# LuDS - Übungszettel 3

Henning Lehmann
Darya Nemtseva
Paul Piecha

## 3.1:

a)

i) $f_\lambda$ ist bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $\lambda = 0$ ist $f_\lambda$ weder injektiv noch surjektiv.

ii) $h$ ist surjektiv.

b)

$$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{falls } 2 \mid x \text{ und} \\ -(x+1)/2, & \text{falls } 2 \nmid x. \end{cases}$$

$f$ ist surjektiv, da jedes $z \in \mathbb{Z}$ im Image von $f$ enthalten ist:

das Urbild einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ unter $f$ ist $2 \cdot z$, falls $z \geq 0$,

und $-2 \cdot z - 1$, falls $z < 0$.

$f$ ist injektiv, da für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine einzigartige Abbildung erzeugt wird: wie in obenstehender Erklärung zur Surjektivität von $f$ gezeigt, stammt jeder Wert der Abbildung von einem anderen ursprünglichen Wert. Zudem ist $f$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Da $f$ sowohl surjektiv als auch injektiv ist, ist $f$ bijektiv.

Aufgabe 3.1. b) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$

b) $f(x) = 2x + 3$

injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Das gilt, weil $f(x)$ eine Linie ist. ✓

surjektiv: $\forall y \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{N}_0 : f(x) = y$

Das gilt auch, weil $f(x)$ unendliche und stetig ist ✓

Das heißt, $f(x) = 2x + 3$ ist bijektiv

Aufgabe 3.2

a) $(f : N \to P) \wedge (g : M \to N) \xRightarrow{\text{def. Abbild}}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall p \in P\ \exists!\, n \in N : f(n) = p \\ \forall n \in N\ \exists!\, m \in M : g(m) = n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f((g(m))) = p$

$f \circ g : M \to P \xRightarrow{\text{def. Abbildung}}$

$\forall p \in P\ \exists!\, m \in M : f \circ g(m) = p$ $\square$

## 3.2:

a) Eine Relation $R: A \to B$ ist genau dann eine Abbildung, wenn:

$$dom(R) = preim(R) \quad (\Leftrightarrow \forall a \in A : \exists! b \in B : aRb)$$

Somit gilt $M = dom(g) = preim(g)$ und $N = dom(f) = preim(f)$.

Da zusätzlich $im(g) \subseteq N$, gilt: $im(g) \subseteq preim(f)$.

Mit anderen Worten: für jeden Wert $m \in M$ hat $g$ eine Zuordnung auf ein $n \in N$, für welches zusätzlich eine Zuordnung durch $f$ auf ein $p \in P$ existiert. Somit gibt es keinen Wert $m \in M$, der durch $f \circ g$ nicht abgebildet werden kann. Somit gilt: $dom(f \circ g) = preim(f \circ g)$, wodurch $f \circ g$ eine Abbildung ist.

b) Bedingung: $f$ ist bijektiv.

Zu zeigen: $f$ ist bijektiv $\Rightarrow \exists f^{-1}$ (Bedingung ist hinreichend), und

$\exists f^{-1} \Rightarrow f$ ist bijektiv (Bedingung ist notwendig).

Aufgabe 3.2

b) $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N} \underset{\text{def Abb. Bijektiv}}{\Rightarrow}$

$$\forall n \in \mathcal{N}\ \exists!\, m \in \mathcal{M}: f(m) = n$$

$$f^{-1}: \mathcal{N} \to \mathcal{M} \underset{\text{def. Abb. Bijektiv}}{\Rightarrow}$$

$$\forall m \in \mathcal{M}\ \exists!\, n \in \mathcal{N}: f^{-1}(n) = m$$

$$f^{-1}(f(m)) = m \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(m) = m$$

$$f(f^{-1}(n)) = n \Rightarrow (f \circ f^{-1})(n) = n$$

Notwendigkeit $\square$

$$(f^{-1} \circ f)(m) = m \underset{\text{def. Bijektiv}}{\Rightarrow}$$

$\underset{\text{def. injektiv}}{\Rightarrow}$ $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}: (f^{-1} \circ f)(m_1) =$
$= (f^{-1} \circ f)(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$ ✓

$\underset{\text{def surjektiv}}{\Rightarrow}$ $\forall m \in \mathcal{M}: \exists m \in \mathcal{M}: (f^{-1} \circ f)(m) = m$ ✓

$$(f \circ f^{-1})(m) = n \underset{\text{def. bijektiv}}{\Rightarrow}$$

$\underset{\text{def. injektiv}}{\Rightarrow}$ $\forall n_1, n_2 \in \mathcal{N}: (f \circ f^{-1})(n_1) =$
$= (f \circ f^{-1})(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ ✓

$\underset{\text{def. surjektiv}}{\Rightarrow}$ $\forall m \in \mathcal{M}: \exists m \in \mathcal{M}: (f \circ f^{-1})(m) = m$

Hinreichend $\square$