Prof. Dr. Reinhard Klein
Alexander Schier

Universität Bonn
Institut für Informatik II
Wintersemester 2023/2024 08.11.2023

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 5

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 15.11.2023, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme mit QR lösen, *2+2=4 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang, sei $b \in \mathbb{C}^m$ und $x \in \mathbb{C}^n$. In der Vorlesung haben wir gesehen, wie sich das Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $m = n$ lösen lässt. Nun betrachten wir die anderen Fälle.

a) **Überbestimmte Gleichungssysteme:** Sei $m > n$ und sei x die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Sei $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitär und sei $R \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = QR$ eine QR-Zerlegung ist. Sei $R_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $c := Q^* b$, $c_1 \in \mathbb{C}^n$ und $c_2 \in \mathbb{C}^{m-n}$ so, dass

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Beweise, dass gilt

$$R_1 x = c_1, \qquad \|Ax - b\|_2 = \|c_2\|_2.$$

Welche Teile der Matrizen Q, R benötigt dieser Algorithmus?
Hinweis: Verwende zum Beweis die Normalengleichung.

b) **Unterbestimmte Gleichungssysteme:** Sei $m < n$, sei $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und sei $R \in \mathbb{C}^{n \times m}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A^* = QR$ eine QR-Zerlegung der zu A adjungierten Matrix ist. Sei $R_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$, analog zum obigen Fall. Sei $y_1 \in \mathbb{C}^m$ mit $R_1^* y_1 = b$ und sei $y_2 \in \mathbb{C}^{n-m}$ beliebig.
· Beweise, dass

$$x := Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des unterbestimmten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist und dass zu jeder Lösung dieser Gleichung ein passendes y_2 existiert. Welche Teile der Matrizen Q, R benötigt dieser Algorithmus?

Aufgabe 2 (QR-Zerlegung von Hand berechnen, *4 Punkte*)

Berechne die QR-Faktorisierung der Matrix $\mathbf{A}$ von Hand mittels des Gram-Schmidt Verfahrens wie im Skript beschrieben. Gib die Matrizen Q, R und alle wichtigen Zwischenschritte an.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung, *3 Punkte*)

Seien die Matrizen Q, R bereits gegeben und sei der Vektor b gegeben als

$$Q := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -1 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 3}, \qquad R := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 7 \\ 2i \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5 .$$

Finde von Hand einen Vektor $x \in \mathbb{C}^3$, der das lineare Ausgleichsproblem

$$\|QRx - b\|_2 \to \min$$

löst.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die Spalten von Q paarweise orthonormal sind.

Aufgabe 4 (Lineare Ausgleichsprobleme mit Gram-Schmidt, *3+2=5 Punkte*)

Implementiere im beiliegenden Framework eine Funktion `LeastSquares(A,b)`, die zu einem gegebenen linearen Ausgleichsproblem $\|A \cdot x - b\|_2 \to \min$ mit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^m$ die optimale Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ berechnet und zurückgibt. Dazu solltest du die folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Schreibe eine Funktion `QR(A)`, die das klassische Gram-Schmidt-Verfahren verwendet, um eine QR-Zerlegung von A zu berechnen.

b) Schreibe eine Funktion `BackSubstitution(R,y)`, die durch Rückwärtseinsetzen $R \cdot x = y$ nach x löst. Verwende diese Funktion um `LeastSquares(A,b)` zu implementieren und gebe $x = R^{-1} \cdot Q^* \cdot b$ zurück.

Anwendungsbeispiel: Parameterisierung

Ein wichtiges Problem in der Computergrafik ist die Parameterisierung von Meshes. Dabei soll ein 3D Mesh in die 2D Ebene eingebettet werden, damit man jedem Punkt auf dem Mesh einen Punkt in einer Textur zuweisen kann. Das Problem eine isometrische Einbettung zu finden, welche sowohl Winkel als auch Flächen erhält, ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert, da sich die meisten Meshes nicht ohne Verzerrung in die Ebene einbetten lassen, wie man zum Beispiel an der Vielzahl unterschiedlicher Landkartenprojektionen sieht.

Eine Möglichkeit das Problem als Minimierungsproblem aufzufassen haben Levy et al.[1] 2002 beschrieben. In ihrem Paper wird dazu eine Funktion $C(x) = \|Ax - b\|^2$ minimiert, wobei $x \in \mathbb{C}^n$ der Vektor der 2D Vertex-Positionen (x, iy) ist, die Matrix A die Information über die Zuordnung von Vertices zu Dreiecken enthält und der Vektor b die Information über Vertices mit festen Positionen kodiert. Die Funktion C kann dabei als Maß für die Verzerrung angesehen werden und wird genau dann 0, wenn sich ein Mesh ohne Verzerrung einbetten lässt.

Ab zwei festen Vertices hat die Matrix A vollen Rang, sodass die Lösung eindeutig ist. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass ein fester Vertex noch eine Rotation des Meshes um den Vertex erlaubt, während zwei feste Vertices das Mesh dann festpinnen. Bei genau zwei festen Vertices können alle Winkel erhalten bleiben. Weitere feste Vertices erzwingen ggf. eine stärkere Deformation, können dafür aber die Form der Einbettung steuern.

Nachdem man A und b berechnet hat, sind die 2D Koordinaten der Vertices dann die Lösung des Least-Squares Problems $\|Ax - b\| \to \min$.

Literatur

[1] Bruno Lévy, Sylvain Petitjean, Nicolas Ray, and Jérome Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. In *Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 362–371, 2002.