Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

11 Bayessche Netze

Struktur, Semantik, Konstruktion, Inferenz

Volker Steinhage

Inhalt

- Motivation
- Bayessche Netze
- Bayessche Netze und Verbundwahrscheinlichkeitsverteilungen
- Bayessche Netze und bedingte Unabhängigkeiten
- Konstruktion von Bayesschen Netzen
- Inferenz in Bayesschen Netzen
- Exakte und approximative Inferenz

Motivation (1)

Die Verteilung der *Verbundwahrscheinlichkeiten*

	zahnschmerzen		¬ zahnschmerzen	
	verfangen	¬verfangen	verfangen	¬verfangen
loch	0.108	0.012	0.072	0.008
¬loch	0.016	0.064	0.144	0.576

- erlaubt die Beantwortung aller Anfragen an die Domäne bzgl. unbedingter und bedingter W‘keiten, indem die Anfragen als Disjunktion über den atomaren Ereignissen formuliert und die entspr. W‘keiten aufaddiert werden

- wächst aber exponentiell in der Zahl der Zufallsvariablen und ist bzgl. der Erfassung der Verbundwahrscheinlichkeiten nicht naheliegend und einfach

Die Bayessche Regel mit der Annahme von absoluten und bedingten Unabhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen erlaubte bereits eine effiziente Reduzierung der zur Anfragebeantwortung erforderlichen unbedingten und bedingten Wahrscheinlichkeiten

Motivation (2)

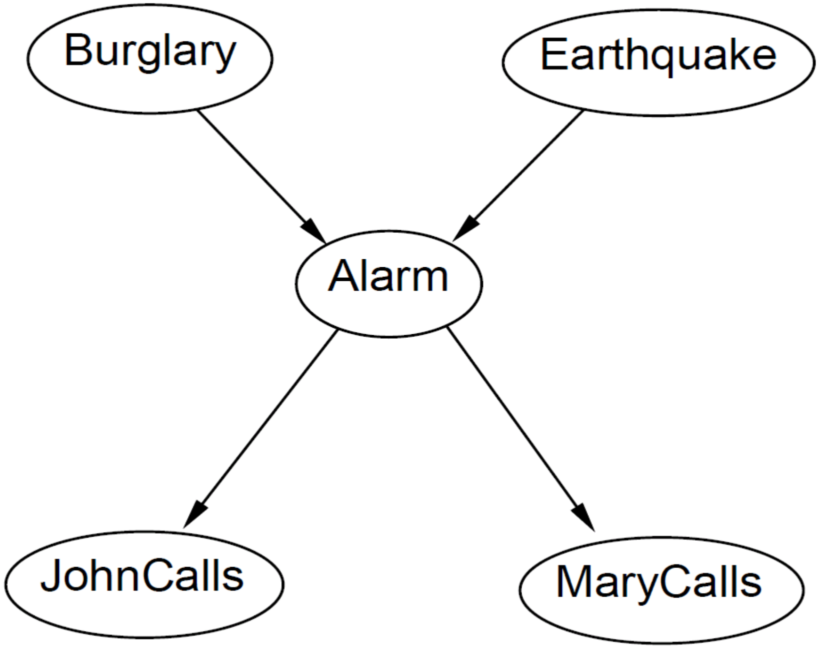
Bayessche Netze sind eine Repräsentationsform

- der Verteilung der Verbundwahrscheinlichkeiten
- zur Darstellung von Unabhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen und erlauben so die effiziente Durchführung von Inferenz

Beispiel von Juda Pearl

- Ihr Haus hat eine Einbruchsicherung (*Alarm*), die auf Einbrüche (*Burglary*), aber auch schon auf leichte Erdbeben* (*Earthquake*) reagiert

- Die Nachbarn John und Mary sagen zu, Sie bei Alarm im Büro anzurufen (*JohnCalls* bzw. *MaryCalls*)



- John verwechselt manchmal das Telefonläuten mit Alarm und ruft dann auch an

- Mary hört manchmal laute Musik und überhört dann den Alarm

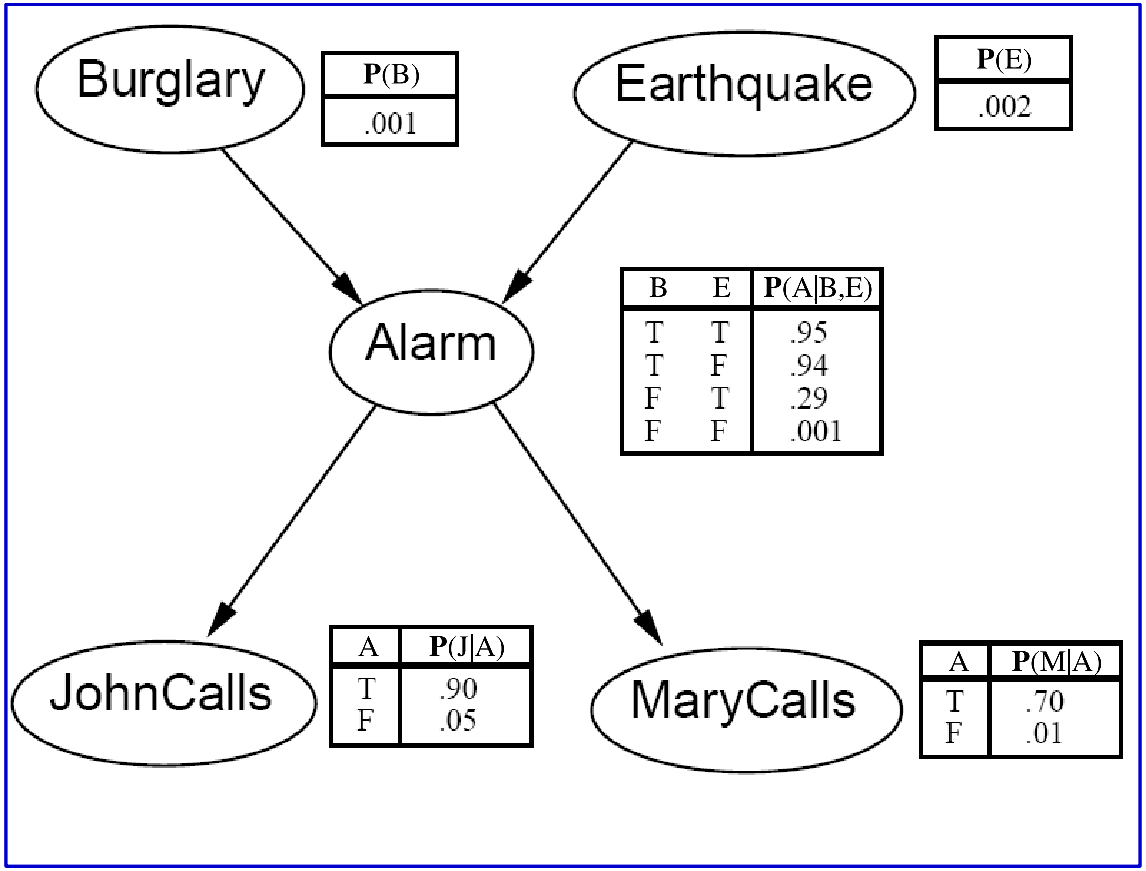
* Juda Pearl lebt und lehrt in Los Angeles

Struktur von Bayesschen Netzen*

1) Knoten: *Zufallsvariablen*

2) Gerichtete Kanten zwischen Knoten: *direkte* Einflüsse bzw. Abhängigkeiten

3) Zu jedem Knoten gibt es eine Tabelle von bedingten W‘keiten (*Conditional Probability Table, CPT*),die den Effekt der Elternknoten auf den Knoten quantifiziert



4) Der Graph ist azyklisch; also ein DAG

* auch *belief networks, probabilistic networks, causal networks*

Semantik von Bayesschen Netzen

Zwei Zugänge zum Verständnis von Bayesschen Netzen (BN):

1. BN repräsentiert die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen

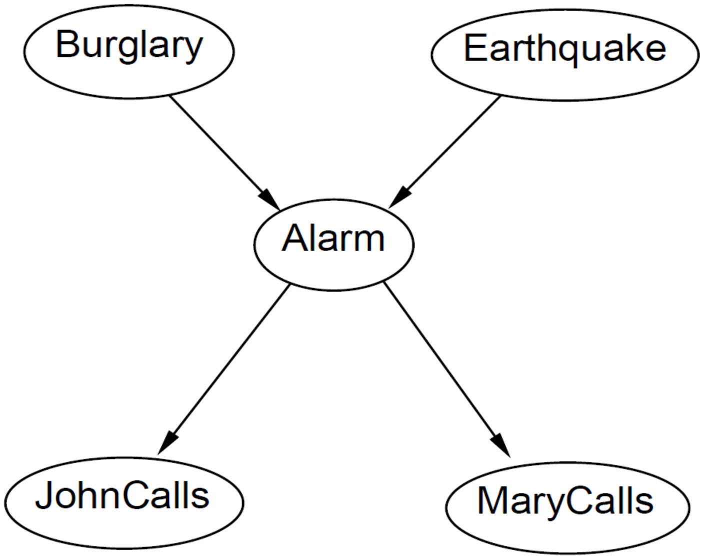
   $\leadsto$ Geeignete Sichtweise für die Konstruktion des BNs

2. BN kodiert eine Menge von Unabhängigkeitsannahmen

   $\leadsto$ Geeignete Sichtweise zur Konstruktion von Inferenzen

Kodierung von Unabhängigkeitsannahmen in Bayesschen Netzen

- Allgemein: BNs repräsentieren *vollständig* die Abhängigkeiten von direkten Elternknoten



- am Beispiel:
  - *Alarm* hängt *nur* von *Burglary* und *Earthquake* ab
  - *MaryCalls* hängt *nur* von *Alarm* ab

