UNIVERSITÄT BONN

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

INSTITUT FÜR INFORMATIK DER UNIVERSITÄT BONN

Einführung in die Computergrafik

12: Lokale Beleuchtungsmodelle

Prof. Dr. Matthias Hullin

Institut für Informatik
Abteilung 2: Visual Computing
Universität Bonn

4. Juni 2024

Um Beleuchtung berechnen zu können, müssen wir zunächst definieren, was wir darunter verstehen:

Definition (Beleuchtungsmodell)

Unter einem Beleuchtungsmodell versteht man eine *Vorschrift* zur Berechnung der Farb- und Helligkeitswerte von Punkten auf Objekten.

Definition (Shading)

Shading bezeichnet den *Prozess* der Zuordnung von Farb- und Helligkeitswerten.

Grundlage für obige Definitionen sind die physikalischen Gesetze.

Modellierte Einflüsse:

- Lichtquellen (Position, Intensität, Farbe, etc.)
- Objektoberfläche (Geometrie, Reflexionseigenschaften)

Für Echtzeitanwendungen müssen einfache Modelle verwendet werden.

Physikalisch basiert:

- Physikalisch abgeleitete Reflexionsmodelle
- Physikalisch abgeleitete Lichtquellen

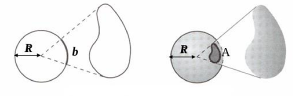
Non-Photorealistic Rendering (NPR)

- Künstlerisches Rendering
- Stilisiertes Rendering

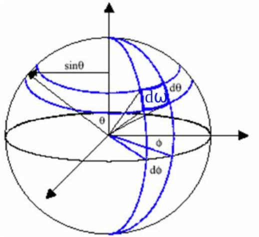
Physikalische Grundlagen

Um später Beleuchtungsmodelle zu entwerfen, müssen wir zunächst den uns umgebenden Raum physikalisch beschrieben können.

Der Raumwinkel ω wird analog zum Bogenmaß definiert.

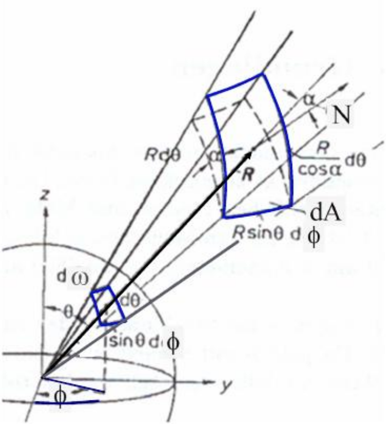


- Bogenmaß: $\beta = \frac{b}{R}$[rad], wobei $0 \leq \beta \leq 2\pi rad$
- Raumwinkel: $\omega = \frac{A}{R^2}$[sr], wobei $0 \leq \omega \leq 4\pi sr$



Auf einer Kugel lässt sich der differentielle Raumwinkel $d\omega$ in Kugelkoordinaten schreiben:

$$d\omega = d\theta(\sin(\theta)d\phi) = \sin(\theta)d\theta d\phi$$



Betrachtet man ein differentielles Flächenelement dA im Raum (Abstand R vom Kugelmittelpunkt und Neigung α gegen die Verbindungslinie zum Mittelpunkt), spannt es gegenüber diesem Punkt den Raumwinkel

$$d\omega = dA \frac{\cos(\alpha)}{R^2}$$

auf. Die Projektion auf die Einheitskugel verkleinert die Fläche also um die Faktoren $\cos(\alpha)$ (Neigung) und $1/R^2$ (Abstand).

Umgekehrt erhalten wir die differentielle Fläche aus dem Raumwinkel in Kugelkoordinaten als:

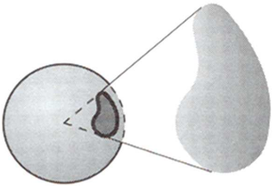
$$dA = \frac{R^2}{\cos(\alpha)} \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Gegeben sei eine Oberfläche A, deren Flächeninhalt wir als Integral wie folgt berechnen:

$$\mathrm{area}(A) = \int_A dA$$

Analog ergibt sich für den von A abgedeckten Raumwinkel:

$$\omega = \int_A \frac{\cos(\alpha)}{R^2} dA$$



Bei stark gekrümmten Oberflächen kann es sein, dass mehrere Teilflächen auf die gleiche Fläche der Einheitskugel projizieren. Solche Sonderfälle sind ggf. getrennt zu behandeln.

Nun führen wir einige Grundgrößen ein, wobei wir zunächst *monochromatisches* Licht (also Licht einer Wellenlänge λ) annehmen:

- Die Strahlungsenergie Q_e (engl. Radiant Energy) ist die Grundgröße der Radiometrie:

$$Q_e \; [\mathsf{J}]$$

- Der Betrag der Strahlungsenergie pro Einheitsvolumen heißt Strahlungsenergiedichte U_e (engl. Radiant Energy Density):

$$U_e = \frac{dQ_e}{dV} \quad \left[\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{m}^3}\right]$$

- Die Strahlungsleistung Φ_e (auch Fluss genannt, engl. Radiant flux) ist die Energie, die von einer Oberfläche pro Einheitszeitintervall abgestrahlt wird:

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt} \quad \left[\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{s}} = \mathsf{W}\right]$$

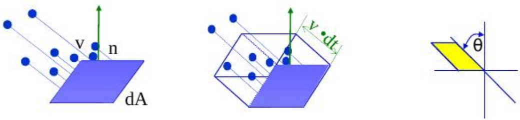
Da ein Photon die Energie $E_p = \frac{hc}{\lambda}$ besitzt (h ist die Plancksche Konstante), ist die Strahlungsleistung proportional zur Anzahl der Photonen, die durch die Oberfläche pro Zeiteinheit fließen.

Wir möchten nun die Strahlungsleistung (den Fluss) bestimmen, die auf ein Flächenelement dA in einer Zeit dt trifft. Dazu betrachten wir die Anzahl der Partikel (Photonen), die in dieser Zeit auf die Fläche treffen.

Die Anzahl der Partikel an einer Position x lässt sich beschreiben durch

$$P(x) = p(x)dV$$

wobei $p(x)$ die Volumendichte und dV ein differentielles Volumenelement ist.



