Grundlagen der Robotik

6. Differentielle und Inverse Kinematik

Prof. Sven Behnke

UNIVERSITÄT BONN

AIS

Letzte Vorlesung

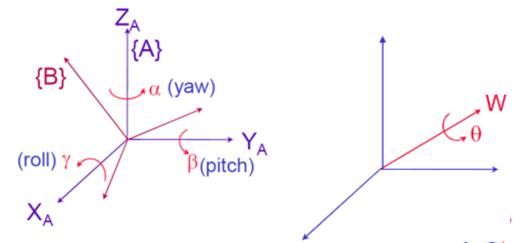
- Orientierungsrepräsentationen
  - Absolut- und Eulerwinkel
  - Singularität der Repräsentation
  - Euler-Parameter
- **D**enavit-**H**artenberg-Parameter
  - a_i: Distanz (z_i, z_{i+1}) entlang x_i
  - α_i: Winkel (z_i, z_{i+1}) um x_i
  - d_i: Distanz (x_{i-1}, x_i) entlang z_i
  - θ_i: Winkel (x_{i-1}, x_i) um z_i
- DH-Vorwärtskinematik
  - Vier elementare Transformationen pro Gelenk:

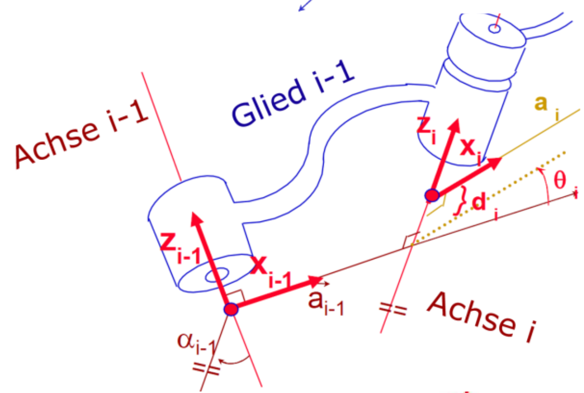
$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = {}^{i-1}_{\ \ R}T \; {}^{R}_{Q}T \; {}^{Q}_{P}T \; {}^{P}_{i}T $$

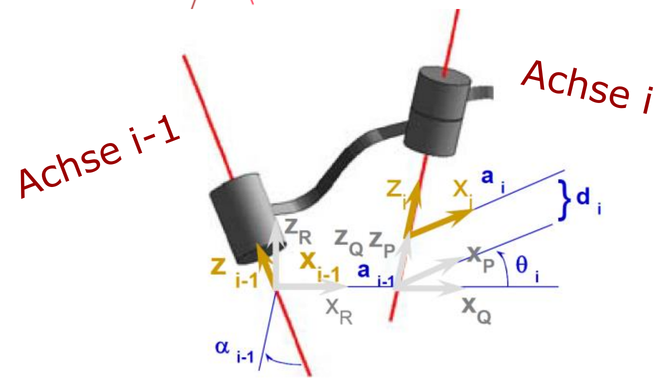
$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T_{(\alpha_{i-1},\, a_{i-1},\, \theta_i,\, d_i)} = R_x(\alpha_{i-1})\, D_x(a_{i-1})\, R_z(\theta_i)\, D_z(d_i) $$

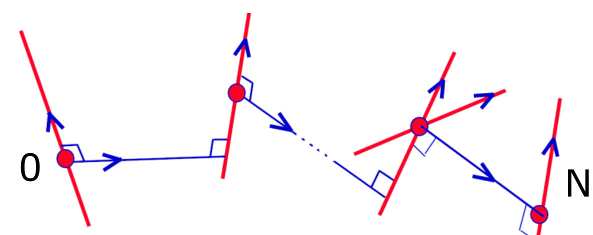
  - Multipliziere Transformationen in kinematischer Kette:

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; \dots \; {}^{N-1}_{\ \ N}T $$



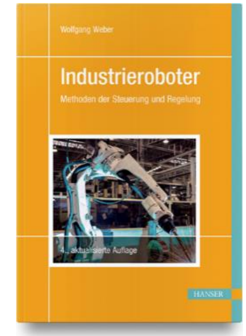




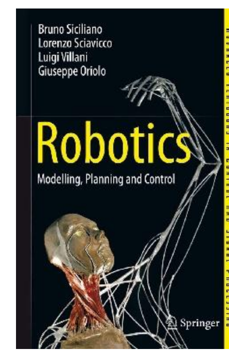


Literatur zu Kinematik

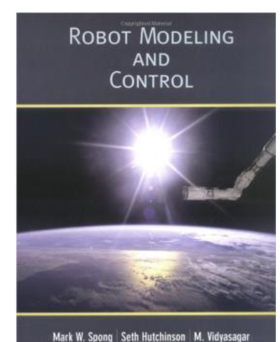
- Wolfgang Weber: Industrieroboter: Methoden der Steuerung und Regelung, Hanser-Verlag



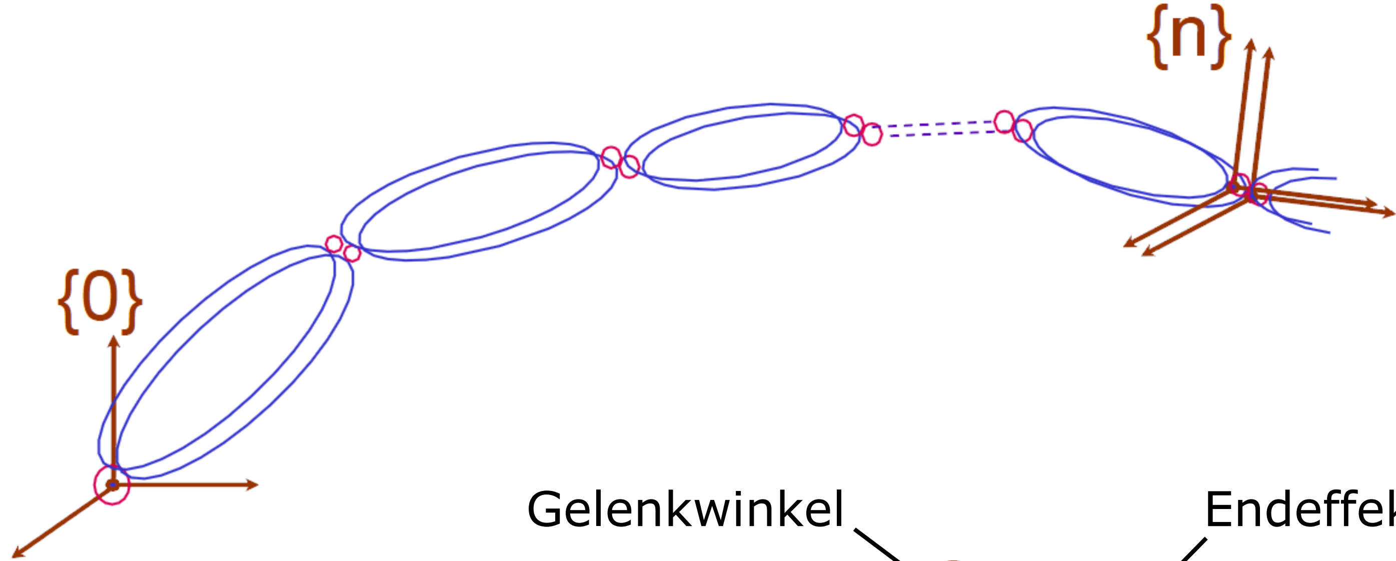
- Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo: Robotics: Modelling, Planning and Control, Springer



- Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar: Robot Modeling and Control, Wiley



Differentielle Bewegung



Gelenkwinkel ― Endeffektorpose

- Vorwärtskinematik: $\theta \rightarrow x$
- Differentielle Kinematik: $\theta + \delta\theta \rightarrow x + \delta x$
- Beziehung: $\boxed{\delta\theta \leftrightarrow \delta x}$

Gelenkgeschwindigkeit — $\boxed{\dot{\theta} \leftrightarrow \dot{x}}$ — Lineargeschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit

Gelenk-Koordinaten

- Variabler Gelenk-Parameter i:
  - θ_i bei Drehgelenk
  - d_i bei Lineargelenk

- Gelenk-Koordinate i:

$$\boxed{q_i = \bar{\varepsilon}_i \theta_i + \varepsilon_i d_i}$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 \text{ wenn Drehgelenk} \\ 1 \text{ wenn Lineargelenk} \end{cases}$$

$$\bar{\varepsilon}_i = 1 - \varepsilon_i$$

- Gelenk-Koordinaten-Vektor: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$

Jacobi-Matrix

- Gegeben Funktion $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{q})$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ \vdots \\ f_m(q) \end{pmatrix}$$

- Partielle Ableitungen von f vermitteln zwischen $\boldsymbol{\delta q}$ und $\boldsymbol{\delta x}$:

$$\delta x_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n}\delta q_n$$

$$\vdots$$

$$\delta x_m = \frac{\partial f_m}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n}\delta q_n$$

