

Übungszettel 1

Aufgabe 1: Summen- und Produktschreibweise

Schreiben Sie in Summen- bzw. Produktschreibweise

- a) Die Summe der Zahlen von 1 bis 10
- b) Das Produkt der Zahlen von 1 bis 10
- c) Die Summe der ersten n ungeraden ganzen Zahlen (startend bei 1)
- d) Die Summe der ersten 10 Quadratzahlen (startend bei 1)
- e) Sei n eine natürliche Zahl (inklusive Null), dann ist die Fakultätsfunktion wie folgt definiert:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Schreiben Sie $n!$ in Produktschreibweise.

- f) Die Summe der negativen Zahlen von -1 bis -11
- g) Das Produkt der Folge $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots, n$
- h) ★ Die Eulersche Zahl $e := 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$

Tipp: schauen Sie auf Teilaufgabe e).

- i) ★ Es sei eine Folge x_i mit n Gliedern gegeben. Geben Sie das arithmetische Mittel \bar{x} der Folge an.

Aufgabe 2: Potenzen

- a) Wenden Sie die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

i) $3^2 \cdot 3^1$

iv) $(7^7)^7$

ii) $4^2 \cdot 4^9 \cdot 4^{-12}$

v) $\frac{9^2}{9^{-3}} / 3^5$

iii) $4^8 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 5^9$

vi) $\frac{\frac{26^2}{13^{-3}}}{13^3}$

- b) Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

i) a^3 / a^6

v) $x^{-n} \cdot x$

ii) $2x^{-2} \cdot 3x^3$

vi) $0.5x^2 + 1.5x^3$

iii) $10^{-12} / 10^{-3}$

vii) $\left(\frac{x^3 y^{-4}}{y^{-5} y^2} \right)^{-2}$

iv) $6/2^3 - 9 \cdot 3^{-2}$

viii) $(2x^3)^2$

- c) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit ganzzahligen Exponenten so weit wie möglich:

- i) $(z^{2k-5}/z^3)/z^k$ v) $\left(\frac{2a^{-1}b^2}{3ac^{-2}}\right)^{-3}$
 ii) $90 \cdot 3^{n-2} - 3^n$ vi) $\left(\frac{u}{v}\right)^n \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^{3n+4} / \left(\frac{-v}{u}\right)^{2n+1}$
 iii) $\left(\left(\frac{x}{4}\right)^3\right)^5 / \left(\frac{x}{2}\right)^6$ vii) $\frac{x^5+1}{x^{m+2}} - \frac{2x^2-2}{x^m} + \frac{2-x}{x^{m-2}}$
 iv) $\frac{(3a-1)^{2k-1}}{(1-3a)^{2k+1}}$ viii) $\left(\frac{z-3}{z+5}\right)^{2p+1} \cdot \left(\frac{5+z}{z-3}\right)^{p+1} / \left(\frac{z-3}{z+5}\right)^{4p}$

Aufgabe 3: Wurzeln & Logarithmen

a) Seien alle Variablen $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

- i) $\sqrt[4]{16^3}$ vii) $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
 ii) $\frac{x^{\frac{7}{9}} \cdot x^{\frac{2}{18}}}{x^{\frac{3}{9}} \cdot x^{\frac{5}{9}}}$ viii) $\sqrt{2v^2 - v\sqrt{6v^2 - (v\sqrt{2})^2}}$
 iii) $\sqrt[4]{a^8 b^0 c^4}^2$ ix) $\sqrt[5]{\sqrt[2]{32}}$
 iv) $12b^2c \cdot \sqrt{\frac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac}$ x) $\sqrt[3]{\frac{x^8}{y^7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^5}}$
 v) $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{b^2a}$ xi) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}$
 vi) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ xii) $(u-v) \cdot \sqrt{1 + \frac{4uv}{(u-v)^2}}$

b) Ersetzen Sie die folgenden Terme durch einen einzigen Logarithmus:

- i) $2\log(u) + \frac{1}{2}(\log(u+v) + \log(u-v))$ iii) $\log(ab) + \log\left(\frac{a}{b}\right) - \log((ab)^2)$
 ii) $(n+1) \cdot \log(x) - \frac{1}{3} \cdot \log(x^{6n})$

c) Gesucht ist die Basis b :

- i) $\log_b 2 = 0$ iii) $\log_b\left(\frac{1}{25}\right) = 2$
 ii) $\log_b 5 = 0.5$

d) Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach x auf:

- i) $2^x = 8$ iii) $10^{x^2} = 100$
 ii) $7^{2x} = 2$

Aufgabe 4: Logarithmus und Exponentialfunktion

Die Universität hat Sie mit einem Modell des neuen Taschenrechners Logimat-2 ausgestattet. Er hat die Tasten 0–9, einen Dezimalpunkt, Plus und Minus, eine Taste für den Logarithmus zur Basis e (\ln) und eine für die Exponentialfunktion zur Basis e (\exp). Tasten für Multiplikation und Division, sowie zum Wurzelziehen fehlen aber (Sparzwang: 16 Tasten mussten reichen!) Geben Sie an, wie Sie folgende Aufgaben trotzdem lösen können, wenn $a, b \in \mathbb{R}$ sind:

- | | |
|----------------|------------------------------|
| a) $a \cdot b$ | e) $\log_{10}(2^a)$ |
| b) $1/a$ | f) 10^a |
| c) $a^{2.5}$ | |
| d) \sqrt{a} | g) $\star 2^{1234}/10^{345}$ |

Falls vorhanden: überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Einsetzen von Werten für a und b und einem (Taschen-)Rechner. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 5: Polynomdivision

Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus (Sie können sich aussuchen ob mit Polynomdivision oder Horner Schema):

- a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$ Gefundene Nullstelle: $x_1 = -3$
- b) $(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63)$ Gefundene Nullstelle: $x_1 = -3$
- c) $(x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{23}{4}x + \frac{3}{2})$ Gefundene Nullstelle: $x_1 = -2$
- d) $(2x^3 - 14x - 12)/(x + 2)$ Gefundene Nullstelle: $x_1 = -2$
- e) $(x^5 - 2x^4 - 9x^2 - 14x + 4)/(x^2 - 2x - 4)$

Aufgabe 6: Rätsel des Tages:

Ludwig hat in seinem Keller ein kleines Schwimmbecken, welches über drei verschiedene Leitungen befüllt werden kann. Die drei Leitungen sind unterschiedlich dick, daher dauert es unterschiedlich lange, das Becken zu füllen. Öffnet man nur Leitung A, so dauert es drei Stunden, bis das Becken voll ist. Leitung B benötigt alleine 4 Stunden und Leitung C sogar 6 Stunden. Wie viele Minuten dauert das Befüllen des Beckens, wenn man alle drei Leitungen gleichzeitig öffnet?