Endliche Deterministische Automaten DFAs

0

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ Sprachen akzeptieren / entscheiden

$\delta^*: Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$ $L(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F \}$

Grenzen? DFA für $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ex. nicht $\varepsilon, 0^1, 0^2, \ldots, 0^m$ $m = |Q|$

$0^i, 0^j$ nicht "unterscheidbar"

Zum Prinzip erheben! Sprache muss "anders" sein!

DFA akzeptiert $L \Longrightarrow$ Pumping Lemma für L gilt!

Pumping Lemma: DFA akzeptiert L dann gilt: (Aussage des PL)

$\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $\forall z \in L$ gilt: $\Big(|z| \geq n \Longrightarrow \exists u, v, w \in \Sigma^*$ mit $z = uvw$

und $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ und $\forall i \geq 0$ gilt $uv^iw \in L \Big)$

1

Beweistechnik

$(A \Rightarrow B)$ (L wird von DFA akzeptiert $\Rightarrow$ PL-Aussage gilt)

$\Updownarrow$

$(\neg B \Rightarrow \neg A)$ (es ex. ein Gegenbsp. zur PL-Aussage $\Rightarrow$ L wird nicht v. DFA akzeptiert)

Zeige: $\neg B$

Technische Anwendung: Ann: DFA M ex. der L akzeptiert:

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists z \in L, |z| \geq n$

sodass für alle Zerlegungen $z = uvw$

mit $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$ gilt: $\exists i \geq 0 : uv^i w \notin L$.

3.2.2 PL als Spiel auffassen.

Peter (Prover) will Vera (Verifier) überzeugen dass L nicht durch DFA entschieden wird.

1. Runde: Vera wählt <u>bel.</u> $n \in \mathbb{N}$
2. Runde: Peter <u>wählt</u> Wort $z \in L$ $|z| \geq n$
3. Runde: Vera wählt <u>bel.</u> Zerlegung $z = uvw$ $\underline{|uv| \leq n \quad |v| \geq 1}$
4. Runde: Peter <u>wählt</u> $i \geq 0$ mit $uv^iw \notin L$.

Bsp $\{0^i 1^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

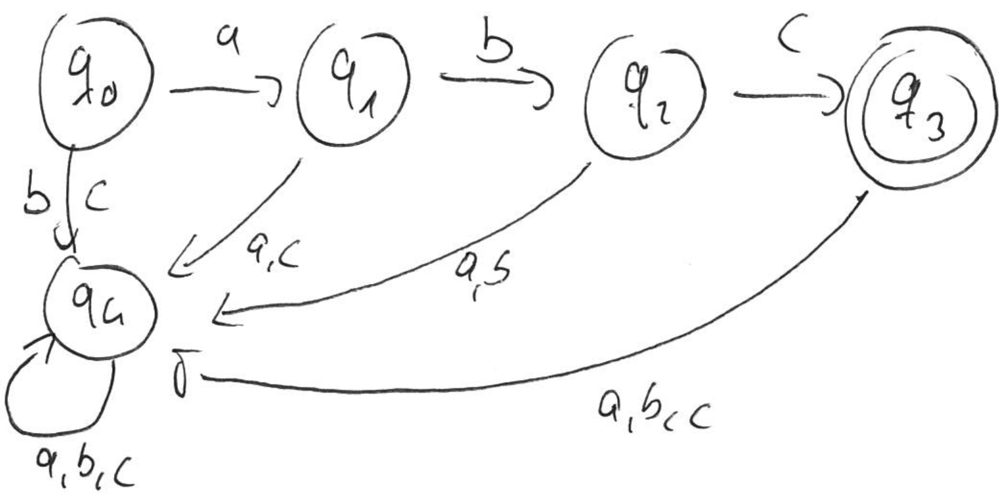
1. Runde n gewählt
2. Runde $z = 0^n 1^n$ $|z| \geq 2n$
3. Runde $z = uvw$ $|uv| \leq n$ $|v| \geq 1$
4. Runde $uv = 0^g$; $1 \leq g \leq n$, $v = 0^l$; $l \geq 1$
$i = 2$ $uv^2w \notin L$ ↯

BSP Endliche Sprache!