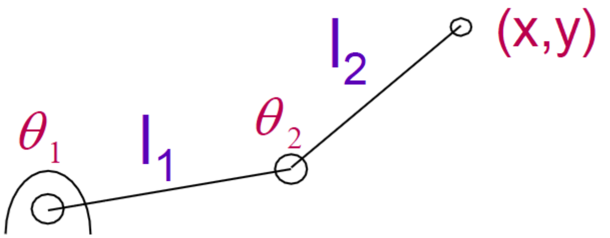
- Jacobi-Matrix:

$$\delta x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} . \delta q$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta x_{(m\times 1)} &= J_{(m\times n)}(q)\,\delta\, q_{(n\times 1)} \\ \dot{x}_{(m\times 1)} &= J_{(m\times n)}(q)\ \dot{q}_{(n\times 1)} \end{aligned} \qquad J_{ij}(q) = \frac{\partial}{\partial q_j} f_i(q)}$$

Beispiel für Jacobi-Matrix

- Arm mit zwei Drehgelenken



- Endeffektor-Position: $x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

- Endeffektor-Differentialbewegung:

$$\delta x = -(l_1 s_1 + l_2 s_{12})\delta\theta_1 - l_2 s_{12} \delta\theta_2$$

$$\delta y = (l_1 c_1 + l_2 c_{12})\delta\theta_1 + l_2 c_{12} \delta\theta_2$$

nutze:

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$$
$$\sin'(\theta) = \cos(\theta)$$

$$\delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -l_2 s_{12} \\ x & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix und Repräsentationen

- Endeffektor-Repräsentationen:

$$x = \begin{bmatrix} x_P \\ x_R \end{bmatrix}$$

- Kartesisch
- Zylindrisch
- Sphärisch

- Euler-Winkel
- Rotationsmatix
- Euler-Parameter

- Jacobi-Matrix für Lineargeschwindigkeit und Rotationsgeschwindigkeit:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{x}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{X_P}(q) \\ J_{X_R}(q) \end{pmatrix} \dot{q}$$

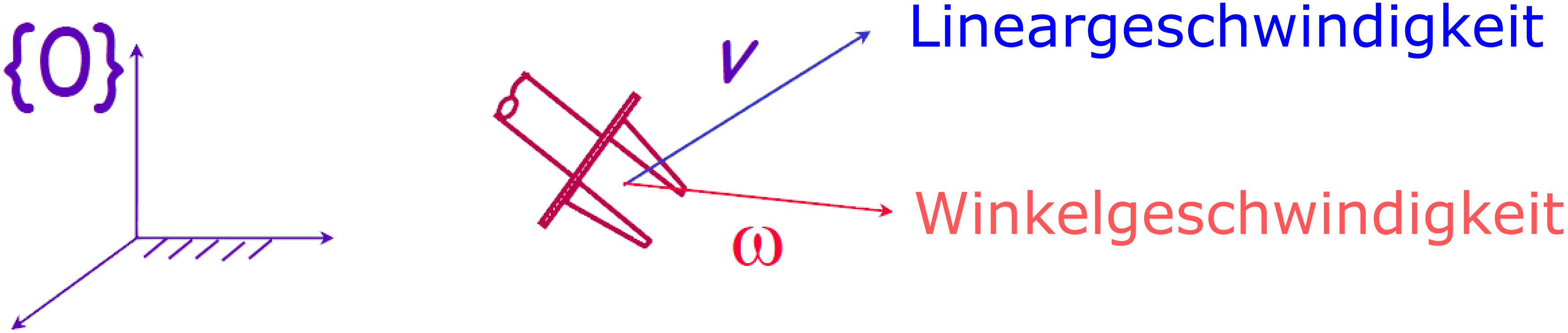
- Beispiel: Kartesische Position und Rotationsmatrix

$$\dot{x}_{(12x1)} = J_X(q)_{(12x6)}\, \dot{q}_{(6x1)}$$

- **Jacobi-Matrix hängt von Repräsentation ab!**

Basis-Jacobimatrix $J_0(q)$

- Ziel: Finde repräsentationsunabhängige Darstellung



- Durch Bezug auf Basis-Koordinatensystem:

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}_{(6x1)} = J_0(q)_{(6xn)}\, \dot{q}_{(nx1)}$$

- Ableitung der Positions- und Rotationsrepräsentationen:

$$\dot{x}_P = E_P(x_P)v$$
$$\dot{x}_R = E_R(x_R)\omega$$

Beispiele für Repräsentationen

- Euler-Winkel

$$\dot{x}_R = E_R(x_R)\omega \qquad x_R = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; E_R(x_R) = \begin{pmatrix} -\frac{s\alpha.c\beta}{s\beta} & \frac{c\alpha.c\beta}{s\beta} & 1 \\ c\alpha & s\alpha & 0 \\ \frac{s\alpha}{s\beta} & -\frac{c\alpha}{s\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Sigularität für sin(β)=0

- Kartesische Position

$$\dot{x}_P = E_P(x_P)v \qquad x_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; E_P(x_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix für eine Repräsentation

- Gegeben: Repräsentation $x = \begin{bmatrix} x_P \\ x_R \end{bmatrix}$
- Die Jacobi-Matrix $J_x(q)$ bezüglich dieser Repräsentation

$$\dot{x} = J_x(q)\,\dot{q}$$

kann von der Basis-Jacobimatrix $J_0(q)$ abgeleitet werden: $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = J_0(q)\ \dot{q}$

$$J_x(q) = E(x)\,J_0(q)$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{XP} \\ \hline J_{XR} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_P & 0 \\ \hline 0 & E_R \end{array}\right) \begin{pmatrix} J_v \\ \hline J_w \end{pmatrix}$$

Positionsrepräsentationen

- Kartesische Koordinaten: $E_P(X) = I_3$
- Zylindrische Koordinaten: $(x \;\; y \;\; z)^T = (\rho\cos\theta \;\; \rho\sin\theta \;\; z)^T$

$$E_P(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_P(X) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \frac{-\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

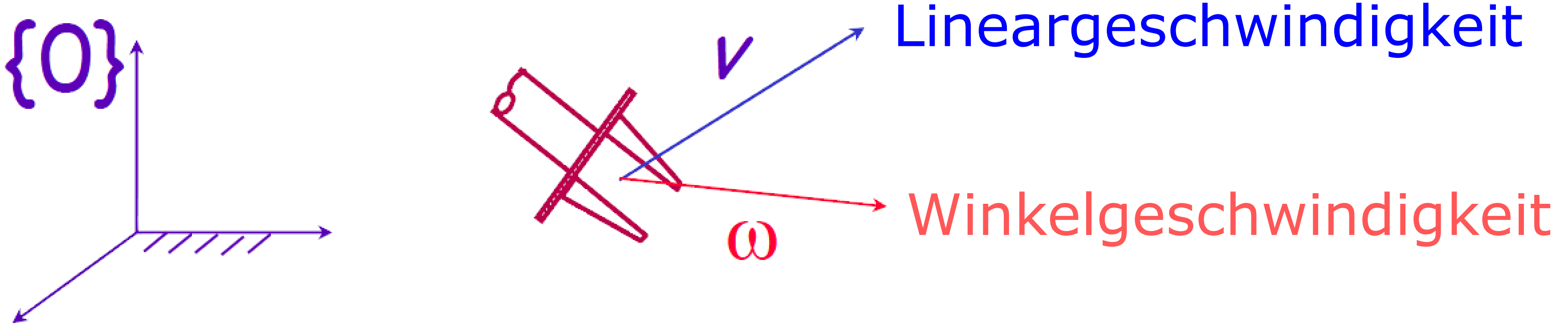
Erzeugt sehr hohe Winkelgeschwindigkeit in der Nähe der Z-Achse

- Sphärische Koordinaten: $(x \;\; y \;\; z)^T = (\mathrm{r}\cos\theta\sin\phi \;\; \mathrm{r}\sin\theta\sin\phi \;\; \mathrm{r}\cos\theta)^T$

$$E_P(X) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \frac{-\sin\theta}{\mathrm{r}\sin\phi} & \frac{\cos\theta}{\mathrm{r}\sin\phi} & 0 \\ \frac{\cos\theta\cos\phi}{\mathrm{r}} & \frac{\sin\theta\cos\phi}{\mathrm{r}} & \frac{-\sin\phi}{\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

Erzeugt sehr hohe Winkelgeschwindigkeiten in der Nähe des Ursprungs

Jacobimatrix J(q)



