Kap. I: Zuordnungsprobleme

1. Das Heiratsproblem

Prof. Dr. Petra Mutzel

Abteilung für Computational Analytics

Institut für Informatik 1

Universität Bonn

Übersicht

- Problembeschreibung / Anwendungen
- Algorithmus
- Analyse des Algorithmus
  - Korrektheit des Algorithmus
  - Eigenschaften des Algorithmus
  - Laufzeit des Algorithmus

Das Heiratsproblem

Gegeben

- *n* Männer und *n* Frauen
- Jede Person hat eine nach persönlichen Präferenzen sortierte Liste aller Personen des anderen Geschlechts

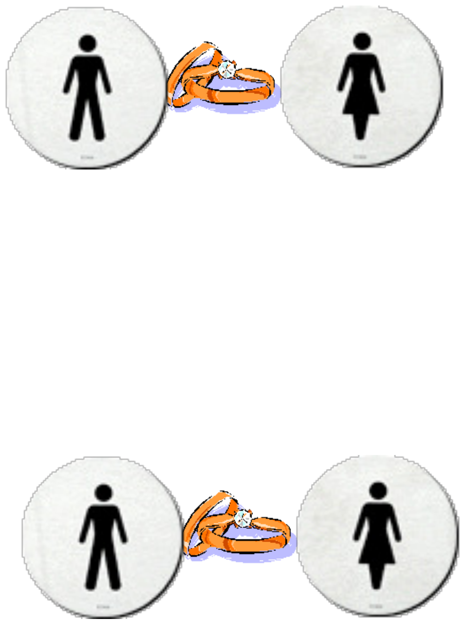
Gesucht

- *Stabile* Paarungen von jeweils einem Mann und einer Frau

Stabile Paarung?

