Prof. Dr. Reinhard Klein
Alexander Schier

Universität Bonn
Institut für Informatik II
Wintersemester 2023/2024 10.01.2024

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 12

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 17.01.2024, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Spektralsatz, *1+2+2=5 Punkte*)

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine normale Matrix, d.h. $A^*A = AA^*$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass eine Schur-Faktorisierung $A = QTQ^*$ existiert, wobei $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitär ist und $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Wir werden nun beweisen, dass im Fall von normalem A die Schur-Faktorisierung eine Eigenwertzerlegung ist, d.h. dass T diagonal ist.

a) Zeige, dass T eine normale Matrix ist.
b) Zeige, dass in der ersten Zeile von T nur auf der Diagonalen ein Eintrag ungleich null stehen kann, d.h.
$$\forall j \in \{2, \dots, m\} : T_{1,j} = 0.$$
c) Zeige nun, dass T sogar eine Diagonalmatrix ist.
Hinweis: Verwende Induktion über m. Zerlege im Induktionsschluss T in eine Blockmatrix mit einem $(m-1) \times (m-1)$ Block.

Aufgabe 2 (Rekursion auflösen, *4 Punkte*)

Gegeben seien die durch eine verschränkte Rekursion definierten Folgen

$$\begin{aligned} a_0 &:= 2, & a_{n+1} &:= 5 \cdot a_n - b_n, \\ b_0 &:= 4, & b_{n+1} &:= 6 \cdot a_n + 12 \cdot b_n. \end{aligned}$$

Leite durch Eigenwertzerlegung einer Matrix eine explizite Darstellung dieser Folgen her.

Hinweis: Interpretiere den Übergang von a_n, b_n zu a_{n+1}, b_{n+1} als Matrixmultiplikation und verwende das Ergebnis aus Aufgabe 1 vom Blatt 11.

Aufgabe 3 (Ableitung der inversen Matrix, *3 Punkte*)

Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ eine invertierbare Matrix $A(t)$ zuordnet. Sei $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $B(t) := (A(t))^{-1}$. Zeige

$$B'(t) = -B(t) \cdot A'(t) \cdot B(t).$$

Hinweis: Auch für Matrizenmultiplikation gilt die Produktregel. Insbesondere darf ohne Beweis verwendet werden, dass gilt

$$\partial_t(A(t) \cdot B(t)) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t).$$

Dabei fassen wir die Ableitung $\partial_t A(t) = A'(t)$ als Funktion $A' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ auf.

Bonusaufgabe 4 (Parametrisierung eines Torus, *2+2=4 Punkte*)

Wir betrachten eine Abbildung deren Bild ein Torus ist. Seien $R > r > 0$ die Radii des Torus. Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos\varphi) \cdot \cos\theta \\ (R + r \cdot \cos\varphi) \cdot \sin\theta \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Berechne die Funktionalmatrix f'.

b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cdot t^2 \\ b \cdot t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechne $(f \circ \gamma)'$.

Hinweis: Verwende die Kettenregel.