Algebraische Strukturen

0

Menge: M **Verknüpfung:** $\circ$ **Paar:** $(M, \circ)$

Abb. $\circ : M \times M \longrightarrow M$

Konkret: $\circ(x,y) := \ldots$ oder $(x,y) \longmapsto \ldots$ **Definition der Vorschrift**

ganz streng: $\circ((x,y))$ $\in M \times M$ **Abkürzung:** $\circ(x,y)$ (ohne Klammern) **Notation auch:** $x \circ y$ (Reihenfolge!)

BSP $+((a,b)) = +(a,b) = a+b$ **Add.** in $\mathbb{R}$

Assoziativ: $a,b,c \in M$ $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

kommutativ: $a,b \in M$ $a \circ b = b \circ a$

Neutrales Element: $\exists e \in M$: **$\forall a \in M$** $e \underset{(2)}{\circ} a = a = a \underset{(1)}{\circ} e$

BSP $Abb(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ Abbildung} \}$ X Menge

$(Abb(X), \circ)$ | $(f,g) \longmapsto f \circ g \in Abb(X)$

Komposition von Abb. | wobei $f \circ g$ definiert als $(f \circ g)(a) := f(g(a))$

Bsp 1

$(\mathrm{Abb}(X), \circ)$ Neutrales Element?

$$\mathrm{id}_X : X \to X \qquad \mathrm{id}_X(x) := x$$

$$\circ(\mathrm{id}_X, f) = \circ(f, \mathrm{id}_X) = f$$

$$\forall x \quad (f \circ \mathrm{id}_X)(x) \underset{\text{Def. }\circ}{=} f(\mathrm{id}_X(x)) \underset{\text{Def }\mathrm{id}_X}{=} f(x) \underset{\text{Def. }\mathrm{id}_X}{=} \mathrm{id}_X(f(x)) \underset{\text{Def. }\circ}{=} (\mathrm{id}_X \circ f)(x)$$

Neutrale Elemente sind <u>immer eindeutig</u> (falls sie existieren)

<u>Beweis:</u> $(M, \circ)$ neutrale Elemente <u>Ann:</u> e, e' $\quad e \neq e'$

$$\Rightarrow \quad e \underset{\substack{(1)\\ e' \text{ neutrales Element}}}{=} e \circ e' \underset{\substack{(2)\\ e \text{ neutrales Element}}}{=} e' \quad ↯$$

Bsp $(\mathrm{Abb}(X), \circ)$ $\quad id_X$ neutrales Element

$(\mathbb{R}, +)$ $\quad x + 0 = x = 0 + x$ $\qquad (\mathbb{R}, \cdot)$ $\quad x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

Definition 4.17: (Inverse Elemente)

Sei M Menge mit Verknüpfung $\circ$ (also $(M, \circ)$) und neutralem Element e. Für $x \in M$ heißt $y \in M$ inverses Element zu x falls gilt: $x \circ y = e = y \circ x$.

$x \in M$ heißt invertierbar, falls ein inverses Element zu x existiert.

⌜ x, x^{-1} als Notation, x, $-x$ als Notation, $x - y \leadsto x + (-y)$ ⌟

Bsp

1) Spezielle Abbildung $(Abb(X), \circ)$

X sei endliche Menge $|X| = 3$

Alle Permutationen auf X, Verknüpfung Komposition

$(P^3, \circ)$ OE: $X = \{1,2,3\}$ Bijektive Abb.

$\pi: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

n! viele!

π_1 $\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}$ π_2 $\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array}$ π_e $\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$

$\pi_1 \circ \pi_e = \pi_1 = \pi_e \circ \pi_1$

$\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_e$ ✓ $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_e$ ✓

$\pi_2 = \pi_1^{-1}$ $\pi_2^{-1} = \pi_1$

2) $(\mathbb{Z}, +)$ 0 neutrales Element

$\forall a \in \mathbb{Z}$ $-a$ inverse Element:

$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

3) $(\mathbb{Z}, \circ)$ neutrales Element 1

$\forall a \in \mathbb{Z}$ $a \neq 1, -1$ ex. kein inverses Element

$(-1) \cdot (-1) = 1 \circ 1 = 1$ $a \cdot y = 1$ für $a \neq 1, -1$
ex. nicht.

4) Menge M $(P(M), \cap)$ M ist neutrales Element

$M' \subseteq M$ $M' \in P(M)$ $M' \cap M = M' = M \cap M'$

$M \cap M = M$ $M = M^{-1}$

$M' \subset M$ es müsste gelten für invertierbar $M' \cap A = M = A \cap M'$
ex. nicht

5

Inverse Elemente sind eindeutig bei assoziativer Verknüpfung

$(M, \circ)$ $\circ$ ist assoziativ, neutrales Element ex.

Beweis: e neutrales Element $a \in M$

Ann: Seien b und b' Inverse zu a $b \neq b'$

$$\Rightarrow b \underset{\text{Def. } e}{=} e \circ b \underset{\text{Def. } b' \text{ Inverses zu } a}{=} (b' \circ a) \circ b \underset{\text{Def. Assozi } \circ}{=} b' \circ (a \circ b) \underset{\text{Def. } b \text{ Inverses zu } a}{=} b' \circ e \underset{\text{Def. } e}{=} b' \quad \lightning$$

Bezeichnung: Inverse zu a bei Assoziativer Verknüpfung darf als a^{-1} bezeichnet werden. ⌜bzw. $-a$⌟ (wg. Eindeutigkeit)

X Menge $\quad \mathrm{Abb}(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ Abb.} \}$

$$\circ : \mathrm{Abb}(X) \times \mathrm{Abb}(X) \to \mathrm{Abb}(X)$$

$\underline{(\mathrm{Abb}(X), \circ)}$ neutrales Element id_X

$$\mathrm{Per}(X) := \{ f \in \mathrm{Abb}(X) \mid f \text{ ist bijektiv} \}$$

<u>Theorem 4.18</u> $f \in \mathrm{Abb}(X)$ besitzt <u>genau dann</u> ein Inverses bzgl. $\circ$ wenn $f \in \mathrm{Per}(X)$.