Alfred

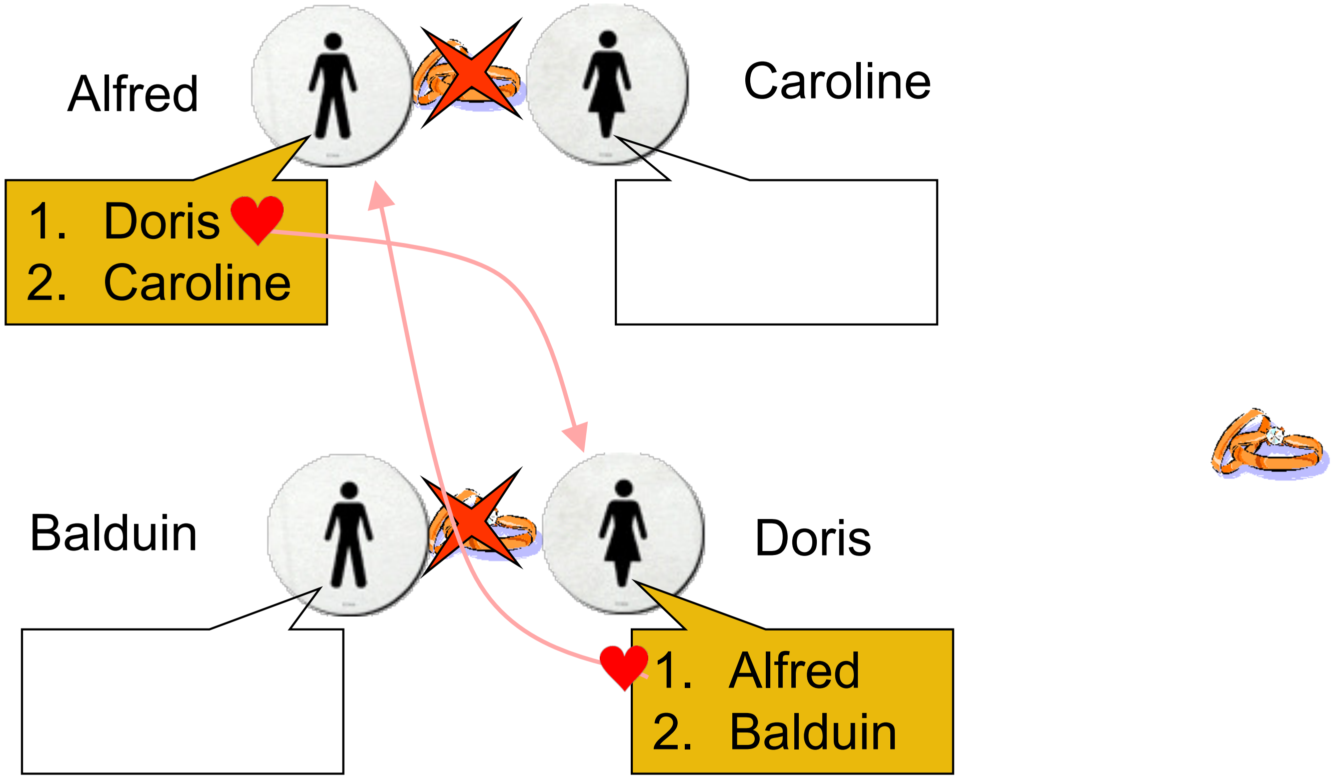
Caroline



Balduin

Doris

Stabile Paarung?



Instabile Paarungen ➔ Es gibt zwei Personen die beide miteinander glücklicher wären als mit ihren zugeordneten Partnern

Fragestellung

- Existiert immer eine stabile Paarung?

- Wie berechnet man eine solche stabile Paarung?

Umfeld & Anwendung

- Umfeld Zuordnungsprobleme
  - *Matching*- und *Assignment*-Probleme

- Anwendungen
  - Zuordnung von Medizinstudierenden zu Krankenhäusern in den USA
  - Zulassungen zu Colleges
  - Zuweisung von Nutzenden zu Servern in einem großen verteilten Internetdienst: Nähe (Nutzende) vs. Kosten (Dienste)

Formale Definitionen

- M = Menge der Männer
- F = Menge der Frauen
- $|M| = |F|$
- Jeder $m \in M$ hat Reihung $<_m$ (Totalordnung) aller Frauen $f \in F$
- Jede $f \in F$ hat Reihung $<_f$ aller Männer
- $m_1 <_f m_2$ bedeutet jeweils: f würde lieber m_1 als m_2 heiraten.

Formale Definitionen ff.

- Eine Paarung ist eine bijektive Abb. $H: M \rightarrow F$.
- Wir schreiben $(m,f) \in H$, $H(m)=f$, $H^{-1}(f)=m$
- Eine Paarung H ist instabil, wenn es $m \in M$ und $f \in F$ gibt, so dass:
  1. $(m,f) \notin H$, d.h. m und f sind nicht verheiratet
  2. m wäre lieber mit f verheirat als mit seiner Frau $H(m)$
  3. f wäre lieber mit m verheiratet als mit ihrem Mann $H^{-1}(f)$
- Eine Paarung ist stabil, wenn sie nicht instabil ist.
- Das Problem der stabilen Heirat ist es, eine stabile Paarung zu berechnen.

Beispiel

- M = {Anton, Bernd, Christoph}
- F = {Gabi, Heike, Iris}
- Anton: H,G,I   Bernd: I,G,H   Christoph: I,H,G
- Gabi: A,B,C   Heike: B,C,A   Iris: A,C,B

- Ist Paarung {AI, BG, CH} stabil?

UMFRAGE

Algorithmus von Gale & Shapley 1962

```
Alle Frauen und Männer sind unverlobt
While ((∃ nicht verlobter Mann m∈M) und (Liste von m nicht leer)) {
    m macht oberster Frau f auf Liste Antrag;
    if (f nicht verlobt):
        verlobe m und f, d.h. (m,f)∈H
    else if (f zieht m ihrem aktuellen Partner m´ vor){
            löse Verlobung (f,m´)
            verlobe m,f
            m´ streicht f von seiner Liste
        }
        else m streicht f von seiner Liste
}
```

Albert	F, G, H, I, J	Flora	D, B, A, E, C
Balduin	F, I, H, G, J	Gabi	A, B, C, D, E
Casper	I, H, F, J, G	Heike	A, B, C, D, E
Daniel	G, F, I, H, J	Iris	C, A, B, D, E
Egon	J, I, G, H, F	Julia	A, B, C, D, E

Albert

F, G, H, I, J

Flora

D, B, A, E, C

Balduin

F, I, H, G, J

Gabi

A, B, C, D, E

Casper

I, H, F, J, G

Heike

A, B, C, D, E

Daniel

G, F, I, H, J

Iris

C, A, B, D, E

Egon

J, I, G, H, F

Julia

A, B, C, D, E

Albert	F, G, H, I, J	Flora	D, B, A, E, C
Balduin	F, I, H, G, J	Gabi	A, B, C, D, E
Casper	I, H, F, J, G	Heike	A, B, C, D, E
Daniel	G, F, I, H, J	Iris	C, A, B, D, E
Egon	J, I, G, H, F	Julia	A, B, C, D, E

