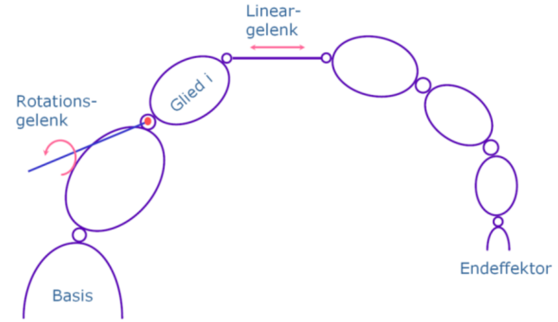
Grundlagen der Robotik

5. Orientierungs-repräsentationen Denavit-Hartenberg-Parameter

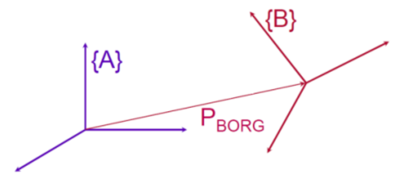
Prof. Sven Behnke

Letzte Vorlesung

- Kinematik
  - Gelenkraum vs. Arbeitsraum
  - Vorwärts: Gelenkwinkel => Endeffektorpose
  - Invers: Endeffektorpose => Gelenkwinkel
  - Manipulator als Kette von 1DOF-Gelenken

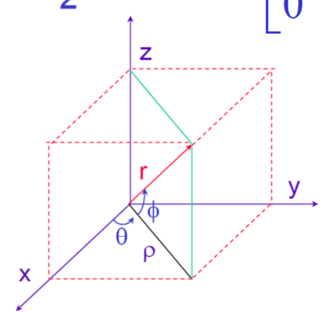


- Homogene Transformationen
  - Koordinatensystem $\{B\} = \left\{ {}^{A}_{B}R \quad {}^{A}P_{Borg} \right\}$
  - Mapping $\quad {}^{A}_{B}T : \; {}^{B}P \rightarrow {}^{A}P$
  - Operator $\quad T : \; P_1 \rightarrow P_2$

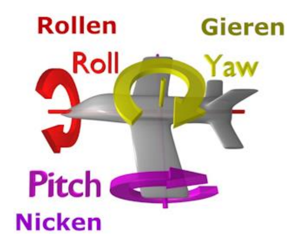


$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{Borg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Positionsrepräsentationen
  - Kartesisch (x, y, z)
  - Zylindrisch (ρ, θ, z)
  - Sphärisch (r, θ, ϕ)



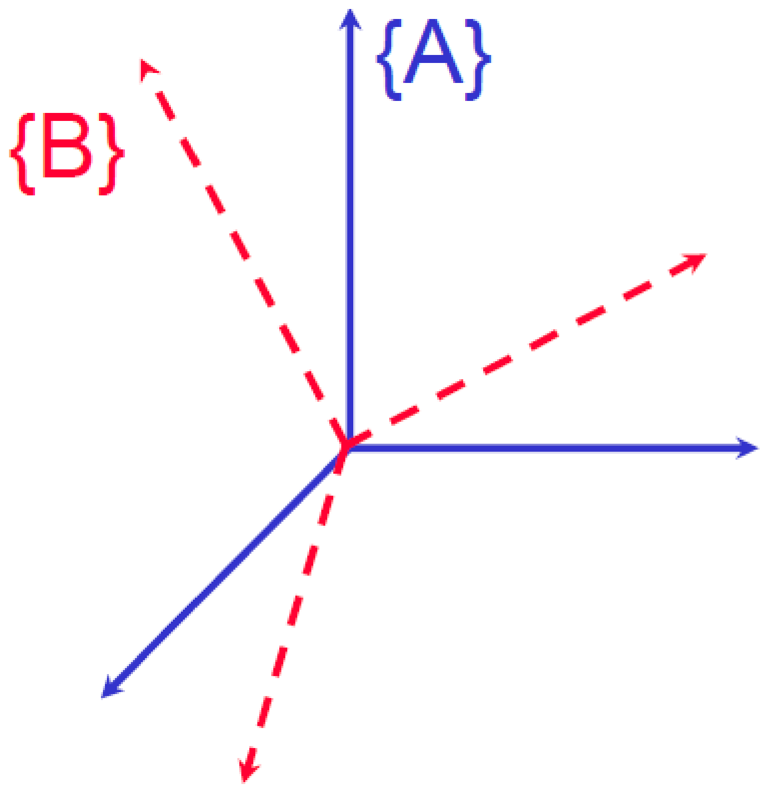
- Orientierungsrepräsentationen
  - Rotation um drei orthogonale Achsen
  - Rotationsmatrix mit sechs Nebenbedingungen
    - Einheitslänge: $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_3| = 1$
    - Orthogonalität: $\mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 . \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 . \mathbf{r}_3 = 0$



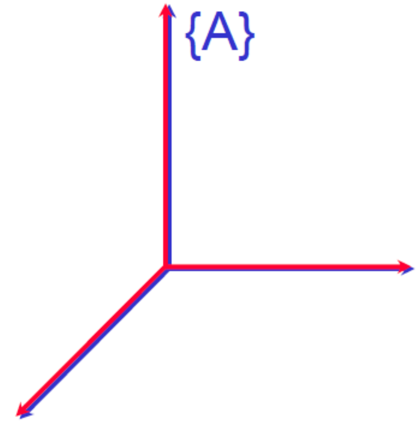
$$ R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} $$

Repräsentation mit drei Winkeln

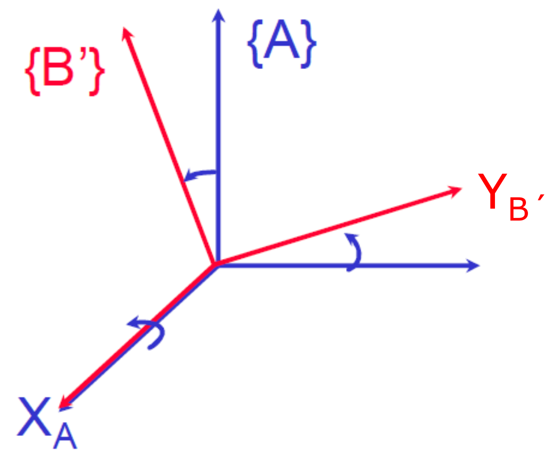
- Es gibt viele Möglichkeiten, die Reihenfolge von Elementar-Rotationen zu kombinieren.
- Die Rotationsachse kann fest oder beweglich sein.



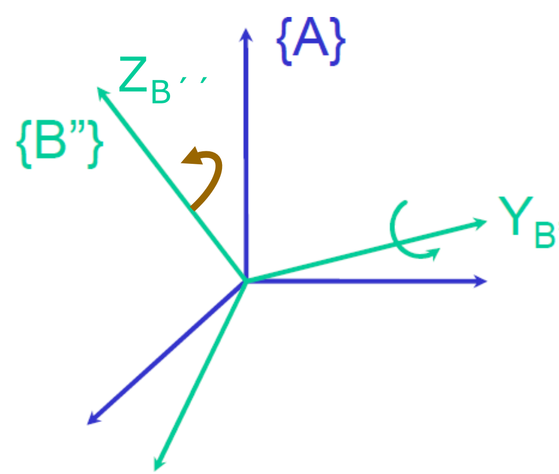
Euler-Winkel



- **Bewegliche Rotationsachsen**

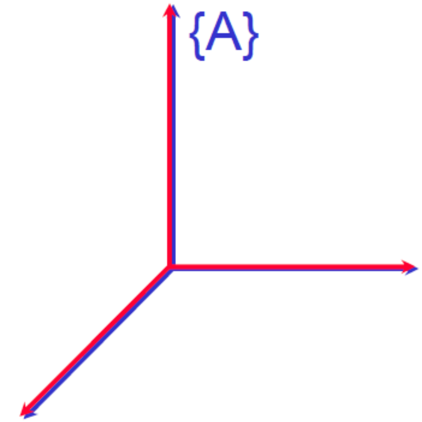


- Z.B. X-Y-Z, d.h.
  zuerst Rotation um
  X-Achse
- Anschließend Rotation
  um **rotierte** Y-Achse

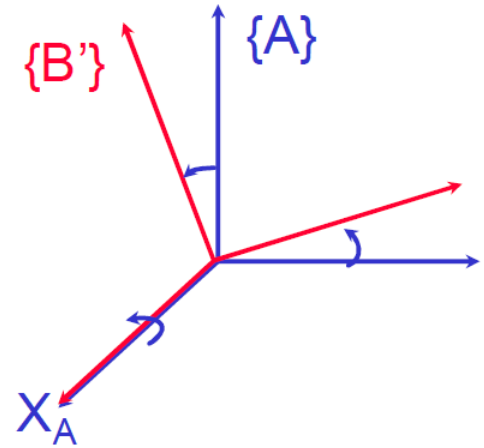


- Dann Rotation um
  resultierende Z-Achse
- 12 Varianten, abhängig von
  Reihenfolge der Rotationen

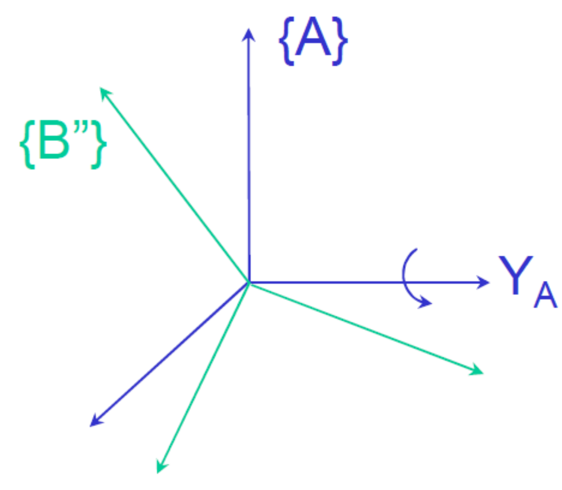
Absolute Winkel



- **Feste Rotationsachsen**



- Z.B. X-Y-Z, d.h.
  zuerst Rotation um
  X-Achse
- Anschließend Rotation
  um **ursprüngliche** Y-Achse



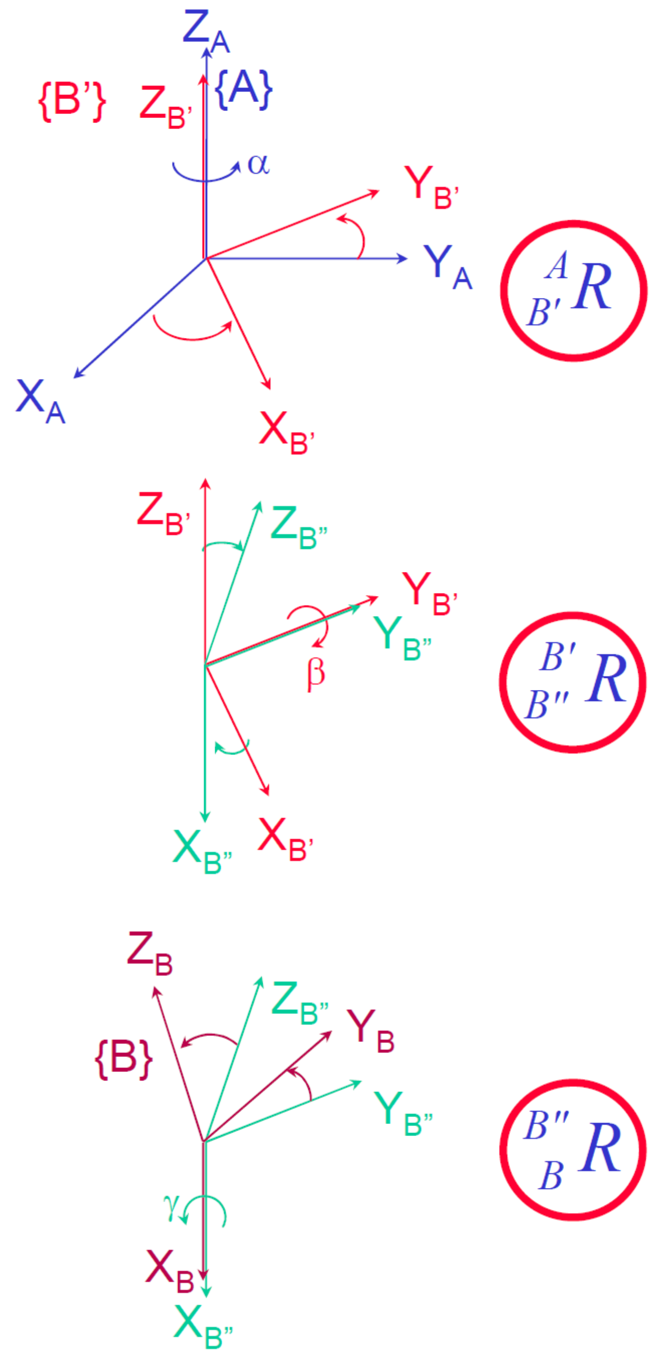
- Dann Rotation um
  ursprüngliche Z-Achse
- 12 Varianten, abhängig von
  Reihenfolge der Rotationen

