

Intelligente Sehsysteme

2 Bildstörungen und lineare Operatoren

Deterministische und stochastische Einflüsse,
verschiebungsinvariante, lineare Operatoren, Konvolution,
Bewegungsunschärfe, Rauschen, lineare Glättungsfiler

Volker Steinhage

Inhalt

- Deterministische Einflüsse und stochastische Einflüsse bei der Bildaufnahme
 - Photonenrauschen
 - Signal-Noise-Ratio
 - Impulsrauschen
- Lineare Filter zur Glättung
 - Mittelwertfilter
 - Gauß-Filter
 - Binomialfilter

Einflüsse bei der Bildaufnahme

Die Bildaufnahme geht i.A. mit **deterministischen und stochastischen Einflüssen** auf die abgebildete Information einher:

- **Deterministische Einflüsse** basieren auf berechenbaren und wiederholbaren Einwirkungen bei der Bildaufnahme
 - Ziel ist hier, die Einwirkungen zu beschreiben, ggf. geeignet zu parametrisieren und rückgängig zu machen
- **Stochastische Einflüsse**, verändern **das Bild in statistisch beschreibbarer Weise**
 - Ziel ist hier, die Parameter der statistischen Beschreibung zu ermitteln, damit der Einfluss bei der Interpretation berücksichtigt und näherungsweise rückgängig gemacht werden kann

Lineare Operatoren (1)

Viele determinist. Störungen sind sich durch lineare Operatoren beschreibbar:

- Ein Operator $O(\cdot)$ heißt linear, wenn für Funktionen f und g sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ die Homogenität und Additivität gelten:
 - Homogenität: $O(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot O(f)$
 - Additivität: $O(f + g) = O(f) + O(g)$
- Daraus folgt:
 - 1) ein linearer Operator ist unabhängig von den Funktionswerten
 - 2) ein linearer Operator kann nur die gewichtete Summe aller Funktionswerte sein kann

Lineare Operatoren (2)

Damit ist jeder lineare Operator als lineares Gleichungssystem formulierbar:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}^T$$

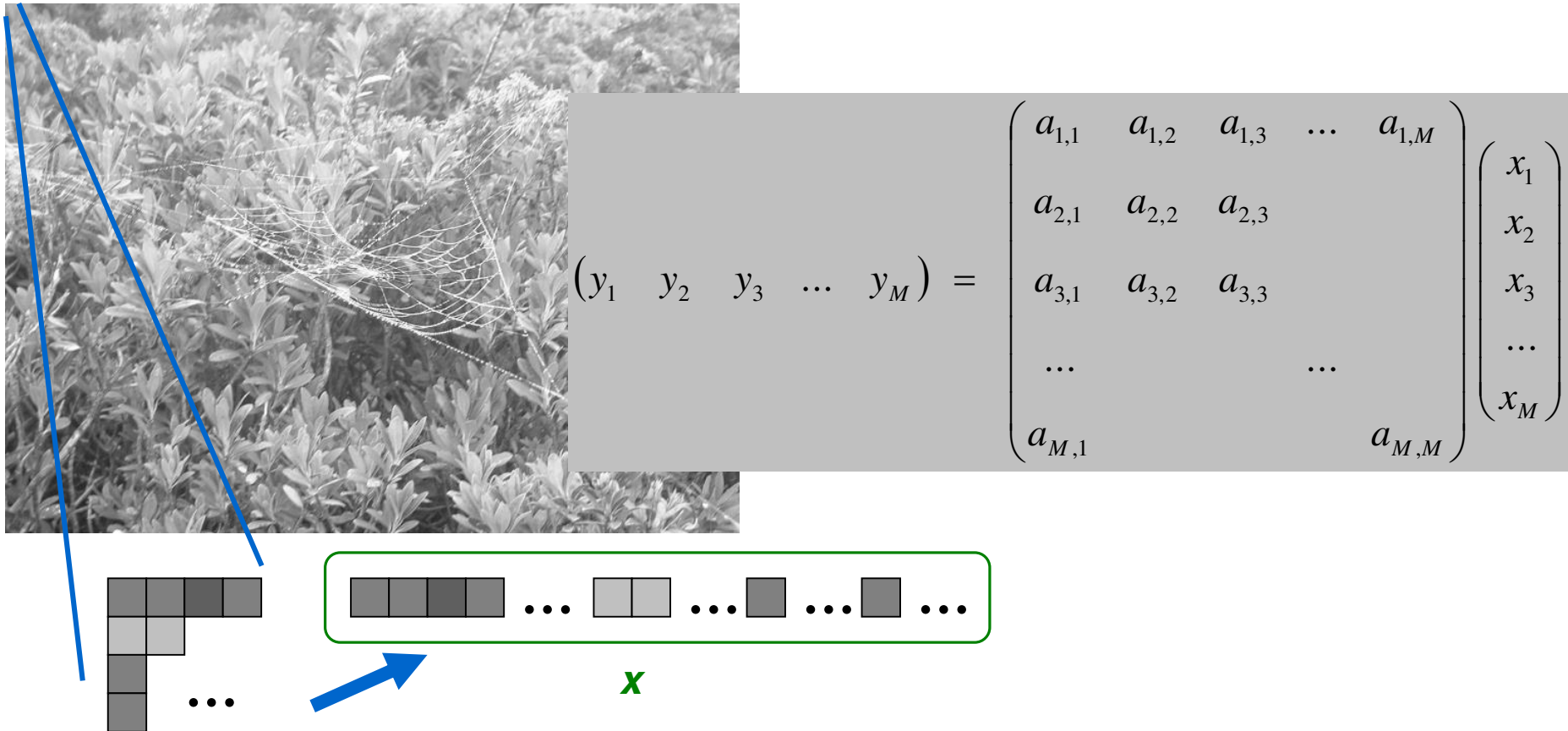
mit

- 1) Vektor \mathbf{x} der hintereinander geschriebenen Pixel des **ungestörten Bildes**
 - 2) Vektor \mathbf{y} der hintereinander geschriebenen Pixel des **gestörten Bildes**
 - 3) quadratischer Matrix \mathbf{A} , welche die **Störung** kodiert
- eine durch einen linearen Operator beschreibbare **Störung** ist **invertierbar**, wenn die Determinante von \mathbf{A} von Null verschieden ist

Lineare Operatoren (3)

Damit ist jeder lineare Operator als lineares Gleichungssystem formulierbar:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}^T .$$



Verschiebungsinvariante, lineare Operatoren (1)

- Bei linearen *verschiebungsinvarianten* Operatoren $O(\cdot)$ sind die Operatorergebnisse zusätzlich vom Ort der Operatoranwendung unabhängig:

$$O(S_{s,t}(f)) = S_{s,t}(O(f))$$

für Verschiebung $S_{s,t}$ mit $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$. M.a.W.: verschieben wir ein Bild, ist das Ausgabebild identisch (mit Ausnahme der Verschiebung).

- Viele Einflüsse bei der Bildaufnahme sind unabhängig vom Ort der Pixel im Bild und daher durch verschiebungsinvariante, lineare Operatoren beschreibbar.

