Dynamische Programmierung

Gegeben sei **Instanz $\mathcal{I}$ eines Problems**.

Löse $\mathcal{I}$ wie folgt:

1. **Zerlege $\mathcal{I}$ in Teilinstanzen** $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ für ein $k \geq 1$.
2. **Löse die Teilinstanzen** $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$.
3. **Kombiniere die Lösungen** von $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ **zu Gesamtlösung** von $\mathcal{I}$.

Dynamische Programmierung

Gegeben sei **Instanz $\mathcal{I}$ eines Problems**.

Löse $\mathcal{I}$ wie folgt:

1. **Zerlege $\mathcal{I}$ in Teilinstanzen** $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ für ein $k \geq 1$.
2. **Löse die Teilinstanzen** $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$.
3. **Kombiniere die Lösungen** von $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ **zu Gesamtlösung** von $\mathcal{I}$.

Unterschied zu Divide-and-Conquer: **Speichere Lösungen der Teilinstanzen.**

Fibonacci-Zahlen: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die n-te Fibonacci-Zahl f_n wie folgt definiert:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

Fibonacci-Zahlen: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die n-te Fibonacci-Zahl f_n wie folgt definiert:

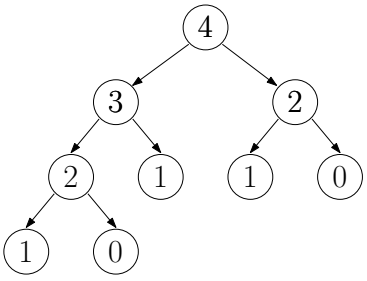
$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

```
FibRek(int n)
1   if (n == 0) return 0;
2   else if (n == 1) return 1;
3   else return FibRek(n − 1)+FibRek(n − 2);
```

Fibonacci-Zahlen: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die n-te Fibonacci-Zahl f_n wie folgt definiert:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

```
FibRek(int n)
1   if (n == 0) return 0;
2   else if (n == 1) return 1;
3   else return FibRek(n − 1)+FibRek(n − 2);
```

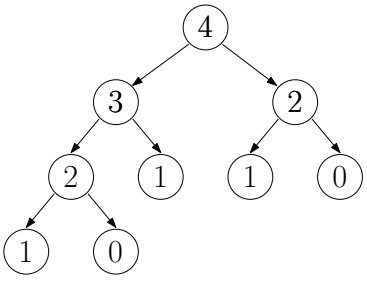


Fibonacci-Zahlen: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die n-te Fibonacci-Zahl f_n wie folgt definiert:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

```
FibRek(int n)
1   if (n == 0) return 0;
2   else if (n == 1) return 1;
3   else return FibRek(n − 1)+FibRek(n − 2);
```

Exponentielle Laufzeit, da Teilprobleme mehrfach gelöst werden.



2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Zuschnittproblem

Eingabe: **Länge** $n \in \mathbb{N}$

Preise $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Zuschnittproblem

Eingabe: **Länge** $n \in \mathbb{N}$

Preise $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

Ausgabe: **optimaler Zuschnitt** eines Brettes der Länge n

D. h. $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ und Folge $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = n$

sodass **Gesamterlös** $p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell}$ **größtmöglich** ist.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Zuschnittproblem

Eingabe: **Länge** $n \in \mathbb{N}$

Preise $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

Ausgabe: **optimaler Zuschnitt** eines Brettes der Länge n

D. h. $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ und Folge $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = n$

sodass **Gesamterlös $p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell}$ größtmöglich** ist.

Länge i	1	2	3	4	5
Preis p_i	1	3	4	5	7

$n = 5$

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Zuschnittproblem

Eingabe: **Länge** $n \in \mathbb{N}$

Preise $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

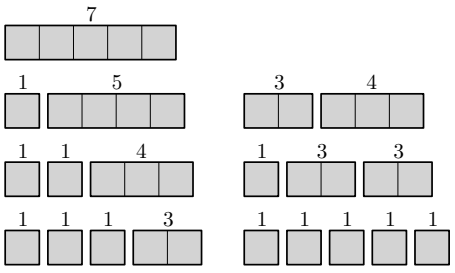
Ausgabe: **optimaler Zuschnitt** eines Brettes der Länge n

D. h. $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ und Folge $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = n$

sodass **Gesamterlös $p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell}$ größtmöglich** ist.

