Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 7

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität und begründen Sie:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad f_1(x, y) := (x + 2y, 3x)$

(b) $f_2 : \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f_2(f) := f(\pi)$

(c) $f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad f_3(z) = \bar{z} \cdot z$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügt? (Begründen Sie!)

$$f(2, 0) = (0, 2) \qquad f(1, 1) = (10, 4) \qquad f(1, 2) = (4, 6)?$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen $V = (V, +_V, \cdot_V, 0_V)$ und $W = (W, +_W, \cdot_W, 0_W)$. Beweisen Sie, dass dann stets $f(0_V) = 0_W$ gilt.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte). Betrachten Sie die beiden folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllen.

(b) Alle solche Abbildungen (wie in (a)) nehmen an der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ den gleichen Wert an.
Um welchen Wert handelt es sich?

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Sei $f : V \to W$ für zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume V, W gegeben. Es gelte für beliebige $x, y \in V$ stets die Gleichung:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Beweisen Sie, dass f linear ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Für eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ ist die Menge $\mathrm{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f durch $\mathrm{Fix}(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum ist.

Sie können hier insgesamt **29 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 26. Mai, 12:00 Uhr.