DFA M entscheidet L

Ziel: Der Äquivalenzklassenautomat zu M und L hat $\text{index}(R_L)$ viele Zustände und jeder DFA für L braucht mindestens $\text{index}(R_L)$ Zustände.

$\text{index}(R_L)$ Nerode-Relation R_L

$L \subseteq \Sigma^*$ $x, y \in \Sigma^*$ $x R_L y :\Longleftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L$

Σ^* / R_L Aufteilung von Σ^* in (disjunkte) Äquivalenzklassen

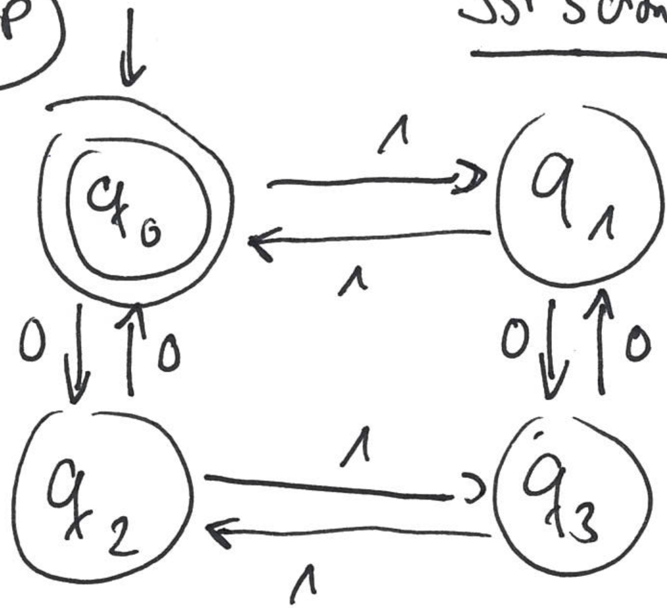
DFA M_A Äquivalenzklassenautomat Aufteilung von Q in Äquivalenzklassen

$p \equiv q :\Longleftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \delta^*(p, w) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$ $\cancel{M_A}$ $Q / \equiv$

(1)

Bsp

Ist schon der Äquivalenzklassenautomat!



$L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ und } |w|_1 \text{ sind gerade} \}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

Idee: $q_i \not\equiv q_j \quad i, j \in \{0, 1, 2, 3\} \quad i \neq j$

Bsp. $q_1 \not\equiv q_2$, $w = 0$ $\quad \delta^*(q_1, w) = q_3 \notin F$ und

$\delta^*(q_2, w) = q_0 \in F$

Solche Wörter gibt es für jede Kombination

Nerode-Klassen

$Q_0 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0, |w|_1 \text{ gerade} \}$

$Q_1 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ gerade}, |w|_1 \text{ ungerade} \}$

$Q_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0 \text{ ungerade}, |w|_1 \text{ gerade} \}$

$Q_3 = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_0, |w|_1 \text{ ungerade} \}$

(2)

Lemma 3.17 Jeder DFA M für L hat mindesten $\text{index}(R_L)$ viele Zustände. $\left(|Q| \geq \text{index}(R_L)\right)$

Beweis: $\ell = \text{index}(R_L)$ $\quad \ell \geq 2$ O.E.

Seien $w_1, w_2, \dots, w_\ell \in \Sigma^*$ mit $w_i \not R_L w_j$ für alle $i \neq j$

(Indirekt) Ann: DFA M für L ex. mit $|Q| < \ell$.

$$\underset{\text{Schubfach}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, w_i, w_j \text{ mit } \delta^*(q_0, w_i) \underset{(*)}{=} \delta^*(q_0, w_j) \quad 1 \leq i, j \leq \ell,\ i \neq j$$

$$(w_i, w_j) \notin R_L \underset{\text{Def. } R_L \text{, O.E.}}{\Longrightarrow} \quad \exists z \text{ mit } w_i z \in L,\ w_j z \notin L$$

$$\underset{\text{Ann. } M \text{ korrekt}}{\Longrightarrow} \underset{\in F}{\delta^*(q_0, w_i z)} \underset{\text{Def } \delta^*}{=} \delta^*(\delta^*(q_0, w_i), z) \underset{(*)}{=} \delta^*(\delta^*(q_0, w_j), z) \underset{\text{Def } \delta^*}{=} \delta^*(q_0, w_j z) \notin F \ \lightning$$

3

DFA ex $\Rightarrow |Q| \geq \ell$ $\square$

<u>Lemma 3.18</u>: Sei M_A Äquivalenzklassenautomat mit $L(M) = L(M_A) = L$.

