Abgabe: 07.12.2022 bis 10:00 Uhr

Prof. Dr. Anne Driemel
Frederik Brüning, Jan Eube
Institut für Informatik

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1: Operationen auf Heaps (5 Punkte)

Gegeben sei ein leerer Max-Heap, wie er in der Vorlesung definiert wurde.

(a) Fügen Sie nacheinander die Schlüssel 4, 6, 1, 7, 5, 2, 8 in gegebener Reihenfolge ein.

(b) Extrahieren Sie daraufhin drei Mal in Folge das Maximum aus dem Heap.

Dokumentieren Sie die Konfiguration des Heaps als Binärbaum vor und nach jeder Operation.

Hinweis: Einfügen eines Elements und das extrahieren des Maximums in einem Heap funktioniert im Prinzip wie in einer Prioritätenwarteschlange, in welcher für jedes Objektes Schlüssel und Datum identisch sind.

Aufgabe 8.2: Laufzeit von Build-Heap (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Bauzeit (Laufzeit von Build-Heap) für einen Heap mit n Schlüsseln in $O(n)$ liegt.
Hinweis: Es ist $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^i = \frac{q}{(1-q)^2}$ für $|q| < 1$.

(b) Betrachten sie nun das naive Verfahren, einen Max-Heap aufzubauen, indem man die Operation Insert für Prioritätenwarteschlangen nutzt um in einen initial leeren Heap nacheinander alle Elemente einzufügen. Beweisen Sie, dass dieses naive Verfahren im schlimmsten Fall eine Laufzeit in $\Omega(n \log(n))$ hat. Ihr Beweis sollte für alle $n > n_0$ die Beschreibung einer Eingabesequenz von n Schlüsseln enthalten, für die das Verfahren entsprechend viele Schritte benötigt.

Aufgabe 8.3: Heaps (7 Punkte)

Im Folgenden möchten wir eine Datenstruktur implementieren, mit deren Hilfe der Median einer Menge von paarweise verschiedenen Schlüsseln $S \subseteq \mathbb{N}$ effizient bestimmt werden kann. Die Datenstruktur soll die nachstehenden Operationen unter Berücksichtigung der angegebenen Laufzeitschranken anbieten:

(i) $\textsc{FindMedian}()$: Gibt den Median der Schlüssel zurück. - $O(1)$

(ii) $\textsc{ExtractMedian}()$: Entfernt den Median der Schlüssel aus der Datenstruktur und gibt diesen zurück. - $O(\log n)$

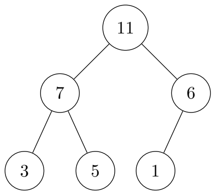
(iii) $\textsc{Insert}(x)$: Fügt ein neues Element mit Schlüssel x in die Datenstruktur ein. - $O(\log n)$

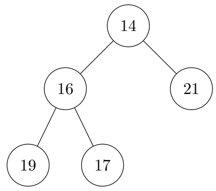
Für die Betrachtung der Laufzeit wird dabei angenommen, dass bei der Ausführung der jeweiligen Operation bereits n Schlüssel in der Datenstruktur gespeichert sind.

Beschreiben Sie, wie man einen Max-Heap zusammen mit einem Min-Heap nutzen kann, um die gewünschte Datenstruktur zu realisieren. Geben Sie dafür zu jeder der gewünschten Operationen einen Algorithmus (eine textuelle Handlungsvorschrift genügt) an. Beweisen Sie die Korrektheit und begründen Sie die Laufzeit Ihrer Algorithmen.

Hinweis: Bei einer geraden Anzahl von Schlüsseln n ist der Median definiert als das $\frac{n}{2}$ kleinste Element.

Tipp: Betrachten Sie zur Schlüsselmenge $\{1, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 16, 17, 19, 21\}$ die unten dargestellten Min- bzw. Max-Heaps und versuchen Sie die drei beschriebenen Operationen auszuführen.


11
7
6
3
5
1


14
16
21
19
17