Beispiele:

- 1) gleichmäßige Bildunschärfe durch Defokussierung
- 2) gleichmäßige Bildunschärfe durch Kamerabewegung
(Bewegungsunschärfe)

Verschiebungsinvariante, lineare Operatoren (2)

Ein weiterer Vorteil:

- Ein verschiebungsinvarianter, lineare Operator ist auch dann bestimmbar, wenn die Ursache des Einflusses nicht bekannt ist
- Daher sind verschiebungsinvariante, lineare Operatoren für die Modellierung bzw. Beseitigung von Störungen sehr attraktiv

Konvolution

Verschiebungsinvariante, lineare Operatoren werden durch die **Konvolution** oder **Faltung** operationalisiert:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{u \in \mathbf{D}} \sum_{v \in \mathbf{D}} f(u, v) \cdot g(x-u, y-v)$$

mit Menge \mathbf{D} von ganzzahligen Verschiebungsvektoren (u, v)

- Funktion f heißt **Konvolutionsfunktion** oder **Faltungsfunktion**
- Darstellung der **Konvolution** durch Operatorsymbol „ $*$ “
- **Konvolutionsergebnis** $(f * g)(x, y)$ ist also die gewichtete Summe der **Funktionswerte** $g(x-u, y-v)$ mit den Gewichten der nach (x, y) verschobenen **Konvolutionsfunktion** f

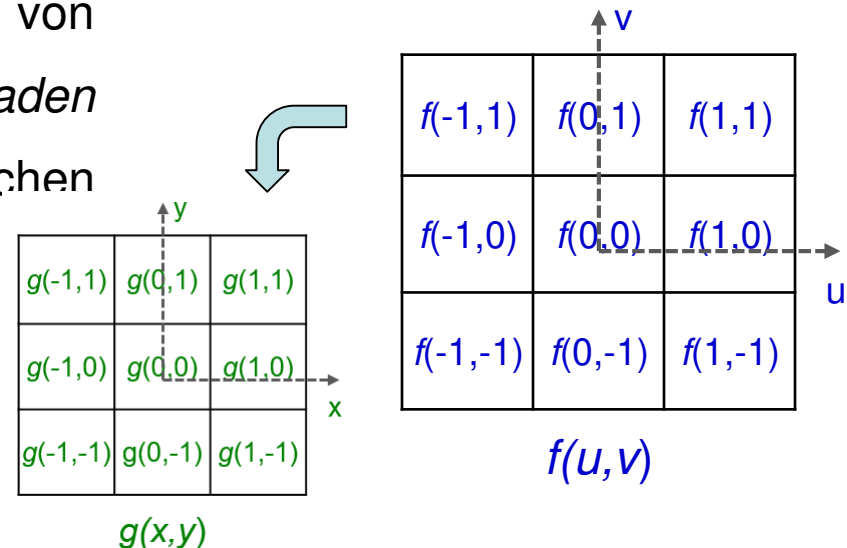
Konvolution im Computersehen

Bei der Anwendung in der Bildverarbeitung

- wird die Konvolution i. A. umgesetzt als

$$(f * g)(x, y) = \sum_u \sum_v f(u, v) \cdot g(x - u, y - v) \text{ mit } u, v = -(m - 1)/2, \dots, (m - 1)/2$$

- steht die Funktion $g(x, y)$ für die Grau- bzw. Intensitätswerte der Bildmatrix
- definieren die Verschiebungsvektoren (u, v) einen begrenzten Argumentbereich der *Konvolutionsfunktion* f von quadratischer Form mit ungeraden und in Null zentrierten Wertebereichen (im Bspl. für $m = 3$)



Konvolutionsmaske

Die diskrete und begrenzte *Konvolutionsfunktion* $f(u,v)$ mit $u,v = -(m-1)/2, \dots, (m-1)/2$ ist also als Matrix von Konvolutions- bzw. Gewichts-werten darstellbar:

- diese werden als *Konvolutions-* bzw. *Faltungsmasken* oder *Konvolutions-* bzw. *Faltungskerne* bezeichnet
- der Parameter m wird als *Größe der Konvolutionsmaske* bezeichnet

Das Beispiel zeigt eine Konvolutionsmaske der Größe $m = 3$ mit den ganzzahligen Argumentwerten -1, 0, 1 für u und v

$f(-1,1)$	$f(0,1)$	$f(1,1)$
$f(-1,0)$	$f(0,0)$	$f(1,0)$
$f(-1,-1)$	$f(0,-1)$	$f(1,-1)$

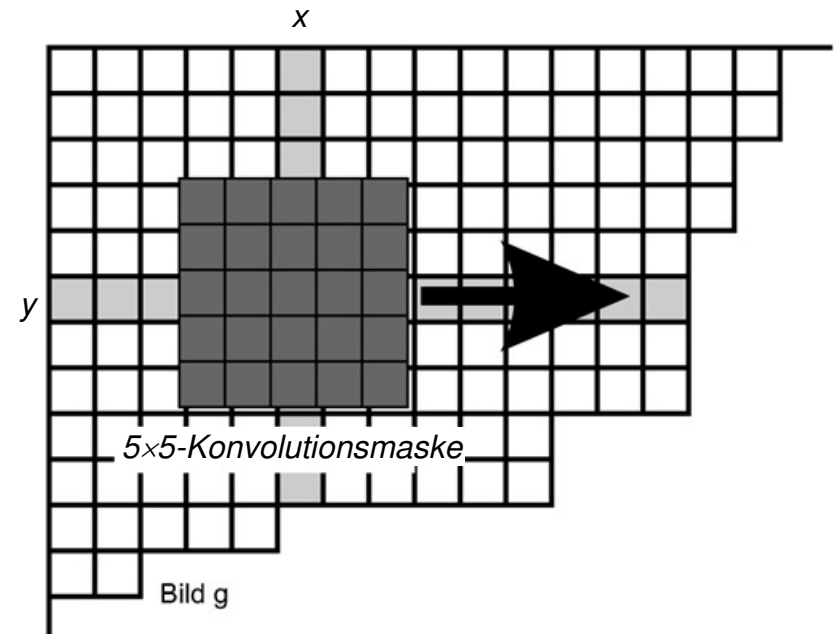
$f(u,v)$

Anwendung der Konvolution

- Die Konvolution $(f * g)(x,y)$ wird i. A. über zwei geschachtelte Schleifen (engl. *nested loops*) auf alle Pixel eines Bildes angewendet:

```
for (int x = 0; x < height; x++) {  
    for (int y = 0; y < width; y++) { ...
```

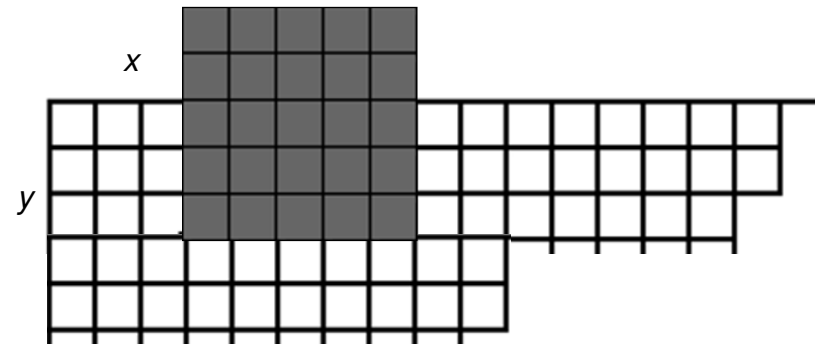
- Für jedes Pixel (x,y) mit Grauwert $g(x,y)$ wird das **Konvolutions-ergebnis** $(f * g)(x,y)$ ermittelt *
- Das Bspl. zeigt eine Konvolutionsmaske der Größe $m = 5$



* Die Ergebnisse $(f * g)(x,y)$ werden i.A. in separates Ausgabebild geschrieben

Randbehandlung bei der Konvolution

- Die naive Anwendung der Konvolution $(f * g)(x,y)$ führt an den Bildrändern zu undefinierten Intensitätswerten jenseits der Bildränder
- Vier gängige heuristische Lösungen:
 - 1) Speziallösungen für Randpixel, die nur die definierten Anteile der Konvolution nutzen
 - 2) Erweiterung der Bilder durch Kopieren der Randwerte jenseits der Ränder
 - 3) Erweiterung der Bilder durch Spiegelung der Randwerte jenseits der Ränder
 - 4) Vernachlässigung der Randpixel, die zu Ergebnisbildern führt, die in Höhe und Breite um die Größe der Konvolutionsmaske verkleinert sind



Nach Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Eigenschaften der Konvolution

Neben Linearität und Verschiebungsinvarianz gilt für die Konvolution:

- 1) die Kommutativität: $[f_1 * f_2](x,y) = [f_2 * f_1](x,y)$,
- 2) die Assoziativität: $f_1 * ([f_2 * f_3](x,y)) = [f_1 * f_2](f_3(x,y))$

für Operatoren f_1, f_2, f_3 .

