Induktion, Strukturelle Induktion, Fallstricke

"Erweiterungen"

(A) Indexshift: $n-1 \leadsto n$, $\underline{n-1 \geq k}$ <u>Hilfreich!</u>

(B) 1. Induktionsanfang: $k \in \mathbb{N}_0$

Zeige, dass $A(k)$ gilt.

2. Induktionsschluss:

Zeige, dass aus der Annahme, dass $A(k), A(k+1), \ldots, A(n)$ gilt für $n \geq k$, dass auch $A(n+1)$ gilt.

1.+2. gelten $\Rightarrow$ $A(n)$ gilt für alle $n \geq k$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Warum ist dieses Prinzip ebenfalls korrekt?

Statt $A(n)$ Aussage gilt für $n \geq \ell$ wähle:

$A'(n)$: Aussage gilt für alle $\ell \leq n' \leq n$

Bed. 2 liest sich $\left(A'(n), n \geq \ell \Rightarrow A'(n+1)\right)$

("alte" Bed.)

$\left(A'(n+1) \Leftrightarrow \underline{A'(n)} \wedge \underline{A(n+1)}\right)$ Zeige: $A(n+1)$ folgt aus $A'(n)$!

reicht aus!

Anwendung: **Satz von Zermelo:** Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

$\ulcorner 8 \cdot 3 = 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \lrcorner$

③

(Existenz-) __Beweis__: Induktion

__Induktionsanfang__: $n = 2$ ✓

__Induktionsannahme__ (erweitert): Beh. gilt für alle $\underline{2 \le m < n}$.

__Induktionsschluss__: Zeige: Aussage gilt für n!

__1. Fall__: n ist Primzahl

__2. Fall__: n ist keine Primzahl

$\Rightarrow$ es ex. Teiler $n_1 \geq 2$ mit $n = n_1 \cdot n_2$

und $n_2 \geq 2$ und $n_1, n_2 < n$

4

$\Rightarrow$ $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{r_1}$ $r_1, r_2 \geq 1$

$n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots p_{r_2}$

Ind. Ann.

für $n_1, n_2 < n$ (und)

$p_1, p_2, \ldots, p_{r_1}$ Primzahlen

$q_1, q_2, \ldots, q_{r_2}$ Primzahlen

$\Rightarrow$ $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{r_1} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_{r_2}$

"Primfaktorzerlegung" von n ✓ $\square$

"Eindeutigkeit der Zerlegung"

Gleiches Prinzip ✓!

2.3 Quantoren $\exists$, $\forall$

Aussagen mit Quantoren versehen: Parametrisierte Aussagen!

"$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$"   Universum: $n \in \mathbb{N}_0$

"$\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2 \Rightarrow A(n)$"   diese Aussage ist wahr

Allquantor   Sprachgebrauch "Für alle $n \in \mathbb{N}$"

Genauso: "$\exists n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$"

Existenzquantor   Sprachgebrauch
"es existiert ein $n \in \mathbb{N}$"

„$\forall n: A(n)$“ ist wahr $:\Longleftrightarrow$ für alle n gilt $A(n)$ — Semantik/Bedeutung

„$\exists n: A(n)$“ ist wahr $:\Longleftrightarrow$ es existiert ein n so dass $A(n)$ wahr ist

Bsp Aussagen über natürliche Zahlen

$A(n)$: „n ist eine Quadratzahl“

$Q := \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$ $\quad A(n) :\Longleftrightarrow n \in Q$

„$\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$“ ist falsch!

„$\exists n \in \mathbb{N}: A(n)$“ ist wahr

„$A(n) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2$“ ist wahr

$\exists!$ „es ex. genau ein“

Bsp

Jede natürliche Zahl ist entweder eine 1

oder eine Primzahl, oder hat einen echten Teiler.

$\vee$ $\quad P(n)$ $\quad \vee$

"frei"

$$\forall n' \in \mathbb{N}: \Big(\forall n \in \mathbb{N}: (n=1) \vee P(n)\Big) \vee \Big(\exists k \in \mathbb{N}: (k>1) \wedge (k<n') \wedge (k \mid n')\Big)$$

Konvention: $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ vor $\exists, \forall$

Vorsicht!

Negieren kann problematisch sein!

Theorem 2.4 Sei M eine beliebige Menge und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage über M.

