Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik VI, Technische Informatik

Prof. Dr. Joachim K. Anlauf

3. Übung für die Vorlesung
Technische Informatik

Wintersemester 2022/2023

Abgabe: spätestens Dienstag, 15.11.2022, 8:15 Uhr

Aufgabe 1. *Boolesche Algebra* 8 P.

Gegeben seien die Huntington'schen Axiome der Booleschen Algebra.

Bezeichnung	Disjunktion	Konjunktion
Neutrales Element	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Inverses Element	$a + a' = 1$	$a \cdot a' = 0$
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Für alle folgenden Teilaufgaben gilt:
Geben Sie in jedem Schritt den Namen der von Ihnen verwendeten Rechenregel an.

1. Beweisen Sie die Doppelte Negation $(a')' = a$ mit Hilfe der Huntington'schen Axiome.
2. Beweisen Sie die folgende Aussage unter Verwendung der oben angegebenen Rechenregeln:
$$(x_1' \cdot x_2) \cdot x_3 + (x_1' \cdot x_2') \cdot x_3 = x_1' \cdot x_3$$
3. Der Exklusiv-ODER-Operator (XOR) ist definiert als: $a \oplus b := a' \cdot b + a \cdot b'$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $a \oplus a = 0$
   (b) $a \oplus b = a' \oplus b'$
4. Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Ausdruck unter Verwendung der oben angegebenen Huntington'schen Axiome und des Assoziativgesetzes:
$$z \cdot (x + y) + (y \cdot z')$$

Aufgabe 2. *Erfüllbarkeit* 6 P.

Entscheiden Sie, ob die unten stehenden, Booleschen Ausdrücke erfüllbar, allgemeingültig oder unerfüllbar sind. Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit von Ausdrücken mittels der in der Vorlesung eingeführten Rechenregeln der Booleschen Algebra. Geben Sie dabei in jedem Schritt den Namen der von Ihnen verwendeten Regel an. Für Ausdrücke, die weder allgemeingültig noch unerfüllbar sind, geben Sie eine erfüllende und eine nichterfüllende Variablenbelegung an.

1. $(w \vee \overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (z \vee \overline{x}) \wedge (\overline{w} \vee z)$
2. $\overline{x \vee y} \rightarrow (x \leftrightarrow y)$
3. $[\overline{x \vee y} \rightarrow (\overline{x} \wedge \overline{y})] \rightarrow [(x \leftrightarrow y) \wedge (x \oplus y)]$

Dabei definiert $a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$ den Implikationsoperator.

Aufgabe 3. *Äquivalenz* 9 P.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Booleschen Funktionen:

$$f(x,y) = (x \cdot (x' + y))' \quad \text{und} \quad g(x,y) = y' \cdot (x' + x \cdot (x + y)) + x' \cdot y$$

auf die folgenden vier Arten:

1. Formen Sie die Funktion f mittels Boolescher Rechenregeln derart um, dass sie der gegebenen Darstellung von g entspricht.
2. Vereinfachen Sie den Booleschen Ausdruck $f \leftrightarrow g$ zu 1. Dabei ist $f \leftrightarrow g := f \cdot g + f' \cdot g'$ der Äquivalenzoperator.
3. Überführen Sie g und f in eine identische Normalform.
4. In der Schaltalgebra haben wir nur die Werte 0 und 1. Zeigen Sie nun die Äquivalenz mithilfe einer Fallunterscheidung bzgl. der Variablen x.

Was sind die Vor- und Nachteile der oben verwendeten Methoden?

Aufgabe 4. *Negationstheorem* 3 P.

Gegeben sei die Funktion $f_2(a,b,c)$, die durch folgende Wertetabelle definiert ist:

a	b	c	$f_2(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Erzeugen Sie die DNF und KNF der Funktion
2. Wenden Sie das Negationstheorem auf die DNF an. Was fällt Ihnen auf?