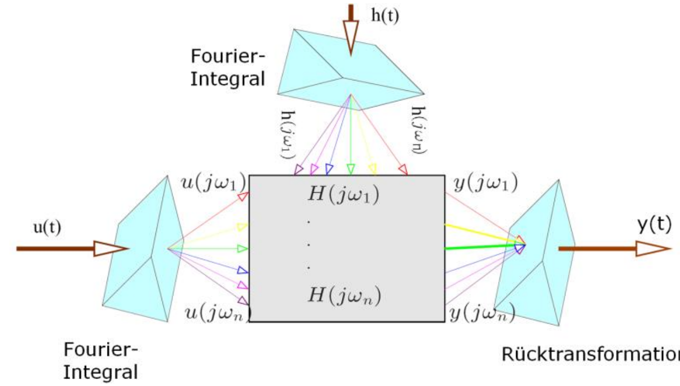
Grundlagen der Robotik

12. DFT, Z-Transformation

Prof. Sven Behnke

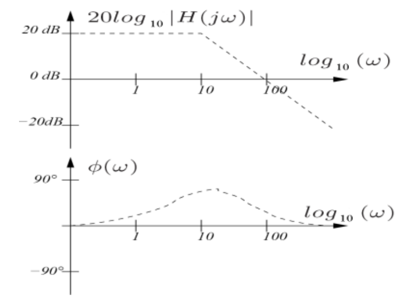
Letzte Vorlesung



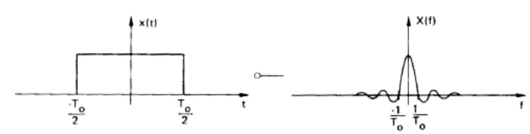
- Komplexe Exponentialfunktionen $e^{j\omega t}$ (Sinusoide) sind Eigenfunktionen von LTI-Systemen
- Fourier-Integral berechnet aus Impulsantwort frequenzabhängige Verstärkung und Phasenverschiebung

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Transferfunktion $H(j\omega)$ beschreibt Systemverhalten im Frequenzraum



- Bode-Diagramm visualisiert Transferfunktion
- Hoch-, Tief-, Bandpass-Filter
- Fourier-Transformation
  - Linearität
  - Zeitableitung
  - Verschiebungsinvarianz
  - Dualität
  - Konvolutionstheorem



- Laplace-Transformation stellt Konvergenz des Fourier-Integrals sicher

$$s := \sigma + j\omega \qquad F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace-Transformation

- Wir haben die Konvergenz des Fourier-Integrals gesichert:

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega t)}dt$$

- Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir $\sigma + j\omega$ durch die komplexe Zahl s:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Laplace-Rücktransformation

- Zur Bestimmung der Rücktransformation nutzen wir: $F(s) \;\circ\!\!-\!\!-\; f(t)\, e^{-\sigma t}$

- Einsetzung in Fourier-Rücktransformation ergibt:

$$
\begin{aligned}
f(t)\, e^{-\sigma t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{j\omega t} d\omega \\
\Rightarrow f(t) &= e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{(\sigma + j\omega)t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st}\, ds
\end{aligned}
$$

$s = \sigma + j\omega,\, ds = j d\omega$

Vertikales Pfadintegral bei σ

Laplace-Transformation

- Vorwärts: $F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
- Rückwärts: $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$
- Als Schreibweise für die Korrespondenz von Funktionen in Zeit- und Frequenzraum nutzen wir den Operator $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$

Vorwärts

$F(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ f(t)$

Rückwärts

Eigenschaften der Laplace-Transformation

- Gegebene Korrespondenzen:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s), \qquad f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(s), \qquad f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_2(s)$$

- Dann gilt auch:
  - Zeitliche Ableitung:

$$\frac{d}{dt} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s\,F(s) - f(0^-)$$

  - Linearität:

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$$

  - Zeitverschiebung:

$$f(t - t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)\, e^{-s t_0}$$

  - Konvolutionstheorem:

$$f_1(t) * f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(s)\, F_2(s)$$

Laplace-Korrespondenzen

Signal in der Zeit		Frequenzdarstellung	
$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	
$s(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
$s(t)\, e^{-a\,t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s+a) > 0$
$s(t)\, t\, e^{-at}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$Re(s+a) > 0$
$s(t)(1 - e^{-at})$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$Re(s+a) > 0$
$A\ \mathrm{rect}(t/T)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$A\,T\,\frac{sinh(s\,T/2)}{s\,T/2}$	
$s(t)\ cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$Re(s) > 0$
$s(t)\ sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Re(s) > 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{sT}}$	

Rationale Laplacetransformation

- Viele Systeme werden durch **Differentialgleichungen** in folgender Form beschrieben:

$$
\begin{aligned}
& b_0 y(t) + b_1 \frac{d}{dt} y(t) + \ldots + b_n \frac{d}{dt}^n y(t) \\
= \quad & a_0 u(t) + a_1 \frac{d}{dt} u(t) + \ldots + a_m \frac{d}{dt}^m u(t)
\end{aligned}
$$

- Mit Startwert 0 und Linearität korrespondiert dies zur Laplace-Transformation:

$$
\begin{aligned}
& b_0 Y(s) + b_1 s Y(s) + \ldots + b_n s^n Y(s) \\
= \quad & a_0 U(s) + a_1 s U(s) + \ldots + a_m s^m U(s)
\end{aligned}
$$

Rationale Laplacetransformation

- Ausklammern von $U(s)$ und $Y(s)$:

$$\begin{aligned} & Y(s)(b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n) \\ = \quad & U(s)(a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m) \end{aligned}$$

- Dies kann als Transferfunktion geschrieben werden:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n}$$

mit reellen Koeffizienten $a_i, b_j \quad (i = 0 \ldots m, j = 0 \ldots n)$

Rationale Laplacetransformation

- Transferfunktionen in der Form

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j \, s^j}{\sum_{i=0}^{n} b_i \, s^i}$$

  werden **rational** genannt

- Zähler und Nenner sind **Polynome von s**
- Praktische Bedeutung
  - Lösen von Differenzialgleichungen
  - Einfache Rücktransformation
  - Aussagen zur Stabilität von Systemen

Rationale Laplacetransformation: Produktform

- Erinnerung: Polynom vom Grad n hat n Nullstellen
- Wir können $H(s)$ in Produktform schreiben:

$$H(s) = \frac{a_m}{b_n} \frac{(s - s_{0,1})(s - s_{0,2}) \dots (s - s_{0,m})}{(s - s_{\infty,1})(s - s_{\infty,2}) \dots (s - s_{\infty,n})}$$

- $s_{0,1} \dots s_{0,m}$ sind Nullstellen des Zählers und daher Nullstellen der Transferfunktion $H(s)$.
  ➔ Signale dieser Frequenzen werden ausgelöscht

- $s_{\infty,1} \dots s_{\infty,n}$ sind Nullstellen des Nenners und daher **Polstellen** der Transferfunktion $H(s)$
  ➔ Signale dieser Frequenzen werden unendlich verstärkt
  ➔ **Instabilität!**