Die Assoziativität ermöglicht effiziente Ausführung: anstelle von mehreren sukzessive auszuführenden Konvolutionen f_1, f_2, \dots, f_k auf ein Bild $I = [I(x,y)]$ kann ein Operator $f = f_1 * f_2 * \dots * f_k$ erzeugt werden und auf Bild I angewandt werden.

Beispl. für determin. Einfluss (1)

Störungen durch **Bewegungsunschärfe** entstehen, wenn die Kamera während der Belichtungszeit relativ zur beobachteten Szene bewegt wird.

Beispiel: eine ungestörte Aufnahme im Vergleich zu einer Aufnahme, bei der die Kamera in einem Winkel von 25° zur x-Achse des Kamerakoordinatensystems bewegt wurde



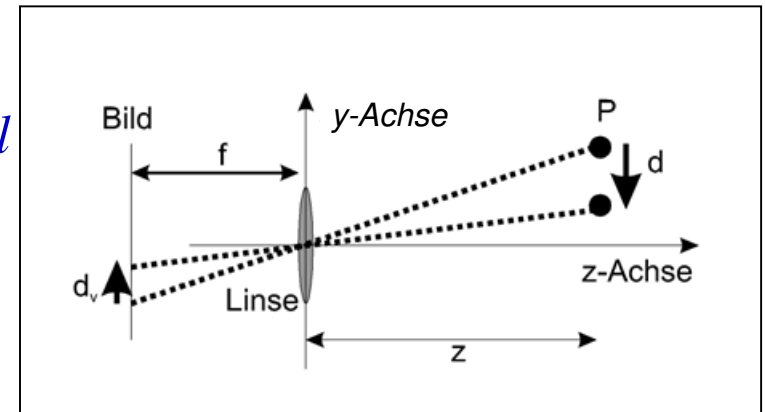
Beispl. für determin. Einfluss (2)

- Annahme: Bildfläche der digitalen Kamera wird für 30 ms belichtet, die Kamera wird in dieser Zeitspanne um $d = 2,5 \text{ cm}$ in y-Richtung verschoben
- Der Einfachheit halber sollen sich alle Szenenobjekte im Abstand $z = 1 \text{ m}$ zum Linsenzentrum befinden. Die Brennweite der Linse betrage $f = 8 \text{ mm}$. Die Pixelgröße sei $0,04 \text{ mm} \times 0,04 \text{ mm}$.
- Es folgt eine Bewegungsunschärfe durch die Verschiebung d_v (s. Abb.):

$$\text{Aus } \frac{d_v}{d} = \frac{f}{z} \text{ folgt:}$$

$$d_v = d \cdot \frac{f}{z} = 25 \cdot \frac{8}{10^3} = 0,2 \text{ mm} = 5 \text{ Pixel}$$

- dieselbe Lichtenergie, die ohne Verschiebung auf ein Pixel fiel, wird nun auf 5 Pixel verteilt



Nach Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Beispl. für determin. Einfluss (3)

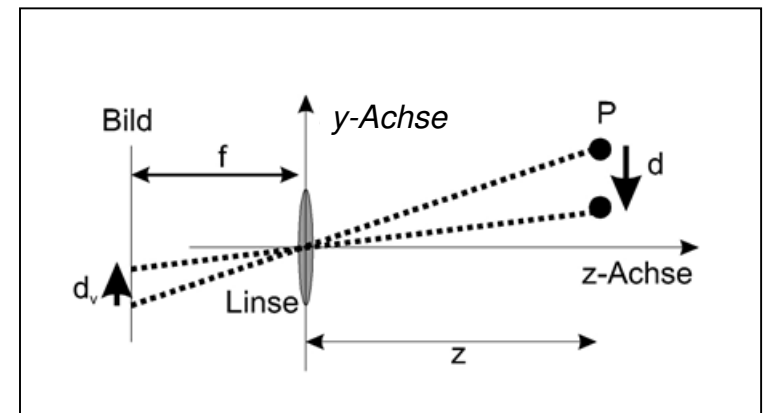
Die Verteilung der Lichtenergie eines Pixels auf 5 Pixel in y-Richtung führt zu folg. Konvolutionsfunktion als Modell dieser Störung einer Bewegungsunschärfe:

$$f(u, v) = \begin{cases} 0,2 & \text{für } -2 \leq v \leq 2 \quad \wedge \quad u = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $m = 5$ und $u, v = -(m-1)/2, \dots, (m-1)/2$

bzw.

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

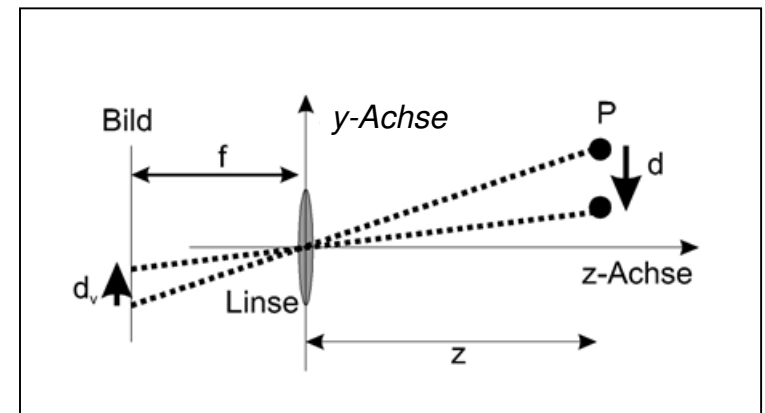


Nach Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Beispl. für determin. Einfluss (4)

- Die Funktion gilt aber auch approximativ für Szenenpunkte, die geringfügig kleinere oder größere Abstände als 1 m zur Kamera aufweisen
- Damit sind Bewegungsunschärfen für Szenarien mit kleinen Distanzunterschiede zwischen den abgebildeten Szeneobjekten modellierbar
- Zur Unterdrückung von (Bewegungs)-Unschärfen wird die **inverse Filterung** durch das **Wiener-Filter** umgesetzt, das den Fehler zwischen ungestörtem und gestörtem Bild minimiert

~ K. Tönnies: *Grundlagen der Bildverarbeitung*, 121ff, Pearson Studium, 2005. R. Gonzales, R. Woods: *Digital Image Processing*, 3rd Ed., 351 ff., Pearson Education, 2008



Nach Klaus Tönnies: *Grundlagen der Bildverarbeitung*, Pearson Studium, 2005.

Stochastische Einflüsse (1)

- Stochastische Einflüsse sind nicht deterministisch wiederholbar. Sie sind aber über Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreibbar
- Für Kameraaufnahmen ist insbes. das durch **Quantenrauschen** verursachte Bildrauschen von Interesse
- Prinzipiell wird eine **geradlinige Ausbreitung von Photonen entspr. der Strahlenoptik** angenommen
- **Quanteneffekte** bedingen eine teilweise Streuung von Photonen, die dann nicht an „der richtigen Stelle“ der Bildfläche auftreffen
- Dieser Effekt wird probabilistisch durch W'-verteilungen beschrieben



Bildquelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Image_noise (24/10/2011)

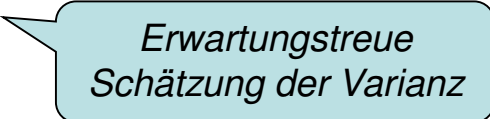
Stochastische Einflüsse (2)

- Das **Photonenrauschen** rührt i.W. aus Poisson-verteiltem Quantenrauschen und ist für hohe Photonenzahlen **durch eine Gauß-Verteilung approximierbar**
- Die Aufnahme eines Bildes $I = [I(x,y)]$ wird als **additiver Überlagerungsprozess** von einem **Signal** und **Rauschen** modelliert:
 - **Signal I_u = regulär verhaltende Photonen**
 - **Rauschen η = zufallsverteilte Störung**
- Damit gilt für die resultierende Intensität $I(x,y)$ an einer Bildkoordinate (x,y) :
$$I(x,y) = I_u(x,y) + \eta(x,y)$$
mit **$\eta(x,y)$** = Gaußsche Normalverteilung mit Erwartungswert Null

Stochastische Einflüsse (4)

Die *Schätzung* des normalverteilten Rauscheinflusses erfolgt durch Bestimmung der *Varianz* σ^2 und basiert auf einer hinreichend großen Zahl von Stichproben mit bekanntem Erwartungswert:

Man nehme einen *homogenen Bildbereich* B mit Pixeln p . Deren ungestörter Intensitätswert sei $I_u(p) = I'$. Die Varianz σ^2 ist dann schätzbar durch die *korrigierte Stichprobenvarianz*

$$\sigma^2 = \frac{1}{|B|-1} \cdot \sum_{p \in B} (I(p) - I')^2$$


Erwartungstreue
Schätzung der Varianz

Dieser Wert wird für das gesamte Bild benutzt unter der Annahme, dass das Rauschen dieselbe Charakteristik über das gesamte Bild zeigt.

