Grundlagen der Robotik

10. Beobachter

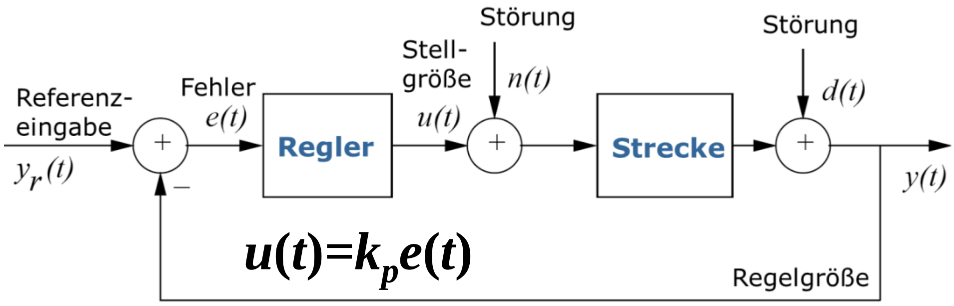
Prof. Sven Behnke

UNIVERSITÄT BONN

AIS

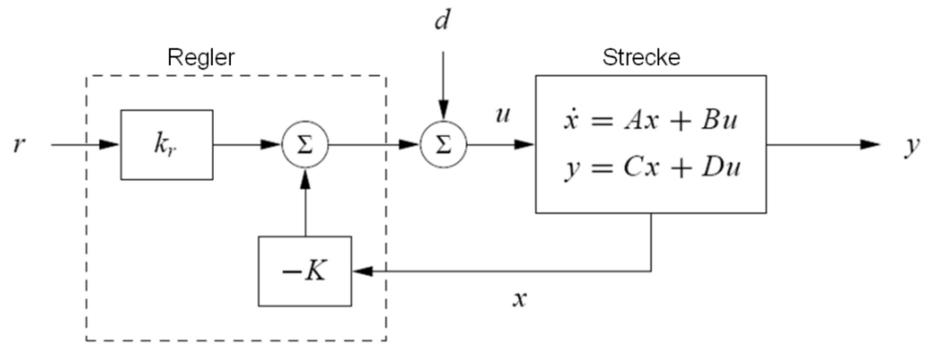
Letzte Vorlesung

- Steuerbarkeit
  - Jeder Zustand durch Kontrolleingabe erreichbar
  - Test: Hat Steuerbarkeitsmatrix $W_r = [B \; AB \; A^2B \; \ldots \; A^{n-1}B]$ vollen Rang?
- Proportional (P)-Regler