Rationale Laplacetransformation: Partialbruchzerlegung

$$H(s) = \frac{a_m}{b_n} \frac{(s - s_{0,1})(s - s_{0,2}) \ldots (s - s_{0,m})}{(s - s_{\infty,1})(s - s_{\infty,2}) \ldots (s - s_{\infty,n})}$$

- Voraussetzungen:
  1. Zählergrad m kleiner als Nennergrad n
  2. Nur einfache Polstellen
- Darstellung als Partialbruchzerlegung:

$$H(s) = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{s - s_{\infty,i}}$$

- Die reellen Zähler A_i können durch Erweiterung der Transferfunktion $H(s)$ mit den Polstellen $s - s_{\infty,i}$ berechnet werden

Vorteile der Partialbruchdarstellung

$$H(s) = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{s - s_{\infty,i}}$$

- Leichte Rücktransformation in die Zeitdomäne

- Erinnerung:

$$\frac{1}{s+a} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; s(t)\, e^{-a\,t}$$

- Durch Linearität gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - s_{\infty,i}} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sum_{i=1}^{n} A_i\, s(t)\, e^{s_{\infty,i}\,t}$$

Beispiel für Partialbruchzerlegung

- Gegebene Laplacetransformation:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

- Darstellung als Partialbruchsumme:

$$H(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &= (s+1)H(s)\,|_{s=-1} = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)}\,|_{s=-1} = -1 \\ A_2 &= (s+2)H(s)\,|_{s=-2} = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+2)}\,|_{s=-2} = 2 \end{aligned}$$

Beispiel für Partialbruchzerlegung II

- Wir haben die Partialbruchdarstellung:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

- Mit
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - s_{\infty,i}} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \sum_{i=1}^{n} A_i \, s(t)\, e^{s_{\infty,i}\, t}$$
erhalten wir die Rücktransformation in die Zeitdomäne:
$$h(t) = (-1\, e^{-t} + 2\, e^{-2t}) s(t)$$

- Rücktransformation ist Lösung des linearen Differential-gleichungssystems, das durch Transferfunktion $H(s)$ beschrieben ist
- Laplacetransformation wandelt **Differentialgleichungs-systeme** in **Systeme linearer Gleichungen**, die gelöst und zurück in die Zeitdomäne transformiert werden können

Rationale Laplacetransformation: Konvergenz I

- Wichtig: Konvergenz!
- Sei $f(t)$ die Zeitfunktion für eine Laplacefunktion in Partialbruchdarstellung:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_{\infty,i} t} s(t)$$

- Dann ist die Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_{\infty,i} t} e^{-s t} \, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^\infty e^{(s_{\infty,i} - s) t} \, dt \end{aligned}$$

Rationale Laplacetransformation: Konvergenz II

- Laplacetransformation konvergiert nur, wenn Integral für jede Polstelle existiert:

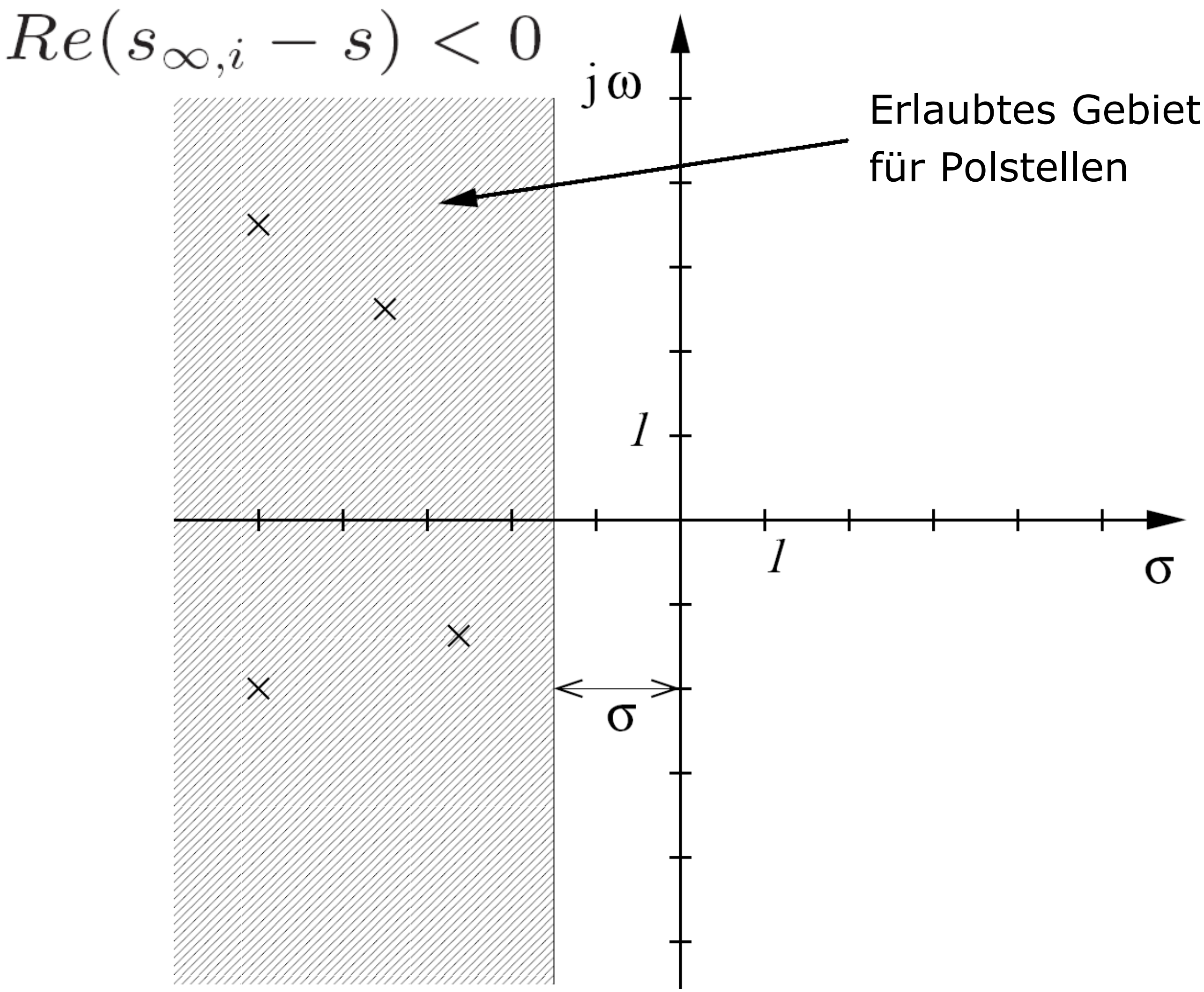
$$\int_0^\infty e^{(s_{\infty,i}-s)t}dt = \frac{1}{s_{\infty,i}-s}e^{(s_{\infty,i}-s)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