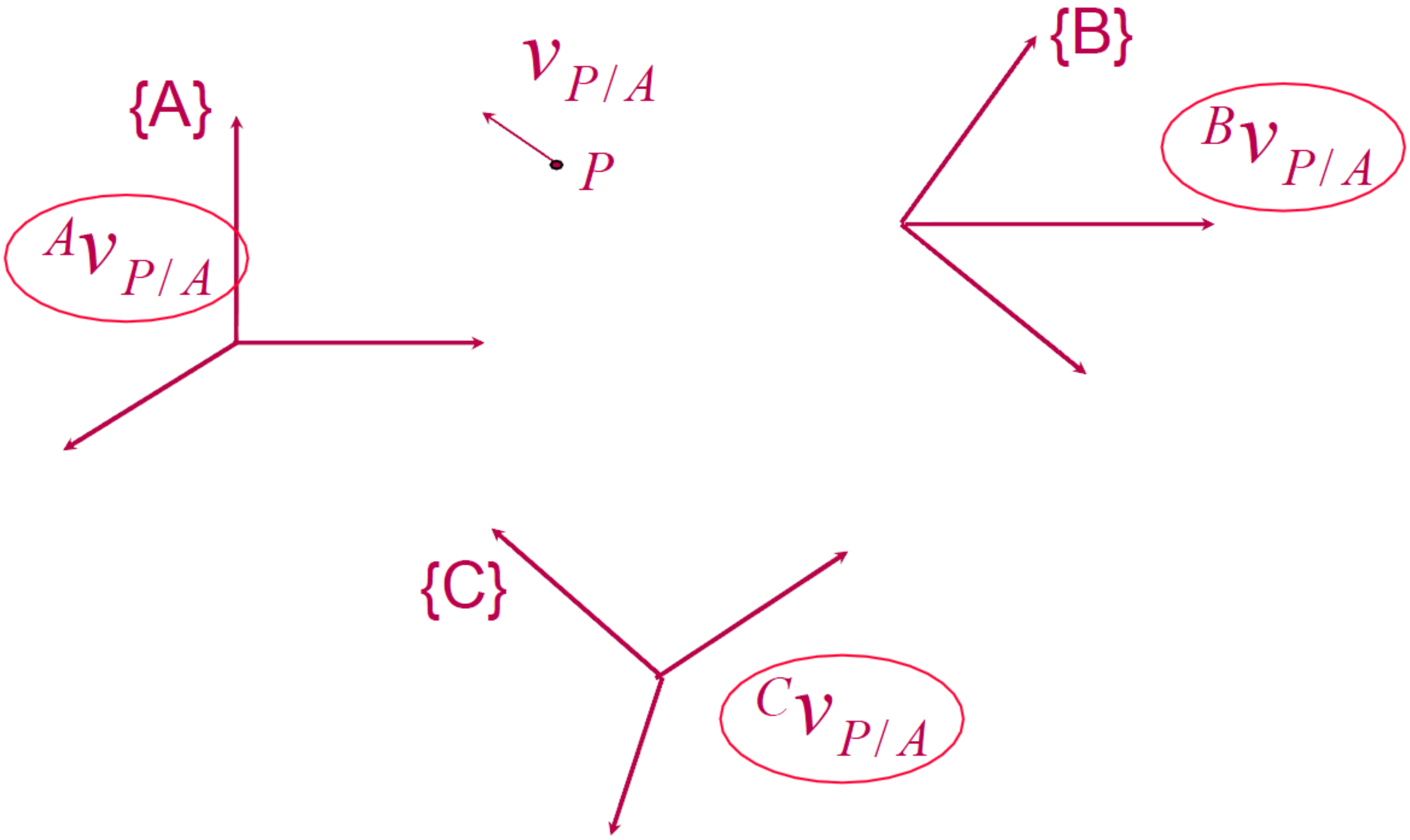
- Weglassen der tiefgestellten Null:

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}_{(6x1)} = J(q)_{(6xn)}\,\dot{q}_{(nx1)}$$