    $\rightsquigarrow$ *MaryCalls* ist also unabhängig von *JohnCalls*, *Earthquake* und *Burglary*:

    $\mathbf{P}(\mathit{MarryCalls}|\mathit{JohnCalls}, \mathit{Alarm}, \mathit{Earthquake}, \mathit{Burglary}) = \mathbf{P}(\mathit{MaryCalls}|\mathit{Alarm})$

$\rightsquigarrow$ Bayessche Netze kodieren damit also auch Unabhängigkeitsannahmen

Bayessche Netze und Verbundwahrscheinlichkeit

Ein BN ist eine kompakte Repräsentation einer Verbundw‘keitsverteilung:

Jedes atomare Ereignis der Verteilung ist eine Konjunktion einer bestimmten Wertebelegung $P(X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n)$, abgekürzt: $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Für jedes atomare Ereignis gilt nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} \boxed{P(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad P(x_n \mid x_{n-1},\ldots,x_1)\cdot\ldots\cdot P(x_2 \mid x_1)P(x_1)} \\ = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid x_{i-1},\ldots,x_1). \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeitsannahmen ist dies äquivalent zu:

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid parents(X_i)).$$

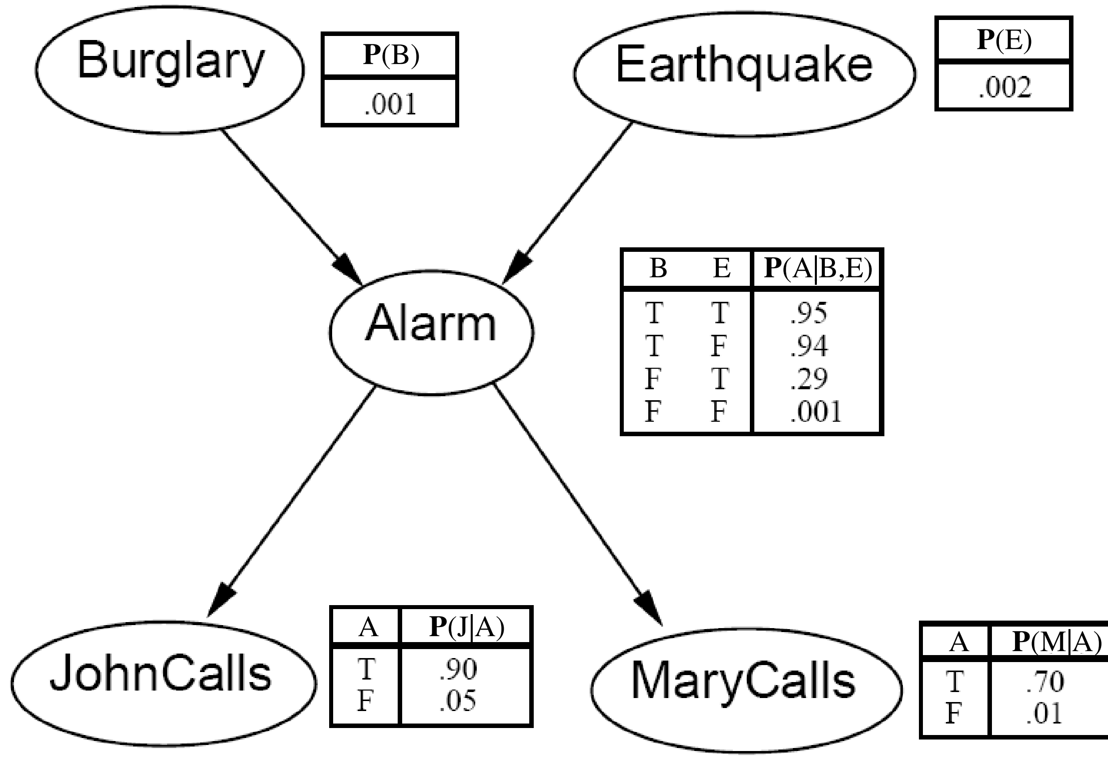
→ aus Netztopologie und CPTs sind alle Verbundw‘keiten ableitbar

Beispiel für Berechnung eines atomaren Ereignisses

- W'keiten für negative Ereignisse ergeben sich als

$$P(\neg x) = 1 - P(x).$$

- W'keiten für atomare Ereignisse ergeben sich durch Faktorisierung über die Produktregel:



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	**P**(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	**P**(J|A)
T	.90
F	.05

A	**P**(M|A)
T	.70
F	.01

$$
\begin{aligned}
P(j, m, a, \neg b, \neg e) &= P(j \mid a) \cdot P(m \mid a) \cdot P(a \mid \neg b, \neg e) \cdot P(\neg b) \cdot \mathrm{P}(\neg e) \\
&= 0.9 \cdot 0.7 \cdot 0.001 \cdot 0.999 \cdot 0.998 \\
&= 0.00062
\end{aligned}
$$

Kompaktheit Bayesscher Netze

- Zur expliziten Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung brauchen wir eine Tabelle der Größe 2^n bei n Booleschen Variablen

- Falls in einem BN mit n Knoten jeder Knoten maximal k Eltern hat, brauchen wir nur n Tabellen der Größe 2^k bei booleschen Variablen

Beispiel: $n = 20$ und $k = 5$

$\rightarrow$ $2^n = 2^{20} = 1.048.576$ vs. $n \cdot 2^k = 20 \cdot 2^5 = 640$

$\rightarrow$ Im ungünstigsten Fall kann natürlich auch ein BN exponentiell groß werden (wenn jede Variable von jeder anderen direkt beeinflusst wird)

$\rightarrow$ Abhängigkeit von der *Strukturiertheit* der Anwendungsdomäne (lokale vs. globale Interaktion) und dem Geschick des Designs

Entwurf eines Bayesschen Netzes (1)

1. Wähle Menge von relevanten Variablen, welche die Domäne beschreiben
2. Ordne alle Variablen
3. Nimm erste Variable in der Liste
4. Gib alle direkten Einflüsse von Knoten, die schon im Netz sind, auf den Knoten für diese Variabele an: Kanten + CPT
5. Streiche die Variable aus der Liste
6. Solange Liste nicht leer: gehe zu Schritt 3

Frage: Welche Ordnung der Liste ist geeignet?

Beispiel (1)

Ordnung: *MaryCalls, JohnCalls, Alarm, Burglary, Earthquake*

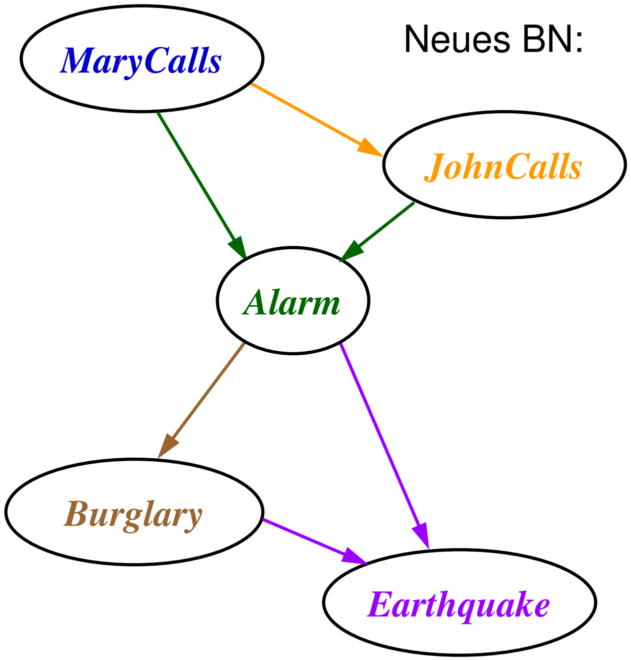
1) Wähle *MarryCalls*: ↝ keine Elternknoten

2) Wähle *JohnCalls*: Bei Evidenz *MaryCalls* sei *JohnCalls* wahrscheinlicher
   - ↝ **P**(*JohnCalls* | *MaryCalls*) ≠ **P**(*JohnCalls*)
   - ↝ *MaryCalls* wird Elternknoten von *JohnCalls*

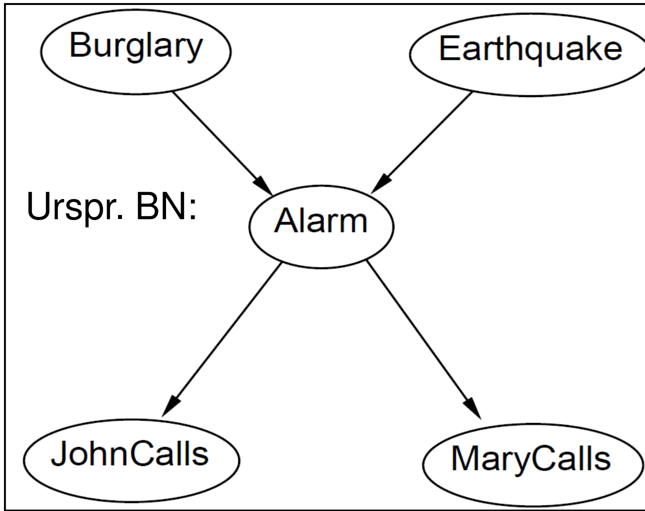
- Wähle *Alarm*: Bei Evidenzen *MaryCalls* und *JohnCalls* sei *Alarm* wahrscheinlicher
   - ↝ *MaryCalls* und *JohnCalls* werden Elternknoten von *Alarm*
- Wähle *Burglary*: Hierfür sei die Evidenz *Alarm* alleine hinreichend
   - ↝ *Alarm* wird Elternknoten von *Burglary*
- Wähle *Earthquake*: Bei alleiniger Evidenz *Alarm* sei *Earthquake* wahrscheinlich; bei gemeinsamer Evidenz *Alarm und Burglary* sei *Earthquake* weniger wahrscheinlich
   - ↝ *Burglary* und *Alarm* werden Elternknoten von *Earthquake*

> - Die Zahl der Abhängigkeiten (Kanten) ist gegenüber dem urspr. Netzentwurf von vier auf sechs um zwei gestiegen
> - Die Zahl der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten ist um drei gestiegen
> - Gravierend ist die Qualität der neuen Abhängigkeiten: Wie soll z.B. **P**(*Earthquake* | *Alarm*, *Burglary*) erfasst werden?

