Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

4. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 1.-5.5.

Am Montag, den 1. Mai, fallen aufgrund des gesetzlichen Feiertags die Vorlesung und die Übungstunden aus. Die Teilnehmer*innen der Montagsübungen mögen sich bitte auf die anderen Übungsgruppen verteilen. Bitte gehen Sie nicht alle zu der Übungsgruppe mittwochs 10-12 Uhr, sondern nutzen Sie auch späte Übungsgruppen und die Freitagsgruppen etc.

Thema: Reihen

Videos: Video-06-Reihen
Hinweis: Das Vergleichskritierum kommt im Video nicht vor. Das stand damals noch nicht so im Skript wie heute und wurde nur in den Übungen behandelt.

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P0. - Vorbereitung

- Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine konvergente Reihe, die aber nicht absolut konvergiert, und für eine absolut konvergente Reihe.
- Suchen Sie im Skript die folgenden Konvergenzkriterien für Reihen heraus: Leibniz-Kriterium (für alternierende Reihen), Majoranten- bzw. Minorantenkriterium, Vergleichskriterium, Quotientenkriterium.

Aufgabe P1.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz. Welche Reihen sind sogar absolut konvergent?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \right)$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n^2} \right)$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+n^2}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n}$,

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2-3i}\right)^n$,

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$,

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+42}{n^4+n^2+1}$,

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{-n}n^2}{n^2}$,

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Aufgabe P2.

(i) Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\sum a_n$ und eine beschränkte Folge (b_n) derart, dass die Reihe $\sum b_n a_n$ nicht konvergiert.

(ii) Zeigen Sie: Ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent und (b_n) eine beschränkte Folge, so konvergiert die Reihe $\sum b_n a_n$ absolut.

(iii) Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_n^2$ (absolut).

(iv) Gilt auch die Umkehrung der Aussage in (iii)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(v) Gilt die Aussage: Konvergiert die Reihe $\sum a_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_n^2$ (absolut) ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 8.5. und dem 12.5., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+34n^2+7n+8}{n^5+787n^3-3n^2-n+9},$$

(iv)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n},$$

(v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sind (a_n) und (b_n) Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

so konvergiert die Reihe $\sum a_n$, wenn die Reihe $\sum b_n$ konvergiert.

(ii) Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

und der Grenzwert ist a_1.

Hinweis: Die Aufgabenteile sind unabhängig voneinander. Teil (i) ergänzt die Aussage der Aufgabe P2 des letzten Übungsblatts. Tipp zu (ii): Betrachten Sie die Partialsummen.