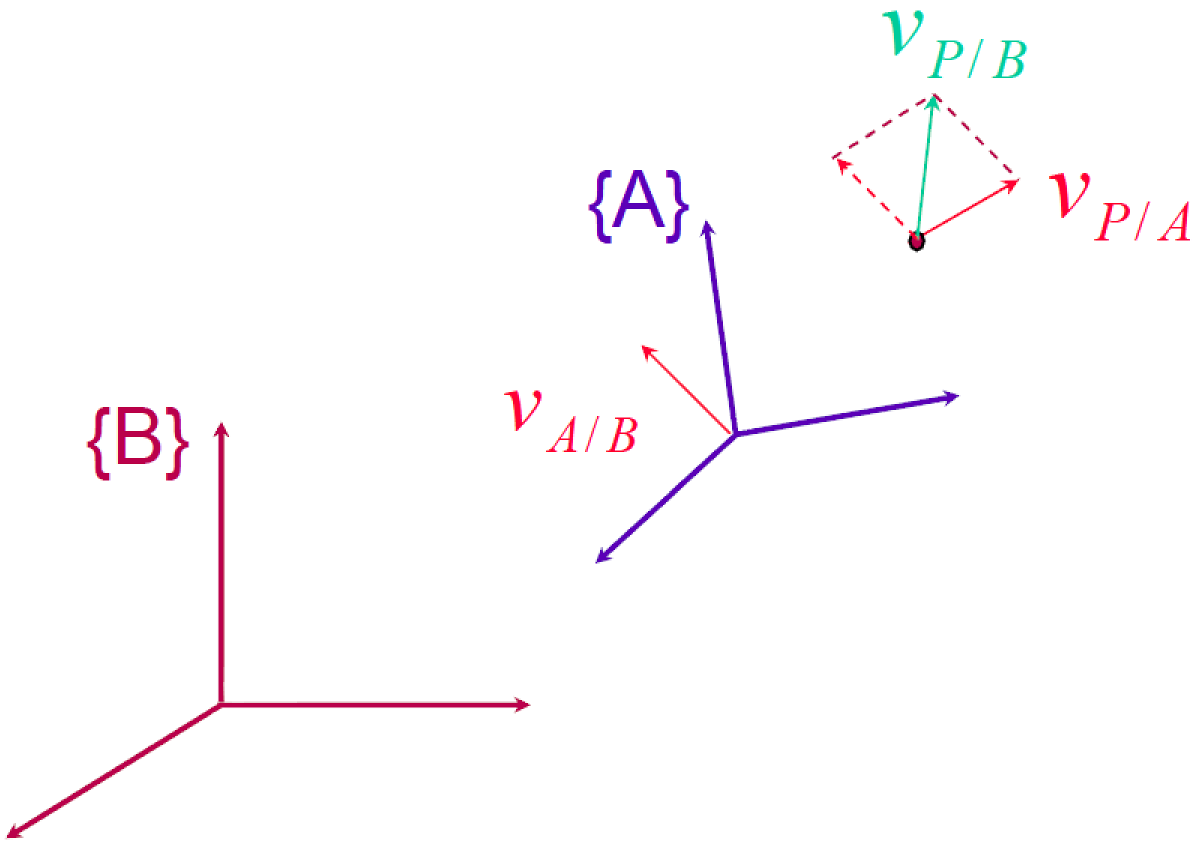
$$J_x(q) = E(x)\;J(q)$$

Lineargeschwindigkeit

- Beschreibung bezüglich verschiedener Frames

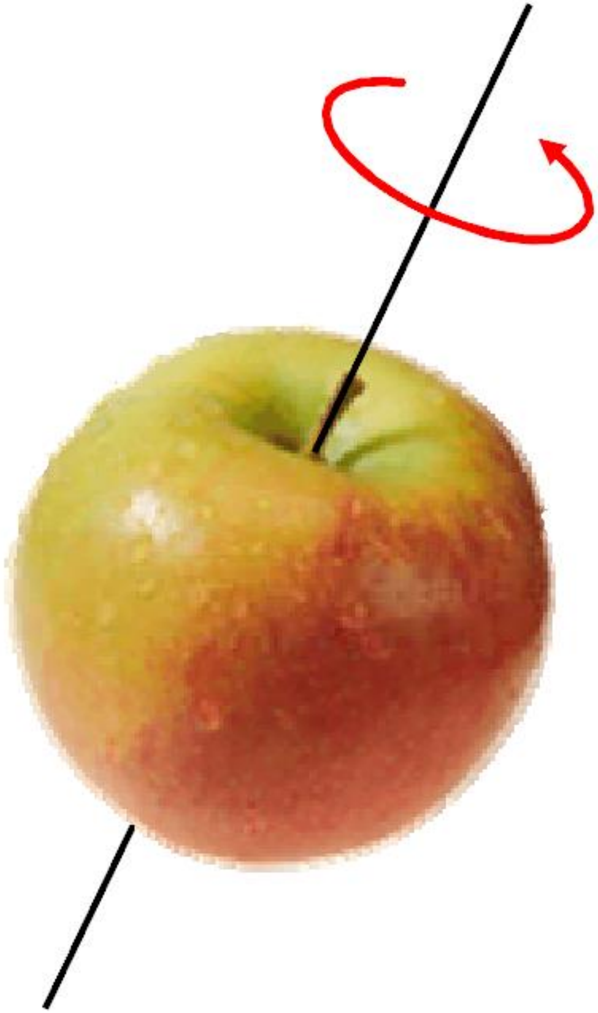


Reine Translation



$$v_{P/B} = v_{A/B} + v_{P/A}$$

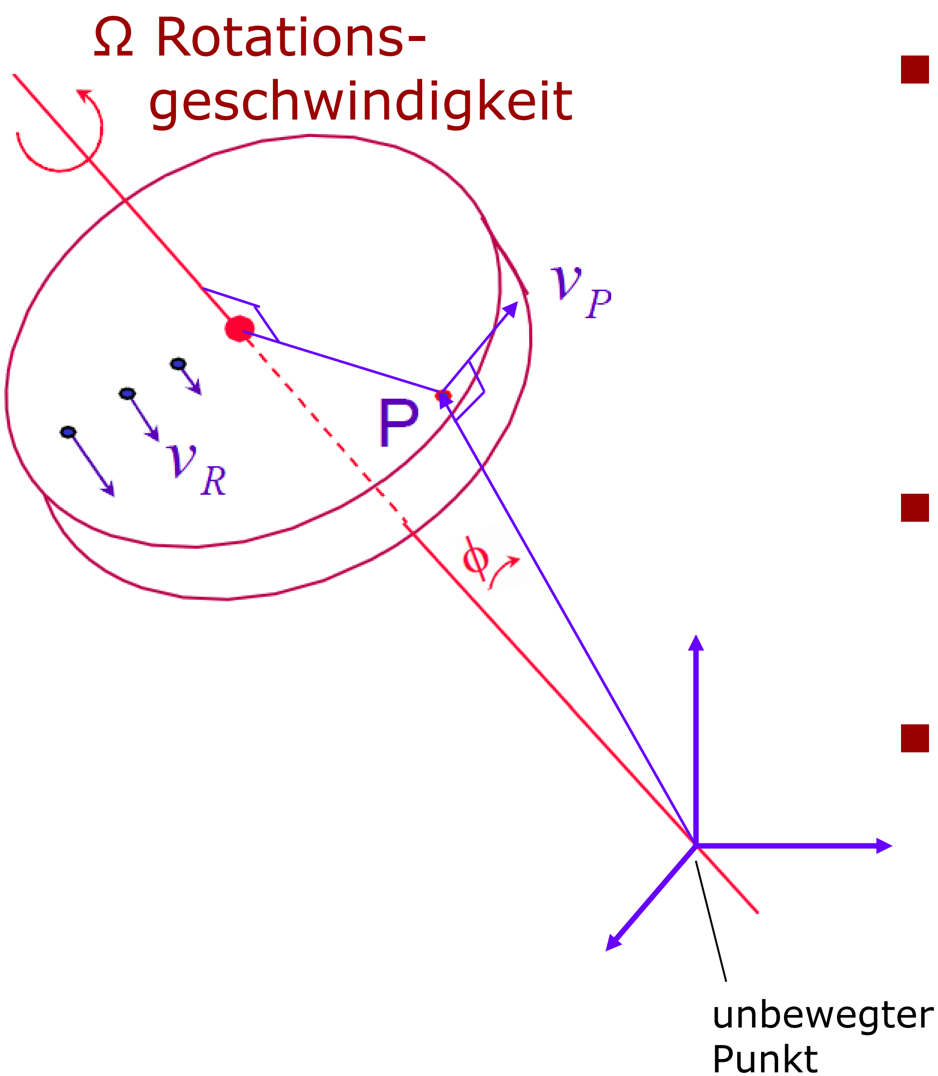
Rotationsbewegung



Rotationsachse

- Wie groß ist die Lineargeschwindigkeit von Punkten des rotierenden Starrkörpers?
- Lineargeschwindigkeit hängt von Entfernung zur Rotationsachse ab
- Richtung der instantanen Verschiebung orthogonal zur Normalen auf die Achse und zur Rotationsachse

Rotationsbewegung



- Lineargeschwindigkeit von v_P ist proportional zu
  - $||\Omega||$
    Rotationsgeschwindigkeit
  - $||P \sin\varphi||$
    Länge der Normalen auf Achse
- Orthogonalität
  - $v_p \perp \Omega$
  - $v_p \perp P$
- Kreuzprodukt

$$\boxed{v_P = \Omega \times P}$$

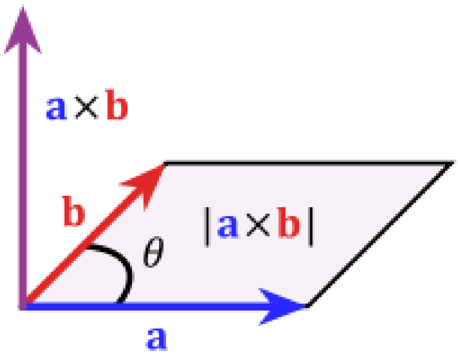
Kreuzprodukt als Operator

- Gegeben zwei Vektoren ist das Kreuzprodukt

$$a=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta\, \boldsymbol{n}$$

Einheitsvektor orthogonal zu $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$



- Ziel: $c = a \times b \Rightarrow c = \hat{a} b$

Vektor Matrix

- Kreuzprodukt durch Multiplikation mit schiefsymmetrischer Matrix

$$c = \hat{a} b = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

Operator für Rotation Ω

- Gegeben: Rotation Ω und Punkt P

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

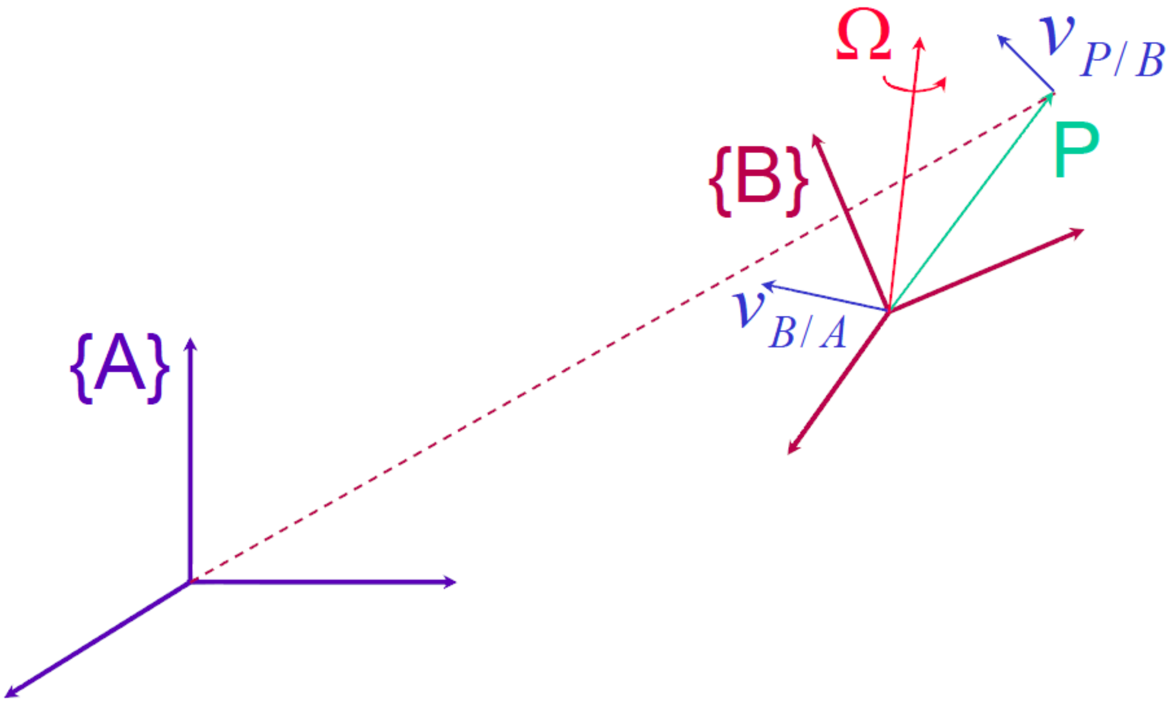
- Ziel: $v_P = \Omega \times P \Rightarrow v_P = \hat{\Omega} P$

$$\Omega \times \Rightarrow \hat{\Omega}$$

- Berechnung der Lineargeschwindigkeit:

$$v_P = \hat{\Omega} P = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Translation und Rotation



