Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 5

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Machen Sie sich (in entsprechender Literatur/Internet - ja, ich weiss, das Leben kann hart sein) mit dem sogenannten (erweiterten) Euklidischen Algorithmus vertraut. Wenden Sie diesen schriftlich an, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von 10893 und 24531 zu bestimmen und um schließlich ganze Zahlen a und b zu finden, so dass gilt:

$$a \cdot 10893 + b \cdot 24531 = \mathrm{ggT}(10893, 24531)$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es seien $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 2i + 1$ zwei komplexe Zahlen. Berechnen Sie:

(a) $z_1 + z_2$
(b) $z_1 - z_2$
(c) $z_1 \cdot z_2$
(d) $\frac{z_1}{z_2}$
(e) die Polarkoordinaten von z_1

Schreiben Sie Ihr Ergebnis von (a)-(d) jeweils in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 - 1$ über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren.

Lassen Sie uns zum Üben des Rechnens in Gruppen einen weiteren neuen Begriff einführen, den Sie für die nächsten zwei Aufgaben benötigen werden.

Definition. Wenn $(G, \circ)$ eine Gruppe ist, dann sagen wir, dass $H \subseteq G$ eine *Untergruppe* bildet, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Das neutrale Element von G liegt in H.
- H ist unter $\circ$ abgeschlossen.
- Wenn $a \in H$, so auch $a^{-1} \in H$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass Untergruppen stets Gruppen sind.

Aufgabe 5 (3+3+3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass folgende drei Teilmengen für festes $n \in \mathbb{N}$ Untergruppen von $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zusammen mit der komplexen Multiplikation sind:

$$H_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad H_2 = \{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}, \qquad H_3 = \{z \in \mathbb{C}^\times : z^n = 1\}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Man beweise oder widerlege: "Sind in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V die Vektoren v_1, v_2 und v_3 in V linear unabhängig, so auch die Vektoren:

$$w_1 := v_1 + iv_2 + iv_3, \;\; w_2 := iv_1 - v_2 + iv_3 \;\text{ und }\; w_3 := iv_1 - iv_2 + v_3."$$

Sie können hier insgesamt **27 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **24 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 12. Mai, 12:00 Uhr.