Prinzipien: direkt / indirekt

2.2.4 Vollständige Induktion

Beweisprinzip!

Aussagen über natürliche Zahlen parametrisieren!

$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 4)$

BSP M Menge mit n Elementen

$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge

"$|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$" $A(n)$

Wie beweisen?

Induktionsprinzip

1. Induktionsanfang: $k \in \mathbb{N}_0$

Zeige, dass die Aussage $A(k)$ gilt.

2. Induktionsschluss: Zeige, dass unter der

Induktionsannahme → Annahme, dass $A(n)$ für $n \geq k$ gilt,

dass dann $A(n+1)$ gilt.

$(A(n) \Rightarrow A(n+1))$ wahr!

Aus 1. + 2. folgt, dass $A(n)$ für alle $n \geq k$ gilt!

Ist das korrekt?

Beweisprinzip ist korrekt:

1. $A(k)$ gilt Bed. 1

   $\big(A(k) \Rightarrow A(k+1)\big)$ ist wahr für $n \geq k$

   Bed. 2

   $\underset{(\text{Th. } 2.1.5)}{\Rightarrow}$ $A(k+1)$ ist wahr!

2. $A(k+1)$ gilt

   $\big(A(k+1) \Rightarrow A(k+2)\big)$ ist wahr $\underset{(\text{Th. } 2.1.5)}{\Rightarrow}$ $A(k+2)$ ist wahr

   Bed. 2.

3. $A(k+2)$ ist wahr

   $\big(A(k+2) \Rightarrow A(k+3)\big)$ $\underset{\text{Th. } 2.1.5}{\Rightarrow}$ $A(k+3)$ ist wahr

   Bed. 2.

   $\vdots$

Läßt sich für beliebiges $A(k+i)$ fortführen
"iterativ"

BSP **Aussagen über endl. Summen und Produkte**

Notationen: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\quad j, k, n \in \mathbb{N}$
$1 \leq j, k \leq n$

"Endl. Summe" $\displaystyle\sum_{i=j}^{k} a_i := a_j + a_{j+1} + \dots + a_k$

"Endl. Produkt" $\displaystyle\prod_{i=j}^{k} a_i := a_j \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_k$

Festlegungen: $\displaystyle\sum_{i=j}^{k} a_i := 0$ für $j > k$ $\quad \displaystyle\prod_{i=j}^{k} a_i := 1$ für $j > k$

5

Theorem 2.7 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n \right]$$

Beweis:

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\cdots+n \\ +\; n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1 \\ \hline (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) \end{array} = n\cdot(n+1) \quad \text{aber } 2\times$$

(direkter "Gauß")

Induktion: $A(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Induktionsanfang:</u> $A(1)$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$$

<u>Induktionsannahme:</u> Die Aussage gilt für $n \geq 1$.
$A(n)$ für $n \geq 1$ ist wahr.

<u>Induktionsschluss:</u> Zeig $A(n+1)$!

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{\uparrow}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$

(Ind. Ann.) (muss vorkommen)

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$A(n+1)$ gilt.

$\Longrightarrow$ $A(n)$ gilt $\forall n \geq 1$.

Induktionsprinzip

„Ohne Induktionsanfang geht es nicht"

„Alle ungeraden Zahlen $2n-1$ lassen sich durch 2 teilen." (ohne Rest)

Aussage ist falsch!

Ind. Ann.: Die Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Ind. Schluss: $2(n+1)-1 = (2n-1)+2 \underset{\text{Ind. Ann.}}{=} 2 \cdot m + 2 = 2(m+1)$

$\left(A(n) \Rightarrow A(n+1)\right)$ wahr. aber „$A(n)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ ist falsch!"

Induktion beruht auf strukturellen Aufbau!

1. 1 ist eine natürliche Zahl (ggf. mit 0 beginnen)
   Aussage über $\mathbb{N}_0$
2. Ist n eine natürliche Zahl
   dann ist n+1 (die nächste) natürliche Zahl.

Induktion über den Aufbau einer Struktur!

<u>Strukturelle Induktion</u>!

BSP <u>Planare Graphen</u>!

Meine Definition planarer Graphen!

<u>Aufbau</u>

1. leere Graph ist planarer Graph

2. Ist G planarer Graph

$G \to G'$ (Übergang)

G' entsteht aus G durch

a) Hinzufügen eines Knotens (isoliert, auf eine Kante)