(Z-Y-X)-Eulerwinkel

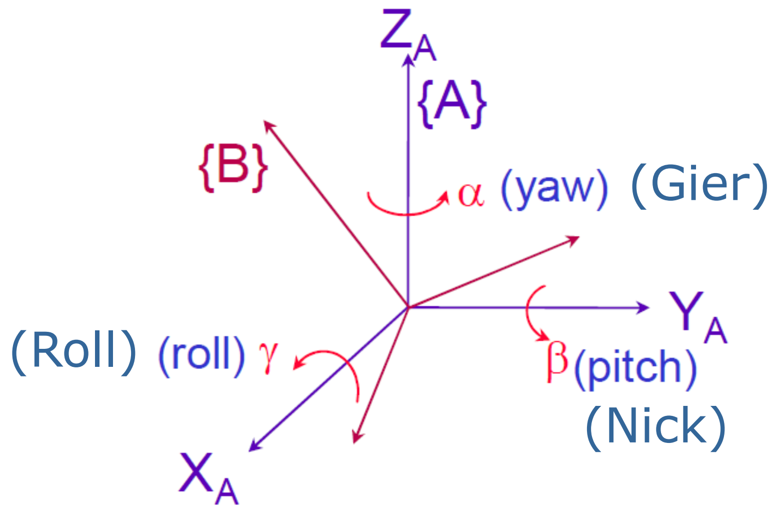
- Rotation um Z-Achse mit Winkel α
- Rotation um resultierende Y-Achse mit Winkel β
- Rotation um resultierende X-Achse mit Winkel γ
- Gesamtrotation

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B'}R \, . \, {}^{B'}_{B''}R \, . \, {}^{B''}_{B}R $$

$$ \boxed{{}^{A}_{B}R = R_Z(\alpha) . R_Y(\beta) . R_X(\gamma)} $$



(X-Y-Z)-Absolutwinkel



- Drei Rotationen um die ursprünglichen Achsen

$$R_X(\gamma): \; v \rightarrow R_X(\gamma).v$$

$$R_Y(\beta): \; (R_X(\gamma).v) \rightarrow R_Y(\beta).(R_X(\gamma).v)$$

$$R_Z(\alpha): \; (R_Y(\beta).R_X(\gamma).v) \rightarrow R_Z(\alpha).(R_Y(\beta).R_X(\gamma).v)$$

- Gesamtrotation

$$\boxed{{}^A_B R = {}^A_B R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha).R_Y(\beta).R_X(\gamma)}$$

(Z-Y-X)-Eulerwinkel

- Multiplikation elementarer Rotationsmatrizen

$$
{}^{A}_{B}R = R_{Z}\,(\alpha).R_{Y'}(\beta).R_{X''}(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

- Gesamtrotation

$$
{}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B}R_{Z\,Y'X''}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha.c\beta & X & X \\ s\alpha.c\beta & X & X \\ -s\beta & c\beta.s\gamma & c\beta.c\gamma \end{bmatrix}
$$

- Wie kann man die Winkel aus der Matrix ablesen?

(Z-Y-Z) - Eulerwinkel

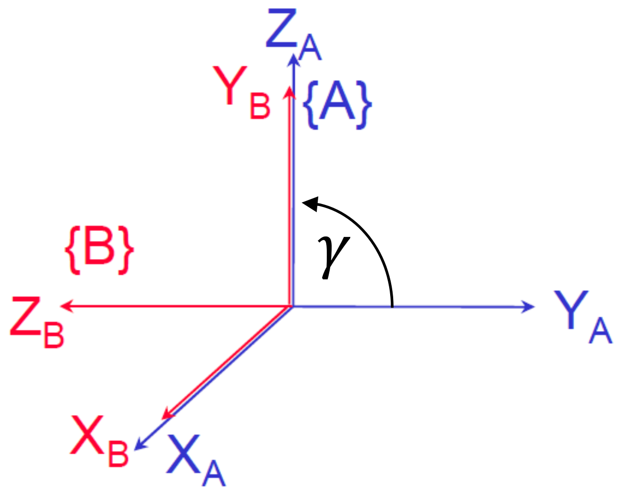
- Multiplikation elementarer Rotationen

$$ {}^{A}_{B}R = R_{Z}(\alpha).R_{Y'}(\beta).R_{Z''}(\gamma) $$

- Gesamtrotation

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B}R_{Z\,Y'Z''}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} X & X & c\alpha.s\beta \\ X & X & s\alpha.s\beta \\ -s\beta.c\gamma & s\beta.s\gamma & c\beta \end{bmatrix} $$

Beispiel: (Z-Y-X)-Eulerwinkel



$R_{Z\,Y'X''}(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 90^o$$

Absolutwinkel vs. Eulerwinkel

- (X-Y-Z) – Absolutwinkel

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha).R_Y(\beta).R_X(\gamma)$$

- (Z-Y-X) – Eulerwinkel

$$R_{Z\,Y'X''}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha).R_{Y'}(\beta).R_{X''}(\gamma)$$

- Identität

$$\boxed{R_{Z\,Y'X''}(\alpha,\beta,\gamma) = R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)}$$

Inverses Problem

- Gegeben: Rotationsmatrix ${}^A_B R$
- Gesucht: Winkel (α, β, γ)
- Z-Y-X Eulerwinkel

$$
{}^A_B R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha.c\beta & c\alpha.s\beta.s\gamma - s\alpha.c\gamma & c\alpha.s\beta.c\gamma + s\alpha.s\gamma \\ s\alpha.c\beta & s\alpha.s\beta.s\gamma + c\alpha.c\gamma & s\alpha.s\beta.c\gamma - c\alpha.s\gamma \\ -s\beta & c\beta.s\gamma & c\beta.c\gamma \end{bmatrix}
$$

- Bestimme Winkel $-\pi/2 < \beta <= \pi/2$:

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \rightarrow$

$$
\left.\begin{aligned} \cos\beta = c\beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} \\ \sin\beta = s\beta = -r_{31} \end{aligned}\right\} \rightarrow \beta = A\tan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})
$$

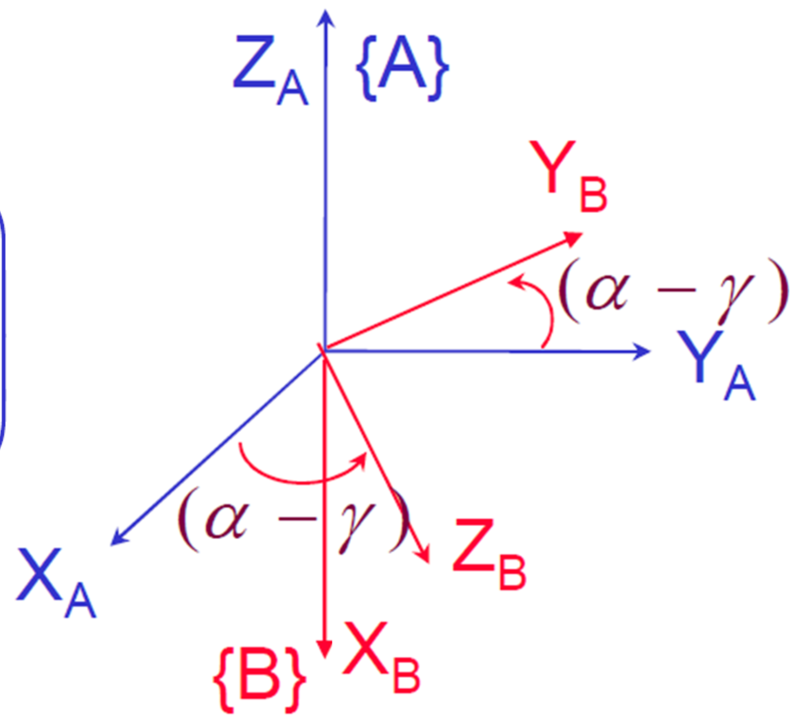
- Für $\cos(\beta)=0$ ($\beta=\pm 90°$) **Singularität der Repräsentation** (nur $(\alpha + \gamma)$ oder $(\alpha - \gamma)$ ist definiert)

Beispiel für Singularität

- Z-Y-X Eulerwinkel

$$c\beta = 0,\ s\beta = +1$$

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{pmatrix} 0 & -s(\alpha-\gamma) & c(\alpha-\gamma) \\ 0 & c(\alpha-\gamma) & s(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

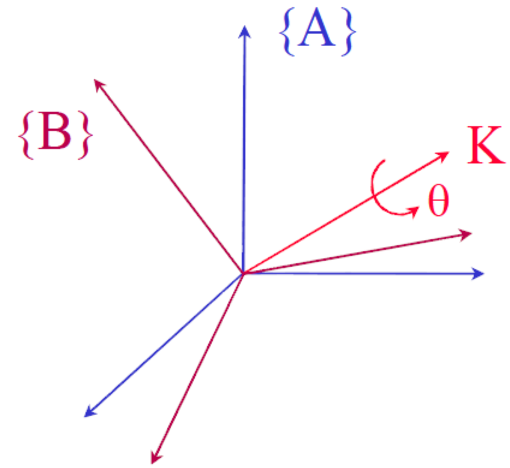


$$c\beta = 0,\ s\beta = -1$$

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{pmatrix} 0 & -s(\alpha+\gamma) & -c(\alpha+\gamma) \\ 0 & c(\alpha+\gamma) & -s(\alpha+\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

- 90°-Rotation um Y_B macht X-Achse zur Z-Achse

Rotation um Vektor K: $R_K(\theta)$



- Man kann immer einen Einheits-vektor K finden, um den man mit θ rotieren kann
- Repräsentation: $X_r = \theta . K = \begin{bmatrix} \theta . k_X \\ \theta . k_Y \\ \theta . k_Z \end{bmatrix}$
- Rotationsmatrix:

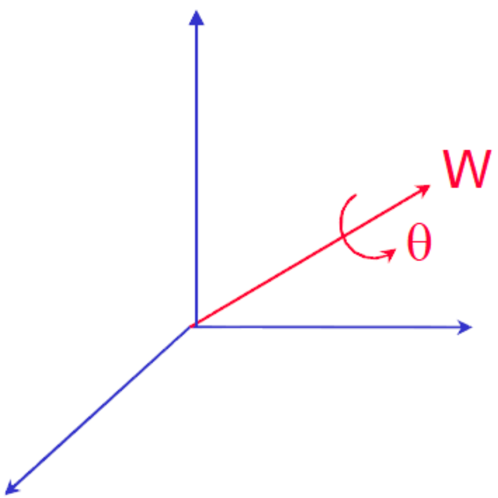
$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x.k_x.v\theta + c\theta & k_x.k_y.v\theta - k_z.s\theta & k_x.k_z.v\theta + k_y.s\theta \\ k_x.k_y.v\theta + k_z.s\theta & k_y.k_y.v\theta + c\theta & k_y.k_z.v\theta - k_x.s\theta \\ k_x.k_z.v\theta - k_y.s\theta & k_y.k_z.v\theta + k_x.s\theta & k_z.k_z.v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

  mit $v\theta = 1 - c\theta$

- Gegeben: $R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$
- Berechne: $\theta = Ar\cos(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2})$ $\quad {}^A K = \frac{1}{2.\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$
- Singularität für $\sin\theta = 0$

Euler-Parameter (Quaternion)

- Jede Rotations-Repräsentation mit drei Parametern hat Singularität
- => nutze vier Parameter



$$\varepsilon_1 = W_x . \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon_2 = W_y . \sin\frac{\theta}{2}$$

