Lösungen für Übungsblatt 2

Henning Lehmann

25. Oktober 2022

Aufgabe 2.2: Rekursionsgleichungen lösen

Theorem: Die geschlossene Form von $S(n)$ lautet $S(n) = 2 \cdot n!$ für $n \geq 2$.

Beweis:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} S(2) &= \sum_{i=1}^{1} i \cdot S(i) = 1 \cdot S(1) = 4 \\ &= 2 \cdot 2! = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4. \end{aligned} \tag{1}$$

Induktionsannahme: $S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i) = 2 \cdot n!$ für alle $n \geq 2$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} S(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot S(i) &= n \cdot S(n) + \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i) \\ &= n \cdot S(n) + 2 \cdot n! \\ &= n \cdot 2 \cdot n! + 2 \cdot n! \\ &= (n+1) \cdot 2 \cdot n! \\ &= 2 \cdot (n+1)! \end{aligned} \tag{2}$$

$\square$

Aufgabe 2.4: Multiplikation zweier Zahlen

(a)

Annahme: Das Verschieben einer Zahl um i Stellen liegt in $\Theta(1)$.

Lösung: Die „Schulmethode“ zum Multiplizieren zweier Zahlen liegt in $\Theta(n^2)$.

Begründung: Das Multiplizieren von x mit einer Stelle von y benötigt eine Laufzeit von $c * n$, da x n Stellen hat. Das anschließende Verschieben liegt laut Annahme in $\Theta(1)$.

Da y ebenfalls n Stellen hat, passieren insgesamt n Multiplikationen mit jeweils einer Laufzeit in $\Theta(n)$. Daher liegt die Zeit für die Ausführung aller Multiplikationen in $\Theta(n^2)$.

Die hierbei entstehenden Zwischenergebnisse haben eine Durchschnittliche Stellenzahl von $3/2n$ (sie werden durchschnittlich um $1/2n$ Stellen nach rechts verschoben). Die Addition von zwei dieser Zwischenergebnisse liegt ebenfalls in $\Theta(n)$ und findet erneut n-mal statt - insofern liegt die Laufzeit für die Addition ebenfalls in $\Theta(n^2)$.

Insgesamt liegt die Laufzeit der Schulmethode also in $\Theta(n^2) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$.

(b)

Anzugeben ist die Rekursionsgleichung für CleverMult in der allgemeinen Form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

Für den beschriebenen Algorithmus ergeben sich folgende Parameter:

- $a = 3$, da es drei rekursive Aufrufe gibt.
- $b = 2$, da sich die Problemgröße n bei jedem Aufruf halbiert.
- $f(n) = c \cdot n = \Theta(n)$, da alle übrigen Operationen Additionen sind, welche gemäß Aufgabenstellung in $\Theta(n)$ liegen.

Die Rekursionsgleichung lautet also $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$.

Da $f(n) \in O(n^{\log_2 3 - \epsilon})$ mit $\epsilon = 1 > 0$, gilt laut Master-Theorem:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1,58})$$