Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

7. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 22.-26.5.

Wegen des Dies Academicus fallen am Mittwoch, den 24.5., die Vorlesung und die Übungen aus. Die Teilnehmer*innen dieser Gruppen mögen bitte eine der anderen Gruppen besuchen. Bitte gehen Sie nicht alle zu der Übungsgruppe montags 10-12 Uhr, sondern nutzen Sie auch späte Übungsgruppen und die Freitagsgruppen etc.

Thema: Funktionenfolgen

Videos: Video-09-Funktionenfolgen

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P0.
Es sei $I \subset \mathbb{R}$. Es seien (f_n) eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:
Gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge (x_n) in I, so dass $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ für unendlich viele n gilt, so kann (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergieren.

Aufgabe P1.
Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

- **(i)** Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
- **(ii)** Gegen welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise?
- **(iii)** Konvergieren die f_n auch gleichmäßig gegen f?

Aufgabe P2.
Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

- **(i)** Gegen welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise?
- **(ii)** Zeigen Sie, dass (f_n) auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

(iii) Es sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert, wenn wir den Definitionsbereich der Funktionen auf die Menge $\{x \in \mathbb{R} | |x| \leq q\}$ einschränken.

(iv) Es sei $q > 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert, wenn wir den Definitionsbereich der Funktionen auf die Menge $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq q\}$ einschränken.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind wegen der Pfingstpause erst in den Übungsstunden der übernächsten Woche, also zwischen dem 5.6. und dem 9.6., abzugeben.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n), die durch

$$f_n(x) := \frac{1}{1 + nx}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ definiert ist, punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(ii) Zeigen Sie weiter, dass die Funktionenfolge (f_n) aus Teil (i) auf $\mathbb{R}_+$ aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.
Tipp: Finden Sie eine geeignete Folge (x_n) und wenden Sie Aufgabe P0 dieses Arbeitsblatts an.

(iii) Geben Sie (mit Beweis) eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}_+$ an, so dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, wenn wir den Definitionsbereich der Funktionen auf die Menge D einschränken.

Diese Woche gibt es ausnahmsweise einmal vier schriftliche Aufgaben. Für die Zulassung genügen aber wie bei allen anderen Arbeitsblättern 5 Punkte.

Aufgabe 2.

(i) Finden Sie eine reelle Zahlenfolge (a_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0,$$

die keine Cauchy-Folge ist.

(ii) Zeigen Sie: Ist $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta^n |a_2 - a_1|.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

(iii) Zeigen Sie: Ist $0 < \theta < 1$ und (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit
$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge.
Tipp: Um die Cauchy-Eigenschaft der Folge (a_n) zu beweisen, betrachte man $|a_{n+m} - a_n|$ für natürliche Zahlen n, m und versuche diesen nach oben abzuschätzen. Dabei sind Aufgabenteil (ii) und die geometrische Reihe nützlich.

Aufgabe 3.

(i) Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig auf* D, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$
Zeigen Sie, dass jede Funktion f, die Lipschitz-stetig auf D ist, dort auch stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jede stetige Selbstabbildung eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ einen Fixpunkt besitzt, d. h. zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

Hinweise:

- Die beiden Teile sind unabhängig voneinander.
- Tipp zu (ii): Zwischenwertsatz.

Aufgabe 4.

(i) Zeigen Sie: Jede kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[a, b]$ in sich besitzt genau einen Fixpunkt, d. h. ist $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Funktion derart, dass es eine Konstante $0 < \theta < 1$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \theta\,|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$ gibt, so existiert genau ein $x_0 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) = x_0$ ist.
Tipp: Beide Teile der Aufgabe 3 sind hilfreich.

(ii) Zeigen Sie, dass man diesen Fixpunkt durch folgendes Iterationsverfahren berechnen kann: Wähle ein $a_0 \in [a, b]$ beliebig und bilde dann die Folge (a_n) durch $a_n := f(a_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) konvergiert dann gegen x_0.
Tipp: Aufgabe 2

Bemerkung: Anwendungen dieses Fixpunktsatzes werden wir später behandeln.