Länge i	1	2	3	4	5
Preis p_i	1	3	4	5	7

$n = 5$



2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Zuschnittproblem

Eingabe: **Länge** $n \in \mathbb{N}$

Preise $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

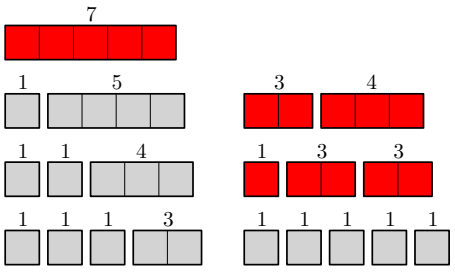
Ausgabe: **optimaler Zuschnitt** eines Brettes der Länge n

D. h. $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ und Folge $i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = n$

sodass **Gesamterlös $p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell}$ größtmöglich** ist.

Länge i	1	2	3	4	5
Preis p_i	1	3	4	5	7

$n = 5$



2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

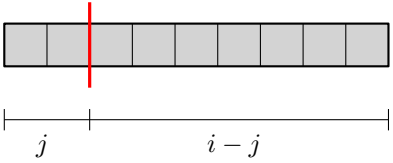
Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.



2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.

$\Rightarrow R_i \geq \max_j(p_j + R_{i-j})$

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

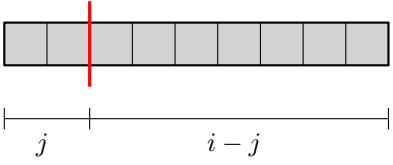
Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.



$\Rightarrow R_i \geq \max_j(p_j + R_{i-j})$

Sei $i_1, \ldots, i_\ell$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = i$ optimale Aufteilung.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

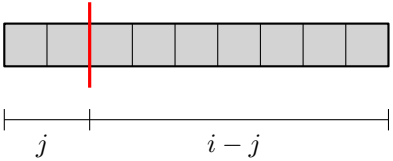
Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

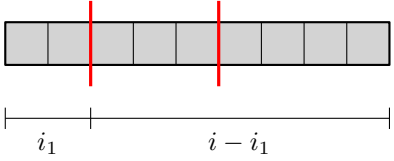
Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.



$\Rightarrow R_i \geq \max_j(p_j + R_{i-j})$

Sei $i_1, \ldots, i_\ell$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = i$ optimale Aufteilung.



2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

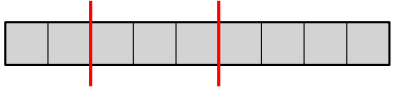
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.

$\Rightarrow R_i \geq \max_j(p_j + R_{i-j})$

Sei $i_1, \ldots, i_\ell$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = i$ optimale Aufteilung.



$\Rightarrow R_i = p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell} \leq p_{i_1} + R_{i-i_1}$.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei R_i optimaler Erlös eines Brettes der Länge i.

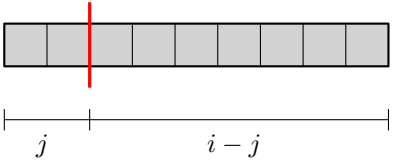
Es gilt $R_0 = 0$ und $R_1 = p_1$.

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

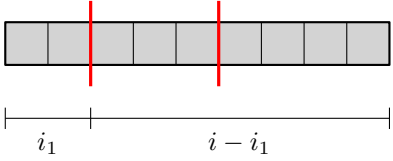
Beweis:

Sei $j \in \{1, \ldots, i\}$.



$\Rightarrow R_i \geq \max_j(p_j + R_{i-j})$

Sei $i_1, \ldots, i_\ell$ mit $i_1 + \ldots + i_\ell = i$ optimale Aufteilung.



$\Rightarrow R_i = p_{i_1} + \ldots + p_{i_\ell} \leq p_{i_1} + R_{i-i_1}$.

$\Rightarrow R_i \leq \max_j(p_j + R_{i-j})$ □

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

```
ZuschnittRek(int i)
1    if (i == 0) return 0;
2    R = −1;
3    for (j = 1; j <= i; j++)
4        R = max{R, p_j + ZuschnittRek(i − j)};
5    return R;
```

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

```
ZUSCHNITT(int n)
1    R_0 = 0;
2    for (i = 1; i <= n; i++) {
3         R_i = -1;
4         for (j = 1; j <= i; j++)
5              R_i = max{R_i, p_j + R_{i-j}};
6    }
7    return R_n;
```

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Lemma 2.10

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $R_i = \max\{p_j + R_{i-j} \mid j \in \{1, \ldots, i\}\}$.

```
ZUSCHNITT(int n)
1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = -1;
4       for (j = 1; j <= i; j++)
5           R_i = max{R_i, p_j + R_{i-j}};
6   }
7   return R_n;
```

Theorem 2.11

Der Algorithmus ZUSCHNITT berechnet in Zeit $\Theta(n^2)$ den maximal erreichbaren Erlös R_n.

