φ AL-Formel

KNF (DNF) erzeugen

- allgemein über Bewertungen / Wahrheitstabelle
- effizient über Umformungsregeln / Algorithmus

(Assoz. / Komm. / Distribut. / Impl. aufl. / Äquival. aufl. / de Morgan'sche R. / ...)

BSP

φ_1	φ_2	φ_3	$\neg\varphi_3$
$((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg x_1)$	$(x_2 \vee x_3)$	$(x_1 \rightarrow x_3)$	$\neg(x_1 \rightarrow x_3)$
$\equiv ((x_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1))$	KNF		$\equiv \neg(\neg x_1 \vee x_3)$
KNF			$\equiv (x_1 \wedge \neg x_3)$
			KNF

Agenda: Resolutionskalkül Automatisches Beweisen!

(1)

$$((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg x_1) \qquad (x_2 \vee x_3) \qquad (x_1 \rightarrow x_3)$$
$$= \varphi_1 \qquad\qquad = \varphi_2 \qquad\qquad = \varphi_3$$

$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_3)$ gültig (?)

Wissen: φ_1 und φ_2 gilt dann auch φ_3?

$\Longleftrightarrow$ (Def. Gültigkeit) $(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3)$ gültig

$\Longleftrightarrow$ (Lemma S.6) $\neg(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3)$ nicht erfüllbar

$\Longleftrightarrow$ (~~Um~~ Umformung) $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \neg \varphi_3)$ nicht erfüllbar

Bilde KNF von $\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3)$ bzw. Klauselmengen, damit beantworten?

<u>Resolutionskalkül:</u>

<u>KNF:</u> $$f = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$$

Bilde: "Klauseln" als Menge

$C_i := \{ l_{i,j} \mid j \in \{1, \ldots, m_i\}\}$ <u>kompakte Darstellung!</u>

$K(f) := \{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n\}$ Menge von Klauseln

BSP

$$f_1 = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

$$f_2 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge x_3 \wedge (x_2 \vee \neg x_1)$$

$$K(f_2) = K(f_1) = \{ \{x_3\}, \{\neg x_1, x_2\} \}$$

Erfüllbarkeit, Äquivalenz auf Mengen von Klauseln übertragen:

Sei K Klauselmenge: $K = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

C_i Mengen von Literalen

$$\Rightarrow \varphi_K := \bigwedge_{C \in K} \left(\bigvee_{\ell \in C} \ell \right)$$

zugehörige KNF $\qquad K(\varphi_K) = K$

Definiere: $[\![K]\!]_B := [\![\varphi_K]\!]_B \qquad [\![C]\!]_B := [\![\bigvee_{\ell \in C} \ell]\!]_B \quad C \in K$

Erfüllbarkeit für Klauselmenge K $:\Longleftrightarrow$
es existiert eine Belegung B, so dass für jedes $C \in K$
ex mindestens ein $\ell \in C$ das wahr ist bzgl. B.

(4)

"Spezialfälle" $K = \{\}$ nach Def. erfüllbar

$K = \{\{\}\}$ nicht erfüllbar

Symbol $\{\} = \square$ $\quad \square \in K \Rightarrow K$ nicht erfüllbar

Versuchen $\square$ abzuleiten!

Regeln Resolutionskalkül

Definition 5.12 Es seien C_1 und C_2 Klauseln und $X \in AV$ $\quad X \in C_1, \neg X \in C_2$

Die Klausel $C = \left(C_1 \setminus \{X\} \cup C_2 \setminus \{\neg X\} \right)$

heißt die Resolvente von C_1 und C_2.

Ableitungsschritte heißen Resolutionen.

Notation: $\dfrac{C_1, C_2}{C}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C_1 \arrow[dr, no head] & & C_2 \arrow[dl, no head] \\ & C & \end{tikzcd}$$

5

Bsp

1. $C_1 = \{x_1, \underline{x_2}, \neg x_3\}$ $\quad$ $C_2 = \{x_1, \underline{\neg x_2}, x_4\}$

$(C_1 \setminus \{x_2\} \cup C_2 \setminus \{\neg x_2\})$

$C = \{x_1, \neg x_3, x_4\}$

Bedeutung: 1. $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$

$\equiv (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

2. $C_1 = \{\underline{x_1}\}$ $\quad$ $C_2 = \{\underline{\neg x_1}\}$

$\square \; (\{\})$

Bedeutung: 2.

