Luds - Übungszettel 3

3.1:

a)

i) f_λ ist injektiv für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii) h ist surjektiv.

b)

$$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{falls } 2 \mid x \text{ und} \\ -(x+1)/2, & \text{falls } 2 \nmid x. \end{cases}$$

f ist surjektiv, da jedes $z \in \mathbb{Z}$ im Image von f enthalten ist:

das Urbild einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ unter f ist $2 \cdot z$, falls $z \geq 0$, und $-2 \cdot z - 1$, falls $z < 0$.

f ist injektiv, da für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine einzigartige Abbildung erzeugt wird:

wie in obenstehender Erklärung zur Surjektivität von f gezeigt, stammt jeder Wert der Abbildung von einem anderen ursprünglichen Wert. Zudem ist f für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Da f sowohl surjektiv als auch injektiv ist, ist f bijektiv.

3.2:

a) Eine Relation $R: A \to B$ ist genau dann eine Abbildung, wenn:

$$dom(R) = preim(R) \quad (\Leftrightarrow \forall a \in A : \exists b \in B : a R b)$$

Somit gilt $M = dom(g) = preim(g)$ und $N = dom(f) = preim(f)$.

Da zusätzlich $im(g) \subseteq N$, gilt: $im(g) \subseteq preim(f)$.

Mit anderen Worten: für jeden Wert $m \in M$ hat g eine Zuordnung auf ein $n \in N$, für welches zusätzlich eine Zuordnung durch f auf ein $p \in P$ existiert. Somit gibt es keinen Wert $m \in M$, der durch $f \circ g$ nicht abgebildet werden kann. Somit gilt: $dom(f \circ g) = preim(f \circ g)$, wodurch $f \circ g$ eine Abbildung ist.

b) Bedingung: f ist bijektiv.

Zu zeigen: f ist bijektiv $\Rightarrow \exists f^{-1}$ (Bedingung ist hinreichend), und

$\exists f^{-1} \Rightarrow f$ ist bijektiv (Bedingung ist notwendig).