Grundlagen der Robotik

8. Dynamische Systeme

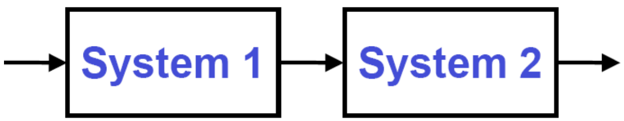
Prof. Sven Behnke

Klausurplanung

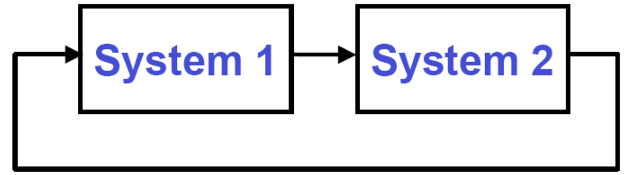
- Termine:
  - **Erstklausur: 21.02.2024 10:00 HS1**
  - Nachklausur: 14.03.2024 10:00, Raum TBD
- 90 Minuten Bearbeitungszeit, closed Book
- Es wird am Ende der Vorlesungszeit eine Probeklausur geben.

Letzte Vorlesung

- Wechselwirkungen von Systemen

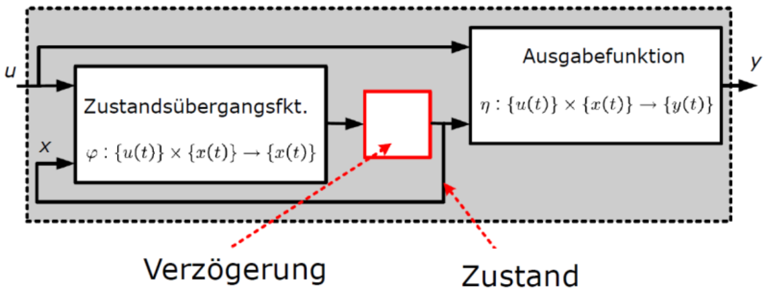


Open Loop



Closed Loop

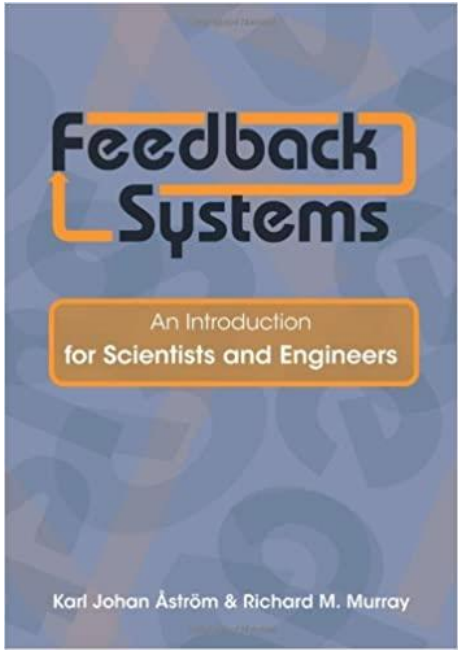
- Systemklassen:
  - Zeitdiskret, zeitkontinuierlich, Event-basiert
  - Zustandslos, mit Zustand