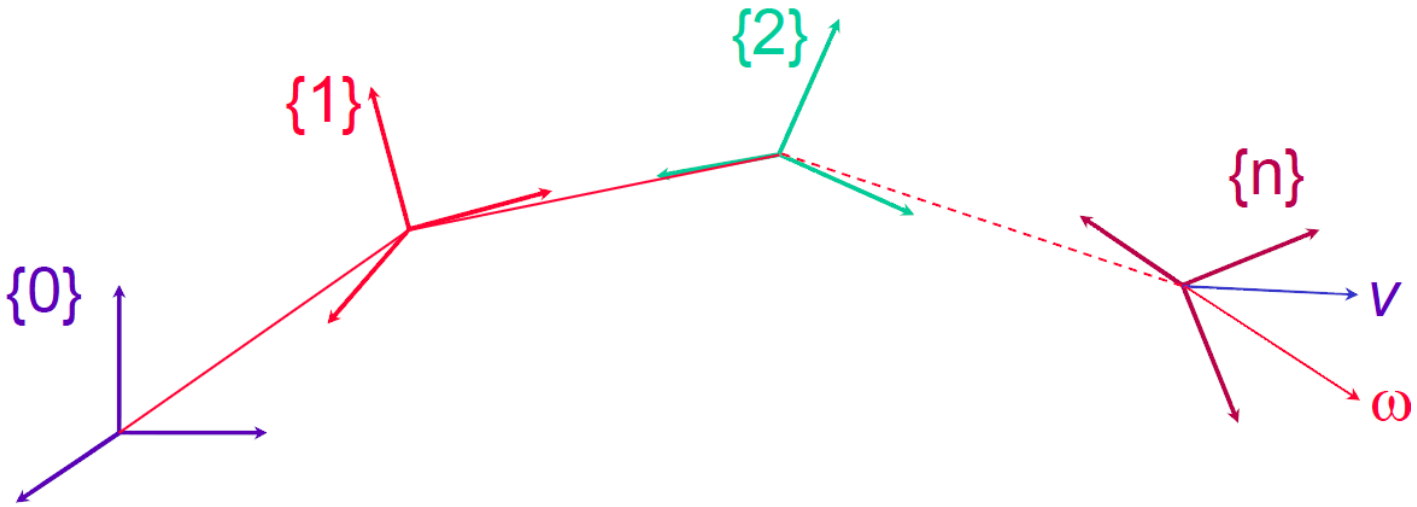
- Lineargeschwindigkeit eines Punkts P:

$$\boxed{v_{P/A} = v_{B/A} + v_{P/B} + \Omega \times P_B}$$

- Auf Koordinatensystem {A} bezogen:

$${}^{A}v_{P/A} = {}^{A}v_{B/A} + {}^{A}_{B}R.\,{}^{B}v_{P/B} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R.\,{}^{B}P_{B}$$

Geschwindigkeits-Propagierung in kinematischer Kette



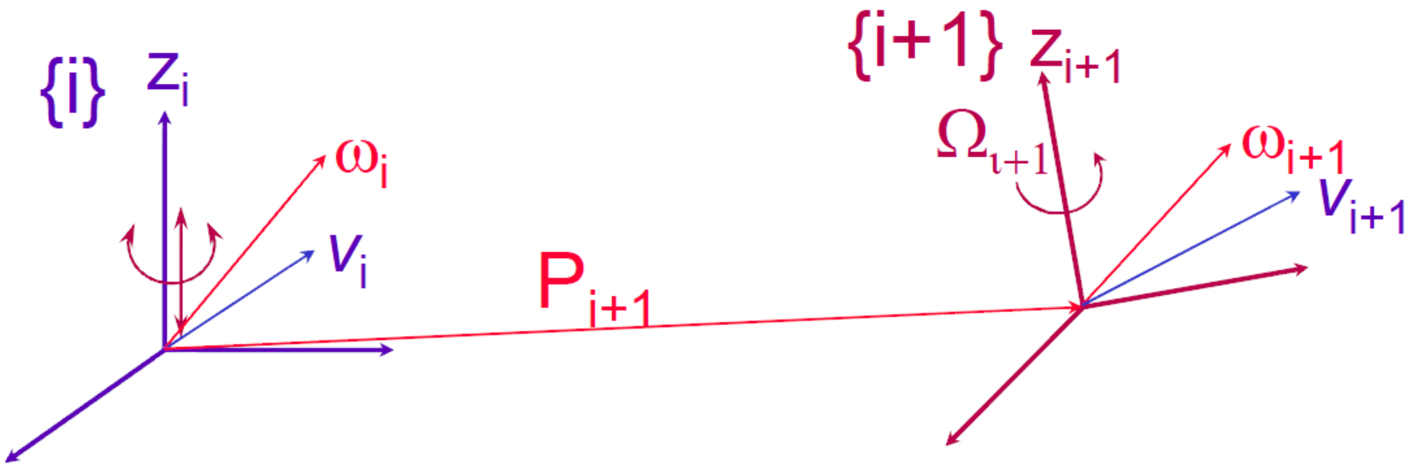
- Endeffektor-Geschwindigkeit

$$\dot{x} \to \begin{cases} v & \text{Lineargeschwindigkeit} \\ \omega & \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{cases}$$

- Jacobi-Matrix vermittelt zwischen Gelenkgeschwindigkeiten und Endeeffektor-Geschwindigkeiten

$$\dot{x} = J(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Geschwindigkeitspropagierung



- Linear

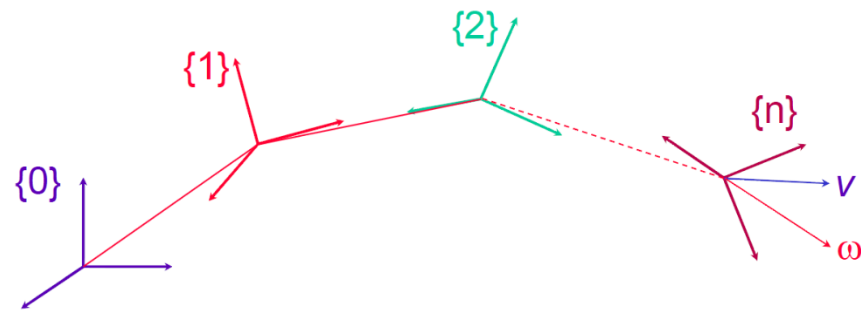
$$\boxed{v_{i+1} = v_i + \omega_i \times P_{i+1} + \dot{d}_{i+1} . Z_{i+1}}$$

nur für Lineargelenke

- Rotation

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + \Omega_{i+1} \\ \Omega_{i+1} &= \dot{\theta}_{i+1} . Z_{i+1} \end{aligned}}$$

Geschwindigkeitspropagierung



- Start in Gelenk 0:
  $v_0=0$, $\omega_0=0$
  in System {0}
- Von Gelenk i nach Gelenk i+1:

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R.{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}.{}^{i+1}Z_{i+1}$$

$$^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R.({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}.{}^{i+1}Z_{i+1}$$

- Im Gelenk n: ${}^{n}v_n$, ${}^{n}\omega_n$
- Rücktransformation in Basis-System:

$$\begin{pmatrix} {}^{0}v_n \\ {}^{0}\omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{0}_{n}R & 0 \\ 0 & {}^{0}_{n}R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{n}v_n \\ {}^{n}\omega_n \end{pmatrix}$$

Beispiel für Propagierung

- Arm mit drei Drehgelenken

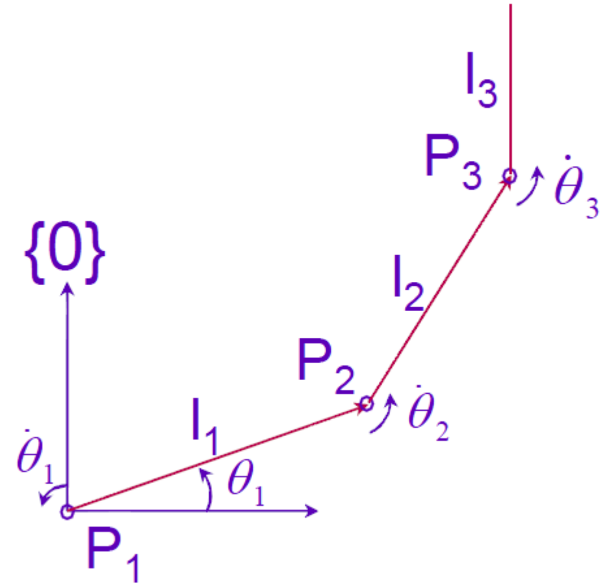
$$v_{i+1} = v_i + \omega_i \times P_{i+1}$$

- Propagierung

$$v_{P_1} = 0 \qquad {}^0\omega_1 = \dot{\theta}_1 . {}^0 Z_1$$

$$v_{P_2} = v_{P_1} + \omega_1 \times P_2$$

$$v_{P_3} = v_{P_2} + \omega_2 \times P_3$$



- Bezug auf System {0}:

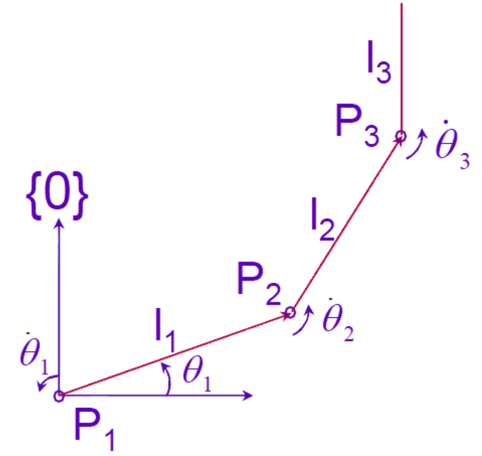
$${}^0 v_{P_2} = 0 + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} l_1 . c_1 \\ l_1 . s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 . s_1 \\ l_1 . c_1 \\ 0 \end{bmatrix} . \dot{\theta}_1$$