1. Betrachte alle Partikel mit gleicher Flussrichtung:
   - In einer Zeiteinheit dt legen Partikel die Distanz $v \cdot dt$ zurück
   - Volumen $dV = v \cdot dt \cdot \cos(\theta) \cdot dA$ ist zudem abhängig vom Kosinus des Winkels zwischen Flächennormale und Flussrichtung
   - Anzahl der Partikel: $P(x) = p(x) \cdot (v \cdot dt \cdot \cos(\theta)) \cdot dA$
   - Fluss: $\frac{dP(x)}{dt}$
2. Summiere über alle Flussrichtungen: $\frac{dP(x)}{dt} = \sum_i p_i(x) \cdot v_i \cdot \cos(\theta_i) \cdot dA$

Physik: Grundgrößen

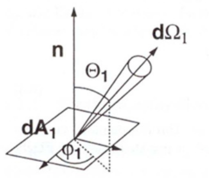
Die Strahlungsleistung, die von einem homogenen Flächenelement dA um x in die Raumwinkelrichtung Ω der Größe $d\omega$ abgestrahlt wird, ist somit proportional zur Fläche dA und zum Kosinus des Winkels θ zwischen Raumwinkelrichtung Ω und Flächennormale n:

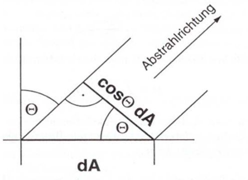
$$d^2\Phi_e(x, dA, \Omega, d\omega) = L_e \cos(\theta) dA d\omega$$

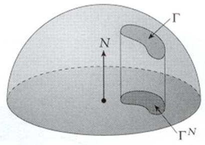
Die eingeführte Proportionalitätsgröße L_e heißt Strahldichte (engl. Radiance) :

$$L_e(x, \Omega) = \frac{d^2\Phi_e(x, dA, \Omega, d\omega)}{\cos(\theta) dA d\omega} \left[\frac{W}{sr\ m^2}\right]$$

Sie beschreibt die Leistung pro Einheitsraumwinkel und pro projizierter Einheitsfläche und ist anschaulich die Helligkeit eines Punktes x in Richtung Ω.







Im allgemeinen Fall ist die Strahldichte L von der Emissionsrichtung und der Wellenlänge abhängig.
Möchte man also die gesamte Strahldichte in Emissionsrichtung bestimmen, so muss über alle Wellenlängen integriert werden:

$$L_r(\theta, \phi) = \int_\lambda L_{\lambda r}(\theta, \phi) d\lambda$$

Bemerkungen:

- Die Strahldichte ist eine Größe der Radiometrie, genauso wie Strahlungsenergie und Strahlungsleistung
- In der Photometrie ist das Gegenstück zur Strahldichte die Leuchtdichte $\left[\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Nun lassen sich weitere physikalische Grundgrößen mithilfe der Strahlungsleistung beschreiben:

Richtungsabhängigkeit der Strahlungsleistung:

- Die Intensität (engl. Intensity) ist die Strahlungsleistung pro Einheitsraumwinkel

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega} \quad \left[\frac{\mathsf{W}}{\mathsf{sr}}\right]$$

Ortsabhängigkeit der Strahlungsleistung:

- Die Bestrahlungsstärke (engl. Irradiance) ist die Strahlungsleistung, die pro Fläche empfangen wird

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \quad \left[\frac{\mathsf{W}}{\mathsf{m}^2}\right]$$

- Die spezifische Ausstrahlung (engl. Radiosity) ist die Strahlungsleistung, die pro Fläche gesendet wird

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \quad \left[\frac{\mathsf{W}}{\mathsf{m}^2}\right]$$

Strahlungsenergie Q_e $\quad [1\mathrm{J}]$
(energy)

pro Zeit $\left(\frac{d}{dt}\right)$

Strahlungsleistung $\Phi_\mathrm{e} = \frac{dQ_e}{dt}$ $\quad [1\mathrm{W}]$ → bezogen auf eine Fläche: **Fluss** *(flux)*
(power)

pro Raumwinkel $\left(\frac{d}{d\Omega}\right)$

pro Fläche $\left(\frac{d}{dA}\right)$

Intensität $I_\mathrm{e} = \frac{d\Phi_\mathrm{e}}{d\Omega}$ $\quad \left[1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}\right]$
(intensity)

Flächendichte $E_\mathrm{e} = \frac{d\Phi_\mathrm{e}}{dA}$ $\quad \left[1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$
(area density)

einfallend: **Bestrahlungsstärke** *(irradiance)*
ausgehend: **spezif. Ausstrahlung** *(radiosity)*

pro Fläche $\left(\frac{d}{dA}\right)$

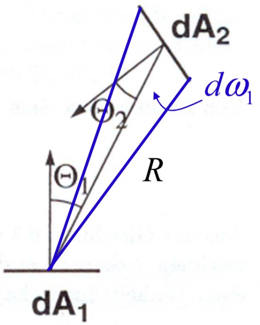
pro Raumwinkel $\left(\frac{d}{d\Omega}\right)$

Strahldichte $L = \frac{d^2\Phi_\mathrm{e}}{d\Omega dA}$ $\quad \left[1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{sr}}\right]$
(radiance)

Für die Beleuchtungsrechnung ist es wichtig, zu wissen, wie Strahlung übertragen wird. Das Grundgesetz der Strahlungsübertragung ist dafür das passende Konzept.

Es beschreibt, wie die differentielle Strahlungsleistung $d^2\Phi$, die von einem differentiellen Flächenelement dA_1 abgestrahlt wird, von einem anderen Flächenelement dA_2 im Abstand R aufgenommen wird:

$$
\begin{aligned}
d^2\Phi_{e,1\to 2} &= L_{e1}(\Omega_{12})\cos(\theta_1)dA_1 d\omega_1 \\
&= L_{e1}(\Omega_{12})\cos(\theta_1)dA_1 \frac{\cos(\theta_2)}{R^2} dA_2 \\
&= L_{e1}(\Omega_{12})\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{R^2} dA_1 dA_2
\end{aligned}
$$



Wegen der Energieerhaltung ist die ausgestrahlte Energie gleich der empfangenen Energie (Beachte: Dies gilt streng genommen nur im Vakuum):

Betrachtet man nun folgende Gleichungen

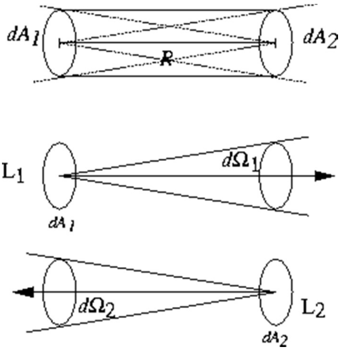
$$d^2\Phi_{e,1\to 2} = L_{e1}\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{R^2}dA_1 dA_2$$

$$d^2\Phi_{e,2\to 1} = L_{e2}\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{R^2}dA_1 dA_2$$

dann folgt wegen der Energieerhaltung, dass $d\Phi_{e,1\to 2} = d\Phi_{e,2\to 1}$ ist und somit auch

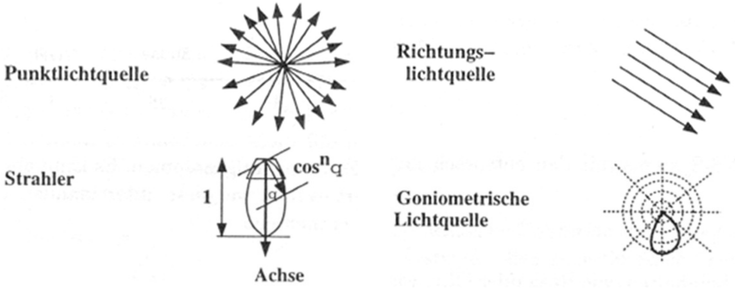
$$L_{e1} = L_{e2}$$

ist, d.h. die Strahldichte ändert sich auf dem Weg der Lichtausbreitung nicht.



Da wir nun wissen, wie Strahlung übertragen wird, können wir nun verschiedene Arten von Lichtquellen klassifizieren.

