Lineare Algebra

BA-INF-021
MB03

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 1

Mathematik hat viel mit logischem Denken zu tun, daher lassen Sie uns langsam starten und die Mathematik als Sprache sprechen, verstehen und schreiben lernen.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Vor Ihnen liegen einige Karten eines Kartenspiels, auf deren Rückseite sich Buchstaben befinden. Sie sehen vor sich einen Herz König, eine Kreuz 7, sowie drei Karten mit den Aufschriften "K" "R" und "A" liegen. Jemand stellt die Hypothese auf, dass sich hinter jedem Vokal eine Bildkarte (also Bube, Dame, König oder Ass) verbirgt. Welche der genannten Karten drehen Sie um, um diese Hypothese mit einer miminalen Anzahl von Kartendrehungen zu überprüfen und warum?

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Mathematische Sätze der Form "x hat die Eigenschaft E" werden durch den Ausdruck $E(x)$ formalisiert. Aussagen der Form "Alle x haben die Eigenschaft E" werden durch den Allquantor $\forall$ formalisiert: $\forall x\, E(x)$. In analoger Weise formalisiert man Aussagen der Form " Es gibt x mit der Eigenschaft E" durch den Existenzquantor durch $\exists x\ E(x)$.

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Wahrheitswerte hin:

(1) $\forall x\ E(x) \iff \neg(\exists x \neg E(x))$
(2) $\exists x\ (E_1(x) \wedge E_2(x)) \implies \exists x\ E_1(x) \wedge \exists x\ E_2(x)$
(3) $\forall x\ (E_1(x) \vee E_2(x)) \implies \exists x\ E_1(x) \wedge \exists x\ E_2(x)$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Finden Sie eine einfache (verbale) Beschreibung der Ihnen sicherlich wohlbekannten Menge:

$$\{\, x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 1 \wedge \forall a \forall b\, (a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \implies (a \cdot b = x \implies (a = 1 \vee b = 1)))\}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie über dem Körper der reellen Zahlen die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \alpha^2 x_1 + (2\alpha^2-4)x_2 + (2\alpha^2+1)x_3 &= \alpha - 10 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (1+1+2 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}_7$ der folgenden Gleichungen. Beachten Sie, dass wir auf dem Zettel 0 bereits in $\mathbb{Z}_2$ gerechnet haben und in der Vorlesung in $\mathbb{Z}_5$, so dass ich das Gefühl habe, dass Sie nun auch den Transfer zu $\mathbb{Z}_7$ hinbekommen:

(a) $2x = 3$
(b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$
(c) $x + 2y = 1$ und $4x + y = 4$

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**.** Bestimmen Sie a) über $\mathbb{R}$ und b) über dem Körper $\mathbb{Z}_{11}$ die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Sie können hier insgesamt **18 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **15 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe bis Freitag, den 14. April, bis 12:00 Uhr in Ihrer eCampus-Gruppe.