<u>Beweis:</u> "$\Leftarrow$" "$\Rightarrow$" "Video"

<u>direkt</u> <u>indirekt</u>

4.3.1 Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Definition 4.19 Sei G eine Menge und $\circ$ Verknüpfung auf G

So heißt $(G, \circ)$ **Gruppe** falls folgende Eigenschaften gelten.

Abstufung

a) $\circ$ ist assoziativ } **Halbgruppe**

b) es ex. ein neutrales Element } **Monoid**

c) jedes Element aus G ist invertierbar } **Gruppe**

Falls $\circ$ auf G auch kommutativ so heißt $(G, \circ)$ **abelsche Gruppe**.

Bsp

BSP $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(P(M), \cap)$

abelsche Gruppen — Halbgruppe — Monoid, Monoid

⌜ $\underline{1}$, 0 geläufige Notation ⌟

BSP X Menge $\underline{Per(X)}$ $f: X \to X$ $\underline{\text{bijektiv}}$

$(Per(X), \circ)$ $\underline{\text{Gruppe}}$ ✓ abelsch? $\underline{\underline{\text{nicht}}}$ abelsch!

$|X| = 4$ O.E. $X = \{1, 2, 3, 4\}$

π_1

1	2	3	4
2	3	1	4

π_2

1	2	3	4
1	3	4	2

$(\pi_1 \circ \pi_2)$

1	2	3	4
2	1	4	3

$(\pi_2 \circ \pi_1)$

1	2	3	4
3	4	1	2

<u>Abstraktion</u>: Rechenregeln anwenden!

<u>Theorem 4.20</u> Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe

Dann gelten die folgenden Eigenschaften

a) <u>Kürzungsregeln</u> $\forall a, x, y \in G$ gilt

$$\begin{pmatrix} a \circ x = a \circ y \Rightarrow x = y & 1. \\ x \circ a = y \circ a \Rightarrow x = y & 2. \end{pmatrix}$$

b) <u>Eindeutige Lösungen von Gleichungen</u>

$\forall a, b \in G \quad \exists! \; x \in G$

mit $a \circ x = b$ (1.)

und $\exists! \; \cancel{x} \in G$ mit $y \circ a = b$ (2.)

<u>Beweis:</u> a) 1) $a \circ x = a \circ y \implies x = y$

Vorauss mit verwenden

$$x \underset{\text{neutrales Element}}{=} e \circ x \underset{\text{Inverses } a^{-1} \text{ zu } a \text{ ex.}}{=} (a^{-1} \circ a) \circ x \underset{\text{Assoziativ von } \circ}{=} a^{-1} \circ (a \circ x) \underset{\text{Vorauss.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ y) \underset{\text{Assoz. von } \circ}{=} (a^{-1} \circ a) \circ y \underset{\text{Inverses } a^{-1} \text{ zu } a}{=} e \circ y \underset{\text{neutrales Element}}{=}$$

(dieses a)

Teil 2) genauso!

b) $\forall a, b \in G \; \exists!\, x \in G$ mit $a \circ x = b$

<u>Lsg.</u> / Eindeutigkeit <u>Lsg.</u> $x = a^{-1} \circ b$ mit a^{-1} ist Inverses zu a, <u>existiert</u>

<u>Lsg:</u> $$a \circ \underline{(a^{-1} \circ b)} \underset{\underline{\text{Assoz. } \circ}}{=} (a \circ a^{-1}) \circ b \underset{\text{Inverses zu } a \text{ ist } a^{-1}}{=} e \circ b \underset{\text{neutrales Element}}{=} b$$

Verifiziert!

<u>Eindeutigkeit:</u> $a \circ x = b = a \circ y$ $\quad x \neq y$?

Aus a) so gilt $x = y$ $\quad$ Teil 2) genauso $\square$

BSP <u>Axiome strikt anwenden!</u>

$(M, \circ)$ Monoid a, b seien invertierbar

a^{-1} Inverses zu a, b^{-1} Inverses zu b

<u>Zeige:</u> $a \circ b$ ist invertierbar Inverses ist $b^{-1} \circ a^{-1}$

$$(a \circ b) \circ \underbrace{(b^{-1} \circ a^{-1})}_{c} \underset{\text{Assoz. von } \circ}{=} a \circ (\underline{b \circ (b^{-1} \circ a^{-1})}) \underset{\text{Assoz.}}{=} a \circ ((\underline{b \circ b^{-1}}) \circ a^{-1}) \underset{b^{-1} \text{ Inverses zu } b}{=} a \circ (e \circ a^{-1})$$

$$\underset{e \text{ neutrales Element}}{=} a \circ (a^{-1}) = a \circ a^{-1} \underset{a^{-1} \text{ Inverses zu } a}{=} e \quad \checkmark$$

["Linksinvers" geht genauso]

Muss gezeigt werden!

<u>Theorem 4.21</u> (Monoid einschränken auf invertierbare Elemente)

Sei $(M, \circ)$ Monoid und $G \subseteq M$ die Menge der invertierbaren Elemente von M bzgl. $\circ$.

Sei nun $* : G \to G$ die Einschränkung von $\circ$ auf G. Dann ist $*$ wohldefiniert (Verknüpfung auf G) und $(G, *)$ ist eine Gruppe.

BSP $(\mathbb{Z}, \circ)$ $(\{-1, 1\}, \cdot)$ Gruppe