Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 5. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei $a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \text{ ungerade} \end{cases}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{n} z^n$,

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} n(3z)^{2n}$.

Lösung:

(i) Um den Konvergenzradius zu bestimmen, wenden wir das Quotientenkriterium an. Mit $a_n := \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$ betrachten wir also

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} z^{n+1}}{\frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n}\right| \\ &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \cdot \frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3} \, |z| \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \, |z| \\ &= \frac{27n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{1}{3n})}{n^3(1+\frac{1}{n})^3} \, |z| \, . \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{27(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{1}{3n})}{(1+\frac{1}{n})^3} \, |z| = 27|z|.$$

Nach dem Korollar zum Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für $z \in \mathbb{C}$ mit $27|z| < 1$ bzw $|z| < 1/27$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $27|z| > 1$ bzw. $|z| > 1/27$. Der Konvergenzradius ist also gleich $\frac{1}{27}$.

(ii) Ist $|z| \geq \frac{1}{2}$, so ist $(a_{2n}z^{2n})$ keine Nullfolge und somit die Reihe divergent. Es ist für alle z und n

$$|a_n z^n| \leq 2^n \, |z|^n = (2\,|z|)^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(2\,|z|)^n$ konvergiert für $|z| < \frac{1}{2}$ und ist somit eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum a_n z^n$. Der Konvergenzradius ist also gleich $\frac{1}{2}$.

(iii) Auch hier könnte man wieder das Quotientenkriterium anwenden. Wir wollen es aber mit dem Wurzelkriterium versuchen. Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n + 2^{-n}}{n} z^n\right|} \geq \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n} z^n\right|} = \frac{2|z|}{\sqrt[n]{n}}$$

und

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n + 2^{-n}}{n} z^n\right|} \leq \sqrt[n]{\left|\frac{2 \cdot 2^n}{n} z^n\right|} = \frac{2|z|\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ ist, ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n + 2^{-n}}{n} z^n\right|} = 2|z|.$$

Somit ist der Konvergenzradius gleich $\frac{1}{2}$, da die Reihe für $|z| < \frac{1}{2}$ konvergiert und für $|z| > \frac{1}{2}$ divergiert.

(iv) Wir wenden das Quotientenkriterium mit $a_n := n(3z)^{2n}$ an. Es ist also

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)(3z)^{2(n+1)}}{n(3z)^{2n}}\right| \\ &= \frac{n+1}{n}|3z|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 9|z|^2.$$

Die Reihe konvergiert also, wenn $9|z|^2 < 1$ bzw. $|z| < \frac{1}{3}$ ist, und sie divergiert, wenn $9|z|^2 > 1$ bzw. $|z| > \frac{1}{3}$ ist. Der Konvergenzradius ist also gleich $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Reihen konvergieren:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{n^5}$,
Hinweis: Man zeige zunächst, dass $\exp(x) > 1$ für alle positiven x ist.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^2 x)$.

Hinweis: Die obigen Reihen sind nicht alles Potenzreihen!

Lösung:

(i) Wir wenden das Quotientenkriterium an und betrachten deshalb

$$\left| \frac{\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{1}{n}(x-1)^n} \right| = \frac{n}{n+1} |x-1| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x-1|.$$

Die Reihe konvergiert also für $|x-1| < 1$ und divergiert für $|x-1| > 1$. Wir müssen noch schauen, was mit den x ist, für die $|x-1| = 1$ gilt. Für $x = 0$ erhalten wir die nach dem Leibnizkriterium konvergente alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

und für $x = 2$ erhalten wir die als divergent bekannte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

(ii) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Es ist

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \geq 1 + x > 1,$$

falls x positiv ist.

Damit ist klar, dass für $x \geq 0$

$$0 < \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq 1$$

ist. Also ist die Reihe $\sum \frac{1}{n^5}$ eine konvergente Majorante für $\sum \frac{\exp(-nx)}{n^5}$, falls $x \geq 0$ ist. Für $x < 0$ haben wir

$$\left| \frac{\frac{\exp(-(n+1)x)}{(n+1)^5}}{\frac{\exp(-nx)}{n^5}} \right| = \frac{n^5}{(n+1)^5} \cdot \exp(-x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x) > 1.$$

Für $x < 0$ ist die Reihe also nach dem Quotientenkriterium divergent.

(iii) Da $|\cos(n^2 x)| \leq 1$ ist, ist

$$\left| \frac{1}{n^2} \cos(n^2 x) \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert bekanntlich und ist somit eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^2 x)$. Diese Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

(ii) Die Reihe $g(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Tipp zu (i): $1 - |z|^n \leq |1 - z^n| \leq 1 + |z|^n$.
Tipp zu (ii): Das Vergleichskriterium kann hilfreich sein.

Lösung:

(i) Nach Dreiecksungleichung gilt wie im Tipp angegeben $1-|z|^n \leq |1-z^n| \leq 1+|z|^n$. Für $|z| > 1$ ist $\lim_{n\to\infty} |z|^{-n} = 0$ und somit

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z^n|} \geq \frac{|z|^n}{1+|z|^n} = \frac{|z|^n}{|z|^n(|z|^{-n}+1)} = \frac{1}{|z|^{-n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Also ist für $|z| > 1$ die Folge $(\frac{z^n}{1-z^n})$ keine Nullfolge und die Reihe somit divergent.

Ist $|z| < 1$, so ist die Folge $(|z|^n)$ eine Nullfolge und somit existiert ein n_0, so dass $|z|^n < 1/2$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für diese n gilt dann also

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z^n|} \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^n} < \frac{|z|^n}{1-\frac{1}{2}} = 2|z|^n.$$

Die Reihe $\sum 2|z|^n$ ist also eine konvergente Majorante für die Reihe $L(z)$. Also konvergiert diese absolut für $|z| < 1$.

(ii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ beliebig. Wir wollen das Vergleichskriterium auf die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ anwenden.[1] Wir betrachten

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|} = \frac{|z^2-n^2|}{2|z|n^2}.$$

Es ist

$$\frac{|z^2-n^2|}{2|z|n^2} \geq \frac{n^2-|z|^2}{2|z|n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2|z|}$$

und

$$\frac{|z^2-n^2|}{2|z|n^2} \leq \frac{n^2+|z|^2}{2|z|n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2|z|}.$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|} = \frac{1}{2|z|} > 0.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ absolut konvergiert, konvergiert nach dem Vergleichkriterium auch $g(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

[1] Sind a_n und b_n Folgen positiver Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ und ist positiv, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ und ist positiv. Es ist spielt also keine Rolle, welchen der beiden Grenzwerte man im Vergleichskriterium betrachtet.