Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 11. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int x^2 \sin x dx$,
(ii) $\int \cos^5 x \sin x dx$,
(iii) $\int \frac{1}{x^2-2x+1} dx$,
(iv) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$,
(v) $\int x \sin(x^2) dx$,

Lösung:

(i) $\int x^2 \sin x dx$: Wir führen eine partielle Integration durch. Dazu setzen wir $f(x) = x^2$ mit $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \sin x$ mit $g(x) = -\cos x$. Wir erhalten
$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.$$
Eine erneute partielle Integration mit $f(x) = 2x$ und $g'(x) = \cos x$ liefert
$$\int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx$$
und somit
$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

(ii) $\int \cos^5 x \sin x dx$: Wir substituieren $t = \cos x$. Mit $dt = -\sin x dx$ erhalten wir
$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\int t^5 dt = -\frac{1}{6} t^6.$$
Resubstution liefert dann
$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\frac{1}{6} (\cos x)^6.$$

(iii) $\int \frac{1}{x^2-2x+1} dx$: Es ist
$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Wir substituieren nun $t = x-1$ und erhalten

$$\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} \underset{\text{Resubst.}}{=} -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$$

(iv) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$: Es ist

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right). \end{aligned}$$

Wir wissen aus einer alten Aufgabe, dass $\arctan' x = \frac{1}{x^2+1}$ ist, also ist $\arctan x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$. Wir substituieren nun $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mit $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}dx \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}dx \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{(t^2+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t \\ &\underset{\text{Resubst.}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

(v) $\int x\sin(x^2)dx$: Wir substituieren $t = x^2$.

$$\int x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t \underset{\text{Resubst.}}{=} -\frac{1}{2}\cos x^2.$$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Lösung an.

(i) $y' = xy^2$ mit $y(1) = 1$,
(ii) $y' = e^y\cos x$ mit $y(0) = 0$,
(iii) $xy'+y = 2x\cos(x^2)$ mit $y(1) = 1$,
(iv) $(x^2+2)y'-2xy = 3(x^2+2)^2$ mit $y(2) = 1$.

Lösung:

(i) $y' = xy^2$ mit $y(1) = 1$: Wegen $y(1) = 1$ und da y eine stetige Funktion ist, ist $y(x) > 0$ in der Nähe von 1. Wir können die Differentialgleichung also durch $y(x)$ dividieren und erhalten

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x.$$

$-\frac{1}{y(x)}$ ist eine Stammfunktion der linken Seite der Gleichung und $\frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion der rechten Seite. Also existiert eine Konstante C, so dass

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

bzw.

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C}.$$

Mit der Anfangswertbedingung erhalten wir

$$-1 = -\frac{1}{y(1)} = \frac{1}{2} + C,$$

also $C = -\frac{3}{2}$. Es ist also

$$y(x) == \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2}.$$

Ein maximaler zusammenhängender Definitionsbereich D mit $1 \in D$ ist für y gegeben durch $D =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

(ii) $y' = e^y \cos x$ mit $y(0) = 0$: Da $e^y > 0$ ist, können wir die Gleichung hierdurch dividieren und erhalten

$$\frac{y'}{e^y} = \cos x.$$

Es gibt also ein C, so dass

$$-e^{-y(x)} = \int \frac{y'(x)}{e^{y(x)}} dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Aufgrund der Anfangswertbedingung $y(0) = 0$ muss gelten

$$-1 = -e^{-y(0)} = \sin 0 + C = C.$$

Wir haben also

$$y(x) = -\log(1 - \sin x).$$

$y(x)$ ist überall da definiert, wo $\sin x \neq 1$ ist. Ein zusammenhängender Definitionsbereich um 0 ist gegeben durch $D :=]-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}[$.

(iii) $xy' + y = 2x\cos(x^2)$ mit $y(1) = 1$:

1. Lösungweg: Ohne Variation der Konstanten.

Es ist

$$(xy(x))' = xy'(x) + y(x).$$

$xy(x)$ ist also eine Stammfunktion der linken Seite der Differentialgleichung und somit haben wir

$$xy = \int 2x\cos(x^2)dx \underset{\text{Subst.}:t=x^2}{=} \int \cos t dt = \sin t + C \underset{\text{Resub.}}{=} \sin(x^2) + C.$$

Aus der Anfangswertbedingung gewinnen wir

$$1 = 1 \cdot y(1) = \sin(1) + C,$$

also $C = 1 - \sin 1$ und

$$y(x) = \frac{\sin(x^2) + 1 - \sin 1}{x},$$

was für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist.