Stochastische Einflüsse (5)

Das Verhältnis zwischen Signalstärke und durchschnittl. Stärke des Rauschens wird als **Signal-Rausch-Verhältnis** (engl. **signal-to-noise ratio (SNR)**) bezeichnet.

Das SNR ist bei geg. Varianz σ^2 wie folgt bestimmbar:

Ist der Bildinhalt unbekannt,

- wird das Hintergrundsignal mit Null und das maximale Signal durch den höchsten im Bild auftretenden Intensitätswert $I_{\text{max_given}}$ geschätzt:

$$\text{SNR}_{\text{max}}(I) = I_{\text{max_given}}/\sigma$$

- Alternativ ist der mittlere Intensitätswert als Signalschätzung nutzbar:

$$\text{SNR}_{\text{avg}}(I) = (1/S \cdot Z) \sum_{x=0, \dots, S-1} \sum_{y=0, \dots, Z-1} I(x,y)/\sigma$$

Stochastische Einflüsse (6)

Das Verhältnis zwischen Signalstärke und durchschnittl. Stärke des Rauschens wird als Signal-Rausch-Verhältnis (engl. signal-to-noise ratio (SNR)) bezeichnet.

Das SNR ist bei geg. Varianz σ^2 wie folgt bestimmbar:

- Ist der Bildinhalt bekannt und damit das tatsächliche Signal (abgebildete relevante Objekte) vom tatsächl. Hintergrund unterscheidbar, kann für SNR_{OB} (**O**bject/**B**ackground) im Zähler der tatsächliche Abstand (Betrag) zw. gemittelten Signal und gemittelten Hintergrund stehen.

Stochastische Einflüsse (7)

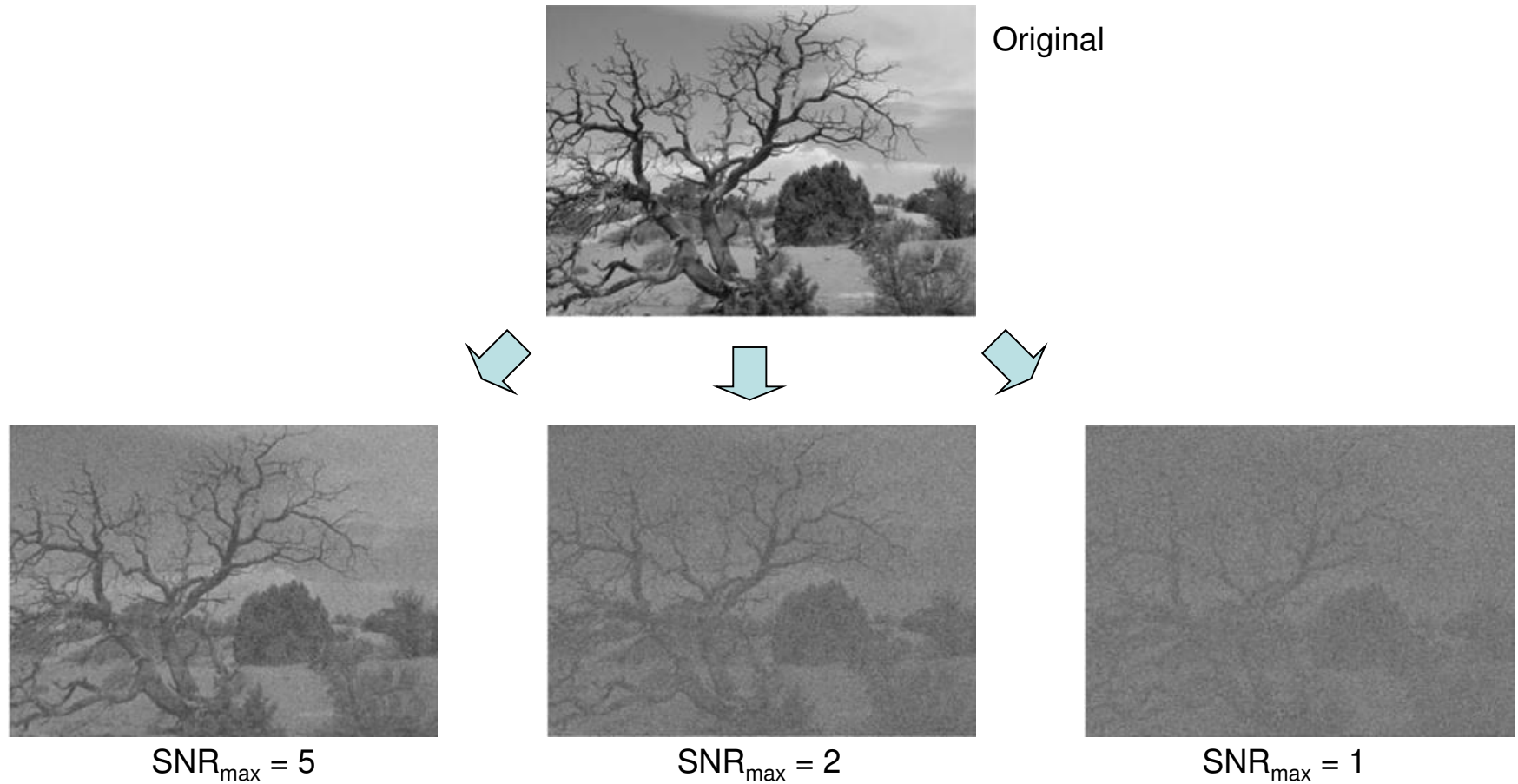
Die dargestellten SNR-Varianten machen deutlich:

Bei der Nennung eines SNR-Wertes muss dessen Herleitung genau spezifiziert werden.

Da die Objekt- bzw. Signalpixel nicht die hellsten Intensitäten zeigen müssen, kann z.B. SNR_{OB} erheblich von SNR_{max} oder SNR_{avg} abweichen.

