Lineare Algebra

BA-INF-021, MB 05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 8

Die erste Aufgabe ist eine Präsenzaufgabe. Sie wird in den Tutorien nach Pfingsten bearbeitet und **nicht abgegeben**.

Präsenzaufgabe. Berechnen Sie für die folgenden linearen Funktionen eine Basis von Bild, Kern und Fix(f).

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ y \\ 3x + z \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathtt{Pol}_5 \to \mathtt{Pol}_5, \quad p \mapsto p'$

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathtt{Pol}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathtt{Pol}_2 \to \mathtt{Pol}_2$, die den angegebenen Bedingungen genügt?

(a) $F_1(x^2 + x) = 3x$ und $F_1(x + 2) = x^2 + 1$

(b) $F_2(x + 1) = 2x + 2$, $F_2(x^2 + 1) = 6x^2 + x + 3$ und $F_2(3x^2 + 2x + 5) = 2x^2 + 4$

(c) $F_3(x^2 + 2x + 1) = x + 1$, $F_3(2x - 4) = x^2 + x$ und $F_3(4x^2 + 10x) = x^2 + 5x + 4$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Für welche Parameter $z \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2z + 4 \\ 47 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ z - 3 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^2$ über den komplexen Zahlen linear unabhängig?

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)**.** Geben Sie jeweils zu folgenden linearen Abbildungen Basen für Kern und Bild an (und begründen Sie):

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad f(x, y) := (x + 3y, 2x);$

(b) $g : \{h \mid h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad g(h) := h(0).$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Basen von $\operatorname{Kern}(f)$ und $\operatorname{Bild}(f)$ an.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**.** Es sei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Für fest gewähltes $a \in \mathbb{R}$ sei $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Vorschrift

$$f_a(e_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \qquad f_a(e_2) := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix} \qquad f_a(e_3) := \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f_a (eindeutig) linear auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden kann.
(b) Geben Sie den Rang von f_a an.
(c) Geben Sie den Defekt von f_a an.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$d : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I, \mathbb{R}); \qquad f \mapsto f'$$

wobei wir mit $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ die Menge der reellwertigen, auf I differenzierbaren Funktionen bezeichnen und diese als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den üblichen Operationen betrachten. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass d eine lineare Abbildung ist. Geben Sie nun eine Basis für den $\operatorname{Kern}(d)$ an!

Sie können hier insgesamt **27 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **24 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 09. Juni, 12:00 Uhr.