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

Ermittle nicht nur den Wert, sondern auch die Lösung.

```
ZUSCHNITT2(int n)
1    R_0 = 0;
2    for (i = 1; i <= n; i++) {
3        R_i = −1;
4        for (j = 1; j <= i; j++) {
5            if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6                R_i = p_j + R_{i−j};
7                s_i = j;
8            }
9        }
10   }
11   return R_n;
```

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i									
R_i									

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1								
R_i	1								

2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2							
R_i	1	3							

+1

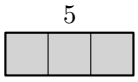
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3						
R_i	1	3	5						



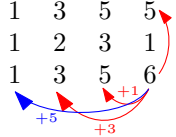
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

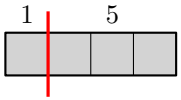
```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1					
R_i	1	3	5	6					





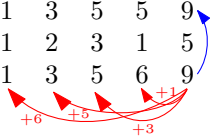
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

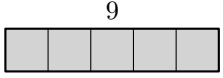
```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1	5				
R_i	1	3	5	6	9				





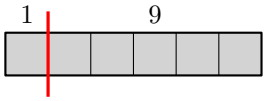
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1	5	1			
R_i	1	3	5	6	9	10			



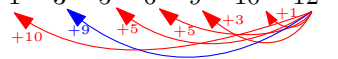
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

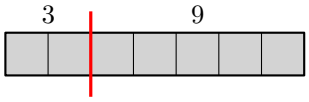
```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1	5	1	2		
R_i	1	3	5	6	9	10	12		





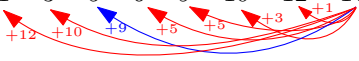
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

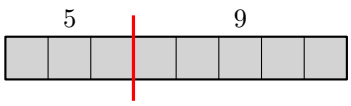
```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1	5	1	2	3	
R_i	1	3	5	6	9	10	12	14	





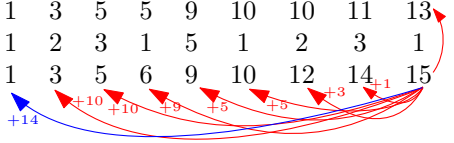
2.3.1 Berechnung optimaler Zuschnitte

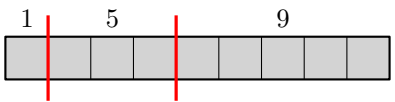
```
ZUSCHNITT2(int n)

1   R_0 = 0;
2   for (i = 1; i <= n; i++) {
3       R_i = −1;
4       for (j = 1; j <= i; j++) {
5           if (p_j + R_{i−j} > R_i) {
6               R_i = p_j + R_{i−j};
7               s_i = j;
8           }
9       }
10  }
11  return R_n;
```

Beispiel

Länge i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis p_i	1	3	5	5	9	10	10	11	13
s_i	1	2	3	1	5	1	2	3	1
R_i	1	3	5	6	9	10	12	14	15





2.3.2 Rucksackproblem

Rucksackproblem (Knapsack Problem (KP))

Eingabe: Nutzen $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$
Gewichte $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$
Kapazität $t \in \mathbb{N}$

Ausgabe: $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, sodass Gesamtnutzen $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$ maximal unter der Bedingung $w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \leq t$

2.3.2 Rucksackproblem

Rucksackproblem (Knapsack Problem (KP))

Eingabe: Nutzen $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$
Gewichte $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$
Kapazität $t \in \mathbb{N}$

Ausgabe: $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, sodass Gesamtnutzen $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$ maximal unter der Bedingung $w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \leq t$

Wie sehen geeignete Teilprobleme aus?

Sei $W = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} w_i$.

Für jede Kombination aus $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $w \in \{0, \ldots, nW\}$ sei

$$P(i, w) = \max\{p_1 x_1 + \ldots + p_i x_i \mid w_1 x_1 + \ldots + w_i x_i \leq w\}.$$

2.3.2 Rucksackproblem

Rucksackproblem (Knapsack Problem (KP))

Eingabe: Nutzen $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$
Gewichte $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$
Kapazität $t \in \mathbb{N}$

Ausgabe: $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, sodass Gesamtnutzen $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$ maximal unter der Bedingung $w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \leq t$

Wie sehen geeignete Teilprobleme aus?

Sei $W = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} w_i$.

Für jede Kombination aus $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $w \in \{0, \ldots, nW\}$ sei

$$P(i, w) = \max\{p_1 x_1 + \ldots + p_i x_i \mid w_1 x_1 + \ldots + w_i x_i \leq w\}.$$

Dies ist das Rucksackproblem gegeben durch Objekte $1, \ldots, i$ und Kapazität w.