Stochastische Einflüsse (7)

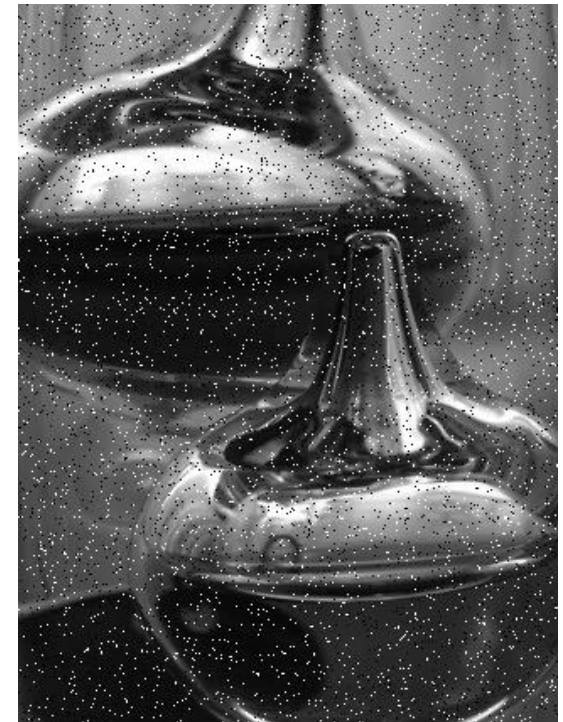
Beispiel: normalverteiltes Rauschen mit unterschiedlich hohem SNR_{\max} :



Bilderquelle: Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Stochastische Einflüsse (8)

- Ggf. sind die zugrunde liegenden stochast. Störeinflüsse nicht durch das Gauß-verteilte Rauschmodell beschreibbar
- Ein Beispiel dafür ist das *Impulsrauschen* (engl. *salt-and-pepper noise*)

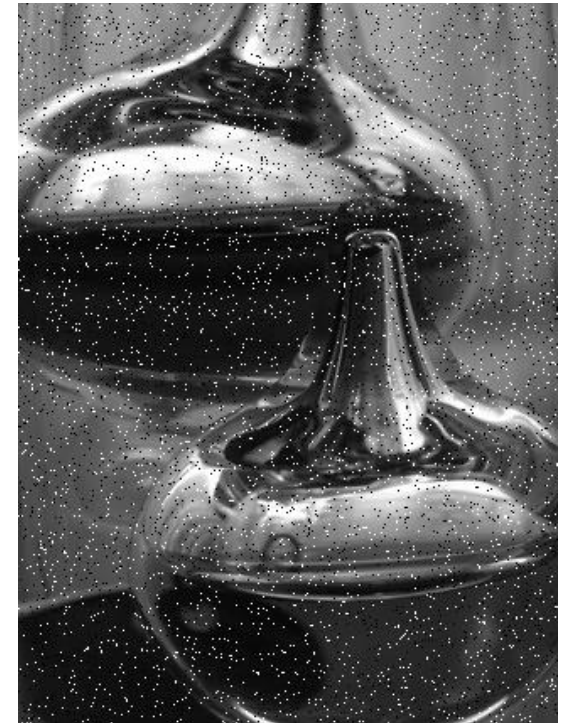


Bildquelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Image_noise (26/10/2011)

Stochastische Einflüsse (9)

Impulsrauschen zeigt drei Eigenschaften:

- 1) die Veränderung der Intensitätswerte ist entweder max. positiv (hellster Grauwert 255 = „Salz“) oder max. negativ (dunkelster Grauwert 0 = „Pfeffer“)
- 2) nur wenige Pixel (z.B. 5%) sind gestört
- 3) in der lokalen Umgebung eines gestörten Pixels sind meist keine anderen Pixel gestört

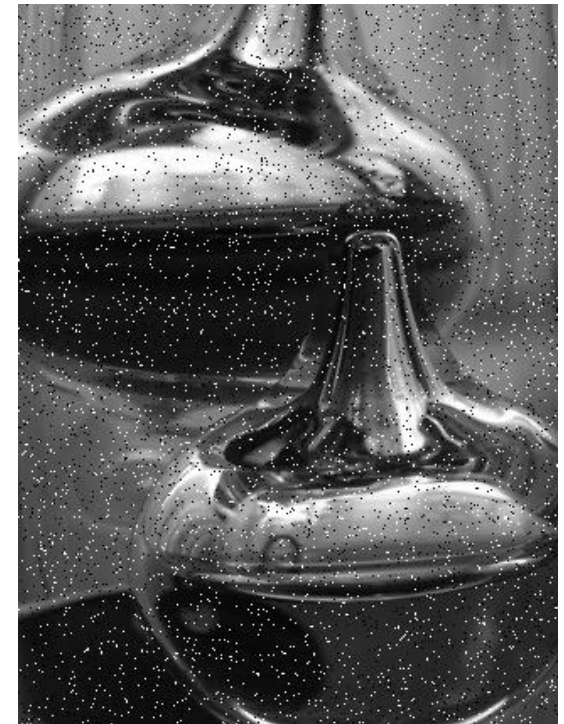


Bildquelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Image_noise (26/10/2011)

Stochastische Einflüsse (10)

Modellierung von *Impulsrauschen* :

- Die geringe Zahl gestörter Pixel und die Lokalität der Störung macht die räumliche Korrelation schwer modellierbar, da diese eine summarische Betrachtung der Intensitätswerte in Abhängigkeit von den Abständen zwischen den Pixeln verlangt
- Dennoch werden wir bald ein Filter zur Unterdrückung des Impulsrauschens kennen lernen



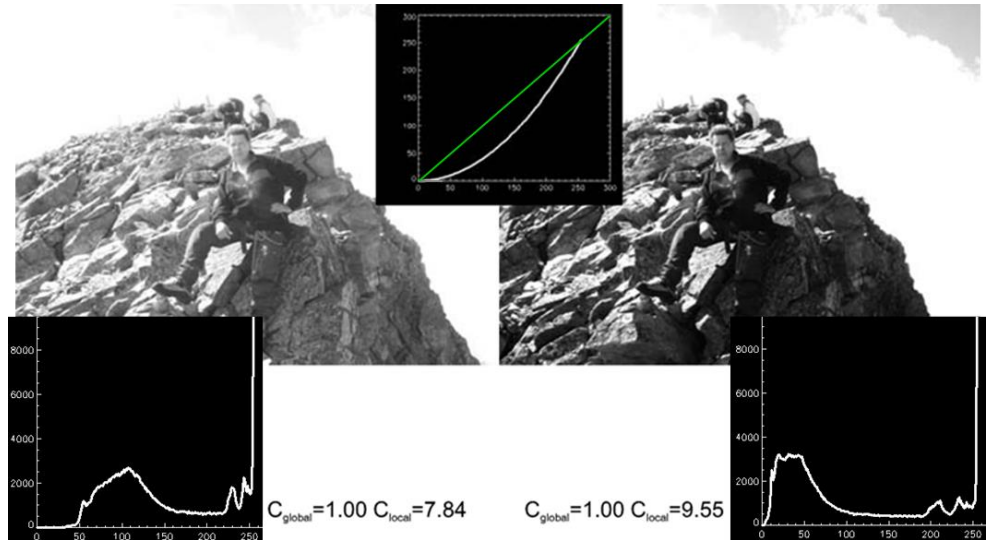
Bildquelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Image_noise (26/10/2011)

Histogrammbasierte Verfahren vs. Lineare Filter

Die erste Vorlesung zeigte histogrammbasierte Verfahren zur Bildverbesserung. Diese berücksichtigen nicht die räumliche Verteilung der Intensitätswerte im Bild.

So sind für eine Verbesserung des lokalen Kontrastes C_{local} eigentlich die lokalen Pixelnachbarschaften zu berücksichtigen.

Nur indirekt konnte C_{local} mit Hilfe der Gamma-Korrektur oder der adaptiven Histogrammlinearisation verbessert werden.