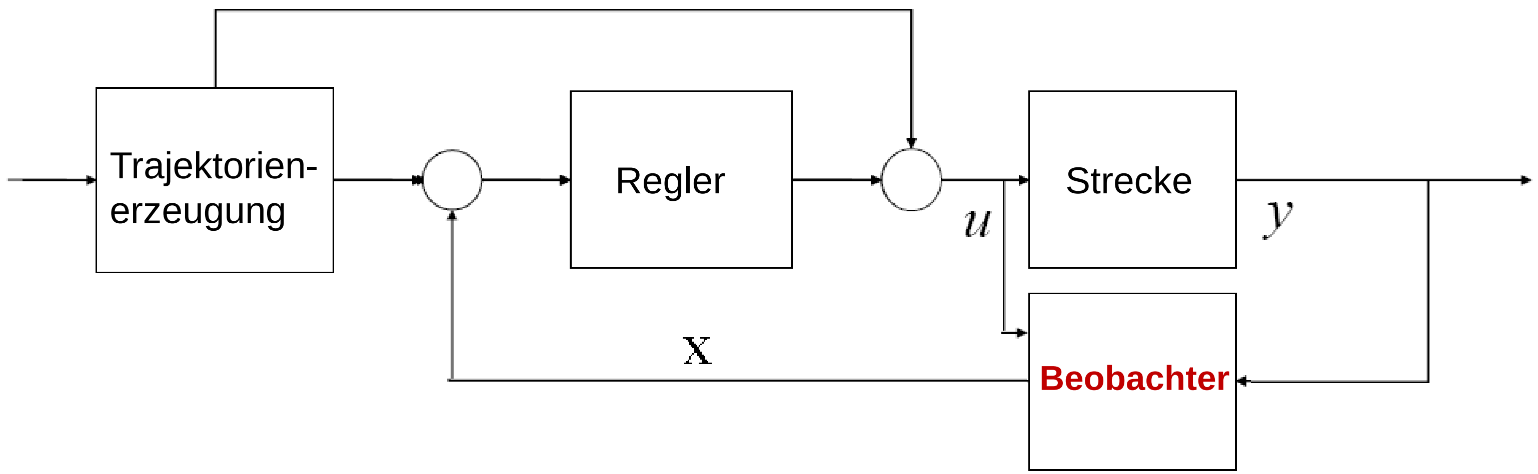
- Zustandsrückführung

$$u = -Kx + k_r r$$
$$\frac{dx}{dt} = (A - BK)x + Bk_r r$$



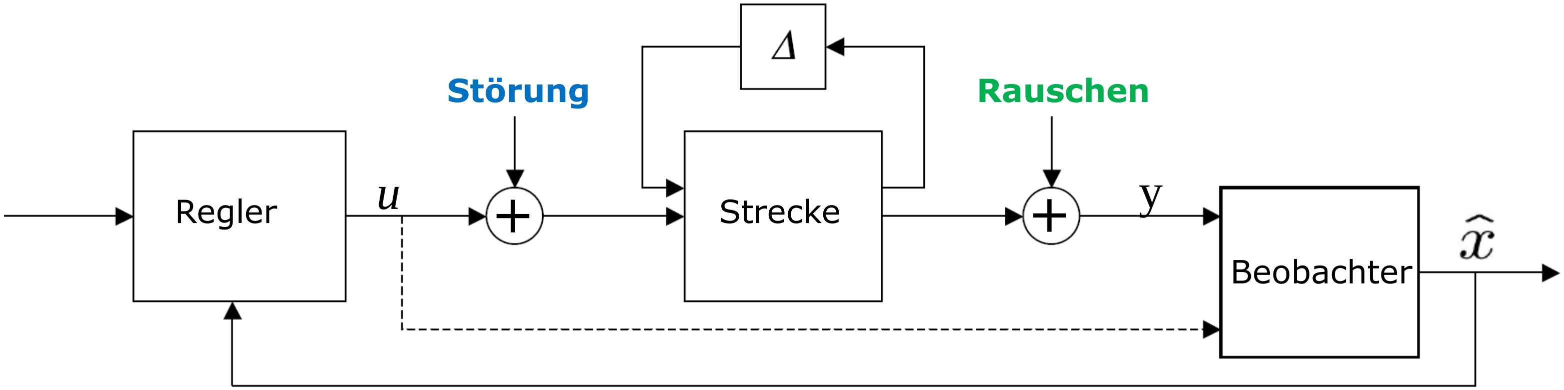
  - Stabilität hängt vom Realteil der Eigenwerte von (A-BK) ab
  - Zuweisung von Eigenwerten möglich => Performanz
- PI-Regler: Integriere Fehler $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ y - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + Bu \\ Cx - r \end{bmatrix}$

Design von Regelungssystemen



- Bislang: Regelung durch Zustandsrückführung:
  $$u = -K\,\boldsymbol{x} + k_r\,r$$
- Problem: Zustand $\boldsymbol{x}$ kann häufig nicht vollständig / direkt / genau gemessen werden
- Idee: **Schätzung des Zustands**
  - Wie können wir aus den gegebenen Messungen den Zustand bestimmen, der für Zustandsrückführung benötigt wird?
  - Zustandsschätzung auch ohne Reglung nützlich (z.B. für Sensorfusion)
  - Wir müssen Rauschen berücksichtigen

Problem der Zustandsschätzung



- Problemstellung:
  - Gegeben ein dynamisches System mit Rauschen und Unsicherheit
  - Ziel: Schätze den Zustand x

$$\dot{x} = Ax + Bu + \underline{Fv}$$
$$y = Cx + Du + \underline{Gw}$$

$\longrightarrow$

Dynamik der Schätzung

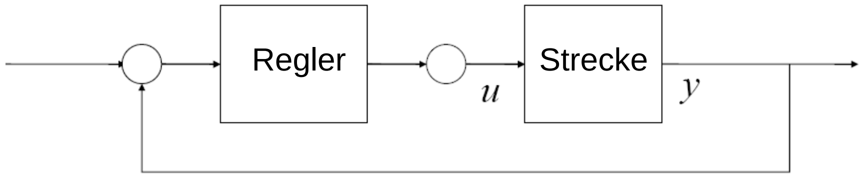
$\dot{\hat{x}} = \alpha(\hat{x}, y, u)$ so, dass

$\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ wenn $t \rightarrow \infty$

  - Notation für Schätzwert des Zustands: $\widehat{x}$

- Bemerkungen:
  - Verschiedene Quellen für Unsicherheit: Rauschen, Störungen, Strecke, Startwert
  - Unsicherheiten sind nur durch Effekt auf gemessene Ausgabe sichtbar
  - Frage: Kann man den Zustand überhaupt schätzen?

Erinnerung



$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Kann die Eingabe *u* die Systemdynamik beeinflussen?

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

=> u kann x_2 nicht ändern

Entspricht der Frage, ob man durch geeignete Wahl von *u* jeden Punkt des Zustandsraums erreichen kann

=> **Steuerbarkeit** linearer Systeme hängt von A und B ab

=> Wichtig für **Regelung** durch Zustandsrückführung

- Enthält die Messung *y* genug Information über das System?

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \qquad y = x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

=> man kann x_2 nicht aus *y* bestimmen

=> **Beobachtbarkeit** linearer Systeme hängt von A und C ab

=> Trivial wenn C invertierbar

=> Wichtig für die Auslegung von **Beobachtern**, die den Zustand aus Messungen schätzen

Beobachtbarkeit

- Definition: Ein dynamisches System
$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u)$$
ist beobachtbar, wenn es für jedes $T > 0$ möglich ist, den Zustand des Systems $x(T)$ aus den Messungen von $y(t)$ und $u(t)$ im Intervall $[0, T]$ zu bestimmen.
- Bemerkungen
  - Kausalität erlaubt keine Verwendung von Messungen aus der Zukunft
  - Jeder Startzustand muss eindeutige Ausgabe y erzeugen
  - Zunächst ignorieren wir Rauschen, Störungen
=> Exakte Schätzung des Zustands
  - Einfacher Test für Beobachtbarkeit bei linearen Systemen (Taylorentwicklung):

