

\neg AL-Formel

①

\neg (DNF) erzeugen

- allgemein über Bewertungen / Wahrheitstabelle
- effizient über Umformungsregeln / Algorithmus

(Assoz. / Komm. / Distribut. / Impl. auf. / Äquival. auf. /
de Morgan'sche R. / ...)

(BSP)

p_1	p_2	p_3	$\neg p_3$
$((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg x_1)$	$(x_2 \vee x_3)$	$(x_1 \rightarrow x_3)$	$\neg(x_1 \rightarrow x_3)$
$\equiv ((x_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1))$	$\frac{(x_2 \vee x_3)}{\text{KNT}}$	$\equiv \neg(\neg x_1 \vee x_3)$	$\equiv \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_3)$
KNT			KNT

Agenda: Resolution & Teil Axiomatisches Beweisen! (1)

$$\begin{aligned} ((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg x_1) & \quad (x_2 \vee x_3) \\ = p_1 & \quad = p_2 \\ & \quad = p_3 \end{aligned}$$

$$\frac{((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3)}{(\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3)} \quad \text{gültig (?)}$$

Wissen: p_1 und p_2
gilt dann auch p_3 ?

Def. Gültigkeit

$$\frac{}{\vdash (\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3)}$$

Lemma 5.6

$$\frac{}{\vdash ((p_1 \wedge p_2) \wedge \neg p_3)}$$

~~Def~~ Urform

nicht erfüllbar

welt erfüllbar

Bilde KNF von

$$p_1, p_2, \neg p_3, (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$$

ben. Klauselmengen,

daher! Beantworten?

Resolutionssatz:

$$\underline{\text{KNF:}} \quad \varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$$

Bilde: "Klauseln" als Menge

$$C_i := \{ l_{i,j} \mid 1 \leq j \leq m_i \}$$

komplexe Darstellung:

$\kappa(\varphi) := \{ C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \}$ Menge von Klauseln

(BSP)

$$\varphi_1 = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

$$\varphi_2 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge x_3 \wedge (x_2 \vee \neg x_1)$$

$$\kappa(\varphi_2) = \{ \{ x_3 \}, \{ \neg x_1, x_2 \} \}$$

(2)

Erfüllbarkeit, Äquivalenz auf Mengen von Klauseln: (3)

übertragen:

Sei K Klauselmengen: $K = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$
 C_i Mengen von Literalen

$$\Rightarrow f_K := \bigwedge_{C \in K} \left(\bigvee_{l \in C} l \right)$$

zugehörige KNF $K(f_K) = K$

Definition: $\prod_{C \in K} \prod_{l \in C} l := \prod_{C \in K} \prod_{l \in C} \neg \neg l$

Erfüllbarkeit für Klauselmengen K : \Leftrightarrow

es existiert eine Belegung B , so dass für jedes $C \in K$
 xx mindestens ein $l \in C$ das wahr ist bzgl. B .

9

"Specialfälle" $K = \{ \}$ nach Def. erfüllbar

$K = \{ \{ \{ \} \} \}$ nicht erfüllbar

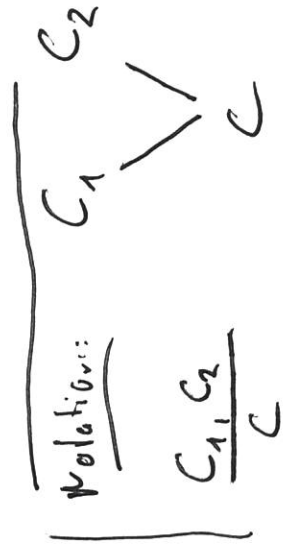
Symbol $\{ \} = \square$ $\square \in K \Rightarrow K$ nicht erfüllbar
Verbinden Π abzuleiten!

Regeln Resolutionssubstanz

Definition S.12 Es seien C_1 und C_2 Klauseln und
 $x \in AV$ $x \in C_1, \neg x \in C_2$

Die Klausel $C = (C_1 \setminus \{x\} \cup C_2 \setminus \{\neg x\})$

Heißt die Resultate von C_1 und C_2 .



Ableitungsschritte haben Resolutionen.

(Bsp)

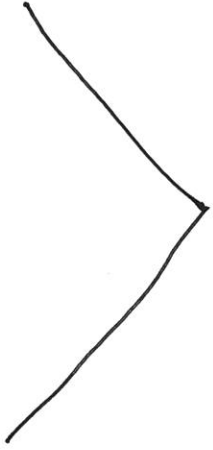
(5)

$$C_1 =$$

$$1. \quad \{x_1, x_2, \neg x_3\}$$

$$C_2 =$$

$$\{x_1, \neg x_2, x_4\}$$



$$(C_1 \setminus \{x_2\}) \cup C_2 \setminus \{\neg x_2\}$$

$$C = \{x_1, \neg x_3, x_4\}$$

$$C_1 = \{x_1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Bedeutung: 1.} \quad & (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \\ \equiv & (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \\ & \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \end{aligned}$$



$$\square (43)$$

Bedeutung: 2.

$$K = \{C_1, C_2\} = \{\{x_1\}, \{x_1, \neg x_2, x_4\}\} = \{C_1, C_2\}$$

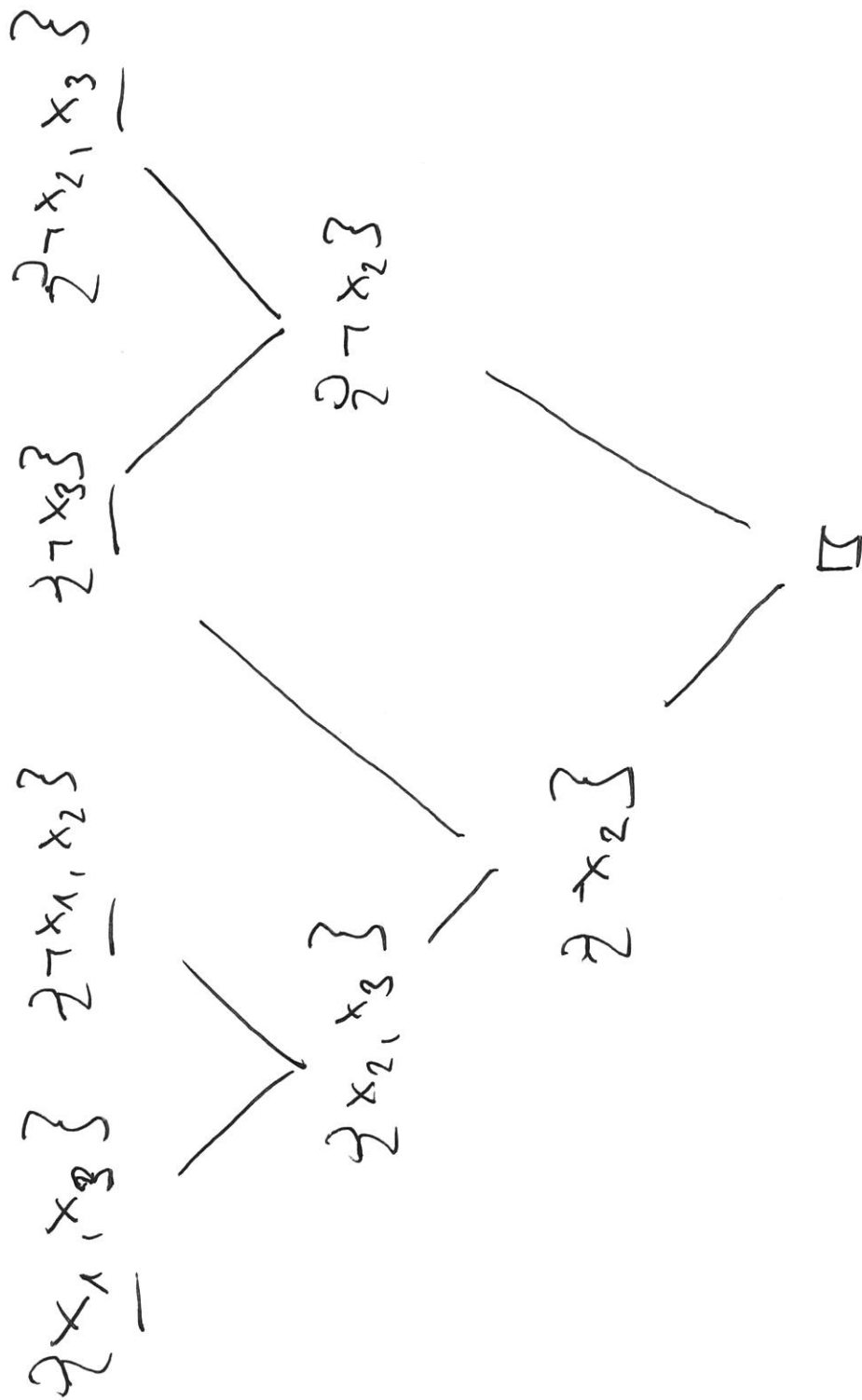
nicht erfüllbar

$$f_K = x_1 \wedge \neg x_1$$

⑥

Modularity:

$$K = \{ \{ \underline{x_1}, x_3 \}, \{ \underline{x_1}, x_2 \}, \{ x_1, x_3 \}, \{ \neg x_2, x_3 \} \}$$



u Krieth u des u Resolution Fallid

Lemma 8.13 Sei K kleinste Menge und $C_1, C_2 \in K$
Klauseln mit $\forall x \in C_1, \neg x \in C_2, x \in AV$

Sei C die Restante von C_1 und C_2 bezügl. X .

Dann sind X und $X \cup \{C\}$ äquivalent.

Beweis: direkt k und $k \cup \{c\}$ gleich Variablen

Boundary B passed for k and and for $k \leq 3$

$$\underline{\underline{22:}} \quad \prod_{\mathbf{x}} \prod_{\mathbf{B}} = \prod_{\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \subset \mathbf{B}} \prod_{\mathbf{B}} \Leftrightarrow \left(\prod_{\mathbf{x}} \prod_{\mathbf{B}} = 1 \Leftrightarrow \prod_{\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \subset \mathbf{B}} \prod_{\mathbf{B}} = 1 \right) \quad \nearrow$$

2nd Order

9

$$\Rightarrow \prod_{\beta} K_{\beta} = 1 \Rightarrow \prod_{\beta} K_{\beta} = 1$$

□

$$K \equiv K \cup \{c\}$$

be Resolution!

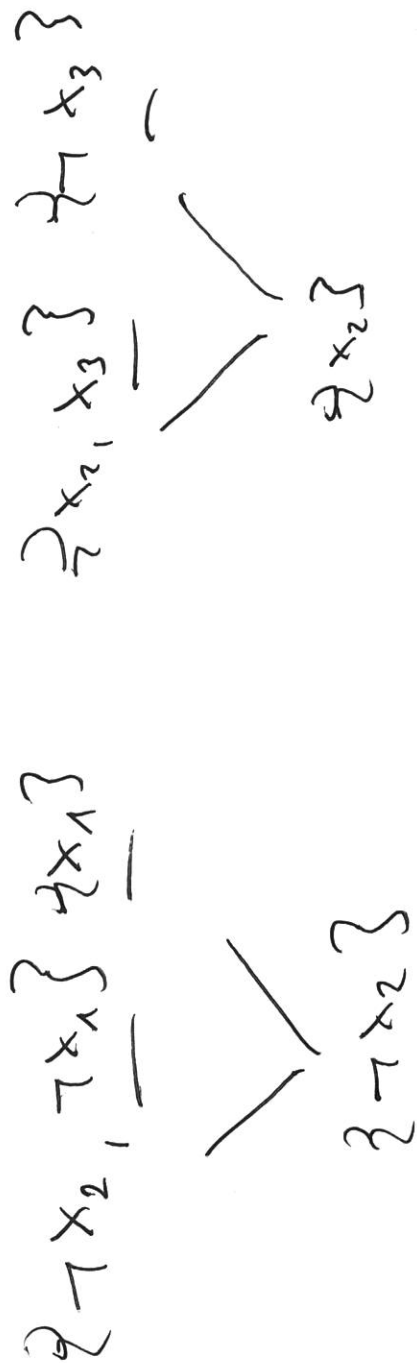
Deduktion K nicht erfüllbar $\Leftrightarrow K \cup \{c\}$ nicht erfüllbar

$$\begin{aligned} \text{Annahme: } & ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3) \text{ gültig} \\ & \Leftrightarrow \frac{(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)}{} \text{ nicht erfüllbar} \end{aligned}$$

Klassikalisch zu $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$ dann alpha!

