Kardinalitäten: Unterscheidung, Unendlich
+ abzählbar (Bijektion mit $\mathbb{N}$)
+ überabzählbar

Theorem 4.3 Teilmengen, Übertrag, Konstruktion (Schneller Verlauf)

Theorem 4.4 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, konkret, (Cantor'sche Abzählfkt.)

Theorem 4.5 $A \times B$, $A \cup B$ Übertrag, Konstruktion ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

Theorem 4.6 $f: A \to B$ surjektiv, Übertrag, Konstruktion (Schneller Verlauf, Kombination)

Theorem 4.8 $\mathbb{R}$ überabzählbar, es existiert keine Bijektion, (Diagonalisierungstrick)

Theorem 4.7 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich (Th. 4.4)

$\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ist abzählbar unendlich (Th. 4.3)

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ist abzählbar unendlich (Th. 4.5)

$f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ $\quad f(a,b) = \frac{a}{b}$ $\quad a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

surjektive Abb. (Th. 4.6)

Menge aller Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "berechenbar" (2)

Ex. Computerprogramm, dass das Ergebnis wiedergibt.

Wortproblem als Funktion beschreiben!

Problem in $\mathbb{N}$ codieren!

+ Feststellen, ob es ein Problem dieser Art ist

+ Hat dieses Problem die mit codierte Lsg.

+ Antwort in $\mathbb{N}$ — 1 Ja! 2 Nein!

Theorem 4.10 Es gibt Funktionen

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nicht berechenbar sind.

Beweis: Rein über Kardinalität! "Mehr" Fkt. als Programme!

Programme: Lieblingssprache (Java 2.B)! Endliche Anzahl von Zeichen Σ.

$P \subseteq \Sigma^*$ P Menge aller syntaktisch korrekten Programme

Beh 1. Σ^* ist abzählbar unendlich $\underset{\text{Th. 4.3}}{\Rightarrow}$ P abzählbar unendlich.

Beh. 1 **Beweis:** + Sortiere Worte nach Länge ℓ

+ Für jede ℓ reihende lexikografische Ordnung

Aufzählung: $\mathbb{N} \to \Sigma^*$

BSP $\Sigma = \{0,1\}$

Schema:

$\ell = 0$ $\quad \varepsilon_1$

$\ell = 1$ $\quad 0_2,\ 1_3$

$\ell = 2$ $\quad 00_4,\ 01_5,\ 10_6,\ 11_7$

$\ell = 3$ $\quad 000_8,\ 001_9,\ 010_{10},$ — usw

bijektive Aufzählung!

Beh. 2: F Menge aller Funktionen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ überabzählbar.

Diagonalisierungstrick: Indirekt: **Ann:** F ist abzählbar unendlich.

$\Rightarrow \exists$ bijektive Abb. (Aufzählung) $h: \mathbb{N} \to F$

$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots \quad h(i) = f_i$

	1	2	3	4	5	6
f_1	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	--	
f_2	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_3(4)$	-	
f_3	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$			
f_4				$\ddots$		

Definiere: $g \in F$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} 1 & f_n(n) \neq 1 \\ 2 & f_n(n) = 1 \end{cases}$$

Nach Ann. ex. j mit:

$h(j) = f_j = g$ aber $f_j(j) \neq g(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ ↯

Diese Aufzählung h ex. nicht.

$\square$

Diagonalverfahren (Cantor) / Diagonalisierung

Abzählbarschema

$\mathbb{Q}^+$

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \\
\vdots & \ddots & & &
\end{array}$$

$\mathbb{Q}^{+/-}$

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots \\
\frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \cdots \\
\vdots & \ddots & & &
\end{array}$$

Diagonalisierung

Zeige: überabzählbar

Ann.: Aufzählung ex.

$$\begin{array}{cccc}
d_1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\
d_2 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\
d_3 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Idee: ein neues d „konstruieren"
über Diagonalelemente
d kann in der Aufzählung
nicht vorkommen.

Th. 4.10 Es ex. Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nicht berechenbar sind. (Existenzbeweis!)

Nicht berechenbar $\Longleftrightarrow$ Wortproblem bzgl. Sprache unentscheidbar.