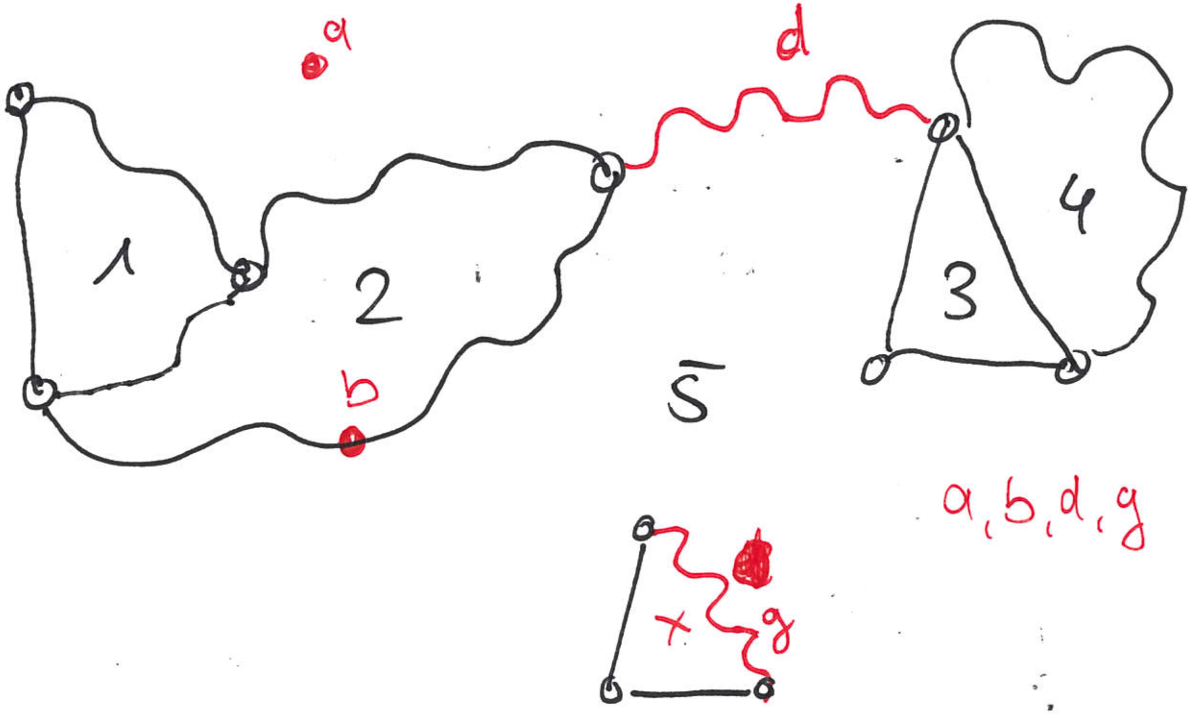
b) Hinzufügen von Kanten (zwischen zwei Knoten, aber schnittfreien Weg)

Eigentlich zu beweisen:

A) Es entsteht ein planarer Graph!

B) Jeder planare Graph (andere Definition) kann so erzeugt werden.

Planare Graphen: „Eulerformel" gilt stets!



a, b, d, g Manipulation

Knoten,	Kanten,	Flächen,	Komponenten
10+1+1	11+1+1+1	5̄+1	3+1−1
v a, b	e b, d, g	f g	c a, d

$$c + 1 = v - e + f$$ ✓

Bilanz!

Kardinalität von Potenzmengen

Theorem 2.8 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und für Mengen M mit n Elementen gilt $|P(M)| = 2^n$.

2^M

Beweis: Induktion!

Induktionsanfang: $n = 0$: $M = \{\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $|\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$

Induktionsannahme: $|P(M)| = 2^n$ gilt für jede n-elementige Menge $n \geq 0$.

(n ist beliebig, aber fest)

<u>Induktionsschritt:</u> Sei M $(n+1)$-elementige Menge $n \geq 0$.

Sei $x \in M$ bel. Element. (das existiert weil $n+1 \geq 1$)

Teile $P(M)$ in disjunkte Teilmenge.

$$P_1 := \{ Y \in P(M) \mid x \notin Y \}$$

$$P_2 := \{ Y \in P(M) \mid x \in Y \}$$

$$\underset{\text{klar}}{\Longrightarrow} \quad P(M) = P_1 \cup P_2 \quad \text{und} \quad P_1 \cap P_2 = \emptyset \quad \ulcorner P_1 \dot{\cup} P_2 \text{ disjunkte Vereinigung} \lrcorner$$

BSP

$M = \{1, 2, 3\}$ $\quad P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

O.E. $x = 1$ $\quad P_1 := \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$P_2 := \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$= \{\emptyset \cup \{1\}, \{2\} \cup \{1\}, \{3\} \cup \{1\}, \{2,3\} \cup \{1\}\}$

$|P_1|$ und $|P_2|$ abschätzen!

$$P_1 \underset{\text{klar}}{=} \mathcal{P}(M \setminus \{x\}) \underset{\text{Ind. Ann.}}{\Longrightarrow} |P_1| = 2^n$$

$M \setminus \{x\}$ n-elementige Menge

Zeige: $|P_2| = |P_1| = 2^n$ "direkten Beweis"

Jede Menge aus P_2 enthält x. Falls wir jeweils x entfernen, ändert sich die Anzahl der Teilmengen nicht. und es entsteht jedes mal Menge aus P_1. Es entsteht exakt P_1.

$$\Rightarrow |P_2| = |P_1| = 2^n$$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = |P_1 \dot{\cup} P_2| = |P_1| + |P_2| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Induktionsschluss gelungen.

Abwandlungen des Prinzips

„Index shift" „shift" (engl.)

1. Induktionsanfang: $\ell \in \mathbb{N}_0$
   Zeige dass $A(\ell)$ gilt!

2. Induktionsschritt: Aus $A(n-1)$ für $n-1 \geq \ell$ folgt $A(n)$

wichtig!
Verankern!

1. $n = \ell$
2. $(n-1) \to n$
   $(n-1) \geq \ell$

$n' \to n'+1$
$n' \geq \ell$