

Abgabe: 23.11.2022 bis 10:00 Uhr

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: Amortisierte Analyse

(1+3 Punkte)

Gegeben sei ein Stack S , welcher die folgenden Operationen zur Verfügung stellt:

- **push**(x): Das Element wird auf den Stack gelegt.
- **pop**(): Das oberste Element wird ausgegeben und gelöscht.
- **top**(): Das oberste Element wird ausgegeben aber nicht gelöscht.
- **flush**(): Sämtliche Elemente von S werden nacheinander ausgegeben und gelöscht.

Für die Operationen **push**(x), **top**() und **pop**() veranschlagen wir Kosten von jeweils c . Sei k die Anzahl an Elementen, die sich vor einem Aufruf von **flush**() auf S befinden. Dann veranschlagen wir für den Aufruf von **flush**() Kosten in Höhe von $k \cdot c$; aber mindestens c . Wir sind im Folgenden an den Gesamtkosten $T(n)$ einer Folge von n Operationen o_1, \dots, o_n interessiert, wobei $o_i \in \{\text{push, pop, top, flush}\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. D.h., jede Operation in der Folge kann eine der vier beschriebenen Operationen sein. Der Stack sei anfangs leer.

- Zeigen Sie mittels einer Worst-Case-Analyse, dass $T(n) \in O(n^2)$ gilt.
- Zeigen Sie weiter, dass für die entstandenen Gesamtkosten $T(n) \in \Theta(n)$ gilt. Schließen Sie dann auf die amortisierten Kosten für eine einzelne Operation, indem Sie die Gesamtkosten durch n teilen.

Aufgabe 6.2: Eigenschaften von binären Suchbäumen

(3+3 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen ausgewählte Eigenschaften von binären Suchbäumen bewiesen werden.

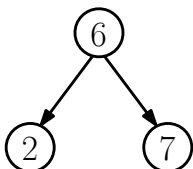
- Zeigen Sie, dass ein binärer Suchbaum mit n Blättern genau $n - 1$ innere Knoten mit genau 2 Kindern hat. (Knoten mit nur einem Kind werde nicht berücksichtigt.)
- Zeigen Sie, dass es in jedem binären Suchbaum höchstens 2^i Knoten der Tiefe i gibt.

Aufgabe 6.3: AVL-Bäume

(4+2 Punkte)

Gegeben sei der in der Abbildung dargestellte AVL-Baum.

- Fügen Sie die Schlüssel 9, 10, 8, 1, 4, 5, 3 in der angegebenen Reihenfolge in den Baum ein. Zeichnen Sie den Baum nach jeder Änderung (einfügen, rotieren). Fassen Sie Doppelrotationen als zwei Änderungen auf.
- Löschen Sie anschließend die Schlüssel 6, 5, 1 in der angegebenen Reihenfolge. Zeichnen Sie den Baum nach jeder Änderung (ggf. vertauschen + löschen, rotieren). Fassen Sie Doppelrotationen als zwei Änderungen auf.



Aufgabe 6.4: AVL-Bäume

(2+2 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir unser Verständnis von AVL-Bäumen festigen. Bearbeiten Sie zu diesem Zweck die folgenden Teilaufgaben:

- (a) Zeichnen Sie einen AVL-Baum der Höhe 4 mit einer minimalen Anzahl an Knoten. (Ein Baum bestehend aus einem Blatt hat die Höhe Null). Beweisen Sie, dass die Anzahl an Knoten des von Ihnen gezeichneten AVL-Baums minimal ist.
- (b) In einen leeren AVL-Baum sollen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 12$ eingefügt werden. Geben Sie eine Einfüge-Reihenfolge an, sodass keine Rotationen im AVL-Baum nötig sind. Zeichnen Sie den resultierenden AVL-Baum.