Eigenschaften: Relationen und Abbildungen (0)

$R \subseteq M \times M$ **Relation auf M**

reflexiv $\forall a \in M: aRa$

symmetrisch $\forall a,b \in M: (aRb \Rightarrow bRa)$

transitiv $\forall a,b,c \in M: (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

antisymm. $\forall a,b \in M: (aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b)$

$f: A \to B$ **Abbildung**

injektiv $\forall a,a' \in A: (f(a)=f(a') \Rightarrow a=a')$

surjektiv $\forall b \in B, \exists a \in A: f(a)=b$

bijektiv injektiv und surjektiv

Heute u.a.

Motivation dafür!

(1)

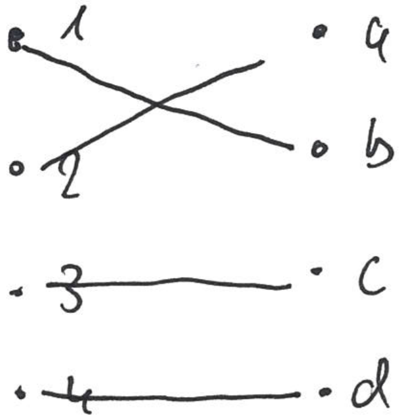
Def 2.14 Seien A, B Mengen.

A, B haben die gleiche Mächtigkeit, Kardinalität

$:\Longleftrightarrow$ es ex. $f: A \to B$ Abbildung

so dass f bijektiv ist.

„gleichmächtig"

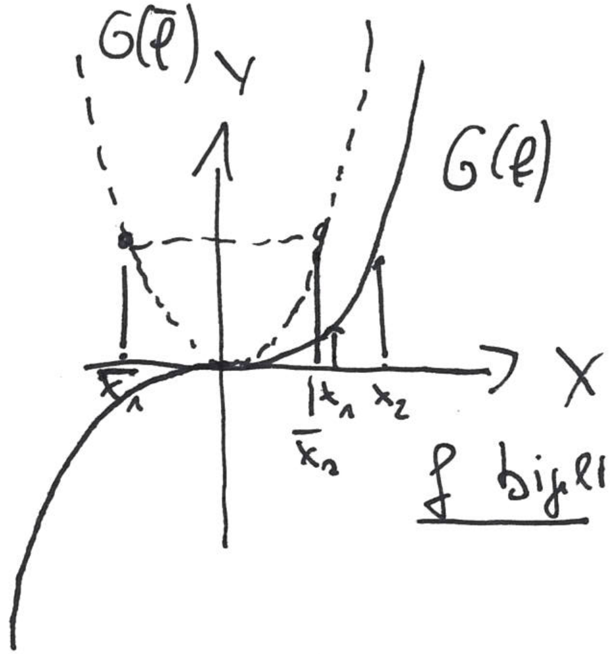


f Abb.

Wie sieht das bei unendlichen Mengen?

Bsp

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$



f bijektiv

2. $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\bar{f}(x) = x^2$. $\bar{f}$ n. surjektiv / n. injektiv

Beweistechnik: Injektiv / Surjektiv

③

$f: X \to Y$

Surj.: $\forall y \in Y \ \exists x, x \in X$

$f(x) = y$

(x konkret angeben)

inj.: falls $f(x) = f(x')$ dann gilt $x = x'$

(diese Deduktion zeigen)

$f: \mathbb{N} \to M$ Bijektiv!

$M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{2 \cdot i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$

$f(j) = 2(j-1)$ Bijektiv!

1. Surjektivität Sei $y = 2 \cdot i$ $i \in \mathbb{N}_0$ $f(x) = 2(x-1) = 2i$

$\iff x = i + 1 \in \mathbb{N}$

2. Injektivität $j, j' \in \mathbb{N}$ $f(j) = f(j') \overset{\text{Def } f}{\iff} 2(j-1) = 2(j'-1) \overset{\text{Äquivalenzumform}}{\iff} j = j'$

BSP

$f: [a,b] \longrightarrow [0,1]$ $\quad f(x) = \dfrac{b-x}{b-a}$

$b > a \quad b, a \in \mathbb{R}$

f ist bijektiv

1. <u>Surjektivität</u> Sei $y \in [0,1]$ bel.

$$f(x) \underset{\text{Def. } f}{=} \frac{b-x}{b-a} = y \iff y(b-a) = b-x$$

$$\iff x = b - y(b-a) \in [a,b]$$

2. <u>Injektivität</u> ... (selbst probieren)

Gleichmächtigkeit von $[a,b]$ und $[c,d]$, $d > c$.
(genauso)

Bsp

3. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = x + y$ — Surjektiv ✓ $x = 0$, y bel.

n. injektiv $3+1 = 2+2$ $(3,1) \neq (2,2)$

4. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$h(x) = (x, -x)$ — n. Surjektiv ✓ $(0,7)$ wird nicht getroffen

<u>injektiv</u> $(x,-x) = (y,-y) \Leftrightarrow x = y$

5. $f_1 : P(M) \to P(M)$ $A \longmapsto M \setminus A$

M ist Menge — Bijektiv!

