Prof. Dr. Reinhard Klein
Alexander Schier

Universität Bonn
Institut für Informatik II
Wintersemester 2023/2024 15.11.2023

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 6

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 22.11.2023, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Projektoren, *4 Punkte*)

Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^m$ ein System orthonormaler Vektoren. Sei $I \in \mathbb{C}^{m\times m}$ die Einheitsmatrix und sei

$$P := I - \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot v_i^* \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Zeige $P^* = P$, $P^2 = P$, bestimme den Kern und das Bild von P und gib den Rang von P an.

Bemerkung: Wenn $P^* = P$ und $P^2 = P$ gilt, ist P laut Vorlesung ein orthogonaler Projektor.

Aufgabe 2 (Spiegelungs- und Rotationsmatrizen, *2+2=4 Punkte*)

Gib jeweils die Matrizen im 3D für eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung mit der Normalen $\mathbf{n}$ und die Rotation um die X-Achse um einen Winkel α an. Leite diese Matrizen her, indem du jeweils die Bilder der Vektoren der kanonischen Einheitsbasis berechnest und aus diesen die Matrizen aufstellst. Zeige, dass beide Matrizen orthogonal sind und berechne die Determinante für die Rotationsmatrix.

Aufgabe 3 (QR-Zerlegung mit Householder berechnen, *4 Punkte*)

Berechne eine QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ von Hand mittels des Householder-Verfahrens. Gib die Matrizen $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ und alle wichtigen Zwischenschritte an.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bonusaufgabe 4 (Householder-Verfahren, *3+1=4 Punkte*)

Implementiere im beiliegenden Framework die QR Zerlegung mittels Householder-Spiegelungen für reelle Matrizen.

a) Schreibe eine Funktion `Householder`, welche eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ entgegennimmt und als Rückgabewert eine Liste von Normalenvektoren der Spiegelungsmatrizen $v_1 \in \mathbb{R}^m, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{m-(n-1)}$ und die rechte obere Dreiecksmatrix R zurückgibt.

b) Schreibe eine Funktion `ComputeQ`, die die Liste $v_1, \ldots, v_n$ von `Householder` entgegennimmt und die entsprechende orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ berechnet.
Hinweis: Um die optimale asymptotische Komplexität zu erzielen, sollten keine Produkte von $m \times m$-Matrizen verwendet werden (Zeit $O(m^3)$). Stattdessen kann man die Multiplikation eines Spaltenvektors $w \in \mathbb{R}^m$ mit der durch $v \in \mathbb{R}^m$ gegebenen Householder-Matrix durch

$$w - 2 \cdot \frac{v^* \cdot w}{v^* \cdot v} \cdot v$$

in Zeit $O(m)$ berechnen. Für m Vektoren (d.h. eine $m \times m$-Matrix) braucht man dann $O(m^2)$.