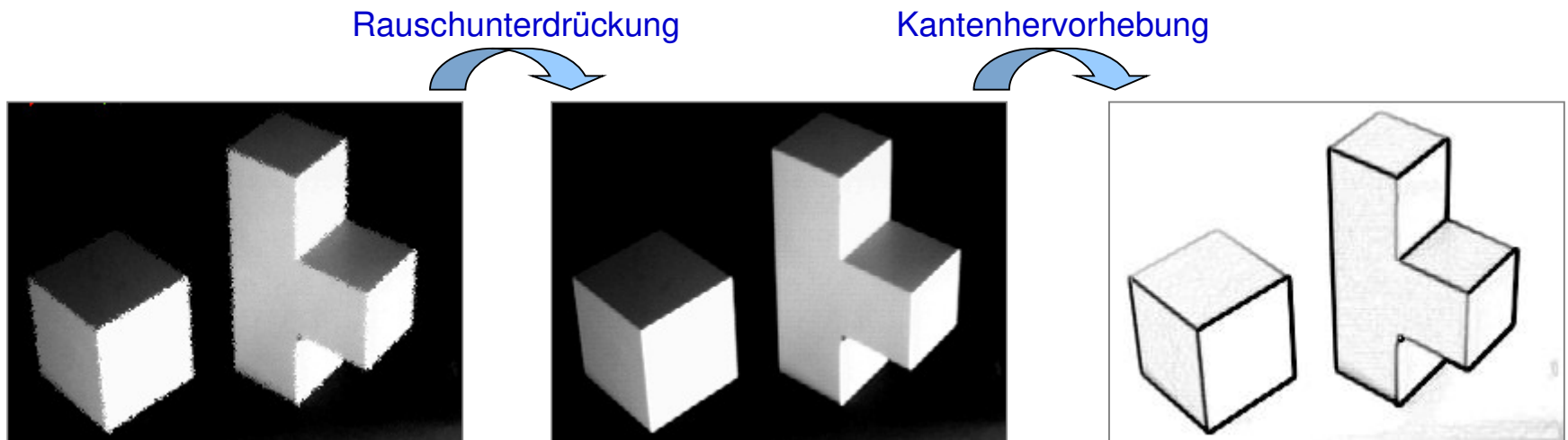
Bilderquelle: K. Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005

Die Konvolution kann hingegen Pixel in Abhängigkeit von ihrer lokalen Pixelnachbarschaft verändern. Damit sind lokale Bildverbesserungen möglich.

Lineare Filter (1)

Zwei Arten der Bildverbesserung sind durch Konvolution durchführbar:

- 1) durch **Rauschunterdrückung** (auch als **Glättung** bezeichnet) kann das Signal gegenüber stochastischem Rauschen verstärkt werden,
- 2) durch **Hervorhebung von Kantenpixeln**, die Grenzen zwischen Objektoberflächen abbilden, werden abgebildete Objekte und ihre Abgrenzungen besser erkennbar und durch anschließende Prozesse leichter erkennbar.



Lineare Filter (2)

Methoden der **Rauschunterdrückung** bzw. **Glättung** müssen die lokalen Pixelnachschaften berücksichtigen, weil Rauschen nur als statistische Eigenschaft einer Menge von Pixel charakterisierbar ist.

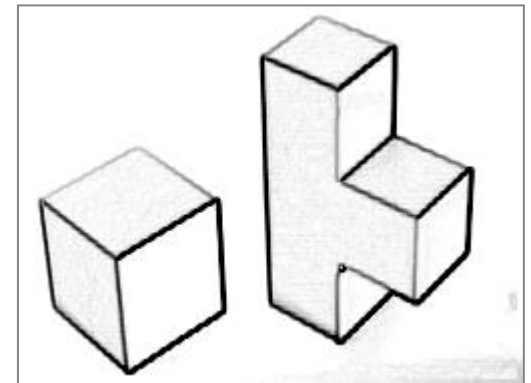
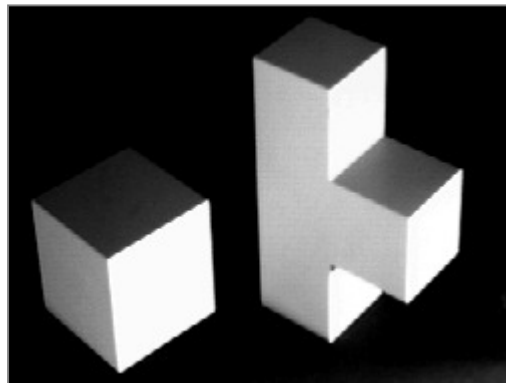
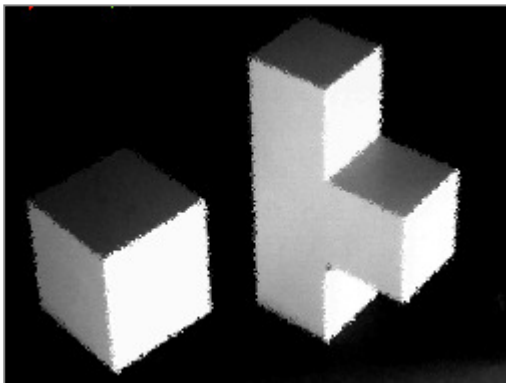
*diese
Vorlesung*

Methoden der **Kantenhervorhebung** benötigen die Information aus lokalen Pixelnachschaften, weil Kanten sich nur durch den Vergleich zwischen den Intensitäten benachbarter Pixel herausbilden.

*nächste
Vorlesung*

Rauschunterdrückung

Kantenhervorhebung



Lineare Filter zur Glättung (1)

Das erste einfache Glättungsfilter basiert auf dem additiven Überlagerungsmodell (vgl. Folie 20):

ein verrauschtes Bild $I = [I(x,y)]$ zeigt resultierende Intensitäten $I(x,y)$ nach

$$I(x,y) = I_u(x,y) + \eta(x,y)$$

mit:

Signal I_u = ungestörtes Signal

Rauschen η = zufallsverteilte Störung

Lineare Filter zur Glättung (2)

- Bei diesem additiven Überlagerungsmodell

$$I(x,y) = I_u(x,y) + \eta(x,y)$$

wurde die W'keit einer Abweichung des gemessenen Intensitätswertes vom ungestörten Intensitätswert $I_u(x,y)$ durch eine **Gaußsche Normalverteilung mit Erwartungswert Null** modelliert: $E(\eta(x,y)) = 0$

- Nun gilt: mit **steigender Stichprobenzahl** ergibt sich eine zunehmend bessere Schätzung des Erwartungswertes für das Rauschen η

Lineare Filter zur Glättung (3)

Ausgangspunkt also: Mit steigender Stichprobenzahl ergibt sich eine zunehmend bessere Schätzung des Erwartungswertes für das Rauschen η

Dies ist zur Rauschunterdrückung wie folgt nutzbar:

- der Erwartungswert der **ungestört. Intensitätsfunktion** $I_u(x,y)$ ist konstant:

$$E(I_u(x,y)) = I_u(x,y)$$

*Erwartungswert der
Störung ist Null*

→ damit gilt:

$$E(I(x,y)) = E(I_u(x,y)) + E(\eta(x,y)) = E(I_u(x,y)) = I_u(x,y)$$

→ das ist Problem gelöst, sobald eine gute Schätzung für $E(I(x,y))$ vorliegt!

Lineare Filter zur Glättung (4)

Eine gute Schätzung für $E(I(x,y))$ wäre wie folgt ableitbar:

- 1) generiere eine Folge von k Bildern I_0, \dots, I_{k-1} derselben Szene
- 2) schätze $E(I(x,y))$ über das aus der Folge gemittelte Bild

→ Also wäre das ungestörte Bild ableitbar durch eine Konvolution entlang der Zeitachse mit dem Konvolutionskern $f = (1/k, \dots, 1/k)$

Die Summe der Gewichtselemente des Konvolutionskerns ergibt 1. Diese Eigenschaft gilt für alle Konvolutionskerne zur Rauschunterdrückung!!!

Der Grund: es geht ja um die Schätzung von $E(I(x,y))$. Jede von 1 verschiedene Gewichtssumme würde eine Skalierung der Intensitäten der Bildfunktion ergeben.

Lineare Filter zur Glättung (5)

Die Mittelung über eine Folge von Einzelbildern ist i.A. nicht praktikabel.

Daher wird von $E(I(x,y))$ wie folgt geschätzt:

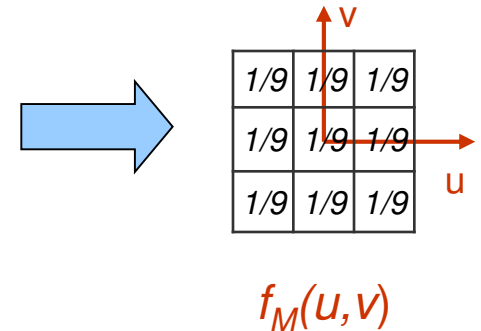
- 1) wir nehmen an, dass die Werte der ungestörten Bildfunktion $I_u(x,y)$ in einer lokalen Nachbarschaft jedes Pixels konstant ist
- 2) statt über eine Bildfolge wird $E(I(x,y))$ nun durch Mittelung über die Intensitätswerte innerhalb der lokalen Nachbarschaft geschätzt

Mittelwertfilter (1)

Der einfachste Konvolutionskern hierfür definiert das sog. *Mittelwertfilter* (engl. *boxcar filter* oder *shifted mean filter*).