- D.h. der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{s_{\infty,i}-s}e^{(s_{\infty,i}-s)t}$$

  muss existieren.
- Der Grenzwert existiert, wenn der Exponent negativ ist: $Re(s_{\infty,i}-s)<0$

Rationale Laplacetransformation: Konvergenz III

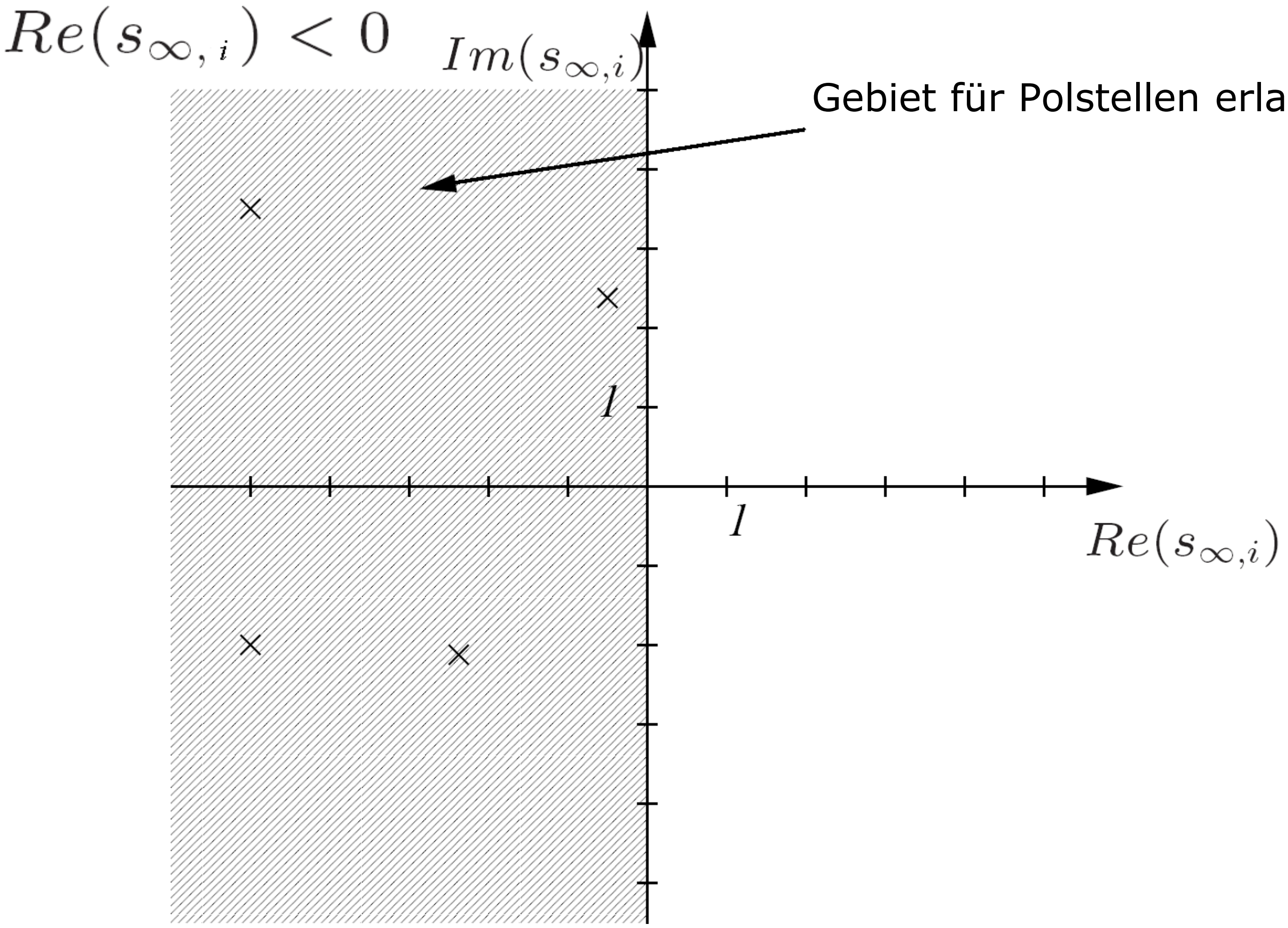


Rationale Laplacetransformation: Stabilität I

Wir gehen in umgekehrter Richtung vor:

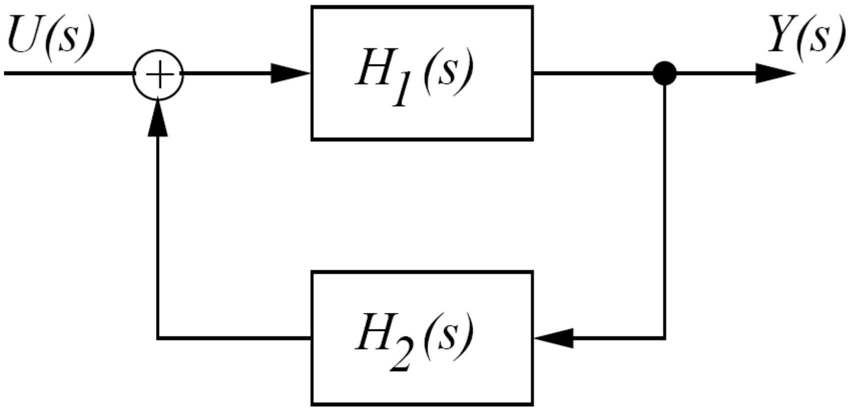
- Sei $H(s)$ rationale Transferfunktion mit Polstellen: $s_{\infty,0}, \ldots s_{\infty,n}$
- Dann hat die Impulsantwort des Systems die Form:
$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_{\infty,i} t} s(t)$$
- Dieses System ist stabil, wenn alle Polstellen negativ sind: $Re(s_{\infty,i}) < 0 \; \forall \; i \in [0 \ldots n]$
- Eine rationale Laplace-Transferfunktion beschreibt ein **stabiles System**, wenn die **Realteile aller Polstellen negativ** sind.

Rationale Laplacetransformation: Stabilität II



Rationale Laplacetransformation: Beispiel für Stabilität

- Zwei Systeme $H_1(s) = \frac{6}{1+s}$ und $H_2(s) = \frac{1}{2+s}$ sind wie folgt verbunden:



- Ist das System stabil?
- Mit Superpositionsprinzip:

$$Y(s) = H_1(s)U(s) + H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

Beispiel Fortsetzung

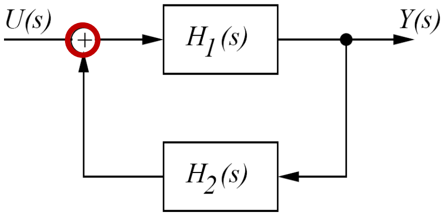
$$H_1(s) = \frac{6}{1+s}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{2+s}$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} \\ &= \frac{6/(1+s)}{1 - \frac{6}{(1+s)(2+s)}} \\ &= \frac{6(2+s)}{(1+s)(2+s) - 6} \\ &= \frac{12+6s}{s^2+3s-4} = \frac{12+6s}{(s-1)(s+4)} \end{aligned}$$

Stabil?

