Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

10 Verarbeitung unsicheren Wissens

Wahrscheinlichkeitstheorie, einfache Bayessche Inferenz

Volker Steinhage

Inhalt

- Motivation
- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Probabilistische Inferenz

Motivation

- Oft ist unser Wissen über die Welt mit Unsicherheiten behaftet:
- Quellen der Unsicherheiten:

1) nur partiell beobachtbare Weltzustände
2) unzuverlässige Beobachtungen (z.B. wg. Bewegungsunschärfen)
3) unsichere Aktionseffekte
4) Komplexität der Modellierung

Problem:
Logik-basierte Planungssysteme gehen aus von
- vollständig beobachtbaren Weltzuständen
- sicheren Aktionsausführungen
- vollständiger Modellierung

Grad der Überzeugung und Wahrscheinlichkeitstheorie

Konsequenz:

- Wir sind von Regeln und Fakten häufig nur *„bis zu einem gewissen Grad überzeugt“*

→ Eine Möglichkeit, den Grad der Überzeugung auszudrücken, besteht in der Verwendung von Wahrscheinlichkeiten

Bspl.: „Der Agent ist von der Sensorinformation zu 90% überzeugt“ heißt: Der Agent nimmt an, dass die Information in 9 von 10 Fällen richtig ist

→ Wahrscheinlichkeiten drücken so eine durch partielles Unwissen bedingte *Unsicherheit* aus

Rationale Entscheidungen unter Unsicherheit

Der Agent hat i. A. verschiedene ***Aktionen*** zur Auswahl

- Diese Aktionen können mit verschiedenen *Wahrscheinlichkeiten* zu verschiedenen Ergebnissen führen

- Diese *Ergebnisse* haben verschiedene Nutzen

- Rational wäre es, die Aktion zu wählen,
  die den größten zu erwartenden Gesamtnutzen hat

$\leadsto$ Entscheidungstheorie = Nutzentheorie & Wahrscheinlichkeitstheorie

Entscheidungstheoretischer Agent

function DT-AGENT(*percept*) returns an *action*

static: a set of probabilistic beliefs about the state of the world

calculate updated probabilities for current state based on
available evidence including current percept and previous action

calculate outcome probabilities for actions,
given action descriptions and probabilities of current states

select *action* with highest expected utility
given probabilities of outcomes and utility information

return *action*

Entscheidungstheorie: Ein Agent ist rational gdw. er die Aktion wählt, die den *größten zu erwartenden Nutzen* gemittelt über alle möglichen Ergebnisse von Aktionen hat.

Wahrscheinlichkeitstheorie: Zufallsvariable

- W'keiten werden ausschließlich *unsicheren* Teilzuständen der Welt zugeordnet

- Elementare Teilzustände werden durch Zufallsvariablen benannt
  - Beispiel 1: $Loch \in \{true, false\}$ („Loch" steht hier für kariöses Loch in einem Zahn)
  - Beispiel 2: $Wetter \in \{sonnig, regnerisch, wolkig, schnee\}$

- Im weiteren Verlauf werden Abkürzungen durch Kleinschreibung benutzt
  - zu Beispiel 1: *loch* für $Loch = true$ etc.
  - zu Beispiel 2: *sonnig* für $Wetter = sonnig$ etc.

- $Loch = true$ ist eine elementare Aussage (Proposition)

- Komplexere Aussagen werden mit logischer Konnektoren zusammengesetzt
  - Beispiel: $Loch = true \wedge Zahnschmerzen = false$

    bzw. $loch \wedge \neg zahnschmerzen$

Atomare Ereignisse

- Eine Aussage, die ***allen*** Zufallsvariablen eines Weltmodells einen Wert zuweist, wird atomares Ereignis genannt

→ Unterschiedliche atomare Ereignisse schließen sich wechselseitig aus

→ Die Menge aller möglichen atomare Ereignisse ist erschöpfend: genau ein atomares Ereignis muss wahr sein

- Beispiel: Wenn *Loch* und *Zahnschmerzen* die einzigen Zufallsvariablen in der Modellierung einer Zahnpraxisdomänen sind, dann gibt es vier atomare Ereignisse:
  - $loch \wedge zahnschmerzen$
  - $loch \wedge \neg zahnschmerzen$
  - $\neg loch \wedge zahnschmerzen$
  - $\neg loch \wedge \neg zahnschmerzen$

A Priori Wahrscheinlichkeit

$P(a)$ bezeichnet die unbedingte Wahrscheinlichkeit oder A-priori-Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage a für den Fall gilt, dass *keine* zusätzliche Information verfügbar ist.

- Beispiel: $P(regnerisch) = 0.2$

- Wie gewinnt man A-priori-Wahrscheinlichkeiten?
  - ⇝ durch statistische Analyse
  - ⇝ aus allgemeinen Regeln

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Im Allgemeinen kann eine Zufallsvariable nicht nur die Booleschen Werte *wahr* und *falsch* annehmen, sondern auch mehrere Werte:

  Beispiel 1: $P(Wetter = sonnig) = 0.7$ $\quad P(Wetter = regnerisch) = 0.2$

  $P(Wetter = wolkig) = 0.08$ $\quad P(Wetter = schnee) = 0.02$

  Beispiel 2: $P(Kopfschmerzen = true) = 0.1$

- **P**(X) bezeichnet den Vektor der Wahrscheinlichkeiten für den (geordneten) Wertebereich der diskreten Zufallsvariable X

  Beispiel 1: $\mathbf{P}(Kopfschmerzen) = \langle 0.1, 0.9 \rangle$

  Beispiel 2: $\mathbf{P}(Wetter) = \langle 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 \rangle$

  Definiert sind so die ***Wahrscheinlichkeitsverteilungen*** der diskreten Zufallsvariablen *Kopfschmerzen* bzw. *Wetter*. Die Summe der Werte ist auf 1 normiert.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (1)

Neue Information kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ändern!