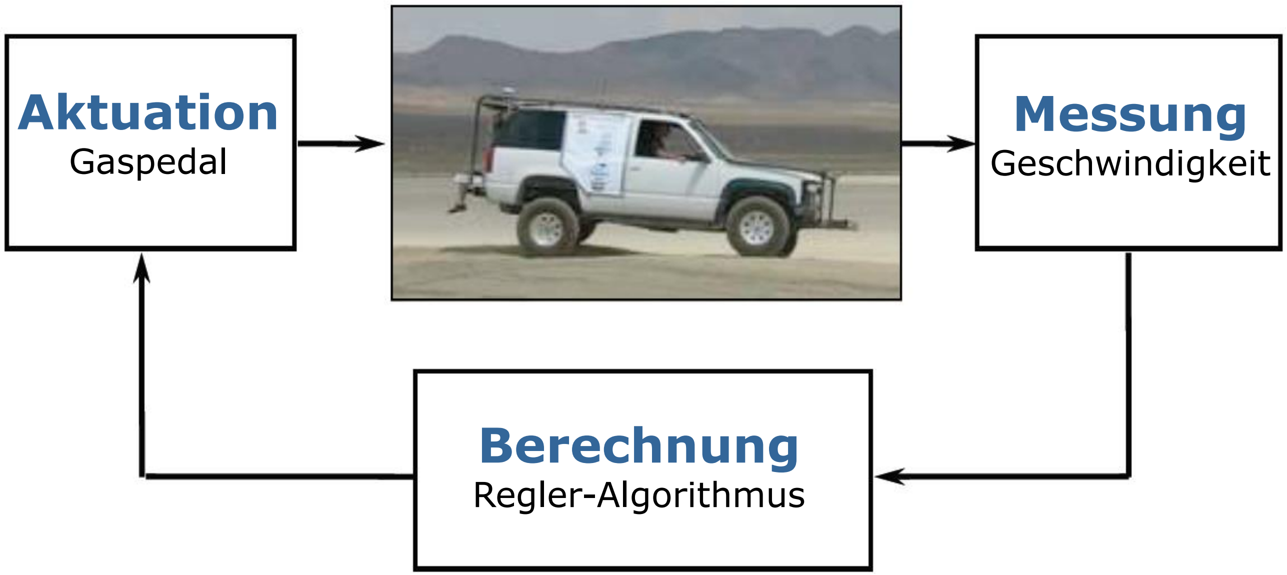
- Systemeigenschaften
  - Kausalität
  - Linearität
  - Zeitinvarianz
  - Stabilität
- LTI-Systeme: linear zeitinvariant

Literatur

- Karl Johan Aström and Richard M. Murray: Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Princeton University Press, 2008



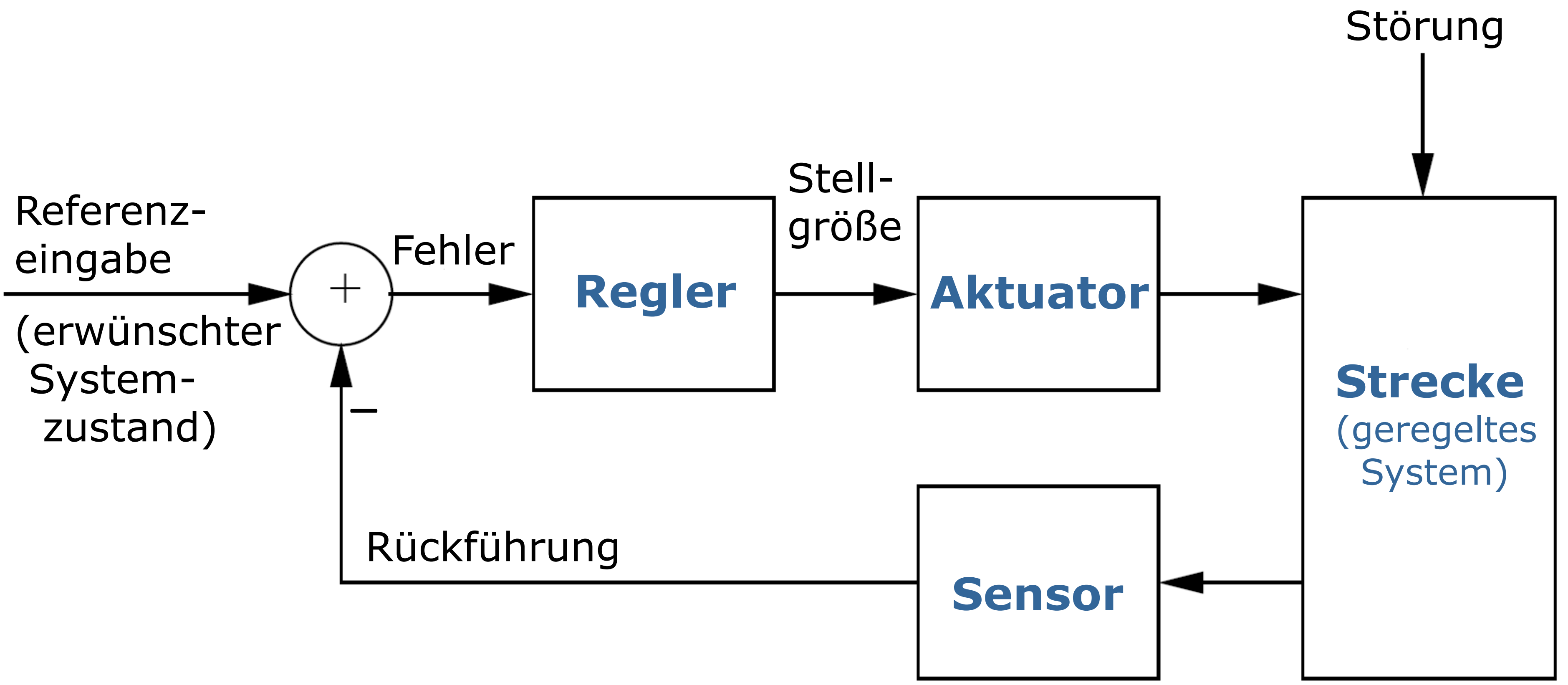
Regelung = $\underbrace{\text{Messung + Berechnung + Aktuation}}_{\text{In Rückkopplungsschleife}}$



