Prof. Dr. Anne Driemel
Frederik Brüning, Andreas Hene
Institut für Informatik

Abgabe: 05.07.2023 bis 12:00 Uhr

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: (3+3 Punkte)

Ein Schokoladenfabrikant möchte den Standort wechseln. Deshalb soll der vorhandene Restlagerbestand an Rohstoffen aufgebraucht werden. Die Zutaten für die Schokolade sind Kakaobutter, Kakaomasse, Zucker und Milchpulver. Es werden vier Sorten produziert: Dunkel-, Zartbitter-, Vollmilch- und Kinderschokolade. Die Zusammensetzung und der Verkaufserlös einer 100g-Tafel ist bei den einzelnen Sorten wie folgt:

	Dunkel-	Zartherb-	Vollmilch-	Kinderschokolade
Kakaobutter	10 g	13 g	15 g	20 g
Kakaomasse	45 g	30 g	20 g	10 g
Zucker	45 g	47 g	50 g	50 g
Milchpulver	0 g	10 g	15 g	20 g
Erlös	1,60 €	1,30 €	0,90 €	1,00 €

Der Fabrikant hat noch 4,31 kg Kakaobutter, 9,3 kg Kakaomasse, 15,29 kg Zucker und 3,1 kg Milchpulver zur Verfügung.

(a) Angenommen die Rohstoffe sollen komplett aufgebraucht werden. Formulieren Sie für das Problem ein lineares Programm in *Gleichungsform*. Geben Sie eine zugehörige Lösung an und den damit erzielten Verkaufserlös.

(b) Nehmen Sie an, dass die Rohstoffe nicht komplett aufgebraucht werden müssen, dafür jedoch der Verkaufserlös maximiert werden soll. Formulieren Sie hierfür ein lineares Programm in *kanonischer Form*.

Aufgabe 6.2: (3+3 Punkte)

Frank möchte seine Familie bekochen und bereitet daher für alle sein Lieblingsessen 'Nudeln mit Tomatensoße' vor. Dafür müssen die folgenden Aufgaben erledigt werden, welche jeweils eine gewisse Dauer in Anspruch nehmen.

Aufgabe	Dauer in Minuten
(a) Herd anmachen	10
(b) Nudeln kochen	10
(c) Tomatensoße machen	15
(d) Tisch decken	5
(e) Essen servieren	5

Wichtig ist, dass einige Aufgaben aufeinander aufbauen. Genauer gesagt können Aufgaben (b) und (c) erst ausgeführt werden wenn Aufgabe (a) beendet ist und Aufgabe (e) kann erst ausgeführt werden wenn alle anderen Aufgaben erledigt sind. Da Frank ein geübter Koch ist, kann er prinzipiell Aufgaben parallel erledigen, sofern alle Voraussetzungen erfüllt sind. Frank ist daran interessiert, dass das Essen schnellstmöglich serviert wird.

(a) Modellieren Sie Franks Problem als lineares Programm. Geben Sie insbesondere die Bedeutung der einzelnen Variablen an.

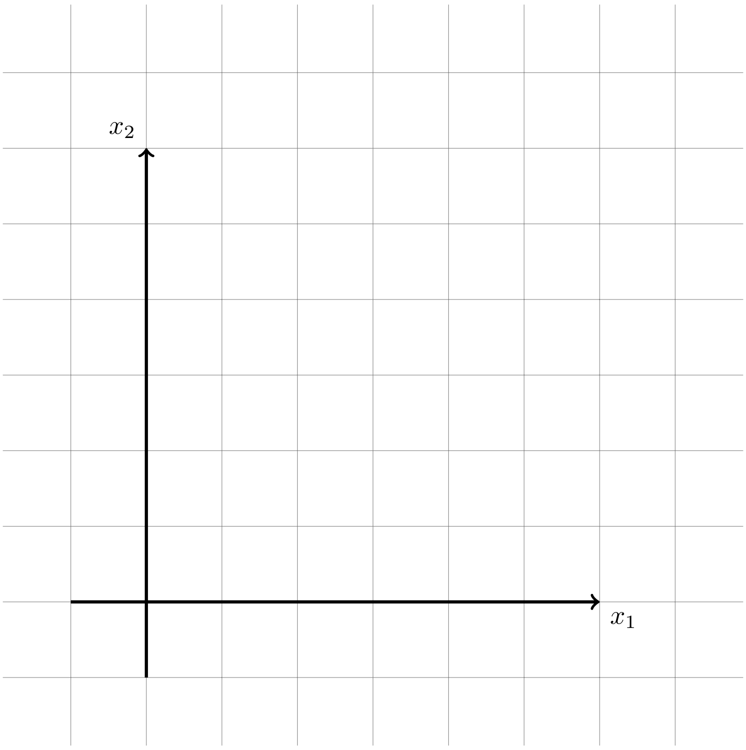
(b) Betrachten Sie den allgemeinen Fall von Franks Problem: Gegeben sind n Aufgaben $a_1, ..., a_n$, wobei jede Aufgabe a_i eine Dauer d_i, sowie Voraussetzungen $P_i \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$ besitzt. Gehen Sie davon aus, dass a_n die zuletzt auszuführende Aufgabe ist. Geben Sie ein lineares Programm für den allgemeinen Fall an.

Aufgabe 6.3: (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende lineare Programm (LP) für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{array}{lrcr}
\max & 2x_1 + 4x_2 & & \\
& & & \\
\text{u. d. N.} & x_1 + 4x_2 & \leq & 12 \\
& -x_1 + x_2 & \geq & -2 \\
& x_1 & \geq & 0 \\
& x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Bestimmen Sie die optimale Lösung des LPs im folgenden Koordinatensystem graphisch. Kennzeichnen Sie das Lösungspolyeder und markieren Sie die optimale Lösung.



Aufgabe 6.4: (4 Punkte)

Wir betrachten die Optimierungsvariante des Problems DominatingSet:

Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Gesucht wird eine möglichst kleine Teilmenge $S \subseteq V$, sodass jeder Knoten in V entweder in S enthalten oder zu mindestens einem Knoten in S benachbart ist.

Formulieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm (ILP). Beschreiben Sie kurz, wie sich eine Lösung des ILPs in eine Lösung für DominatingSet umformen lässt.