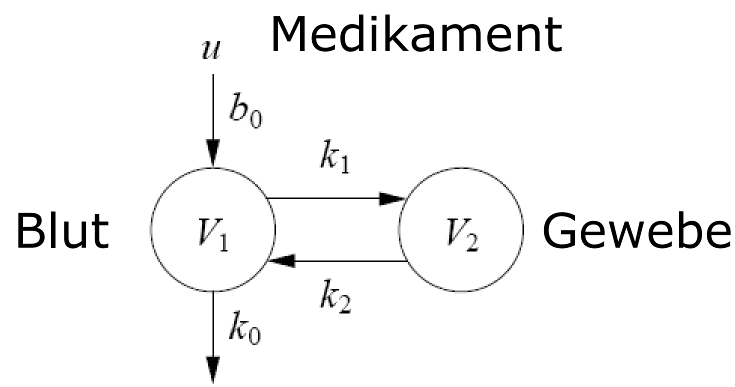
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \underline{Cx} \\ \dot{y} &= C\dot{x} = \underline{CAx} + CBu \\ \ddot{y} &= \underline{CA^2x} + CABu + CB\dot{u} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Ein lineares System ist beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix W_o vollen Rang hat.

Beispiel für Beobachtbarkeit



- Lineares System:

$x = [V_1, V_2]$

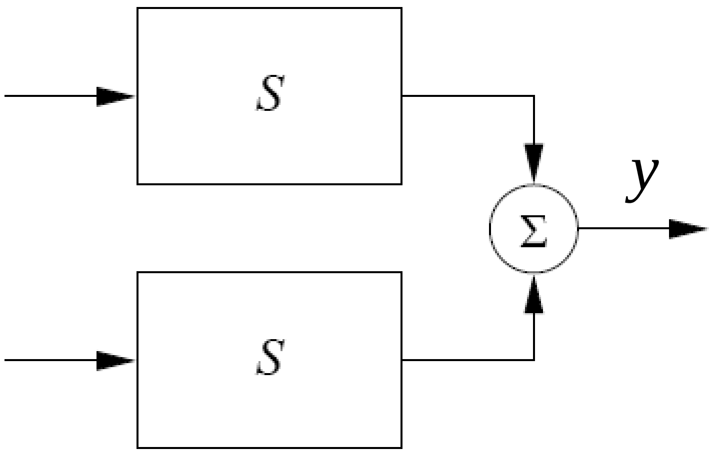
$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_0 - k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

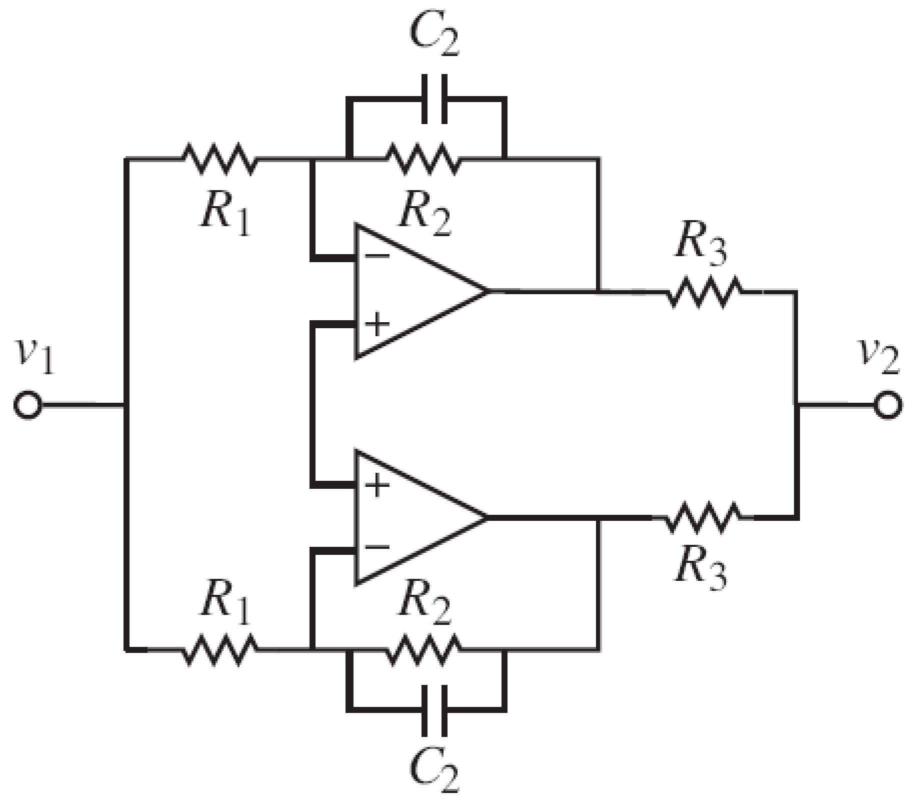
- Nur die Konzentration im Blut kann gemessen werden
- Beobachtbarkeitsmatrix:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_0 - k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

- Voller Rang, wenn $k_2 \neq 0$
  => System beobachtbar!