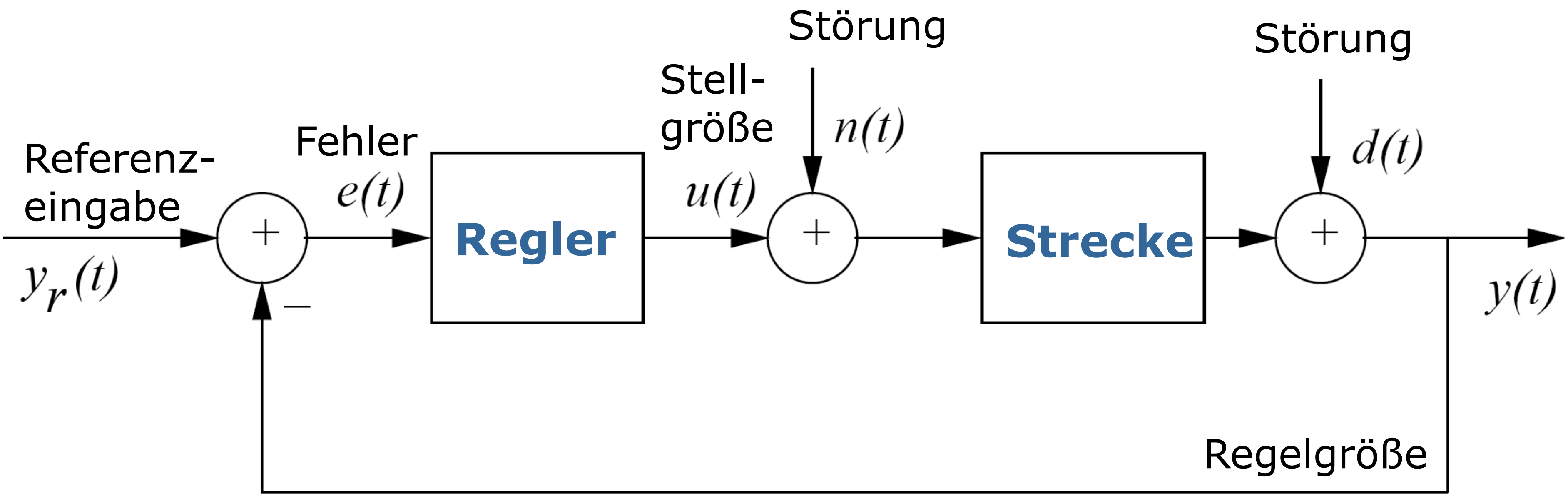
Ziele:

- **Statische Performanz**: System hält erwünschten Zustand (z.B. erlaubte Geschwindigkeit)
- **Dynamische Performanz**: System kann schnell auf Veränderungen reagieren (z.B. neue Zielgeschwindigkeit)
- **Robustheit**: System toleriert Änderungen in der Dynamik (Masse, Anstieg der Straße, …)

Prinzip der Regelung durch Rückführung



Regelung: Vereinfachte Darstellung



Zwei Modi der Regelung

Wir unterscheiden:

- **Erreichen eines Sollwerts:**
  Regelgröße soll Referenzeingabe erreichen und sich nicht mehr ändern
  => Einschwingverhalten

