Logische Äquivalenzen (Semantik)

0

AL-Formeln φ_1, φ_2

$[\![\varphi_1]\!]_B = [\![\varphi_2]\!]_B \quad \forall$ zu φ_1, φ_2 passenden Belegungen B

φ_1 ist logisch äquivalent zu φ_2 "$\varphi_1 \equiv \varphi_2$" (Äquivalenzrelation)

Theorem 5.8 wichtige Äquivalenzen, Regeln für Umformungen

De Morgan'sche Regel, Assoziativität, Kommutativität, Kontraposition, Implikation/Äquivalenz auflösen, ...

BSP Distributivgesetz $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

Exemplarischer Beweis, Wahrheitstabelle!

1

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3) \quad \text{vs.} \quad ((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$$

$\mathcal{B} \backslash \varphi$	φ_1	φ_2	φ_3	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	I. $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3)$	$(\varphi_1 \vee \varphi_3)$	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	II. $((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	$\mathfrak{M}$ φ'
$\mathcal{B}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\mathcal{B}_2$	0	0	1	0	1	1	1	1	1
$\mathcal{B}_3$	0	1	0	0	0	0	1	0	1
$\mathcal{B}_4$	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$\mathcal{B}_5$	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$\mathcal{B}_6$	1	0	1	0	1	1	1	1	1
$\mathcal{B}_7$	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{B}_8$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\underline{\underline{[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}}}}$ Def.

Distributivgesetz

Auch: $((((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)))) = \varphi'$

ist gültig

Beweisskizze ✓

Kontraposition

$((\varphi_1 \to \varphi_2) \leftrightarrow (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1))$ ist gültig

5.1.3 Normalformen

KNF, DNF Eingeschränkte Klasse, läßt sich gut verarbeiten! ($\rightarrow$, $\leftrightarrow$ los werden)

Definition 5.9 Eine Formel X, $\neg X$ für $X \in AV$ heißt Literal, X positives Literal, $\neg X$ negatives Literal.

a) $\varphi \in AL$ ist in konjunktive Normalform, KNF, (Konjunktion von Disjunktion), falls $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$ für $n, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$

für Literale $l_{i,j}$ $\forall i,j$

Teilformeln: $\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$ heißen Klauseln (Disjunktion von Literalen)

b) $\varphi \in AL$ ist in disjunktiver Normalform, DNF,

(Disjunktion von Konjunktionen)

falls $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$ für $n, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$

$l_{i,j}$ sind Literale $\forall i,j$.

BSP $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_4 \vee x_1) \wedge \neg x_3$, KNF

$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_1 \wedge x_1) \vee \neg x_5$, DNF

Theorem 3.10 Zu jeder aussagenlogischen Formel $\varphi \in AL$ ex. aussagenlogische, äquivalente Formel in KNF und DNF.

Beweis: (konstruktiv) nicht effizient.

$\varphi \in AL$ $\quad n = |VAR(\varphi)|$ $\quad$ OE.: $VAR(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\{0,1\}^n$ $\quad 2^n$ viele Belegungen

$B \backslash \varphi$	x_1	x_2	…	x_n	φ		φ_{DNF}
B_1	0	0	…	0	$[\![\varphi]\!]_{B_1}$	$=$	$[\![\varphi_{DNF}]\!]_{B_1}$
B_2					$[\![\varphi]\!]_{B_2}$	$=$	$[\![\varphi_{DNF}]\!]_{B_2}$
⋮			⋮		⋮		⋮
B_{2^n}	1	1	…	1	$[\![\varphi]\!]_{B_{2^n}}$	$=$	$[\![\varphi_{DNF}]\!]_{B_{2^n}}$

gesucht ist φ_{DNF}

5

1. <u>Fall</u> $[\![\varphi]\!]_B = 0 \quad \forall\, B \in \{B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}$

$$\varphi_{DNF} = (x_1 \wedge \neg x_1) \equiv \varphi$$

2. <u>Fall</u> $\exists\, B \in \{B_1, \ldots, B_{2^n}\}$ mit $[\![\varphi]\!]_B = 1$

$$\mathbb{B} = \{ B \mid B \in \{B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}\} \text{ und } [\![\varphi]\!]_B = 1 \}$$

