Abgabe: 14.11.21, 10:00
Besprechung: KW46

PD Dr. Elmar Langetepe
Christine Dahn
Joshua Könen
Institut für Informatik

Übungszettel 4

Aufgabe 4.1: Äquivalenzklassen (2+2+2+2 Punkte)

a) Beschreiben Sie für die folgenden Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen.

   i) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, |a| = |b|\}$,

   ii) $R_2^p = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\big|\, \exists z \in \mathbb{Z} \colon a - b = z \cdot p\}$ für eine vorgegebene Konstante $p \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie die folgenden Äquivalenzklassen. Vereinfachen Sie die Schreibweise dabei so weit wie möglich. Schreiben Sie zum Beispiel $[\![1]\!]$ statt $[\![7]\!]$ für die Äquivalenzklasse $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ der Relation $\equiv_3$.

   i) $[\![33]\!] \oplus_{25} [\![173]\!]$

   ii) $[\![17]\!] \odot_{13} [\![23]\!]$

Aufgabe 4.2: Äquivalenzrelationen und Abbildungen (4+4 Punkte)

Seien A, B nichtleere Mengen. Zeigen Sie:

a) Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung von A nach B, so wird durch

$$\forall a_1, a_2 \in A: \; (a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow f(a_1) = f(a_2))$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A definiert.

b) Ist $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A und ist $C = \{[\![a]\!]_\sim \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$, so gibt es eine Abbildung $p : A \longrightarrow C$, so dass für alle $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow p(a_1) = p(a_2)$$