Häufig werden diese vier Lichtquellenmodelle betrachtet:



Eine Punktlichtquelle hat folgende Eigenschaften:

- Sie strahlt in alle Richtung gleichmäßig ab (idealisiert). Dies nennt man isotrop .
- Wichtige Parameter:
  - Lage im Raum
  - Lichtstärke $I(\lambda)$
- Im Abstand R erzielt diese Lichtquelle die Strahldichte

$$L_i(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{R^2}$$

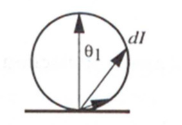
Eine Richtungslichtquelle hat folgende Eigenschaften:

- Sehr weit entfernte Objekte (z.B. die Sonne) werden so modelliert
- Wichtige Parameter:
  - Ausbreitungsrichtung V
  - Strahldichte $L_i(\lambda)$

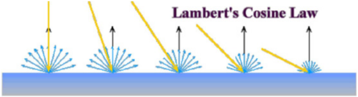
Ein Lambertscher Flächenstrahler hat folgende Eigenschaften:

- Die Strahldichte bei einer beleuchteten Fläche ist unabhängig von der Betrachtungsrichtung
- Die Fläche erscheint daher aus allen Richtungen gleich hell
- Für die Intensität gilt:

$$I(\theta_1, \lambda) = L(\lambda) \cdot \cos(\theta_1)$$



Dieses Verhalten ist im Lambertschen Kosinusgesetz von 1760 beschrieben worden:

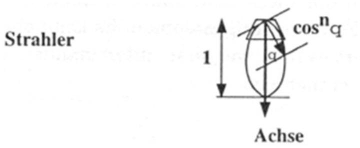


Ein Spot (spotlight, im Theater auch Profilscheinwerfer, Verfolger, ...) hat folgende Eigenschaften:

- Die Lichtausbreitung ist durch einen bestimmten Raumwinkel (Lichtkegel) beschränkt
- Ein Modell für die Intensität ist daher:

$$I(\theta_1, \lambda) = I_0(\lambda) \cdot \cos(\theta_1)^n$$

- Der Exponent n bestimmt dabei die Bündelung, d.h. auch die Größe des Raumwinkel bzw. des Lichtkegels



- Ein alternatives Modell (scharf begrenzter Lichtkegel konstanter Intensität) wäre:

$$I(\theta_1, \lambda) = \begin{cases} I_0(\lambda) & \theta_1 < \theta_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

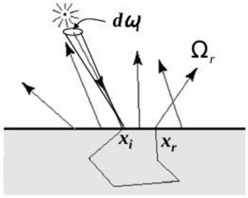
Renderinggleichung und BRDFs

Für die Beleuchtungsrechnung ist es, neben dem Grundgesetz der Strahlungsübertragung und der Klassifikation von Lichtquellen, auch wichtig, die Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

Problem:

- Optisch perfekt glatte Flächen reflektieren oder transmittieren kohärentes Licht gemäß der Gesetze der Geometrischen Optik.
- Irregularitäten führen zur Reflexion und Refraktion von inkohärentem Licht in alle Richtungen
- Die exakte Natur dieser Irregularitäten ist nicht bekannt.
- Lösung : Man muss dieses Verhalten durch Wahrscheinlichkeiten simulieren (approximieren).

Trifft ein Lichtstrahl im Punkt x_i auf eine Oberfläche, so wird ein Teil direkt reflektiert. Ein anderer Teil dringt in die Oberfläche ein, wird dort gestreut und an einem anderen Punkt x_r wieder abgestrahlt:

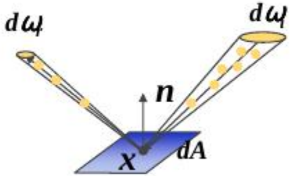


Ist dL_r die Strahldichte im Punkt x_r, die von einem einfallenden Fluss $d\Phi_i$ aus dem Raumwinkel $d\omega_i$ um den Punkt x_i erzeugt wurde, dann ist dL_r direkt proportional zu $d\Phi_i$:

$$dL_r(x_r, \phi_r, \theta_r) = S(x_r, \phi_r, \theta_r, x_i, \phi_i, \theta_i) \cdot d\Phi(x_i, \phi_i, \theta_i)$$

Die Proportionalitätsfunktion S heißt Bidirektionale Oberflächenstreuungs-Reflektanzverteilungsfunktion (engl. Bidirectional Scattering Surface Reflectance Distribution Function) BSSRDF . Sie beschreibt das Verhältnis von reflektierter Strahldichte dL_r im Punkt x_r zur einfallenden Strahlungsleistung $d\Phi_i$ im Punkt x_i.

Betrachtet man nur reine Reflexion an der opaken Oberfläche, dann ist $x_i = x_r$ und die Proportionalitätsfunktion S heißt Bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion (engl. Bidirectional Reflectance Distribution Function, BRDF) .



Betrachtet man Licht als einen Teilchenstrom, so sind BSSRDF und BRDF diskret-kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen für bestimmte Streurichtungen.

BSSRDF und BRDF beschreiben das Reflektanzverhalten von Oberflächen, also ihr Erscheinungsbild (Appearance) unter beliebigen Beleuchtungs- und Betrachtungsbedingungen. Über die (hier nicht immer explizit notierte) Abhängigkeit von λ sind die Farben von Objekten ein Teil der Appearance.

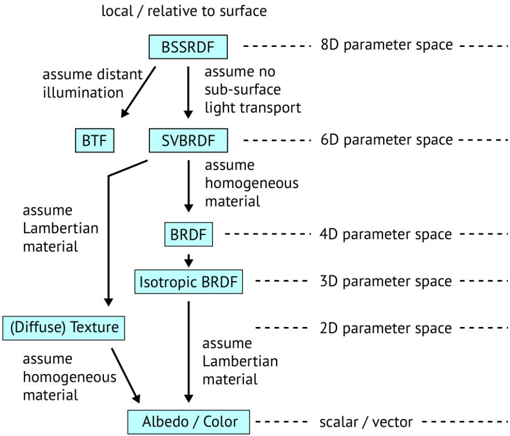


Figure 3: *A taxonomy of visual appearance representations*

(nach Fuchs/Lensch/Rusinkiewicz/Marschner)

Nun wollen wir dieses Wissen nutzen und die Reflexionsgleichung herleiten:

Der erwartete Fluss $d\Phi_r$ in den Raumwinkel $d\omega_r$ um die Richtung Ω_r ergibt sich gemäß

$$d\Phi_r(x, \Omega_r, d\omega_r) = w(x, \Omega_r, \Omega_i) \cdot d\omega_r \cdot \Phi_i(x, \Omega_i, d\omega_i)$$

Der gesamten Fluss Φ_r ergibt sich durch Integration des Halbraum Ω_i:

$$\Phi_r(x, \Omega_r, d\omega_r) = \int_{\text{Halbraum } \Omega_i} w(x, \Omega_r, \Omega_i) \cdot d\omega_r \cdot \Phi_i(x, \Omega_i, d\omega_i)$$

Die einfallenden und ausfallenden Flüsse lassen sich auch mithilfe der Strahldichte ausdrücken:

$$\Phi_i(x, \Omega_i, d\omega_i) = L_i(x, \Omega_i) \cdot dA \cdot \cos(\theta_i) \cdot d\omega_i$$
$$\Phi_r(x, \Omega_r, d\omega_r) = L_r(x, \Omega_r) \cdot dA \cdot \cos(\theta_r) \cdot d\omega_r$$