$B \in \mathbb{B}$ bilde $\varphi_B := \left(l_1^B \wedge l_2^B \wedge \cdots \wedge l_n^B \right)$

$$l_i^B := \begin{cases} \neg x_i & \text{falls } B(x_i) = 0 \\ x_i & \text{falls } B(x_i) = 1 \end{cases}$$

1. $[\![\varphi_B]\!]_B = 1$ weil $[\![l_i^B]\!] = 1$

2. B ist <u>einzige</u> Bewertung aus $\{B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}\}$ die φ_B erfüllt.

6

Zeige Aussage 2. gilt! $B' \neq B$ Bewertung von φ

$\Rightarrow$ es ex. x_i $B(x_i) \neq B'(x_i)$

$\Rightarrow [\![l_i^B]\!]_{B'} = 0$ Atlia

$\underset{\text{Min}}{\Rightarrow}$ $[\![\varphi_B]\!]_{B'} = 0$, B' erfüllt φ_B nicht !

$$\varphi_{DNF} := \bigvee_{B \in \mathbb{B}} \varphi_B$$

$B \in \mathbb{B} \Leftrightarrow B$ erfüllt φ.

B erfüllt φ_{DNF} $\Leftarrow$ klar, Konstruktion $\Rightarrow$

(B erfüllt $\varphi_{DNF} \Rightarrow$ nur B erfüllt $\varphi_B \Rightarrow B \in \mathbb{B}$)

also $\varphi_{\mathbb{B}}$ existiert

$\square$

7

BSP

$$\varphi = \left(\left((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)\right) \wedge (\neg x_3 \vee x_2)\right) \vee \underline{(\neg x_1 \wedge x_2)}$$

$B \backslash \varphi$	x_1	x_2	x_3	φ		
B_1	0	0	0	0		
B_2	1	0	0	1	$\Leftarrow$	
B_3	0	1	0	1	$\Leftarrow$	
B_4	1	1	0	1	$\Leftarrow$	
B_5	0	0	1	0		
B_6	1	0	1	0		
B_7	0	1	1	1	$\Leftarrow$	
B_8	1	1	1	0		

$\mathbb{B} = \{B_2, B_3, B_4, B_7\}$

$\varphi_{B_2} = (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

$\varphi_{B_3} = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$

$\varphi_{B_4} = (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$

$\varphi_{B_7} = (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

$\varphi' \equiv \varphi$

$\varphi_{DNF} = (\varphi' =)\ \varphi_{B_2} \vee \varphi_{B_3} \vee \varphi_{B_4} \vee \varphi_{B_7}$

(8)

Theorem 5.10 Auch KNF! Wo?

$$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$$ De Morgan'sche Regeln.

$$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$$

Verallgemeinerung: $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n)$

(DMA) $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) \equiv (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n)$

Beweis! $\neg(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv (\neg\varphi_1 \vee \underline{\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_3)})$ usw. usf.

Induktion über # Formeln!

φ_{KNF}?

$\neg\varphi$ und bilde aus $\neg\varphi$

$(\neg\varphi)_{DNF}$, $(\neg\varphi)_{DNF} = \bigvee_{i=1}^{k} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j}\right)$, $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

$$\neg(\neg\varphi_{DNF}) = \neg \bigvee_{i=1}^{k}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j}\right) \underset{\text{DMA}}{\equiv} \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j}\right) \underset{\text{DMA}}{=} \underbrace{\bigwedge_{i=1}^{k}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \neg l_{i,j}\right)}_{= \varphi_{KNF}}$$

(a)

BSP

$$\varphi = \left(\left(\left(x_1 \wedge \neg x_2\right) \vee \left(x_1 \wedge \neg x_3\right)\right) \wedge \left(\neg x_3 \vee x_2\right)\right) \vee \left(\neg x_1 \wedge x_2\right)$$

