Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

2. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 17.-21.4.

Thema: Der Grenzwert reeller Zahlenfolgen

Videos: Video-04-Folgen-Grenzwert

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1. – Wahr oder falsch

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für reelle Zahlenfolgen wahr oder im Allgemeinen falsch sind:

(i) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier divergenter Folgen ist ebenfalls divergent (getrennt für alle vier Operationen).

(ii) Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) sind genau dann konvergent, wenn die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ konvergent sind.

(iii) Sind die beiden Folgen (a_n) und (b_n) konvergent und gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent.

Aufgabe P2. – Grenzwerte berechnen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert für $n \to \infty$, wobei

(i)

$$a_n := \frac{31n + 2n^2 - n^3}{(5n-2)^3},$$

(ii)

$$b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(iii)

$$c_n := \left(\left| \frac{2-2i}{1+4i} \right| \right)^n .$$

Tipp zu (b_n): Erweitern Sie geeignet, um die 3. binomische Formel ins Spiel zu bringen.

Aufgabe P3. – Beweisaufgabe
Es sei (a_n) eine konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Folgern Sie aus der Definition des Grenzwertes:

(i) Ist (b_n) eine reelle Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, dann ist die Folge (b_n) konvergent und sie konvergiert gegen den Grenzwert a.
(ii) Die Folge $(|a_n|)$ ist konvergent mit Grenzwert $|a|$.
(iii) Ist $a \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ ist. Die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{a}$.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 24.4. und dem 28.4., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1. – Grenzwerte berechnen
Entscheiden Sie bei jeder der nachfolgend definierten Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (d_n), welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* vorliegen, und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert. Natürlich müssen Sie Ihre Entscheidungen begründen.

(i)
$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1},$$
(ii)
$$b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2},$$
(iii)
$$c_n := \left(\left|\frac{1+7i}{5-4i}\right|\right)^n,$$
(iv)
$$d_n := \sqrt{n(n+1)} - n.$$

Aufgabe 2. – Beweisaufgabe und Anwendung

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$
Tipp: Die 3. binomische Formel könnte hilfreich sein. Betrachten Sie den Fall $a = 0$ gesondert.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert (falls er existiert!) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}.$$

Aufgabe 3. – Wahr oder falsch

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Beweis oder Gegenbeispiel)