

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 7

Die Lösungen müssen bis Mittwoch, den 29.11.2023, um 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Kondition von Funktionen, 2+2=4 Punkte)

Die absolute und die relative Konditionszahl einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ am Punkt x sind definiert durch

$$K_{\text{abs}} := |f'(x)| \quad \text{und} \quad K_{\text{rel}} := \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|.$$

- a) Berechne jeweils die absoluten und relativen Konditionszahlen für die Funktionen $\exp(x)$ und $\ln(x)$. Für welche x sind diese Funktionen jeweils schlecht konditioniert?
- b) Beweise, dass für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die absolute Konditionszahl der Verkettung $f(g(x))$ sich als Produkt der absoluten Konditionszahlen von f und g berechnet. Zeige die analoge Aussage für die relativen Konditionszahlen.

Hinweis: Wenn man die Kondition von $f(g(x))$ am Punkt x betrachtet heißt das, dass man die Kondition von f am Punkt $g(x)$ verwenden muss.

Aufgabe 2 (IEEE Fließkommazahlen, 2+2=4 Punkte)

Wir betrachten Fließkommazahlen gemäß IEEE Standard.

- a) Seien $x, y > 0$ zwei aufeinander folgende Zahlen mit einfacher Genauigkeit. Wie viele Zahlen z mit doppelter Genauigkeit und $x \leq z < y$ gibt es?
- b) Was ist die kleinste natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$, die nicht ohne Rundungsfehler mit einfacher Genauigkeit darstellbar ist?

Hinweis: Bei einfacher Genauigkeit hat die Mantisse 24 bit, bei doppelter Genauigkeit sind es 53 bit.

Aufgabe 3 (Kondition der Normalengleichung, 4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ eine Matrix mit vollem Rang. Wir betrachten die Matrix $B := A^*A$ aus der Normalengleichung. Zeige

$$K_2(B) = (K_2(A))^2.$$

Dabei bezeichnet K_2 die Kondition der Matrizen bezüglich der 2-Norm. Was bedeutet das für die Lösung linearer Ausgleichsprobleme anhand der Normalengleichung?

Hinweis: Verwende die Formel zur Berechnung der Matrixkondition anhand der Singulärwertzerlegung (Bemerkung 5.3 im Skript). Lassen sich aus der Singulärwertzerlegung von A Eigenschaften der Singulärwertzerlegung von B ableiten?

Aufgabe 4 (Tikhonov-Regularisierung, 4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ eine Matrix mit vollem Rang. Sei $\lambda > 0$ und

$$T := \begin{pmatrix} A \\ \lambda \cdot I \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times n}$$

wobei $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Sei σ_1 der größte Singulärwert von A und σ_n der kleinste, d.h. $K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$. Zeige:

$$K_2(T) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \lambda^2}{\sigma_n^2 + \lambda^2}}.$$

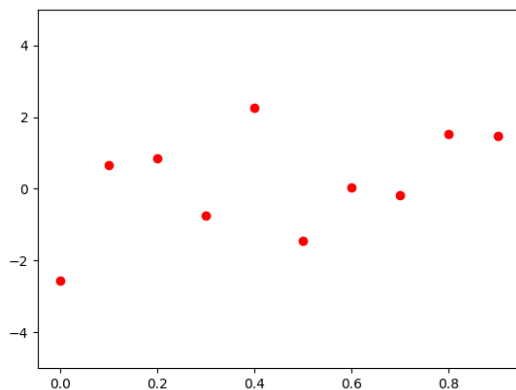
Hinweis: Konstruiere aus der Singulärwertzerlegung von A eine Singulärwertzerlegung von T^*T . Das Ergebnis der vorigen Aufgabe darf ohne Beweis genutzt werden.

Bonusaufgabe 5 (Least Squares mit Tikhonov-Regularisierung, 2 Punkte)

Gegeben seien die Datenpunkte:

$$x = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$$

$$y = [-2.553, 0.6536, 0.8644, -0.7422, 2.2698, -1.4544, 0.0458, -0.1872, 1.5328, 1.4694]$$



Implementiere in einem Jupyter-Notebook:

- Stelle die Least-Squares Matrix $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ (siehe Skript Kapitel 2.1 und Übungsblatt 3) auf und löse nach den Koeffizienten $a \in \mathbb{R}^{10}$ für ein Polynom 9. Grades, das die Daten exakt interpoliert. Hierbei soll die Normalengleichung verwendet werden und `np.linalg.solve` darf benutzt werden.
- Stelle die regularisierte Matrix $T_\lambda = \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 20}$ auf und löse nach den Koeffizienten $t \in \mathbb{R}^{10}$ für verschiedene Werte von λ .
- Plote die Funktionen $f(x) = \sum_i a_i x^i$ und $g_\lambda(x) = \sum_i t_i x^i$ auf `x=np.arange(0.0, 1.0, 0.01)`. Verwende `plt.ylim` um die Skalierung des Plots fest zu definieren, wenn sehr große oder sehr kleine Werte auftreten.
- Wie verhalten die zwei Polynome sich im Definitionsbereich? Was passiert außerhalb des Definitionsbereichs? Welcher Wert ist eine gute Wahl für λ ?