Setzt man diese nun, unter der Annahme des Superpositionsprinzips, ein, gilt:

$$L_r(x, \Omega_r) \cdot dA \cdot \cos(\theta_r) \cdot d\omega_r = \int_{\text{Halbraum } \Omega_i} w(x, \Omega_r, \Omega_i) \cdot d\omega_r \cdot L_i(x, \Omega_i) \cdot dA \cdot \cos(\theta_i) \cdot d\omega_i$$

$$L_r(x,\Omega_r)\cdot dA\cdot\cos(\theta_r)\cdot d\omega_r = \int_{\text{Halbraum }\Omega_i} w(x,\Omega_r,\Omega_i)\cdot d\omega_r\cdot L_i(x,\Omega_i)\cdot dA\cdot\cos(\theta_i)\cdot d\omega_i$$

Durch Umformung erhält man nun

$$L_r(x,\Omega_r) = \int_{\text{Halbraum }\Omega_i} \frac{w(x,\Omega_r,\Omega_i)}{\cos(\theta_r)}\cdot \underbrace{L_i(x,\Omega_i)\cdot\cos(\theta_i)\cdot d\omega_i}_{=dE_i(x,\Omega_i,d\omega_i)}$$

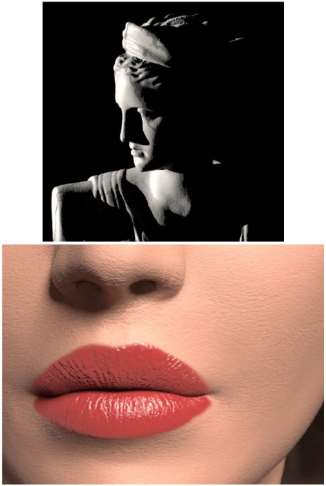
Nun definiert man die BRDF durch

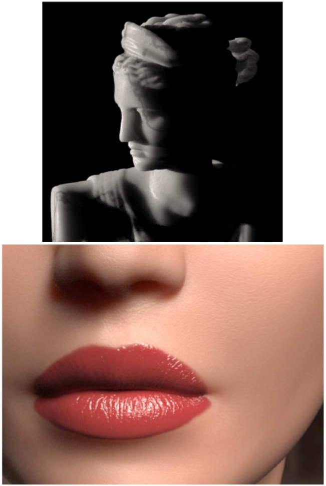
$$\rho(x,\Omega_r,\Omega_i) := \frac{w(x,\Omega_r,\Omega_i)}{\cos(\theta_r)} = \frac{dL_r(x,\Omega_r)}{dE_i(x,\Omega_i,d\omega_i)}\ \left[\frac{1}{\text{sr}}\right]$$

Somit ergibt sich die Reflexionsgleichung :

$$L_r(x,\Omega_r) = \int_{\text{Halbraum }\Omega_i} \underbrace{\rho(x,\Omega_r,\Omega_i)\cdot L_i(x,\Omega_i)\cdot\cos(\theta_i)\cdot d\omega_i}_{=dL_r(x,\Omega_r)}$$

BRDF und BSSRDF im Vergleich





Links: BRDF (harte Lichtverteilung) , Rechts: BSSRDF (ausgeglichenere Lichtverteilung, weiche Schatten, ...)

Für die Computergrafik sind einige Eigenschaften für BRDFs wichtig:

- Helmholtz-Reziprozität :

$$\rho(x, \Omega_r, \Omega_i) = \rho(x, \Omega_i, \Omega_r)$$

  d.h. man darf Einfalls- und Ausfallsrichtung vertauschen ($\rightarrow$ Raytracing).
- Positivität :

$$\rho(x, \Omega_r, \Omega_i) \geq 0$$

- Anisotropie : Wird bei gleichem Einfalls- und Ausfallswinkel die Fläche um die Normale gedreht, so ändert sich der Anteil des reflektierten Lichts (z.B. bei Stoffen und Metalllacken)
- Energieerhaltung :

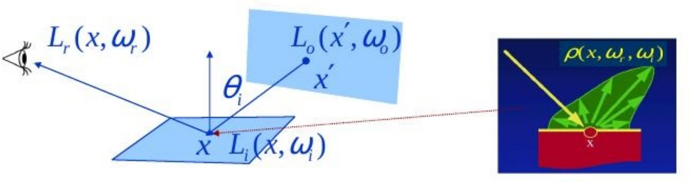
$$\int_{\Omega_r} \rho(x, \Omega_r, \Omega_i) \cos(\theta_r) d\omega_r \leq 1$$

Es wurden dabei **vereinfachte Annahmen** gemacht:

- Die Wellenlängen des Lichts bleiben erhalten (keine Fluoreszenz).
- Licht wird sofort reflektiert (keine Phosphoreszenz).
- Lichttransport zwischen zwei Objekten erfolgt im Vakuum.
- Atmosphärische Effekte oder Reflexion an Haaren nicht korrekt beschrieben

Die für die Computergrafik wohl wichtigste Gleichung ist die Renderinggleichung :

$$L_r(x,\omega_r) = L_e(x,\omega_r) + \int_{\Omega_i} \rho(x,\omega_r,\omega_i) L_i(x,\omega_i) \cos(\theta_i) d\omega_i$$



Die Renderinggleichung ergibt sich aus der Reflexionsgleichung durch Addition eines Emissionsterms.

Interpretation:
Das reflektierte Licht ist gleich dem direkt abgestrahltem Licht plus allem Licht, welches aus beliebiger Richtung auf x trifft und in Richtung ω_r reflektiert wird.

Es gibt u.a. vier Reflexionstypen, die wir mithilfe der BRDF modellieren können:

Bemerkung: Analog kann man auch die Transmission modellieren:

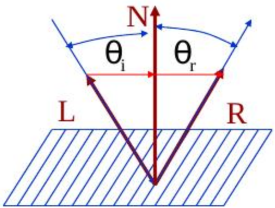
Das passende Gegenstück zur BRDF ist die BTDF (Bidirectional Transmission Distribution Function). Beide zusammen bilden die (voll-sphärische) BSDF oder Bidirectional Scattering Distribution Function.

Für die BRDF ist es wichtig, die Reflexionsrichtung zu kennen.
Diese lässt sich aus der Lichtrichtung (Einfallsrichtung) mithilfe des Reflexionsgesetzes beschreiben:

- Einfallswinkel ist gleich Ausfallwinkel bezogen auf die Flächennormale, d.h. $\theta_r = \theta_i$
- Einfallender Strahl, ausfallender Strahl und Flächennormale liegen in einer Ebene

Damit lässt sich die Reflexionsrichtung wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
R(L) &= L + 2(\langle N|L\rangle\, N - L) \\
&= 2\,\langle N|L\rangle\, N - L \\
&= (2NN^T - I)L
\end{aligned}
$$



Dabei ist die Matrix $2NN^T - I$ die so genannte Householder-Matrix.

Beachte: Die Normale N muss vorher normiert werden!