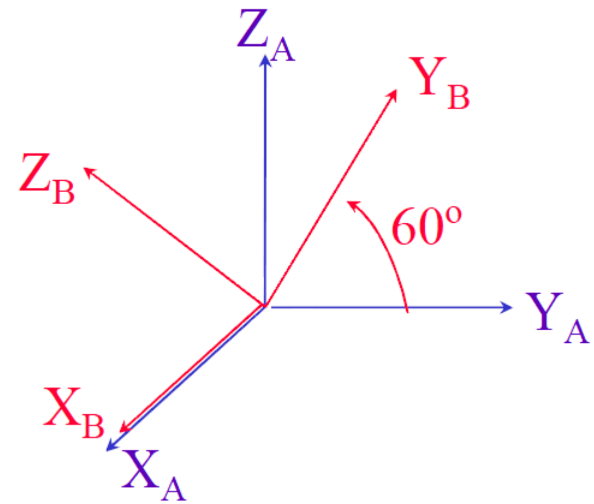
$$\varepsilon_3 = W_z . \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2}$$

- Normierte Länge: $|W| = 1, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1$
- => ε ist Punkt auf 4D-Einheitskugel

Beispiel

- Rotation 60° um X-Achse



- Euler-Parameter:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

- Rotationsmatrix:

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Inverses Problem

- Gegeben: Rotationsmatrix ${}^{A}_{B}R$
- Gesucht: Euler-Parameter ε
- Berechne:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

$$r_{11}+r_{22}+r_{33} = 3-4(\underbrace{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}_{(1-\varepsilon_4^2)})$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{r_{32}-r_{23}}{4\varepsilon_4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_{13}-r_{31}}{4\varepsilon_4}, \quad \varepsilon_3 = \frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_4}$$

- Problem: $\varepsilon_4 = 0$

Inverses Problem

- Man kann zeigen, dass es immer einen Parameter $\varepsilon_i \geq 0.5$ gibt
- => Teile durch den größten Parameter
  - ε_1 maximal:

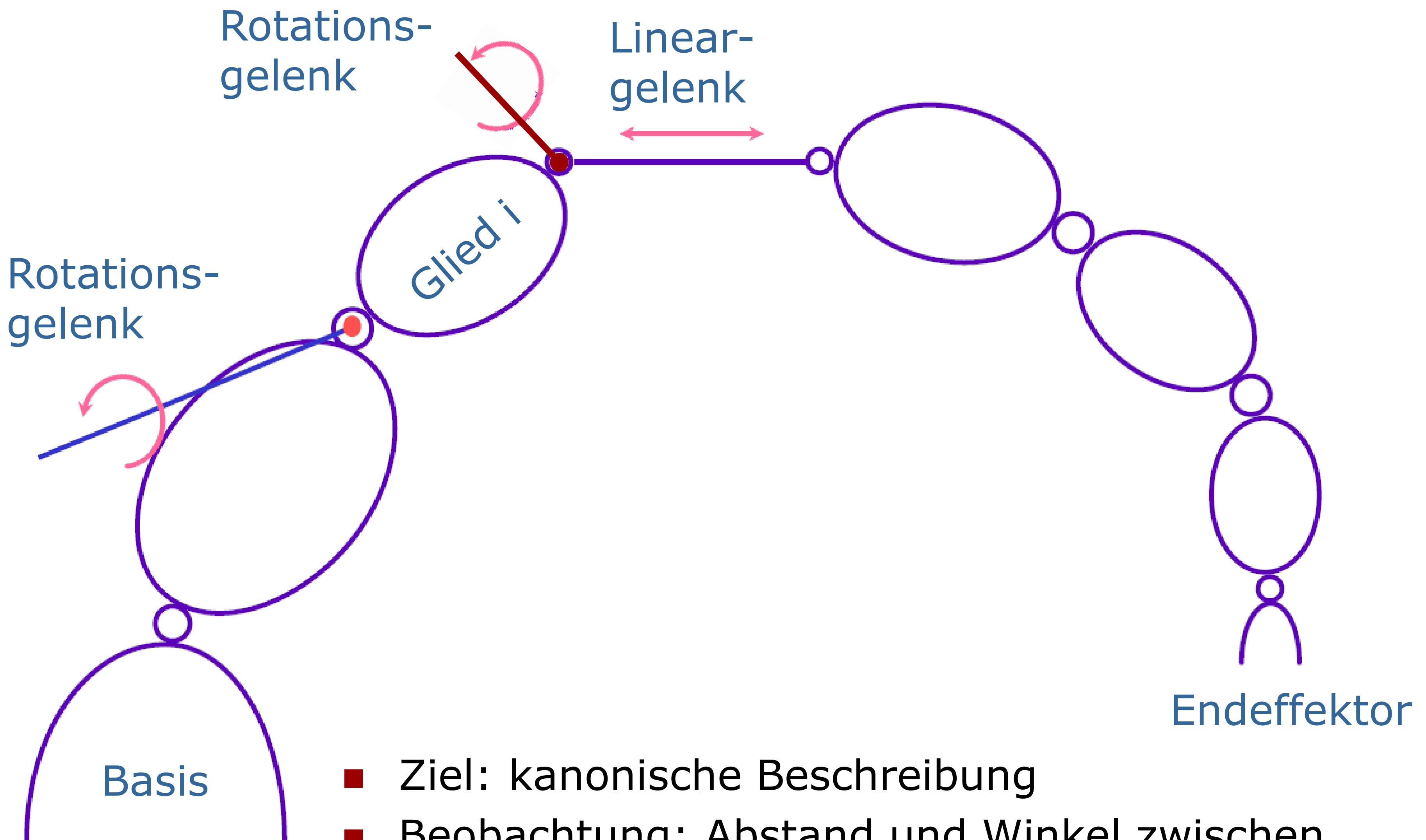
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(r_{21} + r_{12})}{4\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{(r_{31} + r_{13})}{4\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_4 = \frac{(r_{32} - r_{23})}{4\varepsilon_1}$$

  - ε_2 maximal: $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1}$
  - ε_3 maximal: $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1}$
  - ε_4 maximal: $\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$

Denavit-Hartenberg-Parameter

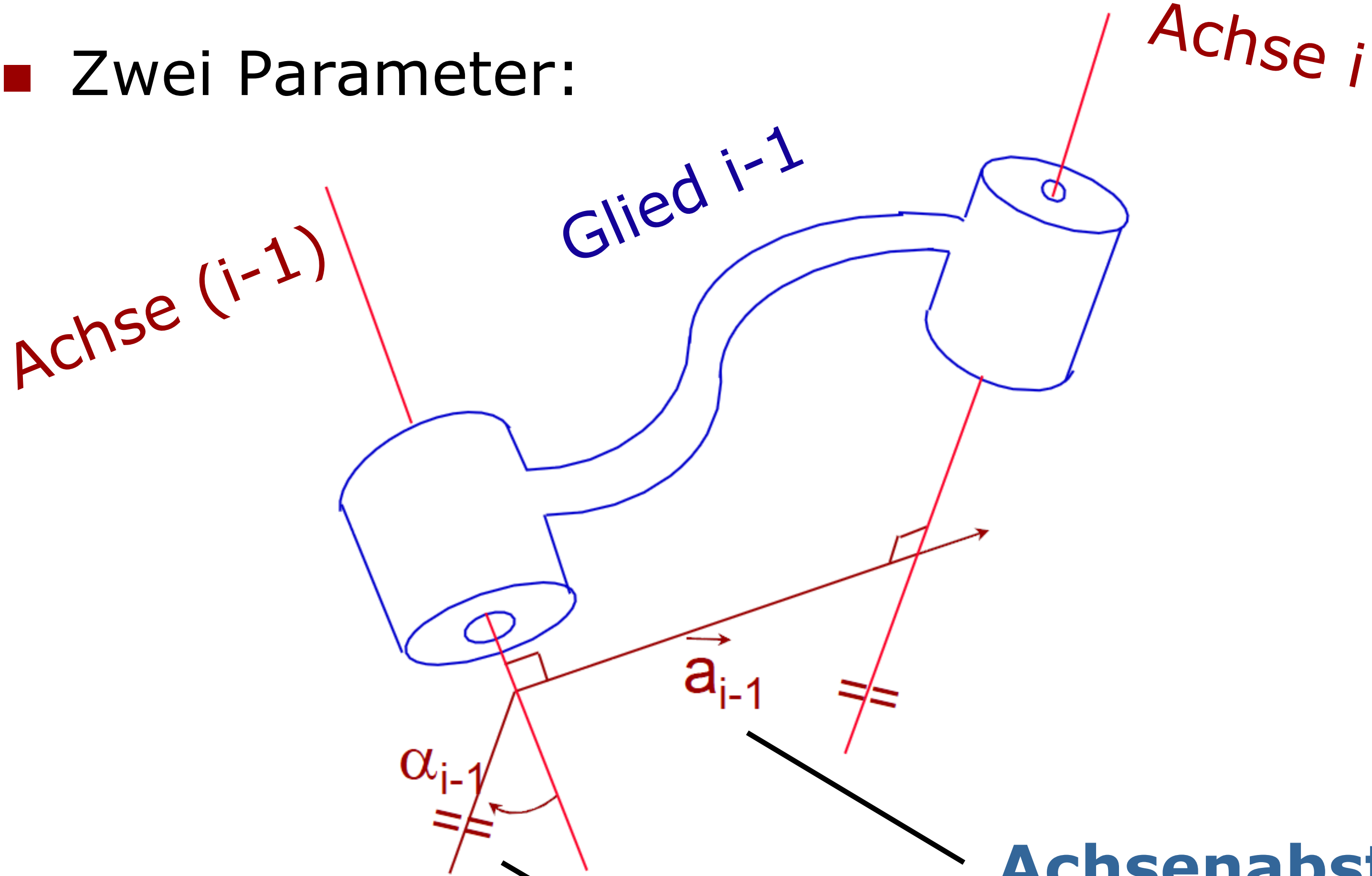
Kinematische Kette



- Ziel: kanonische Beschreibung
- Beobachtung: Abstand und Winkel zwischen **benachbarten** Achsen bleiben erhalten

Beschreibung eines Verbindungsglieds

- Zwei Parameter:

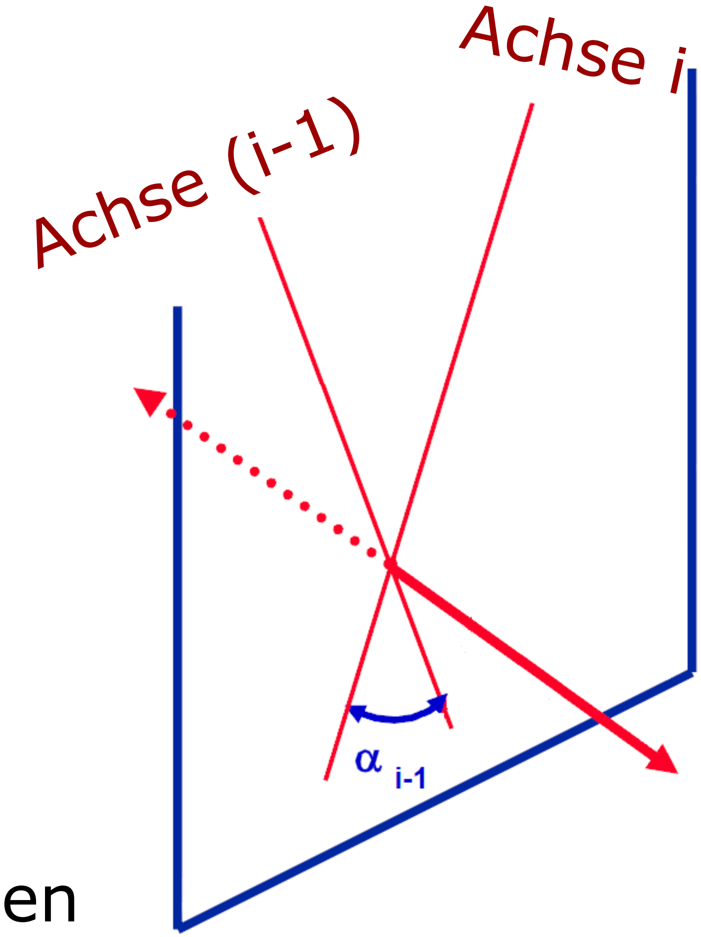


Achsenabstand
(rechter Winkel zu beiden Achsen)