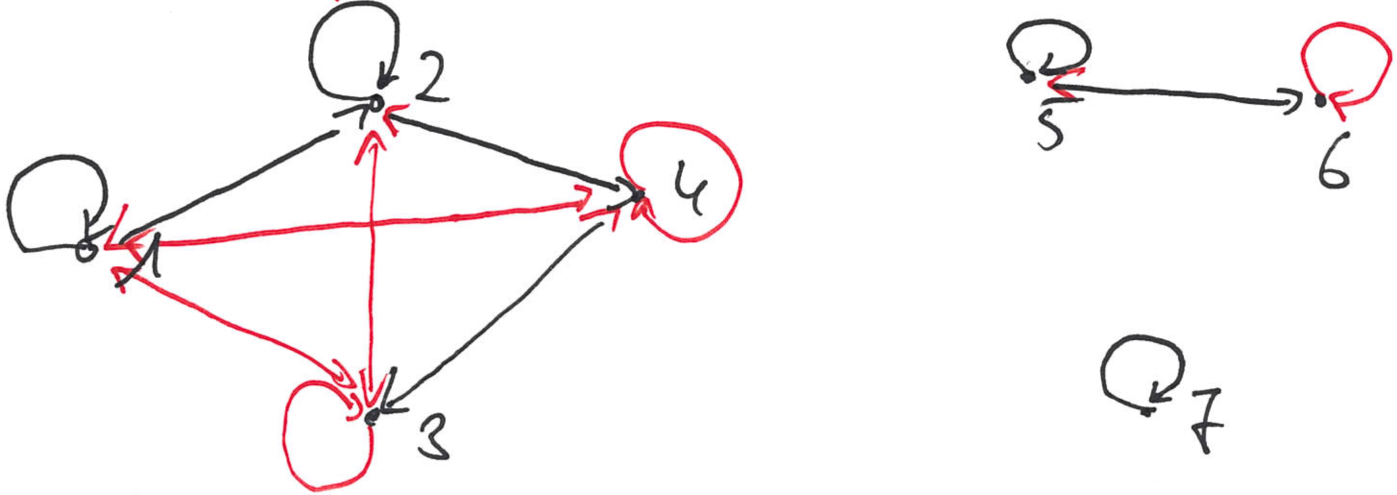
2.4.3 Äquivalenzrelation

reflexiv	symmetrisch	transitiv
↑	↑	↑
Schlingen	alle anderen Pfeile sind Doppelpfeile	es gibt stets Abkürzungen

Minimal erweitern auf Äquivalenzrel.!

BSP

$\underline{\underline{G}}$



Klassen: $\{1,2,3,4\}$ $\{5,6\}$ $\{7\}$

<u>Definition 2.15</u> Sei R Äquivalenzrelation auf M

Für $a \in M$ definieren wir

$$[\![a]\!]_R := \{ b \in M \mid b R a \}$$

Diese heißt <u>Äquivalenzklasse</u> von a bezüglich R.

Bsp $[\![2]\!]_G = \{1, 2, 3, 4\} = [\![3]\!]_G$

↑ Repräsentant!

"$\equiv_2$" $[\![0]\!]_{\equiv_2} = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \} = [\![28]\!]_{\equiv_2}$

$[\![1]\!]_{\equiv_2} = \{ \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots \} = [\![35]\!]_{\equiv_2}$

<u>Schreibweise:</u> $\overline{28}, \overline{0}, \overline{1}$

Disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen ergibt M!

Theorem 2.16 Sei R Äquivalenzrelation auf M.

Dann gilt I. $\forall a, b \in M: \ [\![a]\!]_R = [\![b]\!]_R$

oder $[\![a]\!]_R \cap [\![b]\!] = \emptyset$

II. $M = \bigcup_{a \in M} [\![a]\!]$ ($\uparrow$ XOR wg. aRb $\underset{XOR}{\text{oder}}$ $a \not R b$)

Beweis: I. Entweder aRb oder $a \not R b$ (sogar exklusives oder, XOR)

1. Fall aRb Beh: $[\![a]\!] \doteq [\![b]\!]$

Beidseitige Inklusion

"$\subseteq$" Sei $c \in [\![a]\!]$

$\underset{\text{Def.}[\![\ ]\!]}{\Longrightarrow}$ cRa

(9)

$$\underset{\text{bishierher}}{\Longrightarrow} \quad cRa \wedge aRb \underset{\text{transitiv}}{\Longrightarrow} cRb$$

$$\underset{\text{Def } [\![\,]\!]}{\Longrightarrow} \quad c \in [\![b]\!] \quad ✓$$

