Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

Lösungen zum 10. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)

== Sommersemester 2023 ==

Aufgabe 1.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir die *Tangensfunktion* tan durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(i) Bestimmen Sie explizit den maximalen Definitionsbereich der Tangensfunktion.

(ii) Zeigen Sie: Für alle x aus dem Definitionsbereich der Tangensfunktion gilt
 a) $\tan(x+\pi) = \tan x$,
 b) $\tan(-x) = -\tan x$,
 c) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ und $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ bijektiv sind und folglich Umkehrfunktionen besitzen. Diese heißen *Arkus-Funktionen* und werden mit arcsin, arccos und arctan bezeichnet.

(iv) Bestimmen Sie alle Punkte in den Definitionsbereichen der Arkus-Funktionen, wo diese differenzierbar sind, und berechnen Sie die Ableitungen in diesen Punkten.

Lösung:

(i) Es ist $\cos x = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für eine ganze Zahl k ist. Da die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist also der Definitionsbereich des Tangens gegeben durch

$$D := \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(ii) Es ist
 a)

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan x,$$

 b)

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan x,$$

c) und

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,\end{aligned}$$

wobei wir den Satz des Phythagoras ausgenutzt haben: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(iii) $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$: Es ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Da die Sinusfunktion stetig ist, nimmt sie also aufgrund des Zwischenwertsatzes alle Werte in dem Intervall $[-1, 1]$ an und ist somit surjektiv.Für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt $\sin' x = \cos x > 0$. Also ist die Funktion dort streng monoton wachsend und somit injektiv.

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$: Es ist $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. Da die Cosinusfunktion stetig ist, nimmt sie also aufgrund des Zwischenwertsatzes alle Werte in dem Intervall $[-1, 1]$ an und ist somit surjektiv.Für alle $x \in]0, \pi[$ gilt $\cos' x = -\sin x < 0$. Also ist die Funktion dort streng monoton fallend und somit injektiv.

$\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$: Es ist

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$$

und

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty.$$

Als stetige Funktion nimmt die Tangensfunktion also alle Werte in $\mathbb{R}$ an und ist surjektiv. Da die Ableitung $\tan' x = 1 + \tan x$ offensichtlich immer positiv ist, ist die Funktion streng monoton wachsend und somit injektiv.

(iv) arcsin: $\sin' x = 0$ gilt in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nur für $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$. Da $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ und $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ ist, ist die Umkehrfunktion arcsin in $]-1, 1[$ differenzierbar und es ist

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ist $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$. Nun ist $\cos x \geq 0$ für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Also ist hier $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Wir erhalten also für $x \in]-1, 1[$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

arccos: $\cos' x = 0$ gilt in $[0,\pi]$ nur für $x = 0$ und $x = \pi$. Da $\arccos(-1) = \pi$ und $\arccos(1) = 0$ ist, ist die Umkehrfunktion arccos in $]-1,1[$ differenzierbar und es ist

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ist $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$. Nun ist $\sin x \geq 0$ für $x \in [0,\pi]$. Also ist hier $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Wir erhalten also für $x \in]-1,1[$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

arctan: Da die Ableitung der Tangensfunktion stets positiv ist, ist arctan überall differenzierbar und es gilt

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2},$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x},$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\log(1+2x)},$$

(iv)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

Lösung:

(i) Es ist $\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$ und für $x \neq 0$ (also insbesondere in der Nähe von 0) ist sowohl $x^2 \neq 0$ als auch $2x \neq 0$. Somit sind die Voraussetzung des Satzes von l'Hospital erfüllt. Es ist

$$\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\sin x}{2x}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = 1$ ist [1] und somit haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2}.$$

[1]Hier könnte man auch alternativ ein weiteres Mal den Satz von l'Hospital anwenden.