Mithilfe des Reflexionsgesetzes wollen wir nun die ideal spiegelnde BRDF bestimmen: Ist die Richtung der einfallenden Strahlung durch die beiden Winkel (ϕ_i, θ_i) beschrieben, so wird nur in Richtung

$$\theta_r = \theta_i \qquad \phi_r = \phi_i + \pi$$

Strahlung reflektiert. Aus anderen Richtungen sieht man also kein Licht.
Um dies zu modellieren, wird die Diracsche Delta„funktion“ (mathematisch keine Funktion!) verwendet:

$$\delta(x) = 0, \text{ falls } x \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Die ideal spiegelnde BRDF ergibt sich dann durch:

$$\rho(x, \phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) = r_m(\phi, \theta) \cdot \frac{\delta(\phi_r - \phi_i - \pi) \cdot \delta(\theta_r - \theta_i)}{\sin(\theta_i) \cdot \cos(\theta_i)}$$

Dabei ist $r_m(\phi, \theta)$ der Abschwächungsfaktor der Oberfläche (evtl. als Farbvektor gegeben) und nimmt typischerweise Werte zwischen 0 und 1 an.

BRDF: Brechungsgesetz

Bei der obigen BRDF hängt der Abschwächungsfaktor r_m von den Parametern (ϕ, θ) ab, welche genutzt werden, um realistische perfekt spiegelnde Materialien (wie z.B. poliertes Metall, Glas) korrekt zu modellieren.

Für die Modellierung müssen wir das Brechungsgesetz (Snellius, 1620) verstehen. Es besagt:

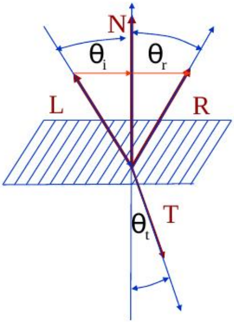
- Einfallender Strahl, Normale und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene
- Der Sinus des Einfallwinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in einem konstanten Verhältnis, das nur von der Natur der beiden Medien abhängt

In Formeln bedeutet dies:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2) \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1} = const.$$

wobei $n_1 := c/v_1$ und $n_2 := c/v_2$ dabei die Brechzahlen (Brechungsindizes) der Medien sind, definiert als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit im betreffenden Medium.
Der Brechungsindex des Vakuums ist gleich 1.

Geometrisch gesehen, passiert bei der Brechung von Licht folgendes:



Wendet man obige Brechungsformel an, so gilt für dieses Schaubild:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n_t}{n_i} = const.$$

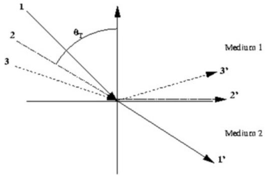
Wie man am obigem Schaubild sieht, wird der Strahl zum Einfallslot hin gebrochen. Dies passiert beim Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium, d.h. $n_1 < n_2$.

Generell gilt:

- Übergang dünn $\rightarrow$ dicht : $n_1 < n_2$: Brechung **hin zum** Einfallslot
- Übergang dicht $\rightarrow$ dünn : $n_1 > n_2$: Brechung **weg vom** Einfallslot

Im zweiten Fall, d.h. Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium, gibt es einen Einfallswinkel θ_T, zu dem der Brechungswinkel 90° gehört:

$$\sin(\theta_T) = \frac{n_2}{n_1}$$



Wenn dieser Grenzwinkel θ_T überschritten wird, ist ein Übergang in das dünnere Medium nicht mehr möglich. Vielmehr wird alles Licht an der Grenzfläche reflektiert (Totalreflexion).

Die Fresnelschen Gleichungen, benannt nach Augustin Jean Fresnel (Französischer Physiker), beschreiben die Abschwächung bei Reflexion und Transmission.

- Sie werden aus den Maxwellschen Gleichungen für Wellenoptik abgeleitet
- Dies ist also der gewünschte Abschwächungsfaktor für die BRDF

Für die reflektierten/transmittierten *Amplituden* des elektrischen Feldes gilt:

s-polarized light:

$$r_\perp = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

$$t_\perp = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}$$

p-polarized light:

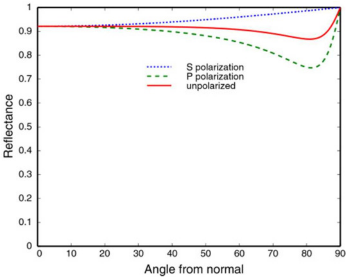
$$r_\parallel = \frac{n_i \cos(\theta_t) - n_t \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

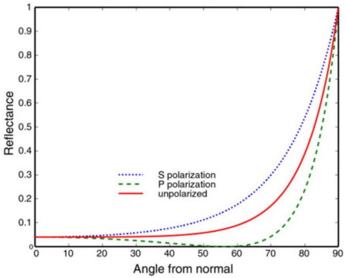
$$t_\parallel = \frac{2 n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}$$

And, for both polarizations: $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$

Die jeweiligen *Intensitäten* entsprechen dem Quadrat dieser Amplituden.

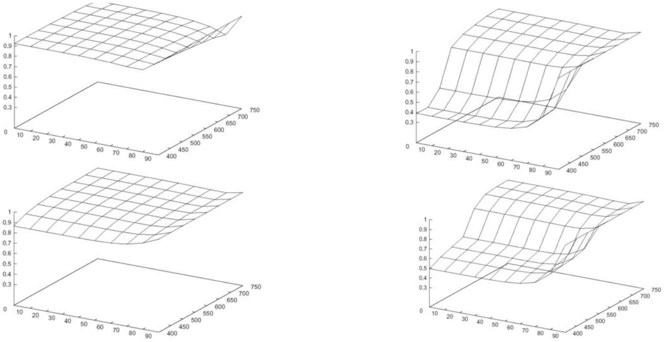
Ohne näher auf die Fresnel-Gleichungen einzugehen, betrachten wir das Resultat:





Man erkennt den Zusammenhang zwischen der Stärke der Reflektanz und dem Einfallswinkel θ_i.

Beschreibt man dies genauer, so kann die Reflektanz in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_i und der Wellenlänge λ angegeben werden:

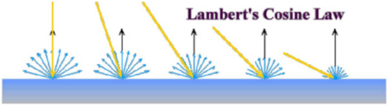


Dielektrische Oberflächen wie z.B. Glas, Lack, Kunststoff, Stein, Papier, ... reflektieren aufgrund des Fresneleffekts stärker unter flachen Beobachtungswinkeln, was zu einem Glanzeffekt führt!

Das Resultat:

Man beachte die stärkere Reflexion unter flachen Winkeln.

Die wohl einfachste BRDF ist die ideal diffuse BRDF. Sie geht auf das Lambertsche Kosinusgesetz zurück:



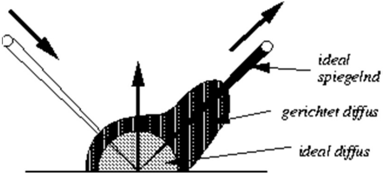
Die Strahlung wird in alle Richtungen gleichstark reflektiert. Die Stärke hängt dabei von dem Einfallswinkel ab. Es ergibt sich somit folgende BRDF:

$$\rho(x, \phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) = \frac{r_d}{\pi}$$

Diese BRDF heißt diffuse BRDF oder auch Lambert-BRDF und ist insbesondere reziprok und energieerhaltend.