Albert
F, G, H, I, J

Balduin
F, I, H, G, J

Flora
D, B, A, E, C

Daniel
G, F, I, H, J

Gabi
A, B, C, D, E

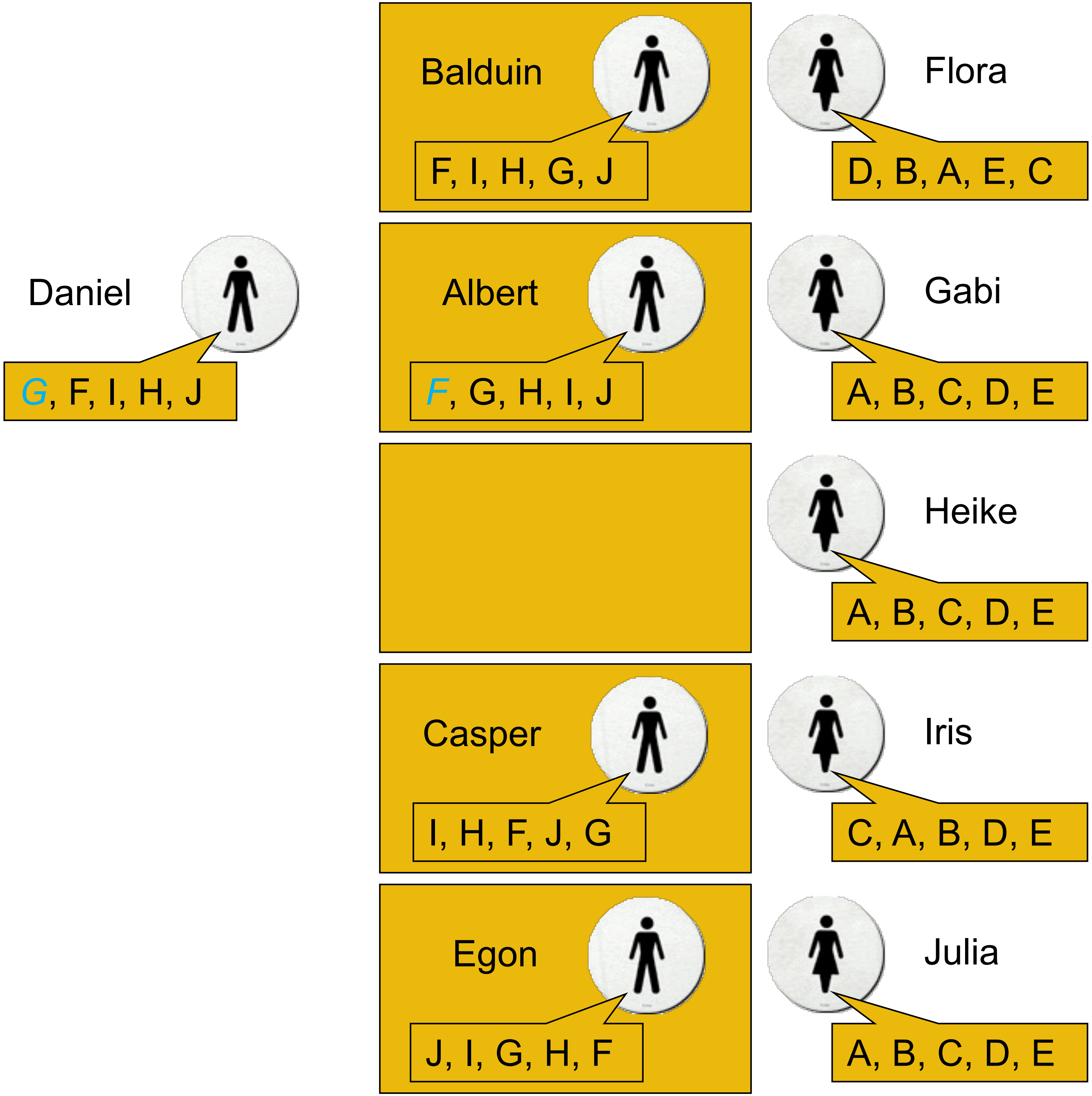
Heike
A, B, C, D, E

Casper
I, H, F, J, G

Iris
C, A, B, D, E

Egon
J, I, G, H, F

Julia
A, B, C, D, E


Balduin
F, I, H, G, J
Flora
D, B, A, E, C
Daniel
G, F, I, H, J
Albert
F, G, H, I, J
Gabi
A, B, C, D, E
Heike
A, B, C, D, E
Casper
I, H, F, J, G
Iris
C, A, B, D, E
Egon
J, I, G, H, F
Julia
A, B, C, D, E

