Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

9. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 12.-16.6.

Thema: Differentialrechnung

Videos: Video-11-Differentialrechnung, Video-12-Differentialrechnung-II

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \leq 0, \\ x^2 & \text{, falls } x > 0, \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $c \in]a, b[$. Die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ sei stetig auf $]a, b[$ und differenzierbar auf $]a, b[\setminus\{c\}$. Zeigen Sie, dass f in c differenzierbar ist, wenn f' in c stetig fortsetzbar ist, d.h. wenn

$$\lim_{x \searrow c} f'(x) = \lim_{x \nearrow c} f'(x)$$

gilt.
Tipp: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(iii) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + 1 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar? Ist die Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig fortsetzbar in 0?

(iv) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist, dass aber ihre Ableitung in 0 nicht stetig ist. Was bedeutet das für die Aussage in (ii)?

Aufgabe P2.
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \cos(x) + e^x$.

(i) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
(ii) Zeigen Sie, dass f invertierbar ist.
(iii) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(2)$.

Aufgabe P3.
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$.

(i) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.
(ii) Wie ist das Monotonieverhalten von f?
(iii) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

(iv) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe zur Selbstbeschäftigung
Ableiten ist eine handwerkliche Tätigkeit, die man sehr gut üben kann. Ihre Ergebnisse können Sie mit entsprechenden Computerprogrammen oder Webseiten überprüfen oder - ganz altmodisch - mit den Ergebnissen Ihrer Kommilitonen vergleichen. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Ableitung.

(i)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\sqrt{x}),$$

(ii)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 4}{x^2 + 1},$$

(iii)

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x^2} x^2.$$

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 19.6. und dem 23.6., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen.

Dies ist die letzte für die Zulassung zu den Prüfungen relevante Abgabe. Natürlich ist der Stoff der folgenden Arbeitsblätter auch noch klausurrelevant.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1. Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und bestimmen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

(i) Ist f stetig in 0, so ist $g(x) := x \cdot f(x)$ differenzierbar in 0.

(ii) Ist f beschränkt, so ist $h(x) := x^2 \cdot f(x)$ differenzierbar in 0.

Aufgabe 2. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) := \sqrt{x} \log x.$$

(i) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\searrow 0} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
(iii) Untersuchen Sie f auf Monotonie, bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und klären Sie für jedes Extremum, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.
(iv) Geben Sie (mit Begründung!) an, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichung
$$f(x) = \alpha$$
genau eine reelle Lösung $x > 0$ besitzt.

Aufgabe 3. - logarithmische Ableitung und implizierte Differentiation

(i) Bestimmen Sie für $x > 0$ mittels der logarithmischen Ableitung die Ableitung der Funktion
$$f(x) := \frac{(x+2)^3(2x+1)^9}{x^8(3x+1)^5}.$$
(ii) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an die Kurve $x^4 = y^2 + x^2$ im Punkt $(2, \sqrt{12})$ mittels implizierter Differentiation. Wie lautet die Geradengleichung der Tangente?