Beispiel für Propagierung II

$$^{0}v_{P_3} = {}^{0}v_{P_2} + {}^{0}\omega_2 \times {}^{0}P_3$$

$$^{0}v_{P_3} = \begin{bmatrix} -l_1.s_1 \\ l_1.c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.\dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).{}^{0}P_3$$

$$\begin{bmatrix} l_2.c_{12} \\ l_2.s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} -l_1.s_1 \\ l_1.c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.\dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -l_2.s_{12} \\ l_2.c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

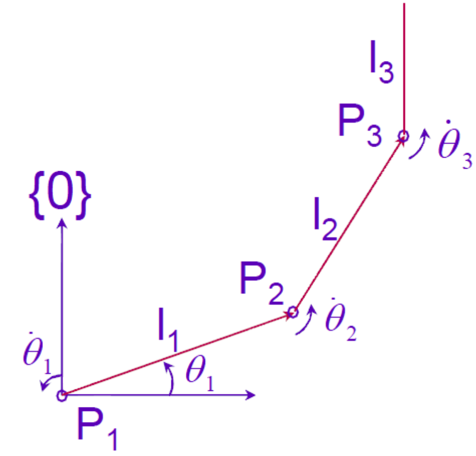
- Rotation:

$$^{0}\omega_3 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3).{}^{0}Z_0$$

Beispiel: Jacobimatrix

- Lineargeschwindigkeit

$$ {}^{0}v_{P_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_v} . \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$



- Rotationsgeschwindigkeit

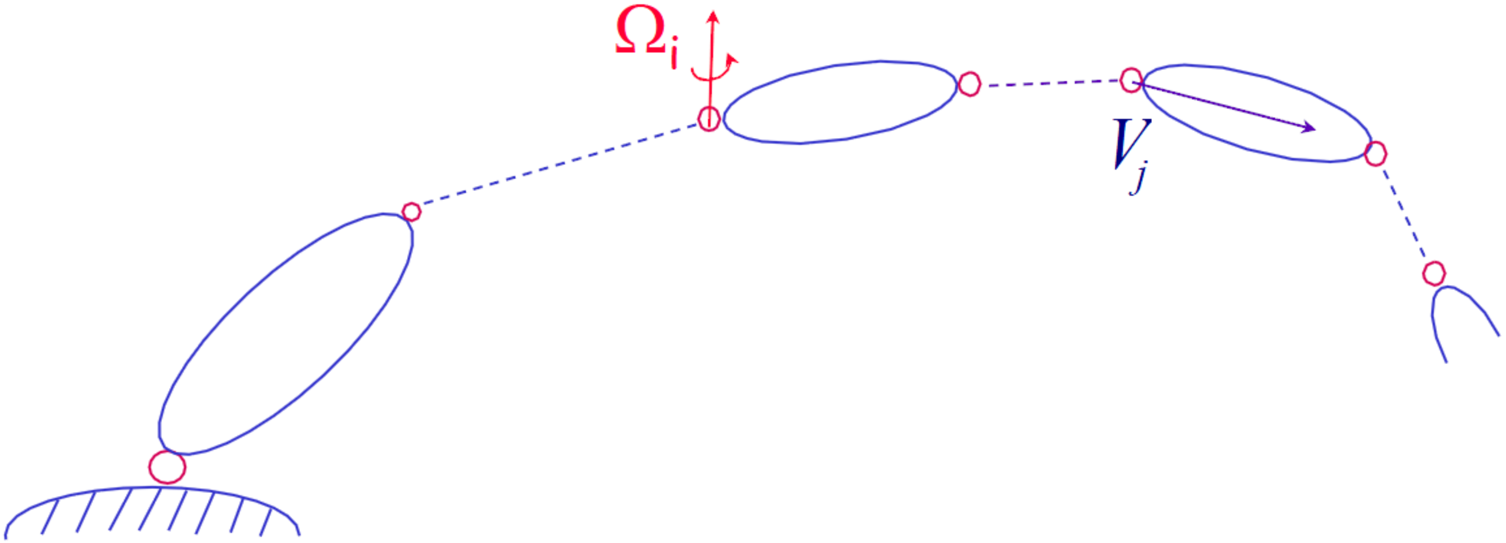
$$ {}^{0}\omega_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{J_\omega} . \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$

- Zusammen:

$$ \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = J . \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} $$

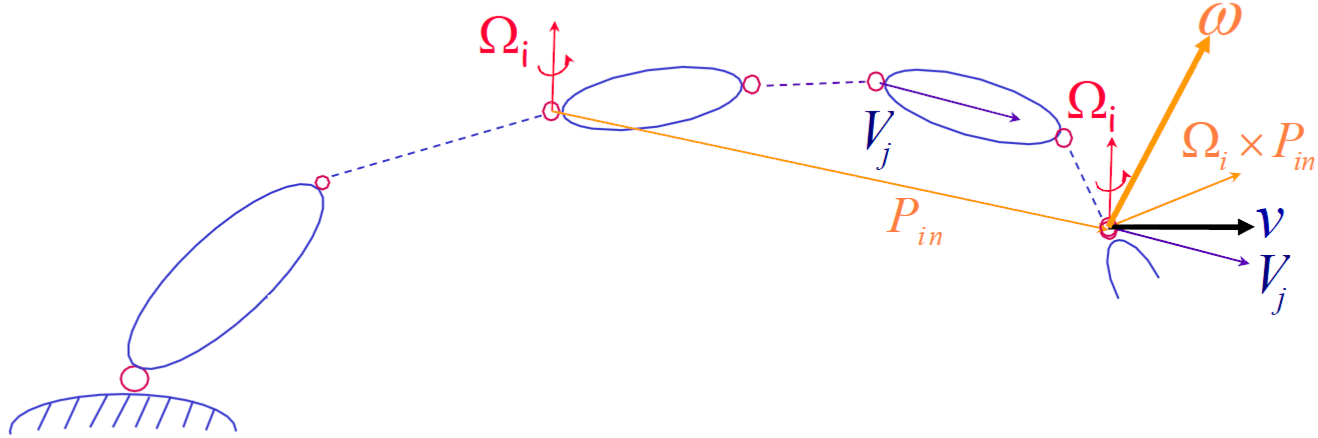
Jacobimatrix: Explizite Form

- Kinematische Kette



- Drehgelenk: $\Omega_i = Z_i \dot{q}_i$
- Lineargelenk: $V_i = Z_i \dot{q}_i$

Jacobimatrix: Explizite Form



- Einflüsse auf Endeffektor:

	Lineargelenk	Drehgelenk
Lineargeschw.	V_j	$\Omega_i \times P_{in}$
Winkelgeschw.	—	Ω_i

- Lineargeschwindigkeit des Endeffektors

$$v = \sum_{i=1}^{n} [\in_i V_i + \overline{\in}_i (\Omega_i \times P_{in})] \quad \Leftarrow \quad V_i = Z_i \dot{q}_i$$

- Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \overline{\in}_i \Omega_i \quad \Leftarrow \quad \Omega_i = Z_i \dot{q}_i$$

Jacobimatrix: Explizite Form

- Lineargeschwindigkeit des Endeffektors

$$v = \sum_{i=1}^{n} [\epsilon_i Z_i + \bar{\epsilon}_i (Z_i \times P_{in})] \dot{q}_i$$

$$v = \begin{bmatrix} \epsilon_1 Z_1 + \bar{\epsilon}_1 (Z_1 \times P_{1n}) & \epsilon_2 Z_2 + \bar{\epsilon}_2 (Z_2 \times P_{2n}) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{v = J_v \dot{q}}$$

- Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\epsilon}_i Z_i) \dot{q}_i$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 Z_1 & \bar{\epsilon}_2 Z_2 & \cdots & \bar{\epsilon}_n Z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\omega = J_\omega \dot{q}}$$

Jacobimatrix: Direkte Differentiation

- Betrachte Lineargeschwindigkeit des Endeffektors, die aus Vorwärts-Kinematik kommt:

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}_P = \frac{\partial x_P}{\partial q_1} . \dot{q}_1 + \frac{\partial x_P}{\partial q_2} . \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_P}{\partial q_n} . \dot{q}_n$$

- Jacobimatrix für Lineargeschwindigkeit:

$$J_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_P}{\partial q_1} & \frac{\partial x_P}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_P}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix: Direkte Differentiation

- Mit Rotationsgeschwindigkeiten

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_P}{\partial q_1} & \frac{\partial x_P}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_P}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}_1 . Z_1 & \bar{\epsilon}_2 . Z_2 & \cdots & \bar{\epsilon}_n . Z_n \end{pmatrix}$$

- In Basis-Koordinatensystem {0}

$${}^0J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, {}^0x_P}{\partial q_1} & \frac{\partial\, {}^0x_P}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial\, {}^0x_P}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}_1 . {}^0Z_1 & \bar{\epsilon}_2 . {}^0Z_2 & \cdots & \bar{\epsilon}_n . {}^0Z_n \end{pmatrix}$$

