

Lösungen für Übungsblatt 1

Henning Lehmann, Ayoub Errami

18.10.2022

1 Aufgabe 1.1: Vereinfachen von Funktionen

- $g_1(n) = n^4$
- $g_2(n) = 1$
- $g_3(n) = n^{3,5}$
- $g_4(n) = \max(k_1, k_2)$

2 Aufgabe 1.2: Algorithmus analysieren

2.1 (a)

2.1.1 Theorem

Der Algorithmus gibt eine absteigend sortierte Permutation von A zurück.

2.1.2 Beweis

Sei $\text{sort}(X)$ eine absteigend sortierte Permutation einer Zahlenfolge X .

Sei $S_n(x)$ eine Zahlenfolge mit den n größten Elementen aus einer Zahlenfolge X .

Sei $U_n(A)$ der initiale Inhalt von A ohne die n größten Elemente.

Invariante in Zeile 1:

$$A[1..i-1] = \text{sort}(S_{i-1}(A))$$

$$A[i..n] = U_{i-1}(A)$$

Induktionsanfang $i=1$:

$$A[1..0] = \text{leere Zahlenfolge} = \text{sort}(s_0(A))$$

$$A[1..n] = U_0(A)$$

Induktionsschritt

Angenommen die Invariante gilt für ein $i \geq 1$.

Im Schleifendurchlauf wird das größte Element aus $A[i..n]$ an die Stelle i gesetzt, wobei alle kleineren Elemente in $A[i+1..n]$ verbleiben.

D.h. am Ende der Schleife gilt:

$$A[1..i] = \text{sort}(s_i(A))$$

$$A[i+1..n] = U_i(A)$$

\Rightarrow die Invariante gilt auch für $i+1$.

Für $i = n-1$:

$$A[1..n-1] = \text{sort}(s_{n-1}(A))$$

$$A[n..n] = U_{n-1}(A)$$

Eine Zahlenreihe aus n Elementen ohne die $n-1$ größten Elemente enthält trivialerweise lediglich das kleinste Element, welches sich hierbei in $A[n]$ befindet. Da die übrigen Elemente sich sortiert in $A[1..n-1]$ befinden, folgt:

Die Ausgabe des Algorithmus ist eine absteigend sortierte Permutation von A . \square

2.2 (b)

Objektvergleiche in Z.2: $n-i$.

Objektvergleiche in Z.3: 1.

\rightarrow Objektvergleiche pro Schleifendurchlauf: $n-i+1$.

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) &= (n-1) * n - \frac{(n-1) * n}{2} + (n-1) \\ &= n^2 - n - 0,5n^2 - 0,5n + n - 1 \\ &= 0,5n^2 - 0,5n - 1 \in \Theta(n^2) \end{aligned} \tag{1}$$

2.3 (c)

Minimale Vertauschungen:

Bereits absteigend sortierte Zahlenfolge (z.B. $[5, 4, 3, 2, 1]$).
 $\rightarrow 0$ Vertauschungen, da sich das Maximum aus $A[i..n]$ immer an der Stelle i befindet und daher in Z.3 nie $j \neq i$.

Maximale Vertauschungen:

Zahlenfolge, bei welcher das kleinste Element an erster Stelle steht, der Rest jedoch absteigend sortiert ist (z.B. $[1, 5, 4, 3, 2]$).
 $\rightarrow n - 1$ Vertauschungen, da das kleinste Element bei jedem Schleifendurchlauf einen Platz nach rechts getauscht wird, bis es nach $n - 1$ Vertauschungen an seinem korrekt einsortierten Platz ankommt.

3 1.3: O-Notation

	$s(n)$	$\log_2(n)$	$2n$	3^n	$\frac{\log_2(n)}{\text{sqr}t(n)}$	$0,05$	ne^n
$s(n)$	Θ	-	O	o	ω	Ω	o
$\log_2(n)$		Θ	o	o	ω	ω	o
$2n$			Θ	o	ω	ω	o
3^n				Θ	ω	ω	o
$\frac{\log_2(n)}{\text{sqr}t(n)}$					Θ	o	o
$0,05$						Θ	o
ne^n							Θ

Um die restlichen Felder auszufüllen, orientiere man sich am gegenüberliegenden Feld der Diagonale:

$$f = o(g) \iff g = \omega(f)$$

$$f = O(g) \iff g = \Omega(f)$$

$$f = \Theta(g) \iff g = \Theta(f)$$

Wenn keine Beziehung zwischen f und g , dann auch keine Beziehung zwischen g und f .