Konkrete unentscheidbare Probleme! Grundsätzliche Schranke

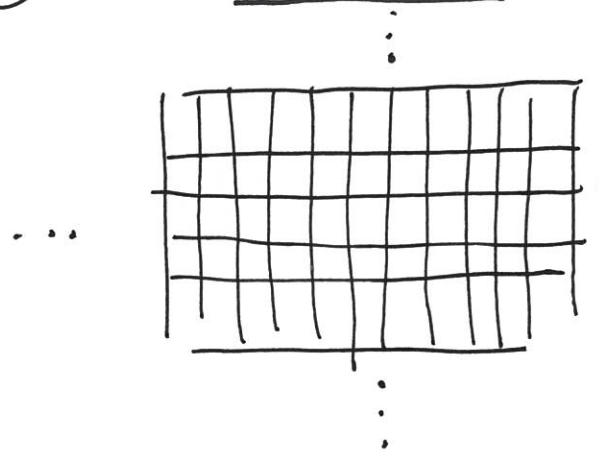
Algorithmen und Berechnungskomplexität I/II.

BSP

1. **Game of Life**
   + Population von Zellen
   + Feste Regeln

   Was wird aus einer Population?

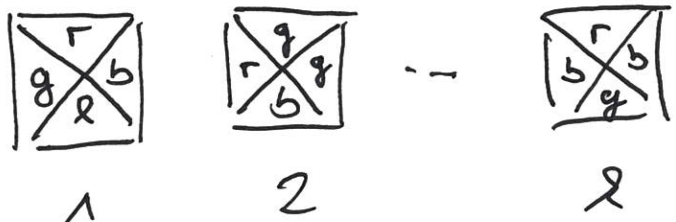
2 „Domino“



unendlich

Fliesen / Quadrate

Farbe g, l, b, r, ...



endliche # Farben und Bausteine

Frage: Kann ich die Ebene „farbkorrekt“ komplett pflastern mit beliebig vielen Elementen aus M ?

⋮

Unentscheidbar!

4.2 Abzählende Kombinatorik

Komplexitätsabschätzung → Algorithmen

→ Wahrscheinlichkeiten

Notationen

Definition 4.11 $n \in \mathbb{N}_0$

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \geq 1$ "Fakultät"

$0! := 1$

$n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \ldots, n\}$

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ "n über k" "Binomialkoeffizient"

$\binom{n}{0} := 1$ ⌜Für $k > n$ <u>oder</u> $k < 0$ $\binom{n}{k} := 0$⌟

Theorem 4.13 $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

i) $\binom{n}{k} \overset{?}{=} \binom{n}{n-k}$ ii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{?}{=} \binom{n+1}{k}$

Beweis: direkt über Definition

i) $$\binom{n}{n-k} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \underset{\text{Def.}}{=} \binom{n}{k}$$

ii) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \underset{\text{Def. 2x}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n-k+1) + k\,n!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \underset{\text{Def.}}{=} \binom{n+1}{k}$$

$\square$

10

Theorem 4.12 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

	n					
	0			1		
	1		$1\,x$		$1\,y$	
$(x+y)$	2		$1\,x^2$	$2\,xy$	$1\,y^2$	
$(x+y)$	3	$1\,y^3$.	$3\;x^2y$		$3\;xy^2$	$1\,y^3$
	4	$1\,y^4$	$4\,x^3y$	$6\,x^2y^2$	$4\,xy^3$	$1\,y^4$

Snru:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Induktion

Frage: $n! \,/ \binom{n}{k}$ was bedeutet das inhaltlich ?

1) $\underline{\underline{n!}}$ Anzahl der sogenannten Permutationen einer Menge mit n Elementen.

Bsp $M = \{a, b, c\}$ # ^verschiedener geordneten Tupel (3er Tupel)

$(\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c})$, $(\overset{1}{a}, \overset{3}{c}, \overset{2}{b})$, (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)

6 verschiedene Tupel $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Permutationen $\pi : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ bijektiv

π	1	2	3	4	...	n
	i_1	i_2	i_3	i_4	...	i_n

$\{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$\pi(j) = i_j$

$\underline{n!}$

(12)

Begründung: # verschiedene ~~geordnete~~ (geordnete) Tupel

$(\_,\_,\_,\_,\_,\dots,\_)$

1-Stelle: n Möglichkeiten

2-Stelle: $(n-1)$ Möglichkeiten für jede dieser n Möglichkeiten

3-Stelle: $(n-2)$ Möglichkeiten für jede der $n(n-1)$ vielen Möglichkeiten

$\Rightarrow$ $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ viele verschiedene n-Tupel

kombinatorische Argumentation