- Beispiel: Die W'keit von Karies erhöht sich, wenn man weiß, dass ein Patient Zahnschmerzen hat

- Sobald Zusatzinformation vorliegt, darf nicht mehr mit A-priori-W'keiten gerechnet werden!

- $P(a|b)$ bezeichnet die ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** oder ***A-posteriori-Wahrscheinlichkeit*** von *a*, sofern die *alleinige Evidenz b* gegeben ist:

$$P(loch|zahnschmerzen) = 0.6$$

- $\mathbf{P}(X|Y)$ ist die Tabelle aller bedingten W'keiten über alle Werte von *X* und *Y*

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (2)

P(*Wetter*|*Kopfschmerzen*) ist eine 4×2 Tabelle von bedingten W'keiten aller Kombinationen der Werte der Zufallsvariablen:

	Kopfschmerzen = true	*Kopfschmerzen = false*
Wetter = sonnig	$P(W = sonnig \mid kopfschmerzen)$	$P(W = sonnig \mid \neg kopfschmerzen)$
Wetter = regnerisch	…	…
Wetter = wolkig	…	…
Wetter = schnee	…	…

Bedingte W'keiten ergeben sich aus unbedingten W'keiten *per Definition* wie folgt ($P(b) > 0$):

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \tag{1}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (3)

Aus Gleichung (1) folgt die ***Produktregel***:

$$P(a \wedge b) = P(a \mid b) \cdot P(b). \tag{2}$$

$P(a \wedge b)$ kann auch geschrieben werden als $P(a,b)$

Zum Beispiel:

- $P(W = sonnig \wedge kopfschmerzen) =$
  $$P(W = sonnig \mid kopfschmerzen) \cdot P(kopfschmerzen)$$
- $P(W = regnerisch \wedge kopfschmerzen) =$
  $$P(W = regnerisch \mid kopfschmerzen) \cdot P(kopfschmerzen)$$

  …

- $P(W = schnee \wedge \neg\, kopfschmerzen) =$
  $$P(W = schnee \mid \neg\, kopfschmerzen) \cdot P(\neg\, kopfschmerzen)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten (4)

- Aus Gleichung (1)

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

folgt also allg. die Produktregel:

(2) $$P(a \wedge b) = P(a \mid b) \cdot P(b)$$

Analog zu (2) gilt auch:

(2‘) $$P(a \wedge b) = P(b \mid a) \cdot P(a)$$

- Zwei Aussagen *a* und *b* heißen unabhängig voneinander, falls $P(a|b) = P(a)$ und $P(b|a) = P(b)$ gelten. Dann und nur dann gilt:

$$P(a \wedge b) = P(a) \cdot P(b)$$

Warum Wahrscheinlichkeiten? $\leadsto$ axiomat. W‘theorie

Folie 4: Eine Möglichkeit, den Grad der Überzeugung auszudrücken, besteht in der Verwendung von Wahrscheinlichkeiten

Eine Funktion *P* von Aussagen in die Menge [0,1] ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn für alle Aussagen *a, b* gilt:

1) $0 \leq P(a) \leq 1$

2) $P(true) = 1$, $P(false) = 0$

3) $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

Alle anderen Eigenschaften lassen sich aus diesen drei Axiomen* ableiten

Bspl.: $P(\neg a) = 1 - P(a)$ folgt aus $P(a \vee \neg a) = 1$ und $P(a \wedge \neg a) = 0$

---

* Die drei Axiome werden auch als Kolmogorov-Axiome bezeichnet. Der russ. Mathematiker Andrej Kolmogorov zeigte, dass sich die restl. W-Theorie aus diesen Axiomen ableiten lässt.

Wieso sind die Axiome sinnvoll?

- **Aber** wieso sollte ein Agent diese Axiome beachten, wenn er den *Grad seiner Überzeugung* modelliert?

  ↝ *Objektive* Wahrscheinlichkeiten vs. *subjektive* Wahrscheinlichkeiten

- Warum subjektive Überzeugungen die Axiome respektieren sollten, zeigte Bruno de Finetti bereits 1931 mit folgenden Satz (s. auch Bspl. im Anhang):

Einem Agenten, der Wetten eingeht und dabei W'keiten zugrunde legt, die den Axiomen widersprechen, können immer Wettstrategien aufgezwungen werden, bei denen er unabhängig vom Ausgang der Ereignisse verliert.

Verbundwahrscheinlichkeit

Bereits bekannt: Ein atomares Ereignis ist eine Zuweisung *von Werten* an *alle* Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (vollständige Spezifikation eines Zustands).

Bspl.: für zwei Boolesche Variablen X, Y gibt es vier atomare Ereignisse:
(1) $X \wedge Y$, (2) $X \wedge \neg Y$, (3) $\neg X \wedge Y$, (4) $\neg X \wedge \neg Y$.