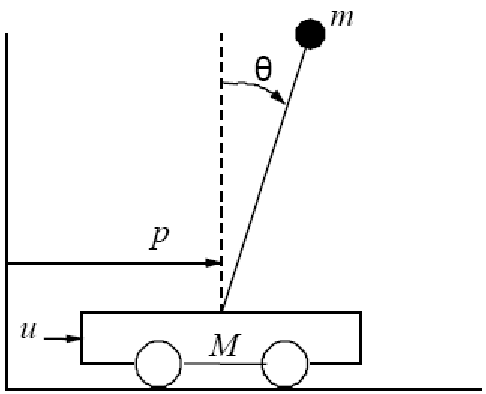
Ein nicht beobachtbares System





- Zustand der einzelnen Subsysteme kann nicht aus Ausgabe bestimmt werden

Beispiel: Stab auf Wagen



- Zustand: $(p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2\ell^2 g}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_t m g \ell}{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Positionsmessung
  C = [1 0 0 0]

$$W_o = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m^2\ell^2 g}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^2\ell^2 g}{\mu} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{array}$$

=> beobachtbar

- Winkelmessung
  C = [0 1 0 0]

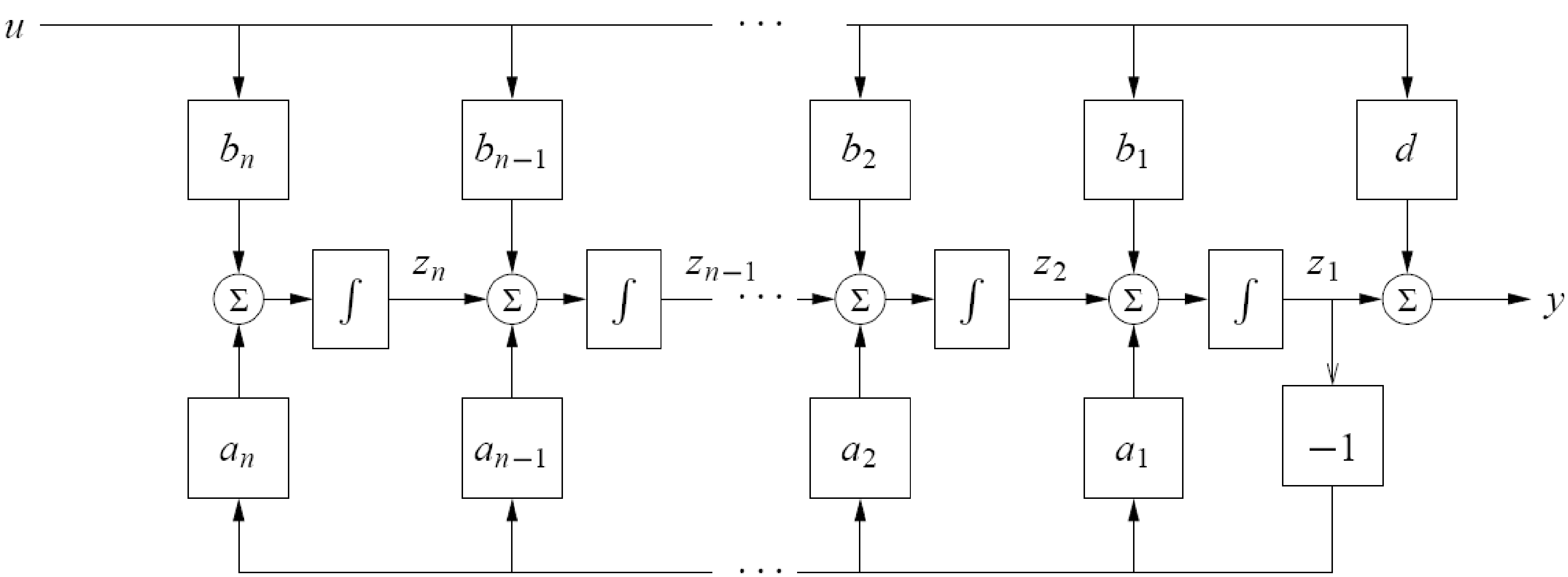
$$W_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_t m g \ell}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M_t m g \ell}{\mu} \end{bmatrix}$$

=> nicht beobachtbar

Normalform zur Beobachtung

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + Du.$$



$$z_2 = \dot{z}_1 + a_1 z_1 - b_1 u$$

Normalform zur Beobachtung II

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + Du.$$

- Charakteristisches Polynom:

$$\lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

- Beobachtbarkeitsmatrix:

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1^2 - a_1 a_2 & -a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad W_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Jedes beobachtbare lineare System kann in Normalform gebracht werden

Design von Beobachtern

- Wie können wir für ein beobachtbares System den Zustand schätzen?
- **Idee**: Wenn die aktuelle Schätzung korrekt ist, müssen wir nur der Systemdynamik folgen

