Lineare Algebra

BA-INF-021, MB 05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 9

Präsenzaufgabe. Für diese Aufgabe benötigen Sie die Definition der transponierten Matrix (Definition 10.17 im Skript).

(a) Es seien $f : X \longrightarrow Y$ sowie $g : Y \longrightarrow Z$ zwei lineare Abbildungen für endlich-dimensionale Vektorräume X, Y, Z. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{Rg}(g \circ f) = \mathrm{Rg}(f) - \dim(\,\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)\,)$$

(b) Beweisen Sie, dass für eine beliebige Matrix A über $\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{Rg}(A^t A) = \mathrm{Rg}(A).$$

Hinweis: Die Aussage von Aufgabe (a) könnte nützlich sein.

Präsenzaufgabe. Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jedem Vektor der Ebene den um 90 Grad (im mathematisch positiven Sinne) gedrehten und auf die doppelte Länge gestreckten Vektor zuordnet.

Aufgabe 1 (3+2+2 Punkte)**.** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A, 0)$.

(b) Geben Sie Rang und Defekt der Matrix A an.

(c) Ist die lineare Abbildung A injektiv; ist sie surjektiv?

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)**.** Üben Sie das Aufstellen von darstellenden Matrizen bei Abbildungen, die Sie geometrisch kennen:

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
die jedem Vektor der Ebene sein x-Achsen-Spiegelbild der y-Achsen-Projektion zuordnet.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matriz für die lineare Abbildung
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
die jedem Vektor das auf die halbe Länge reduzierte Spiegelbild an der Ebene, aufgespannt durch die Winkelhalbierende der x-y-Ebene und der z-Achse, zuordnet.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgenden linearen Abbildungen innerhalb der reellen Ebene:

- Eine Drehung f um 60 Grad (im mathematisch positiven Sinne),
- eine senkrechte Projektion g auf die x-Achse.

Geben Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung $f \circ g$ an und beschreiben Sie mit Ihren Worten, was $f \circ g$ mit einem Vektor macht.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathtt{DM}(f)$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$f(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}; \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}; \quad f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathrm{DM}(F)$ für die lineare Abbildung $F : \mathtt{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathtt{Pol}_2(\mathbb{R})$, wobei $\mathtt{Pol}_2(\mathbb{R})$ die Menge der Polynome vom Grade höchstens 2 (als Abbildungen) mit reellen Koeffizienten und Unbekannten x bezeichnet. Betrachten Sie hierfür die Standardbasis dieses Raumes bestehend aus den Monomen, die die Koordinaten in der Darstellung bestimmen. Die Abbildung möge eindeutig beschrieben sein durch:
$$F(2x^2 + 5x) = 3x + 3\,, \qquad F(\frac{x}{2} + 1) = 6x^2 + 1\,, \qquad F(26) = 78\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Isomorphie der Vektorräume $\mathtt{Pol}_2$ und $\mathbb{R}^3$. Dadurch lässt sich den Monomen jeweils ein kanonischer Basisvektor zuweisen ($1 \mapsto e_1, x \mapsto e_2, x^2 \mapsto e_3$).

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 16. Juni, 12:00 Uhr.