Achsenverdrehung
(gemessen um a_{i-1})

Sich Schneidende Achsen

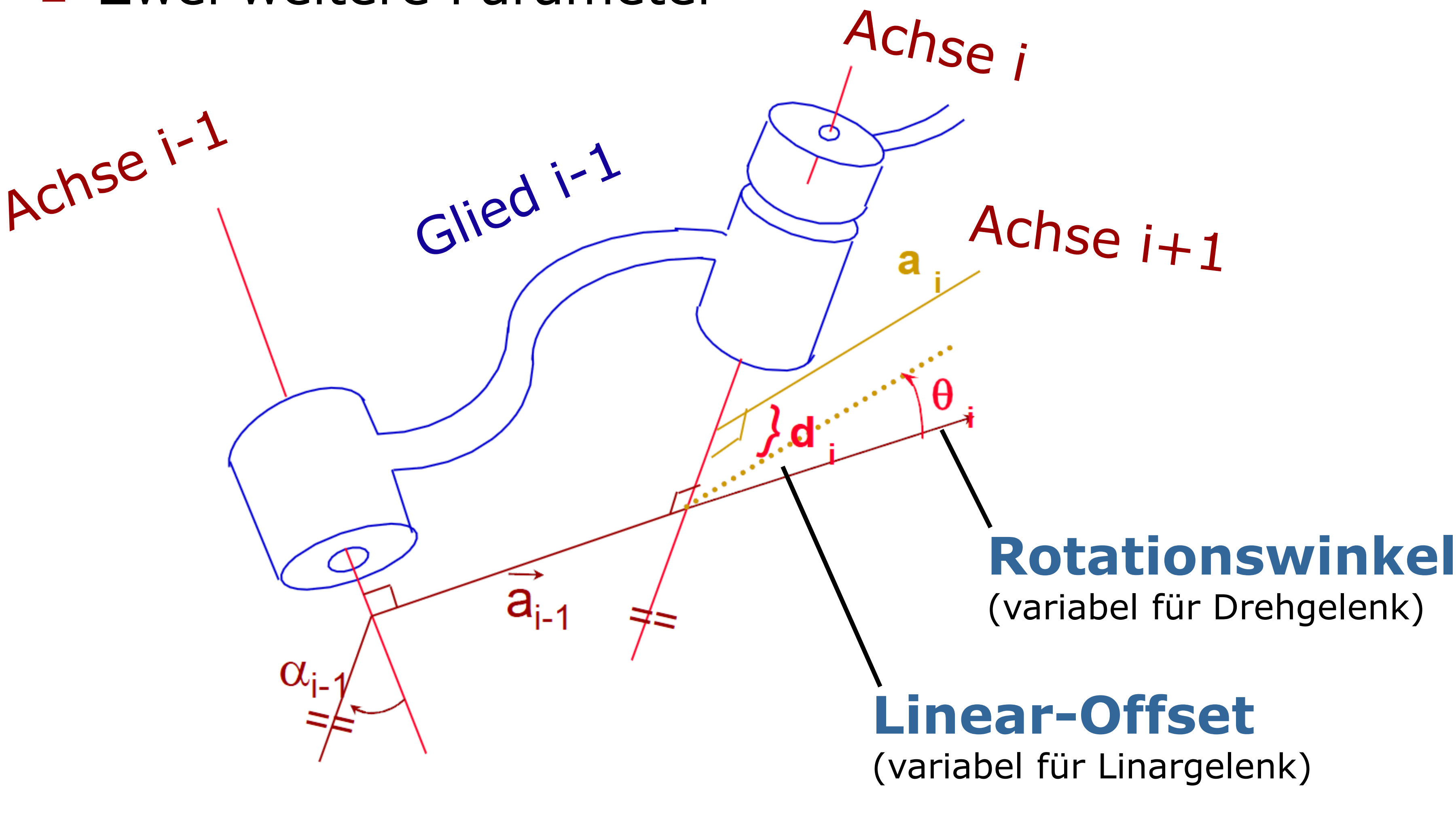
- Achsen häufig parallel oder schneidend



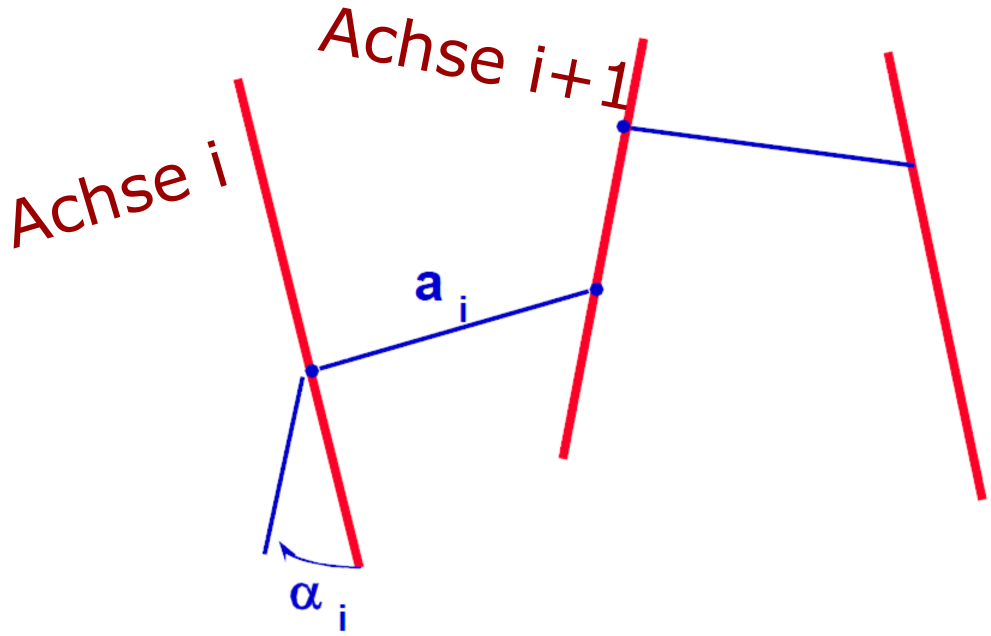
- Winkel $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}}$ in der von den Achsen aufgespannten Ebene
- Vorzeichen frei wählbar

Verbindung zum nächsten Glied

- Zwei weitere Parameter



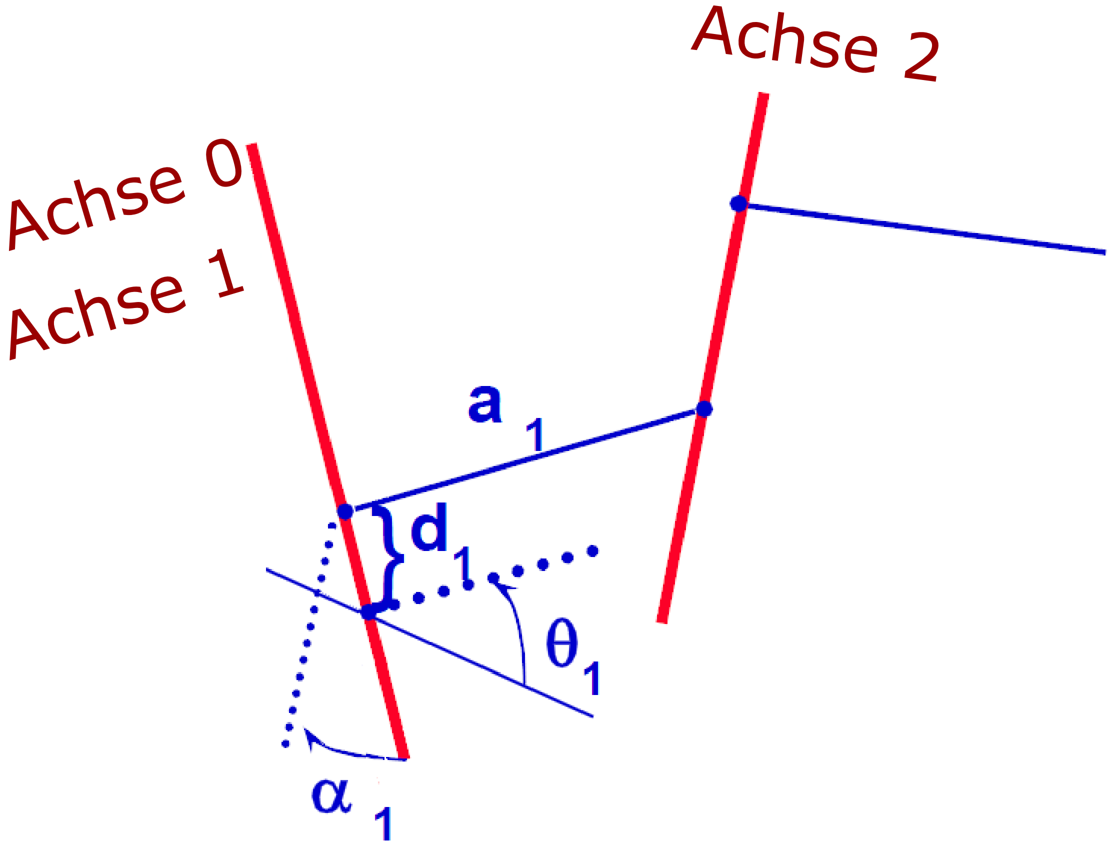
Achsen an der Basis



- a_i und α_i hängen von den Achsen i und i+1 ab
- Achsen 1,…,n legen $a_1, \ldots, a_{n-1}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ fest
- **Konvention:** $a_0=a_n=0$ und $\alpha_0= \alpha_n=0$