- Eine ***Verbundwahrscheinlichkeit*** ist die W'keit, die ein Agent *einem atomaren Ereignis* zuordnet.
- Die ***Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung*** $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$ weist *jedem atomaren Ereignis* eine W'keit zu:

	zahnschmerzen	*¬zahnschmerzen*
loch	*0.12*	*0.08*
¬loch	*0.08*	*0.72*

Da alle atomaren Ereignisse disjunkt sind, ist die Summe über alle Felder gleich 1 (Disjunktion der Ereignisse). Die Konjunktion ist notwendigerweise falsch.

Rechnen mit der Verbundwahrscheinlichkeit

Alle interessanten W'keiten lassen sich aus den Verbundwahrscheinlichkeiten errechnen, indem wir sie als Disjunktion von atomaren Ereignissen formulieren.

Beispiel:

	zahnschmerzen	*¬zahnschmerzen*
loch	0.12	0.08
¬loch	0.08	0.72

1) Disjunktion

$$
\begin{aligned}
P(loch \vee zahnschmerzen) &= P(loch \wedge zahnschmerzen) \\
&+ P(\neg loch \wedge zahnschmerzen) \\
&+ P(loch \wedge \neg zahnschmerzen)
\end{aligned}
$$

2) Unbedingte Wahrscheinlichkeiten für einzelne Zufallsvariablen erhält man durch Aufsummieren von Zeile oder Spalte (**Marginalisierung**):

$$P(loch) = P(loch \wedge zahnschmerzen) + P(loch \wedge \neg zahnschmerzen)$$

3) Womit bedingte Wahrscheinlichkeiten ableitbar sind:

$$P(loch \mid zahnschmerzen) = \frac{P(loch \wedge zahnschmerzen)}{P(zahnschmerzen)} = \frac{0.12}{0.12 + 0.08} = 0.60$$

Probleme mit der Verbundwahrscheinlichkeit

Pro: Aus den Verbundwahr‘keiten lassen sich alle Wahr‘keiten ermitteln

Con: Aber die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung umfasst k^n Werte, wenn es n Zufallsvariablen mit k Werten gibt

$\rightsquigarrow$ schwierig darzustellen und schwierig zu ermitteln

Fragen:

- Gibt es *kompaktere* Darstellungen von Verbundwahrscheinlichkeiten?
- Gibt es *effiziente* Methoden, diese Darstellung zu verarbeiten?

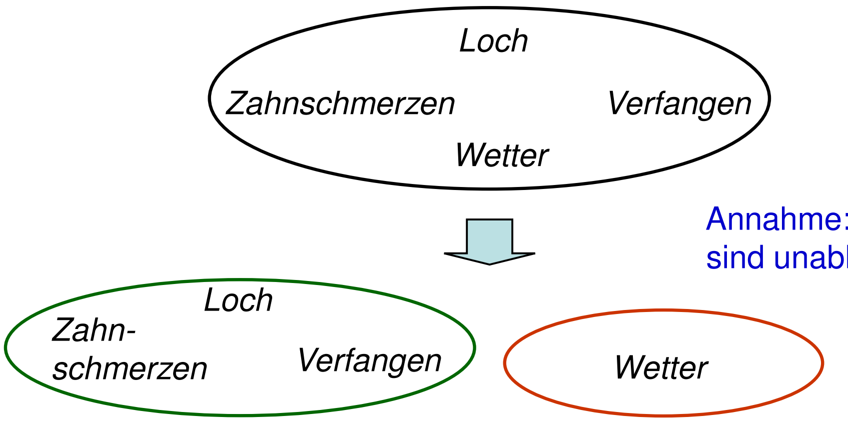
Als Antworten werden in dieser Vorlesung behandelt:

- das Ausnutzen von Unabhängigkeiten
- das Ableiten über die Bayessche Regel

Absolute Unabhängigkeit

Sind einige Variablen in der Verbundverteilung unabhängig von den übrigen, kann die Verbundverteilung zerlegt werden

Beispiel:



Annahme: zahnmedizin. Zusammenhänge sind unabhängig vom Wetter

$\leadsto$ $\mathbf{P}(Zahnschmerzen, Verfangen, Loch, Wetter)$

$$= \mathbf{P}(Zahnschmerzen, Verfangen, Loch) \cdot \mathbf{P}(Wetter)$$

$\leadsto$ $2^3 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$ Einträge werden auf $8 + 4 = 12$ reduziert (4 mögl. Werten für Wetter)

Konditionale Unabhängigkeit (1)

P(*Zahnschmerzen*, *Verfangen*, *Loch*) hat 7 (= 2^3-1) *unabhängige* Einträge. Daraus sind u.a. ableitbar:

- Liegt Karies vor, ist die W'keit dafür, dass der Zahnarzt durch Verfangen des Hakens das Loch entdeckt, unabhängig davon, ob Zahnschmerzen vorliegen:

$$\leadsto \quad P(\mathit{verfangen} \mid \mathit{zahnschmerzen}, \mathit{loch}) = P(\mathit{verfangen} \mid \mathit{loch})$$

- Die gleiche Unabhängigkeit gilt für den Fall, dass kein Karies vorliegt:

$$\leadsto \quad P(\mathit{verfangen} \mid \mathit{zahnschmerzen}, \neg\, \mathit{loch}) = P(\mathit{verfangen} \mid \neg\, \mathit{loch})$$

⇝ *Verfangen* ist *konditional unabhängig* (bzw. *bedingt unabhängig*) von *Zahnschmerzen* gegeben die Evidenz für *Loch*

- Zusicherungen von Unabhängigkeiten basieren i. A. auf Domänenwissen!

