W.H. $(A \Rightarrow B)$ $(A \Leftrightarrow B)$

Definition
Bedeutung durch
Wahrheitstabelle

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

BSP

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \in \mathbb{N}$ gilt für $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}_0)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

Schreibweise: $(A \Leftrightarrow ((\neg B) \vee C))$ gemeint!

Konvention: $\vee, \wedge, \neg$ vor $\Leftrightarrow, \Rightarrow$
"bindet stärker"

Im Zweifel Klammerung!

Theorem 2.1 (Deduktionstechnik)

A, B, C bel. Aussagen

Die folgen Aussagen sind wahr:

a) Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ gilt genau dann, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gilt.

$$\big((A \Leftrightarrow B) \overset{v}{\Leftrightarrow} ((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A))\big)$$

(Unsere Syntax) <u>ist wahr $\overset{v}{!}$</u>

<u>Beweis:</u> a)

	1. A	B	2. $A \Rightarrow B$	3. $B \Rightarrow A$	4. $A \Leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$ 5. $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$	
	0	0	1	1	1	1	✓
→	0	1	1	0	0	0	✓
	1	0	0	1	0	0	✓
→	1	1	1	1	1	1	✓

<u>Verwendung:</u> $A \overset{v}{\Leftrightarrow} B$ <u>Zeige:</u> 1. $A \Rightarrow B$
2. $B \Rightarrow A$

<u>Theorem 2.1</u> (fortführen)

(Wenn)

b) Ist die Aussage A wahr und gilt $A \Rightarrow B$ dann gilt auch die Aussage B

$$\left(\left(A \wedge (A \Rightarrow B)\right) \overset{?}{\Rightarrow} B\right) \text{ ist wahr?}$$

benutzt bei $A' \subseteq B'$: $x \in A'$ Annahme

$x \in A' \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in B'$ gezeigt

Beweis:

1. A	2. B	3. $A \Rightarrow B$		
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

5

c) Ist die Aussage B falsch und gilt $A \Rightarrow B$
dann ist die Aussage A ~~B~~ falsch!

"$((\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A)$ ist wahr."

d) "Transitivität" $(((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
ist wahr!

e) Gilt $A \Leftrightarrow B$ und $B \Leftrightarrow C$, dann gilt $A \Leftrightarrow C$.

f) $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind äquivalent.

g) "Ringschluss" Gilt $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$, dann
sind A, B, C äquivalent ($A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, $C \Leftrightarrow A$)

Theorem 2. 2. De Morgan'sche Regeln

Seien A, B Aussagen.
Dann sind die folgenden Aussagen wahr.

a) $\underset{1.}{\neg(A \wedge B)} \Longleftrightarrow \underset{2.}{\neg A \vee \neg B}$

b) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

c) $A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$

a) Beweis:

A	B	$A \wedge B$	1. $\neg(A \wedge B)$	$\Longleftrightarrow$ 2. $\neg A \vee \neg B$	$\neg B$	$\neg A$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2.2.3 Direkte und indirekte Beweis

direkt: Voraussetzungen, Axiome, direkt verwenden
Implikationen begründen (z.B. mit Th. 2.1.b)

indirekt: Widerspruch erzeugen!

Annahme: Die Aussage stimmt nicht!

Deduktion $\rightsquigarrow$ Widerspruch zu einem **Axiom**! (erzeugen)

Symbol ↯ Was darf als Axiom annehmen?

Bekannte Aussage aus der Mathematik verwenden.

BSP n gerade Zahl $\Rightarrow n = 2 \cdot m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

Indirekter Beweis: Klassiker, Euklid

Axiom: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen. (A)

Theorem 2.6 Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: **Ann.:** es ex. nur endlich viele Primzahlen.

Seien $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ alle Primzahlen

$$\Rightarrow \quad m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r + 1 > p_i \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, r$$

1. **Fall** m ist Primzahl ↯ (ungleich alle p_i's)

2. **Fall** m ist keine Primzahl

(A) $\Rightarrow$ es ex. eine Primzahl q die m teilt

aber m geteilt durch p_i hat Rest 1

$\Rightarrow$ q ist eine weitere Primzahl $\lightning$

$\Rightarrow$ es ex mehr Primzahlen als $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $\lightning$

Fall 1+2.

$\square$

Direkter Beweis:

Theorem 2.3: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, n ist ungerade

Dann ist: $n = 2 \cdot k + 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$

Berechne: $n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Dann ist: $n^2 = 2 \cdot l + 1$ mit $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0$ ungerade. $\square$

Kompakt: $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade $\Rightarrow n = 2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, und $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\Rightarrow n^2$ ungerade $\square$

11

Indirekter Beweis:

$\sqrt{x} := y$ mit $y^2 = x$ für Zahl $y \geq 0$

Theorem 2.4 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Hilfsaussage: (inline)

Lemma 2.5: Die Wurzel einer geraden Quadratzahl ist gerade.

$Q = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$

zz.: $n^2 = 2 \cdot l \quad l, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{N}$

Ann: $n^2 = 2l$, $n = 2k+1$ $\left(\Rightarrow n^2 = \underbrace{2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1}_{\neq 2l} \lightning \right)$

$\underset{\text{Th. 2.3}}{\Rightarrow}$ n^2 ist ungerade $\lightning$

Beweis Theorem 2.4:

(indirekt) $\sqrt{2} := x \in \mathbb{R}\,,\; x^2 = 2$

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad a \in \mathbb{Z}\,,\; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

O.E. / O.B.d.A.: a, b teilerfremd und $a, b > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$ a^2 ist gerade

$\underset{\text{Lemma 2.5}}{\Rightarrow} \quad a = 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{N}$

$a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow$ b^2 gerade

$\underset{\text{Lemma 2.5}}{\Rightarrow} \quad b = 2 \cdot m\,,\; m \in \mathbb{N}$

Zs.-genommen: $b = 2 \cdot m\,,\; a = 2 \cdot k \qquad a, b \overset{\text{Ann.}}{\text{teilerfremd}}$ $\lightning$ ($\square$)

$\Rightarrow$ Ann. falsch, diese Darstellung existiert nicht.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$