Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

11. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 26.-30.6.

Thema: Stammfunktionen und Differentialgleichungen

Videos: Video-15-Stammfunktionen, Video-16-Differentialgleichungen

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.
Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int x^2 \cos x dx$,
(ii) $\int \sin^4 x \cos x dx$,
(iii) $\int \log x dx$,
(iv) $\int \frac{1}{x^2-4x+4} dx$,
(v) $\int \frac{1}{x^2+x-2} dx$,
(vi) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$.

Tipp zu (iii): $\log x = 1 \cdot \log x$

Aufgabe P2.
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Lösung an.

(i) $y' = xy$ mit $y(1) = 1$,
(ii) $y' = e^y \sin x$ mit $y(0) = 0$,
(iii) $(1 + e^x) \cdot y' = ye^x$ mit $y(0) = 2$,
(iv) $xy' = y + x^2$ mit $y(1) = 1$,
(v) $y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$ mit $y(\pi/2) = 1$.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgabe ist freiwillig. Die Aufgaben sind aber klausurrelevant.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

- **(i)** $\int x^2 \sin x dx$,
- **(ii)** $\int \cos^5 x \sin x dx$,
- **(iii)** $\int \frac{1}{x^2-2x+1} dx$,
- **(iv)** $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$,
- **(v)** $\int x \sin(x^2) dx$,

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Lösung an.

- **(i)** $y' = xy^2$ mit $y(1) = 1$,
- **(ii)** $y' = e^y \cos x$ mit $y(0) = 0$,
- **(iii)** $xy' + y = 2x \cos(x^2)$ mit $y(1) = 1$,
- **(iv)** $(x^2 + 2)y' - 2xy = 3(x^2 + 2)^2$ mit $y(2) = 1$.

Aufgabe 3.
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$, I ein Intervall und $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)(y(x))^\alpha$$

heißt *Bernoullische Differentialgleichung.*

- **(i)** Zeigen Sie: Ist y eine Lösung einer Bernoullischen Differentialgleichung, die sich als

  $$y(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

  mit einer anderen Funktion u schreiben lässt, so löst u eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.
- **(ii)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

  $$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)}$$

  mit $y(1) = 1$.