0

Syntaktisch korrekte Aussagenlogische Formeln

$$\big((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3\big) = \varphi$$ **Zeichenkette**

Definition

Eindeutige Zerlegbarkeit: (strukt. Ind.) $\varphi = (\varphi_1 \; o_1 \; \varphi_2)$

$$\varphi_1 = (x_1 \wedge x_2), \quad \varphi_2 = x_3, \quad o_1 = \rightarrow$$

Bewertung $\mathcal{B}$: (Semantik) $\quad \mathcal{B}: VAR(\varphi) \longrightarrow \{0,1\}$

Definition

$$\mathcal{B}(x_1) = 1, \quad \mathcal{B}(x_2) = 0, \quad \mathcal{B}(x_3) = 0$$

Wahrheitswert, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} := [\![(\neg \varphi_1 \vee \varphi_2)]\!]_{\mathcal{B}} := \max\{[\![\neg \varphi_1]\!]_{\mathcal{B}}, [\![x_3]\!]_{\mathcal{B}}\}$

Definition

$$\vdots= \max\{1 - \min\{\mathcal{B}(x_1), \mathcal{B}(x_2)\}, 0\} = 1$$

Über Tabelle:

	x_1	x_2	φ_2: x_3	φ_1: $(x_1 \wedge x_2)$	$\neg \varphi_1$	$(\neg \varphi_1 \vee \varphi_2)$	φ
$\mathcal{B}$	1	0	0	0	1	1	1

USE-CASE Zulassungsbedingungen (evtl. nicht ganz vollst.! bewusst Teilmenge) ①

1) Erzielt ein Student $\geq$ 50 % der Punkte und rechnet der Student 1x vor, dann bekommt er die Zulassung zur Klausur.

2) Ist der Student nicht zugelassen, dann kann er die Klausur nicht bestehen.

Variablen dazu:

x_1	Student erzielt $\geq$ 50 % der Punkte	1)	$(((x_1 \wedge x_2) \to x_3) \wedge$
x_2	Student rechnet 1x vor	2)	$(\neg x_3 \to \neg x_4)) \to$
x_3	Student ist zugelassen		
x_4	Student besteht die Klausur	3)	$(\neg x_2 \to \neg x_4))$

Ist das gültig?: Student rechnet nicht 1x vor, dann kann er die Klausur nicht bestehen 3)

gültige Gesamtformel?

(2)

Klausur:

- Aussagen zu einem Thema
- Variablen definieren
- AL-Formeln aufstellen
- Gültigkeit / Erfüllbarkeit einzelner Aussagen daraus beantworten!

③

Modell, Erfüllbarkeit, Gültigkeit

Definition 5.4 Sei $\varphi \in AL$ und $\Phi \subseteq AL$

⌜ $\not{\emptyset}$ ϕ Phi ⌟

a) Zu φ (passende) Bewertung heißt

Modell von φ falls $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{B}} = 1$

⌜ $\vdash$ Syntaktisch ⌟

Sprachgebrauch "$\mathfrak{B}$ erfüllt die Formel φ"

Notation $\mathfrak{B} \models \varphi$

$\mathfrak{B}$ heißt Modell von $\Phi \subseteq AL$ $:\Longleftrightarrow$

$\mathfrak{B}$ ist Modell für alle $\varphi \in \Phi$, Notation: $\mathfrak{B} \models \Phi$

b) Formel φ heißt erfüllbar $:\Longleftrightarrow$ es ex. ein Modell $\mathfrak{B}$ von φ.

c) <u>Formel φ ist gültig</u> $:\Longleftrightarrow$

Für jede (passende) Belegung $\mathcal{B}$ von φ gilt: $\mathcal{B} \models \varphi$.

<u>Notation:</u> $\models \varphi$

<u>Sprachgebrauch:</u> "φ ist eine <u>Tautologie</u>"

Bsp

1) $x \in AL$ $\quad \varphi = x$ $\quad$ <u>erfüllbar</u>

$\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(x) = 1$ $\quad$ nicht gültig

$\mathcal{B}'$ mit $\mathcal{B}'(x) = 0$ $\quad [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}'} = 0$

2) $\left(\left((\neg x_1 \lor x_2) \land (\neg x_2 \lor \neg x_3)\right) \land (\neg x_3 \lor \neg x_1)\right)$ 5

$B(x_1) = 0 = B(x_2) = 0$ erfüllt φ $\quad B \models \varphi$

$B'(x_1) = B'(x_2) = B'(x_3) = 1$ erfüllt φ nicht $\quad B' \not\models \varphi$

3) $\left(x_1 \lor (\neg x_1 \lor x_2)\right) = \varphi$ Tautologie

max

max

Beweis:

x_1	x_2	x_1	$(\neg x_1 \lor x_2)$	φ
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	1	1	$\cancel{0}$ 1	1

Lemma 5.5 Sei $\varphi \in AL$ und B, B' seien zu φ passende Bewertungen mit $B(x) = B'(x)$ $\forall x \in VAR(\varphi)$

$$\Rightarrow [\![\varphi]\!]_B = [\![\varphi]\!]_{B'}$$

Beweis: Trivial!

Lemma 5.6: Eine Formel $\varphi \in AL$ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ keine Tautologie ist.

[$\neg\varphi$ ist Tautologie $\Longleftrightarrow$ φ nicht erfüllbar]

so benutzen.

7

Beweis: "$\Rightarrow$" φ erfüllbar

$\underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ es ex. eine zu φ passende Bewertung $\mathcal{B}$ mit $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 1$

$\Longrightarrow$ $1 - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 0 \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} [\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 0 \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \neg\varphi$ ist keine Tautologie

$\neg\varphi$ ~~Bewertg.~~ Wahrheitswert davon

"$\Leftarrow$"
$\neg\varphi$ ist keine Tautologie

$\underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ es ex. eine zu $\neg\varphi$ passende Bewertung $\mathcal{B}$ $[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 0$

$\Longrightarrow$ $0 = [\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{Wahrheitswert}}}{=} 1 - [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \underset{\text{Arithmetik}}{\Longrightarrow} [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 1 \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \varphi$ erfüllbar.

Modellierung 1. Teil der Vorlesung **Zs.-hng**

„Aus A folgt B" A, B **beliebige Aussage**

Notationen: $A \Rightarrow B$

„Aus $\neg B$ folgt $\neg A$" $\neg B \Rightarrow \neg A$

Th. 2.1 $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind **äquivalent.**

Zs.-hng. als AL-Formel darstellen:

$$\underline{((A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))}$$ ist **gültig**

A, B **Variablen**

A	B	φ_1: $(A \rightarrow B)$	φ_2: $(\neg B \rightarrow \neg A)$	$(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$
0	0	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$\Leftarrow$ Tautologie

$(\neg A \vee B)$ $[\, [\![\varphi_1 \rightarrow \varphi_2]\!]_{\mathcal{B}} := [\![\neg \varphi_1 \vee \varphi_2]\!]_{\mathcal{B}} \,]$

Modellierung Spiel

Sudoku

$i=5$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		6			7			2	
2									
3							8		3
4									
5									
6									
$j=7$ 7					X				
8				1	3				
9						4			6

Einige Zahlen vorgeben!

Aufgabe: Zellen (i, j)

Spalte ↑ ↑ Zeile

Gitter füllen!

1. in jede Spalte
2. in jede Zeile
3. und in jeden Block

soll Permutation von

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$$

stehen

(10)

Modellieren und Lsg!

AL-Formel φ entwickeln!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		6			7			2	
2									
3							8		3
4									
5									
6									
7									
8				1	3				
9						4			6

Variablen

$x^{k}_{i,j}$ $\quad$ $\underline{(i,j,k) \in B^3}$

Bedeutung: $x^{k}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{: Feld } (i,j) \text{ enthält Zahl } k \\ 0 & \text{: sonst (Feld } (i,j) \text{ enthält nicht Zahl } k) \end{cases}$

$\boxed{x^{6}_{2,1}}$

Vorabbelegungen

9^3 viele Variablen $\quad |B| = 9$

Verallgemeinerte Notation: $\bigvee$ $\quad \bigwedge_{\text{Bedingung}}$

$$\bigvee_{k=1}^{9} x^{k}_{i,j} := \left(\ldots \left(\left(\left(\left(x^{1}_{i,j} \vee x^{2}_{i,j}\right) \vee x^{3}_{i,j}\right) \vee x^{4}_{i,j}\right) \vee x^{5}_{i,j}\right) \vee \ldots \vee x^{9}_{i,j} \right)$$

Beziehungen darstellen !

f_1 in jeder Zelle mindestens eine Zahl

$$f_1 = \bigwedge_{(i,j)\in B^2} \left(\bigvee_{k=1}^{9} x_{i,j}^{k} \right)$$

f_2 in jeder Zelle höchstens eine Zahl

$$f_2 = \bigwedge_{(i,j)\in B^2} \left(\bigwedge_{\substack{(k,l)\in B^2 \\ k\neq l}} \neg\left(x_{i,j}^{k} \wedge x_{i,j}^{l} \right) \right)$$

$f_1 \wedge f_2 \;\hat{=}\;$ in jeder Zelle genau eine Zahl !