- **Folgeregelung:**
  Regelgröße soll einer veränderlichen Referenzeingabe folgen
  => Folgeverhalten

Auslegung von Reglern

Erwünschte Eigenschaften:

- **Verfolgung des Referenzsignals:**
  Regelgröße $y(t)$ soll Änderungen der Referenzeingabe $y_r(t)$ genau und schnell folgen
- **Rückweisung von Störungen:**
  Störungen $d(t)$ und $n(t)$ sollen die Regelgröße $y(t)$ nicht beeinflussen
- **Stabilität:**
  Das Feedback-System aus Regler und Strecke muss stabil sein
- **Robustheit:**
  Kleine Änderungen der Parameter sollen kleine Effekte haben
- **Realisierbarkeit:**
  Der Regler muss effizient implementierbar sein

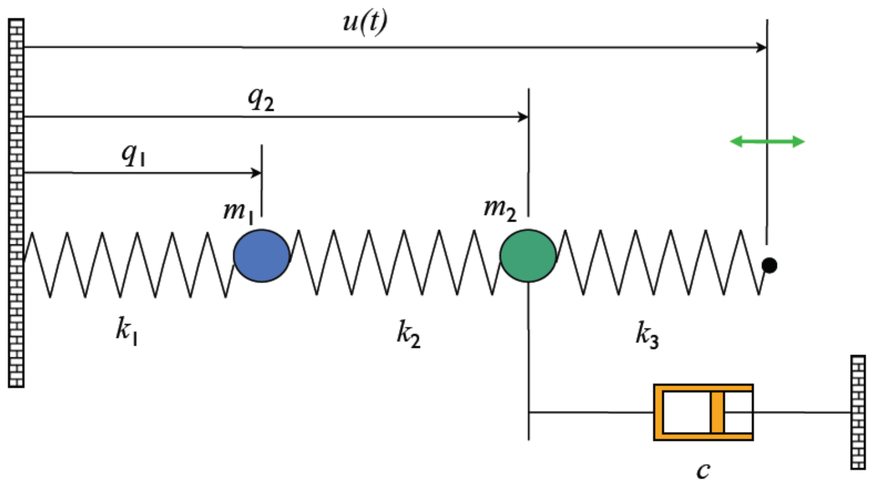
Zielkonflikte

- Die erwünschten Eigenschaften sind widersprüchlich und können daher nicht alle gleichzeitig realisiert werden

- Rückweisung von Störungen ⬄ Robustheit

- Ideales Folgeverhalten ⬄ Realisierbarkeit (unendlich hohe Stellgrößen)

Modellierung im Zustandsraum



Newton‵sche Physik

- $F=ma$ // Trägheit
- $F=k(x-x_0)$ // Feder
- $F=cv$ // Dämpfer

Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 &= k_2(q_2-q_1) - k_1 q_1 \\ m_2\ddot{q}_2 &= k_3(u-q_2) - k_2(q_2-q_1) - c\dot{q}_2 \end{aligned}}$$

Beschreibung im Zustandsraum

- **Zustand:** Vektor von Variablen, die Fortschreibung des Systems erlauben
- Dynamik als System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p$$

$$y = h(x) \qquad y \in \mathbb{R}^q$$

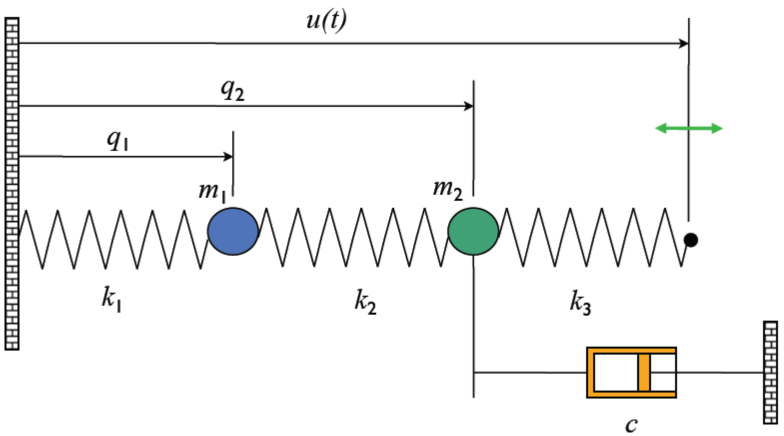
Zustandsdynamik, Ausgabefunktion

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{k_2}{m_1}(q_2-q_1) - \frac{k_1}{m_1}q_1 \\ \frac{k_3}{m_2}(u-q_2) - \frac{k_2}{m_2}(q_2-q_1) - \frac{c}{m_2}\dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Begriffe bei der Modellierung

