Prof. Dr. Anne Driemel
Frederik Brüning, Jan Eube
Institut für Informatik

Abgabe: 26.10.2022 bis 10:00 Uhr

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1: Funktion in Θ-Notation (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\log(n!) = \Theta(n \log n)$ gilt.

Aufgabe 2.2: Rekursionsgleichung lösen (5 Punkte)

Finden Sie für die folgende rekursive Funktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $n \geq 2$ eine geschlossene Form und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$S(1) = 4$$
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i) \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst die Differenz $S(n) - S(n-1)$, um die gegebene rekursive Form zu vereinfachen, bevor Sie eine Vermutung für die geschlossene Form aufstellen.

Aufgabe 2.3: Rekursionsgleichungen abschätzen (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Rekursionsgleichungen für $T(n)$ mit $T(2) = T(1) = 1$ eine möglichst einfache Funktion $g(n)$ mit $T(n) = \Theta(g(n))$.

(a) $T(n) = 5 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n^{1+5/n}$,

(b) $T(n) = 9 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right) + 3^n$,

(c) $T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \frac{n^2 \log_2(n)}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 2.4: Multiplikation zweier Zahlen (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zweierpotenz. Wir betrachten das Problem, zwei Zahlen $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ zu multiplizieren, die in der Dezimaldarstellung jeweils n Ziffern besitzen.

Um die folgenden Algorithmen sinnvoll vergleichen zu können, soll der Analyse nicht das Modell der uniformen Registermaschine zugrunde gelegt werden. Veranschlagen Sie stattdessen für eine Multiplikation von x mit einer Stelle von y Kosten in Höhe von $\Theta(n)$. Veranschlagen Sie weiter für eine Addition zweier Zahlen der Länge n Kosten in Höhe von $\Theta(n)$.

(a) Geben Sie die Laufzeit der „Schulmethode“ zur Multiplikation von x und y in Θ-Notation an und begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Hinweis: Die Schulmethode multipliziert zunächst x mit je einer Stelle von y. Wurde mit der i-ten Stelle von rechts multipliziert, so wird anschließend das Zwischenergebnis um $(i-1)$ Stellen nach links verschoben. Anschließend werden alle Zwischenergebnisse addiert.

(b) Wir betrachten den folgenden Algorithmus zur Berechnung des Produktes von x und y.

CleverMult(**int** x, **int** y)

if $(n = 1)$ **return** $x \cdot y$;
Seien a und b die ersten bzw. zweiten $n/2$ Ziffern von x.
Seien c und d die ersten bzw. zweiten $n/2$ Ziffern von y.
Berechne $p = a + b$ und $q = c + d$ mithilfe der Schulmethode zur Addition.
Berechne rekursiv $u = a \cdot c$, $v = b \cdot d$ und $w = p \cdot q$.
Berechne $z = w - u - v$ mithilfe der Schulmethode zur Addition.
Berechne $r = 10^n \cdot u + 10^{n/2} \cdot z + v$ mithilfe der Schulmethode zur Addition.
return r;

Geben Sie eine Rekursionsgleichung für die Laufzeit von CleverMult in Abhängigkeit von n an. Schätzen Sie dann das Wachstum der Rekursionsgleichung in O-Notation ab. Begründen Sie Ihre Antworten. Die Korrektheit des Algorithmus muss **nicht** nachgewiesen werden.

Hinweis: Sie können an dieser Stelle davon ausgehen, dass p und q lediglich $\frac{n}{2}$ viele Ziffern haben. Falls durch die Addition eine zusätzliche Ziffer hinzugekommen sein sollte, kann diese in Zeit $O(n)$ abgearbeitet werden. Im Algorithmus wurde dieser Fall der Einfachheit halber ignoriert.