Neues BN:



Urspr. BN:

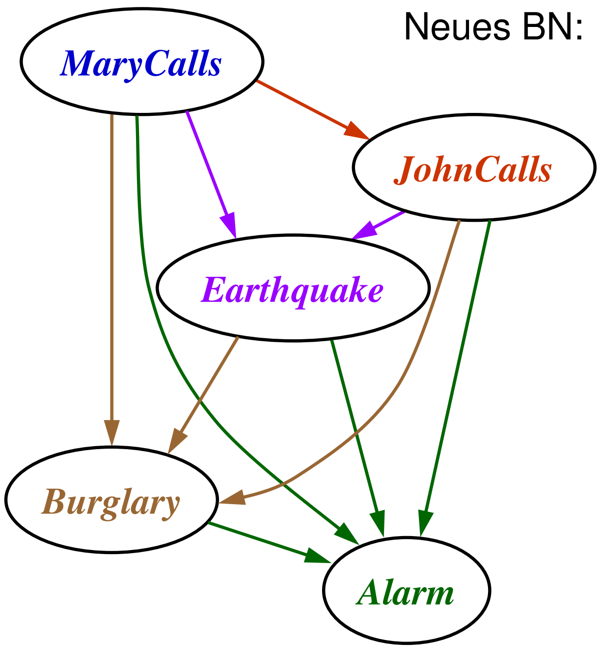


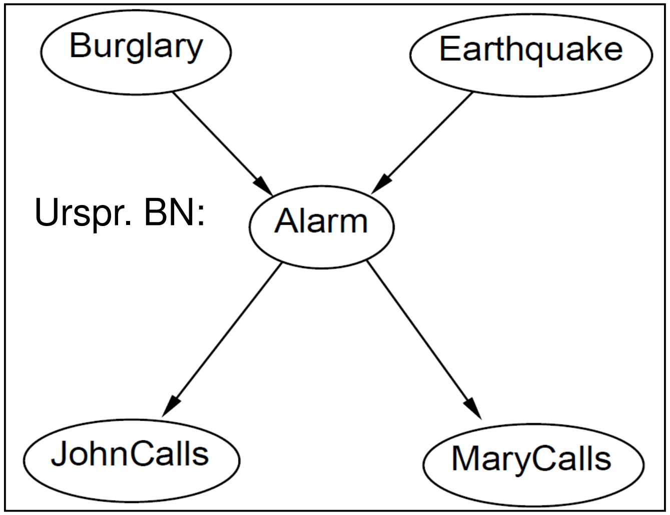
Beispiel (2)

- Ordnung: *MaryCalls, JohnCalls, Eathquake,*

  Burglary, Alarm

- Die Zahl der Abhängigkeiten (Kanten) hat sich gegenüber dem ursprünglichen Netzentwurf mehr als verdoppelt
- Die Zahl der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten ist auf 31 gestiegen und entspricht somit der vollständigen Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung
- Wiederum nur schwer zu erfassende neue Abhängigkeiten





Entwurf eines Bayesschen Netzes (2)

- Der Aufbau eines „*diagnostischen Netzes*“ führt zu Bedingungen von Symptomen zu Ursachen und damit zu neuen Abhängigkeiten zwischen ansonsten unabhängigen Ursachen – und oft auch zwischen unabhängigen Symptomen

- Besser ist der Aufbau eines „kausalen Netzes“:
  - starte mit den grundlegenden Ursachen (*root causes*)
  - erweitere schrittweise jeweils um die direkten Auswirkungen
  - bis zu den Blattknoten, die ohne Auswirkungen auf andere Variable sind

- Bemerkung: alle drei Netze des Beispiels repräsentieren dieselbe Verteilung der Verbundw‘keiten, berücksichtigen jedoch in unterschiedlichem Maße Unabhängigkeiten!

Bayessche Netze und Graphische Modelle

Bayessche Netze zählen zu den sogenannten *Graphischen Modellen*:

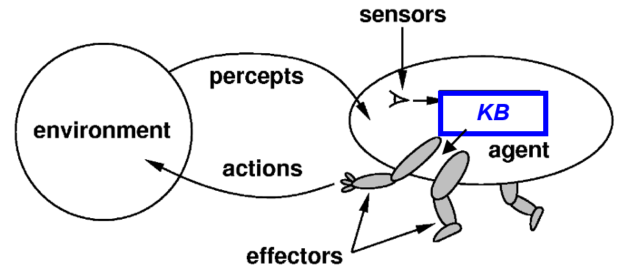
- Graphische Modelle werden als Kombination von Wahr‘keitstheorie und Graphentheorie betrachtet

- Andere Formen von *Graphischen Modellen* sind Markov Random Fields, Conditional Random Fields, Faktorgraphen, u.a.

- Bisher: Betrachtung von BNs zur effizienten Kodierung der Wahr‘keiten

- Jetzt: Betrachtung des operationellen Teils, nämlich die Inferenz in BNs

Inferenz in Bayesschen Netzen

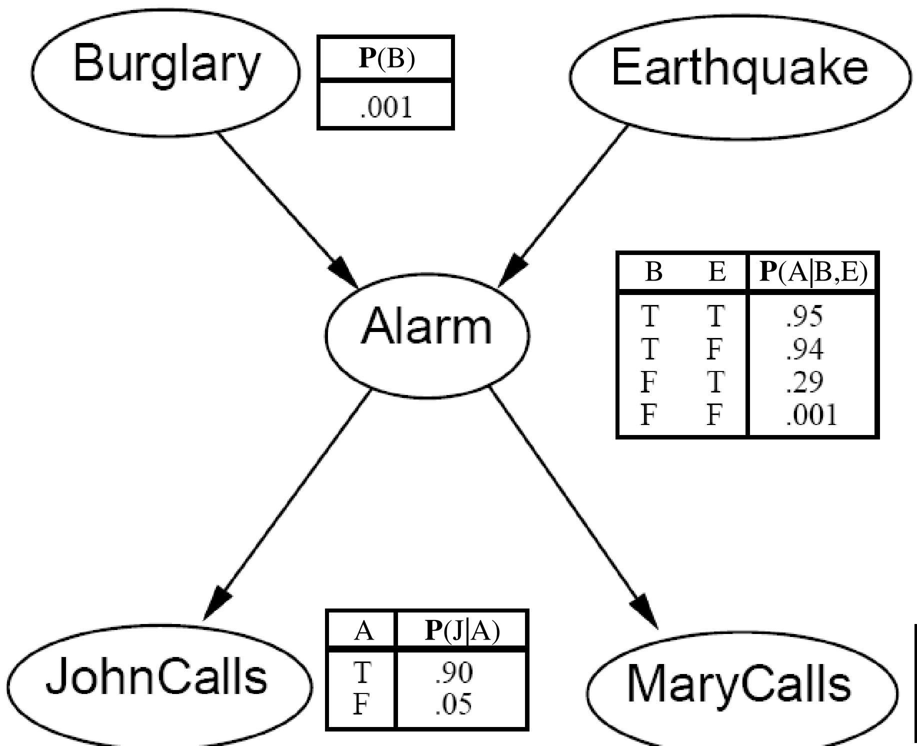


Probabilistische Inferenz:

Gegeben: Instanziierte Evidenzvariablen

Gesucht: Wahrscheinlichkeitsverteilung von Anfragevariablen:

$$\mathbf{P}(\mathit{Query} \mid \mathit{Evidence})$$



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	**P**(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	**P**(J|A)
T	.90
F	.05

A	**P**(M|A)
T	.70
F	.01

Exakte Inferenz durch Aufzählen (1)

Aufgabe: Anfrage $\mathbf{P}(X|\mathbf{e})$ bei Belegung **e** der Evidenzvariablenmenge **E**

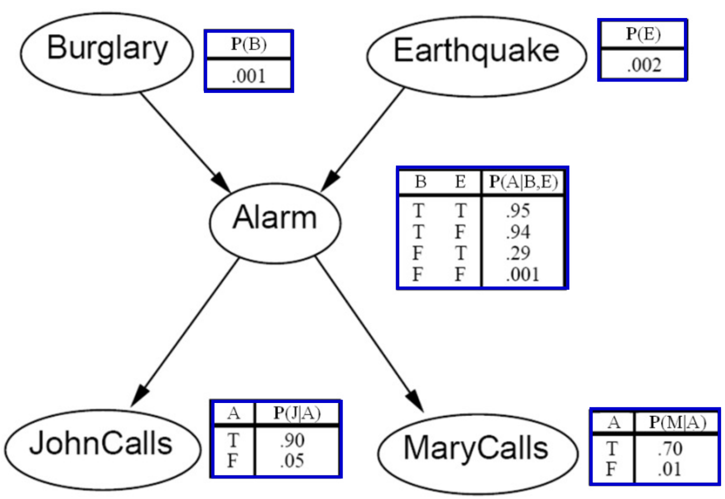
- Aus letzter Vorlesung: Summation der Verbundw‘keiten über der Menge **Y** aller unbeobachteten Variablen:

$$\mathbf{P}(X \mid \mathbf{e}) = \alpha \cdot \mathbf{P}(X, \mathbf{e}) = \alpha \cdot \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$$