Balduin

F, I, H, G, J

Daniel

G, F, I, H, J

Flora

D, B, A, E, C

Albert

F, G, H, I, J

Gabi

A, B, C, D, E

Heike

A, B, C, D, E

Casper

I, H, F, J, G

Iris

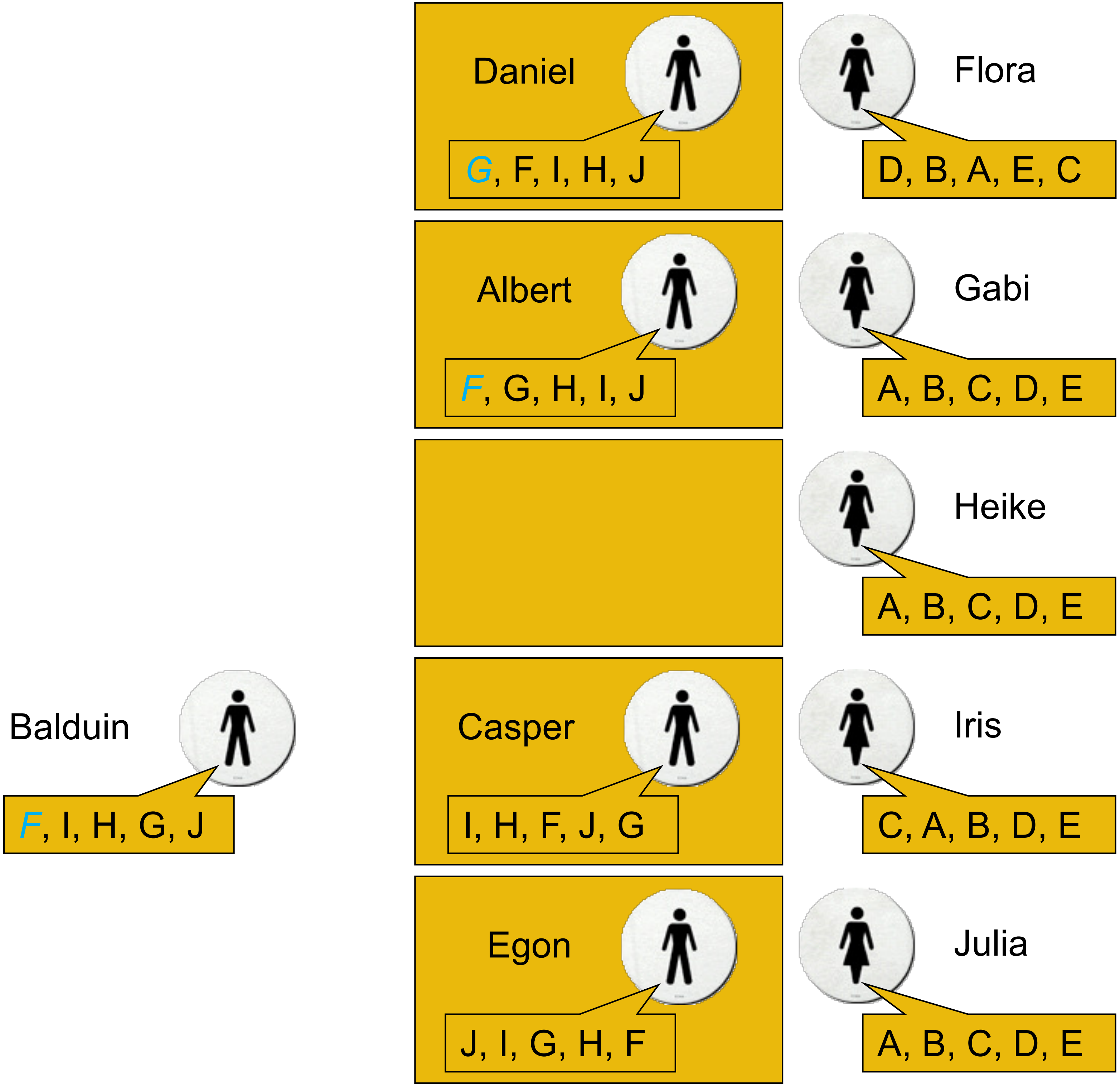
C, A, B, D, E

Egon

J, I, G, H, F

Julia

A, B, C, D, E


Daniel
G, F, I, H, J
Flora
D, B, A, E, C
Albert
F, G, H, I, J
Gabi
A, B, C, D, E
Heike
A, B, C, D, E
Balduin
F, I, H, G, J
Casper
I, H, F, J, G
Iris
C, A, B, D, E
Egon
J, I, G, H, F
Julia
A, B, C, D, E

Runde 5

Kein Kandidat

→

Jeder ist verlobt

→

FERTIG

Daniel

G, F, I, H, J

Flora

D, B, A, E, C

Albert

F, G, H, I, J

Gabi

A, B, C, D, E

Balduin

F, I, H, G, J

Heike

A, B, C, D, E

Casper

I, H, F, J, G

Iris

C, A, B, D, E

Egon

I, J, G, H, F

Julia

A, B, C, D, E

ABER:

- *Terminiert* der Algorithmus immer?
- Können am Ende Personen übrig bleiben?