Beispiele für diffuse Oberflächen:

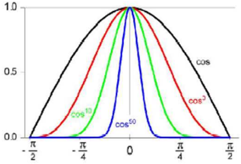
Sehr häufig besitzen Materialien einige sehr glänzende, teilweise spiegelnde Stellen (Highlights), wenn Licht auf sie trifft. Diesen Effekt nennt man Spekulare Reflexion (engl. specular reflection) .



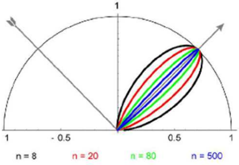
Häufig wird dieser Effekt durch einen richtungsunabhängigen, diffusen Anteil r_d und einen richtungsabhängigen, spekularen Anteil r_s modelliert.

Beispiele für spekular reflektierende Oberflächen:

Betrachtet man folgendes Schaubild, so stellt man fest, dass Potenzen des Kosinus, diesen in Richtung der y-Achse konzentrieren.



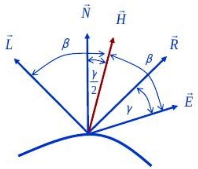
Damit können wir den spekularen Anteil modellieren. Im Grenzfall $m \to \infty$, entspricht dieser Anteil genau dem Anteil der idealen Spiegelung.



Auf dieser Basis lässt sich folgende BRDF formulieren:

$$\rho(x, \phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) = \frac{r_d}{\pi} + r_s \cdot \frac{\cos(\gamma)^m}{\cos(\theta_r)} = \frac{r_d}{\pi} + r_s \cdot \frac{\langle R|E\rangle^m}{\langle L|N\rangle}$$

Dieses Modell wurde von Phong 1975 vorgeschlagen und heißt deswegen auch Phong-BRDF .



Bei dieser BRDF muss für jede Normale separat die Reflexionsrichtung R berechnet werden. Um dies zu vermeiden, modifizierte Blinn 1978 dieses Modell:

$$\rho(x, \phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) = \frac{r_d}{\pi} + r_s \cdot \frac{\langle H|N\rangle^m}{\langle L|N\rangle}$$

wobei $H = \frac{L+E}{\|L+E\|_2}$ ist. Diese BRDF heißt Blinn-Phong-BRDF .

Als positiver Nebeneffekt der Modifikation ist die Blinn-Phong-BRDF physikalisch gesehen korrekter als die Phong-BRDF.

Beispiele:

Links: Phong , Rechts: Blinn-Phong

UNIVERSITÄT BONN

Trotzdem gibt es Probleme bei der Phong- und der Blinn-Phong-BRDF:

$$\text{Phong:} \quad \rho(x,E,L) = \frac{r_d}{\pi} + r_s \cdot \frac{\langle R|E\rangle^m}{\langle L|N\rangle}$$

$$\text{Blinn-Phong:} \quad \rho(x,E,L) = \frac{r_d}{\pi} + r_s \cdot \frac{\langle H|N\rangle^m}{\langle L|N\rangle}$$

Probleme:

- Nicht reziprok: Keine Symmetrie in L und R
- Keine Energieerhaltung: $\langle L|N\rangle$ kann beliebig klein werden

Aus diesen Gründen entwickelte Lewis 1993 eine energieerhaltende BRDF:

$$\rho(x,E,L) = \frac{r_d}{\pi} + \frac{m+2}{2\pi} \cdot r_s \cdot \langle R|E\rangle^m$$

Dieses Modell heißt Cosine-Lobe-BRDF .

LaFortune et al. verallgemeinerten 1997 das Cosine-Lobe-Modell:

Anstatt die Reflexionsrichtung R mit der Householdermatrix

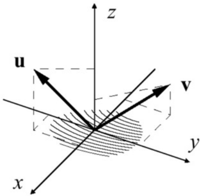
$$2NN^T - I$$

zu berechnen, wird eine beliebige symmetrische Matrix M verwendet (Die Symmetrie von M sichert dann die Reziprozität):

$$\rho(x, E, L) = r_s(L^T M E)^m$$

Diagonalisiert man M und rechnet im transformierten Koordinatensystem, so ergibt sich

$$\rho(x, E, L) = r_s(C_x E_x L_x + C_y E_y L_y + C_z E_z L_z)^m$$



Für die isotrope Reflexion ist $C_x = C_y$.
Somit erhält man das originale Cosine-Lobe-Modell, wenn man für die Parameter wie folgt wählt:

$$-C_x = -C_y = C_z = \sqrt[m]{\frac{m+2}{2\pi}}$$

Für jede Einfallsrichtung L kann die Reflektanzfunktion wieder als gewöhnliche Cosine-Lobe-BRDF beschrieben werden:

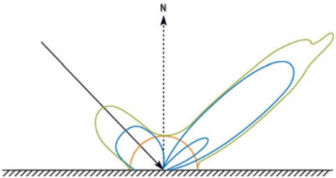
$$\begin{aligned}\rho(x, E, L) &= r_s (L^T M E)^m \\ &= r_s \cdot \left\|L^T M\right\|_2^m \cdot \left(\frac{L^T M}{\|L^T M\|_2^m} E\right)^m \\ &= r_s \cdot C_s(L) \cdot \langle L_M | E \rangle^m\end{aligned}$$

wobei $C_s(L) = \left\|L^T M\right\|_2^m$ und $L_M = \left(\frac{L^T M}{\left\|L^T M\right\|_2^m}\right)^T$ ist.

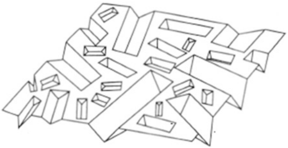
$$\rho(x, E, L) = r_s(C_x E_x L_x + C_y E_y L_y + C_z E_z L_z)^m$$

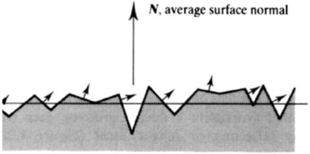
Man nutzt diese Verallgemeinerung, um komplexere spekulare Reflexionen zu modellieren. Durch die Summe von diesen verallgemeinerten Cosine-Lobe-Funktionen kann man mehrere spekulare Keulen erzeugen:

$$\rho(x, E, L) = \sum_i (C_{x,i} E_x L_x + C_{y,i} E_y L_y + C_{z,i} E_z L_z)^{m_i}$$



Das Torrance-Sparrow-Modell basiert auf der Annahme, dass die Mikrofacetten aus kleinen, langen, symmetrischen, V-förmigen Spiegelflächen besteht, die beliebig orientiert sind.





