Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 6

Aufgabe 1 (3 Punkte). Beweisen Sie, dass im Vektorraum $\mathbb{K}^n$ die Vektoren

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e'_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte). Bearbeiten Sie:

(a) Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$v_1 = (1, 2, -2) \qquad v_2 = (-1, -1, 1) \qquad v_3 = (-2, 1, t - 6)$$

(b) Welche kanonischen Basisvektoren e_1, e_2, e_3 oder e_4 kann man zu den folgenden Vektoren v_1, v_2 hinzunehmen, um eine Basis des $\mathbb{R}^4$ zu erhalten? Berechnen Sie *eine* Möglichkeit.

$$v_1 = (1, -4, 1, 3) \qquad v_2 = (-3, 8, 1, 6)$$

Aufgabe 3 (3+1 Punkte). Berechnen Sie für den folgenden Vektorraum eine Basis und geben Sie anschließend die Dimension von U an:

$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 + x_3 \}.$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte). Welche Dimensionen haben die Unterräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^5$?

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ s - t \\ t + \pi s \\ s - 2t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \} \quad \text{und} \quad U_2 = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Geben Sie Basis und Dimension der Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 6 (2+1 Punkte)**.** Betrachten Sie V den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grade einschließlich 42. Betrachten Sie weiterhin eine Teilmenge U von V, die Polynome, welche durch den Koordinatenursprung gehen enthält. Berechnen Sie die Dimensionen von U und V durch Angabe von geeigneten Basen.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Es seien V und W jeweils $\mathbb{K}$-Vektorräume, wobei $(v_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine Basis von W sei. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$(v_1, 0_W), \ldots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \ldots, (0_V, w_m)$$

eine Basis von $V \times W$ bilden und dass gilt: $\dim(V \times W) = n + m$.

Anmerkung: Sie haben bereits bewiesen, dass $V \times W$ ein Vektorraum ist (Serie 2, Aufgabe 2).

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 19. Mai, 12:00 Uhr.