Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 8. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.
Wir betrachten die Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{2x}{1-x^2}$.

(i) Zeigen Sie, dass f stetig und streng monoton wachsend ist.
(ii) Bestimmen Sie $f(]-1,1[)$ (natürlich mit Begründung!).
(iii) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. Begründen Sie, warum die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(]-1,1[) \to]-1,1[$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.
(iv) Bestimmen Sie f^{-1} explizit.

Lösung:

(i) f stetig: Die Nullstellen des Nenners sind $x = -1$ und $x = 1$. f ist also auf $]-1,1[$ als Komposition stetiger Funktionen stetig.
f streng monoton wachsend: Seien $x, y \in]-1,1[$ mit $x < y$. Wir müssen zeigen, dass dann auch $f(x) < f(y)$ ist. Für alle $x \in]-1,1[$ ist $1 - x^2 > 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: Ist $0 \leq x < y < 1$, so ist $x^2 < y^2 < 1$. Also ist $1 - x^2 > 1 - y^2 > 0$ und somit

$$0 < \frac{1}{1-x^2} < \frac{1}{1-y^2}.$$

Wir haben also wegen $x < y$

$$\frac{2x}{1-x^2} < \frac{2y}{1-x^2} < \frac{2y}{1-y^2}.$$

2. Fall: Ist $x < 0 < y$, so ist auch

$$\frac{2x}{1-x^2} < 0 < \frac{2y}{1-y^2}.$$

3. Fall: Ist $x < y < 0$, so ist $-x > -y > 0$. Nach dem 1. Fall gilt also $f(-x) > f(-y)$. Für alle x ist aber $f(-x) = -f(x)$. Also haben wir $-f(x) = f(-x) > f(-y) = -f(y)$ und somit $f(x) < f(y)$.

(ii) Es ist

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} \frac{2x}{(1-x)(1+x)} = -\infty$$

und
$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{2x}{(1-x)(1+x)} = \infty.$$
f nimmt also beliebig große und beliebig kleine Werte an. Als stetige Funktion nimmt f aber aufgrund des Zwischenwertsatzes auch alle Werte dazwischen an. Es ist also $f(]-1,2[) = \mathbb{R}$.

(iii) Nach (i) ist f streng monoton wachsend und somit injektiv. Nach (ii) ist f surjektiv. Also ist f bijektiv. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Umkehrfunktion einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion ist immer bijektiv.

(iv) Es gelte
$$y = \frac{2x}{1-x^2}.$$
Ist $y=0$, so muss auch $x=0$ sein. Sei also nun $y \neq 0$. Die vorstehende Gleichung ist äquivalent zu
$$y - yx^2 - 2x = 0$$
bzw., da $y \neq 0$,
$$x^2 + \frac{2}{y}x - 1 = 0.$$
Wir erhalten (nach $p-q$-Formel), dass $x = -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2}+1}$ oder $x = -\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2}+1}$ sein muss. Nun ist für $x>0$ auch $y = f(x) > 0$ und für $x<0$ auch $y = f(x) < 0$. Also erhalten wir $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ mit
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2}+1} & \text{, für } y > 0 \\ 0 & \text{, für } y = 0 \\ -\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y^2}+1} & \text{, für } y < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die (vertikalen, horizontalen und schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

(i)
$$f(x) := \frac{x^3+3x^2-2x+2}{x^2+x-2},$$

(ii)
$$g(x) := \frac{2^x + 5\cdot 3^x}{2^x - 4\cdot 3^x}.$$

Lösung:

(i) $x^2 + x - 2 = 0$ gilt genau für $x = 1$ und $x = -2$. Da beides keine Nullstellen von $x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ sind, handelt es sich bei beiden um vertikale Asymptoten. Es ist

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x - 2} = x + 2 + \frac{-2x + 4}{x^2 + x - 2}.$$

Also ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x - 2} - (x+2) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x + 4}{x^2 + x - 2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x - 2} - (x+2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x + 4}{x^2 + x - 2} = 0.$$

Die einzige schräge Asymptote ist also $y = x + 2$. Es gibt keine horizontalen Asymptoten.