- System hat Polstelle bei s=1
  => System ist nicht stabil!



Zeitdiskrete Systeme

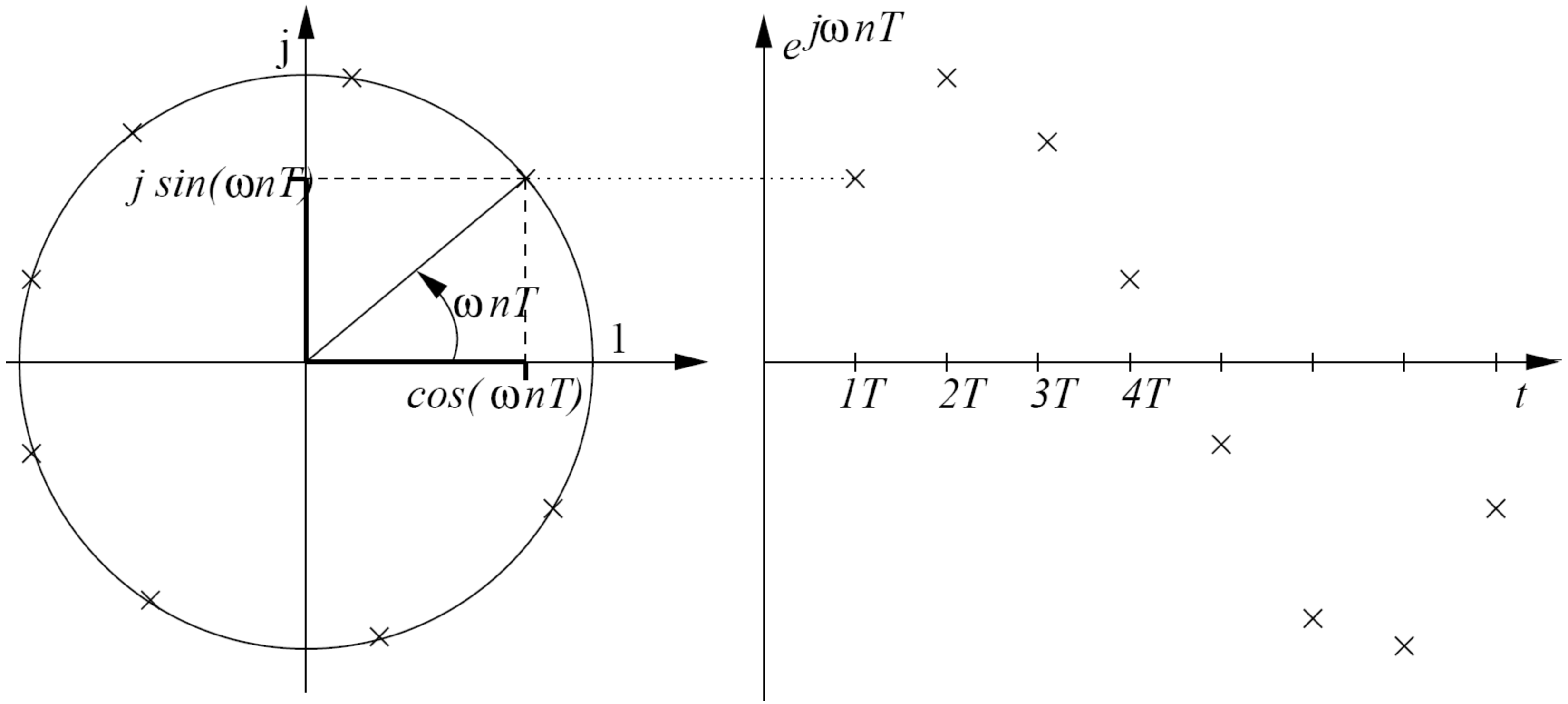
- Fouriertransformation $H(j\omega)$ und Laplacetransformation $H(s)$ beschreiben zeitkontinuierliche Systeme

- Jetzt: Zeitdiskrete Systeme

- Motivation:
  - Computer und Regler arbeiten getaktet
  - Signale werden zeitlich diskretisiert gespeichert und verarbeitet

- Zeitbasis: $T^* = \{nT \mid n \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}\}$

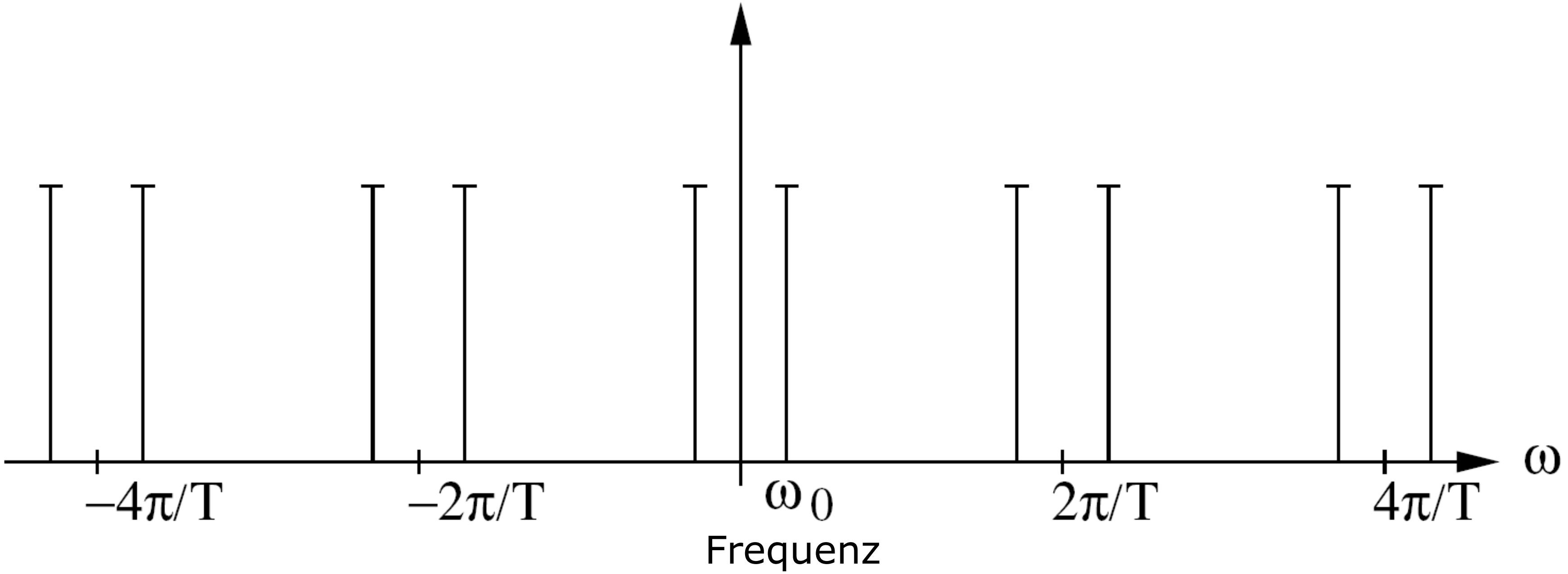
Zeitdiskrete komplexe Exponentialfunktion



$$f[n] = f[nT] = e^{j\omega\, nT}$$

Spektrum der Sinus-Folge

- Periodisch mit Periode $2\pi/T$



Eingabe Sinusoid, Ausgabe?