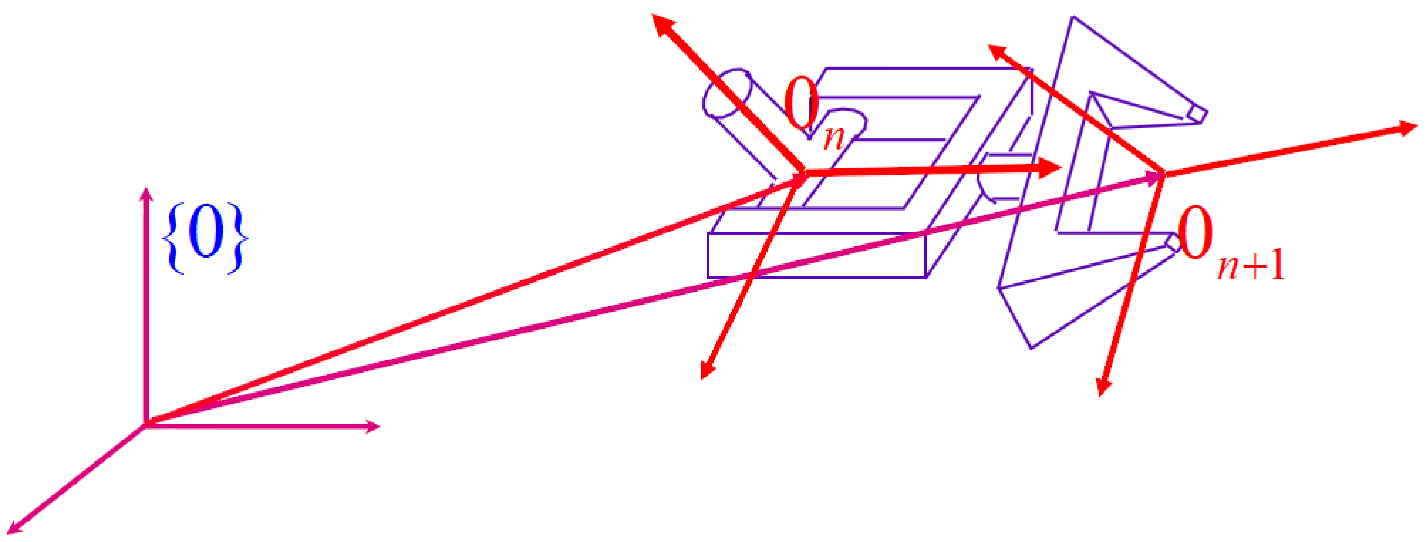
Erste Achse an der Basis

- Achse 0 parallel zu Achse 1: $\alpha_0=0$, Achsabstand Null $a_0=0$



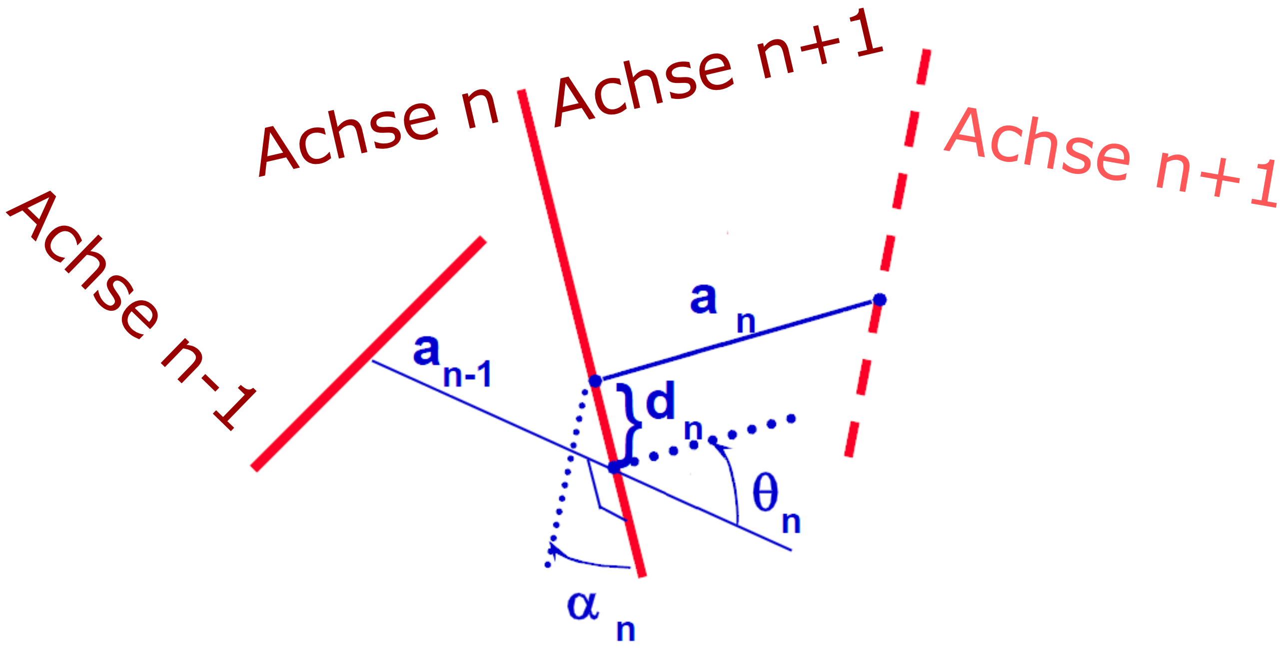
Endeffektor-Koordinaten

- Koordinaten des Endeffektors durch Werkzeug und Aufgabe bestimmt
- Betrachte Schnittpunkt der Achsen im "Handgelenk"

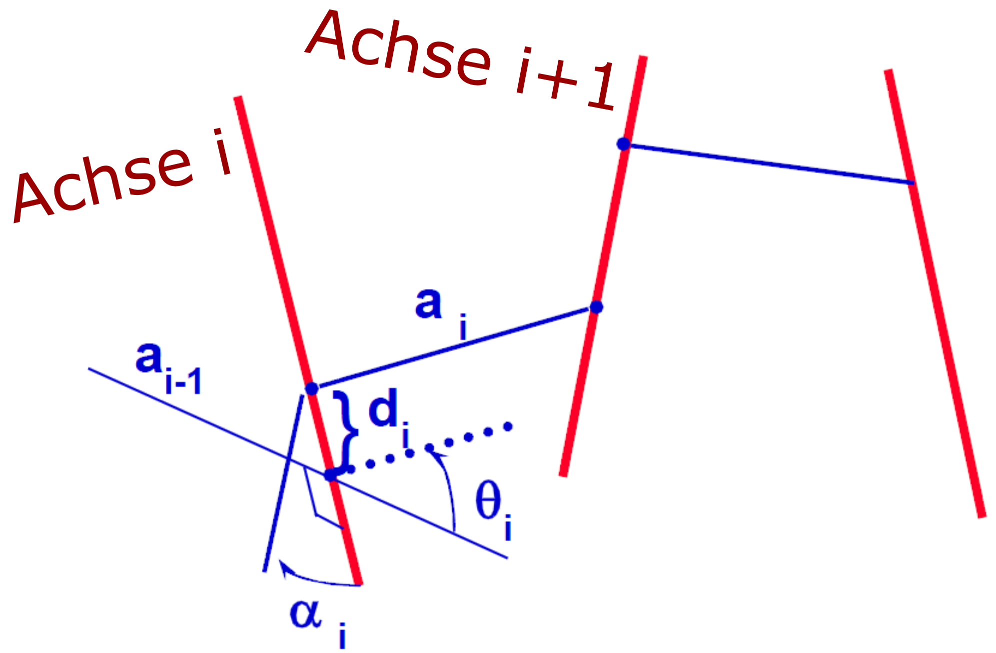


Letzte Achse am Endeffektor

- Achse n+1 parallel zu Achse n: α_n=0, Achsabstand Null a_n=0



Basis und Endeffektor

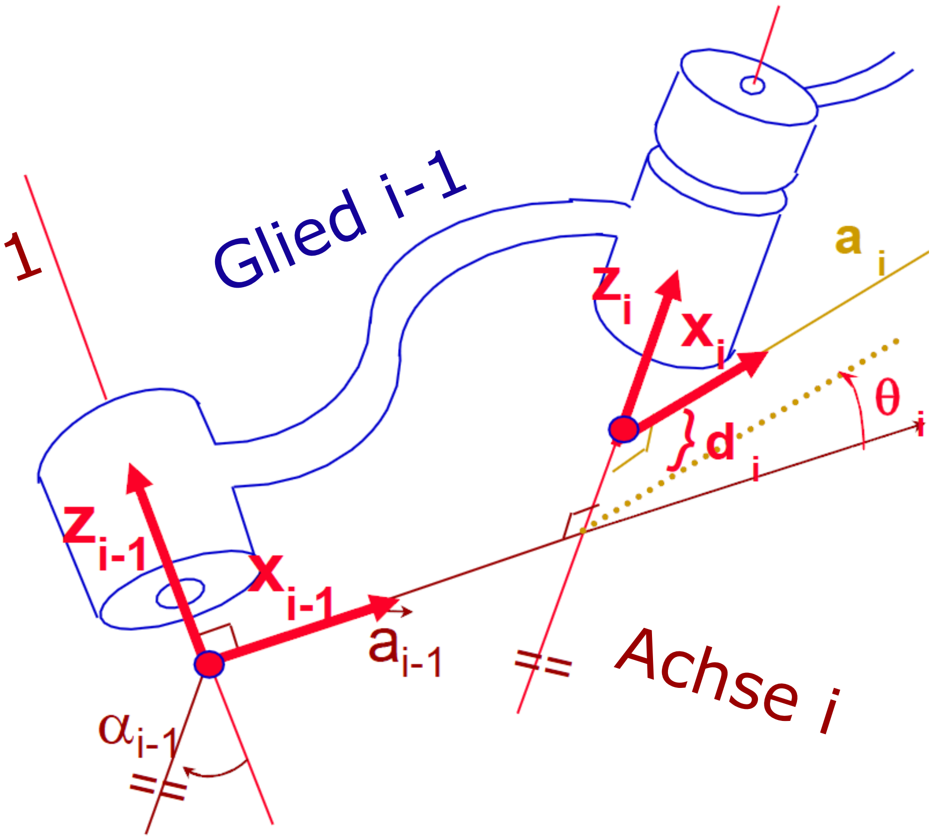


- θ_i und d_i hängen von den Achsen i-1 und i ab
- Achsen 1,…,n-1 legen $\theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ und $d_2, \ldots, d_{n-1}$ fest
- **Konvention:** Setze konstanten Parameter Null (abhängig vom Gelenktyp) θ_1 oder $d_1=0$;
  θ_n oder $d_n=0$

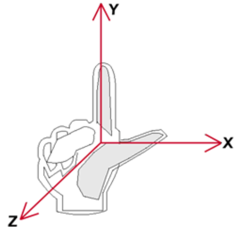
Denavit-Hartenberg-Parameter

- Beschreibung eines Gelenks i durch vier **DH-Parameter: (α_i, a_i, d_i, θ_i)**
  - Drei konstante Parameter
  - Ein variabler Parameter, abhängig vom Gelenktyp
    - d_i variabel für Lineargelenk
    - θ_i variabel für Rotationsgelenk
- α_i und a_i beschreiben das Glied (Verdrehung und Achsabstand)
- d_i und θ_i beschreiben die Verbindung zum nächsten Glied (Rotation und Linearbewegung)

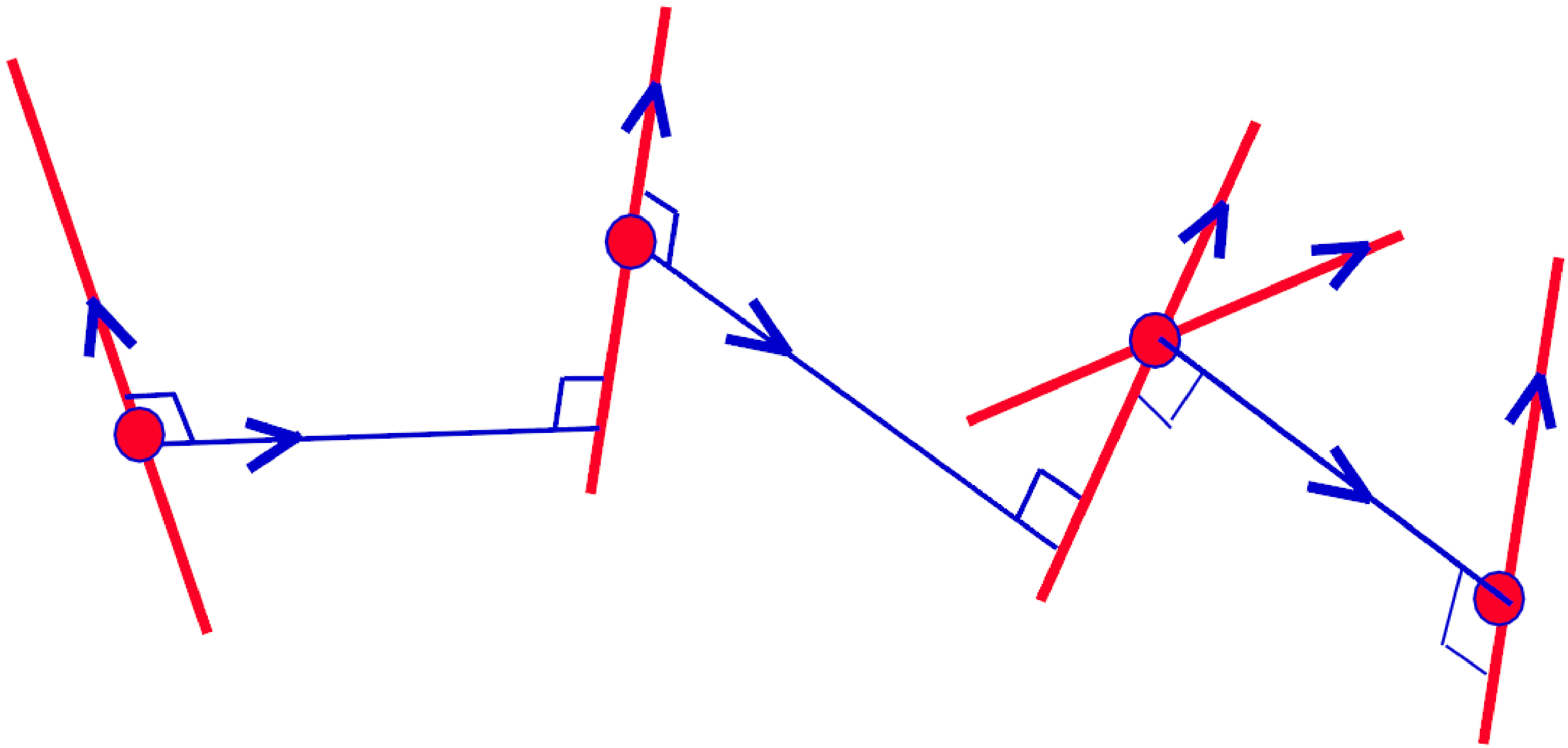
Platzierung der Koordinatensysteme



- Ursprung in Schnittpunkt mit kürzestem Normalenvektor zur nächsten Gelenk-Achse
- Z-Achse entlang der Gelenk-Achse
- X-Achse entlang gemeinsamen Normalenvektor
- Y-Achse ergibt sich durch Rechte-Hand-Regel (Daumen=X, Zeigefinger=Y, Mittelfinger=Z)