(10)

$$K = \{ \{x_1, \neg x_1\}, \{ \neg x_2, \neg x_1 \}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, \neg x_3\} \}$$



$$\begin{aligned} & \vdash \\ & ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3) \\ & \text{giving!} \end{aligned}$$

Vollständigkeitssatz

Ann.: \mathcal{L} ist \mathcal{C} mit

\mathcal{L} erfüllbar $\Leftrightarrow \mathcal{L} \cup \{C\}$ erfüllbar

Kann ich \mathcal{C} auch aus \mathcal{L} ableiten?

Das ist möglich bei AL \Rightarrow "komplettes Wissen" ist ableitbar.

Alle möglichen Probleme sind

(12)

Definition 5.14 Sei K Klauselmengen, dann

Sei $\text{Res}(K) := K \cup \{C \mid C \text{ ist Resolvente von Klauseln aus } K\}$

Es sei zudem:

$$\text{Res}^0(K) := K$$

$$\text{Res}^{n+1}(K) := \text{Res}(\text{Res}^n(K)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{und } \text{Res}^*(K) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(K) \quad \left[\text{kann ich } \text{Res}^+(K) \text{ angeben?} \right]$$

$$K = \text{Res}^0(K) \subseteq \text{Res}^1(K) \subseteq \text{Res}^2(K) \subseteq \dots \subseteq \text{Res}^n(K) \subseteq \dots \subseteq \text{Res}^*(K)$$

endet also Prozess!

(13)

Lemma 5.15 Für jede endliche Klauselmenge K

$$\text{ex. } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Res}^n(K) = \text{Res}^{n+1}(K) \quad \forall i \geq 1, i \in \mathbb{N},$$

$$= \text{Res}^*(K)$$

Beweis

Zeige: $\left[\text{Es ex. } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{Res}^n(K) = \text{Res}^{n+1}(K) \right]$ \textcircled{V} gleich!

Nehmen wir mal an das gilt! \Uparrow

$$\textcircled{V} \Rightarrow \text{Res}^n(K) = \text{Res}^n(K) \quad \forall n \geq 1$$

Via Induktion über $n+1 = n$

Ind. Ansfang: $i=1 \quad \text{Res}^1(K) = \text{Res}^{1+1}(K) \quad \textcircled{V}$

Ind. Ann: $\text{Res}^{n+1}(K) = \text{Res}^n(K) \quad \text{für } i \geq 1$

Ind. Schluss: $\text{Res}^{n+1+1}(K) = \text{Res}(\text{Res}^{n+1}(K)) = \text{Res}(\text{Res}^n(K)) = \text{Res}^{n+1}(K)$

\uparrow Def. 1.1 \uparrow Def. 1.1 \uparrow Def. 1.1

144

Widerspruchsbeweis!

Ann: es ex. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $R_{\exists}^n(k) = R_{\exists}^{n+1}(k)$

Aus $R_{\exists}^n(k) \subseteq R_{\exists}^{n+1}(k)$ folgt

$$|R_{\exists}^{n+1}(k)| \geq |R_{\exists}(k)| + 1$$

zu Beginn $|k| > 0 \Rightarrow \frac{|R_{\exists}^n(k)|}{n} > 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$n \geq 2$
für $n \in \mathbb{N}$

$$n = |VAR(k)|$$

Aus $R_{\exists}(k)$ enthalten
nur die Variablen von k .

Liberal 2^m

0/1 Liberal enthalten
Klausel
Liberal

1	2	3	4	...	
x	¬x	y	¬y		

max $2^{(2^m)}$ viele verschiedene Klauseln

□