(ii) Es ist $2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ genau für $x = \frac{\log 4}{\log \frac{2}{3}}$. Da dies keine Nullstelle des Zählers ist, ist dies die einzige vertikale Asymptote. Weiter ist

$$\frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{2^x - 4 \cdot 3^x} = \frac{3^x}{3^x} \cdot \frac{\frac{2}{3}^x + 5}{\frac{2}{3}^x - 4}.$$

Da $0 < \frac{2}{3} < 1$ ist, ist $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}^x = 0$ und somit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{2^x - 4 \cdot 3^x} = -\frac{5}{4}.$$

Außerdem haben wir

$$\frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{2^x - 4 \cdot 3^x} = \frac{2^x}{2^x} \cdot \frac{1 + 5 \cdot \frac{3}{2}^x}{1 - 4 \cdot \frac{3}{2}^x}.$$

Da $\frac{3}{2} > 1$ ist, ist $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}^x = 0$ und somit

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{2^x - 4 \cdot 3^x} = 1.$$

Wir haben also die beiden horizontalen Asymptoten $y = -\frac{5}{4}$ und $y = 1$. Es gibt keine schrägen Asymptoten.

Aufgabe 3.

Wir definieren die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch:

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \text{ und } \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

(i) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Identitäten gelten:
a) $\sinh(x) + \cosh(x) = \exp(x)$,
b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
c) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
d) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,
e) $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$,
f) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

Bemerkung: Die Funktion sinh heißt *Sinus hyperbolicus*, die Funktion cosh *Cosinus hyperbolicus*. Mittels der letzten beiden Formeln, lassen sich die Werte von Sinus und Cosinus für komplexe Argumente mittels reeller Funktionen berechnen.

(ii) Schreiben Sie die beiden Funktionen sinh und cosh als Potenzreihen um den Entwicklungspunkt 0, d.h. bestimmen Sie reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n), so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ und } \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Lösung:

(i) Seien also im Folgenden $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

a) $\sinh(x) + \cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) + \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) = \exp(x)$

b)

$$\begin{aligned}
& \cosh^2 x - \sinh^2 x \\
= & \frac{1}{4}(\exp(x) + \exp(-x))^2 - \frac{1}{4}(\exp(x) - \exp(-x))^2 \\
= & \frac{1}{4}(\exp(x)^2 + 2\exp(x)\exp(-x) + \exp(-x)^2) \\
& -\frac{1}{4}(\exp(x)^2 - 2\exp(x)\exp(-x) + \exp(-x)^2) \\
= & \exp(x)\exp(-x) = 1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
= & \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))\frac{1}{2}(\exp(y) + \exp(-y)) \\
& +\frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))\frac{1}{2}(\exp(y) - \exp(-y)) \\
= & \frac{1}{4}(\exp(x)\exp(y) + \exp(x)\exp(-y) + \exp(-x)\exp(y) + \exp(-x)\exp(-y)) \\
& +\frac{1}{4}(\exp(x)\exp(y) - \exp(x)\exp(-y) - \exp(-x)\exp(y) + \exp(-x)\exp(-y)) \\
= & \frac{1}{4}(2\exp(x)\exp(y) + 2\exp(-x)\exp(-y)) \\
= & \frac{1}{2}(\exp(x+y) + \exp(-x-y)) \\
= & \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

d) sehr ähnlich zu c)

e)

$$
\begin{aligned}
& \cos(x+iy) \\
= \ & \frac{1}{2}(\exp(i(x+iy)) + \exp(-i(x+iy))) \\
= \ & \frac{1}{2}(\exp(-y+ix) + \exp(y-ix)) \\
= \ & \frac{1}{2}(\exp(-y)\exp(ix) + \exp(y)\exp(-ix)) \\
= \ & \frac{1}{2}(\exp(-y)(\cos(x) + i\sin(x)) + \exp(y)(\cos(-x) + i\sin(-x))) \\
= \ & \frac{1}{2}(\exp(-y)(\cos(x) + i\sin(x)) + \exp(y)(\cos(x) - i\sin(x))) \\
= \ & \cos(x)\frac{1}{2}(\exp(-y) + \exp(y)) + i\sin(x)\frac{1}{2}(\exp(-y) - \exp(y)) \\
= \ & \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

f) Wenn man berücksichtigt, dass $\frac{1}{i} = -i$ ist, so zeigt man dies ähnlich wie e)

(ii) Es ist

$$
\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} - \frac{(-x)^n}{n!}\right).
\end{aligned}
$$

Ist n gerade, so ist $(-x)^n = x^n$ und somit dieser Summand gleich Null. Für ungerade n, ist $(-x)^n = -x^n$ und somit $x^n - (-x)^n = 2x^n$. Da man jede ungerade natürliche Zahl in der Form $2k+1$ schreiben kann, haben wir

$$
\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
$$

Mit ähnlichen Überlegungen erhält man

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}$$