- Gegeben zeitdiskretes System mit Impulsantwort $h[n]$ und Eingabe $u[n] = ce^{j\omega\, nT}$
- Ausgabe wird durch Konvolution *u*h* berechnet:

$$y[n] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u[n-\nu]h[\nu] = c \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(n-\nu)T} h[\nu]$$

$$y[n] = \underbrace{ce^{j\omega nT}}_{u[n]} \underbrace{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-j\nu\omega T} h[\nu]}_{H(e^{j\omega T})}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \left.\frac{y[n]}{u[n]}\right|_{u[n]=e^{jn\omega T}} \quad |\omega| \leq \omega_0/2 \qquad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$H(j\omega) = \left.\frac{y[n]}{u[n]}\right|_{u[n]=c\,e^{j\omega nT}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Zeitdiskrete Fourier-Transformation

- Ersetze $\Omega = \omega T$ und $d\omega = d\Omega / T$
- Vorwärts-Transformation

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-jn\Omega}$$

- Rückwärts-Transformation

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega n}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Konvergenz g.d.w.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f[n]| < \infty$$

Beispiel für Diskrete Fourier-Transformation

- Gegeben: System mit Impulsantwort

$$h[n] = s[n](1/2)^n$$

- Fourier-Transformation

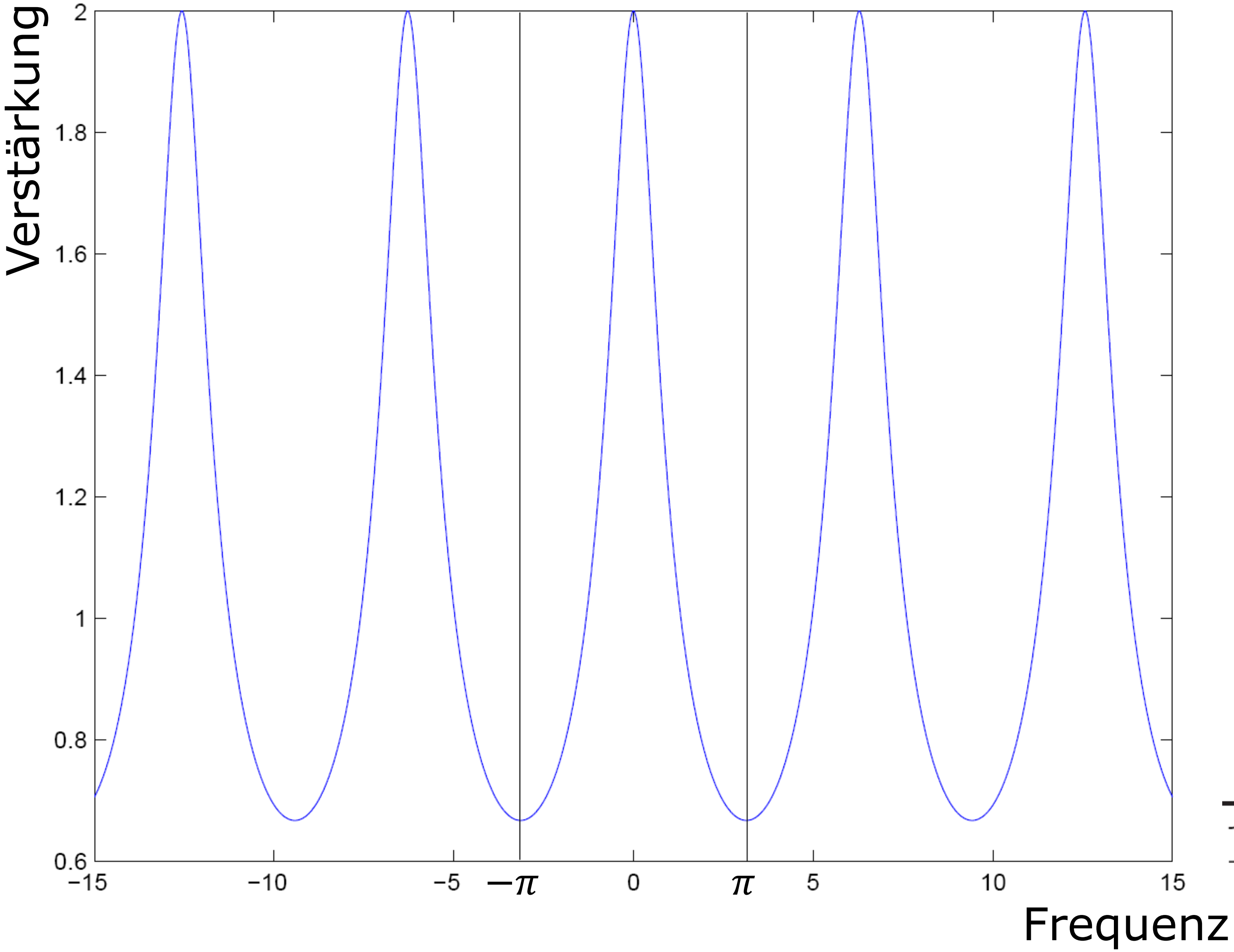
$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}^{n} (e^{-j\Omega})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-j\Omega})^n$$

Geometrische Reihe

$$= \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

Beispiel-Spektrum



$$\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$$

Z-Transformation

- Fourier-Transform des Signals $f[n]$:

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$$

- **Problem**: Konvergenz g.d.w. $\sum_{-\infty}^{\infty} |f[n]| < \infty$

- **Idee**: Multipliziere $f[n]$ mit geometrischer Reihe r^{-n}
- Dann Konvergenz wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]\, r^{-n}| < M < \infty$$

Z-Transformation

- Fourier-Transform der mit r^{-n} multiplizierten Folge:

$$f[n]\, r^{-n} \quad \circ\!\!-\!\!-\!\!- \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] r^{-n} e^{-jn\Omega}$$

$$= \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] (r\, e^{j\Omega})^{-n}$$

- Anstatt $r\, e^{j\Omega}$ schreiben wir $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}}$$

Inverse Z-Transformation

- Inverse Z-Transformation:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

  C Pfad um den Ursprung in positiver Richtung, innerhalb der Konvergenzregion

- Notation:

$$f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z)$$

$$F(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\; f[n]$$

Transfer-Funktion

- Z-Transformation der Impulsantwort $h[n]$ charakterisiert zeitdiskretes System

$$h[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

- $H(z)$ ist die **Transferfunktion** des Systems

Z-Transformation Beispiel

- Gesucht: Z-Transformation der Stufenfunktion $s[n]$ und Konvergenzgebiet

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

- Konvergenz für $|z| > 1$ (geometrische Summe)