Für die 3×3-Nachbarschaft hat er folg. Form:

$$f_{M,3}(u,v) = \{(-1, 1) \rightarrow 1/9, (0, 1) \rightarrow 1/9, (1, 1) \rightarrow 1/9, \\ (-1, 0) \rightarrow 1/9, (0, 0) \rightarrow 1/9, (1, 0) \rightarrow 1/9, \\ (-1,-1) \rightarrow 1/9, (0,-1) \rightarrow 1/9, (1,-1) \rightarrow 1/9 \}$$

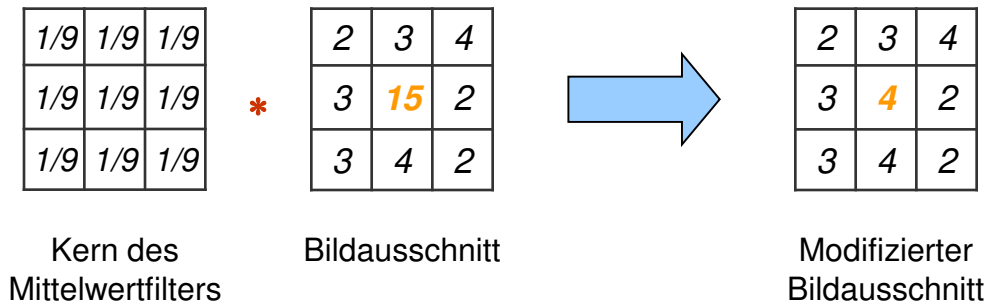


Mittelwertfilter (2)

Die Anwendung des **3×3-Mittelwertfilters** bzw. des **Mittelwertfilters der Größe 3** auf ein Pixel und seine 8-Nachbarschaft über die Konvolution nach

$$(f_{M,3} * g)(x,y) = \sum_u \sum_v f_{M,3}(u,v) \cdot g(x-u,y-v) \text{ mit } u,v = -1, 0, 1$$

am Beispiel:



Bemerkung: aus Effizienzgründen erfolgt die Implementierung i.A. so, dass alle neun Gewichte auf Eins gesetzt werden und die Summe durch 9 dividiert werden:

$$f(u,v) = 1/9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

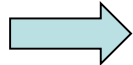
Mittelwertfilter (3)

Die Zuverlässigkeit der Schätzung von $E(I(x,y))$ steigt mit der Anzahl der Pixel, über die gemittelt wird.

Mit einem **Mittelwertfilter der Größe 5** wird z.B. fast über die dreifache Zahl von Pixel gegenüber dem Mittelwertfilter der Größe 3 gemittelt:

<i>1/9</i>	<i>1/9</i>	<i>1/9</i>
<i>1/9</i>	<i>1/9</i>	<i>1/9</i>
<i>1/9</i>	<i>1/9</i>	<i>1/9</i>

Kern des 3×3-Mittelwertfilters



<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>
<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>
<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>
<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>
<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>	<i>0.04</i>

Kern des 5×5-Mittelwertfilters



. . .

Mittelwertfilter (4)

Grenzen des Mittelwertfilters:

Mit zunehmender Größe des Mittelwertfilters wird die Annahme unrealistischer, dass alle Pixel innerhalb der Nachbarschaft denselben ungestörten Intensitätswert $I_u(x,y)$ haben.

Das ist insbes. bei Kanten der Fall. So werden Artefakte bei größer werdenden Filtern immer stärker und die resultierenden Bilder wirken immer unschärfer.

Mittelwertfilter (5)

- Besonders kritisch wird die durch **Mittelwertfilter** resultierende Unschärfe, wenn **Impulsrauschen** bzw. *Salt-and-Pepper-Noise* vorliegt
- Der Erwartungswert des Impulsrauschen ist zwar ebenfalls 0, aber der überwiegende Anteil aller Pixel (z.B. 95%) ist vom Impulsrauschen nicht betroffen
 - Für die Filterung müsste die Umgebungsnachbarschaft sehr groß sein, um genügend positive und negative Impulse zu erfassen, damit ihr Einfluss sich in der Summation aufhebt
 - Damit ist das **Rauschen nicht zu entfernen, ohne dass Kanten im Bild sehr unscharf werden**. Insofern kann praktikabel nur eine Abschwächung, nicht aber eine Unterdrückung des Impulsrauschens erzielt werden (s. Abb.)

Mittelwertfilter (6)

Beispiel für Anwendung von Mittelwertfiltern auf Impulsrauschen:



Bilderquelle: Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Gauß-Filter (1)

Die Anwendung von Mittelwertfiltern führt auch bei Photonenrauschen zu einer Glättung von Bildkanten.

Das Photonenrauschen wurde durch eine Gauß-Verteilung modelliert. Eine optimale Unterdrückung des Photonenrauschens ist demnach durch einen nach einer Gauß-Funktion gewichteten Filter möglich.

Für eine Dimension:

$$f_{G,\sigma}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u^2)/2\sigma^2}.$$

Mit Standardabweichung σ der Gauß-Funktion. Je größer σ , desto stärker die Glättung des Gauß-Filters.

Die zweidimensionale Gauß-Funktion ergibt sich als Produkt zweier eindimensionaler Gauß-Funktionen*:

$$f_{G,\sigma}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}.$$

* siehe D. A. Forsyth, J. Ponce: *Computer Vision – A Modern Approach*. Pearson, 2003, Seite 173.

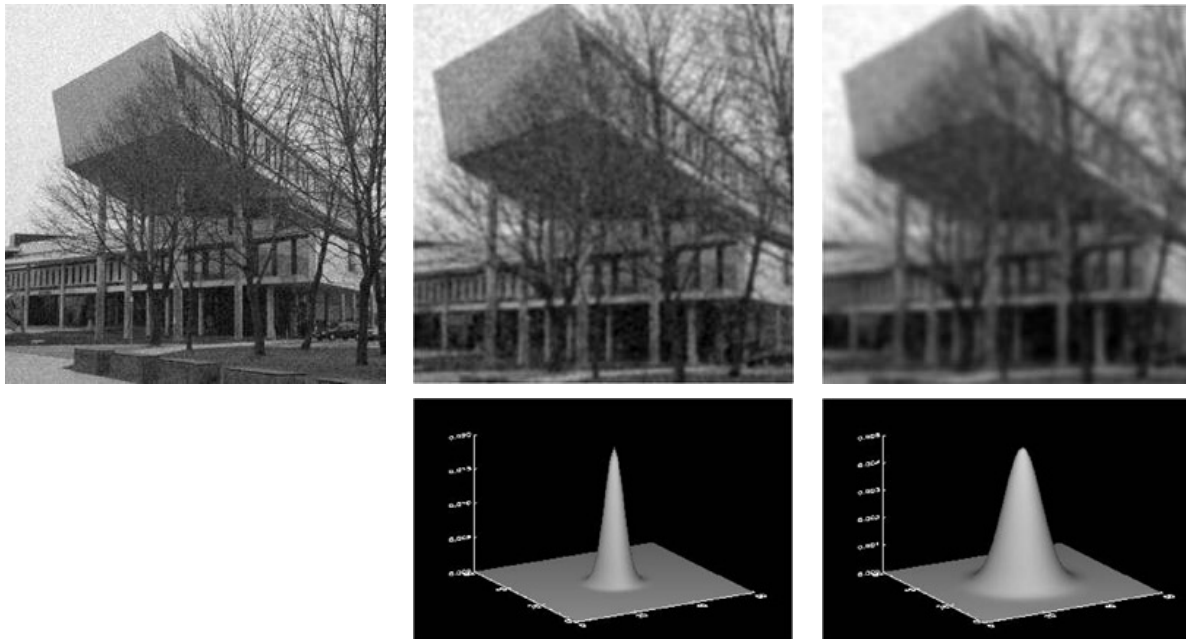
Gauß-Filter (2)

Separierbarkeit des zweidimensionalen Gauß-Filters:

- Die zweidimensionale Gauß-Funktion wurde als Produkt zweier eindimensionaler Gauß-Funktionen erzeugt.
- Analog ist die Konvolution mit dem zweidimensionalen Gauß-Filter durch zwei aufeinander folgende Konvolutionen mit eindimensionalen Gauß-Filtern in Zeilen- und Spaltenrichtung durchführbar.

