Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

3. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)

== Sommersemester 2023 ==

Woche: 24.-28.4.

Thema: Sätze über konvergente Zahlenfolgen

Videos: Video-05-Mehr ueber Folgen

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1. – Wahr oder falsch

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder (im Allgemeinen) falsch sind:

(i) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.
(ii) Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
(iii) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.
(iv) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

Aufgabe P2.

Es seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Zahlenfolgen. Wir definieren die beiden zugehörigen Folgen (A_n) und (B_n) mittels

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ und } B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

(i) Es gelte $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
a) Die beiden Folgen (A_n) und (B_n) sind monoton wachsend.
b) Die Folge (A_n) ist konvergent, wenn die Folge (B_n) konvergent ist.

(ii) Für eine Folge positiver reeller Zahlen (a_n) bezeichne $\Theta(a_n)$ die Menge der Folgen positiver Zahlen (b_n) mit der Eigenschaft, dass positive reelle Konstanten c_1, c_2 und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $n \geq n_0$

$$c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$$

gilt. Zeigen Sie:
a) Ist $(b_n) \in \Theta(a_n)$, so ist die Folge (A_n) genau dann konvergent, wenn die Folge (B_n) konvergent ist.
b) Es ist $(b_n) \in \Theta(a_n)$, falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und ungleich 0 ist.

Aufgabe P3. – Eine rekursiv definierte Folge
Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge (a_n), die gegeben ist durch $a_1 := 0$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2 - a_n} \quad \text{für } n \geq 1,$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe P4. – Eine weitere rekursiv definierte Folge
Wir betrachten die folgende induktiv definierte Folge (a_n):

$$a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

(i) Berechnen Sie die ersten 8 Folgeglieder der Folge (a_n) und zeichnen Sie diese.
(ii) Zeigen Sie, dass die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) monoton und beschränkt sind.
(iii) Zeigen Sie, dass die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergent sind und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.
(iv) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 2.5. und dem 5.5., abzugeben. Wegen des Feiertags fallen die Übungen am Montag, den 1.5., aus. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen oder - falls Sie in einer der Montagsgruppen sind - vor der Vorlesung am Mittwoch, den 3.5., dem Dozenten geben.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1. – Häufungspunkte
Definition: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir sagen, dass eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ ein *Häufungspunkt* von (a_n) ist, wenn (a_n) eine Teilfolge (a_{n_k}) besitzt, die gegen a konvergiert.

(i) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) mit

$$a_n := (-1)^n \frac{1}{n}\,, b_n := \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ und } c_n := 2^n.$$

(ii) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
a) Wenn (a_n) genau einen Häufungspunkt hat, dann ist (a_n) beschränkt und konvergent.
b) Wenn (a_n) beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt hat, dann ist (a_n) konvergent.
c) Wenn (a_n) konvergent ist, dann hat (a_n) genau einen Häufungspunkt und ist beschränkt.

Aufgabe 2. – Eine rekursiv definierte Folge
Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge (a_n), die gegeben ist durch $a_1 := 2$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1,$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3. – Bestimmte Divergenz

- **(i)** Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergierende reelle Zahlenfolge.
- **(ii)** Geben Sie ein Beispiel für eine reelle Zahlenfolge, die divergent, aber nicht bestimmt divergent ist.
- **(iii)** Zeigen Sie: Ist die Folge (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ ist und die Folge $(1/a_n)_{n \geq n_0}$ ist eine Nullfolge.
- **(iv)** Gilt in (iii) auch die Umkehrung? Beweis oder Gegenbeispiel.