- Sind die Paarungen stabil?
- Ist die Lösung des Algorithmus eindeutig?
- Ist die Lösung fair, oder bevorzugt sie die Männer oder die Frauen?
- Wie lange braucht dieser Algorithmus um die Lösung zu finden?

UMFRAGE

Terminiert der Algorithmus immer?

Ja!

- Jeder Mann kann nur *n* mal einen Antrag machen
- In jeder Runde macht mindestens ein Mann einen Antrag

➔ Irgendwann ist die Liste jedes Mannes leer.

Können am Ende Personen übrig bleiben?

Nein!

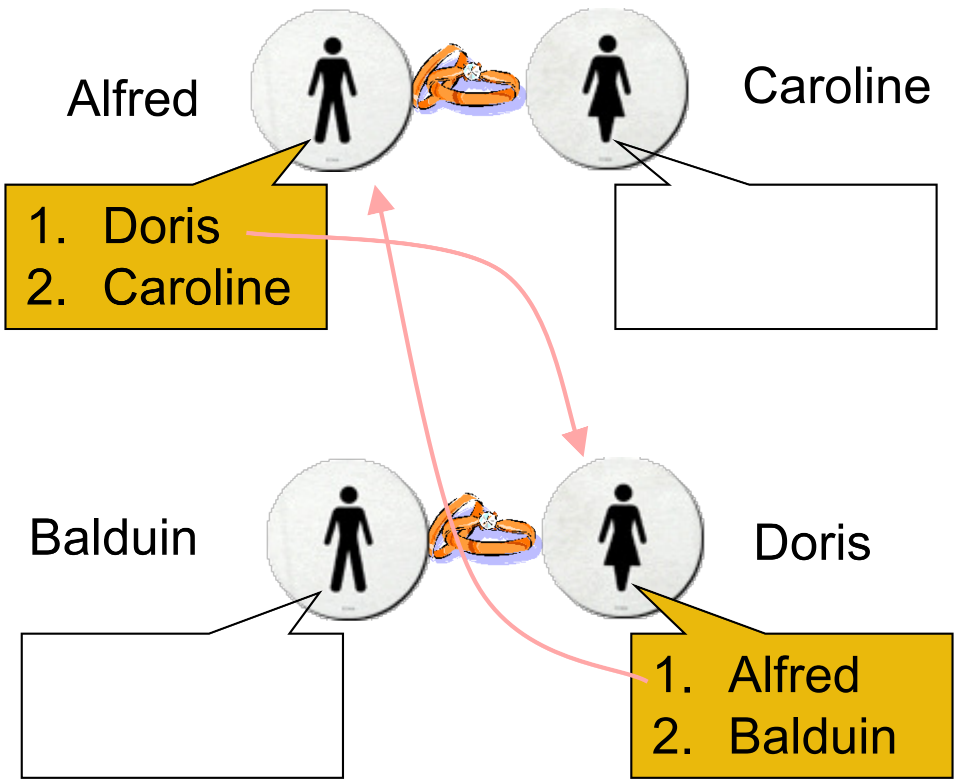
- \# verlobter Männer = # verlobter Frauen
- Sobald eine Frau verlobt ist, bleibt sie bis zum Schluss verlobt (ggf. mit wechselndem Partner)

Indirekter Beweis:

- *Annahme:* Ein Mann *A* und eine Frau *B* bleiben übrig
- *Widerspruchsargument: A* hätte *B* einen Antrag gemacht und sie hätte akzeptiert

Sind die Paarungen stabil?

Ja! Indirekter Beweis:
Annahme: es existiert instabiles Paar



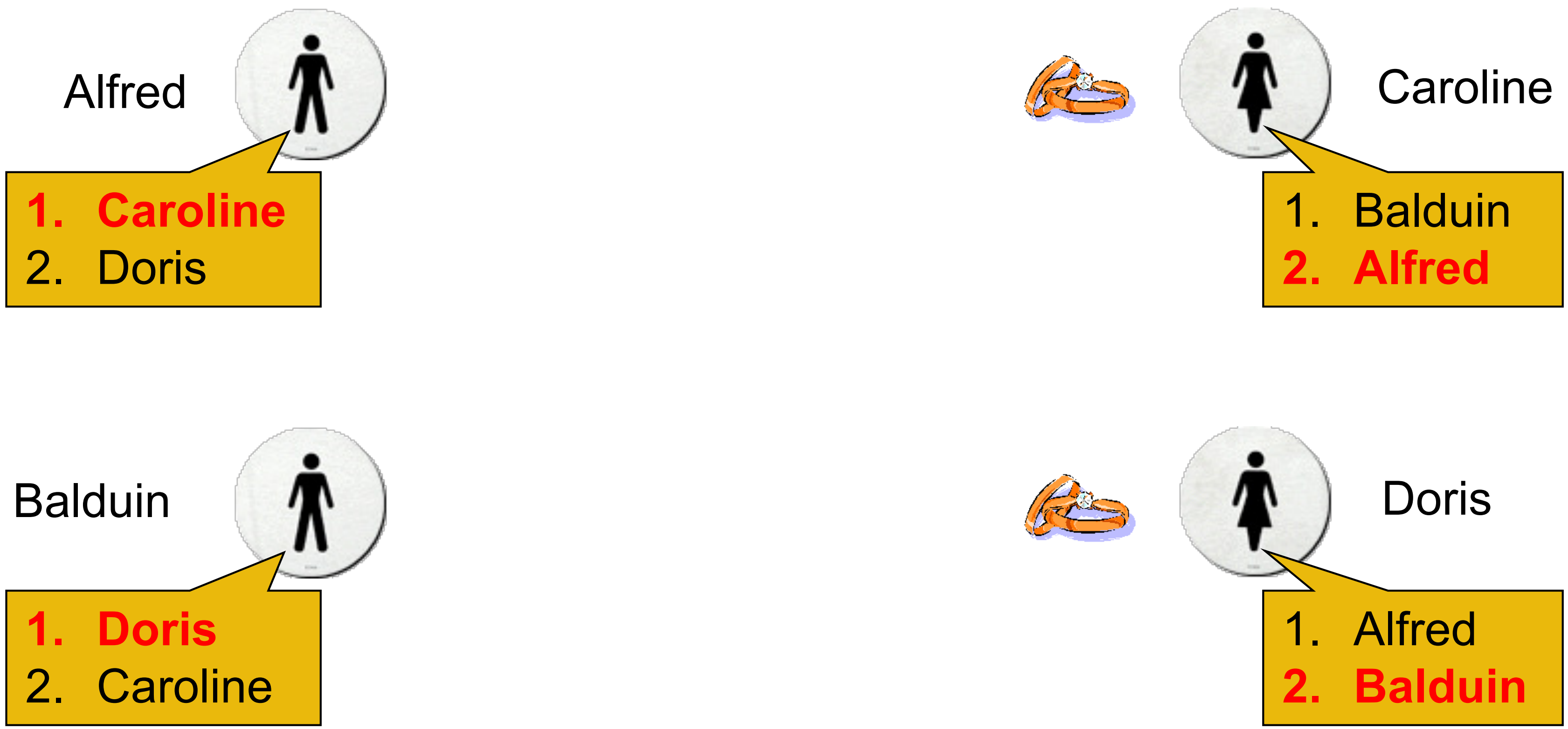
- *A* hat *D* vor *C* einen Antrag gemacht:
  - *D* hat akzeptiert:
    - Sie hätte später nie *A* mit jmd. weiter unten in der Liste getauscht
  - *D* hat abgelehnt:
    - Sie war verlobt mit jmd. weiter oben auf der Liste als *A*.
    - Sie hätte später nie diesen mit jmd. noch weiter unten als *A* getauscht.

Ist die Lösung fair?

Nein! Männer haben Vorteile!

Ist die Lösung fair?

Nein! Männer haben Vorteile!



Ist die Lösung fair?

Wenn die Frauen die aktive Rolle hätten…

Alfred

1. Caroline
2. Doris

Caroline

1. Balduin
2. Alfred

Balduin

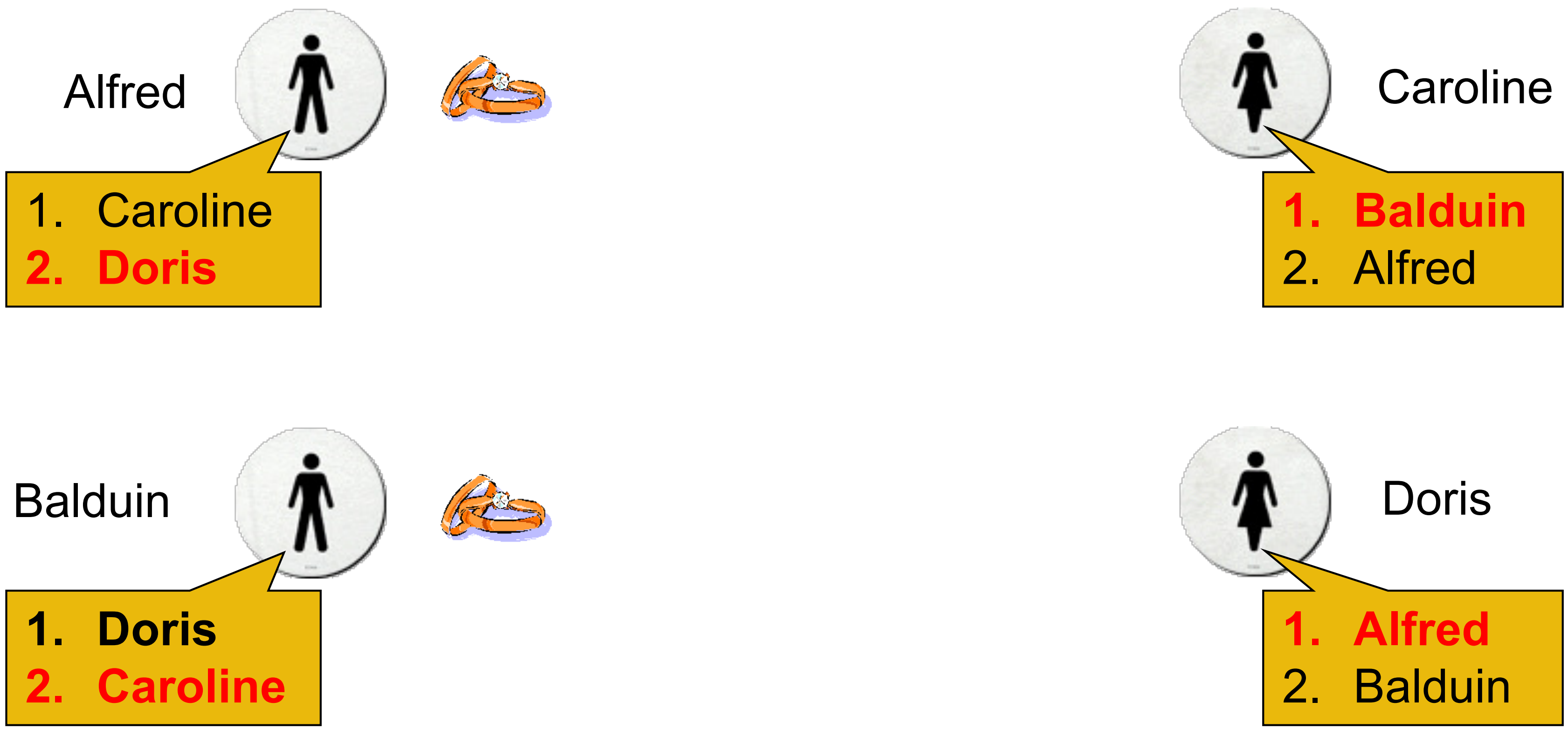
1. Doris
2. Caroline

Doris

1. Alfred
2. Balduin

Ist die Lösung fair?