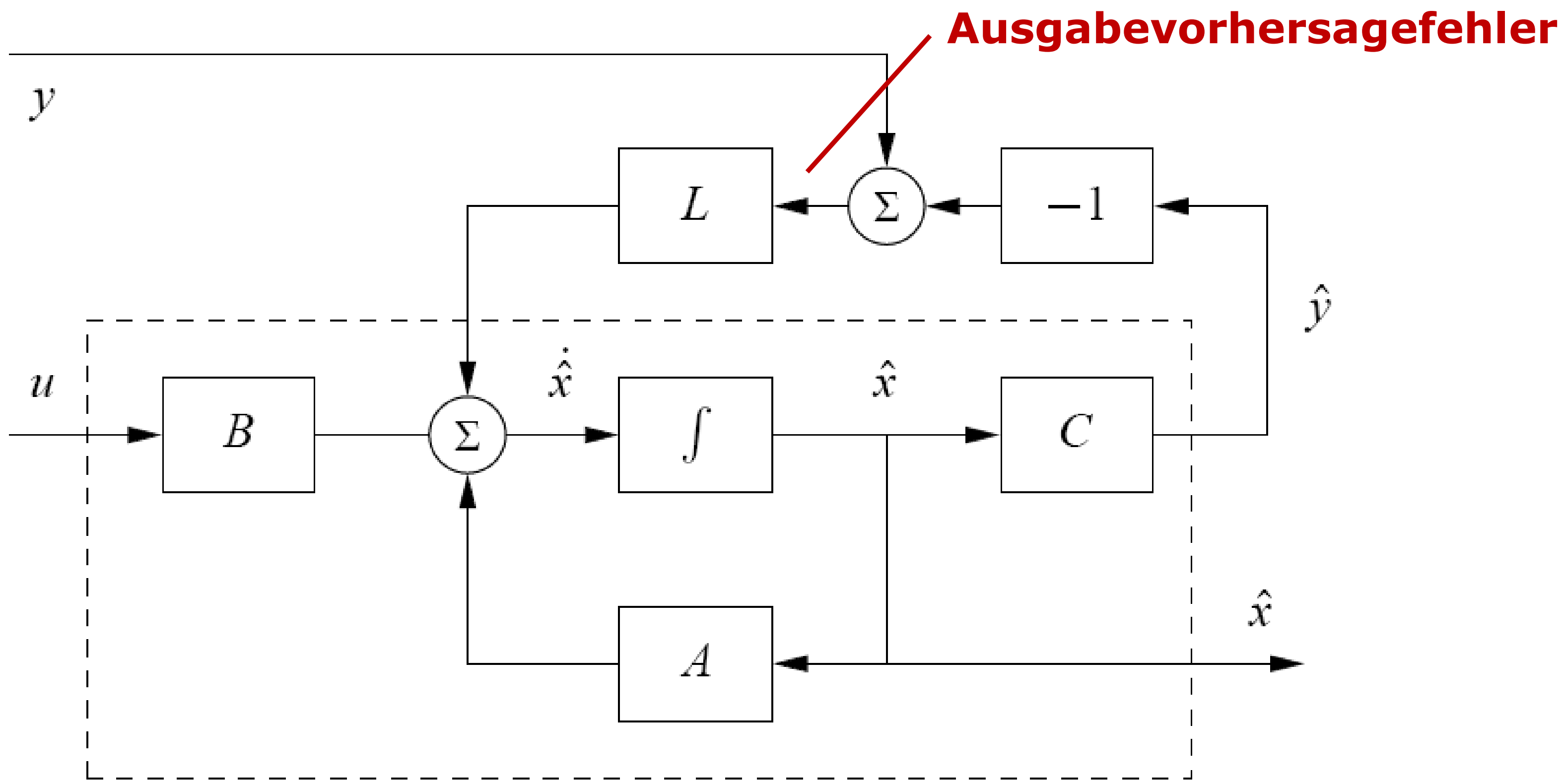
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{Zustandsvorhersage}} + L(y - C\hat{x})$$

Korrektur durch Ausgabefehler

- Modifiziere die Schätzung anhand Ausgabefehler durch linearen Regler
- ***L* ist Gain-Matrix des Beobachters**, beschreibt Änderung der Zustandsschätzung aufgrund von Ausgabe-Vorhersagefehlern

Blockdiagramm eines Beobachters



$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

- Der Beobachter enthält eine Kopie des Systemmodells, das durch den Ausgabevorhersagefehler über die Gainmatrix L getrieben wird

Auslegung von Beobachtern

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad \dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{Zustandsvorhersage}} + L(y - C\hat{x})$$

$$y = Cx$$

Korrektur durch Ausgabefehler

- **L ist Gain-Matrix des Beobachters**, beschreibt Änderung der Zustandsschätzung aufgrund von Ausgabe-Vorhersagefehlern

- Betrachte Fehlerdynamik $\tilde{x} = x - \hat{x}$ um L zu bestimmen:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x})) = (A - LC)\tilde{x}$$

- Satz: Wenn (A, C) beobachtbar ist (W_o hat vollen Rang), können wir die Eigenwerte von $(A - LC)$ durch geeignete Wahl von L beliebig wählen

- Beweis: Transponierte von $(A - LC)$ ist $(A^T - C^T L^T)$. Diese Form entspricht Zustandsrückführung, für welche Wahl der Eigenwerte möglich ist.

Beispiel für Beobachter

- Doppel-Integrator: $\ddot{z} = u$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

