Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 2. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1. – Grenzwerte berechnen
Entscheiden Sie bei jeder der nachfolgend definierten Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n), welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* vorliegen, und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert. Natürlich müssen Sie Ihre Entscheidungen begründen.

(i)
$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1},$$
(ii)
$$b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2},$$
(iii)
$$c_n := \left(\left|\frac{1+7i}{5-4i}\right|\right)^n,$$
(iv)
$$d_n := \sqrt{n(n+1)} - n.$$

Lösung:

(i) Es ist
$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} = \frac{n^3\left(\frac{3}{n}-1\right)^3}{n^3\left(3-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{n}-1\right)^3}{\left(3-\frac{1}{n^3}\right)}.$$
Auf den Ausdruck rechts können wir die Rechenregeln für Grenzwerte anwenden. $(3/n)$ und $(1/n^3)$ sind Nullfolgen. Also ist
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}.$$
Die Folge ist also konvergent und damit auch beschränkt.

(ii) Es ist
$$b_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}+1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n\right)}{\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}+1\right)}.$$

Da $(2/n^2)$ und $(3/n)$ Nullfolgen sind, konvergiert der Nenner des rechten Bruchs gegen 1. $(1/n^2)$ ist auch eine Nullfolge, die Folge $((-1)^n)$ ist aber divergent. Damit ist auch die Folge $(1/n^2+(-1)^n)$ divergent. Wäre nämlich $(1/n^2+(-1)^n)$ konvergent, so wäre auch die Differenz der beiden konvergenten Folgen $(1/n^2+(-1)^n)$ und $(1/n^2)$ nach den Rechenregeln für Grenzwerte konvergent. Die Differenz der beiden Folgen ist aber die divergente Folge $((-1)^n)$. Ebenso sieht man, dass der Quotient einer divergenten Folge und einer konvergenten Folge divergent sein muss. Also ist die Folge (b_n) divergent. Die Folge (b_n) ist aber beschränkt, da im Zähler die Summe zweier beschränkter Folgen steht und die Folge im Nenner gegen 1 konvergiert.
Alternativ kann man auch zeigen, dass die beiden Teilfolgen (b_{2k}) und (b_{2k+1}) beide konvergent sind, aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren.

(iii) Wir berechnen zunächst

$$\left|\frac{1+7i}{5-4i}\right| = \sqrt{\frac{1+49}{25+16}} = \sqrt{\frac{50}{41}} > 1.$$

Der Satz über das Wachstum von Potenzen sagt nun, dass (c_n) über jede Grenze hinaus wächst und somit divergent und unbeschränkt (= nicht beschränkt) ist.

(iv) Um uns der Folge (d_n) zu nähern, verwenden wir einen Trick, der auf der 3. binomischen Formel basiert. Es ist

$$\begin{aligned}
d_n &= (\sqrt{n(n+1)}-n)\cdot\frac{\sqrt{n(n+1)}+n}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\
&= \frac{(\sqrt{n(n+1)})^2-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\
&= \frac{n(n+1)-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\
&= \frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}+1\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}+1}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$1=\sqrt{\frac{n^2}{n^2}} \le \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} \le \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2}} = \frac{n+1}{n}.$$

Aufgrund des Schachtelungsprinzips ist also

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}=1$$

und somit
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)} - n = \frac{1}{2}.$$
Die Folge ist also konvergent und beschränkt.
Die Aussage
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1$$
kann man auch aus der schriftlichen Aufgabe folgern, in der gezeigt wird, dass für jede positive, konvergente Folge (a_n)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$
gilt.

Aufgabe 2. – Beweisaufgabe und Anwendung

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$
Tipp: Die 3. binomische Formel könnte hilfreich sein. Betrachten Sie den Fall $a = 0$ gesondert.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert (falls er existiert!) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}.$$

Lösung:

(i) Vorüberlegung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für nicht negative $a, b \in \mathbb{R}$ genau dann $a < b$ ist, wenn $a^2 < b^2$ ist. Wenn wir dies mit $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ anwenden, erhalten wir also
$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b.$$
1. Fall: $a = 0$. Wir müssen zeigen, dass auch $(\sqrt{a_n})$ eine Nullfolge ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) gegen 0 konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt
$$0 \leq a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^2.$$
Nach Vorüberlegung gilt dann für diese $n \geq n_0$ auch $\sqrt{a_n} < \varepsilon$ bzw. $|\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon$.
2. Fall: $a > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) gegen a konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\varepsilon < \frac{a}{2}$ ist. Für $n \geq n_0$ gilt also insbesondere auch $a_n \geq \frac{a}{2}$. Wir müssen jetzt

$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|$ nach oben abschätzen. Hierzu hilft uns wieder der Trick mit der 3. Binomischen Formel. Für $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned}
|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot \frac{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} \\
&= \left|(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{(\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \frac{|a_n - a|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung geht wieder die Vorüberlegung ein. Außerdem können die Betragsstriche im Nenner weggelassen werden, da beide Summanden positiv sind.

Da wir eine Schranke gefunden haben, die nur von ε und a abhängt, nicht aber von n, ist die Konvergenz der Folge gezeigt. Wir hätte natürlich in (1) auch fordern können, dass n_0 so gewählt ist, dass für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}\right) \tag{2}$$

gilt. Dann hätten wir später $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ erhalten.

(ii) Es ist

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} = \frac{n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Da $(1/n^2)$ eine Nullfolge ist, ist

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

und somit nach (i)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Aufgabe 3. – Wahr oder falsch

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung:

(i) Gegenbeispiel: $a_n := (-1)^n$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren. Sei also

$$\begin{aligned} a &:= a_{2n} \\ a' &:= a_{2n+1} \\ a'' &:= a_{3n}. \end{aligned}$$

Folgeglieder der Form a_{6n} sind sowohl Folgeglieder der Folge (a_{2n}) als auch der Folge a_{3n}. Es gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2(3n)} = \lim_{n\to\infty} a_{6n} = \lim_{n\to\infty} a_{3(2n)} = a''.$$

Ebenso sieht man

$$a' = \lim_{n\to\infty} a_{2(3n+1)+1} = \lim_{n\to\infty} a_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} a_{3(2n+1)} = a''.$$

Wir sehen also, dass insbesondere $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren. Hieraus folgt aber, dass dann auch (a_n) gegen diesen Grenzwert konvergiert, da jeder Index entweder gerade oder ungerade ist.