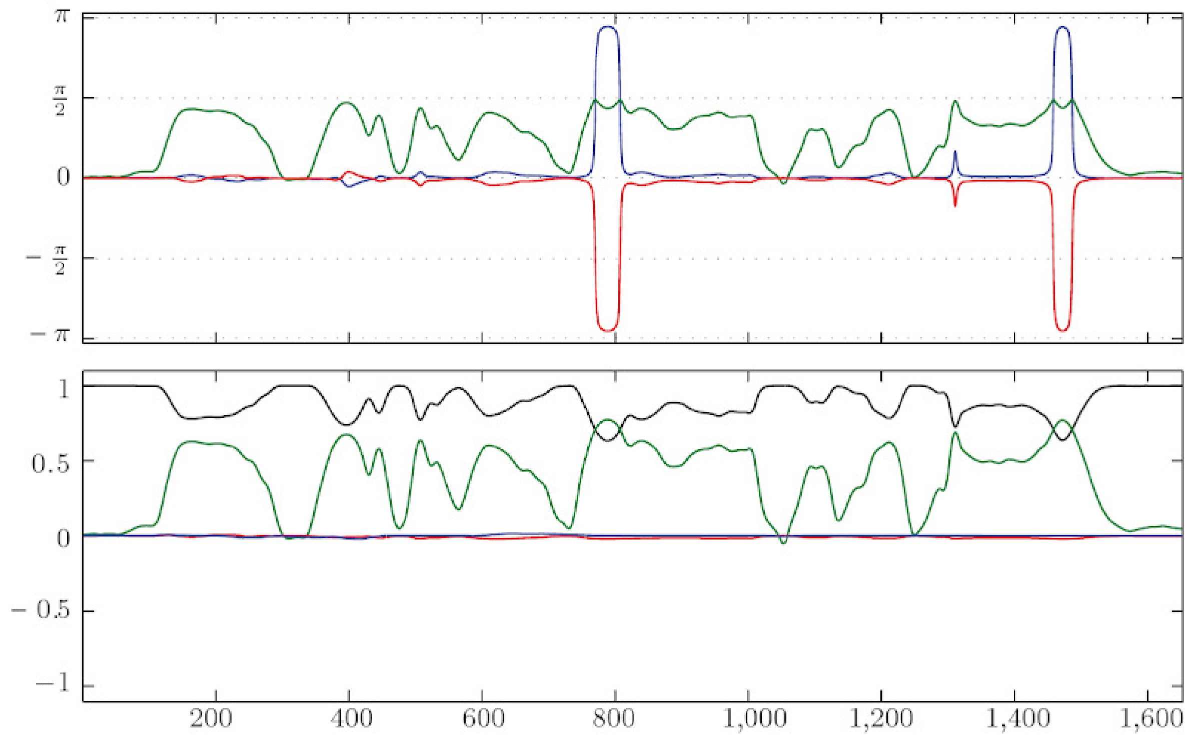


Fig. 9.8. Angle trajectory of some motion data stream (right knee angle) represented by Euler angles (*top*) and quaternions (*bottom*). The horizontal axis represents time in frames. The parameters are color-coded. Euler angles: blue (x), green (y), and red (z). Quaternions: black (w), blue (x), green (y), red (z). The peaks around frame 790 and around frame 1,470 in the Euler representation are due to the gimbal lock phenomenon, where the angle α_2 of the y-coordinate is close to $\frac{\pi}{2}$