Gauß-Filter (3)

Beispiel für Anwendung eines Gauß-Filters mit unterschiedl. σ :



Bilderquelle: Klaus Tönnies: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005.

Gauß-Filter (4)

Die Größe des Konvolutionskerns eines Gauß-Filters

- ist so zu wählen, dass die Werte der Gauß-Funktion hinreichend gut approximiert werden*
- ist von der Standardabweichung σ der Gauß-Funktion abhängig

Eine angemessene Filtergröße m ist z.B. $m = 2 \cdot \lceil 3\sigma \rceil + 1$:

- der Funktionswert am Rand des Filterkerns beträgt dann noch 1% des Maximums der Gauß-Funktion
- das Maximum in $f_{G,\sigma}(0,0)$ ist $(2\pi\sigma^2)^{-1}$

* Durch die Diskretisierung wird die Summe i.A. nicht mehr 1 ergeben. Entspr. muss die Gauß-Funktion durch die Summe aller Gewichte normiert werden.

Binomialfilter (1)

Binomialfilter sind sehr gute Approximationen der Gauß-Filter, die effizient mit ganzzahligen Operationen berechnet werden können. Sie heißen so, weil sich ihre Werte aus den Binomialkoeffizienten ergeben.

Binomialfilter werden zunächst als 1-dim. Filter entwickelt und dann auf 2-dim. Filter erweitert. Die *unnormierten* Koeffizienten der *eindimensionalen Binomialfilter B^k der Ordnung k und der Größe $k+1$* werden nach folgender Formel entwickelt:

$$b_i^k = \binom{k}{i}.$$

Also normiert:

$$\begin{aligned} B^1 &= \frac{1}{2} (1 \ 1), & B^2 &= \frac{1}{4} (1 \ 2 \ 1), \\ B^3 &= \frac{1}{8} (1 \ 3 \ 3 \ 1), & B^4 &= \frac{1}{16} (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Für die Filterung sind nur Binomialfilter von gerader Ordnung k brauchbar, da diese eine ungerade Anzahl $k+1$ von Filterkoeffizienten zeigen.

Binomialfilter (2)

Ein quadratisches, 2-dim. Binomialfilter $B^{k,k}$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation der zwei 1-dim. Binomialfilter B^k gleicher Ordnung:

$$B^{k,k} = B^k \times (B^k)^T$$

Für die zweidimensionalen Binomialfilter der Ordnungen 2 und 4:

$$B^{2,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} (1 \quad 2 \quad 1) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{4,4} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{16} (1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1) = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Binomialfilter (3)

Anmerkungen zu den Binomialfiltern

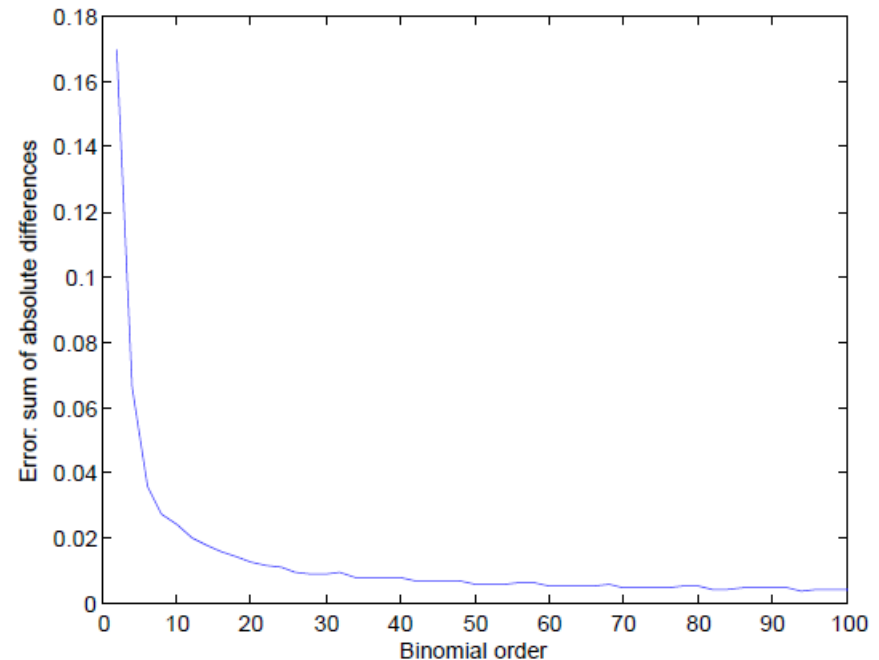
- Per Definition sind auch die zweidimensionalen Binomialfilter $B^{k,k}$ separabel
- Wenn die Ordnung k der Binomialfilter gegen Unendlich geht, ergibt sich das Gauß-Filter

Binomialfilter (4)

Zur approximativen Güte der Binomialfilter:

- Ein Binomialfilter der Ordnung k führt näherungsweise dieselbe Glättung durch wie ein Gauß-Filter mit $\sigma = k^{1/2}/2$.
- Die Approximation der Gauß-Funktion $G_{x,\sigma}$ (bis inkl. 3σ) durch die Binomialfilter B^k zeigt die Fehlerkurve $\sum |G_{x,\sigma} - B^k|$ mit $\sigma = k^{1/2}/2$.

Quelle: K.G. Derpanis: Overview of Binomial Filters. Lecture notes, March 2005, York Univ. (CA).



Binomialfilter (5)

Der Vergleich zwischen Mittelwertfilter und Binomialfilter zeigt, dass die Glättung beim gleichgroßen Binomialfilter nicht so stark ausfällt.

Im Ggs. zum Mittelwertfilter nimmt beim Binomialfilter – wie auch beim Gauß-Filter – der Glättungseffekt mit zunehm. Distanz zum Zentrum des Filterkerns ab.



Mittelwertfilter 5x5



Binomialfilter 5x5

Zusammenfassung

- Deterministische Einflüsse basieren auf wiederholbaren Einwirkungen bei der Bildaufnahme.
- Viele deterministische Einflüsse lassen sich durch lineare Operatoren und insbes. verschiebungsinvariante, lineare Operatoren beschreiben.
- Die Konvolution einer Signalfunktion mit einer Konvolutionsfunktion ist eine verschiebungsinvariante, lineare Operation, die in der Bildverarbeitung zur Rauschunterdrückung und Kantenhervorhebung benutzt wird.
- Bildstörungen durch Rauschen werden als additive Überlagerungen des Signals durch ein stochastisch modelliertes Rausches modelliert.
- Lineare Filterung zur Rauschunterdrückung lässt sich durch verschiedene Filter umsetzen wie Mittelwertfilter, Gauß-Filter und Binomialfilter.

Nachtrag: Agenda der Vorlesung

- Phasen des Computersehens
- Histogrammbasierte Bildverarbeitung
- Lineare Filter
- Nichtlineare Filter
- Histogrammbasierte Segmentierung
- Homogenitätsbasierte Segmentierung
- Diskontinuitätsbasierte Segmentierung
- Modellbasierte Segmentierung
- Fourier-Transformation
- Skalenraum
- Interest Points
- Objekterkennung
- Merkmale
- 3D-Punktwolken
- Tiefe Konvolutionsnetze