$K = \{C_1, C_2\} = \{\{x_1\}, \{\neg x_1\}\} \equiv \{\{x_1\}, \{\neg x_1\}, \underline{\underline{\{\}}}\} = \{C, C_1, C_2\}$

nicht erfüllbar

$\varphi_K = x_1 \wedge \neg x_1$

<u>Mehrstufig:</u>

$$K = \{\{\underline{x_1}, x_3\}, \{\neg \underline{x_1}, x_2\}, \{\neg x_3\}, \{\neg x_2, x_3\}\}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\underline{x_1}, x_3\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg \underline{x_1}, x_2\} \arrow[dl, dash] & & \{\neg \underline{x_3}\} \arrow[ddll, dash] \arrow[dr, dash] & & \{\neg x_2, \underline{x_3}\} \arrow[dl, dash] \\
& \{x_2, x_3\} \arrow[dr, dash] & & & & \{\neg x_2\} \arrow[ddll, dash] & \\
& & \{x_2\} \arrow[dr, dash] & & & & \\
& & & \square & & &
\end{tikzcd}$$

7

"Korrektheit" des Resolutionskalküls

Lemma 8.13 Sei K Klauselmenge und $C_1, C_2 \in K$ Klauseln mit $x \in C_1$, $\neg x \in C_2$, $x \in AV$.
Sei C die Resolvente von C_1 und C_2 bezügl. x.
Dann sind K und $K \cup \{C\}$ äquivalent.

Beweis: direkt K und $K \cup \{C\}$ gleiche Variablen
Belegung B passend für K und auch für $K \cup \{C\}$

zz: $[\![K]\!]_B = [\![K \cup \{C\}]\!]_B \iff \left([\![K]\!]_B = 1 \iff [\![K \cup \{C\}]\!]_B = 1\right)$

zwei Richtungen

"$\Leftarrow$" $\underbrace{[\![K \cup \{C\}]\!]_B}_{\text{min}, \wedge} = 1 \quad \underset{\text{min}, \wedge}{\Longrightarrow} \quad [\![K]\!]_B = 1$

"$\Longrightarrow$" $[\![K]\!]_B = 1$ (*)

1. Fall $B(x) = 0$ mit C_1, $x \in C_1$, $C_1 \in K$

$\Longrightarrow [\![C_1 \setminus \{x\}]\!]_B \underset{\text{max}, \vee}{=} 1$ $C_1 \setminus \{x\}$ hat erfüllendes Literal ℓ

$\Longrightarrow [\![\ell]\!]_B = 1$ $\ell \in C_1 \setminus \{x\}$

$\Longrightarrow \ell \in C = \left(\underline{C_1 \setminus \{x\}} \cup C_2 \setminus \{\neg x\} \right) \Longrightarrow [\![C]\!]_B = 1$ (**)

$\Longrightarrow \underline{[\![K \cup \{C\}]\!]_B = 1}$ (*), (**)

2. Fall $B(x) = 1$ mit C_2, $\neg x \in C_2$, $C_2 \in K$

<u>analog</u> $[\![C_2 \setminus \{\neg x\}]\!]_B = 1$ usw.

$\Longrightarrow$ 1. + 2. Fall $\quad [\![K]\!]_B = 1 \Longrightarrow [\![K \cup \{C\}]\!]_B = 1$ $\square$

"$K \equiv K \cup \{C\}$"

bei Resolution!

Deduktion $\quad K$ nicht erfüllbar $\Longleftrightarrow$ $K \cup \{C\}$ nicht erfüllbar

Anwendung: $\quad ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \varphi_3)$ gültig

$\Longleftrightarrow$ $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg \varphi_3)$ nicht erfüllbar

$\underset{K}{\underline{\text{Klauselmenge}}}$ zu $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg \varphi_3)$ damit arbeiten!

