Prof. Dr. Reinhard Klein
Alexander Schier

Universität Bonn
Institut für Informatik II
Wintersemester 2023/2024 13.12.2023

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 10

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 20.12.2023, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Lineare Ausgleichsprobleme lösen, *8 Punkte*)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{C}^m$ wobei $m > n$. Gib alle *effizienten* Verfahren an, die du zum Lösen des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min$ kennst. Beschreibe das Verfahren jeweils mit einem groben Pseudo-Code (nur für die Lösung des Ausgleichsproblems, nicht für das Berechnen der Matrixzerlegungen oder die einzelnen Unterschritte) und einer Beschreibung der Voraussetzungen, unter denen das Verfahren angewendet werden kann.

Aufgabe 2 (Cholesky-Zerlegung von Hand, *3+1=4 Punkte*)

Es seien:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Cholesky-Zerlegung der Matrix A. Gib die Matrix R und alle wichtigen Zwischenschritte an.
b) Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der berechneten Matrix R mit Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

Aufgabe 3 (Einzelne Eigenwerte berechnen, *4 Punkte*)

Implementiere die einfache Potenziteration (Algorithmus 7.1 im Skript) und die Rayleigh-Quotienten-Iteration (Algorithmus 7.2 im Skript) in zwei Funktionen. Berechne jeweils mit beiden Verfahren die Eigenwerte und vergleiche die Konvergenzgeschwindigkeiten für die gegebenen Matrizen mit dem gegebenen Startvektor. Plotte dazu den Verlauf der Rayleigh-Quotienten für beide Verfahren jeweils über die ersten 100 Iterationen.

Bonusaufgabe 4 (Eigenwerte und Invertierbarkeit, *2 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ eine Matrix mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^m$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ eine Zahl, die kein Eigenwert von A ist. Zeige, dass $A - \mu \cdot I$ invertierbar ist und

$$\frac{1}{\lambda - \mu}$$

ein Eigenwert von $(A - \mu \cdot I)^{-1}$ zum Eigenvektor v ist.