Konditionale Unabhängigkeit (2)

Die allg. Definition der bedingten Unabhängigkeit von zwei Variablen *X* und *Y* bei einer gegebenen dritten Variablen *Z* lautet:

(1) $\mathbf{P}(X|Y,Z) = \mathbf{P}(X|Z)$ sowie $\mathbf{P}(Y|X,Z) = \mathbf{P}(Y|Z)$ (s. Folie 24)

bzw.

(2) $\mathbf{P}(X,Y|Z) = \mathbf{P}(X|Z) \cdot \mathbf{P}(Y|Z)$

(2) am Beispiel:

$$\mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen},\ \mathit{Verfangen} \mid \mathit{Loch})$$
$$= \mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen} \mid \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Verfangen} \mid \mathit{Loch})$$

Konditionale Unabhängigkeit (3)

Die vollständige Verbundverteilung erhält man über die Produktregel (s. F. 13):

$$\mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen}, \mathit{Verfangen}, \mathit{Loch})$$

$$= \mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen} \mid \mathit{Verfangen}, \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Verfangen}, \mathit{Loch})$$

$$= \mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen} \mid \mathit{Verfangen}, \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Verfangen} \mid \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Loch})$$

$$= \mathbf{P}(\mathit{Zahnschmerzen} \mid \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Verfangen} \mid \mathit{Loch}) \cdot \mathbf{P}(\mathit{Loch})$$

⇝ $2 \cdot (2 \cdot (2^1-1)) + 2^1-1 = 5$ unabhängige Einträge statt $(2^3-1) = 7$:

L	P(z|L)
t	0.4
f	0.011

L	P(v|L)
t	0.9
f	0.2

L	P(l)
t	0.2

Ggf. kann die Größe der Repräsentation von Verbundverteilungen durch Ausnutzung von konditionalen Unabhängigkeiten von „exponentiell in der Anzahl der Variablen *n*“ auf „linear in *n*“ reduziert werden!

Zur Inferenz $\rightsquigarrow$ die Bayessche Regel

Wir wissen aus der Produktregel:

$$P(a \wedge b) = P(a|b) \cdot P(b) \quad \text{und} \quad P(a \wedge b) = P(b|a) \cdot P(a)$$

Durch *Gleichsetzen der beiden rechten* Seiten folgt:

$$P(a|b) \cdot P(b) = P(b|a) \cdot P(a)$$

Durch einfache Umformung: $P(a \mid b) = \dfrac{P(b \mid a) \cdot P(a)}{P(b)}$

… und für Verteilungen: $\boldsymbol{P}(A \mid B) = \dfrac{\boldsymbol{P}(B \mid A) \cdot \boldsymbol{P}(A)}{\boldsymbol{P}(B)}$

Nützlich, um *diagnostische* Wahrscheinlichkeiten von *kausalen* abzuleiten:

$$\boldsymbol{P}(Ursache|Wirkung) = \frac{\boldsymbol{P}(Wirkung|Ursache) \cdot \boldsymbol{P}(Ursache)}{\boldsymbol{P}(Wirkung)}$$

Anwendung der Bayesschen Regel

Geg. seien:

$$P(zahnschmerzen|loch) = 0.6 \quad \text{(kausal)}$$

$$P(loch) = 0.2 \quad \text{(Statistik)}$$

$$P(zahnschmerzen) = 0.2 \quad \text{(Statistik)}$$

mit Bayes-Regel:

$$P(loch \mid zahnschmerzen) = \frac{0.6 \cdot 0.2}{0.2} = 0.6$$

Frage: Warum nicht gleich *P*(*loch*|*zahnschmerzen*) schätzen?

- Die kausale Regel *P*(*zahnschmerzen*|*loch*) ist unabhängig von den A-priori-W'keiten *P*(*loch*) und *P* (*zahnschmerzen*)
  - → nähme *P*(*loch*) bei einer Kariesepidemie zu, so bliebe die Kausalität *P*(*zahnschmerzen*|*loch*) unverändert, während sich *P*(*zahnschmerzen*) proportional mit *P*(*loch*) änderte.
  - → ein Arzt, der *P*(*loch*|*zahnschmerzen*) aus Daten geschätzt hätte, müsste von vorne anfangen

Allgemein: Kausales Wissen wie *P*(*zahnschmerzen* | *loch*) ist i.A. robuster als diagnostisches Wissen wie *P*(*loch* | *zahnschmerzen*)

Normalisierung (1)

Ziel: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von *P*(*loch*|*zahnschmerzen*)

Problem: *P*(*zahnschmerzen*) sei unbekannt

Lösung: *P*(*loch*|*zahnschmerzen*) ist durch *vollständige Fallanalyse* herleitbar

Hier Fallanalyse über *loch* und ¬*loch* sowie den Zusammenhang

P(*loch*|*zahnschmerzen*) + *P*(¬*loch*|*zahnschmerzen*) = 1

Hier aus Platzgründen: *zahnschmerzen* = *z* und *loch* = *l*.

$$P(l \mid z) = \frac{P(z \mid l)P(l)}{\boxed{P(z)}}$$

$$P(\neg l \mid z) = \frac{P(z \mid \neg l)P(\neg l)}{\boxed{P(z)}}$$

$$P(l \mid z) + P(\neg l \mid z) = 1 = \frac{P(z \mid l)P(l)}{\boxed{P(z)}} + \frac{P(z \mid \neg l)P(\neg l)}{\boxed{P(z)}}$$

$$\boxed{P(z)} = P(z \mid l)P(l) + P(z \mid \neg l)P(\neg l)$$

Normalisierung (2)