- Wegen Unabhängigkeitsannahmen der BNs ist die Anfrage durch die Summierung über Produkten von bedingten Wahr‘keiten im Netz zu beantworten:

$$\boxed{P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid parents(X_i)).}$$

- Die bedingten W‘keiten sind in den CPTs des BNs notiert

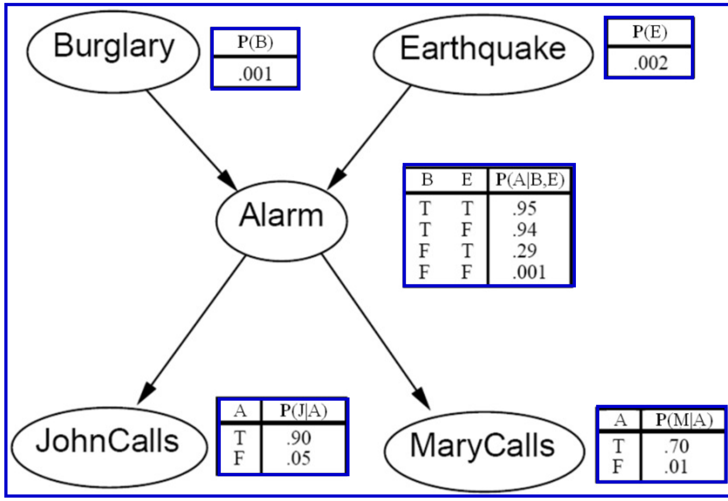


Exakte Inferenz durch Aufzählen (2)

- Eine systematische Methode, unbeobachtete Variablen („hidden variables“) aus der Verbundverteilung heraus zu marginalisieren

- Einfache Anfrage im „Burglary“-Netzwerk sei:

  P(Burglary | JohnCalls = true, MaryCalls = true)?



- Abgekürzt: $\mathbf{P}(B|j,m) = \mathbf{P}(B,j,m) / \mathbf{P}(j,m)$ // per Def.

  $= \alpha \cdot \mathbf{P}(B,j,m)$

  $= \alpha \cdot \Sigma_e \Sigma_a \mathbf{P}(B,e,a,j,m)$

- Faktorisiere die Verbundverteilung als Produkt von CPT-Einträgen:

$$\mathbf{P}(B|j,m) = \alpha \cdot \Sigma_e \Sigma_a \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(e) \cdot \mathbf{P}(a|B,e) \cdot \mathbf{P}(j|a) \cdot \mathbf{P}(m|a)$$

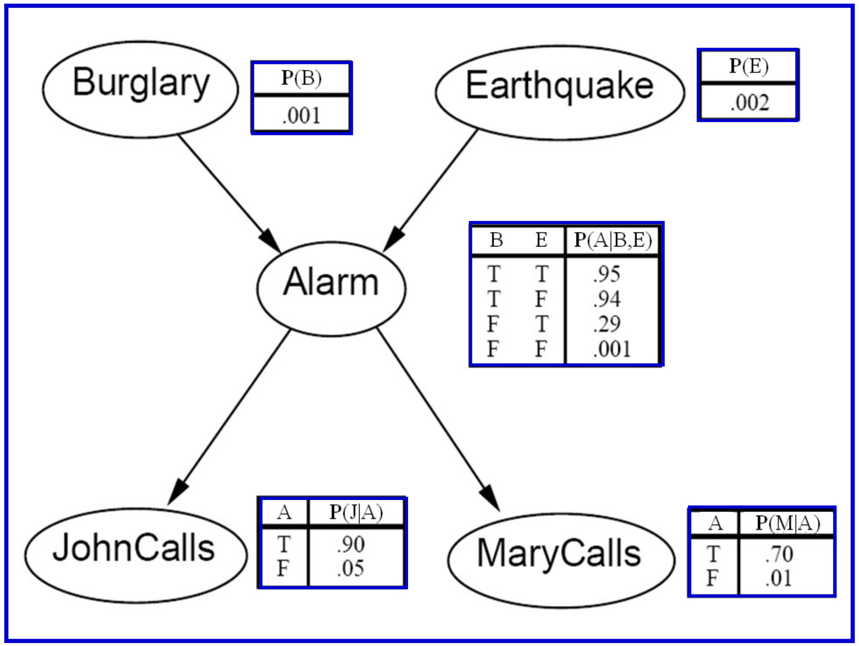
$$= \alpha \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \Sigma_e \mathbf{P}(e) \cdot \Sigma_a \mathbf{P}(a|B,e) \cdot \mathbf{P}(j|a) \cdot \mathbf{P}(m|a)$$

- Rekursive *depth-first*-Aufzählung der Faktoren für *n* Boolesche Variable in $O(n)$ Platz- und $O(2^n)$ Zeitkomplexität

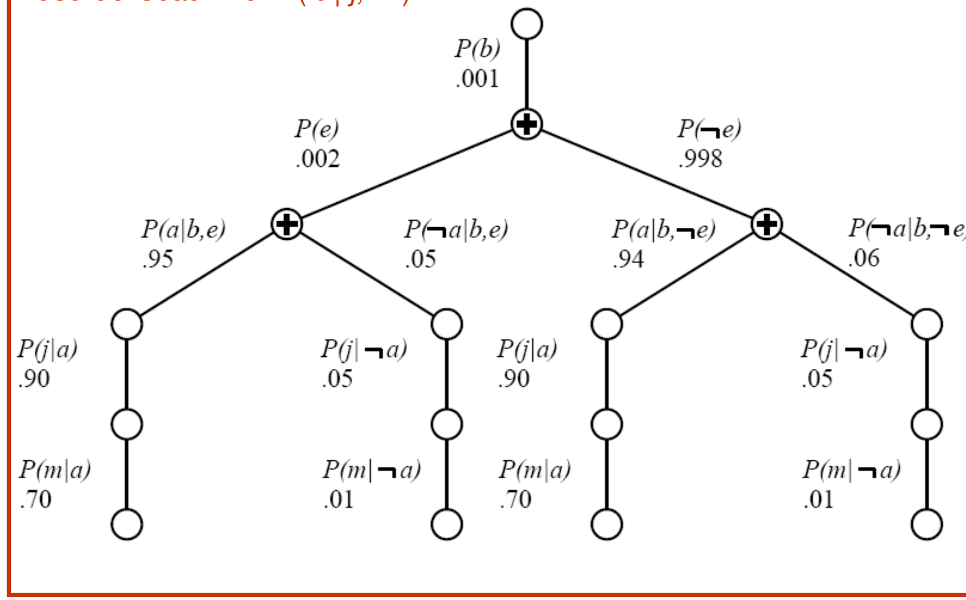
Exakte Inferenz durch Aufzählen (3)

Beispiel: **P**(Burglary | JohnCalls = true, MaryCalls = true)?

↝ $\mathbf{P}(B|j,m) = \alpha \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \Sigma_e \, \mathbf{P}(e) \cdot \Sigma_a \, \mathbf{P}(a|B,e) \cdot \mathbf{P}(j|a) \cdot \mathbf{P}(m|a)$



Ausdrucksbaum für *P*(*b* | *j*, *m*):



- Führt zu $P(b\,|\,j, m) = \alpha \cdot 0.00059224$ und <u>analog</u> $P(\neg b\,|\,j, m) = \alpha \cdot 0.0014919$
- Normierung: $\mathbf{P}(B\,|\,j, m) = \alpha \cdot \langle 0.00059224, 0.0014919 \rangle = \langle 0.284, 0.716 \rangle$

↝ Bei beiden Anrufen besteht die Wahr‘keit von 28,4% für einen Einbruch

Aufzählungsalgorithmus

function ENUMERATION-ASK(X, $\mathbf{e}$, bn) **returns** a distribution over X

inputs: X, the query variable

$\mathbf{e}$, observed values for variables $\mathbf{E}$

bn, a Bayesian network with variables $\{X\} \cup \mathbf{E} \cup \mathbf{Y}$

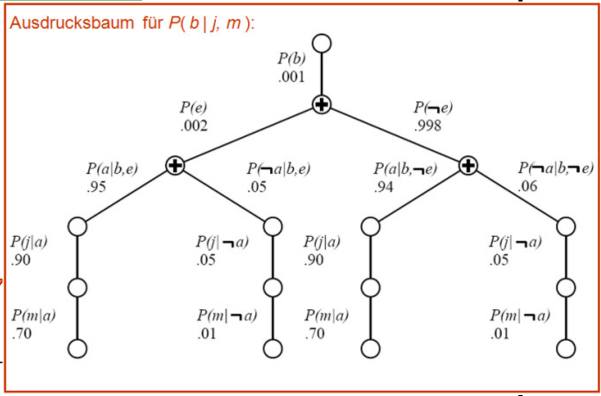
$\mathbf{Q}(X) \leftarrow$ a distribution over X, initially empty

for each value x_i of X **do**

extend $\mathbf{e}$ with value x_i for X

$\mathbf{Q}(x_i) \leftarrow$ ENUMERATE-ALL(VARS[bn], $\mathbf{e}$)

return NORMALIZE($\mathbf{Q}(X)$)



---

function ENUMERATE-ALL($vars$, $\mathbf{e}$) **returns** a real number

if EMPTY?($vars$) **then return** 1.0

$Y \leftarrow$ FIRST($vars$)

if Y has value y in $\mathbf{e}$

then return $P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), $\mathbf{e}$)

else return $\Sigma_y \; P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), $\mathbf{e}_y$)

where $\mathbf{e}_y$ is $\mathbf{e}$ extended with $Y = y$

Pa(Y) für Eltern(Y)

then für Evidenzvariable & Anfragevariable

else für unbeob. Variable

Redundante Berechnungen und Variablenelimination

Erhebliche Beschleunigung durch Vermeidung wiederholter oder unnötiger Berechnungen möglich:

1) Redundante Teilberechnungen sind nur einmal auszuführen und die entspr. Zwischenergebnisse zu speichern. Dazu sind die Ausdrücke von rechts nach links (bzw. im Baum von unten nach oben) auszuwerten.