2. Lösungsweg: Variation der Konstanten

Wenn wir die Differentialgleichung durch x dividieren, erhalten wir eine lineare Differentialgleichung in der Form, wie sie in der Vorlesung behandelt worden ist:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 2\cos(x^2).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. $y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$ ist gegeben durch

$$y_h(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x + C} = \frac{K}{x}.$$

Als Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählen wir

$$y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Laut Vorlesung ist dann

$$\begin{aligned} K(x) &= \int 2\cos(x^2)e^{\log x}dx \\ &= \int 2\cos(x^2)xdx \\ &= \sin(x^2). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet dann

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \sin(x^2)\frac{1}{x} + \frac{K}{x}.$$

Der für unser Anfangswertproblem korrekte Wert für K ergibt sich wieder aus der Anfangswertbedingung.

(iv) $(x^2+2)y' - 2xy = 3(x^2+2)^2$ mit $y(2) = 1$: Da $x^2+2 > 0$ ist, gilt

$$y' - \frac{2x}{x^2+2}y = 3(x^2+2).$$

Dies ist wieder eine lineare Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$y_h(x) = e^{\frac{2x}{x^2+2}dx} = e^{\log(x^2+2)+C} = K(x^2+2).$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y(x) = K(x)(x^2+2)$$

mit

$$\begin{aligned} K(x) &= \int 3(x^2+2)e^{-\log(x^2+2)}dx \\ &= \int 3(x^2+2) \cdot \frac{1}{x^2+2}dx \\ &= \int 3dx = 3x. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = 3x(x^2+2) + K(x^2+2).$$

Aus der Anfangswertbedingung berechnet man $K = -35/6$. Die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 3.
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$, I ein Intervall und $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)(y(x))^\alpha$$

heißt *Bernoullische Differentialgleichung*.

(i) Zeigen Sie: Ist y eine Lösung einer Bernoullischen Differentialgleichung, die sich als

$$y(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

mit einer anderen Funktion u schreiben lässt, so löst u eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)}$$

mit $y(1) = 1$.

Lösung:

(i) Wir nehmen an, dass eine Lösung y von $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)(y(x))^\alpha$ sich als
$$y(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
schreiben lässt. Dann ist
$$y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot u'(x) = \frac{1}{1-\alpha}u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot u'(x).$$
Setzen wir beides für y und y' in die Dgl. ein, so erhalten wir
$$\frac{1}{1-\alpha}u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot u'(x) = p(x)(u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} + q(x)(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$
Ist $u(x) \neq 0$, so dürfen wir durch $(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ dividieren und erhalten
$$\frac{1}{1-\alpha}u'(x) = p(x)(u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + q(x) = p(x)u(x) + q(x)$$
bzw.
$$u'(x) - (1-\alpha)p(x)u(x) = (1-\alpha)q(x).$$
u löst also eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(ii)
$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)}$$
mit $y(1) = 1$: Wir haben also $p(x) = 1/x, q(x) = x, \alpha = -1$. Wir suchen nun nach (i) die Lösung u von
$$u'(x) - 2 \cdot \frac{1}{x}u(x) = 2x.$$
Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch
$$y_h(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = Ke^{2\log x} = Kx^2.$$
Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichungen machen wir den Ansatz (Variation der Konstanten) $y_p(x) = K(x)x^2$ mit
$$\begin{aligned} K(x) &= \int 2xe^{-2\log x}dx \\ &= \int 2x \cdot \frac{1}{x^2}dx \\ &= \int \frac{2}{x}dx = 2\log x. \end{aligned}$$
Also haben wir $u(x) = 2\log x \cdot x^2 + Kx^2$ und
$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\log x \cdot x^2 + Kx^2}.$$
Aus der Anfangswertbedingung ergibt sich $1 = y(1) = \sqrt{K}$, also $K = 1$ und
$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\log x \cdot x^2 + x^2}.$$