Durch Einsetzen in die ersten beiden Gleichungen:

$$P(l \mid z) = \frac{P(z \mid l)\, P(l)}{\boxed{P(z \mid l)\, P(l) + P(z \mid \neg l)\, P(\neg l)}}$$

$$P(\neg l \mid z) = \frac{P(z \mid \neg l)\, P(\neg l)}{\boxed{P(z \mid l)\, P(l) + P(z \mid \neg l)\, P(\neg l)}}$$

Dieser Prozess heißt ***Normalisierung***, weil 1/P(z) einfach als Normalisierungs-konstante genutzt werden kann, um die Summe der bedingten W'keiten gleich 1 zu setzen.

- Für *mehrwertige* Zufallsvariablen allgemein:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \alpha \cdot \mathbf{P}(X|Y) \cdot \mathbf{P}(Y)$$

- Wobei α die Normierungskonstante ist, die die Summe der Werte in **P**(Y|X) über alle *Y* auf 1 normiert, z.B. α = 1/5 für ⟨1, 1, 3⟩ damit 1/5 + 1/5 + 3/5 = 1

Normalisierung (3): Beispiel

Geg. sei das Zahnarztszenario jetzt durch folgende Verbundw.-Verteilung:

	zahnschmerzen		¬ zahnschmerzen	
	verfangen	¬verfangen	verfangen	¬verfangen
loch	0.108	0.012	0.072	0.008
¬loch	0.016	0.064	0.144	0.576

$$\Rightarrow P(loch \mid zahnschmerzen) = \frac{P(loch \wedge zahnschmerzen)}{P(zahnschmerzen)} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

$$\Rightarrow P(\neg loch \mid zahnschmerzen) = \frac{P(\neg loch \wedge zahnschmerzen)}{P(zahnschmerzen)} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

Mit Normalisierung in einer Gleichung formulierbar:

s. F. 12: $P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$

P(*Loch*|*zahnschmerzen*) = α·***P***(*Loch*,*zahnschmerzen*)

= α·[***P***(*Loch*,*zahnschmerzen*,*verfangen*) + ***P***(*Loch*,*zahnschmerzen*,¬*verfangen*)]

= α· [⟨0.108;0.016⟩ + ⟨0.012;0.064⟩]

= α· ⟨0.12;0.08⟩

= ⟨0.6;0.4⟩

Die Belegung von *Verfangen* ist für ***P***(*Loch*|*zahnschmerzen*) nicht festgelegt. Also ist über alle (hier zwei) mögl. Werte zu summieren.

Normalisierung 4

Verallgemeinert aus dem Beispiel sind gegeben:

- Anfragevariable X (im Beispiel *Loch*)
- Menge ***E*** der beobachteten Evidenzvariablen (im Beispiel *zahnschmerzen*) und ***e*** die beobachteten Werte für diese
- Menge ***Y*** der restlichen unbeobachteten Variablen (im Beispiel *verfangen*) und ***y*** die möglichen Werte für diese

Die Auswertung der Anfrage $\boldsymbol{P}(X \mid \mathbf{e})$ ist dann:

$$\boldsymbol{P}(X \mid \boldsymbol{e}) = \alpha \cdot \boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}) = \alpha \cdot \sum_{\mathbf{y}} \boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$$

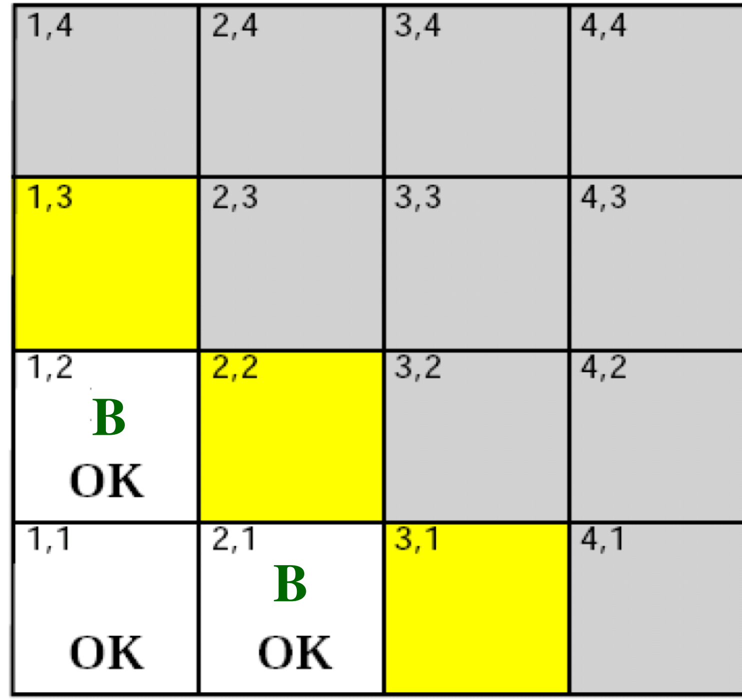
Wumpus Welt

Unsicherheit entsteht hier, da die Sensoren nur partielle Information liefern:

- Hier hat der Agent in [1,2] und [2,1] einen Luftzug (B) erkannt.