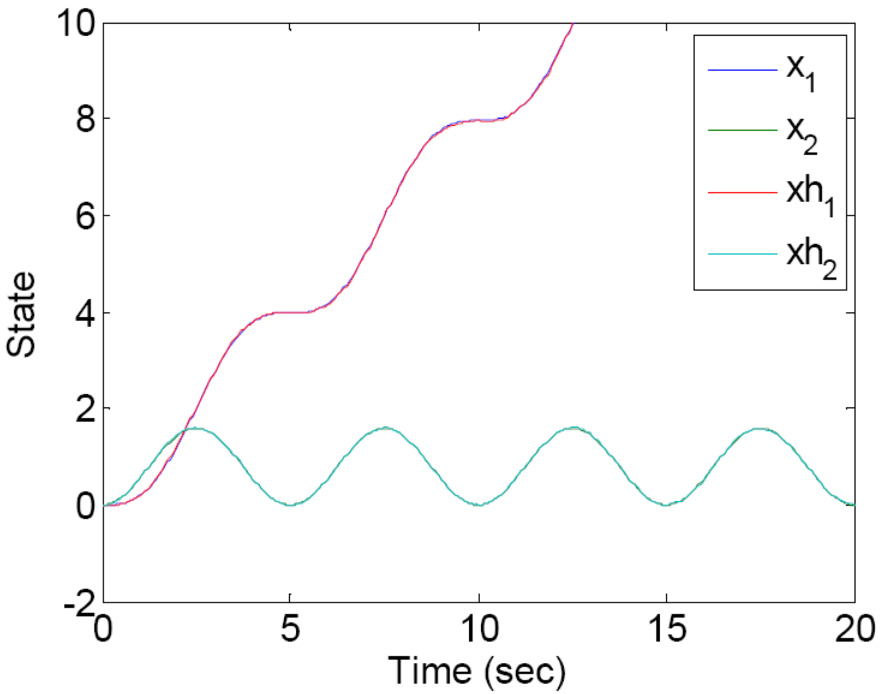
- Schätze ganzen Zustand (inklusive Geschwindigkeit) aus Positionsmessungen
- Naiv: $\hat{x}_1 = y,\ \hat{x}_2 = \dot{y}$
- Beobachter:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) + Bu$$

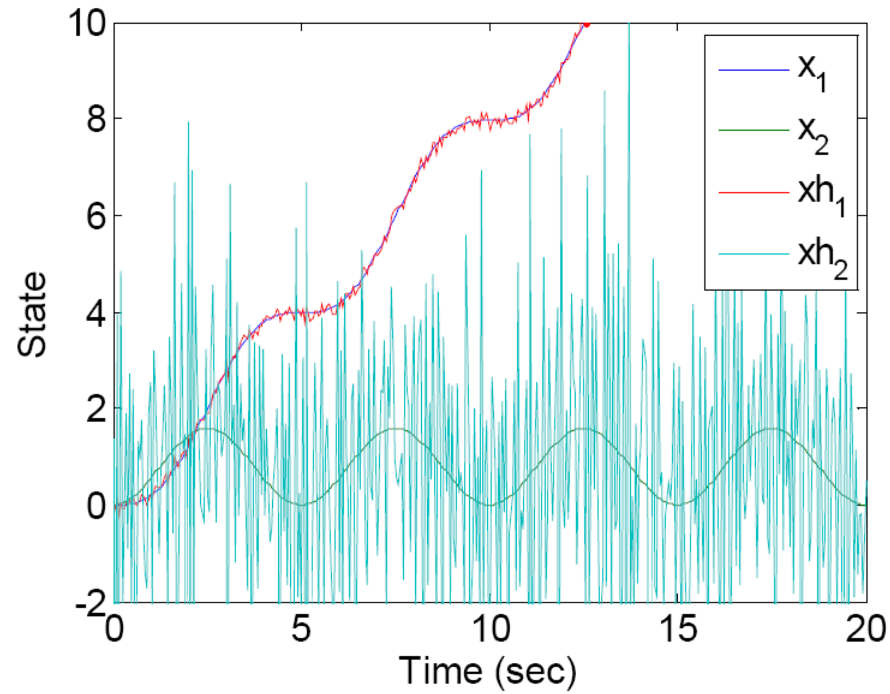
L=place(A',C',[-1;-1]) = [2 1]; // Matlab Control Toolbox // [Kautsky et al. 1985]

$$A - LC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2y \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_1 + y + u \end{aligned}$$