Wird immer von einem DFA entschieden!

PL? $(z \in L, |z| \geq \cancel{n} \Rightarrow \dots)$ So ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Tatsache, dass die Voraussetzung falsch ist existiert immer!

$L = \{abc\}$ $\{a, b, c\} = \Sigma$



Achtung $(A \Rightarrow B)$

$$L = \{a,b\}^* \cup \{c^{\ell} a^n b^n \mid \ell, n \geq 0\}$$

erfüllt Aussage des PL.

Aber kann nicht von DFA entschieden werden!

Pumping Lemma: Anwendung!

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a > |w|_b\}, \quad \Sigma = \{a,b\}$$

Ann: DFA akzeptiert $L \Rightarrow$ PL gilt:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ das n aus dem PL
2. **Wähle** $z = b^n a^{n+1}$ $\quad |z| \geq n \quad z \in L$
3. **Betrachte** bel. Zerlegung $z = uvw$ $\quad |\cancel{u}v| \leq n \quad |v| \geq 1 \quad |uv| = \ell \leq n, \ell \geq 1$
   $\Rightarrow v = b^s$ mit $uv = b^{\ell - s} b^s$, $s \geq 1$, $w = b^{n-\ell} a^{n+1}$

4. <u>Wähle</u> $i = n+1$ $\quad uv^iw = b^{r-s}(b^s)^{n+1}\, b^{n-r}\, a^{n+1}$

$$= b^n\, b^{s\cdot n}\, a^{n+1} \;\underline{\underline{\notin L}} \qquad ↯$$

$$n + s\cdot n = (1+s)\,n \geq n+1\,, \quad s \geq 1$$

3.2.3 Nichtdeterministische endliche Automaten

+ deterministisch $\rightsquigarrow$ stets genau festgelegter Ablauf.
+ nicht deterministisch $\rightsquigarrow$ mehrere <u>Übergänge</u>, "raten"

DFA einfaches Modell, NFA leichte Erweiterung!

Definition 3.9 (NFA) <u>N</u>ichtdeterministischer <u>E</u>ndlicher <u>A</u>utomat

non-deterministic

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad \text{wie DFA}$$

<u>aber</u> $\delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$

$(q, a) \longmapsto$ Menge der möglichen Folgezustände, die ich von q aus beim Einlesen von a erreichen kann.

7

δ^* definieren:
(über δ)

$$\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\} \quad \text{(i)}$$

$$\delta^*(q, a) := \delta(q, a) \subseteq Q \quad \text{(ii)}$$

$$\delta^*(q, w) := \bigcup_{p \in \delta(q, w_1)} \delta^*(p, w_2 w_3 \cdots w_n) \quad \text{(iii)}$$

$w = w_1 w_2 \cdots w_n$, $w_i \in \Sigma$, $n \geq 2$

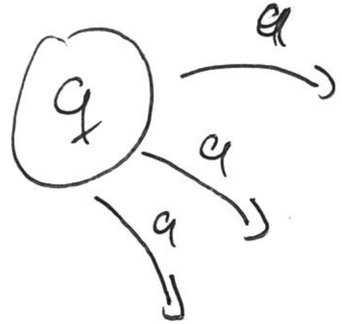
$\delta^*(q_0, w) \mathrel{\hat{=}}$ Menge aller möglichen erreichbaren Zustände beim Abarbeiten von w

M "akzeptiert" w $:\Longleftrightarrow$ $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$

$$L(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w \}$$

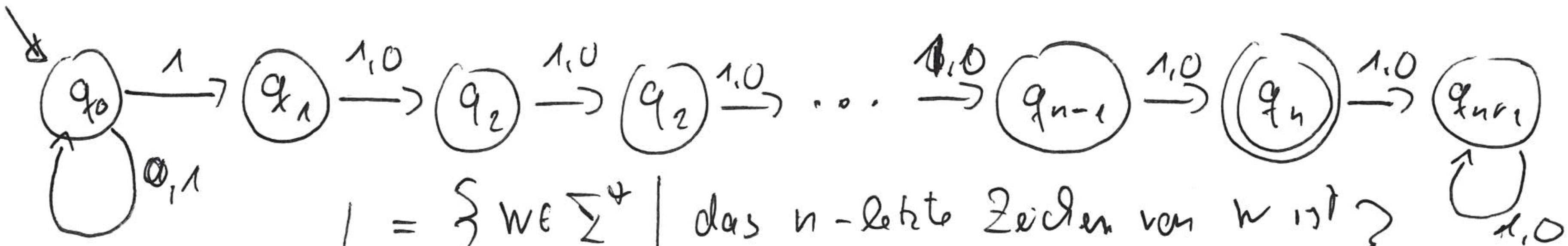
"die von M akzeptierte Sprache"