2.3.2 Rucksackproblem

Für jede Kombination aus $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $w \in \{0, \ldots, nW\}$ sei

$$P(i, w) = \max\{p_1 x_1 + \ldots + p_i x_i \mid w_1 x_1 + \ldots + w_i x_i \leq w\}.$$

Randfälle:

$$P(1, w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w < w_1 \\ p_1 & \text{falls } w \geq w_1 \end{cases}$$

2.3.2 Rucksackproblem

Für jede Kombination aus $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $w \in \{0, \ldots, nW\}$ sei

$$P(i, w) = \max\{p_1 x_1 + \ldots + p_i x_i \mid w_1 x_1 + \ldots + w_i x_i \leq w\}.$$

Randfälle:

$$P(1, w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w < w_1 \\ p_1 & \text{falls } w \geq w_1 \end{cases}$$

Konvention:

$$P(i, 0) = 0 \text{ und } P(i, w) = -\infty \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } w < 0.$$

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w)$

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w)$
- Falls $i \in I$, so ist $I \setminus \{i\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} w_j \leq w - w_i$.

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w)$
- Falls $i \in I$, so ist $I \setminus \{i\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} w_j \leq w - w_i$.
  $\Rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{i\}} p_j = P(i-1, w-w_i)$

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w)$
- Falls $i \in I$, so ist $I \setminus \{i\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} w_j \leq w - w_i$.
  $\Rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{i\}} p_j = P(i-1, w-w_i)$
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w-w_i) + p_i$

2.3.2 Rucksackproblem

Sei für ein $i \geq 2$ und für alle $w \in \{0, \ldots, nW\}$ **der Wert $P(i-1, w)$ bekannt**.

Ziel: Berechnung von $P(i, w)$ für $w \in \{0, \ldots, nW\}$.

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, i\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq w$ und größtmöglichem Nutzen, d. h. $\sum_{i \in I} p_i = P(i, w)$.

- Falls $i \notin I$, so ist $I \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I} w_j \leq w$.
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w)$
- Falls $i \in I$, so ist $I \setminus \{i\} \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ mit $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} w_j \leq w - w_i$.
  $\Rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{i\}} p_j = P(i-1, w-w_i)$
  $\Rightarrow P(i, w) = P(i-1, w-w_i) + p_i$

Insgesamt folgt $P(i, w) = \max\{P(i-1, w), P(i-1, w-w_i) + p_i\}$.