Vergleich beider Beobachter



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) + Bu$$

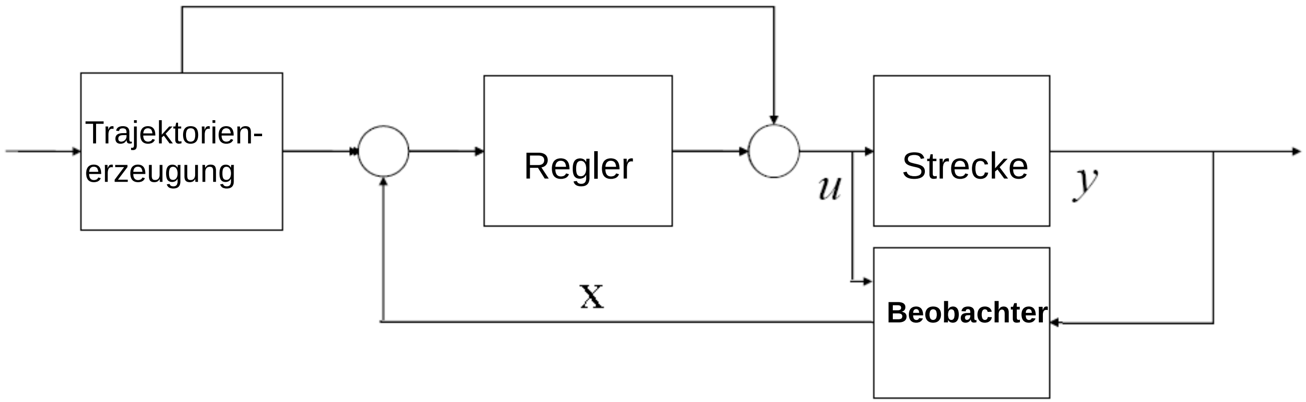


$$\hat{x}_1 = y,\ \hat{x}_2 = \dot{y}$$

Vergleich mit Steuerbarkeit und Regelung durch Zustandsrückführung

- (A, C) beobachtbar ⇔ (A^T, C^T) steuerbar
- Systemdynamik mit Feedback-Gain K ist $(A - BK)$
  Dynamik des Beobachterfehlers mit Gain L ist $(A - LC)$
- Eigenwerte von $(A - LC)$ können frei gewählt werden ⇔
  Eigenwerte von $(A^T - C^T L^T)$ können frei gewählt werden
  - In Matlab Control System Toolbox: place(A^T, C^T, λ)
  - Stabilität und Performanz hängen von $Re(\lambda)$ ab
- Wenn (A, B) steuerbar, können wir System in Normalform zur Steuerung bringen.
  Wenn (A, C) beobachtbar, können wir System in Normalform zur Beobachtung bringen
  (Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind Eigenschaften des Systems, d.h. hängen nicht von gewähltem Zustandsraum ab)
- Auslegung von Beobachtern ist **dual** zu Auslegung von Reglern mit Zustandsrückführung

Separationsprinzip



- Was passiert, wenn wir Zustandsrückführung auf der Grundlage der Zustandsschätzung durchführen?
- Wir hatten für die Analyse des Reglers angenommen, der Zustand x wäre direkt messbar. Aber: Dynamik der Zustandsschätzung könnte Gesamtsystem instabil machen.
- Wenn K ein stabiler Regler für (A, B) ist und L ein stabiler Beobachter für (A, C), dann ist der Regler $u = -K(\hat{x} - x_d) + u_d$ stabil (wenn x_d, u_d ein Fixpunkt)
- Dies ist ein Beispiel für das **Separationsprinzip**:
  Lege Regler und Beobachter getrennt stabil aus, kombiniere beide und das Gesamtsystem ist stabil.

Beweis des Separationstheorems

- Systemdynamik für das Gesamtsystem (o.B.d.A $x_d = 0$):

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

$$y = Cx \qquad u = -K\hat{x} + u_d$$

- Betrachte Fehlerdynamik $\tilde{x} = x - \hat{x}$
und kombinierten Zustand $x, \tilde{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

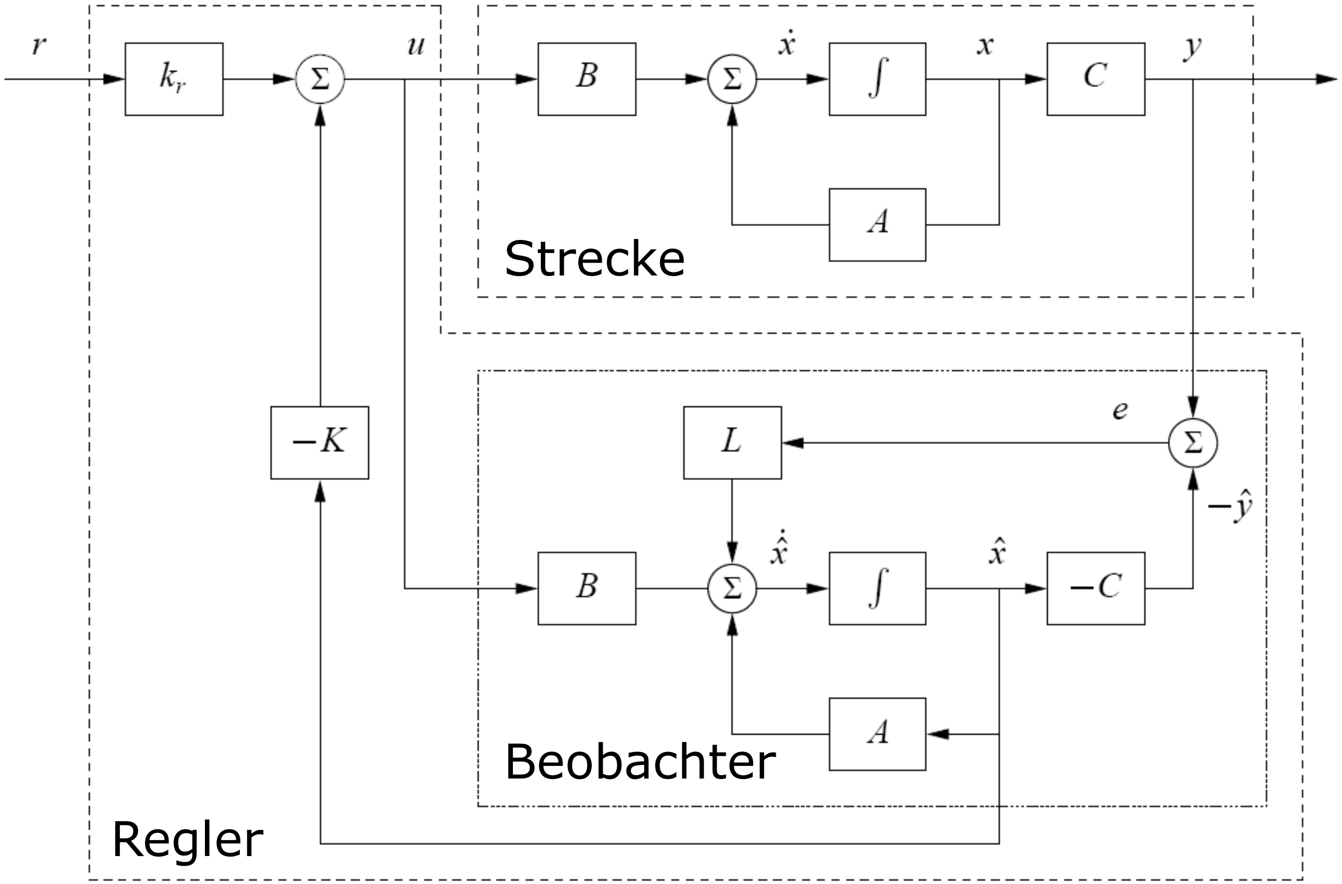
- Charakteristisches Polynom des Gesamtsystems:

