Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

8. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 5.-9.6.

Thema: Umkehrfunktionen, Logarithmus und einige Grenzwerte

Videos: Video-10-Umkehrfunktion-Logarithmus-Grenzwerte

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.
Wir betrachten die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)).$$

- **(i)** Ist die Funktion sinh stetig?
- **(ii)** Zeigen Sie, dass die Funktion sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.
- **(iii)** Bestimmen Sie das Bild $\sinh(\mathbb{R})$.
- **(iv)** Zeigen Sie, dass die Funktion sinh eine stetige Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \sinh(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ besitzt. Man nennt die Umkehrfunktion den *Areasinus hyperbolicus*.

Aufgabe P2.
Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\exp(g(x)) + g(x) = x$$

gibt. Ist g stetig?

Aufgabe P3.
Bestimmen Sie die (vertikalen, horizontalen und schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

(i)

$$f(x) := \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 - 4},$$

(ii)

$$g(x) := \frac{x^2 + x + 6}{x - 3},$$

(iii)

$$h(x) := \frac{e^x + x}{e^x - x}.$$

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der nächsten Woche, also zwischen dem 12.6. und dem 16.6., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.
Wir betrachten die Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{2x}{1-x^2}$.

- **(i)** Zeigen Sie, dass f stetig und streng monoton wachsend ist.
- **(ii)** Bestimmen Sie $f(]-1,1[)$ (natürlich mit Begründung!).
- **(iii)** Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. Begründen Sie, warum die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(]-1,1[) \to]-1,1[$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.
- **(iv)** Bestimmen Sie f^{-1} explizit.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die (vertikalen, horizontalen und schrägen) Asymptoten der folgenden Funktionen:

(i)

$$f(x) := \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x - 2},$$

(ii)

$$g(x) := \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{2^x - 4 \cdot 3^x}.$$

Aufgabe 3.
Wir definieren die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch:

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \text{ und } \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

- **(i)** Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Identitäten gelten:
  - a) $\sinh(x) + \cosh(x) = \exp(x)$,
  - b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
  - c) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
  - d) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$,
  - e) $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$,
  - f) $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

Bemerkung: Die Funktion sinh heißt *Sinus hyperbolicus*, die Funktion cosh *Cosinus hyperbolicus*. Mittels der letzten beiden Formeln, lassen sich die Werte von Sinus und Cosinus für komplexe Argumente mittels reeller Funktionen berechnen.

(ii) Schreiben Sie die beiden Funktionen sinh und cosh als Potenzreihen um den Entwicklungspunkt 0, d.h. bestimmen Sie reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n), so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ und } \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$