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad , \qquad |z| > 1$$

Z-Transformation Korrespondenzen

Zeitdiskretes Signal		Frequenzdarstellung	
$\mathbf{f[n]}$		$\mathbf{F(z)}$	
$\delta[n]$	$\circ\!-\!\bullet$	1	$z \in \mathbb{R}$
$\delta[n-m]$	$\circ\!-\!\bullet$	z^{-m}	$z \neq 0 \quad \forall m > 0$ or $z \neq \infty \quad \forall m < 0$
$s[n]$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$s[n]\, a^n$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$s[n]\, n\, a^n$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a\,z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$s[n]\, n^2\, a^n$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a\,z^{-1}+a^2\,z^{-2}}{(1-a\,z^{-1})^3}$	

Z-Transformation: Zeitverschiebung

- Gegeben: $f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F(z)$

- Gesucht: Z-Transformation von $f[n-k]$

$$f[n-k] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n-k] z^{-n}$$

$$\boxed{m = n - k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] z^{-m-k} = z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] z^{-m}$$

$$= z^{-k} F(z)$$

Jeder Zeitschritt Verschiebung entspricht Vorfaktor z^{-1}

Z-Transformation: Eigenschaften

- Bekannte Korrespondenzen:

$$f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F(z), \qquad f_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(z), \qquad f_2[n] \circ\!\!-\!\!\bullet F_2(z)$$

- Dann gelten auch folgende Korrespondenzen:
- **Linearität**:

$$k_1 f_1[n] + k_2 f_2[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z)$$

- **Zeitverschiebung**:

$$f[n-k] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)\, z^{-k}$$

- **Konvolution**:

$$f_1[n] * f_2[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(z)\, F_2(z)$$

Beispiel fortgesetzt

- Wir haben Korrespondenz zur Stufenfunktion $s[n]$ gezeigt: $$s[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-z^{-1}}$$
- Ein System mit Impulsantwort $s[n]$ hat also die Transferfunktion: $$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{U(z)}{1-z^{-1}} \Rightarrow Y(z) - Y(z)z^{-1} = U(z)$$

- Rücktransformation in Zeitdomäne:

$$y[n] - y[n-1] = u[n]$$

$$y[n] = u[n] + y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k]$$

Summe aller bisherigen Eingaben

Rationale Z-Transformation

Erinnerung:

- Homogene lineare **Differentialgleichungen** entsprechen rationalen Laplace-Transformationen $H(s)$
- Dies basiert auf der Korrespondenz:

$$\frac{d}{dt} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s\,F(s)$$

Jetzt:

- Lineare **Differenzengleichungen** entsprechen rationalen Z-Transformationen $H(z)$
- Dies basiert auf der Zeitverschiebungs-Korrespondenz

$$f[n-k] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-k} F(z)$$

Lineare Differenzengleichungen

- Lineare Gleichungssysteme der Form:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k u[n-k]$$

  beschreiben Systemverhalten in der Zeitdomäne

- Z-Transformation, Linearität, Zeitverschiebung:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} U(z)$$

Lineare Differenzengleichungen II

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} U(z)$$

$$Y(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} U(z)$$

- Transferfunktion:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

Lineare Differenzengleichungen III

- Polynome $N(z^{-1})$ und $D(z^{-1})$ können umgeschrieben werden:

$$N(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_{M-k} z^k = \frac{1}{z^M} N'(z)$$

$$D(z^{-1}) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = 1 - \frac{1}{z^N} \sum_{k=0}^{N-1} a_{N-k} z^k = \frac{1}{z^N} D'(z)$$

- Nullstellen ändern sich nicht!
- Alternative Repräsentation der Transferfunktion:

$$H(z) = \frac{z^N}{z^M} \frac{N'(z)}{D'(z)} = z^{N-M} \frac{N'(z)}{D'(z)}$$

Produktdarstellung

- Wie bei der rationalen Laplace-Transformation hat auch hier ein Polynom vom Grad n n komplexe Nullstellen

  ➔ Zähler hat M Nullstellen $z_{0,k}$,

  Nenner hat N Nullstellen $z_{\infty,k}$,
  die Polstellen der Transferfunktion $H(z)$ sind
- Produktdarstellung:

$$H(z) = A\, z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_{0,k})}{\prod_{k=1}^{N} (z - z_{\infty,k})} = A \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - z_{0,k} z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - z_{\infty,k} z^{-1})}$$

Darstellung als Partialbruch

- Repräsentiere rationale Transferfkt. $H(z)$ mit $N \geq M$ wie folgt:

$$H(z) = K_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{1 - z_{\infty,i} z^{-1}}$$

- Mit

$$K_0 = \lim_{z \to \infty} H(z)$$

$$K_i = \lim_{z \to z_{\infty,i}} H(z)(1 - z_{\infty,i} z^{-1})$$

Partialbruch-Beispiel

- Gegeben: $$H(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + z^{-2} - 0.25z^{-3}}$$
- Gesucht: Partialbruchdarstellung
- Polstellen:

$$z_{\infty,1} = 0.5,\, z_{\infty,2} = 0.5 + 0.5j,\, z_{\infty,3} = 0.5 - 0.5j$$

- Partialbruch-Ansatz:

$$H(z) = \frac{K_1}{1 - 0.5\, z^{-1}} + \frac{K_2}{1 - (0.5 + 0.5j)\, z^{-1}} + \frac{K_3}{1 - (0.5 - 0.5j)\, z^{-1}}$$

Partialbruch-Beispiel II

$$H(z) = \frac{K_1}{1 - 0.5\, z^{-1}} + \frac{K_2}{1 - (0.5 + 0.5j)\, z^{-1}} + \frac{K_3}{1 - (0.5 - 0.5j)\, z^{-1}}$$

$$K_1 = \left. \frac{1}{(1 - (0.5 + 0.5j) z^{-1})(1 - (0.5 - 0.5j) z^{-1})} \right|_{z=0.5} = 1$$

$$K_2 = -j$$

$$K_3 = j$$

- Resultierende Partialbruchdarstellung:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}} + \frac{-j}{1 - (0.5 + 0.5j) z^{-1}} + \frac{j}{1 - (0.5 - 0.5j) z^{-1}}$$

Rücktransformation der Partialbruchdarstellung

- Erinnerung:

$$s[n]\, a^n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1 - a\, z^{-1}}$$

- Wir können die Terme einzeln rücktransformieren:

$$\frac{K_i}{1 - z_{\infty,i} z^{-1}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s[n] K_i z_{\infty,i}^n$$

- Jeder Term korrespondiert zu geometrischer Reihe in Zeit-Domäne

Beispiel für Rücktransformation

- Aus dem vorigen Beispiel haben wir:

$$\frac{1}{1-0.5z^{-1}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s[n]0.5^n$$

$$\frac{-j}{1-(0.5+0.5j)z^{-1}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad -s[n]j(0.5+0.5j)^n$$

$$\frac{j}{1-(0.5-0.5j)z^{-1}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s[n]j(0.5-0.5j)^n$$