Es gilt:

a) $\neg\left(\exists x \in M : A(x)\right) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$

b) $\neg\left(\forall x \in M : A(x)\right) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$

Beweis: **Skizze!** **Intuitiv:** "$\Rightarrow$" "$\Leftarrow$"

Anwendungen: Umformen! Äquivalenz!

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{N} : \left(A(x) \Rightarrow \left(B(x) \vee C(x)\right)\right)\right)$$

$$\neg\, \forall \cancel{x} \in \mathbb{N} : A(x) \Rightarrow B(x) \vee C(x)$$

(a)

$$\neg\left(\left(\forall x : \neg A(x)\right) \wedge \neg\left(\exists x : \left(\neg\left(\forall x : A(x)\right)\right)\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \neg\left(\forall x : \neg A(x)\right) \vee \cancel{\neg\neg}\left(\exists x : \left(\neg\left(\forall x : A(x)\right)\right)\right)$$

De Morgansche Regel

$$\Longleftrightarrow \left(\exists x : \cancel{\neg\neg} A(x)\right) \vee \left(\exists x : \left(\exists x : \neg A(x)\right)\right)$$

Bl. 29.5 2x

$$\Longleftrightarrow \left(\exists x : A(x)\right) \vee \left(\exists x : \neg A(x)\right)$$

gültig!

wichtige Klammern!

Vertauschen von Quantoren $\exists, \forall$ Achtung!

BSP

$P(x,y)$: „x trinkt gerne Getränk y"

$\exists y : (\forall x : P(x,y))$ „Alle mögen das gleiche Getränk"

$\forall y : (\exists x : P(x,y))$ „Jedes Getränk findet einen Liebhaber"

$\forall x : (\exists y : P(x,y))$ „Jeder hat ein Lieblingsgetränk"

2.4 Relationen und Abbildungen

Objekte miteinander in Beziehung setzen

Paarbeziehungen

BSP

1. "a teilt b"
2. "a liebt b"
3. "A ist größer als B"

Relationen

Ordnung!

2.4.1 Relationen

Definition 2.10: ~~Bei~~ Seien M, N Mengen. Eine Relation R ist eine Teilmenge von $M \times N$. "$a \in M$ steht in Relation zu $b \in N$" falls $(a,b) \in R$.

Notation: $(a,b) \in R$ schreibe $a R b$

$(a,b) \notin R$ schreibe $a \not R b$

$M = N$ dann ~~[illegible]~~ „**R ist Relation auf M**"

Verallgemeinerung: ~~M~~ Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen

Eine **n-stellige Relation** ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

$n=2$ „**binäre Relation**"

BSP

M: Menge der LudS-Teilnehmer

N: Menge der Übungsgruppen

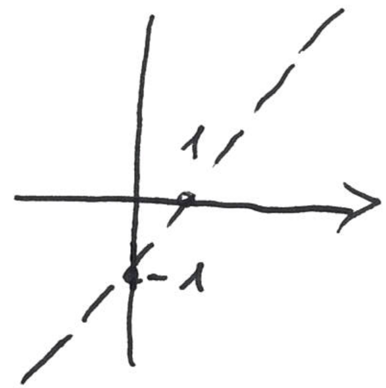
1. $R = \{(s,u) \in M \times N \mid s \text{ besucht Übungsgruppe } u\}$

Bekannte Relation!

2. "$<$" auf $\mathbb{R}$ "$\leq$"

$< \; := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist } \underline{\text{echt kleiner}} \text{ als } y\}$

3. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x - y = 1\}$ $\quad y = x - 1$



4. $\equiv_n := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \text{ haben den gleichen Rest bei Division mit } n\}$ (14)

$n \in \mathbb{N}$

$a \in \mathbb{Z}$ "hat Rest $r \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ bei Division mit n falls $x \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a = x \cdot n + r$"

<u>Wohldefiniert!</u> Ex. / Eind.

Bsp

$$7 \equiv_5 2 \equiv_5 -3 \equiv_5 12 \equiv_5 -8$$

$7 = 1 \cdot 5 + 2$ $\quad$ $2 = 0 \cdot 5 + 2$

$-3 = -1 \cdot 5 + 2$ $\quad$ $12 = 2 \cdot 5 + 2$

$-8 = -2 \cdot 5 + 2$