2) Irrelevant heißt eine Variable V bzgl. einer Anfragevariablen X, wenn gilt: V ist weder Vorfahre der Anfragevariablen X noch Vorfahre einer Evidenzvariablen.

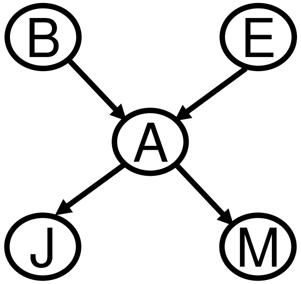
Bspl.: $\mathbf{P}(\mathit{JohnCalls} \mid \mathit{Burglary} = \mathit{true})$

$\mathbf{P}(J \mid b) = \alpha \cdot P(b) \cdot \sum_e P(e) \cdot \sum_a P(a \mid b, e) \cdot P(J \mid a) \cdot \sum_m P(m \mid a)$

$X = \mathit{JohnCalls}$, $\mathbf{E} = \{\mathit{Burglary}\}$

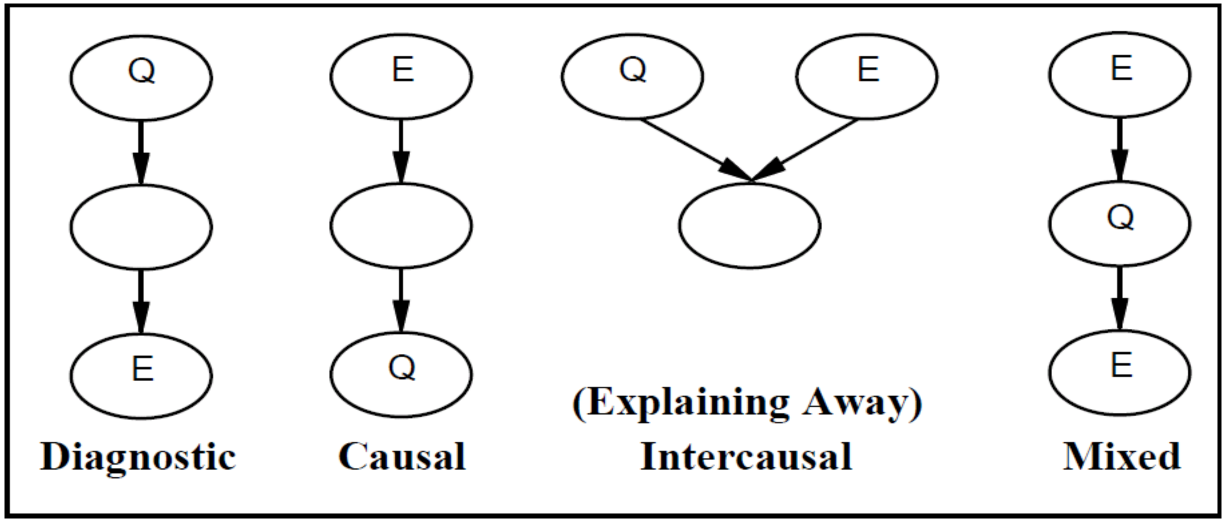
$\mathrm{Ancestors}(\{X\} \cup \mathbf{E}) = \mathrm{Ancestors}(\{J,B\}) = \{\mathit{Alarm}, \mathit{Earthquake}, \mathit{Burglary}\}$

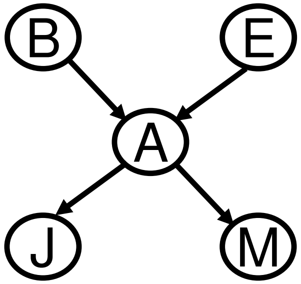
→ *MaryCalls* ist irrelevant



Alle Blattknoten, die für irrelevante Variablen stehen, sind eliminierbar. Nach deren Entfernung gibt es neue Blattknoten, die möglicherweise auch irrelevant sind, …

Typen von Inferenzen





(1) Diagnostisch: Von Effekten zu Ursachen

Bspl.: *P*(*burglary* | *johnCalls*) = 0.016

(2) Kausal: Von Ursachen zu Effekten

P(*johnCalls* | *burglary*) = 0.86

(3) Interkausal: Zwischen Ursachen eines gemeinsamen Effektes

P(*burglary* | *alarm*) = 0.376, aber

P(burglary | *alarm*, *earthquake*) = 0.003 („Explaining away“)

(4) Gemischt: Kombination von (1) – (3)

P(*alarm* | *johnCalls*, ¬*earthquake*) = 0.03

Komplexität der exakten Inferenz

Einfach verbundene Netzwerke (sog. „*Polytrees*“):

- Def.[Polytree]: Unter Vernachlässigung der Kantenrichtung sind jeweils zwei beliebige Knoten des Netzes durch *maximal* einen Pfad verbunden.
- Zeit- und Platzkomplexität *linear* in der Größe des Netzes:
  - mit Größe = Zahl der CPT-Einträge: $O(d^k \cdot n)$ mit n Knoten mit max. d Variablenwerten und max. k Elternknoten
  - Zeit- und Platzkomplexität linear in der Knotenzahl des Netzes
    - bei max. k Elternknoten

Mehrfach verbundene Netze:

- mindestens NP-hart (man kann z.B. 3-SAT leicht nachbilden)
- daher Betrachtung *approximativer* Inferenz

Approximative Inferenz

Idee: *Betrachte BN als Beschreibung eines Zufallsprozesses und führe eine stochast. Simulation des Prozesses durch, um gewünschte W'keiten zu schätzen*

Stochastische Simulation:

1. Ziehe N Beispiele von einer Stichprobenverteilung S
2. Berechne eine *approximative* Wahr'keit $\dot{P}$ auf der Grundlage der Verteilung der relativen Häufigkeiten
3. Zeige, dass diese gegen die wahre gesuchte Wahr'keit P konvergiert

Verfahren, die Wahr'keiten durch eine stochastische Simulation, nämlich das Ziehen von zufällig angeordneten *Stichproben* (*Beispielen, Samples*), abzuschätzen, werden auch als *Monte-Carlo-Methoden* bezeichnet

Stichprobe von einem leeren Netzwerk (1)

Einfachste Sampling-Methode: Erzeugung von Ereignissen, denen *keine Evidenz* zugeordnet ist:

⇝ Sampling aller Variablen in ihrer topologischen Reihenfolge

Keine Evidenz-variablen

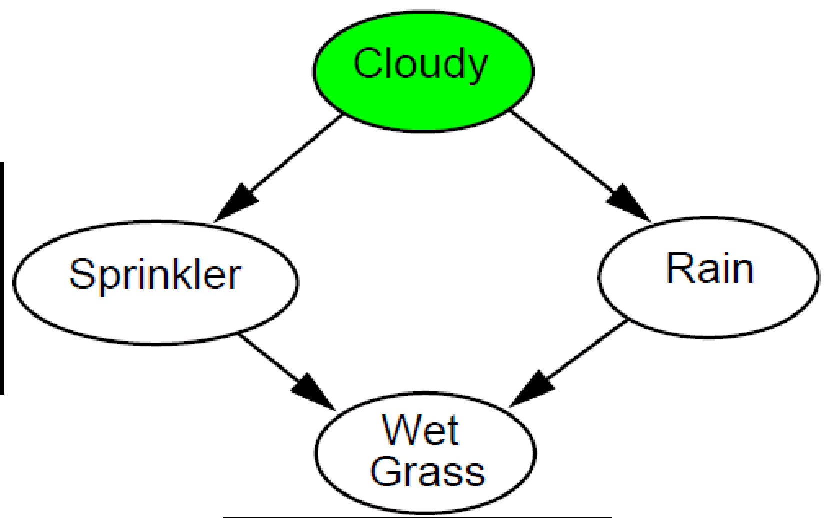
```
function PRIOR-SAMPLE(bn) returns an event sampled from bn
   inputs: bn, a belief network specifying joint distribution P(X_1, ..., X_n)

   x ← an event with n elements
   for i = 1 to n do
        x_i ← a random sample from P(X_i | parents(X_i))
              given the values of parents(X_i) in x
   return x
```

Beispiel zu Prior-Sample (1)

1) Stichprobe aus **P**(Cloudy) = ⟨0.5,0.5⟩ liefere *true* :