- Man kann zeigen:

$$j(0.5-0.5j)^n - j(0.5+0.5j)^n = 2(\sqrt{0.5})^n sin(n\pi/4)$$

- Damit: $h[n] = 0.5^n + 2(\sqrt{0.5})^n sin(n\pi/4)$

Interpretation der Rücktransformation

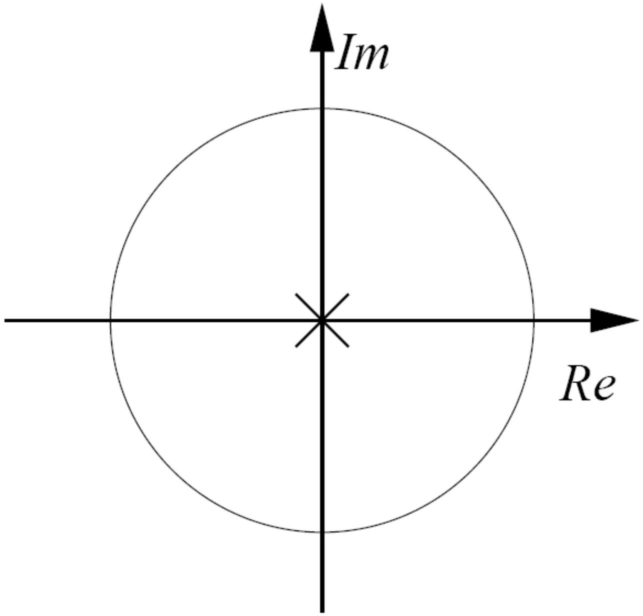
- Rücktransformation rationaler Transferfunktionen $H(z)$ ist Linearkombination komplexer geometrischer Reihen

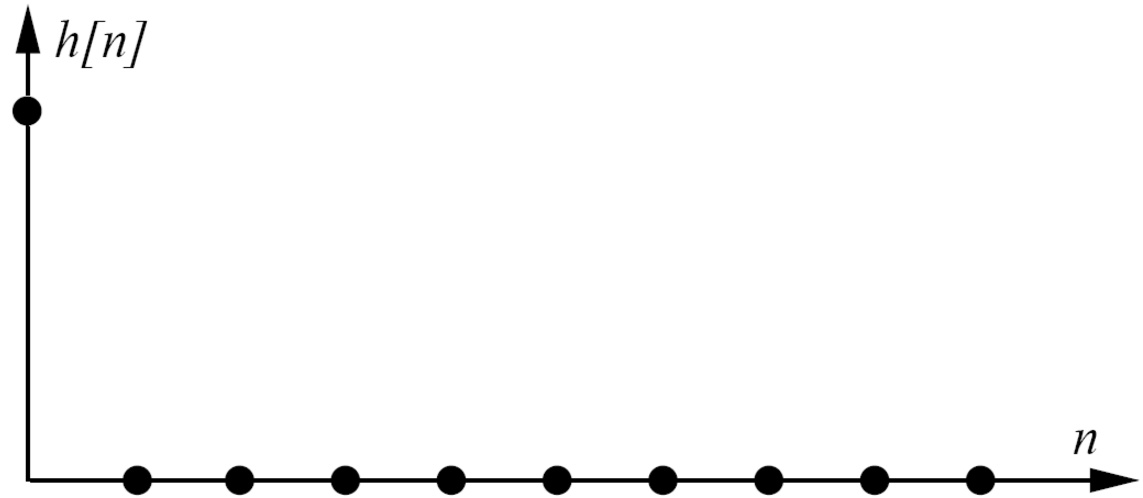
$$c z_{\infty,i}^{n}$$

- Interessante Spezialfälle:
  - $z_{\infty,i} = 0$
  - $z_{\infty,i} \in (0, 1)$
  - $z_{\infty,i} \in (1, \infty)$
  - Konjugierte Polstellen: $z_{\infty,k} = z_{\infty,i}^{*}$

Polstelle bei Null

$$\frac{K_i}{1 - 0z^{-1}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s[n]K_i 0^n = K_i\delta[n]$$