Dann gilt: $|Q_A| \leq \text{index}(R_L)$.

<u>Beweis</u>: (Indirekt) <u>Ann</u>: Sei $\underline{r = |Q_A|}$ und $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{r-1}$

~~Seien~~ Seien ~~[illegible]~~ Repräsentanten bzgl. "$\equiv$"

also $Q_A = \{ [\![q_0]\!], [\![q_1]\!], \dots, [\![q_{r-1}]\!] \}$, M_A entscheidet L

und $\text{index}(R_L) < |Q_A|$.

$\underset{\text{Ann.}}{\Rightarrow}$ $\forall [\![q_i]\!] \in Q_A \; \exists w_i \in \Sigma^*$ mit $\delta^*([\![q_0]\!], w_i) = [\![q_i]\!]$ $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$

w_i alle verschieden! r verschiedene w_i's ~~[illegible]~~

$\underset{\text{Schubfach}}{\Rightarrow}$ $(\text{index}(R_L) < |Q_A| = r)$ ~~es~~ es ex. $(w_i, w_j) \in R_L$ $i \neq j$

$i, j \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$

$$\overset{\text{Def. } R_L}{\Longrightarrow} \quad \forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

$$\overset{M_A \text{ entscheidet } L}{\Longrightarrow} \quad \forall z \in \Sigma^* : \delta'^*([\![q_0]\!], w_i z) \in F' \iff \delta'^*([\![q_0]\!], w_j z) \in F'$$

$$\overset{\text{Def. } \delta'^*}{\Longrightarrow} \quad \forall z \in \Sigma^* : \delta'^*([\![q_i]\!], z) \in F' \iff \delta'^*([\![q_j]\!], z) \in F'$$

$$\overset{\text{Def. } M_A}{\Longrightarrow} \quad \underline{\forall z \in \Sigma^* : \delta^*(q_i, z) \in F \iff \delta^*(q_j, z) \in F}$$

$$\overset{\text{Def. } "\equiv"}{\Longrightarrow} \quad [\![q_i]\!] = [\![q_j]\!] \qquad q_i \equiv q_j \quad \lightning \quad \text{reine 2 Zustände}$$

$$\Longrightarrow \text{index}(R_L) \geq |Q_A|$$

□

5

Korollar: Genau die Sprachen mit endlichem Nerode-Index werden von DFAs entschieden.

Beweis: "$\Leftarrow$" DFA entscheidet L, endliche Zustandsmenge.

M_A bestimmen $|Q_A| = \text{index}(R_L)$ endlich!

"$\Rightarrow$" endlicher Nerode-Index $\text{index}(R_L)$ für L

$\leadsto$ DFA bauen

Nerode-Automat: $M_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_{0_L}, F_L)$

$Q_L := \{ [\![u]\!]_{R_L} \mid u \in \Sigma^* \}$ $\quad q_{0_L} := [\![\varepsilon]\!]_{R_L}$ $\quad F_L := \{ [\![u]\!]_{R_L} \mid u \in L \}$

$\delta_L : Q_L \times \Sigma \to Q_L$ $\quad \delta_L([\![u]\!]_{R_L}, a) := [\![ua]\!]_{R_L} \quad \forall u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

1. wohldefiniert, 2. entscheidet auch L

6 [illegible]

<u>Anwendung</u>: $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

wird nicht von <u>DFA</u> entschieden!

<u>Zeige</u>: $\text{index}(R_L) = \infty$

$\underline{k \neq l}$ $\quad k, l \in \mathbb{N}$ $\quad a^k \not R_L a^l$ weil $\underline{\underline{\forall}}\, z \in \Sigma^*: a^k z \in L \Leftrightarrow a^l z \in L$

ist <u>falsch</u> $z = b^k$

$\Rightarrow a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$ Repräsentanten verschiedener Klassen!