Wenn die Frauen die aktive Rolle hätten…



Ist die Lösung fair?

Def.: Eine stabile Paarung heißt Männer-optimal (bzw. –pessimal), wenn keine andere stabile Paarung existiert, bei der ein Mann eine für ihn bessere (bzw. schlechtere) Frau erhalten hätte.

Der Algorithmus findet unter allen stabilen Paarungen diejenige, die Männer-optimal und Frauen-pessimal ist.

D.h. es existiert keine andere stabile Paarung, bei der ein Mann eine für ihn bessere Frau erhalten hätte …

bzw. eine Frau einen für sie schlechteren Mann.

Männer-Optimal – Indirekter Beweis

- Def.: Eine Frau f heißt für einen Mann m unerreichbar, wenn es keine stabile Paarung P mit (m,f)∈P gibt.

Wir zeigen: Falls ein Mann m von einer Frau f zurückgewiesen wird, ist die Frau für ihn unerreichbar.

- Indirekte Annahme: M1 wird im Algorithmus von F2 zurück gewiesen; es gibt aber eine stabile Paarung P mit (M1,F2)∈P.
- O.B.d.A. sei dies das erste Mal, dass der Algorithmus einen „Fehler“ macht.

Männer-Optimal – Indirekter Beweis

- Indirekte Annahme:
  - Algorithmus (H): (M1,F1), (M2,F2), …
  - Alternative stabile Paarung (P): (M1,F2), (M2,F3)…
  - M1 mag F2 lieber als F1
  - „erster Fehler“ des Algorithmus
- Folgerung:
  - M1 wurde von F2 zurückgewiesen, d.h. F2 mag M2 lieber als M1
  - In (P): (M2,F3): 2 Fälle:
    - M2 mag F3 lieber als F2 → Widerspruch zu „erster Fehler“, denn M2 hat in (H) F3 vor F2 schon einen Antrag gemacht
    - M2 mag F2 lieber als F3 → Widerspruch zu Stabilität von (P), denn das Paar M2, F2 führt zur Instabilität

Eindeutigkeit

Das Ergebnis des Algorithmus ist eindeutig.

Beweis: Seien H_1 und H_2 verschiedene m-optimale Lösungen.

Dann existiert ein m, dem es in H_1 oder H_2 schlechter geht. ↯

Frauen-Pessimal – Indirekter Beweis

- Indirekte Annahme: Sei stabile Paarung H´≠H das schlechtest mögliche Arrangement für die Frauen.
- Dann existiert f mit (m,f)∈H und (m´,f)∈H´.
- m: xxxx $<_m$ f $<_m$ …

  (x sind unerreichbare Frauen für m)
- f: …m…m´…

→ instabiles Paar m,f in H´

→ Widerspruch zur Stabilität von H´ ⚡

Laufzeit

- In jeder Runde gibt es mindestens einen Antrag
- Der Algorithmus endet spätestens, wenn alle Männer beim letzten Namen angekommen sind

➢ n Listen mit je n Einträgen = n^2 Einträge

➢ maximal n^2 Anträge

➢ Aufwand pro Antrag: konstant (mit Hilfe eines initiales Feldes rank[1..n] für alle Frauen, dabei gibt rank[m] für einen Mann m die jeweilige Position in der Liste der Frau zurück)

➢ Laufzeit ist $O(n^2)$: *quadratisch*

Bemerkung zur Anwendung

Der Algorithmus wurde lange Zeit für die Medizinstudierenden in den USA verwendet.

- Wer die Rolle der Männer übernimmt? **Krankenhäuser**
- Werbetext für die Studierenden: „You will be matched with your highest ranked hospital that offers you a position."
- Lange Zeit gingen die Betroffenen davon aus, dass der Algorithmus fair für beide Parteien ist.
- Wahrheit wurde erst im Jahr 1981 durch zwei große Artikel im New England Journal of Medicine bekannt.

Literatur

- Schöne Abhandlung und Animationen von Harry Mairson:
  http://www1.cs.columbia.edu/~evs/intro/stable/

- Das stabile Heiratsproblem ist ein Zuordnungsproblem im Umfeld der Matching-Algorithmen und Assignmentprobleme.

Tipp: Aktiv sein hilft!