P(C)
.50



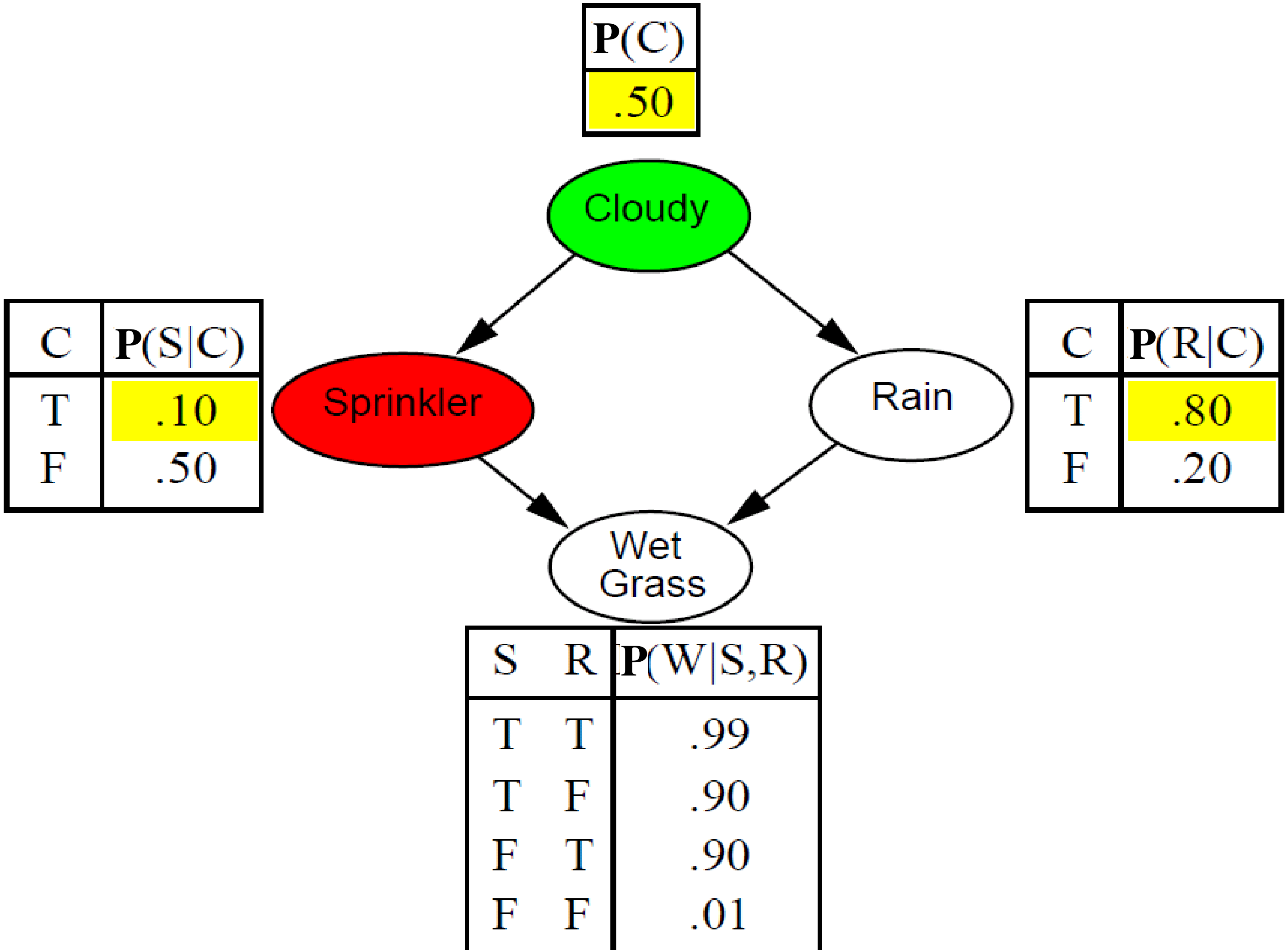
C	**P**(S|C)
T	.10
F	.50

C	**P**(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	**P**(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Beispiel zu Prior-Sample (2)

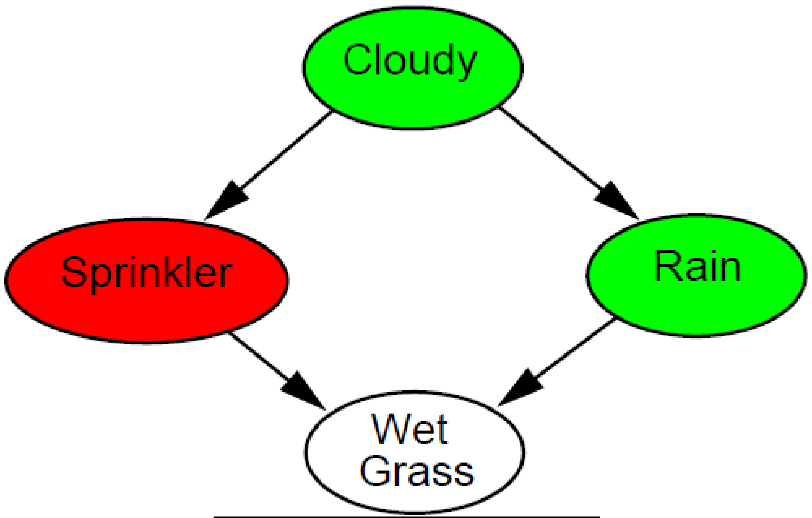
2) Stichprobe aus **P**(Sprinkler|cloudy) = ⟨0.1,0.9⟩ liefere *false* :



Beispiel zu Prior-Sample (3)

3) Stichprobe aus **P**(Rain|cloudy) = ⟨0.8,0.2⟩ liefere *true* :

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

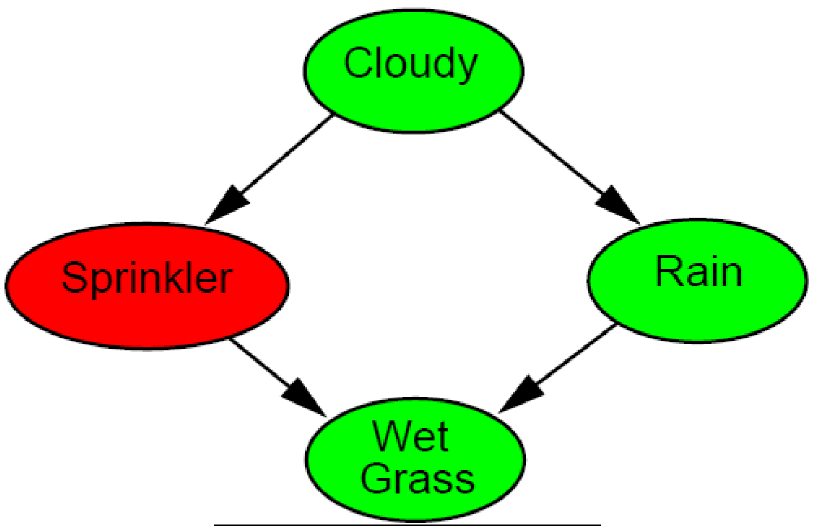
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Beispiel zu Prior-Sample (4)

4) Stichprobe aus **P**(WetGrass|¬sprinkler,rain) = ⟨0.9,0.1⟩ liefere *true* :

P(C)
.50



C	**P**(S|C)
T	.10
F	.50

C	**P**(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	**P**(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Prior-Sample liefert also hier das Ereignis: [cloudy, ¬sprinkler, rain, wetGrass] bzw. [*t*, *f*, *t* ,*t*]

Stichprobe von einem leeren Netzwerk (2)

Die W‘keit, dass *Prior-Sample* ein bestimmtes atomares Ereignis erzeugt ist

Sampling nach Bayes-Netz

$$S_{PS}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid parents(X_i)) = P(x_1,\ldots,x_n),$$

Def. Verbundwk. nach Bayes-Netz

also die korrekte Verbundwahrscheinlichkeit des atomaren Ereignisses.

Sei *N* die Anzahl aller gezogenen Stichproben durch *Prior-Sample* und sei $N_{PS}(x_1, \ldots, x_n)$ die Anzahl der durch *Prior-Sample* gezogenen Samples des atomaren Ereignisses $x_1, \ldots, x_n$.

Es lässt sich zeigen, dass die relative Häufigkeit $N_{PS}(x_1, \ldots, x_n)/N$ nach folg. Stichprobenw‘keit konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \acute{P}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{N\to\infty} N_{PS}(x_1, \ldots, x_n)/N = S_{PS}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n).$$

Eine Schätzung mit dieser Grenzwerteigenschaft heißt konsistent.

Schreibweise: $\acute{P}(x_1, \ldots, x_n) \approx P(x_1, \ldots, x_n)$

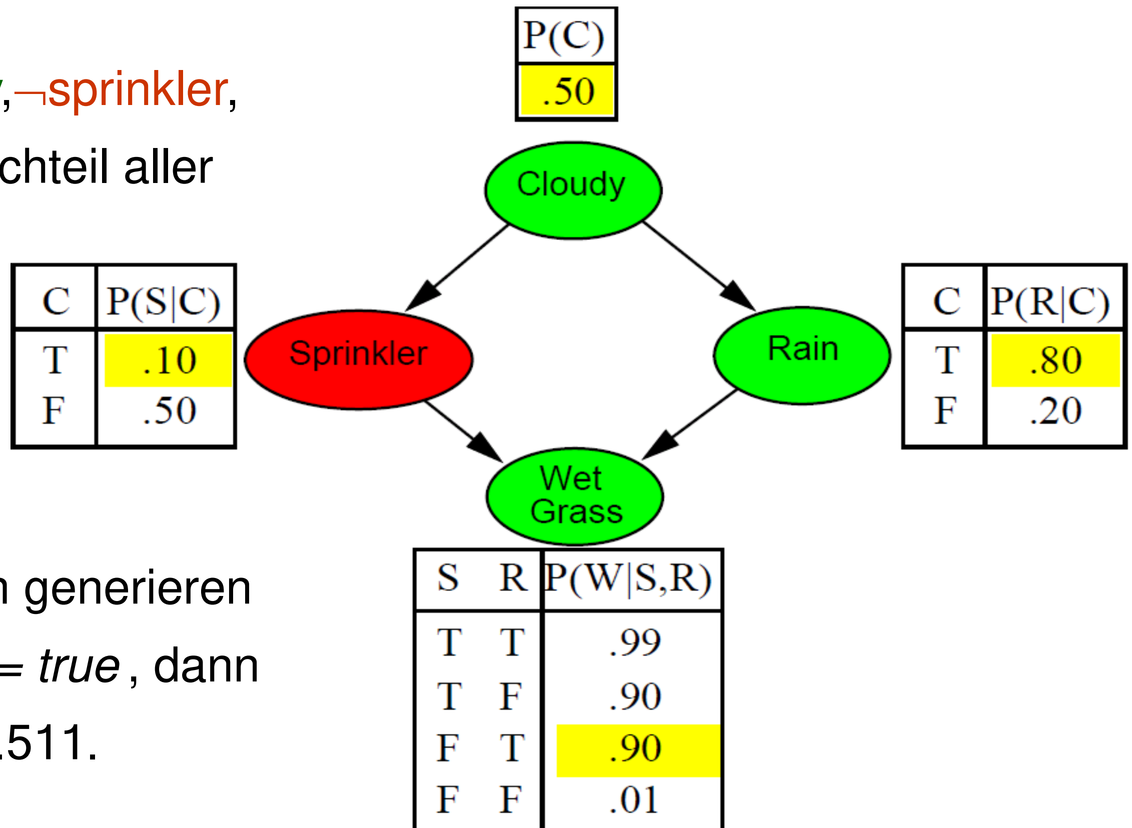
Stichprobe von einem leeren Netzwerk (3)