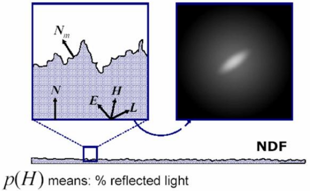
Die BRDF des Torrance-Sparrow Modells (auch Cook-Torrance-Modell genannt) unterteilt die Beleuchtung wie beim Phong-Modell in einen diffusen und spekularen Anteil:

$$\rho(x, E, L) = \frac{r_d}{\pi} + \frac{r_s}{\pi} \cdot \frac{p(H) \cdot G(L, E) \cdot F(\langle H|E \rangle)}{4 \langle N|L \rangle \cdot \langle N|E \rangle}$$

Dabei ist

- $p(H)$: Verteilung der Normalen (Normal Density Function NDF)
- G : Geometrieterm in $[0, 1]$, beschreibt die Abschwächung durch Selbstabschattung
- F : Fresnelterm, d.h. Reflexionskoeffizient

Winkel-Verteilung auf der Oberfläche:



Für die NDF gibt es verschiedene Modelle:

- **Blinn (1977):** Gaußsche Verteilung

$$p(H) = c \cdot e^{-(\alpha/m)^2}$$

  wobei c eine Konstante, α der Winkel zwischen Mikrofacette und mittlerer Normale der Fläche und M ein Maß für die Rauheit ist
- **Torrance-Sparrow (1967):** Beckmann Verteilung (Streuung elektromagnetischer Wellen)

$$p(H) = \frac{1}{m^2 \cdot \cos(\alpha)^4} e^{-(\tan(\alpha)/m)^2}$$

- **Ashikmin et. al. (2000):** Benutzerdefinierte Verteilung als Textur gespeichert

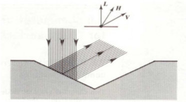
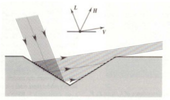
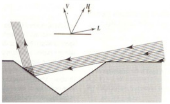
Der Fresnelterm ist gegeben durch

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)^2}{\sin(\theta_i + \theta_t)^2} + \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)^2}{\tan(\theta_i + \theta_t)^2}\right)$$

Formt man diesen um, so erhält man

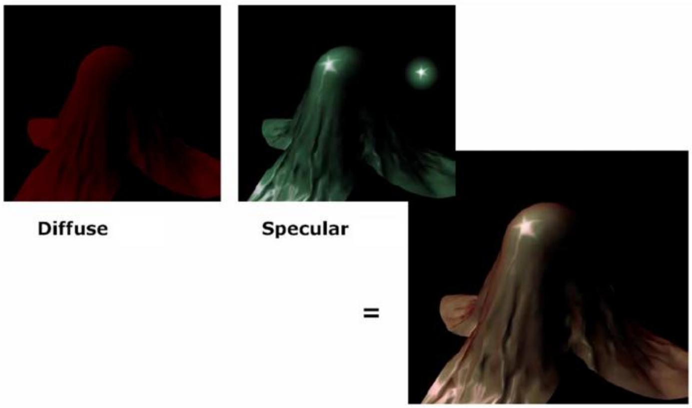
$$F = \frac{(g-c)^2}{2(g+c)^2} \cdot \left(1 + \frac{(c \cdot (g+c) - 1)^2}{(c \cdot (g+c) + 1)^2}\right)$$

mit Brechungsindex n des Materials, $c = \langle H|E \rangle$ und $g^2 = n^2 + c^2 - 1$.

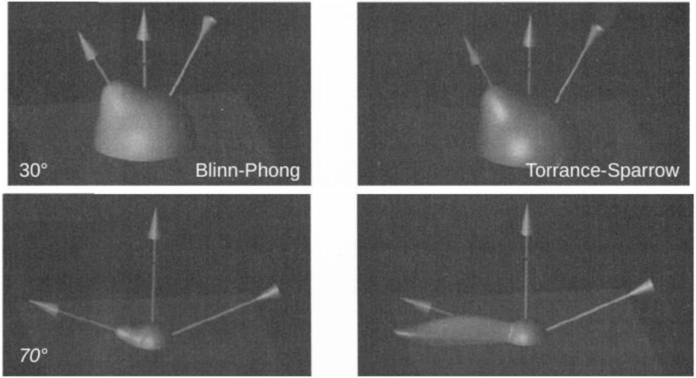
Abschattung		Formel
keine		$G_{none} = 1$
Masking		$G_m = \dfrac{2 \cdot \langle N \vert H \rangle \cdot \langle N \vert E \rangle}{\langle E \vert H \rangle}$
Shadowing		$G_s = \dfrac{2 \cdot \langle N \vert H \rangle \cdot \langle N \vert L \rangle}{\langle E \vert H \rangle}$

Der Geometrieterm ergibt sich als Minimum der Terme: $G = \min(G_{\text{none}}, G_m, G_s)$.

Graphisch sehen diffuser und spekularer Anteil z.B. wie folgt aus:



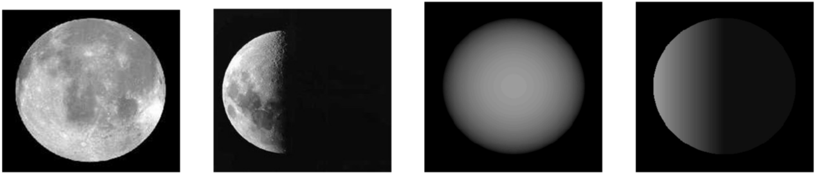
Unterschiede der Lichtverteilung zwischen Blinn-Phong und Torrance-Sparrow:



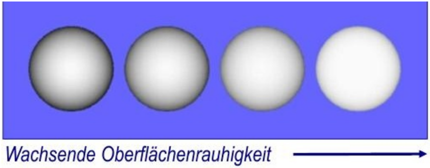
Man beachte den "off-specular peak" für flache Einfallsrichtungen im Torrance-Sparrow-Modell.

BRDF: Oren-Nayar Modell

Die ideal diffuse BRDF reicht leider nicht für die Modellierung aller diffus reflektierenden Flächen aus.



Nur glatte Oberfläche reflektieren ideal diffus. Raue Oberflächen reflektieren das Licht anders.



Nimmt die Rauigkeit zu, so wirkt das Objekt flacher.

BRDF: Oren-Nayar Modell

Das Oren-Nayar-Modell hat folgende Eigenschaften:

- Physikalisch-basiertes Model für matte (diffuse) Reflexion
- Grundlage: Geometrische Optik
- beschreibt blickrichtungsabhängige Abweichung von der diffusen BRDF ($\rightarrow$ Spezialfall: ideal diffuse BRDF)
- betrachtet (teilweise) Interreflexionen
- beschreibt Rauigkeit ähnlich wie das Torrance-Sparrow Modell

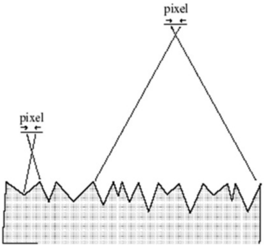
Somit ist die Oren-Nayar-BRDF eine Verallgemeinerung der diffusen BRDF.

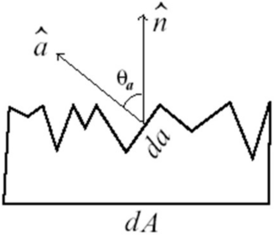
Das Oren-Nayar-Modell ist ähnlich wie das Torrance-Sparrow Modell aufgebaut.

- V-förmige Mikrofacetten
- Statistisches Modell für NDF (Normal Distribution Function)

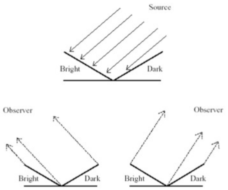
Unterschied:

- Jede Mikrofacette reflektiert diffus (nicht spiegelnd!)