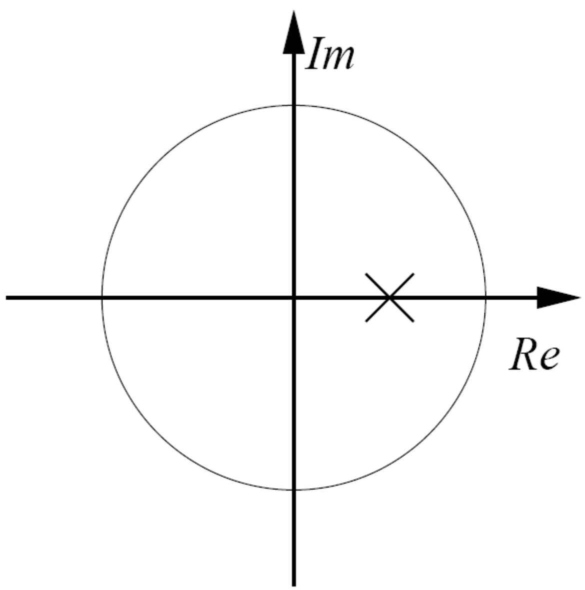


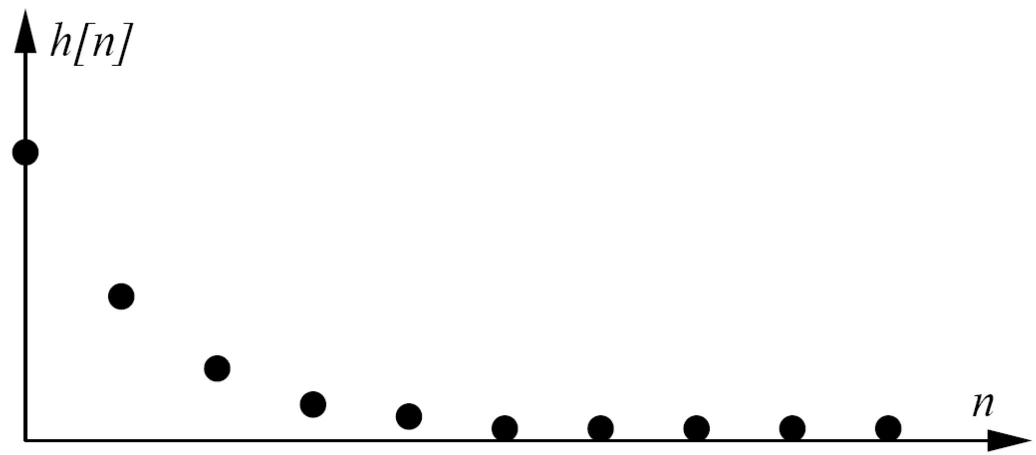


- Polstelle bei Null korrespondiert zu Delta-Impuls

Stabile Reelle Polstelle

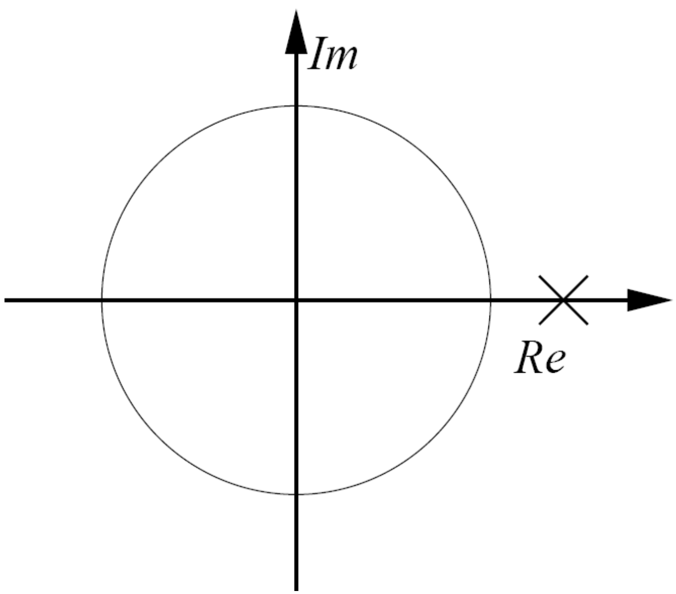
- $0 < z_{\infty,i} < 1$ hat monoton fallende geometrische Reihe als Impulsantwort

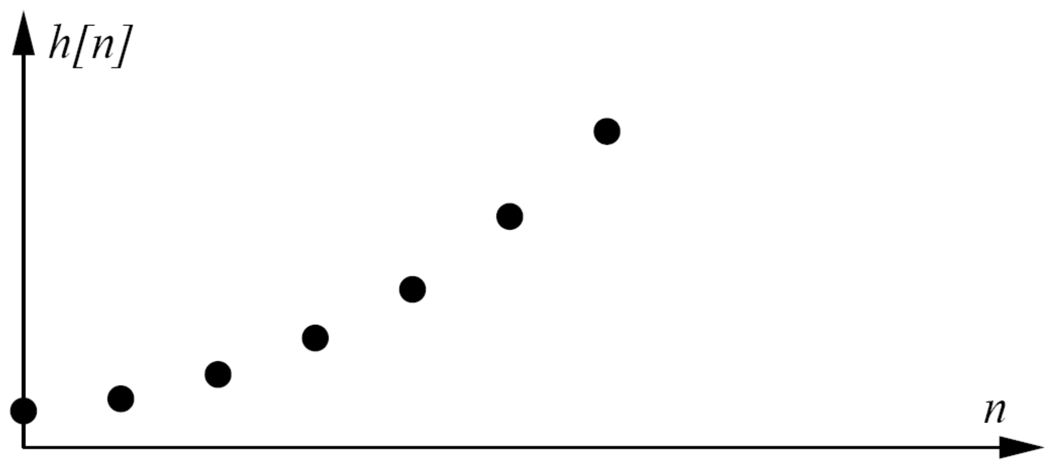




Instabile Reelle Polstelle

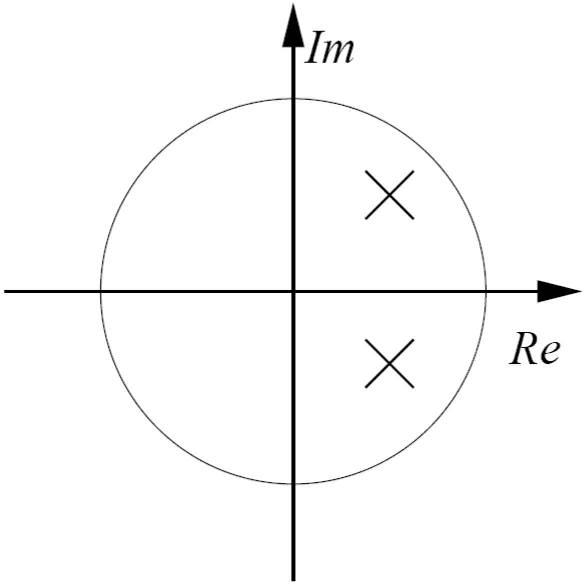
- $1 < z_{\infty,i}$ hat steigende geometrische Reihe als Impulsantwort

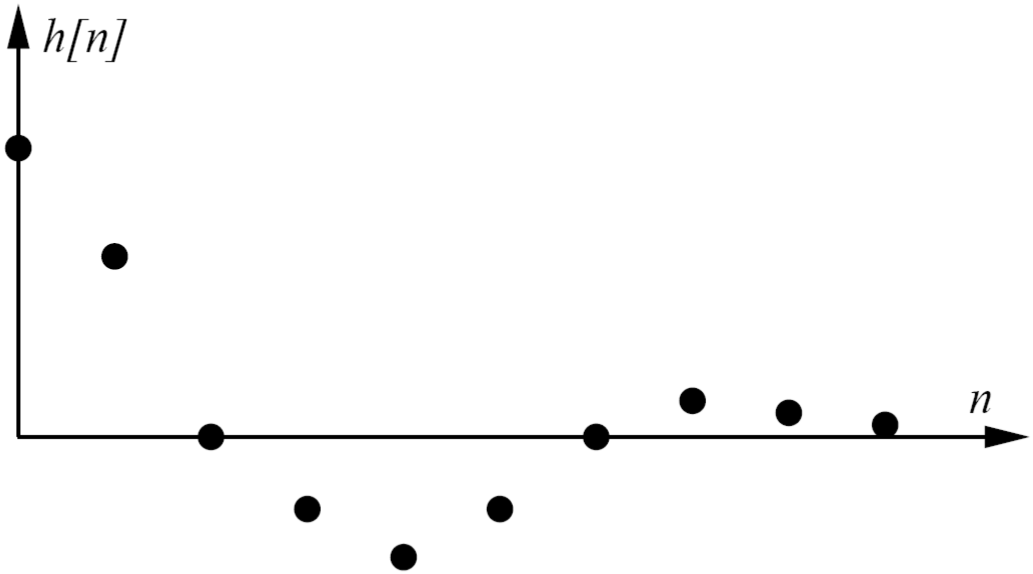




Konjugiert-Komplexe Polstellen

- $z_{\infty,k} = z^*_{\infty,i}$ erzeugen sinusoide Impulsantwort
- Konvergenz hängt vom Betrag ab





Stabilität Zeitdiskreter Systeme

- $H(z)$ stabil, wenn alle Partialbrüche stabil
- $\dfrac{1}{1 - K_i z_{\infty,i} z^{-1}}$

$K_i z_{\infty,i}^n$

- Stabilität folgt aus Additivität der Beträge
- Betrag aller Polstellen muss kleiner als Eins sein: $|z_{\infty,i}| < 1$