Prof. Dr. Reinhard Klein
Alexander Schier

Universität Bonn
Institut für Informatik II
Wintersemester 2023/2024 29.11.2023

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 8

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 06.12.2023, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Matrixpotenzen mit EVD, *4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass für diagonalisierbare Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwertzerlegung $A = VDV^{-1}$ gilt:

$$A^k = VD^kV^{-1}$$

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall A^2.

Aufgabe 2 (Kondition unitären Matrixmultiplikation, *4 Punkte*)

a) Seien unitäre Matrizen $Q_1, \dots, Q_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Matrix $A = (\tilde{A} + E) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit gestörten Eingabedaten und $\frac{\|E\|}{\|\tilde{A}\|} = \mathcal{O}(\epsilon_M)$ gegeben. Zeige, dass $Q_k \cdots Q_1 A$ (mit exakter Matrixmultiplikation) rückwärtsstabil ist.

b) Wie sieht die Matrixkondition aus, wenn die Matrizen Q_i nicht unitär sind?

Aufgabe 3 (Rückwärtsstabilität, *4 Punkte*)

Seien $v, w \in \mathbb{C}^m$ Vektoren. Wir betrachten den folgenden Algorithmus zur Berechnung von v^*w:

Algorithmus 1 : Berechnung von v^*w

$s_0 \leftarrow 0$
for i=1, ..., m **do**
| $s_i \leftarrow s_{i-1} + \bar{v}_i \cdot w_i$
end
return s_m

Der Algorithmus wird auf einer Maschine mit Maschinengenauigkeit ε_M implementiert. Zeige, dass dieser Algorithmus rückwärtsstabil ist. Genauer soll gezeigt werden, dass es ein $\delta v \in \mathbb{C}^m$ gibt so, dass $(v + \delta v)^*w$ das Ergebnis des Algorithmus ist und für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$\frac{|\delta v_i|}{|v_i|} \leq (m + 2 - i) \cdot \varepsilon_M + O(\varepsilon_M^2).$$

Aufgabe 4 (Hauptkomponentenanalyse, *4 Punkte*)

Mit der Hauptkomponentenanalyse (PCA - principal component analysis) kann man zum Beispiel in Punktwolken die Hauptrichtungen feststellen.

Gegeben eine Matrix mit 2D Punkten $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, kann man die Hauptkomponenten ausrechnen mit Hilfe der der Kovarianzmatrix $X^TX = (\hat{X}-\mu)^T(\hat{X}-\mu)$ der Punkte, wobei μ der Mittelwert ist. Die Zerlegung $X^TX = V\Sigma^2V^T$ enthält in der Matrix V die Hauptrichtungen und in der Diagonalmatrix Σ die Skalierung der Richtungen.

- Implementiere im bereitgestellten Framework die Berechnung der Hauptkomponenten einer Punktwolke und visualisiere die Hauptrichtungen in der Punktwolke (Hierzu kann `plt.quiver` von matplotlib genutzt werden) mit Vektoren, die mit den Werten in Σ skaliert sind. Berechne außerdem das Verhältnis der Hauptrichtungen.

Hinweis: Die numerisch bestimmten Hauptrichtungen sind möglicherweise abhängig von den Zufallsdaten gespiegelt zu der analytisch gegebenen Lösung. Das stellt keinen Fehler dar.

Bonusaufgabe 5 (Permutationsgruppe, *2 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Menge $P_n \subset \{0,1\}^{n\times n}$ der $n \times n$ Permutationsmatrizen eine Gruppe ist bezüglich der Matrixmultiplikation $\cdot : P_n \times P_n \to P_n$. Zeigen Sie dazu, dass die Gruppenaxiome gelten.

Hinweis: Axiome zu allgemeinen Matrizen und Axiome die aus Eigenschaften der Matrizen in P_n folgen dürfen ohne Beweis verwendet werden.