

Abgabe: bis 20.10.2022, 12:15 Uhr
Besprechung: 24/26.10.2022

Übungszettel 1

Aufgabe 1.1

4+2 Punkte

Wir erinnern uns, dass ein Matching $M \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E)$ eine Teilmenge der Kanten ist, sodass es keinen Knoten gibt, der zu mehr als einer Kante aus M inzident ist. Im Problem MAXIMUM MATCHING ist das Ziel, gegeben einen Graphen $G = (V, E)$ ein Matching M zu bestimmen, sodass $|M|$ maximal ist.

- (a) Zeigen Sie, dass es ein 2-Approximationsalgorithmus für MAXIMUM MATCHING ist, ein beliebiges inklusionsmaximales Matching zu berechnen und dieses auszugeben.
- (b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus im Allgemeinen keine bessere als eine 2-Approximation liefert.

Aufgabe 1.2

2+4 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Menge $I \subseteq V$ ist ein Independent Set, falls für alle $v, w \in I$ gilt, dass $\{v, w\} \notin E$.

Algorithm 1 Independent Set

```
 $I := \emptyset; G' := G;$   
while  $V(G') \neq \emptyset$  do  
    Wähle den Knoten  $v \in V(G')$  mit minimalem Grad in  $G'$ .  
     $I = I \cup \{v\};$   
    Lösche  $v$  und alle benachbarten Knoten aus  $G'$ .  
end while
```

- (a) Zeigen Sie, dass I am Ende ein Independent Set ist.
- (b) Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus $(\Delta+1)$ -approximativ ist, wobei Δ der maximale Grad eines Knotens in G ist.

Aufgabe 1.3

4+4 Punkte

In der Vorlesung Algo II haben Sie das Konzept der Polynomialzeit-Reduktion kennengelernt. Hierbei wurde gezeigt, dass ein Polynomialzeit-Algorithmus für ein Entscheidungsproblem einen Polynomialzeitalgorithmus für ein anderes Entscheidungsproblem implizieren kann. Diese Reduktionen können prinzipiell auch auf Optimierungsprobleme angewandt werden, allerdings bleibt der Approximationsfaktor im Allgemeinen nicht erhalten.

- (a) Sei C ein beliebiges Vertex Cover im Graphen $G = (V, E)$, dann ist $V \setminus C$ ein Independent Set in G . Zeigen Sie, dass diese Reduktion den Approximationsfaktor nicht erhält.
- (b) Sei I ein Independent Set im Graphen $G = (V, E)$, dann ist I eine Clique im Graphen $G = (V, \overline{E})$, wobei \overline{E} das Komplement von E ist. Erhält diese Reduktion den Approximationsfaktor? Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage.