0

<u>Kardinalitäten</u> abschätzen, # verschiedenen Möglichkeiten

$\binom{n}{k}$ "n über k" $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Formel, <u>Bedeutung</u>:

"Binomialkoeffizient" $(x+y)^n \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k}$

$\Uparrow$

Induktion mit $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$n!$ "n Fakultät" $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

<u>Bedeutung</u>: # Permutationen (Abb.) einer n-elementigen Menge

verschiedener n-Tupel ~~Anordnungen~~ <u>Anordnungen</u>

einer n-elementige Menge

1

2) **Verallgemeinerung:** k-Tupel aus n-Elementen

~~#~~alle Einträge verschieden

\# verschiedener Tupel?

$$\underbrace{(\_\,,\ \_\,,\ \_\,,\ \_\,,\ \ldots,\ \_)}^{k\text{-Stellen}}$$

n Möglichkeiten, $(n-1)$ Möglichkeiten, k-te Stelle $(n-k+1)$ Möglichkeiten

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,\Big|\,\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bei solchen Tupeln Reihenfolge wichtig $(1,2,3) \neq (2,3,1)$

bei Mengen nicht $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$

②

3) Anzahl verschiedener k-elementiger Teilmenge einer n-elementigen Menge

$\frac{n!}{(n-k)!}$ viele verschiedene k-Tupel

k feste Elemente nehmen $\Rightarrow$ $k!$ viele verschiedene Permutationen!

verschiedenen k-elementigen Teilmenge der n-elementigen Mengen

ist $\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ $\leadsto$ Theorem 4.14 Beweis geführt!!

Lotto, $\binom{49}{6}$ viele verschiedene Ziehungen!

Weitere Anwendungen!

I. 2. Beweis $(x+y)^n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underline{x^k y^{n-k}}$

$$(x+y)^n = \underbrace{\overset{1\;2}{(x+y)}\overset{1\;2}{(x+y)}\cdots\overset{1\;2}{(x+y)}}_{n\text{-mal}} \qquad 2^n \text{ viele } \underline{\text{Terme}}$$

Ausmultiplizieren!

Wie oft kommt Term $\underline{x^k y^{n-k}}$ dabei vor? $\underline{k = 0, 1, 2, \ldots, n}$

$$(1)\,(2)\,(3)\;\cdots\;(n) \qquad k \text{ mal } x \text{ Auswahl}$$

$$\Uparrow \quad \Uparrow \quad \cdots \quad \Uparrow$$

k Auswählen

\# Möglichkeiten k Klammern aus n auszuwählen das ist $\binom{n}{k}$

(4)

II. Folgerung: $\binom{n}{k}$ # k-elementige Teilmenge von n-elementiger Menge

$$|M| = n \qquad |\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{!}{=} 2^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

gilt auch für $x = y = 1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

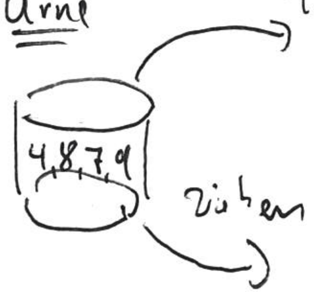
III. Urnen Modelle

Ziehen von Kugeln aus Urne

n Objekte

Urne

ziehen sukzessive



ziehen

k Ziehungen

Tupel $(7, 8, 4)$

Menge $\{4, 7, 8\}$

Zurücklegen $(7, 7, 6)$

$\{7, 7, 8\}$ Multimengen!

+ Beachtung der Reihenfolge
+ Ohne Beachtung der Reihenfolge
+ Zurücklegen mit/ohne

<u>n- Objekte</u> / <u>k- Ziehungen</u>

<u>Frage</u>: # verschiedene mögliche Ergebnisse / Ziehungen

a) <u>ohne Zurücklegen</u>, <u>mit Beachtung der Reihenfolge</u>

Tupel

k- Stelle

$$(\_,\_,\_,\_,\ldots,\_)$$

$\frac{n!}{(n-k)!}$ viele verschiedene solche k-Tupel

Schon betrachtet!

---

b) <u>ohne Zurücklegen</u>, <u>ohne Beachtung der Reihenfolge</u>

Menge

Ziehung einer beliebigen k- elementigen Menge

$\binom{n}{k}$ viele verschiedene Möglichkeiten

6

Tupel

c) mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

$$(\_ , \_ , \_ , \_ , \ldots , \_)$$

$$n \quad n \quad n \quad \ldots \quad n \qquad n^k$$

n^k viele verschiedene Tupel!

Multi Mengen

d) mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Was ist für das Ereignis wichtig?

Variable x_i für jede Ziehung!

~~MA~~ Wie häufig wurde Element i gezogen?

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = k \}$$

$|M|$ viele verschiedene Ergebnisse!

Würfel $\{1,1,1,3,4\}$

$(1,1,3,1,4)$.