(10)

$$K = \{\underline{\{x_1, \neg x_1\}}, \{\neg x_2, \neg x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1\}, \{\neg x_3\}\}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{\neg x_2, \underline{\neg x_1}\} \arrow[dr, dash] & & \{\underline{x_1}\} \arrow[dl, dash] & & \{x_2, \underline{x_3}\} \arrow[dr, dash] & & \{\underline{\neg} x_3\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\neg x_2\} \arrow[drr, dash] & & & & \{x_2\} \arrow[dll, dash] & \\
& & & \Box & & &
\end{tikzcd}$$

Ja!

$$((\ell_1 \wedge \ell_2 | \to \ell_3)$$

<u>gültig</u>!

Vollständigkeit des Kalküls

<u>Ann.:</u> es ex C mit

K erfüllbar $\Longleftrightarrow$ $K \cup \{C\}$ erfüllbar

Kann ich C auch aus K <u>ableiten</u>?

Das ist möglich bei AL $\Rightarrow$ "komplettes Wissen" ist ableitbar."

"Alle möglichen Resolventen bilden"

12

Definition $\bar{S}$.14 Sei K Klauselmenge, dann

Sei $Res(K) := K \cup \{ C \mid C$ ist Resolvente von Klauseln aus $K \}$

Es sei zudem:

$Res^1(K) = Res(K)$

$Res^0(K) := K$

$Res^{n+1}(K) := Res(Res^n(K))$ für $n \in \mathbb{N}_0$

und $Res^*(K) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Res^n(K)$ ⌈kann ich $Res^*(K)$ angeben?⌋

$K = Res^0(K) \subseteq Res^1(K) \subseteq Res^2(K) \subseteq \dots \subseteq Res^n(K) \subseteq Res^{n+1}(K) \subseteq \dots \subseteq Res^*(K)$

endet also Prozedur?

(13)

<u>Lemma 5.15</u> Für jede <u>endliche</u> Klauselmenge K

ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $Res^{n}(K) = Res^{n+i}(K) \quad \forall i \geq 1 \; i \in \mathbb{N}$.

$$= Res^{*}(K)$$

<u>Beweis:</u>

<u>Zeige</u>: $\boxed{\text{Es ex. } n \in \mathbb{N} \text{ mit } Res^{n}(K) = Res^{n+1}(K).}$ (V) gleich!

$\Uparrow$

Nehmen wir mal an das gilt:

(V) $\Rightarrow \quad Res^{m}(K) = Res^{n}(K) \quad \forall m > n$

via Induktion über $n + \underline{\underline{i}} = m$

<u>Ind. Anfang:</u> $i = 1 \quad Res^{n}(K) = Res^{n+1}(K)$ (V) ✓

<u>Ind. Ann.:</u> $Res^{n+i}(K) = Res^{n}(K)$ für $i \geq 1$

<u>Ind. Schluss:</u> $Res^{n+\underline{i+1}}(K) \underset{\text{Def. }()^n}{=} Res\left(\underline{Res^{n+i}(K)}\right) \underset{\text{Ind. Ann.}}{=} Res\left(Res^{n}(K)\right) \underset{\text{Def. }()^n}{=} Res^{n+1}(K) \overset{(V)}{=} Res^{n}(K)$ ✓

Widerspruchsbeweis!

Ann: es ex. kein $n \in \mathbb{N}$ mit $Res^n(K) = Res^{n+1}(K)$

Aus $Res^n(K) \subseteq Res^{n+1}(K)$ folgt

$|Res^{n+1}(K)| \geq |Res(K)| + 1$

zu Beginn $|K| > 0 \Rightarrow Res^n(K) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n \geq 2^{2m}$ für $n \in \mathbb{N}$

$m = |VAR(K)|$ Alle $Res^*(K)$ enthalten nur die Variablen von K.

Literale $2m$

0/1 Literal enthalten Klausel

$2m$ Literal

1	2	3	4	…
X	$\neg X$	Y	$\neg Y$	

max $2^{(2m)}$ viele verschiedene Klauseln $\lightning$

$\square$