Übungszettel 8

Henning Lehmann, Darya Nemtsava

Afg. 8.1

a) z.Z.: $P(\mathbb{N})$ ist überabzählbar unendlich.

Beweis durch Widerspruch.

Sei $f: \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ eine Bijektion.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $i \in f(i) \lor i \notin f(i)$.

Konstruiere eine neue Menge $K \in P(\mathbb{N})$:

$$K = \{ i \mid i \notin f(i) \}$$

Es gilt: $\forall i \in \mathbb{N}: (i \in f(i) \Rightarrow i \notin K) \land (i \notin f(i) \Rightarrow i \in K)$.

Daraus folgt: f bildet nicht auf K ab. $\lightning$

b)

z.Z.: $\exists f: \mathbb{N} \to \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, f ist bijektiv.

Definiere $f(i)$ wie folgt (Indizes in rot):

$$A_1 = \{ \overset{1}{a_{11}}, \overset{3}{a_{12}}, \overset{6}{a_{13}}, \overset{10}{a_{14}}, \dots \}$$
$$A_2 = \{ \overset{2}{a_{21}}, \overset{5}{a_{22}}, \overset{9}{a_{23}}, a_{24}, \dots \}$$
$$A_3 = \{ \overset{4}{a_{31}}, \overset{8}{a_{32}}, a_{33}, a_{34}, \dots \}$$
$$A_4 = \{ \overset{7}{a_{41}}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \dots \}$$
$$\vdots$$

Diese Zuordnung gleicht dem Cantor'schen Paarungsprinzip mit $f^{-1}(a_{ij}) = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j$. Da die Cantor'sche Paarungsfunktion eine Bijektion ist, ist f^{-1} auch bijektiv. f^{-1} ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv. $\square$

Afg. 8.2

Sei $f : P \to \mathbb{N}$ mit $f(p) = |\{pRp' \mid p' \in P\}|$.

z.Z.: $\exists p, p' \in P : f(p) = f(p')$.

Beweis per Widerspruch (Schubfachprinzip).

Sei P beliebige, aber feste Menge von Personen.

Es gilt: $\forall p \in P : f(p) \geq 1$, da R reflexiv

$\forall p \in P : f(p) \leq |P|$.

Damit $\forall p, p' \in P, p \neq p' : f(p) \neq f(p')$, muss gelten:

$\forall i \in \{1, 2, \dots, |P|\} : \exists p \in P : f(p) = i$

$\Rightarrow \exists p, p' \in P : f(p) = 1 \wedge f(p') = |P|, p \neq p'$.

Da R reflexiv, kann p nur sich selbst kennen.

p' kennt alle Personen (also auch p). Da R jedoch auch symmetrisch, gilt

$p'Rp \Rightarrow pRp'$! ↯