Am Beispiel: die W‘keit für (cloudy,¬sprinkler,rain,wetGrass)

$$P(\text{cloudy},\neg\text{sprinkler},\text{rain},\text{wetGrass}) = 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = 0.324$$

Im Grenzwert großer N erwarten wir, dass ca. 32.4% aller Stichproben diesem Ereignis entsprechen: $\lim_{N \to \infty} N_{PS}(\text{cloudy},\neg\text{sprinkler},\text{rain},\text{wetGrass})/N \approx 0.324$

Die Wahrscheinlichkeit P(cloudy,¬sprinkler, rain,wetGrass) wird also als Bruchteil aller von dem Sampling-Prozess gezogenen atom. Ereignisse geschätzt, die mit diesem Ereignis übereinstimmen



Wenn wir also 1000 Stichproben generieren und 511 davon ergeben $Rain = true$, dann schätzen wir $\hat{P}(Rain = \text{true}) = 0.511$.

Rejection Sampling

Anfrage mit Evidenzvariablen

Berechne $\dot{\mathbf{P}}(X \mid \mathbf{e})$ durch Samples, die zu $\mathbf{e}$ passen.

N = # Samples

function REJECTION-SAMPLING(X, $\mathbf{e}$, bn, N) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{N}$, a vector of counts over X, initially zero

  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{x} \leftarrow$ PRIOR-SAMPLE(bn)
    if $\mathbf{x}$ is consistent with $\mathbf{e}$ **then**
      $\mathbf{N}[x] \leftarrow \mathbf{N}[x]+1$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{N}[X]$)

N = Vektor der Zählungen der *X*-Werte

Beispiel: Schätze $\mathbf{P}(Rain \mid Sprinkler = true)$ unter Verwendung von 100 Samples

Ergebnis sei: 27 Stichproben mit $Sprinkler = true$, von diesen

– 8 mit $Rain = true$

– 19 mit $Rain = false$

$\leadsto \dot{P}(Rain \mid Sprinkler = true) = Normalize(\langle 8,19 \rangle) = \langle 0.296, 0.704 \rangle$

Bewertung von Rejection Sampling

Rejection Sampling erzeugt also konsistente A-Posteriori-Schätzungen

Problem: Hoffnungslos teuer bei hoher Ablehnungsrate von Stichproben

Im Beispiel: 73 abgelehnte Stichproben von insgesamt 100 Stichproben

Der Bruchteil der mit der Evidenz **e** inkonsistenten Stichproben

- ist hoch bei kleinem P(**e**) und
- wächst exponentiell mit steigender Zahl der Evidenzvariablen

Besser ist die folg. W'keitsgewichtung bzw. Likelihood-Gewichtung, die nur Ereignisse *erzeugt*, die konsistent zur Evidenz **e** sind

Der folgende Algorithmus *Likelihood Weighting* wird illustriert mit der Abfrage **P**(*Rain* | *Sprinkler* = *true*, *WetGrass* = *true*)

Likelihood: eine nicht normalisierte bedingte Wahrscheinlichkeit

Likelihood-Gewichtung (1)

Idee:

1) Fixiere Werte der Evidenzvariablen **E** und sample nur die Nichtevidenzvariablen **Z** = {X} ∪ **Y** mit Anfragevariable X und unbeobachteten Variablen **Y**

2) Gewichte jedes Sample mit der Likelihood, die ihm nach der Evidenz zukommt

- Damit ist jedes erzeugte Ereignis mit der Beobachtung **E** konsistent
- Nicht alle Ereignisse sind gleich wichtig
  - Ereignisse, deren Evidenz wahrscheinlich erscheint (gemessen über dem Produkt der bedingt W'keiten jeder Evidenzvariablen bei bekannten Eltern), gehen mit höherem Gewicht ein
  - Ereignisse, deren tatsächliche Evidenz unwahrscheinlich erscheint, erhalten weniger Gewicht

Likelihood-Gewichtung (2)

N = # Samples

function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, **e**, bn, N) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: **W**, a vector of weighted counts over X, initially zero

  for $j = 1$ to N **do**
    x, $w \leftarrow$ WEIGHTED-SAMPLE(bn, **e**)
    $\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$ where x is the value of X in **x**
  return NORMALIZE($\mathbf{W}[X]$)

Ereignis **x** mit Gewicht w

W = Vektor der gewichteten Zählungen der *X*-Werte

---

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, **e**) **returns** an event and a weight

  w ←1; x ←an event with n elements initialized from **e**

  for $i = 1$ **to** n **do**
    if X_i has a value x_i in **e**
      then $w \leftarrow w \times P(X_i = x_i \mid parents(X_i))$
      else $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid parents(X_i))$
  return **x**, w

Bewertung der Kompatibilität von Evidenz mit Ereignis

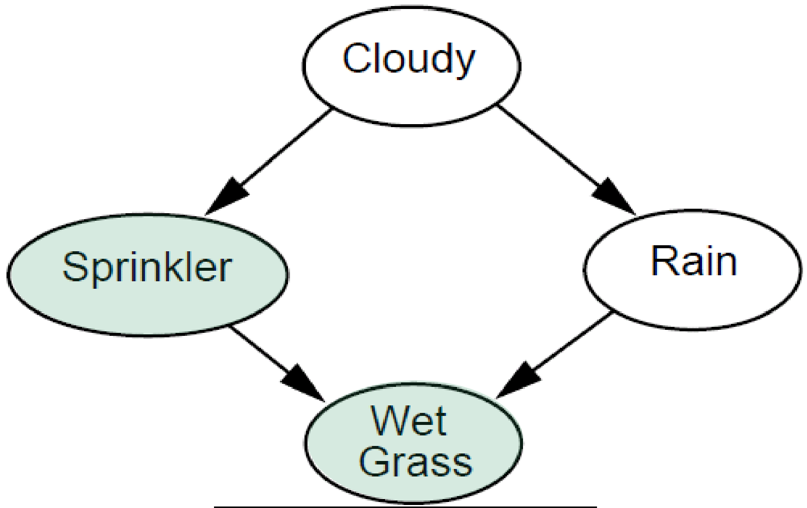
Sampling von Anfrage- und unbeobachteten Variablen

Beispiel: Likelihood-Gewichtung

Beispiel: Anfrage **P**(*Rain* | *Sprinkler = true, WetGrass = true*)

Sampling nur für Anfragevariable *Rain* und unbeobachtete Variable *Cloudy*

P(C)
.50



C	**P**(S|C)
T	.10
F	.50

C	**P**(R|C)
T	.80
F	.20

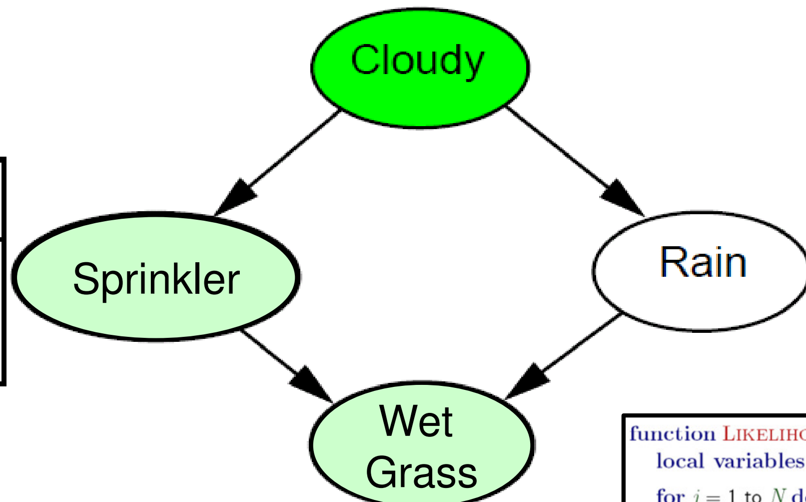
S	R	**P**(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Beispiel: Likelihood-Gewichtung (Forts. 1)

1) Stichprobe aus **P**(*Cloudy*) = ⟨0.5,0.5⟩ liefere *true* :

$w \leftarrow 1.0$

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, **e**, bn, N) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: **W**, a vector of weighted counts over X, initially zero
  for $j = 1$ to N **do**
    x, $w \leftarrow$ WEIGHTED-SAMPLE(bn, **e**)
    $\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$ where x is the value of X in **x**
  return NORMALIZE($\mathbf{W}[X]$)