- **Zustand** fasst die Vergangenheit zusammen
  - Unabhängige physikalische Größen, die eine Fortschreibung des Systems in die Zukunft erlauben (wenn zukünftige externe Eingaben bekannt sind)
- **Eingaben** beschreiben Anregung des Systems von außen
  - Werden nicht von der Systemdynamik beinflusst, sondern sind von außen gegeben
- **Dynamik** beschreibt die Änderung des Zustands
  - Regel für Neuberechung des Zustands
  - Funktion des aktuellen Zustands und der externen Eingaben
- **Ausgaben** beschreiben die gemessenen Größen
  - Ausgaben sind Funktion von Zustand und Eingaben
    => Abgeleitete Variablen
  - Ausgaben sind häufig Teilmenge des Zustands



Beispiel: Feder-Massen-System

Zustand: Positionen und Geschwindigkeiten der Massen $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$

Eingabe: Position der Feder am rechten Ende $u(t)$

Dynamik: Newtonsche Mechanik

Ausgabe: Gemessene Positionen der Massen q_1, q_2

Eigenschaften der Modellierung

- **Wahl des Zustands nicht eindeutig**
  - Es kann viele Möglichkeiten geben, Variablen als Zustandsgrößen auszuwählen
  - Triviales Beispiel: Wahl der Einheiten (Skalierung)
  - Interessanter: Summen und Differenzen der Massepositionen

- **Wahl der Eingaben und Ausgaben hängt von Standpunkt ab**
  - Eingaben: Welche Faktoren sind extern bezüglich des erstellten Modells?
    - Eingaben für ein Modell können Ausgaben eines anderen Modells sein (z.B., Ausgabe des Tempomats ist Eingabe für das Fahrzeugmodell)
  - Ausgaben: Welche physikalischen Größen (häufig Zustandsgrößen) kann man messen?
    - Wahl der Ausgaben hängt davon ab, welche Sensoren vorhanden sind und welche Teile eines Komponentenmodells mit anderen Komponenten interagieren

- **Verschiedene Modellarten existieren**
  - Gewöhnliche Differentialgleichungen für Bewegung von Starrkörpern
  - Endliche Automaten für Produktionsanlagen, Internet, …
  - Partielle Differentialgleichungen für Flüssigkeitsmodelle, Festkörperphysik, etc.