Nach dem Satz von l'Hospital ist damit auch

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\frac{1}{2}.$$

(ii) Es ist $\lim_{x\to 0} 1-\cos x = 0 = \lim_{x\to 0} 1-\cos\frac{x}{2}$ und für $x\in]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}$ ist sowohl $1-\cos x\neq 0$ als auch $(1-\cos x)'=\sin x\neq 0$. Somit sind die Voraussetzung des Satzes von l'Hospital erfüllt. Es ist

$$\frac{(1-\cos\frac{x}{2})'}{(1-\cos x)'}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x}.$$

Es ist $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}=0=\lim_{x\to 0}\sin x$ und für $x\in]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}$ ist sowohl $\sin x\neq 0$ als auch $\cos x\neq 0$. Somit sind die Voraussetzung des Satzes von l'Hospital erfüllt. Es ist

$$\frac{(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2})'}{(\sin x)'}=\frac{\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}.$$

Zweimalige Anwendung des Satzes von l'Hospital liefert also

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{1}{4},$$

(iii) Man prüft wieder nach, dass die Voraussetzungen des Satzes von l'Hospital erfüllt sind und erhält

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\log(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

(iv) Es ist

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}.$$

Auf die rechte Seite kann man nun den Satz von l'Hospital anwenden. Natürlich muss man zunächst prüfen, dass die Voraussetzungen in der Nähe von 0 erfüllt sind. Man erhält, dass

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x}$$

ist, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Hierfür müssen wir aber (nachdem wir natürlich wieder geprüft haben, dass die Voraussetzungen erfüllt sind!) noch einmal den Satz von l'Hospital anwenden.

$$\frac{(1-\cos x)'}{(x\cos x+\sin x)'}=\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{0}{2}.$$

Die zweimalige Anwendung des Satzes liefert uns also

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Aufgabe 3.
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x,y) := \cos(x)\sin(y).$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f.
(ii) Bestimmen Sie die Hessematrix von f.
(iii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und stellen Sie für jeden kritischen Punkt fest, ob es sich um ein lokales Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkte handelt.

Lösung:

(i) Es ist
$$\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}.$$

(ii) Es ist
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir müssen schauen, wann $\operatorname{grad}(f) = 0$ gilt. Es muss also
$$-\sin x \sin y = 0$$
und
$$\cos x \cos y = 0$$
gelten. Die erste Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\sin x = 0$ oder $\sin y = 0$ ist.
Ist $\sin x = 0$, dann ist $\cos x \neq 0$. In diesem Fall muss also $\cos y = 0$, damit auch die 2. Gleichung erfüllt ist.
Ist $\sin y = 0$, dann ist $\cos y \neq 0$. In diesem Fall muss also $\cos x = 0$, damit auch die 2. Gleichung erfüllt ist.
Wir erhalten also folgende kritischen Punkt: $(k\pi, \pi/2 + \ell\pi)$ und $(\pi/2 + k\pi, \ell\pi)$ mit beliebigen $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
Nun ist
$$\det H_f(x,y) = (\cos x \sin y)^2 - (\sin x \cos y)^2.$$
Ist $(x,y) = (\pi/2 + k\pi, \ell\pi)$, so ist $\cos x = \sin y = 0$ und $\sin x, \cos y \in \{-1,1\}$. Somit ist $\det H_f(x,y) = -1 < 0$. Diese kritischen Punkte sind also Sattelpunkte.
Ist $(x,y) = (k\pi, \pi/2 + \ell\pi)$, so ist $\cos y = \sin s = 0$ und $\sin y, \cos x \in \{-1,1\}$. Somit ist $\det H_f(x,y) = 1 > 0$. Wir haben es hier also mit Extremstellen zu tun. Um Festzustellen mit welcher Art von Extrema wir es zu tun haben, müssen wir uns den Eintrag oben links in der Hessematrix anschauen, also
$$-\cos x \sin y = -\cos(k\pi)\sin(\frac{\pi}{2} + \ell\pi).$$

Es ist

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \quad \sin(\frac{\pi}{2} + \ell\pi) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ell \text{ gerade} \\ -1 & \text{, falls } \ell \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Sind also k und ℓ beide gerade oder beide ungerade, so ist $-\cos(k\pi)\sin(\frac{\pi}{2}+\ell\pi) = -1$ und wir haben eine Maximalstelle. In den anderen Fällen haben wir eine Minimalstelle.