<u>Turingmaschinen</u> können solche Sprachen entscheiden!

<u>Berechnungsprobleme</u> algorithmisch $\Rightarrow$ Algo I / II.

<u>Berechnungskomplexität</u>!

3.3 Ausgangsfrage: Reguläre Sprachen / DFA

Theorem 3.19 Die Klasse der Sprachen, die von DFAs akzeptiert werden, stimmt mit der Klasse der regulären Sprachen überein.

$\exists$ reguläre Grammatik G für L $\Longleftrightarrow$ $\exists$ DFA der L entscheidet.

Beweis: "$\Rightarrow$" Geg. DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ für $L(M) = L$

konstruiere $G = (\Sigma, V, S, \underline{\underline{P}})$ mit $\underline{L(G) \overset{!}{=} L(M)}$

Idee: M simulieren durch G konstruktiv $\Sigma = \Sigma$, $V = Q$, $S = q_0$

1. $\forall q, q', a$ $\delta(q, a) = q'$ $\Rightarrow$ $q \to a q'$ $\in P$

2. $q \in F$ $\Rightarrow$ $q \to \varepsilon$ $\in P$

A) $L(M) \subseteq L(G)$ (beidseitige Inklusion)

Betrachte $w_1 w_2 \cdots w_n \in L(M)$

$\underset{\text{Def. M}}{\Rightarrow}$ durchläuft Zustände $q_0, q_1, \ldots, q_n$ $q_n \in F$

$\delta(q_{i-1}, w_i) = q_i$

$\underset{\text{via Konstruktion}}{\Rightarrow}$ $q_{i-1} \to w_i q_i \in P$

$q_n \to \varepsilon \in P$

$\Rightarrow$ Ableitung von w in G existiert.

$q_0 \to w_1 q_1 \to w_1 w_2 q_2 \to \cdots$

$\to w_1 w_2 \cdots w_{i-1} q_{i-1} \to w_1 w_2 \cdots w_{i-1} w_i q_i \to$

$\cdots$

$\to w_1 w_2 \cdots w_n q_n \to w_1 w_2 \cdots w_n \Rightarrow w \in L(G)$

a) M6

B) $L(G) \subseteq L(M)$

$w \in L(G)$ $\quad w = w_1 w_2 \dots w_n \in L(G)$ $\quad$ ⌜ $w = \varepsilon$ $\quad q_0 \in F$ ⌟

Achtung!

$\underset{\text{Def. } G}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ Ableitungsfolge existiert.

$$q_0 \to w_1 q_1 \to w_1 w_2 q_2 \to \dots$$

$$\to w_1 w_2 \dots w_{i-1} q_{i-1} \to w_1 w_2 \dots w_{i-1} w_i q_i \to$$

$$\dots$$

$$\to w_1 w_2 \dots w_n q_n \to w_1 w_2 \dots w_n$$

$\underset{\text{Konstr. } G}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ $\quad \delta(q_{i-1}, w_i) = q_i \quad i = 1, \dots, n$

$$q_n \in F$$

$\underset{\text{Def. } M}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ Abarbeitungsfolge in M existiert $\Rightarrow w \in L(M)$.

$\square$ ("$\Rightarrow$")

"$\Leftarrow$" <u>Grammatik</u> $G = (\Sigma, V, S, P)$ regulär

$\rightsquigarrow$ <u>DFA</u> konstruieren!

Konstruiere <u>NFA</u> (Potenzmengenkonstruktion $\mp$, NFA $\rightsquigarrow$ DFA geht!)

<u>Konstruktion:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{Q = V}, \ \Sigma = \Sigma, \ q_0 = S \\ F = \{A \in V \mid (A \to \varepsilon) \in P\} \quad ? \\ \delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q) \\ \quad \delta(A, a) = \underbrace{\{B \in V \mid (A \to aB) \in P\}}_{=\ \text{Menge von Zuständen}} \end{array}\right.$$

<u>Zeige:</u> $L(G) \overset{!}{=} L(M)$