Lösungen für Übungsblatt 1

Henning Lehmann, Ayoub Errami

18.10.2022

1 Aufgabe 1.1: Vereinfachen von Funktionen

- $g_1(n) = n^4$
- $g_2(n) = 1$ f; -1 $\rightarrow \prod_0^\infty n^{(2^{-i})} = n^{\sum_0^\infty (2^{-i})} = n^2$
- $g_3(n) = n^{3,5}$
- $g_4(n) = max(k_1, k_2)$ f; $n^{max(k_1,k_2)}$ -0,5

2,5/4

2 Aufgabe 1.2: Algorithmus analysieren

2.1 (a)

2.1.1 Theorem

Der Algorithmus gibt eine absteigend sortierte Permutation von A zurück.

2.1.2 Beweis

Sei sort(X) eine absteigend sortierte Permutation einer Zahlenfolge X.

Sei $S_n(x)$ eine Zahlenfolge mit den n größten Elementen aus einer Zahlenfolge X.

Sei $U_n(A)$ der initiale Inhalt von A ohne die n größten Elemente.

Invariante in Zeile 1:

$$A[1..i-1] = \text{sort}(S_{i-1}(A))$$

$$A[i..n] = U_{i-1}(A)$$

Induktionsanfang i=1:

$$A[1..0] = \text{leere Zahlenfolge} = \text{sort}(s_0(A))$$

$$A[1..n] = U_0(A)$$

Induktionsschritt

Angenommen die Invariante gilt für ein $i \geq 1$.
Im Schleifendurchlauf wird das größte Element aus $A[i..n]$ an die Stelle i gesetzt, wobei alle kleineren Elemente in $A[i+1..n]$ verbleiben.
D.h. am Ende der Schleife gilt:

$A[1..i] = \text{sort}(s_i(A))$

↳ Dies ist das i-te größte Element, da nach Invariante alle Elemente in $A[i..n] \leq$ Elemente in $A[1..i-1]$ (Einsatz der Invariante kenntlich machen) −0,5

$A[i+1..n] = U_i(A)$

$\Rightarrow$ die Invariante gilt auch für $i+1$.

Für $i = n-1$:

$A[1..n-1] = \text{sort}(s_{n-1}(A))$

$A[n..n] = U_{n-1}(A)$

Eine Zahlenreihe aus n Elementen ohne die $n-1$ größten Elemente enthält trivialerweise lediglich das kleinste Element, welches sich hierbei in $A[n]$ befindet. Da die übrigen Elemente sich sortiert in $A[1..n-1]$ befinden, folgt:

Die Ausgabe des Algorithmus ist eine absteigend sortierte Permutation von A. □

2.2 (b)

Objektvergleiche in Z.2: $n - i$.

Objektvergleiche in Z.3: 1.

(zählt scheinbar nicht als Objektvergleich)

$\rightarrow$ Objektvergleiche pro Schleifendurchlauf: $n - i + 1$.

Insgesamt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1) &= (n-1)*n - \frac{(n-1)*n}{2} + (n-1) \\ &= n^2 - n - 0,5n^2 - 0,5n + n - 1 \\ &= 0,5n^2 - 0,5n - 1 \in \Theta(n^2)\end{aligned} \quad (1)$$

2.3 (c)

Minimale Vertauschungen:

Bereits absteigend sortierte Zahlenfolge (z.B. $[5, 4, 3, 2, 1]$).
$\rightarrow$ 0 Vertauschungen, da sich das Maximum aus $A[i..n]$ immer an der Stelle i befindet und daher in Z.3 nie $j \neq i$.

Maximale Vertauschungen:

Zahlenfolge, bei welcher das kleinste Element an erster Stelle steht, der Rest jedoch absteigend sortiert ist (z.B. $[1, 5, 4, 3, 2]$).
$\rightarrow n - 1$ Vertauschungen, da das kleinste Element bei jedem Schleifendurchlauf einen Platz nach rechts getauscht wird, bis es nach $n - 1$ Vertauschungen an seinem korrekt einsortierten Platz ankommt.

7,5/8

3 1.3: O-Notation

	$s(n)$	$log_2(n)$	$2n$	3^n	$\frac{log_2(n)}{sqrt(n)}$	$0,05$	ne^n
$s(n)$	Θ	-	O	o	ω	Ω	o
$log_2(n)$		Θ	o	o	ω	ω	o
$2n$			Θ	o	ω	ω	o
3^n				Θ	ω	ω	ω o *
$\frac{log_2(n)}{sqrt(n)}$					Θ	o	o
$0,05$						Θ	o
ne^n							Θ

* −0,5

Um die restlichen Felder auszufüllen, orientiere man sich am gegenüberliegenden Feld der Diagonale:

$$f = o(g) \iff g = \omega(f)$$

$$f = O(g) \iff g = \Omega(f)$$

$$f = \Theta(g) \iff g = \Theta(f)$$

7,5/8

17,5/20

Wenn keine Beziehung zwischen f und g, dann auch keine Beziehung zwischen g und f.

* $3^n > c \cdot ne^n \mid \ln$

$\Leftrightarrow n \ln(3) > \ln(c) + \ln(n) + n$

$\Leftrightarrow \underbrace{n(\ln(3) - 1)}_{\text{positiv, da } 3 > e} > \ln(c) + \ln(n)$ gilt für hinreichend großes n_0