Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 3. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1. – Häufungspunkte

Definition: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir sagen, dass eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ ein *Häufungspunkt* von (a_n) ist, wenn (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt, die gegen a konvergiert.

(i) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) mit

$$a_n := (-1)^n \frac{1}{n}\,, b_n := \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ und } c_n := 2^n.$$

(ii) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn (a_n) genau einen Häufungspunkt hat, dann ist (a_n) beschränkt und konvergent.

b) Wenn (a_n) beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt hat, dann ist (a_n) konvergent.

c) Wenn (a_n) konvergent ist, dann hat (a_n) genau einen Häufungspunkt und ist beschränkt.

Lösung:

(i) $(a_{)}$: Da die Folge (a_n) eine Nullfolge ist, onvergiert auch jede Teilfolge gegen Null. Null ist also der einzige Häufungspunkt der Folge (a_n).

(b_n): Wir schauen uns zunächst die ersten Potenzen von $\alpha := (1+i)/\sqrt{2}$ an. Es ist (nach leichter Rechnung) $\alpha^2 = i, \alpha^3 = \alpha^2\alpha = i\alpha = (i-1)/\sqrt{2}, \alpha^4 = (\alpha^2)^2 = -1, \alpha^5 = \alpha^4\alpha = -\alpha, \alpha^6 = -\alpha^2 = -i, \alpha^7 = -\alpha^3 = (1-i)/\sqrt{2}, \alpha^8 = 1, \alpha^9 = \alpha, \alpha^{10} = \alpha^2, \ldots$. Jede natürliche Zahl n lässt sich schreiben als $n = 8k + l$ mit eindeutig bestimmten $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und es gilt dann $\alpha^n = (\alpha^8)^k\alpha^l = \alpha^l$. Die Folge (b_n) nimmt also genau 8 verschiedene Werte an und jeder Wert wird unendlich oft angenommen. Die Folge hat also genau 8 Häufungspunkte.

(c_n): Die Folge (c_n) ist offensichtlich streng monoton wachsend und unbeschränkt. Damit ist aber auch jede Teilfolge unbeschränkt und somit nicht konvergent. Die Folge (c_n) besitzt also keine Häufungspunkte.

(ii) a) Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Folge (d_n), die gegeben ist durch

$$d_n := \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade ist,} \\ n & \text{, falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Diese Folge besitzt nur den Häufungspunkt 0 und ist nicht beschränkt.

b) Diese Aussage ist richtig. Sei (a_n) beschränkt und besitze genau einen Häufungspunkt, der mit a bezeichnet sei. Wir nehmen aber an, dass (a_n) nicht gegen a konvergiert. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge (a_{n_k}), so dass $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Folge (a_n) beschränkt ist, ist auch ihre Teilfolge (a_{n_k}) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzane-Weierstraß besitzt die Teilfolge (a_{n_k}) dann eine konvergente Teilfolge. Da die Folge (a_n) nur den Häufungspunkt a hat, muss diese konvergente Teilfolge gegen a konvergieren, was aber $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ widerspricht.

c) Diese Aussage ist richtig. Wir wissen aus der Vorlesung, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Man überlegt sich leicht, dass alle Teilfolgen gegen den Grenzwert der Folge konvergieren müssen.

Aufgabe 2. – Eine rekursiv definierte Folge

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge (a_n), die gegeben ist durch $a_1 := 2$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1,$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösung:

Wenn man zeigen soll, dass eine rekursiv definierte Folge konvergiert, so hilft häufig der Satz von der monotonen Konvergenz. Wir zeigen also, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Wir beginnen mit der Monotonie. Genauer zeigen wir, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. wir zeigen, dass $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen dies per vollständiger Induktion:

Für $n = 1$ gilt

$$a_1 = 2 = \sqrt{4} \geq \sqrt{3} = \sqrt{1+2} = \sqrt{1 + a_1} = a_2.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass für ein n bereits $a_n \geq a_{n+1}$ gezeigt worden ist. Wir müssen nun $a_{n+1} \geq a_{n+2}$ zeigen. Es gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \geq \sqrt{1 + a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge (a_n) beschränkt ist. Als monoton fallende Folge ist die Folge natürlich durch $a_1 = 2$ nach oben beschränkt. Wir behaupten weiter, dass $a_n \geq 1$ für alle n ist. Auch dies zeigen wir wieder per vollständiger Induktion:

Die Behauptung gilt offensichtlich für $n = 1$. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass $a_n \geq 1$ bereits gezeigt ist. Dann gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \geq \sqrt{1+1} > 1.$$

Da die Folge (a_n) also beschränkt und monoton ist, ist sie nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergent.

Als nächstes wollen wir nun den Grenzwert bestimmen. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ und außerdem $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+a}$. Wegen $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ gilt also

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+a}.$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung quadrieren, erhalten wir

$$a^2 = 1 + a$$

bzw.

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Der Grenzwert a der Folge (a_n) muss also dieser Gleichung genügen. Die Gleichung hat aber zwei Lösungen. Da aber alle Folgeglieder größer 1 sind, muss auch der Grenzwert ≥ 1 sein. Damit scheidet eine der beiden Lösungen der Gleichung $a^2 - a - 1 = 0$ als Grenzwert aus und wir erhalten

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 3. – Bestimmte Divergenz

(i) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergierende reelle Zahlenfolge.
(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine reelle Zahlenfolge, die divergent, aber nicht bestimmt divergent ist.
(iii) Zeigen Sie: Ist die Folge (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ ist und die Folge $(1/a_n)_{n\geq n_0}$ ist eine Nullfolge.
(iv) Gilt in (iii) auch die Umkehrung? Beweis oder Gegenbeispiel.

Lösung:

(i) Die Folge mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$ und die Folge mit $a_n = -n$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.
(ii) Die Folge (a_n) mit

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{, falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

ist divergent, aber nicht bestimmt divergent. Aber auch die durch $a_n := (-1)^n \cdot n$ definierte Folge ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.

(iii) Wir zeigen hier die Behauptung nur für den Fall einer bestimmt gegen $+\infty$ divergenten Folge. Sei also (a_n) eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge. D.h. dass es zu jedem $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq M$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Für $M = 1$ erhält man also, dass ein n_0 existiert, so dass $a_n \geq 1$ für $n \geq n_0$ ist. Insbesondere gilt also $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.

Wir wollen nun zeigen, dass $(1/a_n)$ eine Nullfolge ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $M := 2/\varepsilon$. Dann existiert ein n_1, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt, dass

$$a_n \geq M = \frac{2}{\varepsilon}$$

ist. Hieraus folgt aber

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \frac{1}{a_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(iv) Die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n \cdot n$ zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt. $(1/a_n)$ ist eine Nullfolge, (a_n) aber nicht bestimmt divergent.