$(3,1,1,4,1)$.

$$\begin{array}{cccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

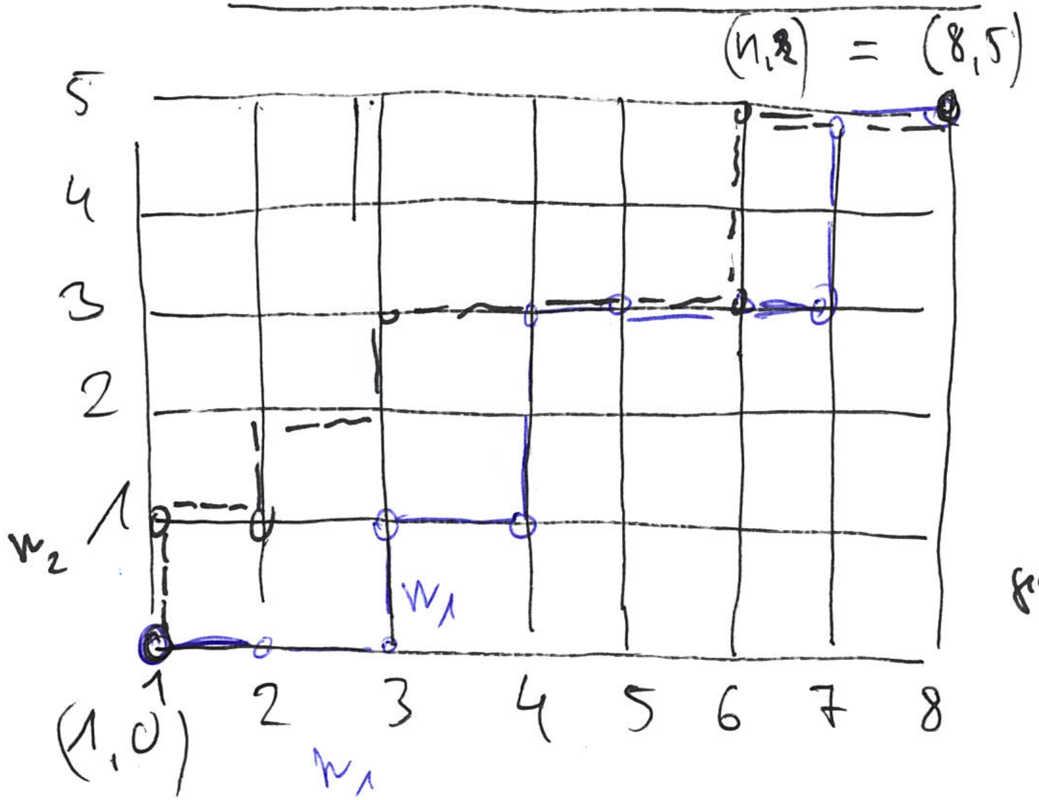
$k = 5 \quad n = 6$

(7)

$n=8$, $r=5$

Darstellung als Weg im Gitter

$(n,r) = (8,5)$



$$
\begin{array}{l}
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\
\underline{w_1} \quad (0, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 0) \\
\underline{w_2} \quad (1, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 0)
\end{array}
$$

r hoch , $n-1$ zur Seite

jeder Weg sieht so aus!

$(r+n-1)$ Schritte

$\Downarrow$

Interpretation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
w_1			X		X	X				X	X	
w_2	X		X		X				X	X		

$\binom{n+r-1}{r}$ viele verschiedene Wege!

n Objekt, k Ziehungen

Zurücklegen / Reihenfolge	Ohne	Mit
Ohne	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
Mit	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Multimengen

Bsp Anwendungen

i) Würfeln klass. 6er Würfel

5 Würfel, 1x werfen

Ergebnis:

Kniffel

3 5er

1 6er

1 1er

$\{5, 5, 6, 5, 1\}$

1 Würfel statt 5 Würfel

$\Uparrow$

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}$

5x Ziehen
mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge, Multimenge V

$$\binom{n+k-1}{k} \qquad n=6 \quad k=5 \qquad \binom{6+5-1}{5} = 252$$

verschiedene Ergebnisse

ii) Lotto 6 aus 49

Aus 49 elementigen Menge 6 Elemente auswählen

$\binom{49}{6}$ verschiedene Ereignisse $\simeq$ 14. Mio

WS 1 Tipp 6 Richtig $\sim \frac{1}{14 \text{ Mio}}$

Mein Tipp: 6 Zahlen gewählt!

Wie wahrscheinlich sind genau 4 Richtige?

$\binom{6}{4}$ verschiedene 4-elementige Teil-Mengen meines Tipps!

$\binom{43}{2}$ verschiedene Möglichkeiten zur Ergänzung (ohne Erfolg)!

(Alle 6 Rausnehmen, 2 Auswählen aus dem Rest)

$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$ viele positive Ereignisse

WS berechnen:

$$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$$

$\binom{49}{6}$ # aller Ereignisse

WS $\approx$ 0.09 %