J in Basis-Koordinatensystem

- Rotation der i-ten Gelenkachse in das Basis-Koordinatensystem {0}

$$ {}^{0}Z_i = {}^{0}_{i}R \; {}^{i}Z_i \qquad\qquad {}^{i}Z_i = Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

- Damit ist die Jacobimatrix:

$$ {}^{0}J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}({}^{0}x_P) & \frac{\partial}{\partial q_2}({}^{0}x_P) & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n}({}^{0}x_P) \\ \overline{\in}_1.({}^{0}_{1}R.Z) & \overline{\in}_2.({}^{0}_{2}R.Z) & \cdots & \overline{\in}_n.({}^{0}_{n}R.Z) \end{pmatrix} $$

  - Jeweils die letzte Spalte der Rotationsmatrix wird selektiert

Kinematische Singularität

- Der Endeffektor kann an bestimmten Stellen nicht mehr in bestimmte Richtungen verschoben oder rotiert werden
- Dies entspricht einer Abhängigkeit zwischen Spalten der Jakobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

- In diesem Fall hat die Matrix nicht mehr vollen Rang, also: $\det(J) = 0$
- Determinante hängt nicht von Koordinatensystem ab

$$\det\left({}^{i}J\right) = \det\left({}^{j}J\right) \qquad {}^{B}J = \begin{pmatrix} {}^{B}_{A}R & 0 \\ 0 & {}^{B}_{A}R \end{pmatrix} {}^{A}J$$

Singuläre Konfigurationen

- Setze die Determinante der Jakobi-Matrix Null:

$$\det[J(q)] = 0$$

- Determinante ist Produkt von Funktionen von q:

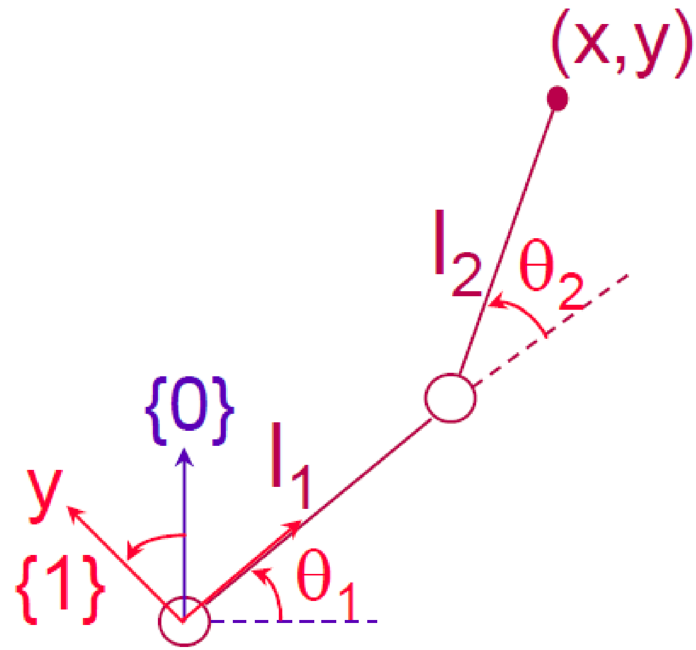
$$\det[J(q)] = S_1(q)S_2(q)\ldots S_s(q) = 0$$

- Nullstellen:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} S_1(q) = 0 \\ S_2(q) = 0 \\ \quad\vdots \\ S_s(q) = 0 \end{array}}$$

Beispiel für Kinematische Singularität

- Arm mit zwei Drehgelenken



- Vorwärts-Kinematik

$$x = l_1 C1 + l_2 C12$$

$$y = l_1 S1 + l_2 S12$$

- Jakobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} -\left(l_1 S1 + l_2 S12\right) & -l_2 S12 \\ l_1 C1 + l_2 C12 & l_2 C12 \end{pmatrix}$$

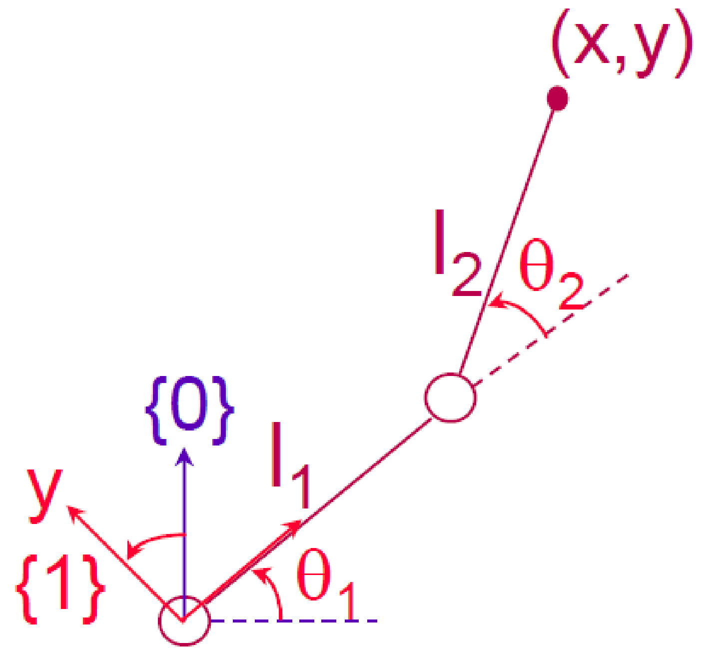
$$\det\left(J\right) = l_1 l_2 S2$$

- Singularität bei $q_2 = k\pi$

Beispiel für Kinematische Singularität

- Betrachte Jacobimatrix in Frame {1}:

$$^{1}J = {}^{1}_{0}R\ {}^{0}J$$



$$^{1}J = \begin{pmatrix} C1 & -S1 \\ S1 & C1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_2 S2 & -l_2 S2 \\ l_1 + l_2 C2 & l_2 C2 \end{pmatrix}$$

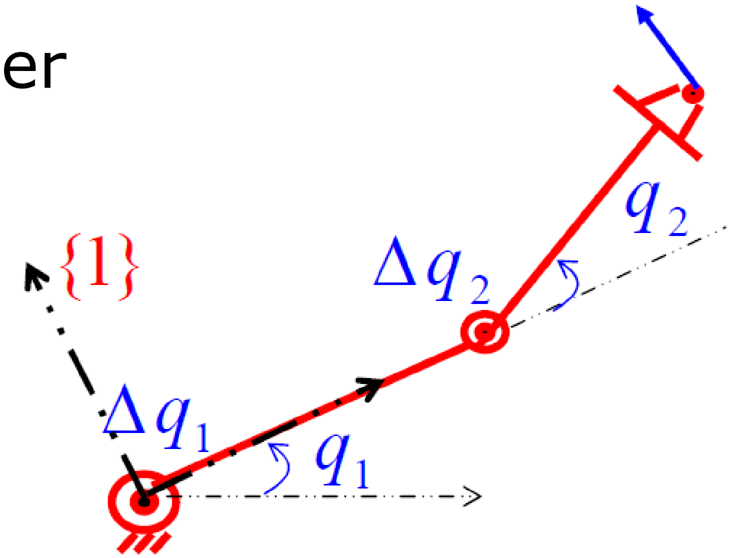
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{pmatrix}$$

- An der Singularität: $\begin{cases} {}^{1}\delta x = 0 \\ {}^{1}\delta y = (l_1 + l_2)\delta\theta_1 + l_2 \delta\theta_2 \end{cases}$