$$\det(sI - A + BK)\det(sI - A + LC).$$

- Dies ist ein Produkt aus zwei Polynomen, die dem Regler und dem Beobachter entsprechen.

=> Wenn beide stabil, dann auch Gesamtsystem.

Beobachter-basierter Regler



- Beobachter schätzt Zustand auf der Grundlage der gemessenen Ausgabe y *und der Eingabe* u
- Diese Schätzung $\hat{x}$ wird für Regler mit Zustandsrückführung genutzt.
- **Der Regler beinhaltet ein Modell des geregelten Prozesses**

Beispiel: Fahrzeuglenkung

- Linearisierte seitliche Dynamik:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$x_1 \ldots$ seitliche Position
$x_2 \ldots$ seitliche Geschwindigkeit

- Beobachtbarkeitsmatrix: $W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Charakteristisches Polynom des Beobachters $A - LC = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\det(sI - A + LC) = \det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + l_1 s + l_2$$

- Gewünschtes charakteristisches Polynom:

$$s^2 + p_1 s + p_2 = s^2 + 2\zeta_o\omega_o s + \omega_o^2$$

- Beobachter-Gain:

$$l_1 = p_1 = 2\zeta_o\omega_o, \qquad l_2 = p_2 = \omega_o^2$$

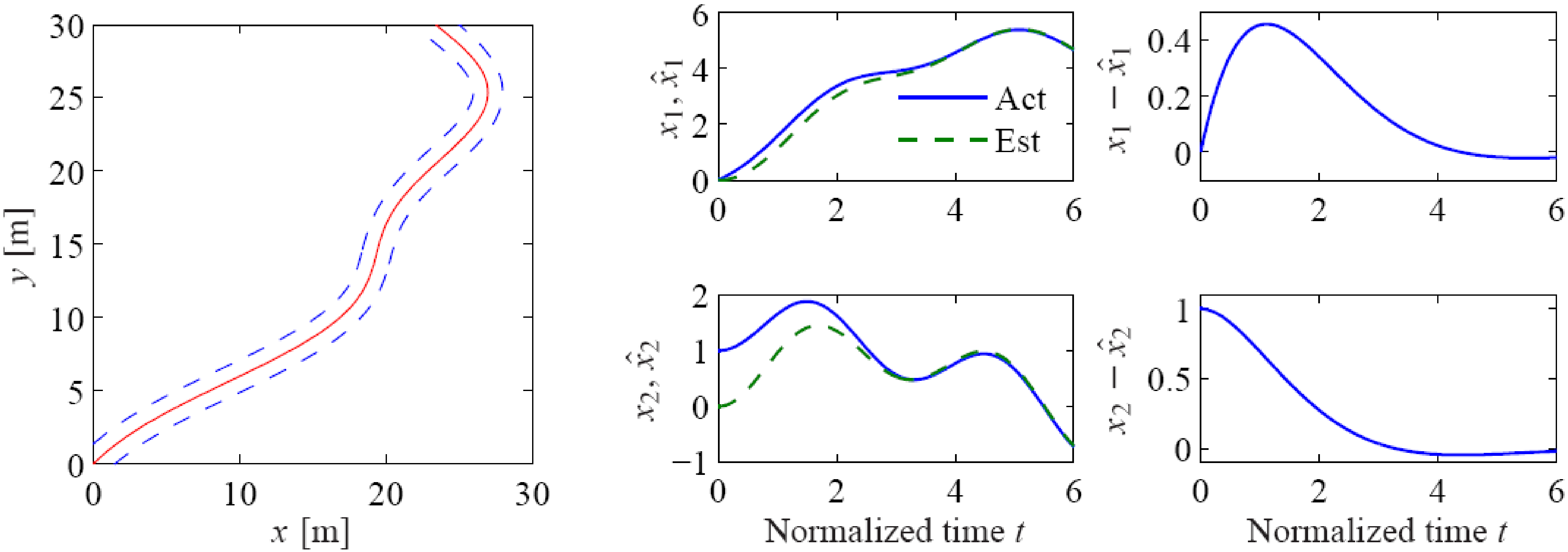
- Beobachter:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1)$$

Fahrzeuglenkung: Beobachter

- Kurvige Straße
- Initialer Geschwindigkeitsfehler

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1)$$



Beobachter-basierte Lenkung

- Dynamik, die Lenkwinkel u zur seitlichen Abweichung y *macht:*

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1)$$

$$u = -K\hat{x} + k_r r = k_1(r - x_1) - k_2 x_2$$

- u einsetzen*:*

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly + Bk_r r$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 - \gamma k_1 & 1 - \gamma k_2 \\ -k_1 - l_2 & -k_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix} k_1 r$$