# Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 12

**Präsenzaufgabe.** Betrachte Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von $A$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Welcher der folgenden Skalare sind Eigenwerte von $A$?

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 1$$

Berechnen Sie zu jedem Eigenwert den Eigenraum und geben Sie, falls möglich, eine invertierbare Matrix $P \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, so daß $PAP^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 1** (2 Punkte)**.** Es sei $V$ der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen. Es sei $F : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung, welche jeder Funktion ihre Ableitung zuordnet. Zeigen Sie, dass jedes Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $F$ ist.

*Hinweis:* Nutzen Sie Ihr Wissen aus der Analysis. Ableitungsregeln können vorausgesetzt werden.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)**.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für einen fixierten Körper $\mathbb{K}$ und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Hat die lineare Abbildung $f^2 + f$ den Eigenwert $-1$, so hat die lineare Abbildung $f^3$ den Eigenwert 1. (Hierbei handelt es sich bei $f^2$ um die Komposition von $f$ mit sich selbst, also um $f \circ f$.)

**Aufgabe 3** (3+2 Punkte)**.** Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Basen der Eigenräume von $A$ zu den Eigenwerten $0, 1, -1$.

(b) Geben Sie eine invertierbare Matrix $P \in M(3\times 3, \mathbb{R})$ an, so daß $PAP^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 4** (5+5 Punkte)**.** Seien $A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte beider Matrizen liegen alle in der Menge $\{-1, 0, 1\}$. Stellen Sie fest, ob $A$ oder $B$ diagonalisierbar sind und bestimmen Sie –sofern möglich– invertierbare Matrizen $P$ bzw. $Q$, so dass $P^{-1}AP$ bzw. $Q^{-1}BQ$ eine Diagonalgestalt ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Inhalte, die in der Vorlesung am kommenden Dienstag behandelt werden.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$ und geben Sie eine invertierbare Matrix $P \in M(3\times 3, \mathbb{R})$ an, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie zunächst das charakteristische Polynom samt der algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

**Aufgabe 6** (3+3 Punkte)**.** Berechnen Sie über dem Körper der (a) reellen Zahlen und (b) komplexen Zahlen jeweils alle Eigenwerte der Matrix $A$ und bestimmen Sie für jeden auftauchenden Eigenraum eine Basis, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

**Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 07. Juli, 12:00 Uhr.**

**Dies ist die letzte zulassungsrelevante Übungsserie.**