Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik VI, Technische Informatik

Prof. Dr. Joachim K. Anlauf

1. Übung für die Vorlesung

Technische Informatik

Wintersemester 2022/2023

Abgabe: Spätestens am Dienstag, 25.10.2022, 8:15 Uhr, auf eCampus in Ihrer jeweiligen Übungsgruppe

Hinweise zur Abgabe: Für diesen und alle zukünftigen Übungszettel gilt:

- Es sind nur eingescannte, handschriftliche Lösungen erlaubt.
- Abgabe möglichst in Dreiergruppen. Die Mitglieder einer Dreiergruppe müssen in derselben Übungsgruppe sein.
- Laden Sie ihre Abgabe bitte rechtzeitig auf unsere eCampus Webseite in Ihrer jeweiligen Übungsgruppe hoch. Spätere Abgaben sind nicht möglich und werden nicht mehr gewertet!

Aufgabe 1. *Mengenlehre* 6 P.

Gegeben sei die Grundmenge $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und die beiden Teilmengen $A = \{1, 2, 3, 5\}$ und $B = \{1, 5, 6\}$. Geben Sie die folgenden Mengen an:

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $A \cap A$
4. $A \cup A$
5. $\overline{A}$
6. $A \setminus B$
7. $B \setminus A$
8. $\overline{(A \cap B)}$
9. $\overline{(A \cup B)}$
10. $A \times B$
11. $A \,\Delta\, B$
12. $\mathcal{P}(B)$

Tipp: $\mathcal{P}(B)$ ist die Potenzmenge von B, $A \setminus B$ ist die Mengendifferenz von A und B und bei $A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ handelt es sich um die symmetrische Differenz von A und B.

Aufgabe 2. *Exponentielle Funktionen und Logarithmus* 7 P.

Für Potenzen bzw. exponentielle Funktionen gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{xy} &= (a^x)^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \\ a^x b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

1. Der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion von $y = b^x$, also $x = \log_b(y)$. Zeigen Sie mithilfe obiger Rechenregeln, dass gilt:

$$\begin{aligned} \log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y) \\ \log_b(x^n) &= n \log_b(x) \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) \\ \log_b\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_b(x) \end{aligned}$$

2. Nehmen Sie an, Ihr Taschenrechner besitzt zur Logarithmusberechnung lediglich den natürlichen Logarithmus. Geben sie eine Formel an, mit der ein Logarithmus zur Basis a in einen Logarithmus zur Basis b umgerechnet werden kann, und beweisen Sie die Formel.

3. Berechnen Sie mit dieser Formel: $\log_2(3.47)$ mit Hilfe des natürlichen Logarithmus.

4. Berechnen Sie den exakten Zahlenwert des folgenden Ausdrucks ohne technische Hilfsmittel:

$$\frac{\log_2(4) + \log_2(9) + \log_2(6)}{\log_2(6)}$$

   Geben Sie Ihren vollständigen Lösungsweg an.

Aufgabe 3. *Vollständige Induktion* 5 P.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion ist wie folgt definiert:

Zu jeder natürlichen Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
Alle Aussagen $A(n)$ mit $n \geq n_0$ sind richtig, wenn man Folgendes beweisen kann:

1. $A(n_0)$ für irgendein kleinstes n_0 ist richtig. (Induktionsanfang)

2. Wenn $A(n)$ für ein beliebiges n richtig ist, dann ist auch $A(n+1)$ richtig. (Induktionsschluss)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ mit $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Was gilt für $q = 1$?

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* 4 P.

Aussage: Wenn sich unter n Kühen eine lila Kuh befindet, dann sind alle Kühe lila.
Dies kann, wie im Folgenden gezeigt, durch vollständige Induktion bewiesen werden:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ (d.h. eine einzige Kuh in der Menge) ist offensichtlich, dass die Aussage erfüllt ist. Als Induktionsvoraussetzung können wir somit annehmen, dass die Aussage für eine Menge von n Kühen wahr ist und folgern nun im Induktionsschluss, dass sie auch für $n+1$ gilt. Angenommen eine Kuh sei lila. Sortieren wir die Kühe derartig um, dass sich die lila Kuh ganz vorne befindet, bilden die ersten n Kühe eine Menge, für die die Aussage per Induktionsannahme wahr ist. Die ersten n Kühe sind somit alle lila. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung nun auf die letzten n Kühe an, so ist sicher, dass mindestens eine Kuh in dieser Menge lila ist, was zu dem Ergebnis führt, dass alle $n + 1$ Kühe lila sein müssen. q.e.d.

Sind Sie nun überzeugt? Falls nicht, worin besteht hier der Fehler?