$B \backslash \varphi$	x_1	x_2	x_3	φ	$\neg\varphi$	
B_1	0	0	0	0	1	$\Leftarrow$
B_2	1	0	0	1	0	
B_3	0	1	0	1	0	
B_4	1	1	0	1	0	
B_5	0	0	1	0	1	$\Leftarrow$
B_6	1	0	1	0	1	$\Leftarrow$
B_7	0	1	1	1	0	
B_8	1	1	1	0	1	$\Leftarrow$

$[\![\varphi]\!]_B$

$(\neg\varphi)_{DNF}$

$(\neg\varphi)_{B_1} = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

$(\neg\varphi)_{B_5} = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

$(\neg\varphi)_{B_6} = (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

$(\neg\varphi)_{B_8} = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

$(\neg\varphi_{DNF}) = (\neg\varphi)_{B_1} \vee (\neg\varphi)_{B_5} \vee (\neg\varphi)_{B_6} \vee (\neg\varphi)_{B_8}$

$$\varphi_{KNF} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

□

5.1.3 Normalformen

Algorithmus $\varphi \in AL$ Erzeuge $KNF(\varphi)$ Regeln in <u>Reihenfolge</u> anwenden

1. $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ ersetzen durch $((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))$
2. $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ ersetzen durch $(\neg \varphi_1 \vee \varphi_2)$ (∇ Bn. Def.)
3. $\neg\neg \varphi_1$ ersetzen durch φ_1

   $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ersetzen durch $(\neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2)$

   $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ersetzen durch $(\neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2)$
4. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$ ersetzen durch $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$

   $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3)$ ersetzen durch $((\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

Theorem 5.11 Algorithmus Erzeuge KNF(φ)

erzeugt für $\varphi \in AL$ in endlich vielen (2.)

Schritten eine Formel φ' in KNF mit $\varphi' \equiv \varphi$.

(3.) (1.)

Beweis: 1. Ersetzungen sind äquivalent

Skizze: 2. Terminierung, kein Endlosschleife! Skizze!

3. KNF $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Literale am Ende

12

BSP

$$\varphi = \left(\neg\left(x_2 \underset{\uparrow 2.}{\rightarrow} x_1\right) \vee \left(x_1 \wedge x_3\right)\right)$$

$$\equiv \left(\neg\left(\neg x_2 \vee x_1\right) \vee \left(x_1 \wedge x_3\right)\right)$$

3.

$$\equiv \left(\underbrace{\left(\cancel{\neg\neg} x_2 \wedge \neg x_1\right)}_{3.\ \varphi_1} \vee \left(x_1 \wedge x_3\right)\right)$$

$\varphi_1 \leftarrow 4. \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$

$$\equiv \left(\underbrace{\left(\left(x_2 \wedge \neg x_1\right) \vee x_1\right)}_{4.} \wedge \underbrace{\left(\left(x_2 \wedge \neg x_1\right) \vee x_3\right)}_{4.}\right)$$

$$\equiv \left(\left(\left(x_2 \vee x_1\right) \wedge \left(\neg x_1 \vee x_1\right)\right) \wedge \left(\left(x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(\neg x_1 \vee x_3\right)\right)\right)$$

$$\equiv \left(x_2 \vee x_1\right) \wedge \left(\neg x_1 \vee x_1\right) \wedge \left(x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(\neg x_1 \vee x_3\right)$$

$\uparrow$ Sparregeln

(13)

5.1.4 Resolutionskalkül

1. Beschreibung von Problemstellungen, Modellierung, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

2. Deduktion, Ableiten von Wissen.

zu 1) Sudoku komplex

zu 2) Wissensbasis W Aussage A

$(W \to A)$ Tautologie ?

$\Leftrightarrow (\neg W \vee A)$ Tautologie

$\Leftrightarrow \neg(\neg W \vee A)$ nicht erfüllbar

Lemma 5.6

$\Leftrightarrow (W \wedge \neg A)$ nicht erfüllbar !

in KNF umbauen

Effizient testen!

Kalkül!