Prof. Dr. Anne Driemel
Frederik Brüning, Andreas Hene
Institut für Informatik

Abgabe: 14.06.2023 bis 12:00 Uhr

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in NP liegen. Beschreiben Sie dazu jeweils einen Verifizierer und die dazu gehörenden Zertifikate. Begründen Sie explizit die polynomielle Laufzeit der Verifizierer.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist binäre Kodierung einer Zahl } k \in \mathbb{N} \text{ und } k \text{ ist keine Primzahl.}\}$

(b) $L_2 = \left\{ x \in \{0,1,\#\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ ist gültige Kodierung der Adjazenzmatrix eines Graphen } G = (V, E) \text{ und} \\ \text{einer natürlichen Zahl } k \text{ und die Entscheidungsvariante von } \textsc{VertexCover} \\ \text{wird für } G = (V, E) \text{ und } k \text{ als „Wahr" entschieden.} \end{array} \right\}$

Aufgabe 4.2: (5 Punkte)

Wir betrachten das Problem Partition. Eingabe hierfür sind natürliche Zahlen $b_1, \ldots, b_n$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von Partition soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge I_1 der Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass gilt: $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i$, wobei $I_2 = I \setminus I_1$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von Partition soll eine solche Partition (I_1, I_2) von I ausgegeben werden, falls sie existiert. Ansonsten soll „Nein" ausgegeben werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von Partition in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von Partition in $\mathcal{P}$ liegt.

Aufgabe 4.3: (5 Punkte)

Wir betrachten das Problem EvenOddPartition, welches eine Abwandlung vom bekannten Problem Partition darstellt.
Gegeben ist eine Menge $X = \{x_1, x_2, ..., x_{2n}\}$ mit $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ für $1 \leq i \leq 2n$. Es soll entschieden werden, ob eine Teilmenge $I \subseteq \{1, ..., 2n\}$ existiert, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in \{1,...,2n\} \setminus I} x_i$

(ii) $\forall i \in \{1, ..., n\} : I$ enthält genau ein Element von $\{2i-1, 2i\}$

Als Beispiel betrachten wir die Eingaben $X_1 = \{1,2,3,4\}$ und $X_2 = \{1,4,2,3\}$. Für beide Eingaben können Teilmengen gefunden werden, sodass Eigenschaft (i) erfüllt ist. Jedoch besitzt lediglich X_1 eine Lösung für EvenOddPartition ($I_1 = \{1,4\}$). Für Eingabe X_2 kann keine gültige Partitionierung gefunden werden, da die Elemente '1' und '4' nach Eigenschaft (ii) nicht in der gleichen Partition sein dürfen.

Zeigen Sie, dass Partition $\leq_p$ EvenOddPartition gilt. Was impliziert diese Reduktion für die Komplexität von EvenOddPartition?

Aufgabe 4.4: (6 Punkte)

Für eine Marsmission werden Experten für n Fachgebiete (Astronomie, Geologie, Technik, Physik, Informatik, Biologie, ...) benötigt. Es stehen m Freiwillige zur Verfügung. Für jede Person ist bekannt, auf welchen dieser Gebiete sie Experte ist. Die Aufgabe ist es, eine Besatzung aus möglichst wenigen Personen zusammenzustellen, sodass es für jedes Fachgebiet mindestens einen Experten gibt.

Geben Sie eine mengentheoretische Formalisierung der Entscheidungsvariante von MissionToMars an und zeigen Sie, dass das Problem NP-vollständig ist.

Hinweis: Zeigen Sie dabei als einen Schritt, dass sich die Entscheidungsvariante von VertexCover auf die Entscheidungsvariante von MissionToMars reduzieren lässt.