Lineare Algebra

BA-INF-021, MB05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 10

Präsenzaufgabe. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, sodass für die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ gilt $U = \mathrm{Lös}(A, 0)$. Dabei ist $\mathrm{Lös}(A, 0)$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

$$\text{(a) } U = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(b) } U = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ an, so dass für $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ das Matrizenprodukt $T \cdot A$ aus A durch zyklische Permutation der Zeilen entsteht, d.h. die erste Zeile wird zur zweiten, die zweite zur dritten, ..., und schließlich die m-te zur ersten.

Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung der in der Vorlesung angegebenen Matrix $C(r, s)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass das Produkt zweier Spiegelungen in der reellen Ebene eine Drehung ist, also:

$$S_{\frac{\varphi}{2}} \cdot S_{\frac{\psi}{2}} = D_{\varphi - \psi}.$$

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $A \cdot (\lambda E_n) = (\lambda E_n) \cdot A$

(b) Gilt $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $B = \lambda E_n$

Hinweis: Betrachten Sie in für (b) die spezielle Matrix A, deren Einträge in der i-ten Spalte eins und sonst null sind.

Aufgabe 4 (2+2+3 Punkte)**.** Für eine reelle quadratische $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ definieren wir die Spur dieser Matrix wie folgt:

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung spur ist linear. Zwischen welchen Vektorräumen operiert diese Abbildung?

(b) Für $A, B \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\operatorname{spur}(A \cdot B) = \operatorname{spur}(B \cdot A).$$

(c) Für $A, T \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, wobei T invertierbar ist, gilt:

$$\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(T^{-1} \cdot A \cdot T).$$

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation[1] auf der Menge $\operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist:

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \text{Es gibt eine invertierbare Matrix } T, \text{ so dass } A = T^{-1} \cdot B \cdot T \text{ gibt.}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)**.** Seien $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R}), B \in \operatorname{Mat}(n \times r, \mathbb{R})$. Wir wollen Eigenschaften vom Produkt von zwei Matrizen betrachten. Man kann zeigen, dass sich der Rang von $A \cdot B$ wie folgt abschätzen lassen kann - davon können Sie ausgehen, dies müssen Sie nicht beweisen:

$$\operatorname{Rg}(A) + \operatorname{Rg}(B) - n \;\leq\; \operatorname{Rg}(A \cdot B) \;\leq\; \min\{\operatorname{Rg}(A), \operatorname{Rg}(B)\}.$$

Finden Sie Beispiele für Matrizen A und B, sodass

(a) das erste Gleichheitszeichen gilt.

(b) das zweite Gleichheitszeichen gilt.

(c) die erste Ungleichung scharf ist, also kein Gleichheit gilt.

(d) die zweite Ungleichung scharf ist.

Sie können hier insgesamt **30 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **25 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe über eCampus in Ihrem Tutorium bis Freitag, 23. Juli, 12:00 Uhr.

---

[1] Eine Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv $(a \sim a)$, symmetrisch $(a \sim b \longrightarrow b \sim a)$ und transitiv $(a \sim b \wedge b \sim c \longrightarrow a \sim c)$ ist.