"$\supseteq$" Sei $c \in [\![b]\!] \underset{\text{Def. } [\![\,]\!]}{\Longrightarrow} cRb$

$$aRb \underset{\text{Symm}}{\Longrightarrow} bRa$$

$$\underset{\text{bishierher}}{\Longrightarrow} \quad cRb \wedge bRa \underset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} cRa \underset{\text{Def } [\![\,]\!]}{\Longrightarrow} c \in [\![a]\!] \quad ✓$$

2 Fall: $a \not R b$ Bew. indirekt

Ann: $[\![a]\!] \cap [\![b]\!] \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists c$ mit $c \in [\![a]\!]$ und $c \in [\![b]\!]$

$\underset{\text{Def } [\![\,]\!]}{\Rightarrow} cRa \wedge cRb \underset{\text{Symm. für } cRa}{\Rightarrow} aRc \wedge cRb \underset{\text{trans.}}{\Rightarrow} aRb$ ↯

$\Rightarrow [\![a]\!] \cap [\![b]\!] = \emptyset$ ✓

1 Fall + 2 Fall $\Rightarrow$ Beh. I

11

II $M \overset{!}{=} \bigcup_{a \in M} [\![a]\!]$

Beidseitige Inklusion!

"$\subseteq$" $b \in M \underset{\text{Reflex.}}{\Longrightarrow} bRb \underset{\text{Def. } [\![\,]\!]}{\Longrightarrow} b \in [\![b]\!] \Rightarrow b \in \bigcup_{a \in M} [\![a]\!]$

"$\supseteq$" $b \in \bigcup_{a \in M} [\![a]\!]$

$\underset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow} b \in [\![a]\!]$ für mind. ein $a \in M$

und $[\![a]\!] \subseteq M$ nach Def. $\Longrightarrow b \in M$ $\square$

Interessante Klassen! Arithmetik mit Klassen!

„$\equiv_n$" auf $\mathbb{Z}$ $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$

Objekte sind Klassen! $\quad \mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_n$

„Restklassenring über $\mathbb{Z}$ modulo n"

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z} = \{ [\![0]\!], [\![1]\!], [\![2]\!], [\![3]\!], \dots, [\![n-1]\!] \} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n-1} \}$$

BSP $\mathbb{Z}_4$

$$\bar{0} = \{\dots, -4, 0, 4, 8, \dots\} = \overline{-4}, \quad \bar{0} = \bar{n}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\} = \bar{9}$$

$$\bar{2} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = \overline{10}$$

$$\bar{3} = \{-5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = \overline{-5}$$

„Arithmetik"

<u>Definition 2.17</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig : Betrachte $\mathbb{Z}_n$

<u>Addition modulo n:</u> $\oplus_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$

$A, B \in \mathbb{Z}_n \quad A = [\![a]\!] \quad B = [\![b]\!] \quad a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\oplus_n (A, B) := [\![a+b]\!]$ Schreibweise: $A \oplus_n B$

<u>Multiplikation modulo n:</u> $\otimes_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$

$A, B \in \mathbb{Z}_n \quad A = [\![a]\!] \quad B = [\![b]\!] \quad a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\otimes_n (A, B) := [\![a \cdot b]\!]$ „Wohldefiniert" ?

Theorem 2.18 Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

und seien $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$

mit $\llbracket a \rrbracket = \llbracket a' \rrbracket \quad \llbracket b \rrbracket = \llbracket b' \rrbracket$

Dann gilt: $\llbracket (a+b) \rrbracket = \llbracket (a'+b') \rrbracket$

$$\llbracket (a \cdot b) \rrbracket = \llbracket (a' \cdot b') \rrbracket$$

Beweisen!

BSP

Rationale Zahlen („selbst" definiert als Klassen)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

$\left[\frac{a}{b} = \frac{l \cdot a}{l \cdot b} \right.$ kürzen! $\left. \right]$

Äquivalenzrelation!

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \;:\Longleftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$$

Klassen bzgl. $\sim$

$[\![\frac{4}{6}]\!] = [\![\frac{2}{3}]\!]$

$[\![\frac{1}{3}]\!] = [\![\frac{-4}{-12}]\!]$

Addition $\quad + \left([\![\frac{a}{b}]\!], [\![\frac{c}{d}]\!] \right) := [\![\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}]\!]$

Multiplikation $\quad \times \left([\![\frac{a}{b}]\!], [\![\frac{c}{d}]\!] \right) := [\![\frac{a \cdot c}{b \cdot d}]\!]$

„wohldefiniert". (Unabhängig von Repräsentanten)