→ Jedes der erreichbaren Felder [1,3], [2,2], [3,1] kann eine Falltür enthalten.

- Ein logischer Agent müsste probieren … mit nicht kalkulierbarem Risiko



- Ein probabilistischer Agent ist besser:

In diesem Bspl. werden nur Luftzüge und Falltüren betrachtet → also werden hier Wumpus und Gold nicht berücksichtigt.

Kodierung: $P_{ij} = true$ gdw. [*i*,*j*] enthält Fallgrube (Pit)

$B_{ij} = true$ gdw. [*i*,*j*] ist „breezy"

Gegeben sind nur die Wahrnehmungen B_{11}, B_{12}, B_{21}

Frage: wie wahrscheinlich sind Fallgruben in den gelben Feldern?

Spezifikation des Wahrscheinlichkeitsmodells

- Vollständ. Verbundverteilung: $\mathbf{P}(P_{11}, \ldots, P_{44}, B_{11}, B_{12}, B_{21})$.
  - → Anwendung der Produktregel:

    $\mathbf{P}(B_{11}, B_{12}, B_{21} \mid P_{11}, \ldots, P_{44}) \cdot \mathbf{P}(P_{11}, \ldots, P_{44})$

  - → Warum?

- Um kausale Beziehung $\mathbf{P}(Wirkung|Ursache)$ zu erhalten:
  - *Modell für ersten Term* (Kombination Luftzug und benachbarte Falltür):

    1 für Luftzug, falls direkt benachbart zu Fallgruben, sonst 0.

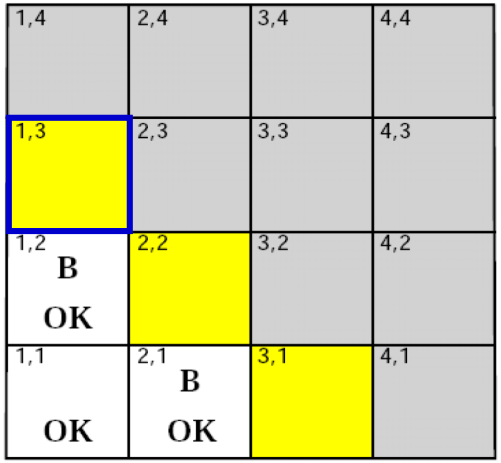
  - *Modell für zweiten Term*: Fallgruben seien *zufällig* und *unabhängig* verteilt mit W'keit 20% pro Feld, d.h.:

$$\mathbf{P}(P_{11}, \ldots, P_{44}) = \prod_{(i,j)\in\{(1,1),\ldots,(4,4)\}} \mathbf{P}(P_{ij})$$

→ P(Konfiguration mit exakt n Fallgruben) = $0{,}2^n \cdot 0{,}8^{16-n}$

Beobachtungen und Anfrage

Wir kennen die folgenden Fakten:



$$b = \neg b_{11} \wedge b_{12} \wedge b_{21}$$

$$\text{known} \;= \neg p_{11} \wedge \neg p_{12} \wedge \neg p_{21}$$

Wir wollen zunächst wissen, wie wahrscheinlich in P_{13} eine Fallgrube ist:

→ Anfrage: $\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b)$

Definiere: *unknown* als „alle Felder außer P_{13} und den Feldern aus *known*“

→ Jetzt gilt: $\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b) = \alpha \cdot \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{13}, unknown, known, b)$

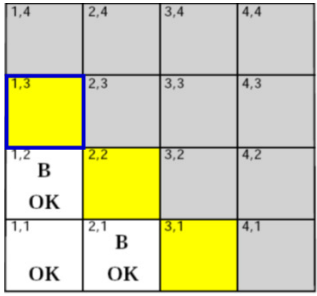
Ausnutzung konditionaler Unabhängigkeit (1)

Damit haben wir eine Ableitungsvorschrift:

$$\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b) = \alpha \cdot \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{13}, unknown, known, b)$$

Aber wir vernachlässigen die *Berechnungskomplexität*: Wir müssen über 12 unbekannte Felder summieren → die Summe enthält $2^{12} = 4096$ Terme

Grundlegende Einsicht: z.B. Feld [4,4] wird in der Wumpus-Welt wenig Aufschluss über Feld [1,3] geben



Generell: *die Beobachtungen (breezes) sind* *unabhängig* von den übrigen unbekannten Feldern, wenn ihre direkten Nachbarfelder gegeben sind

