Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 13 / Klausurvorbereitung

Diese Aufgaben dienen der Wiederholung und Klausurvorbereitung. Die angegebenen Punktzahlen dienen nur der Orientierung. Die Aufgaben werden nicht mehr abgegeben oder korrigiert.

Das Team wünscht schon jetzt viel Erfolg in der Klausurphase!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Welcher der folgenden Teilmengen bilden Unterräume?

(a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x < y) \wedge z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
(b) $U_2 = \{p \in \mathtt{Pol}_3 : p(\pi) = 0\} \subseteq \mathtt{Pol}_3$
(c) $U_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$
(d) $U_4 = \mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ mit $f : V \to W$ linear

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Welcher der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f((x, y, z)) = 3x - y + z$
(b) $g : \mathtt{Pol}_4 \to \mathtt{Pol}_4, \quad g(p) = p + x^2 + 1$
(c) $h : \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad h(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$\mathtt{DM}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ an.
(b) Geben Sie Rang und Defekt von f an.
(c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f invertierbar?

Aufgabe 4 (4+4+4 Punkte)**.** Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine mögliche Diagonalgestalt, welche Sie mittels Basistransformation erhalten können. Geben Sie dann auch die zugehörigen Transformationsmatrizen an.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen oder widerlegen Sie: A ist genau dann nicht invertierbar, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es seien A und B zwei invertierbare $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f(v) := AB \cdot v$ und die lineare Abbildung $g(v) := BA \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^n$ jeweils die gleichen Eigenwerte haben.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 2-a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die $\det(A)$. Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist A invertierbar?
(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Inverse von A.

Aufgabe 8 (3 Punkte)**.** Welche Eigenwerte mit welchen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten hat die folgende Matrix?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte dienen nur der Orientierung. Es werden keine Punkte mehr verteilt, die Zulassungserfolge stehen bereits fest. Die Inhalte dieser Aufgaben sind alle grundsätzlich klausurrelevant.

Keine Abgabe.