Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 7. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n), die durch
$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$$
für alle $x \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ definiert ist, punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(ii) Zeigen Sie weiter, dass die Funktionenfolge (f_n) aus Teil (i) auf $\mathbb{R}_+$ aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.
Tipp: Finden Sie eine geeignete Folge (x_n) und wenden Sie Aufgabe P0 dieses Arbeitsblatts an.

(iii) Geben Sie (mit Beweis) eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+$ an, so dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, wenn wir den Definitionsbereich der Funktionen auf die Menge D einschränken.

Lösung:

(i) Sei $x \in \mathbb{R}_+$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gilt
$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}+x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

(ii) Wir wollen Aufgabe P0 anwenden. Wir haben $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ und $f(x) = 0$, und wir wählen $x_n := \frac{1}{n}$. Dann ist
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} \right| = \frac{1}{2}.$$
Also kann die Funktionenfolge (f_n) auf $\mathbb{R}_+$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.

(iii) Wir fixieren $q > 0$ und setzen $D := \{x \in \mathbb{R} | x \geq q\}$. Wir behaupten, dass (f_n) auf D gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Für alle $x \in D$ gilt[1]
$$\left| \frac{1}{1+nx} \right| \leq \frac{1}{1+nq}$$

[1] Hier ist es wichtig, dass man eine obere Abschätzung findet, die nicht mehr von x abhängt, sondern die für alle x gleichmäßig gilt.

und somit

$$||f_n - f||_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{1+nq} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe 2.

(i) Finden Sie eine reelle Zahlenfolge (a_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0,$$

die keine Cauchy-Folge ist.

(ii) Zeigen Sie: Ist $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta^n |a_2 - a_1|.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

(iii) Zeigen Sie: Ist $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge.
Tipp: Um die Cauchy-Eigenschaft der Folge (a_n) zu beweisen, betrachte man $|a_{n+m} - a_n|$ für natürliche Zahlen n, m und versuche diesen nach oben abzuschätzen. Dabei sind Aufgabenteil (ii) und die geometrische Reihe nützlich.

Lösung:

(i) Setze $a_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Die Folge (a_n) ist aber keine Cauchy-Folge, da jede Cauchy-Folge konvergent ist. Wir wissen aber, dass die harmonische Reihe divergiert..

(ii) Es sei $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta^n |a_2 - a_1|$$

gilt.
$n = 1$: Für $n = 1$ ist $\theta |a_{n+1} - a_n| = \theta^1 |a_2 - a_1|$ und damit sind die rechten Seiten der beiden Ungleichungen gleich.

$n \to n+1$: Die Behauptung sei für n bereits bewiesen. Für $n+1$ erhalten wir

$$|a_{n+3} - a_{n+2}| \leq \theta |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta \cdot \theta^n |a_2 - a_1| = \theta^{n+1} |a_2 - a_1|.$$

(iii) Es sei $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass dann (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & |a_{n+m} - a_n| \\ = \; & |a_{n+m} - a_{n+m-1} + a_{n+m-1} - a_{n+m-2} + a_{n+m-2} \ldots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \\ \leq \; & \sum_{k=1}^{m} |a_{n+k} - a_{n+k-1}|, \end{aligned}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung angewendet haben. Nach (ii) ist $|a_{n+k} - a_{n+k-1}| \leq \theta^{n+k-2} |a_2 - a_1|$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n| & \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| \\ & \leq \sum_{k=1}^{m} \theta^{n+k-2} |a_2 - a_1| \\ & = \theta^{n-1} |a_2 - a_1| \sum_{k=0}^{m-1} \theta^k \\ & \leq \theta^{n-1} |a_2 - a_1| \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \\ & \underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{\theta^{n-1}}{1-\theta} |a_2 - a_1| \end{aligned}$$

Da (θ^n) eine Nullfolge ist, gibt es zu ε ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_{n+m} - a_n| \leq \frac{\theta^{n-1}}{1-\theta} |a_2 - a_1| < \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 3.

(i) Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig auf D*, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L \, |x - y| \, .$$

Zeigen Sie, dass jede Funktion f, die Lipschitz-stetig auf D ist, dort auch stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jede stetige Selbstabbildung eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ einen Fixpunkt besitzt, d. h. zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

Hinweise:

- Die beiden Teile sind unabhängig voneinander.
- Tipp zu (ii): Zwischenwertsatz.

Lösung:

(i) Wir benutzen die $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit. Um zu zeigen, dass f in $x \in D$ stetig ist, müssen wir also zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.
Sei also $\varepsilon > 0$ und $x \in D$ beliebig. Wir wissen, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Wir setzen nun $\delta := \frac{\varepsilon}{L} > 0$. Ist dann $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$, so gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

(ii) Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Wir betrachten jetzt die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x) - x$. Offensichtlich besitzt f genau dann einen Fixpunkt, wenn g eine Nullstelle besitzt. Wir zeigen also nun, dass g mindestens eine Nullstelle besitzt.
Es gilt $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Ist $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$, so sind wir fertig. Ist aber $g(a) \neq 0$ und $g(b) \neq 0$, so ist $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$ und g besitzt nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 4.

(i) Zeigen Sie: Jede kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[a, b]$ in sich besitzt genau einen Fixpunkt, d. h. ist $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Funktion derart, dass es eine Konstante $0 < \theta < 1$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \theta\,|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$ gibt, so existiert <u>genau ein</u> $x_0 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) = x_0$ ist.
Tipp: Beide Teile der Aufgabe 3 sind hilfreich.

(ii) Zeigen Sie, dass man diesen Fixpunkt durch folgendes Iterationsverfahren berechnen kann: Wähle ein $a_0 \in [a, b]$ beliebig und bilde dann die Folge (a_n) durch $a_n := f(a_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) konvergiert dann gegen x_0.
Tipp: Aufgabe 2

Bemerkung: Anwendungen dieses Fixpunktsatzes werden wir später behandeln.

Lösung:

(i) Es sei f eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[a, b]$ in sich besitzt, d. h. eine Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ derart, dass es eine Konstante $0 < \theta < 1$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \theta\,|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$ gibt. f ist also insbesondere Lipschitz-stetig mit $L := \theta$ und damit nach Aufgabe 3 (i) auch stetig. Nach Aufgabe 3 (ii) besitzt f als stetige Selbstabbildung eines abgeschlossenen Intervalls einen Fixpunkt in $[a, b]$. Wir müssen also noch zeigen, dass es genau einen Fixpunkt gibt. Hierzu nehmen wir an, dass x_1 und x_2 Fixpunkte von f sind mit $x_1 \neq x_2$. Es gilt also $f(x_i) = x_i$ für $i = 1, 2$ und somit

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|.$$

Es gilt aber auch $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \theta\,|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$. Beides zusammen ergibt $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, was nicht möglich ist. Unsere Annahme, dass es zwei Fixpunkte gibt, muss also falsch sein.

(ii) Wir setzen $a_n := f(a_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |f(a_{n+1}) - f(a_n)| \leq \theta|a_{n+1} - a_n|.$$

Nach Aufgabe 2 (iii) ist die Folge (a_n) eine Cauchy-Folge und somit konvergent. Sei nun a der Grenzwert der Folge (a_n). Es ist $a_n = f(a_{n-1})$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$. Da f stetig ist, ist dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}) = f(a)$, also gilt $a = f(a)$ und a ist der Fixpunkt von f.