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, **e**) **returns** an event and a weight
  w ←1; x ←an event with n elements initialized from **e**
  for $i = 1$ **to** n **do**
    if X_i has a value x_i in **e**
      then $w \leftarrow w \times P(X_i = x_i \mid parents(X_i))$
      else $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid parents(X_i))$
  return x, w

w = 1.0

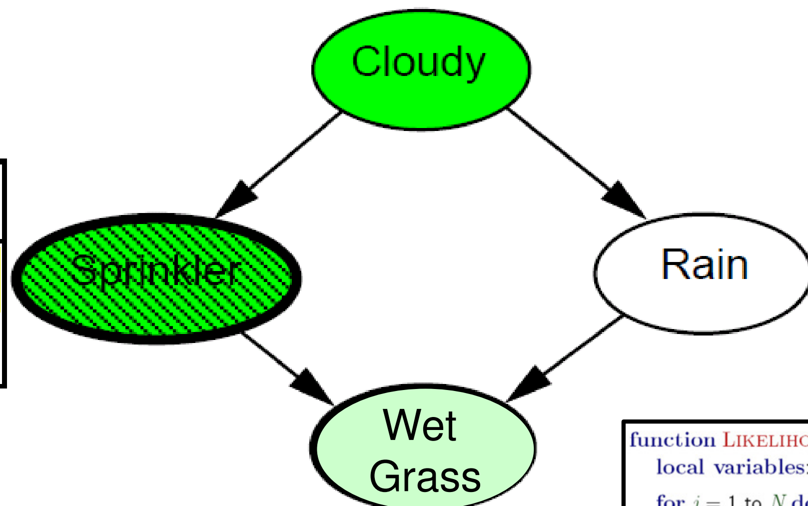
Beispiel: Likelihood-Gewichtung (Forts. 2)

2) *Sprinkler* ist Evidenzvariable mit Wert *true* (was bei *cloudy* unwahrscheinlich ist):

$w \leftarrow w \cdot P(\mathit{sprinkler} \mid \mathit{cloudy}) = 1.0 \cdot 0.1 = 0.1$

Gewichtsreduktion: Die Evidenzvariable *Sprinkler = true* zeigt hier, dass dieses Sample nicht gut passt

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

```
function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, e, bn, N) returns an estimate of P(X|e)
   local variables: W, a vector of weighted counts over X, initially zero
   for j = 1 to N do
      x, w ← WEIGHTED-SAMPLE(bn, e)
      W[x] ← W[x] + w where x is the value of X in x
   return NORMALIZE(W[X])

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, e) returns an event and a weight
   w ←1; x ←an event with n elements initialized from e
   for i = 1 to n do
      if X_i has a value x_i in e
         then w ← w × P(X_i = x_i | parents(X_i))
         else x_i ← a random sample from P(X_i | parents(X_i))
   return x, w
```

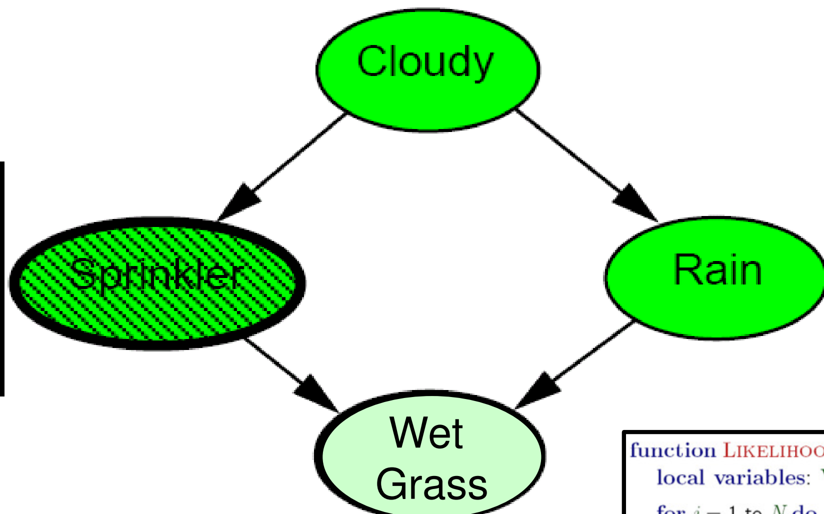
$w = 1.0 \cdot 0.1 = 0.1$

Beispiel: Likelihood-Gewichtung (Forts. 3)

3) Stichprobe aus **P**(*Rain*) = ⟨0.8,0.2⟩ liefere *true* :

w = 0.1

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

w = 1.0 · 0.1 = 0.1

```
function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, e, bn, N) returns an estimate of P(X|e)
   local variables: W, a vector of weighted counts over X, initially zero
   for j = 1 to N do
       x, w ← WEIGHTED-SAMPLE(bn, e)
       W[x] ← W[x] + w where x is the value of X in x
   return NORMALIZE(W[X])

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, e) returns an event and a weight
   w ←1; x ←an event with n elements initialized from e
   for i = 1 to n do
       if X_i has a value x_i in e
           then w ← w × P(X_i = x_i | parents(X_i))
           else x_i ← a random sample from P(X_i | parents(X_i))
   return x, w
```

Beispiel: Likelihood-Gewichtung (Forts. 4)

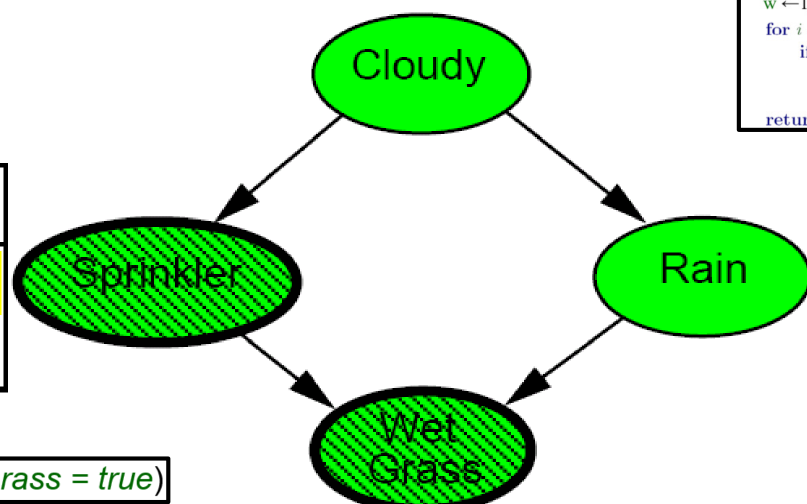
4) *WetGrass* ist Evidenzvariable mit Wert *true* :

w ← w · P(wetgrass | sprinkler, rain) = 0.1 · 0.99 = 0.099

```
function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, e, bn, N) returns an estimate of P(X|e)
   local variables: W, a vector of weighted counts over X, initially zero
   for j = 1 to N do
      x, w ← WEIGHTED-SAMPLE(bn, e)
      W[x] ← W[x] + w where x is the value of X in x
   return NORMALIZE(W[X])

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, e) returns an event and a weight
   w ← 1; x ← an event with n elements initialized from e
   for i = 1 to n do
      if X_i has a value x_i in e
         then w ← w × P(X_i = x_i | parents(X_i))
         else x_i ← a random sample from P(X_i | parents(X_i))
   return x, w
```

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

P(*Rain* | *Sprinkler = true, WetGrass = true*)

Weighted-Sample liefert Ereignis (cloudy,sprinkler, rain,wetgrass), was als *Rain = true* gezählt wird, mit Gewicht w = 0.099.

Das Gewicht ist gering, da das Ereignis einen wolkige Tag zeigt, bei dem der Sprinkler wahrscheinlich nicht läuft.

Betrachtung der Likelihood-Gewichtung (1)

Seien Evidenzvariable **E** mit Werten **e** feststehend, Anfragevariable sei X und **Z** seien die unbeobachteten Variablen **Y** *und* Anfrage X, also: **Z** = {X} ∪ **Y**

Teil 1: *Weighted-Sample* sampelt jede Variable aus **Z** für bekannte Elternwerte:

$$S_{WS}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) = \prod_i P(z_i \mid parents(Z_i)).$$

parents(Z_i) kann sowohl verborgene Variable als auch Evidenzvariable enthalten. Anders als die unbedingte Verteilung **P**(**z**) berücksichtigt die Verteilung S_{WS} die Evidenz der Vorfahren von Z_i

Teil 2: Die Gewichtung für ein gegebenes Sample (**z**,**e**) ist das Produkt der Wahr'keiten für jede Evidenzvariable mit bekannten Eltern:

$$w(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) = \prod_j P(e_j \mid parents(E_j)).$$

Betrachtung der Likelihood-Gewichtung (2)

Die gewichtete Sampling-Likelihood ist dann das Produkt aus (1) und (2)

$$S_{WS}(\mathbf{z},\mathbf{e}) \cdot w(\mathbf{z},\mathbf{e}) = \Pi_i \, P(z_i \mid parents(Z_i)) \cdot \Pi_i \, P(e_i \mid parents(E_i)).$$

Das Produkt deckt also alle Variablen des Netzes ab.

Es lässt sich zeigen, dass $\dot{\mathbf{P}}(x|\mathbf{e})$ für große N über die Sampling-Verteilung $\Sigma_{\mathbf{y}} S_{WS}(x,\mathbf{y},\mathbf{e}) \cdot w(x,\mathbf{y},\mathbf{e})$ gegen $\mathbf{P}(x|\mathbf{e})$ konvergiert: $\dot{\mathbf{P}}(x|\mathbf{e}) \approx \mathbf{P}(x|\mathbf{e})$.

Die Likelihood-Gewichtung erzeugt also konsistente Schätzungen. Sie kann deutlich effizienter sein als Rejection Sampling.

Zusammenfassung Bayessche Netze

- Bayessche Netze erlauben eine kompakte Repräsentation der Verbund-w'keit.
- Dies wird erreicht durch Unabhängigkeitsannahmen.
- Sie unterstützen verschiedene Formen des Schließens bei gegebenen Evidenzen: kausal, diagnostisch, interkausal, gemischt.
- Inferenz bedeutet dabei die Berechnung der Wahr'keitsverteilung für die Belegungen einer Menge von Variablen bei gegebenen Evidenzen.
- Die Komplexität der Inferenz in Bayesschen Netzen hängt von der Struktur des Netzwerkes ab.
- Für Polybäume ist die Komplexität polynomiell in der Größe des Netzwerks.
- Im Allgemeinen ist die Inferenz in Bayesschen Netzen NP-hart.
- Es gibt Approximationstechniken, um diesem Problem zu begegnen.