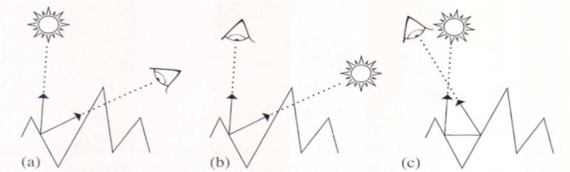




Bei variierenden Blickrichtungen bestimmt das Verhältnis von beleuchteten zu verdeckten Mikrofacetten die Pixel-Projektion.



Genau wie beim Torrance-Sparrow-Modell unterscheidet man zwischen



Dies ist aber komplexer als beim Torrance-Sparrow-Modell.

Für die NDF wird oft die Gauß-Verteilung verwendet:

$$p(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

Daraus resultiert die Oren-Nayar-BRDF :

$$\rho(x, \phi_r, \theta_r, \phi_i, \theta_i) = \frac{r_d}{\pi} \cdot (A + B \cdot \max(0, \cos(\phi_i - \phi_r)) \cdot \sin(\alpha) \cdot \tan(\beta))$$

mit

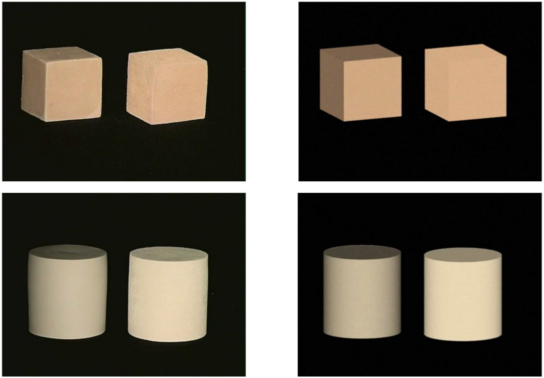
$$A = 1 - 0.5 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33} \qquad B = 0.45 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09}$$

$$\alpha = \max(\theta_i, \theta_r) \qquad \beta = \min(\theta_i, \theta_r)$$

Hierbei ist σ die Standardabweichung der NDF.

Bemerkung: Für $\sigma = 0$, d.h. $A = 1, B = 0$ erhält man die ideal diffuse BRDF.

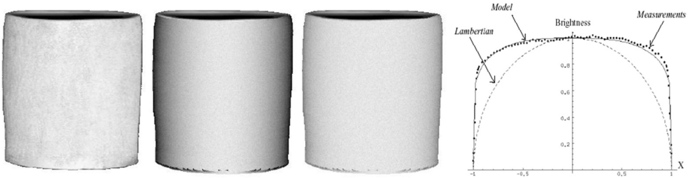
Rendert man nun Bilder mit dem Oren-Nayar-Modell, so ergibt sich folgender Vergleich:



Links: Reale Bilder , Rechts: Renderings

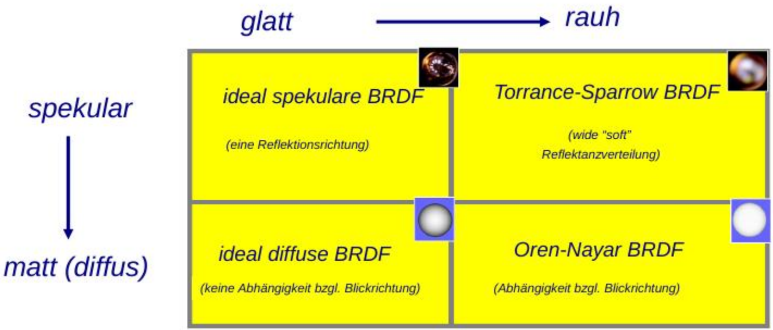
Das Oren-Nayar-Modell ist somit eine ziemlich gute Approximation bezogen auf matte Oberflächen.

Weiterer Vergleich:

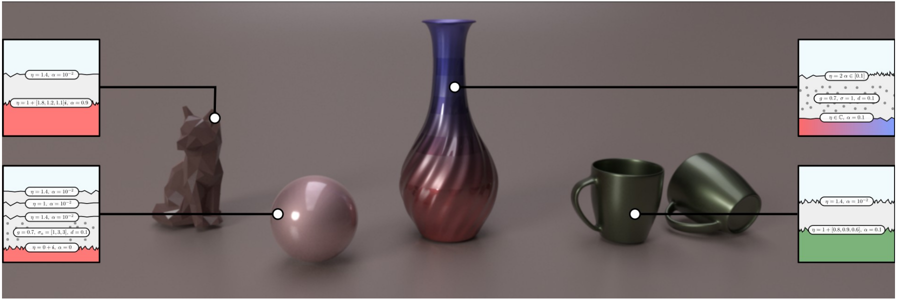


(a) Image (b) Lambertian (c) Model (d)

BRDF: Übersicht der wichtigsten Modelle

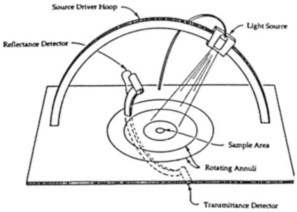


- Viele Materialien (Keramik, Lacke, ...) sind aus mehreren Schichten mit unterschiedlichen optischen Eigenschaften aufgebaut (z.B. Grundierung, Pigmentschicht, Klarlack).
- Hier wird es beliebig kompliziert!



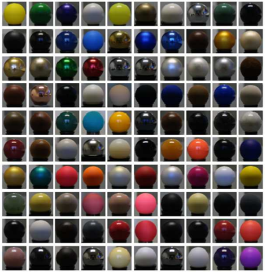
(Quelle: Belcour, SIGGRAPH 2018)

Schema eines Genioreflektometers:



Effizienter Aufbau mit einer CCD-Kamera:
Eine Aufnahme der Probenkugel mit homogenem Material liefert gleichzeitig viele Messwerte D_k in Richtung $(\omega_{ik}, \omega_{rk})$.

In folgender Grafik sind die Ergebnisse der Messungen von Matusik et al. von 2003 zu sehen:



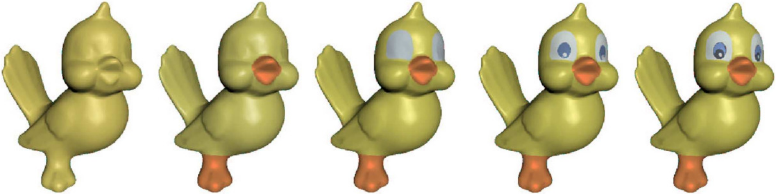
Die Abteilung für Computergrafik der Universität Bonn hat im eigenen Dome eine Lackkugel vermessen und diese dann vor dem Haupteingang gerendert:

Wie fittet man ein Modell an die gegebenen Messdaten?

- D_k ist der k-te Messpunkt in die Richtungen $(\omega_{ik}, \omega_{rk})$
- Das Modell mit dem Parameter(-vektor) p wird nun ausgewertet in Messrichtung $(\omega_{ik}, \omega_{rk})$: $M^{(p)}(\omega_{ik}, \omega_{rk})$
- Somit gilt es folgendes Minimierungsproblem zu lösen (Methode der kleinsten Quadrate):

$$\min_p \sum_k \left\| M^{(p)}(\omega_{ik}, \omega_{rk}) - D_k \right\|_2^2$$

- Dieses nichtlineare Problem lässt sich z.B. mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren lösen.



Progressive Rekonstruktion räumlich variierender Materialien [Lensch et al. 2001]

Foto

Rendering