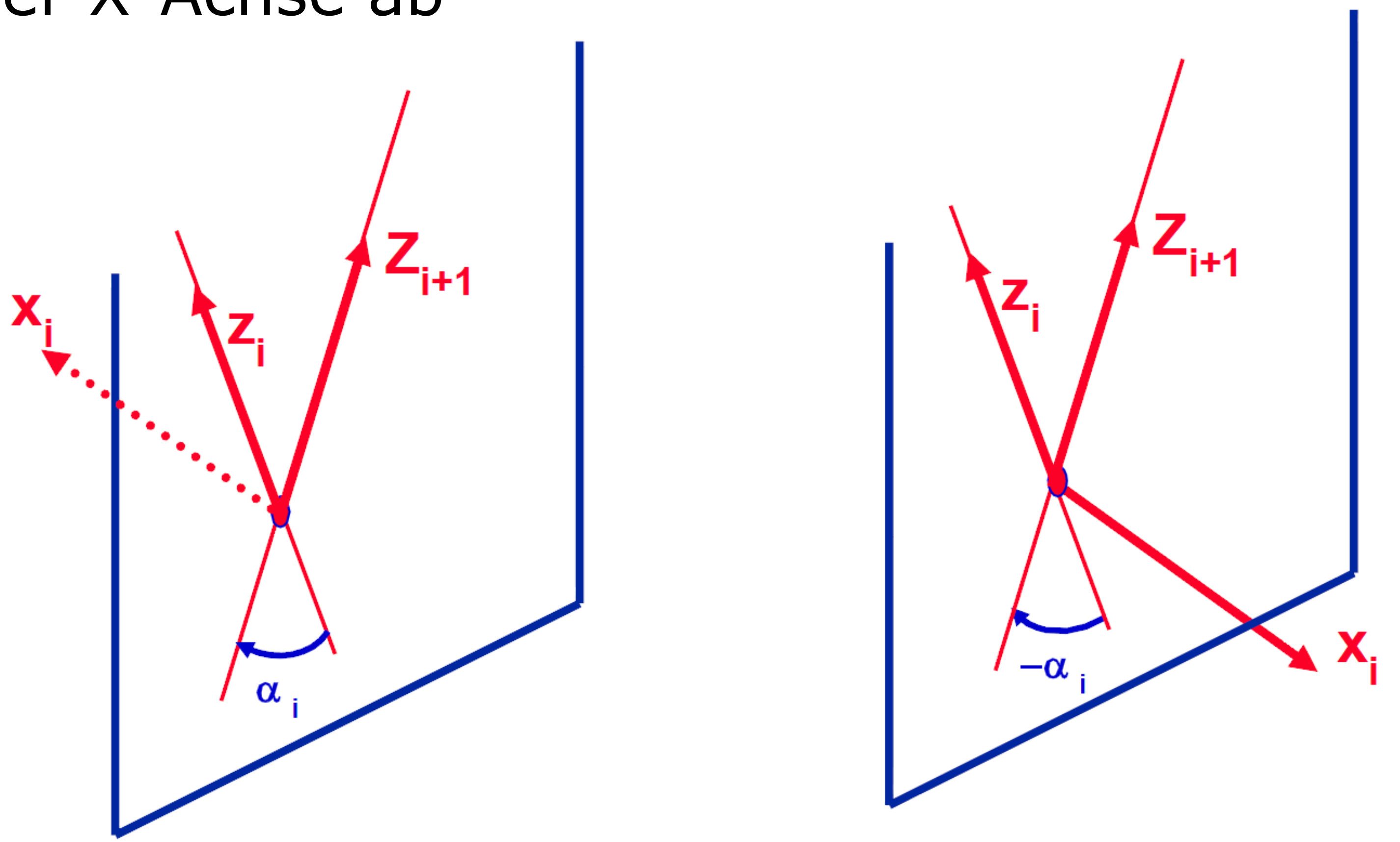
Mehrere Achsen



- 1. Normalen finden
- 2. Ursprung festlegen
- 3. Z-Achse bestimmen
- 4. X-Achse bestimmen

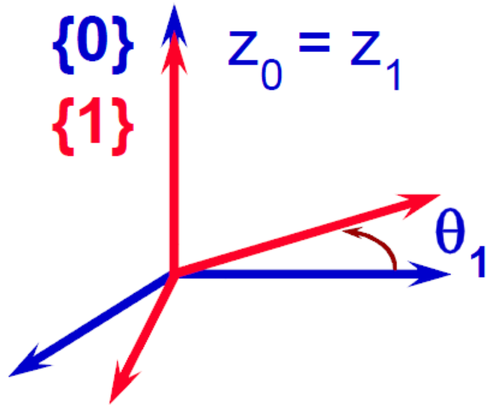
Sich Schneidende Achsen

- Häufiger Spezialfall
- Vorzeichen von Verdrehung α_i hängt von Richtung der X-Achse ab



Erstes Gelenk: Paramterwahl

- Rotationsgelenk



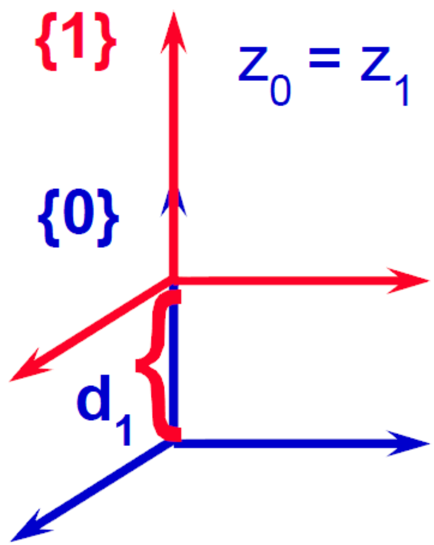
$a_0 = 0$

$\alpha_0 = 0$

$d_1 = 0$

$\theta_1 = 0 \longrightarrow \{0\}\equiv\{1\}$

- Lineargelenk



$a_0 = 0$

$\alpha_0 = 0$

$\theta_1 = 0$

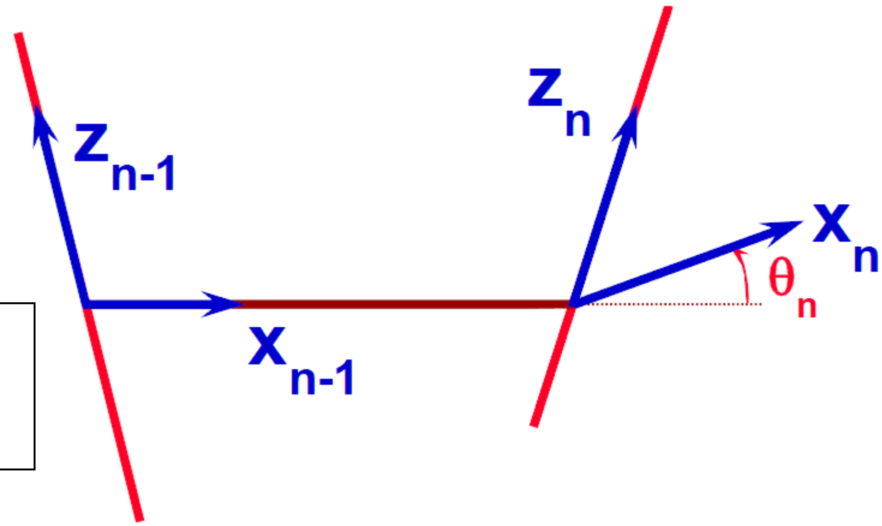
$d_1 = 0 \longrightarrow \{0\}\equiv\{1\}$

Letztes Gelenk

- Rotationsgelenk

$\boxed{d_n = 0}$

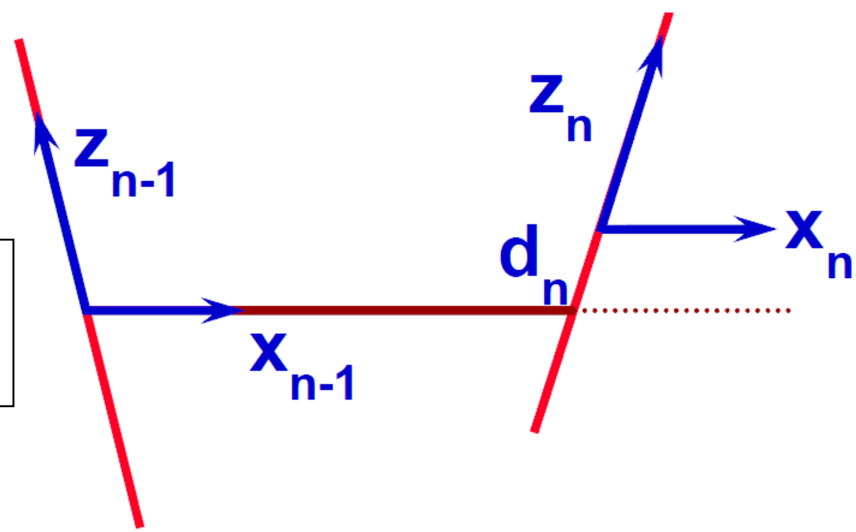
$\theta_n = 0 \longrightarrow x_n = x_{n-1}$