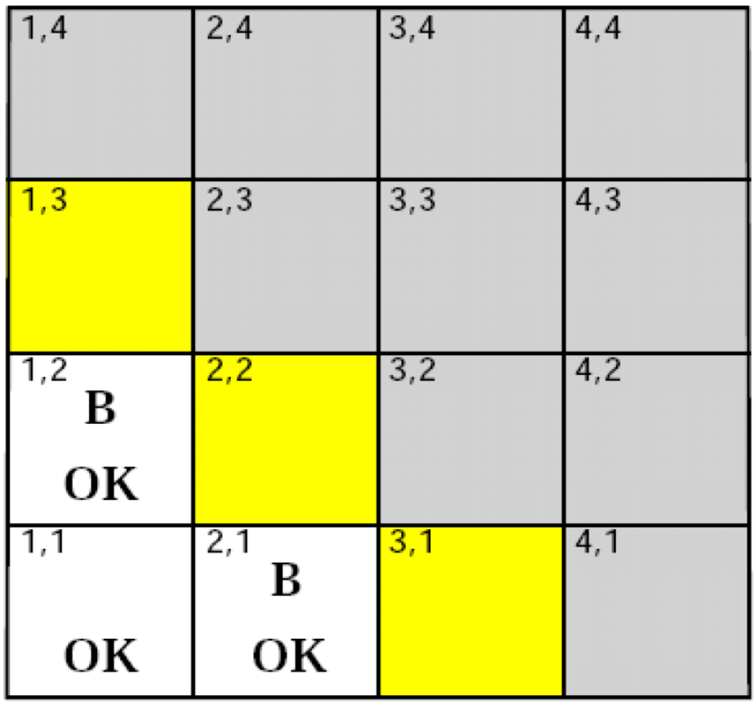
Wir definieren als Rand (*fringe*) die Felder, die neben den besuchten Feldern liegen, aber nicht Anfragefeld sind. Damit gelten $unknown = fringe \cup other$ und

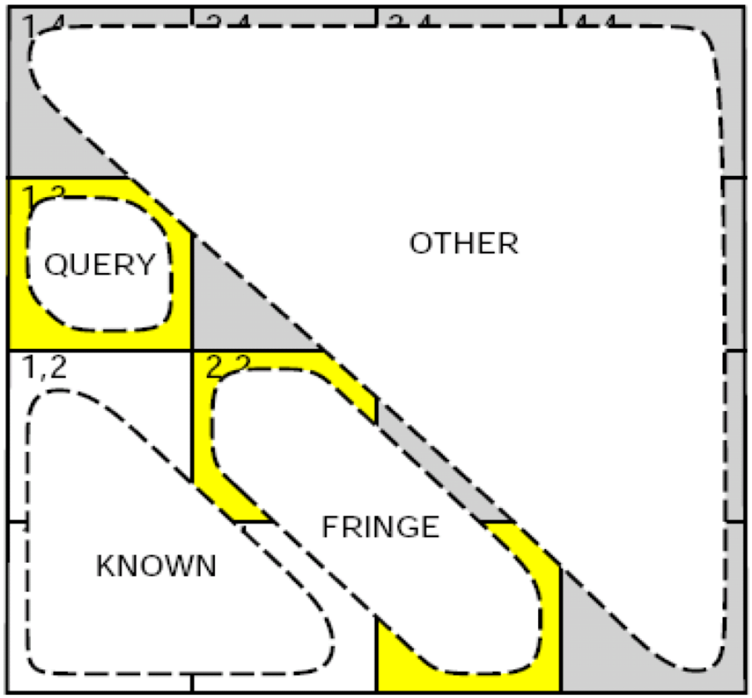
$$\mathbf{P}(b \mid P_{13}, known, unknown) = \mathbf{P}(b \mid P_{13}, known, fringe)$$

Ausnutzung konditionaler Unabhängigkeit (2)

Wir definieren als Rand (*fringe*) die Felder, die neben den besuchten Feldern liegen, aber nicht Anfragefeld sind → es gelten *unknown* = *fringe* ∪ *other* und

$$\mathbf{P}(b \mid P_{13}, known, unknown) = \mathbf{P}(b \mid P_{13}, known, fringe)$$





Jetzt formen wir die Anfrage so um, dass wir dies ausnutzen können!

Ausnutzung konditionaler Unabhängigkeit (3)

$\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b)$ s. F. 29: $\mathbf{P}(X \mid \mathbf{e}) = \alpha \cdot \mathbf{P}(X, \mathbf{e}) = \alpha \cdot \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$

$= \alpha \cdot \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{13}, unknown, known, b)$

kausal durch Produktregel

$= \alpha \cdot \sum_{unknown} \mathbf{P}(b \mid P_{13}, known, unknown) \cdot \mathbf{P}(P_{13}, known, unknown)$

umformuliert

$= \alpha \cdot \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe, other) \cdot \mathbf{P}(P_{13}, known, fringe, other)$

bed. Unabh.

$= \alpha \cdot \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \mathbf{P}(P_{13}, known, fringe, other)$

$= \alpha \cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \sum_{other} \mathbf{P}(P_{13}, known, fringe, other)$

Unabhängigkeit

$= \alpha \cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \sum_{other} \mathbf{P}(P_{13}) \cdot \mathrm{P}(known) \cdot \mathrm{P}(fringe) \cdot \mathrm{P}(other)$

$= \alpha \cdot \mathrm{P}(known) \cdot \mathbf{P}(P_{13}) \cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \mathrm{P}(fringe) \sum_{other} \mathrm{P}(other)$

$= \alpha' \cdot \mathbf{P}(P_{13}) \cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \mathrm{P}(fringe)$

