(1)

A, B seien Mengen

$$A = B \iff \underbrace{A \subseteq B}_{\text{I.}} \text{ und } \underbrace{B \subseteq A}_{\text{II.}}$$

g.d.w.

beidseitige Inklusion

Beweistechnik

<u>Operationen auf Mengen</u>

Sei M Menge $A, B \subseteq M$

1. $A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

"A vereinigt B" "Vereinigung"

2. $A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

"A geschnitten mit B" "Durchschnitt"

3. $A \setminus B := \{ x \in M \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$

"A ohne B" "Diffenenz"

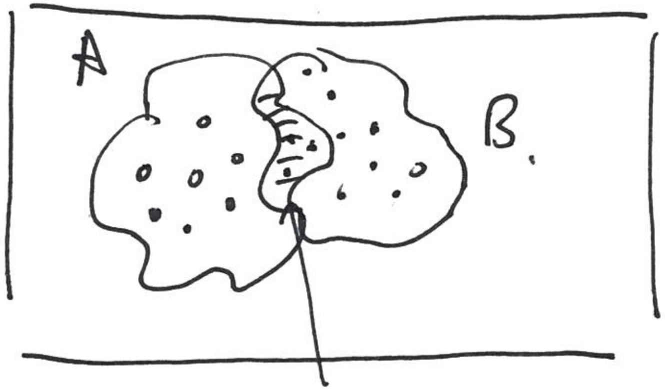
<u>Anwendung</u>! Reihenfolge Klammern!

$((A \setminus B) \cap C) \quad (A \setminus (B \cap C))$

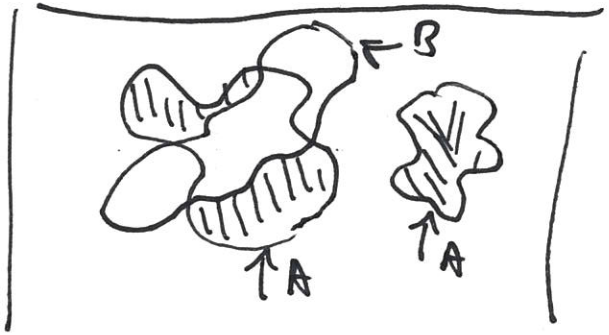
Bsp

Anschauliche Darstellung 2-Dim.

Venn-Diagramme



$A \cap B$



$A \setminus B$

Beispiel, Anwendung!

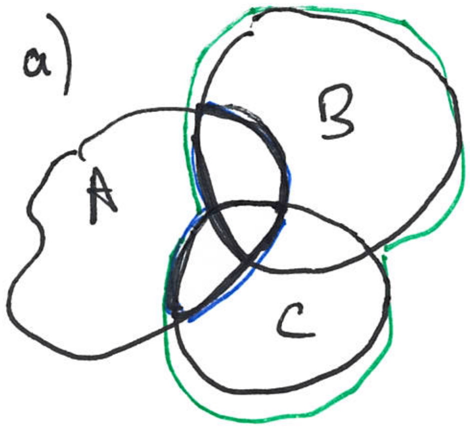
A, B, C Mengen

a) $A \cap (B \cup C) \overset{?}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$

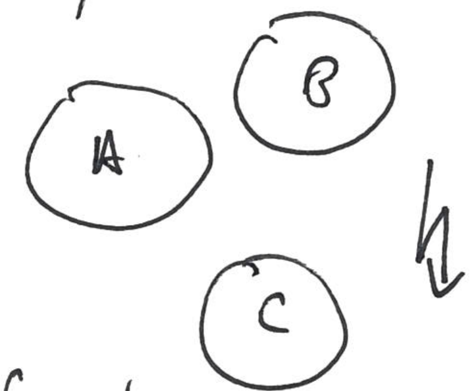
b) $A \cap (B \cup C) \overset{?}{=} (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Widerlegen oder beweisen!

a)



b) $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$



Gegenbsp.

a) beidseitig Inklusion

$A' = B' \Leftrightarrow A' \subseteq B'$ und $B' \subseteq A'$

"$\subseteq$" $x \in A \cap (B \cup C)$

$\underset{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow}$ $x \in A$ und $x \in (B \cup C)$

$\underset{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow}$ $x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C)$

$\underset{\text{Def } \cap \text{ 2x}}{\Leftrightarrow}$ $(x \in A \cap B)$ oder $(x \in A \cap C)$

$\underset{\text{Def } \cup}{\Leftrightarrow}$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\supseteq$" genauso

5

<u>Verallgemeinerungen:</u>

Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ Teilmengen von M, $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{ x \in M \mid \text{es ex. ein Index } i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \text{ mit } x \in A_i \}$$

"endliche Vereinigung von Mengen"

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := \{ x \in M \mid \text{für alle } i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \text{ gilt } x \in A_i \}$$

"Endlicher Schnitt von Mengen"

$$(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) = ((A_1 \cup A_2) \cup A_3)$$

6

Kardinalitäten

$A \cap B = \emptyset$

„A und B sind disjunkt"

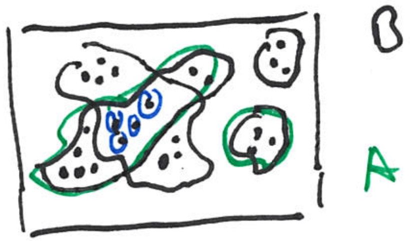
„**Endliche Menge**" Mit endlicher Anzahl von Elementen

M Menge $\Rightarrow |M|$ „Kardinalität"

Anzahl der Elemente #

$|\{1,2,3\}| = 3$ „Arithmetik" $A, B \subseteq M$ endl.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ „Beweis!"



Kombinationen

„Kartesisches Produkt"

A, B Mengen

$A, B \neq \emptyset$

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

„Paare"

„Tupel"

geordnet.

$$(a,b) \neq (b,a)$$

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

BSP

$$A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\} \qquad B = \{1,2,3,4,\dots,8\}$$

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),\dots,(a,8),$$
$$(b,1),(b,2),(b,3),\dots,(b,8),$$
$$\vdots$$
$$(h,1),(h,2),(h,3),\dots,(h,8)\}$$

„Schachbrett Positionen"

8

Roboter $A = \{ \text{links}, \text{rechts} \}$ $B = \{ \text{oben}, \text{unten} \}$

$A \times B = \{ (l,o), (l,u), (r,o), (r,u) \}$

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Koordinaten 2D

Verallgemeinerungen n Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1,2,3,\ldots,n \}$

"n-Tupel"

Endliche Menge $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Beweis!

$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n| \overset{!}{=} |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

Kombinatorik!

<u>Wichtige Menge</u> "Potenzmenge" einer Menge

M Menge. $\mathcal{P}(M) := \{ X \mid X \subseteq M \}$ $\quad (2^{|M|})$

Menge aller Teilmengen von M $\quad \emptyset = \{\}$

BSP

1. $M = \{\} = \emptyset \quad \mathcal{P}(M) = \{\underline{\{\}}\} = \{\underline{\emptyset}\}$
2. $\{1,2\} = M \quad \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$$\underline{1 \notin \mathcal{P}(M)}$$

2.2 Beweise

Beschreibung Möglichkeiten
+ Richtigkeit von Aussagen, Grundaussagen, Axiome
+ Logische Schlussfolgerungen

2.2.1 Aussagen Formalisieren!

$A, B, C, D, \ldots$ | wahr

A: "11 ist eine Primzahl" | fa

B: "$3 | 20$" | men

C: "Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, n gerade, $n > 2$: $n = p + q$?
mit p, q sind Primzahlen"

Wahrheitswerte von Aussagen als boolsche Fkt.

W: Menge aller Aussagen $\longrightarrow \{0,1\}$

<u>Bedeutung</u>: $W(A) := \begin{cases} 1, & \text{Aussage } A \text{ gilt / ist wahr} \\ 0, & \text{Aussage } A \text{ gilt nicht / ist falsch} \end{cases}$

$W(A) = 1 \quad W(B) = 0 \quad W(C) = ?$

<u>A, B Aussagen</u> Verknüpfen!

$A \wedge B$ "Konjunktion" von Aussagen "A und B"

$A \vee B$ "Disjunktion" von Aussagen "A oder B"

$\neg A$ "Negation" einer Aussage "nicht A"

Bedeutung bzgl. Wahrheitswerte

$$w(A \wedge B) := \begin{cases} 1 : & w(A)=1 \text{ und } w(B)=1 \\ 0 : & w(A)=0 \text{ oder } w(B)=0 \end{cases}$$

$$w(A \vee B) := \begin{cases} 1 : & w(A)=1 \ \underline{\underline{\text{oder}}} \ w(B)=1 \\ 0 : & w(A)=0 \text{ und } w(B)=0 \end{cases}$$

$$w(\neg A) := \begin{cases} 1 : & w(A)=0 \\ 0 : & w(A)=1 \end{cases}$$

Definition: <u>Wahrheitstabellen</u>

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	—
1	0	1	0	0
1	1	1	1	—

Rekursiv erweiterbar

A, B, C Aussagen mit Wahrheitswerten

$$\Big(A \wedge \big((\neg B) \vee C\big)\Big)$$

Reihenfolge wichtig!

Konvention: $\neg$ vor $\vee, \wedge$ anwenden

$$A \wedge (\neg B \vee C)$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \vee C$	$A \wedge (\neg B \vee C)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

2.2.2 Implikation und Äquivalenzen

"$\Leftrightarrow$" "$\Rightarrow$" Abkürzungen

g.d.w. wenn dann

+ Identische Aussagen ?
+ Ableitungen sind richtig

$A \Rightarrow B$ "A impliziert B" "aus A folgt B"

$A \Leftrightarrow B$ "A und B sind äquivalent"

"A gilt, genau dann, wenn B gilt"

Bedeutung:

$$w(A \Leftrightarrow B) := \begin{cases} 1 : & w(A) = w(B) \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

$$w(A \Rightarrow B) := \begin{cases} 1 : & w(A) = w(B) \text{ oder } w(B) = 1 \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

Tabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

! $A \Rightarrow B$ wahr bedeutet nicht zwangsläufig $w(A) = 1$!