Logik und diskrete Strukturen – Übungszettel 1

Henning Lehmann
Darya Nemtsava
Paul Piecha

1.1

a) $M_1 = \{1, 2, 4, 6\}$

b) $M_2 = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{8\}, \{3,5\}, \{3,8\}, \{5,8\}, \{3,5,8\}\}$

c) $M_3 = \{(1, \emptyset), (2, \emptyset), (6, \emptyset), (1, \{2\}), (2, \{2\}), (6, \{2\})\}$

d) $M_4 = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$

1.2

1.

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \mid n^3 \Rightarrow 2 \mid n$

Beweis:

Sei $n = 2 \cdot k - 1,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2 \nmid n$

Dann: $n^3 = (2k-1)^3$

$= (2k-1) \cdot (2k-1) \cdot (2k-1)$

$= (4k^2 - 4k + 1) \cdot (2k-1)$

$= 8k^3 - 4k^2 - 8k^2 + 4k + 2k - 1$

$= 2 \cdot (4k^3 - 6k^2 + 3k) - 1$

$\Rightarrow 2 \nmid n^3$

$\neg(2 \mid n) \Rightarrow \neg(2 \mid n^3) \Leftrightarrow 2 \mid n^3 \Rightarrow 2 \mid n$

$\square$

<u>2.</u>

Theorem 1: Die letzte Ziffer einer Quadratzahl hängt ausschließlich von der letzten Ziffer ihrer Quadratwurzel ab.

Beweis: Man schreibe eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ als $n = k + j$ mit $j = n \text{ mod. } 10$ und $k = n - j$, d. h. j ist die letzte Ziffer von n.

Dann ist $n^2 = (k+j)^2 = k^2 + 2kj + j^2$.

Da $10 | k \Rightarrow (10 | k^2) \wedge (10 | 2kj)$, ist die letzte Ziffer von n^2 gleich der letzten Ziffer von j^2. $\square$

Theorem 2 (laut Aufgabenstellung zu zeigen):

Wenn eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ als letzte Ziffer eine 2, 3, 7 oder 8 hat, dann ist sie keine Quadratzahl.

Beweis:

Aus Theorem 1 folgt, dass die letzte Ziffer von m^2, $m \in \mathbb{N}$ in folgender Menge Z enthalten sein muss:

$$Z = \{ j^2 \text{ mod. } 10 \mid j \in \mathbb{N}_0,\ j < 10 \}$$

Bestimmung von Z durch alle möglichen Werte von j:

$j=0: 0^2 \text{ mod. } 10 = 0$

$j=1: 1^2 \text{ mod. } 10 = 1$

$j=2: 2^2 \text{ mod. } 10 = 4$

$j=3: 3^2 \text{ mod. } 10 = 9$

$j=4: 4^2 \text{ mod. } 10 = 6$

$j=5: 5^2 \text{ mod. } 10 = 5$

$j=6: 6^2 \text{ mod. } 10 = 6$

$j=7: 7^2 \text{ mod. } 10 = 9$

$j=8: 8^2 \text{ mod. } 10 = 4$

$j=9: 9^2 \text{ mod. } 10 = 1$

$\Rightarrow Z = \{0,1,4,5,6,9\}$

Relativ zur Grundmenge aller Endziffern $G = \{g \mid g \in \mathbb{N}_0, g < 10\}$ ist $\overline{Z} = \{2,3,7,8\}$ die Menge aller Ziffern, mit welchen m^2 nicht enden kann.

$\square$