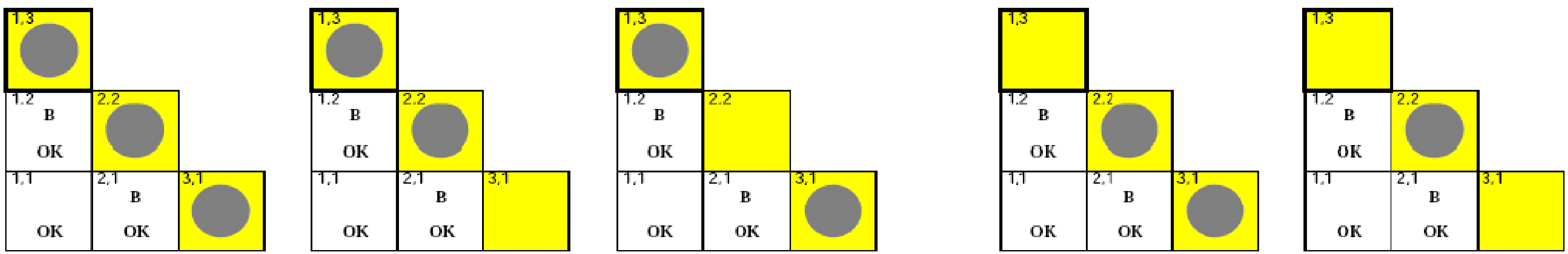
Wobei zuletzt P(*known*) in die Normalisierungskonstante aufgenommen wird und genutzt wird, dass $\sum_{other} \mathrm{P}(other)$ gleich 1 ist.

Ausnutzung konditionaler Unabhängigkeit (4)

- Bei $\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b) = \alpha' \cdot \mathbf{P}(P_{13}) \cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) \cdot \mathrm{P}(fringe)$ ist $\mathrm{P}(b \mid known, P_{13}, fringe) = 1$, wenn *fringe* konsistent mit *b* ist, sonst 0

→ Wir summieren für jeden P_{13}-Wert nur über die logischen Modelle des Randes, die konsistent mit den Fakten sind

→ Fünf konsistente „Fringe"-Zustände mit $\mathrm{P}(b \mid P_{13}, known, fringe) = 1$ für p_{13} und $\neg p_{13}$:



0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16   0.8 x 0.2 = 0.16   0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16

- $\mathbf{P}(P_{13} \mid known, b) = \alpha' \cdot \langle\, 0.2 \cdot (0.04 + 0.16 + 0.16)\, , 0.8 \cdot (0.04 + 0.16)\, \rangle$

  $\approx \langle 0.31, 0.69 \rangle$
- $\mathbf{P}(P_{31} \mid known, b) \approx \langle 0.31, 0.69 \rangle$ wg. Symmetrie
- $\mathbf{P}(P_{22} \mid known, b) \approx \langle 0.86, 0.14 \rangle$

→ Es ist also kalkulierbar, das es günstiger ist, am Rand entlang zu laufen

Zusammenfassung

- Unsicherheit ist unvermeidbar in komplexen und dynamischen Welten, in denen Agenten zur Ignoranz gezwungen sind.
- Wahrscheinlichkeiten formulieren die Unfähigkeit eines Agenten, eine definitive Entscheidung zu fällen. Sie drücken den Grad seiner Überzeugung aus.
- Bedingte und unbedingte Wahrscheinlichkeiten können über Propositionen formuliert werden.
- Alle relevanten Wahrscheinlichkeiten können durch Summation der Wahrscheinlichkeiten atomarer Ereignisse aus der Verbundverteilung ermittelt werden.
- Für nicht triviale Domänen ist es erforderlich, eine effiziente Repräsentation der Verbundverteilung zu finden.
- Unabhängigkeit und konditionale Unabhängigkeit sind die Werkzeuge dafür.
- Produktregel und Bayessche Regel ermöglichen es dabei, Anfragen geeignet umzuformen.

Anhang: Ein Wettspiel nach de Finetti

- Agent 1 hat die Überzeugung $P(a) = 0.4$, dass ein Ereignis a eintritt.
- Agent 2 kann für oder gegen a wetten, sein Einsatz muss dabei jedoch konsistent mit der Überzeugung von Agent 1 sein (faire Wette).
- Beispiel: Agent 2 setzt 4 zu 6 auf a, d.h. tritt a auf, muss Agent 1 den Betrag von 6 Euro an Agent 2 zahlen, sonst zahlt Agent 2 den Betrag von 4 Euro an Agent 1.

Agent 2 wettet:	Agent 1 muss dagegenhalten:
a tritt auf: 4 Euro	a tritt nicht auf: 6 Euro
a tritt nicht auf: 6 Euro	a tritt auf: 4 Euro

⇝ Nach de Finetti muss Agent 1 diese Wette akzeptieren (weil sie fair ist).

Eine Wettstrategie ist eine Menge von Wetten auf mehrere Ereignisse.

Anhang: Das Wettmodell

Agent 1 habe die folgenden Grade von Überzeugungen:

$P(a) = 0.4$, $P(b) = 0.3$, $P(a \wedge b) = 0.0$, $P(a \vee b) = 0.8$

$\leadsto$ Widerspruch zu 3. Axiom der W-Theorie: $P(a \vee b) \neq P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

Agent 2 habe die Wettstrategie:

a, *b*, $\neg(a \vee b)$ und

setzt 4 zu 6 auf *a*, 3 zu 7 auf *b* und 2 zu 8 auf $\neg(a \vee b)$:

Agent 1		Agent 2		Ergebnisse für Agent 1 bei			
Aussage	Glaube	Wette	Einsatz	$a \wedge b$	$a \wedge \neg b$	$\neg a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg b$
a	0.4	a	4 zu 6	-6	-6	4	4
b	0.3	b	3 zu 7	-7	3	-7	3
$a \vee b$	0.8	$\neg(a \vee b)$	2 zu 8	2	2	2	-8
				-11	-1	-1	-1

Setzt Agent 2 entspr. seiner Strategie, verliert Agent 1 bei allen möglichen Ergebnissen für *a* und *b*.