Modellierung Dynamischer Systeme
Spezialfall: Lineare Systeme

Allgemeine Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

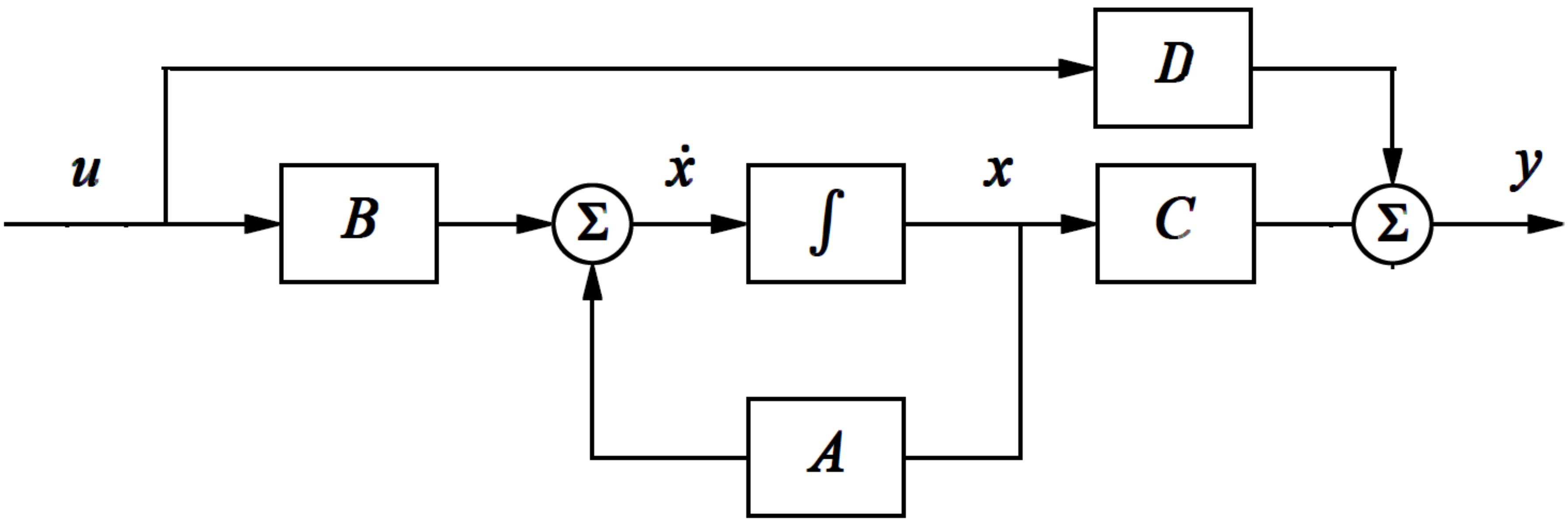
Lineare Systeme

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Zustand: $x \in \mathbb{R}^n$

Eingabe: $u \in \mathbb{R}^p$

Ausgabe: $y \in \mathbb{R}^q$



Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$\frac{d^n q}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n q = u$$

$$y = b_1 \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \dot{q} + b_n q$$

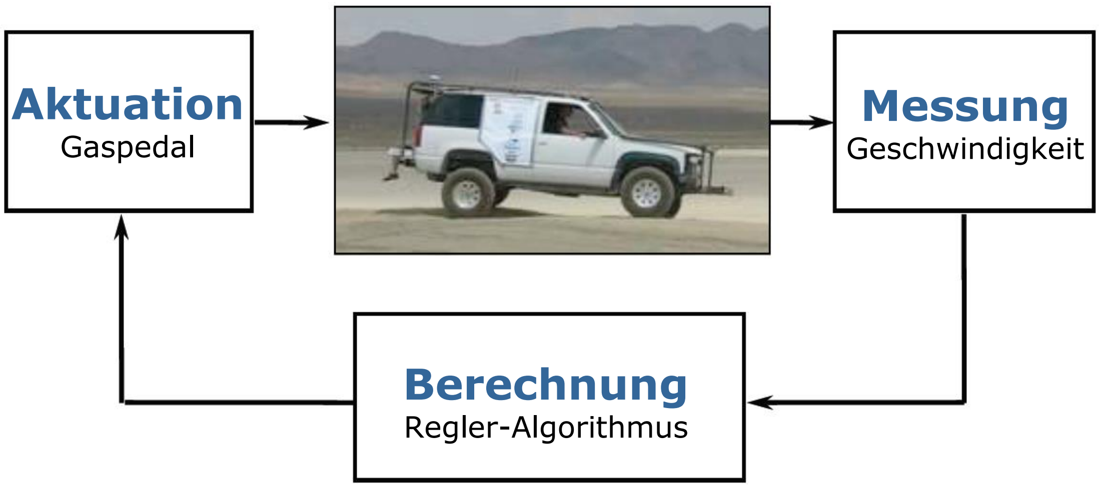
- Werden auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in höher-dimensionalem Zustandsraum zurückgeführt.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{n-1}q/dt^{n-1} \\ d^{n-2}q/dt^{n-2} \\ \vdots \\ dq/dt \\ q \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} x$$