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

2.3.2 Rucksackproblem

```
DynKP
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

Theorem 2.12

Der Algorithmus DynKP bestimmt in Zeit $\Theta(n^2 W)$ den maximal erreichbaren Nutzen einer gegebenen Instanz des Rucksackproblems.

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$													
1	2	2	$-\infty$													
3	4	3	$-\infty$													

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

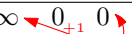
			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0												
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0											
3	4	3	$-\infty$	0												



2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

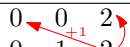
			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1										
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2									
3	4	3	$-\infty$	0												

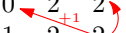


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2								
3	4	3	$-\infty$	0												



2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

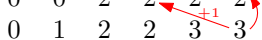
			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3							
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3						
3	4	3	$-\infty$	0												



2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

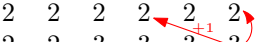
			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3					
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3				
3	4	3	$-\infty$	0												



2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3			
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

1 // Sei $P(i,0) = 0$ und $P(i,w) = -\infty$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $w < 0$.
2 $W = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i$;
3 **for** $(w = 1; w < w_1; w{+}{+})\ P(1,w) = 0$;
4 **for** $(w = w_1; w <= nW; w{+}{+})\ P(1,w) = p_1$;
5 **for** $(i = 2; i <= n; i{+}{+})$
6 **for** $(w = 1; w <= nW; w{+}{+})$
7 $P(i,w) = \max\{P(i-1,w), P(i-1,w-w_i) + p_i\}$;
8 **return** $P(n,t)$;

			w													
p_i	w_i	i	< 0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3		
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

1 // Sei $P(i,0) = 0$ und $P(i,w) = -\infty$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $w < 0$.
2 $W = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i$;
3 **for** $(w = 1; w < w_1; w{+}{+})$ $P(1,w) = 0$;
4 **for** $(w = w_1; w <= nW; w{+}{+})$ $P(1,w) = p_1$;
5 **for** $(i = 2; i <= n; i{+}{+})$
6 **for** $(w = 1; w <= nW; w{+}{+})$
7 $P(i,w) = \max\{P(i-1,w), P(i-1,w-w_i) + p_i\}$;
8 **return** $P(n,t)$;

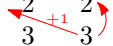
			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	
3	4	3	$-\infty$	0												

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0												



2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

1 // Sei $P(i,0) = 0$ und $P(i,w) = -\infty$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $w < 0$.
2 $W = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i$;
3 **for** $(w = 1; w < w_1; w{+}{+})\ P(1,w) = 0$;
4 **for** $(w = w_1; w <= nW; w{+}{+})\ P(1,w) = p_1$;
5 **for** $(i = 2; i <= n; i{+}{+})$
6 **for** $(w = 1; w <= nW; w{+}{+})$
7 $P(i,w) = \max\{P(i-1,w), P(i-1,w-w_i) + p_i\}$;
8 **return** $P(n,t)$;

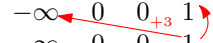
			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0											

2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1										

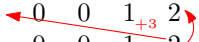


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2									

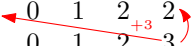


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3								

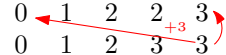


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3							

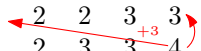


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4						

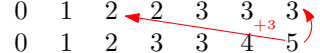


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

1 // Sei $P(i,0) = 0$ und $P(i,w) = -\infty$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $w < 0$.
2 $W = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i$;
3 **for** $(w = 1; w < w_1; w{+}{+})\ P(1,w) = 0$;
4 **for** $(w = w_1; w <= nW; w{+}{+})\ P(1,w) = p_1$;
5 **for** $(i = 2; i <= n; i{+}{+})$
6 **for** $(w = 1; w <= nW; w{+}{+})$
7 $P(i,w) = \max\{P(i-1,w), P(i-1,w-w_i) + p_i\}$;
8 **return** $P(n,t)$;

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5					

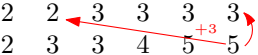


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5				

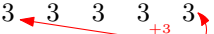


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6			

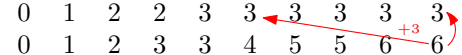


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

1 // Sei $P(i,0) = 0$ und $P(i,w) = -\infty$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $w < 0$.
2 $W = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} w_i$;
3 **for** $(w = 1; w < w_1; w{+}{+})\ P(1,w) = 0$;
4 **for** $(w = w_1; w <= nW; w{+}{+})\ P(1,w) = p_1$;
5 **for** $(i = 2; i <= n; i{+}{+})$
6 **for** $(w = 1; w <= nW; w{+}{+})$
7 $P(i,w) = \max\{P(i-1,w), P(i-1,w-w_i) + p_i\}$;
8 **return** $P(n,t)$;

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6		

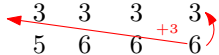


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w													
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	

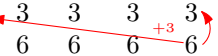


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	6

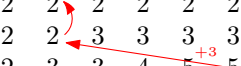


2.3.2 Rucksackproblem

DynKP

```
1   // Sei P(i,0) = 0 und P(i,w) = −∞ für i ∈ {1,...,n} und w < 0.
2   W = max_{i∈{1,...,n}} w_i;
3   for (w = 1; w < w_1; w++) P(1,w) = 0;
4   for (w = w_1; w <= nW; w++) P(1,w) = p_1;
5   for (i = 2; i <= n; i++)
6       for (w = 1; w <= nW; w++)
7           P(i,w) = max{P(i−1,w), P(i−1,w−w_i) + p_i};
8   return P(n,t);
```

			w												
p_i	w_i	i	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	1	$-\infty$	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	$-\infty$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	4	3	$-\infty$	0	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	6



Beispiel: Kapazität $t = 8$ $\quad P(3,8) = 5$ $\quad$ optimale Lösung $\{1,3\}$

Kann der Algorithmus DynKP als effizient angesehen werden?

Laufzeit von DynKP beträgt $\Theta(n^2 W)$.

Kann der Algorithmus DynKP als effizient angesehen werden?

Laufzeit von DynKP beträgt $\Theta(n^2 W)$.

Unterschied zu Laufzeiten der bisherigen Algorithmen: Die Laufzeit hängt **nicht nur von der Anzahl der Objekte, sondern zusätzlich von dem maximalen Gewicht W ab**.

Kann der Algorithmus DynKP als effizient angesehen werden?

Laufzeit von DynKP beträgt $\Theta(n^2 W)$.

Unterschied zu Laufzeiten der bisherigen Algorithmen: Die Laufzeit hängt **nicht nur von der Anzahl der Objekte, sondern zusätzlich von dem maximalen Gewicht W ab**.

$\Rightarrow$ Bereits Eingaben, die sich mit wenigen Bytes codieren lassen, können zu einer sehr großen Laufzeit führen.