Bsp NFA / Darstellung



Mehrere Pfeile mit gleichem $a \in \Sigma$.

M: $\Sigma = \{0,1\}$



$L = \{ w \in \Sigma^* \mid$ das n-letzte Zeichen von w ist eine 1 $\}$

$L(M) \overset{?}{=} L$

I. Fall $u\underline{1}v = w$ $\left(v \in \{0,1\}^{n-1} \right)$: Lesen u und bleiben in q_0! Dann det. Wechsel bis q_n. $w \in L(M)$

II Fall $\underline{u}\,\underline{0}v = w$ Wechsel zu q_1 notwendig fürs Akzeptieren! Nur von oder nach 0 möglich $\Rightarrow$ keine Akzeptanz mit M möglich.

DFA für diese Sprache?

Problem: DFA blind für die Zukunft.

Wann kommt das n-letzte Zeichen?

NFA rät diesen Moment passend.

DFA braucht mehr Zustände!

Theorem 3.10: DFA für diese L benötigt mindestens 2^n Zustände.

Beweis: (indirekt) Sei M DFA der L akzeptiert und $< 2^n$ Zustände.

In $\{0,1\}^n$ sind 2^n verschiedene Wörter (Kombinatorik, Induktion)

Beh: Für je zwei dieser Wörter gerät M stets in unterschiedliche Zustände

$\Rightarrow$ 2^n verschiedene Zustände ↯

10

<u>Beweis</u> (Beh.) <u>indirekt</u> <u>Ann.</u>: $x \neq y$ der Länge n $x, y \in \{0,1\}^n$

mit $\underbrace{\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)}_{(*)}$

$x = x_1 x_2 \ldots x_n$ $\qquad x \neq y \underset{\text{O.B.d.A}}{\Longrightarrow} x_i = 0,\ y_i = 1 \quad 1 \leq i \leq n$

$y = y_1 y_2 \ldots y_n$

Betrachte: $x' = x0^{i-1} = x_1 \ldots x_{i-1} \underset{x_i}{\underline{0}} x_{i+1} \ldots x_n | 0 \ldots 0 \notin L$

$y' = y0^{i-1} = y_1 \ldots y_{i-1} \underset{y_i}{\underline{1}} y_{i+1} \ldots y_n\, 0 \ldots 0 \in \underline{\underline{L}}$

$\Longrightarrow \delta^*(q_0, x') \underset{\text{Def } \delta^*}{=} \delta^*(\delta^*(q_0, x), 0^{i-1}) \underset{(*)}{=} \delta^*(\delta^*(q_0, y), 0^{i-1}) \underset{\text{Def } \delta^*}{=}$

$\delta^*(q_0, y') \in F$ ↯

$\Longrightarrow x' \in L$ ↯

□

<u>Frage:</u> können die NFAs "mehr" als die DFAs? Nein!

<u>Theorem 3.11:</u> Zu jedem NFA mit n Zuständen gibt es einen DFA mit 2^n Zuständen, der dieselbe Sprache entscheidet.

<u>Beweis:</u> (<u>Konstruktion</u>) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bel. NFA

DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ $|Q| = n$

$Q' := \mathcal{P}(Q)$

$\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ Vorschrift: $(q, a) \longrightarrow \bigcup_{p \in q} \delta(p, a)$

$F' := \{ q \in \mathcal{P}(Q) \mid q \cap F \neq \emptyset \}$

$q_0' := \{q_0\}$

NFA: δ, δ^*

DFA: δ', δ'^*