12

<u>Zeilen-Bed.</u>

$$P_3 = \bigwedge_{j=1}^{9}\left(\bigwedge_{k=1}^{9}\left(\bigvee_{i=1}^{9} x_{i,j}^{k}\right)\right)$$

Jede Zahl kommt mindestens einmal

$\Longrightarrow$ <u>exakt</u> einmal

↑ Schubfach.

zweimal ⟹ kein Platz für mind. eine andere!

3	1	3		1	1

<u>Spalten-Bed</u>

(symmetrisch)

$$P_4 = \bigwedge_{i=1}^{9}\left(\bigwedge_{k=1}^{9}\left(\bigvee_{j=1}^{9} x_{i,j}^{k}\right)\right)$$

<u>Block</u>

(i', j')

0,0	1,0	2,0
0,1	1,1	2,1
0,2	1,2	2,2

~~3i+1~~		

3i+1, 3j+1		
3i+1, 3j+2	3i+2, 3j+2	
3i+1, 3j+3		3i+3, 3j+3

<u>Blöcke</u>

$$\varphi_5 = \bigwedge_{(i',j') \in \{0,1,2\}^2} \left(\bigwedge_{k=1}^{9} \left(\bigvee_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2} x^{k}_{3i'+i,\,3j'+j} \right) \right)$$

genauso: exakt einmal kommt jede Zahl vor!

$$\varphi_{\text{Gesamt}} = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$$

$+$ Anfangsbelegung $\left(x^{6}_{2,1} \wedge x^{7}_{5,1} \wedge x^{2}_{8,1} \wedge \dots \wedge x^{6}_{9,9} \right)$

φ_{Gesamt} ist genau dann erfüllbar, wenn das Sudoku eine Lösung hat, und die Belegung gibt die Lösung wieder!

5.1.2

Effiziente Beschreibung von AL-Formeln!

Bedeutung soll gleich bleiben!

Definition 5.7: Zwei Formeln $\varphi_1, \varphi_2 \in AL$
heißen **logisch äquivalent**

$:\Longleftrightarrow \quad [\![\varphi_1]\!]_B = [\![\varphi_2]\!]_B$

für jede zu φ_1 und φ_2 passende ~~Belegung~~ Bewertung B.

Notation: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ „semantisch" $\qquad \varphi_1 = \varphi_2$ „syntaktisch"!

„$\equiv$" Äquivalenzrelation! symmetrisch, reflexiv, transitiv

Vorsicht!

$\varphi = (x_1 \vee x_2)$ vs. $\varphi \equiv (x_1 \vee x_2)$

Zusammenfassung äquivalenter Umformungen:

Theorem 5.8 Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in AL$

Es gelten die folgenden Aussagen (Äquivalenzen)

Idempotenz: $(\varphi_1 \wedge \varphi_1) \equiv \varphi_1$, $(\varphi_1 \vee \varphi_1) \equiv \varphi_1$

Kommutativität: $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \vee \varphi_1)$

Assoziativität: $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$

$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

Elimination doppelter Negation: $\neg\neg\varphi_1 \equiv \varphi_1$

16

De Morgan'sche Regeln: $\neg(\varphi_1 \land \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \lor \neg\varphi_2)$

$\neg(\varphi_1 \lor \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \land \neg\varphi_2)$

Distributivgesetze: $(\varphi_1 \land (\varphi_2 \lor \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \land \varphi_2) \lor (\varphi_1 \land \varphi_3))$

$(\varphi_1 \lor (\varphi_2 \land \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \lor \varphi_2) \land (\varphi_1 \lor \varphi_3))$

Absorption: $(\varphi_1 \land (\varphi_1 \lor \varphi_2)) \equiv \varphi_1$

$(\varphi_1 \lor (\varphi_1 \land \varphi_2)) \equiv \varphi_1$

Kontraposition: $(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1)$

Elimination der Implikation: $(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \lor \varphi_2)$ Def.

Elimination der Äquivalenz: $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \to \varphi_2) \land (\varphi_2 \to \varphi_1))$