Lineare Algebra

BA-INF-021, MB 05

AOR Dr. Thoralf Räsch

Sommersemester 2023

Übungsaufgaben, Serie 2

Typischerweise wird der zugrundeliegende Körper $\mathbb{K}$ bei einem $\mathbb{K}$-Vektorraum unterschätzt. Wir behandeln zwar noch genau, was allgemein ein Körper ist, aber ich kann Ihnen jetzt schon sagen, dass die bekannten Zahlenmengen der rationalen und der reellen Zahlen diese Eigenschaften besitzen. Anhand dieser beiden Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ möchte ich Ihnen zeigen, welche Auswirkung die jeweilige Wahl hat.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Mengen Vektorräume über den jeweils angegeben Körpern sind.

(a) $V_1 = \mathbb{N}$ über dem Körper $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}$
(b) $V_2 = \mathbb{Q}^4$ über dem Körper $\mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}$
(c) $V_3 = \mathtt{Pol}_3 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ über dem Körper $\mathbb{K}_3 = \mathbb{R}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.
Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot (v, w) = (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Lassen Sie mich einen ersten neuen Begriff einführen, den wir nächste Woche stärker beleuchten werden. Alles, was Sie für die Aufgabenbearbeitung brauchen, bekommen Sie jetzt:

Definition. Sei $V = (V, +, \cdot, 0)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei weiterhin U eine Teilmenge von V. Dann nennen wir U einen *Unter(vektor)raum* von V, wenn $U \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ jeweils gilt: $x + y \in U$ sowie $\lambda \cdot x \in U$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Geben Sie eine geometrische Beschreibung *aller* Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei V der Vektorraum der reellen Polynome. Geben Sie drei Unterräume Ihrer Wahl an. Wie viele (Arten von) Unterräume(n) gibt es von V?

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind:

(a) $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - \pi z = 0\}$;
(b) $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.
(c) $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
(d) $U_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$.
(e) $U_5 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.
(f) $U_6 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z^2 = 0\}$.

Sie können hier insgesamt **25 Punkte** erreichen. Der Zettel geht allerdings nur mit **22 Punkten** in die offizielle Wertung ein, so dass die Differenz als **Bonuspunkte** gewertet werden.

Abgabe bis Freitag, den 21. April, bis 12:00 Uhr in Ihrer eCampus-Gruppe.