Lineare Algebra

BA-INF-021, MB 05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 4

Aufgabe 1 (2+2+2+2 Punkte)**.** Es sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Sie dürfen hier Satz 3.15(a),(b) benutzen. Es sei $\lambda, \mu \in R$. Zeigen Sie unter expliziter Begründung der Einzelschritte, dass gilt:

(a) $-(-\lambda) = \lambda$
(b) $(-1) \cdot (-1) = 1$
(c) $(-\lambda) \cdot \mu = -(\lambda \cdot \mu)$
(d) $-(\lambda + \mu) = (-\lambda) + (-\mu)$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Ein Ring $(R, +, \cdot, 0, 1)$ heißt *nullteilerfrei*, wenn stets für alle $a, b \in R$ mit $a \cdot b = 0$ gilt: $a = 0$ oder $b = 0$. Zeigen Sie, dass in einem nullteilerfreien Ring die so genannte Kürzungsregel gilt, das heißt:

$$\forall a, b, c \in R \setminus \{0\} \ (\, a \cdot b = a \cdot c \implies b = c\,)$$

Aufgabe 3 (3 Punkt)**.** Geben Sie einen nicht-nullteilerfreien Ring an und ein konkretes (Gegen-)Beispiel für das Versagen der Kürzungsregel. Begründen Sie Ihre Wahl.

Hinweis: Denken Sie an endliche Strukturen aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)**.** Seien $m \geq 2$ und a, b, a', b' ganze Zahlen, für die gilt: $a \equiv b \mod m$ und $a' \equiv b' \mod m$. Beweisen Sie folgende Rechenregeln und benutzen Sie diese, um die Frage am Ende beantworten:

(a) $a + a' \equiv b + b' \mod m$
(b) $a \cdot a' \equiv b \cdot b' \mod m$
(c) Auf welche Ziffer endet die Zahl 13^{13}.

Hinweis: Für (c) gibt ein Ausrechnen der Potenz am Rechner und das Ablesen der letzten Ziffer keine Punkte.

Aufgabe 5 (3+2+2+3 Punkte)**.** Schnallen Sie sich an und konzentrieren Sie sich besonders bei diesem neuen Begriff: Es sei n eine natürliche Zahl. Dann bezeichnen wir als *Permutation auf n Elementen* eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Eine bijektive Abbildung ist dabei eine Abbildung, die keine der Zahlen $1, \ldots, n$ doppelt im Wertebereich der Funktion σ aufzählt. Für Permutationen gibt es folgende Kurzschreibweise, die sich beispielhaft für 4 Elemente selbst erläutert:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ bedeutet } \sigma(1) = 4,\ \sigma(2) = 1, \text{ usw.}$$

Sei nun $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen auf n Elementen. Wir definieren eine Operation $\circ$ auf $\mathfrak{S}_n$ wie folgt: Für $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ sei $\sigma \circ \tau$ die Permutation mit

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$$

für $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ eine Gruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ beide kommutativ sind.
(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_3$ nicht kommutativ ist.
(d) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ für kein $n \geq 3$ kommutativ ist.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 05. Mai, 12:00 Uhr.