Kleine Veränderungen

- Gegeben kleine Änderung der Endeffektorposition

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$



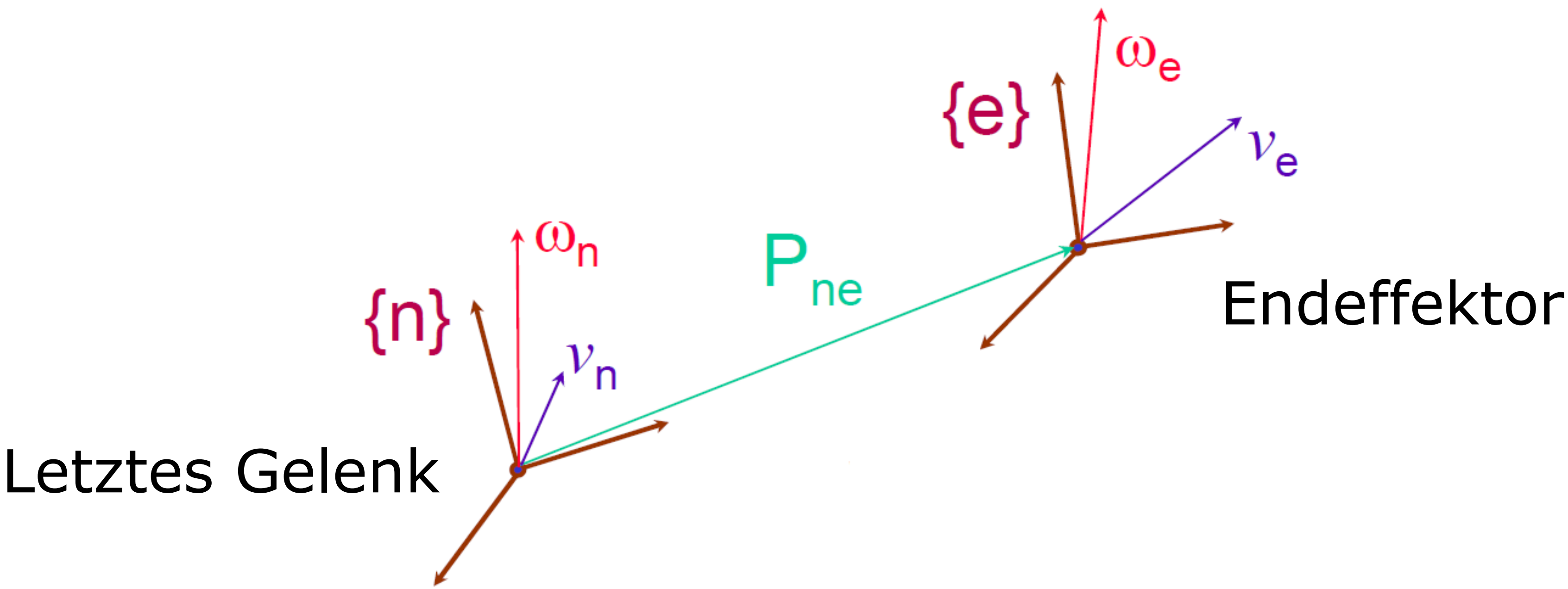
- Dann ergibt sich die Änderung der Gelenkkordinaten mit der inversen Jakobimatrix: $\Delta q = J^{-1} \Delta X$

- Für kleine θ_2:

$$J_{(1)}^{-1} \cong \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1 \theta_2} & \frac{1}{l_1} \\ -\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2 \theta_2} & -\frac{1}{l_1} \end{pmatrix}$$

Division durch Null!

Jacobimatrix des Endeffektors



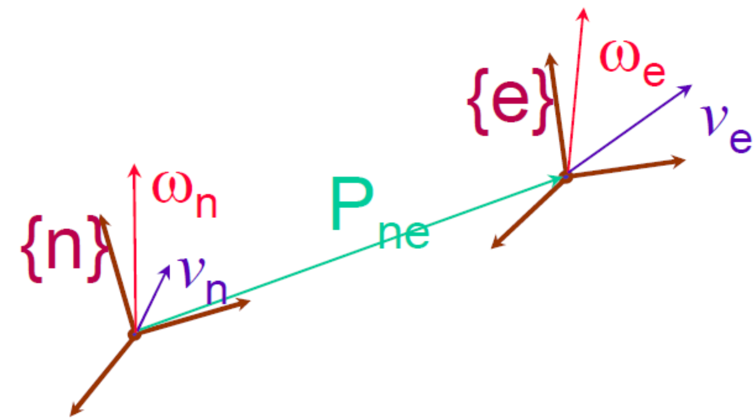
$$v_e = v_n + \omega_n \times P_{ne}$$

$$\begin{cases} v_e = v_n - P_{ne} \times \omega_n \\ \omega_e = \omega_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} v_e \\ \omega_e \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I & -\hat{P}_{ne} \\ \hline O & I \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

Framewechsel für Kreuzprodukt-Operator

- Wir wollen Endeffektor-Jakobimatrix in Frame {0}

$$ {}^0J_e = \begin{pmatrix} I & -{}^0\hat{P}_{ne} \\ 0 & I \end{pmatrix} {}^0J_n $$



- Wir brauchen Kreuzprodukt-Operator in Frame {0}

$$ {}^0P \times {}^0\omega = {}^0_nR.({}^nP \times {}^n\omega) $$

$$ {}^0\hat{P}.{}^0\omega = {}^0_nR.({}^n\hat{P}.{}^n\omega) = {}^0_nR.({}^n\hat{P}.{}^0_nR^T.{}^0\omega) $$

$$ \boxed{{}^0\hat{P} = {}^0_nR \; {}^n\hat{P} \; {}^0_nR^T} $$

- Ausgehend von ${}^nJ_n$: $$ {}^0J_e = \begin{pmatrix} {}^0_nR & -{}^0_nR \, {}^n\hat{P}_{ne} \, {}^0_nR^T \\ 0 & {}^0_nR \end{pmatrix} {}^nJ_n $$

Inverse Kinematik mit inverser Jacobimatrix

- Jacobimatrix J linearisiert Beziehung zwischen Änderungen der Gelenkwinkeln δθ und Änderungen der Endeffektorpose δx an der Stelle θ:

$$\delta x = J(\theta)\delta\theta$$

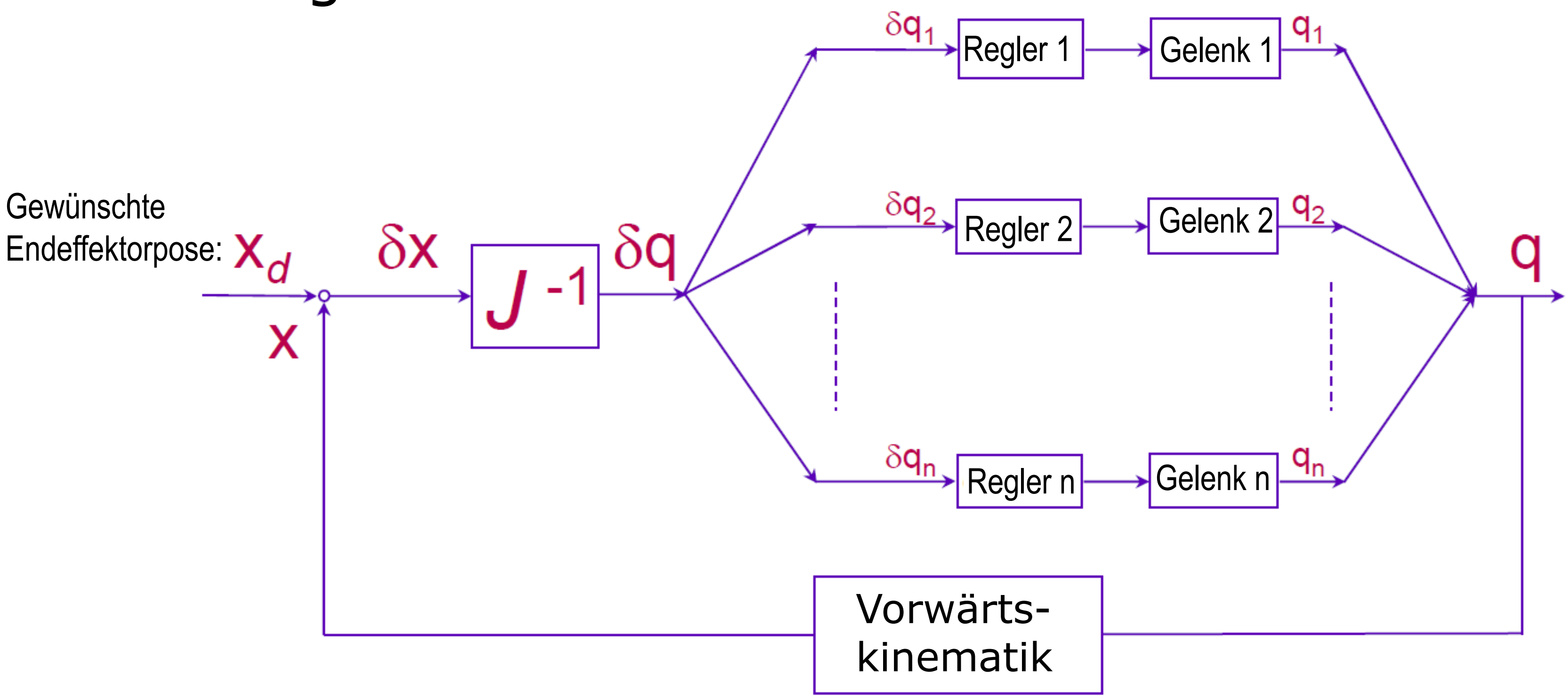
- Wenn J invertierbar (keine Singularität):

$$\delta\theta = J^{-1}(\theta)\delta x$$

- Ausgehend von Gelenkstellung θ:
  - Vorwärtskinematik gibt Endeffektorpose: $x = f(\theta)$
  - Differenz zu gewünschter Pose x_d: $\delta x = x_d - x$
  - Notwendige Gelenkwinkeländerung: $\delta\theta = J^{-1}\delta x$
  - Resultierender Gelenkwinkel: $\theta^+ = \theta + \delta\theta$

Reglung der Endeffektorpose

- Rückführung auf Positionsregelung der Einzelgelenke



- Funktioniert bei langsamen Bewegungen
- Keine Berücksichtigung der Dynamik!