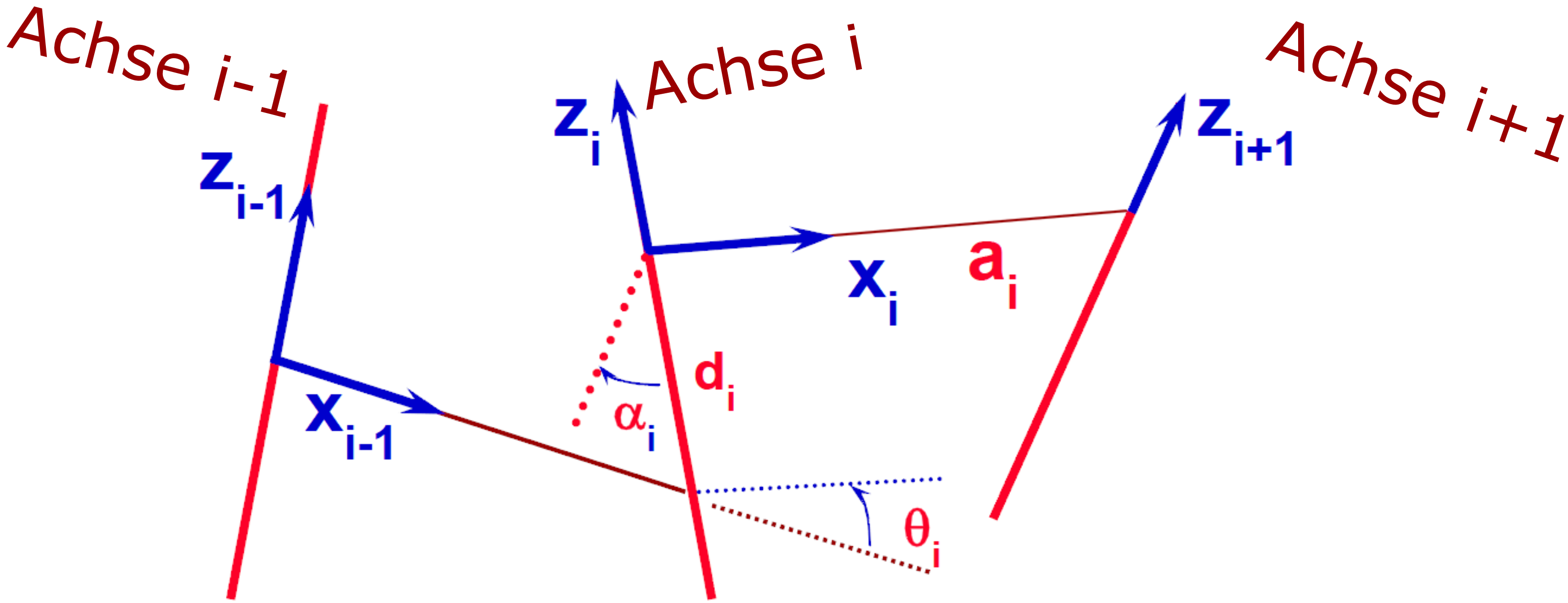
- Lineargelenk

$\boxed{\theta_n = 0}$

$d_n = 0 \longrightarrow x_n = x_{n-1}$

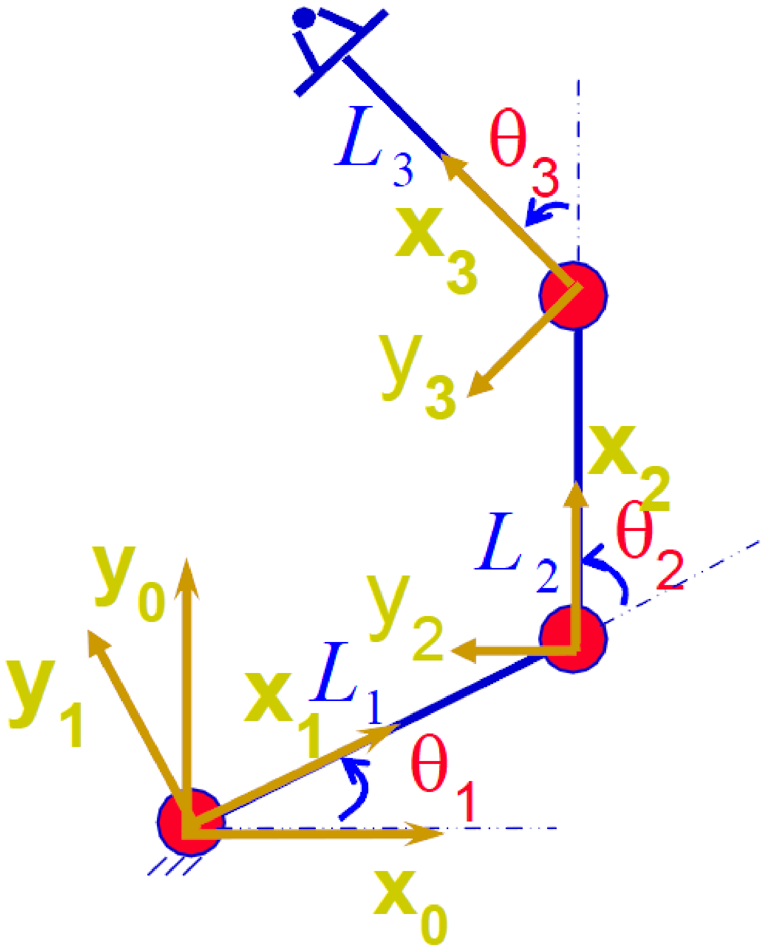


DH-Zusammenfassung



- a_i : Distanz (z_i, z_{i+1}) entlang x_i
- α_i : Winkel (z_i, z_{i+1}) um x_i
- d_i : Distanz (x_{i-1}, x_i) entlang z_i
- θ_i : Winkel (x_{i-1}, x_i) um z_i

Beispiel: Planarer Arm mit drei Rotationsgelenken



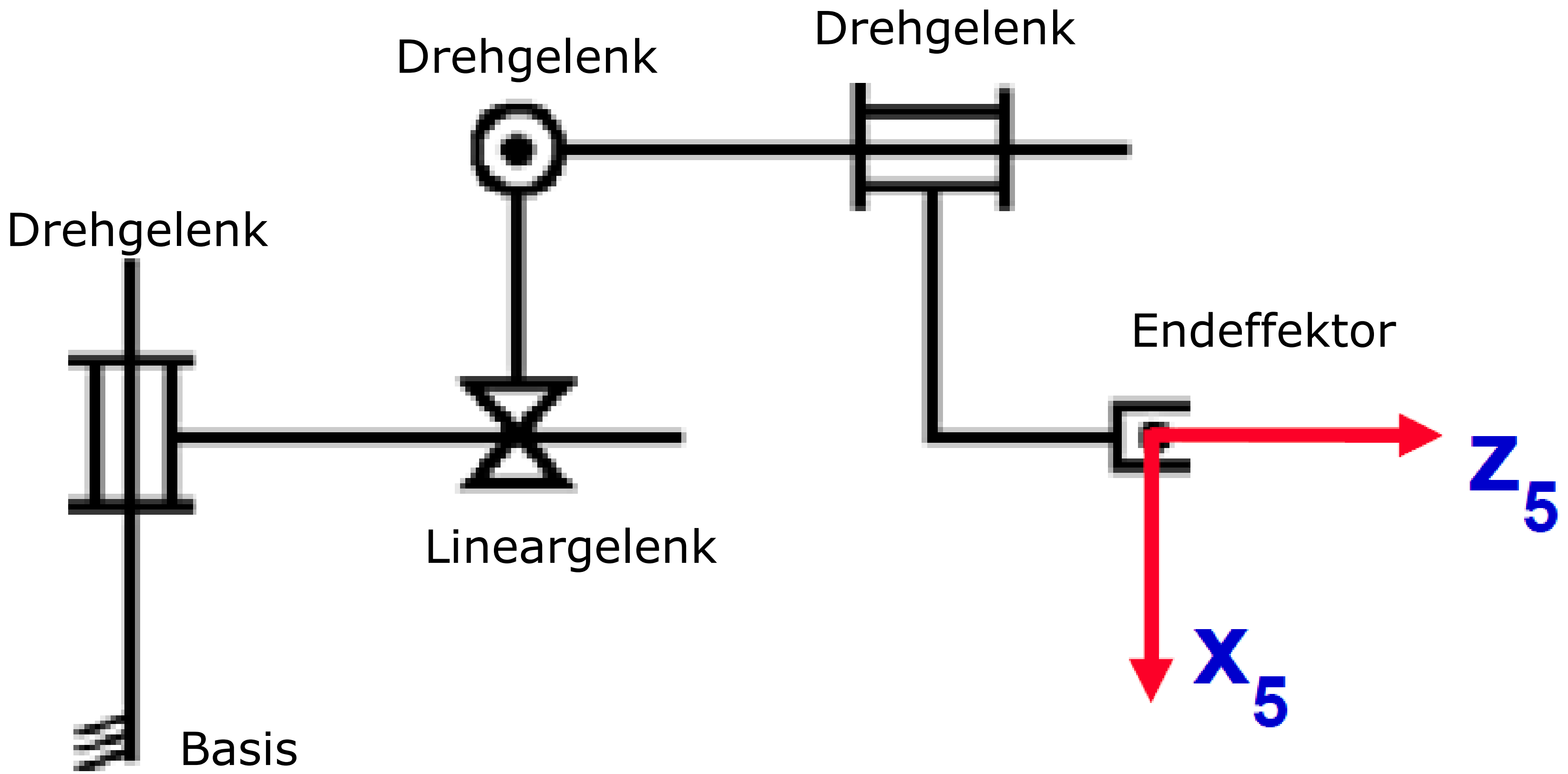
	i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
■	1	0	0	0	θ_1
■	2	0	L_1	0	θ_2
■	3	0	L_2	0	θ_3

konstant

variabel

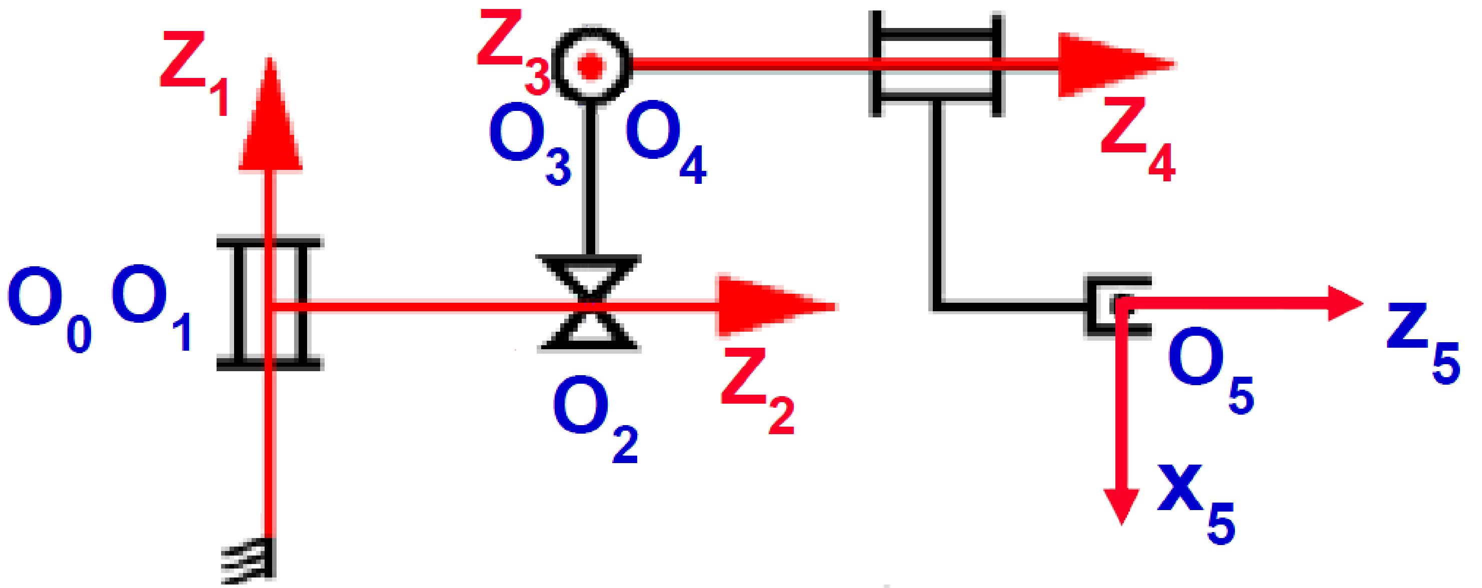
Beispiel: RPRR-Arm

- Schematische Darstellung:

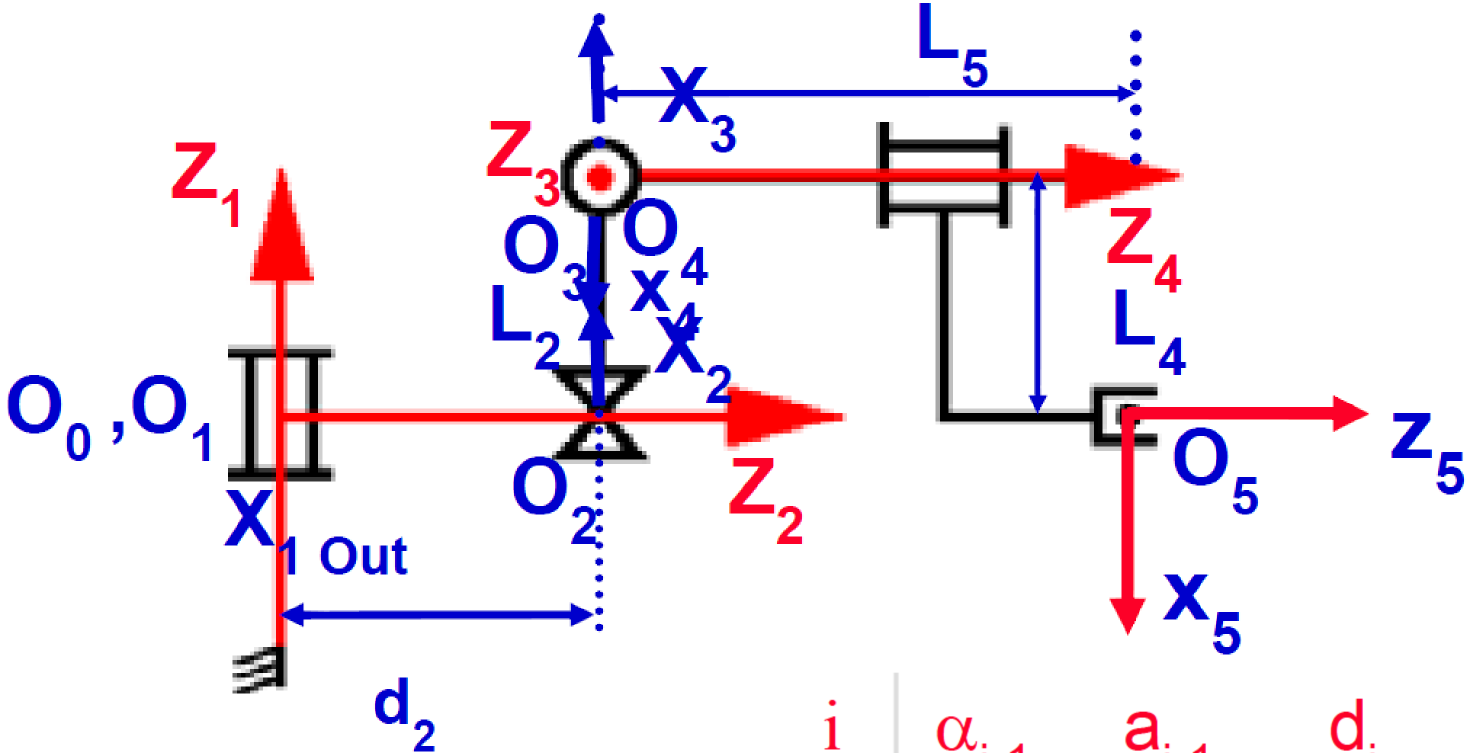


Beispiel: RPRR-Arm

- Festlegung der Achsen und Ursprünge



Beispiel: RPRR-Arm

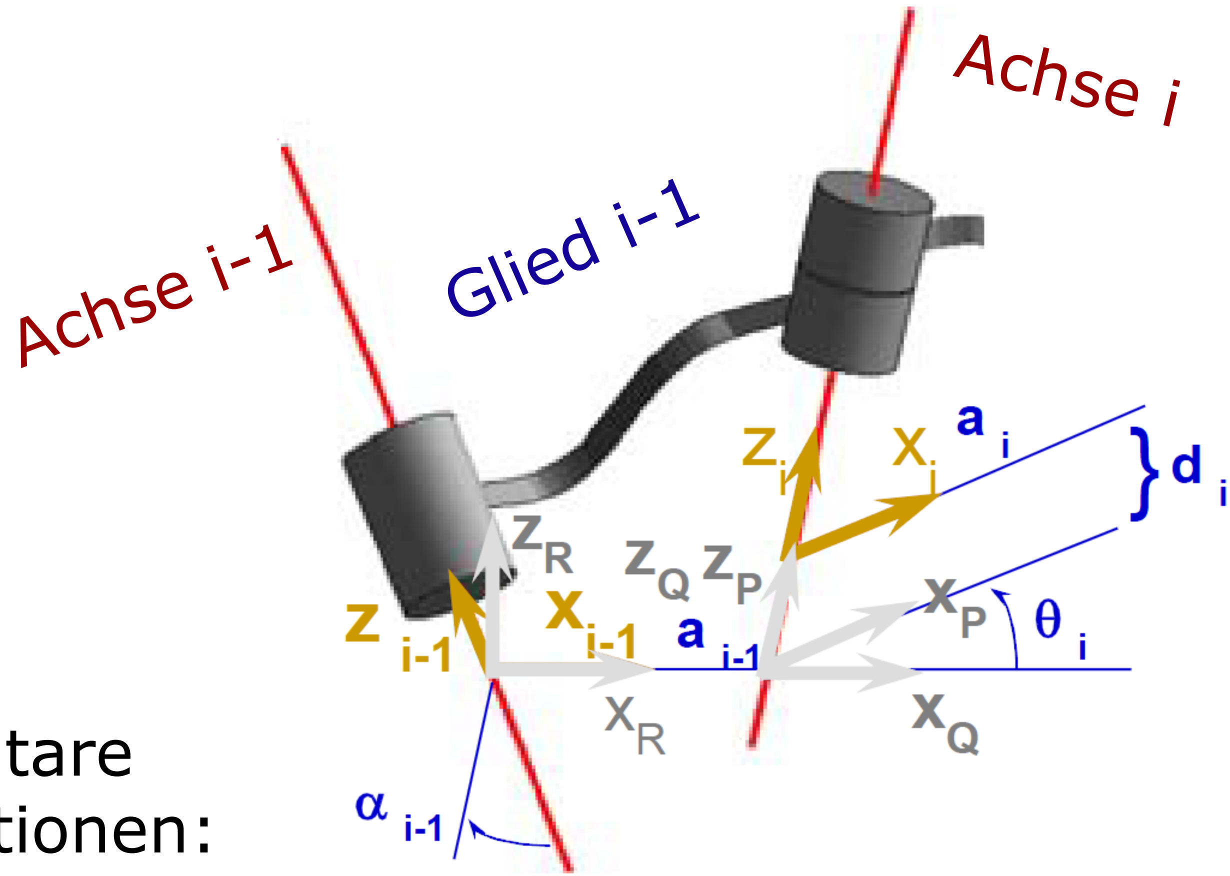


- DH-Parameter:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90	0	d_2	-90
3	-90	L_2	0	θ_3
4	90	0	L_5	θ_4
5	0	L_4	0	0

- a_i : Distanz (z_i, z_{i+1}) entlang x_i
- α_i : Winkel (z_i, z_{i+1}) um x_i
- d_i : Distanz (x_{i-1}, x_i) entlang z_i
- θ_i : Winkel (x_{i-1}, x_i) um z_i

DH-Vorwärtskinematik

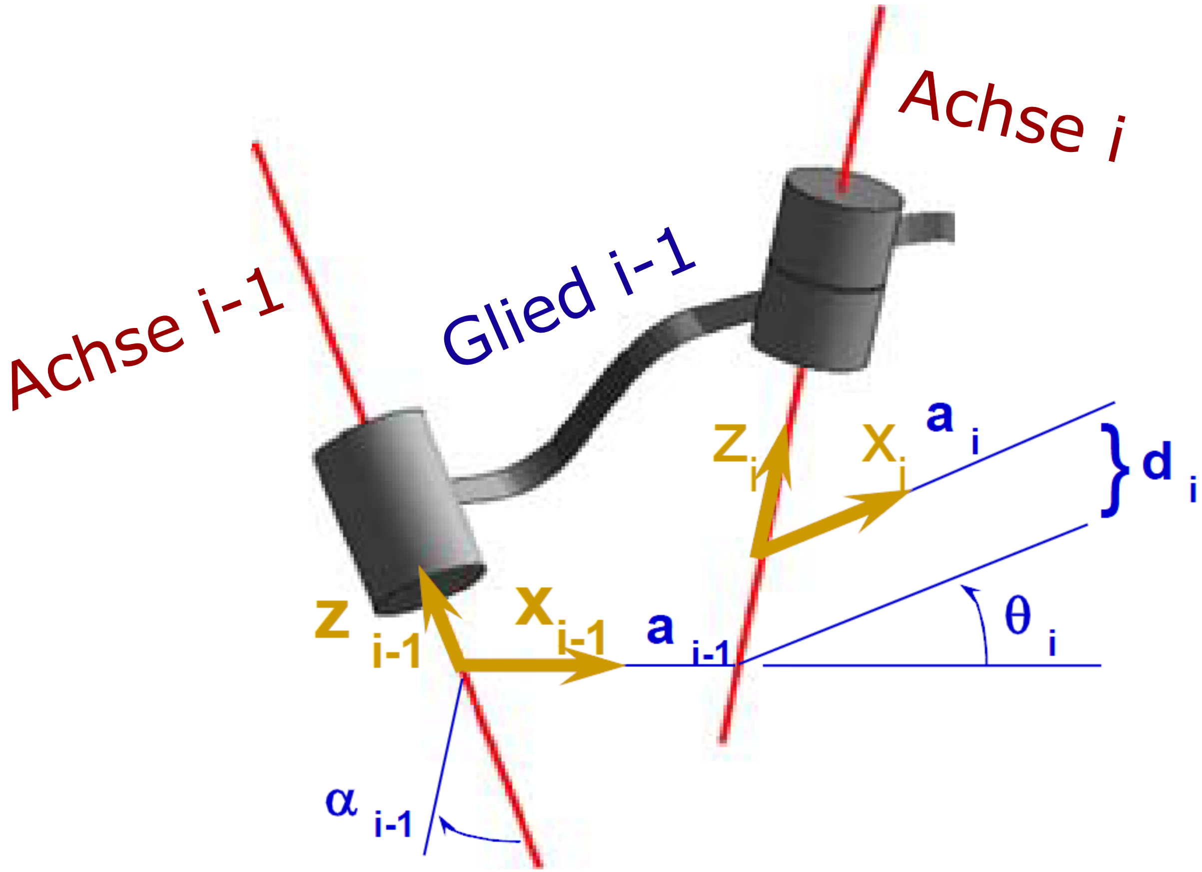


- Vier elementare Transformationen:

$$ {}^{i-1}_{\;\;\,i}T = {}^{i-1}_{\;\;\,R}T \; {}^{R}_{Q}T \; {}^{Q}_{P}T \; {}^{P}_{i}T $$

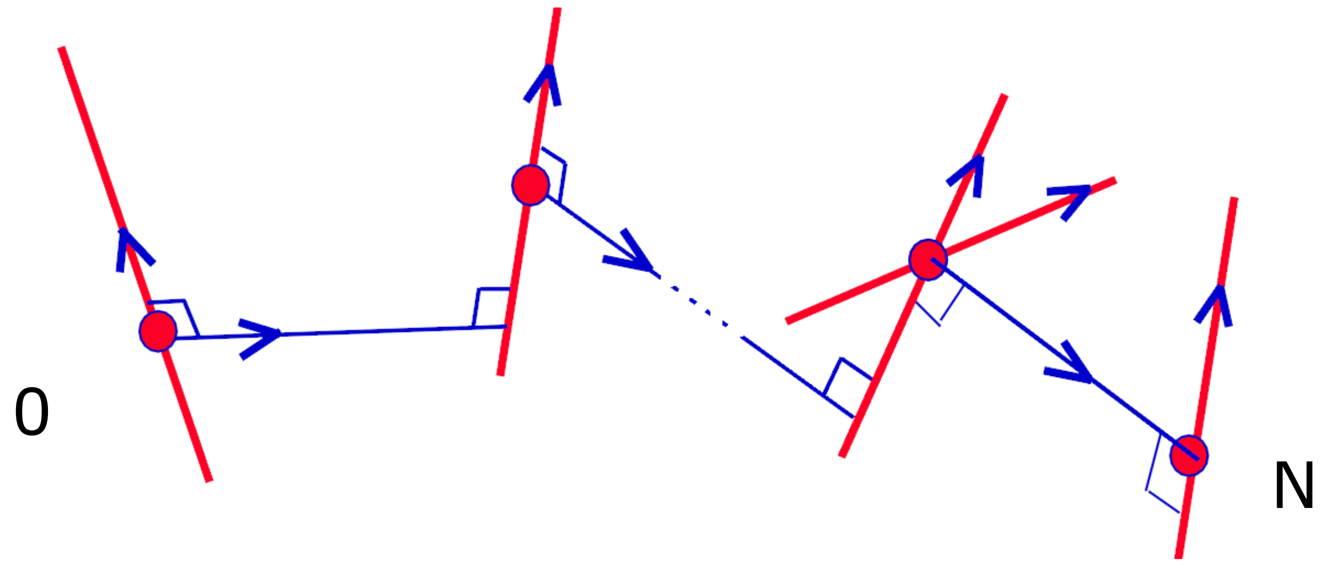
$$ {}^{i-1}_{\;\;\,i}T_{(\alpha_{i-1},\, a_{i-1},\, \theta_i,\, d_i)} = R_x(\alpha_{i-1})\, D_x(a_{i-1})\, R_z(\theta_i)\, D_z(d_i) $$

DH-Vorwärtskinematik



$$
{}^{i-1}_{\ i}T = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i\, c\alpha_{i-1} & c\theta_i\, c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}\, d_i \\ s\theta_i\, s\alpha_{i-1} & c\theta_i\, s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}\, d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

Vorwärtskinematik für kinematische Kette



- Multipliziere Einzelgelenkstransformationen

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T \quad {}^{1}_{2}T \ \ldots \ {}^{N-1}_{N}T $$