Regler als Dynamische Systeme



$$\dot{x} = f(x, u)$$

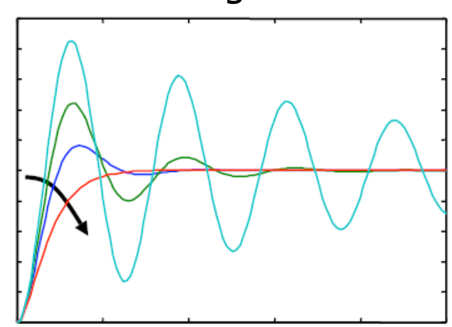
System-dynamik | System-eingabe

$$u = k(x)$$

Regler-Algorithmus

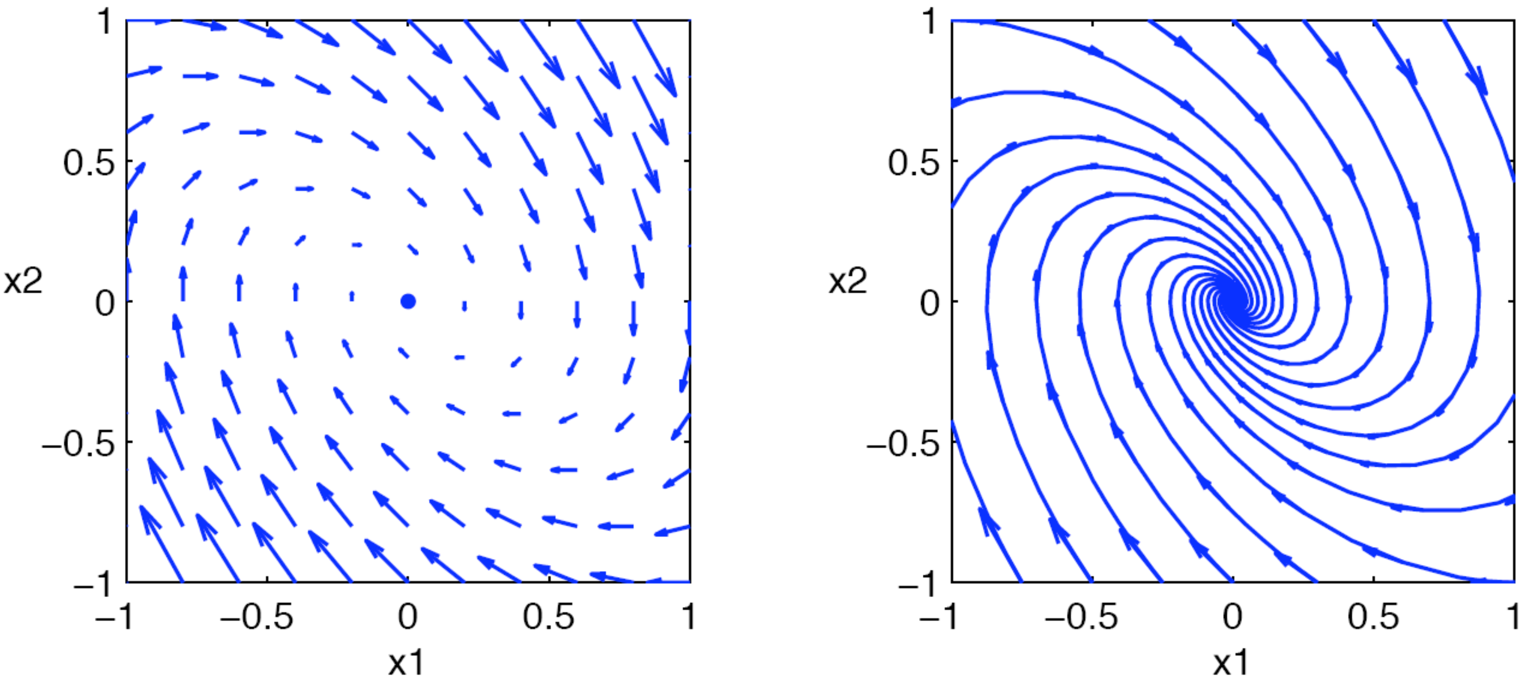
- **Ziel #1: Stabilität**
  - Prüfe, ob Closed-Loop-System stabil ist
- **Ziel #2: Performanz**
  - Untersuche das Verhalten des Closed-Loop-Systems in dynamischen Situationen
- **(Ziel #3: Robustheit)**

Einschwingverhalten



Phasenportraits

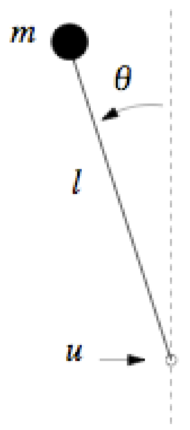
- Visualisierung für 2D-Dynamik
- Zustandsdynamik: $\dot{x} = f(x, u(x)) = F(x)$
- Zeichne $F(x)$ in der Ebene
- Beispiel: $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

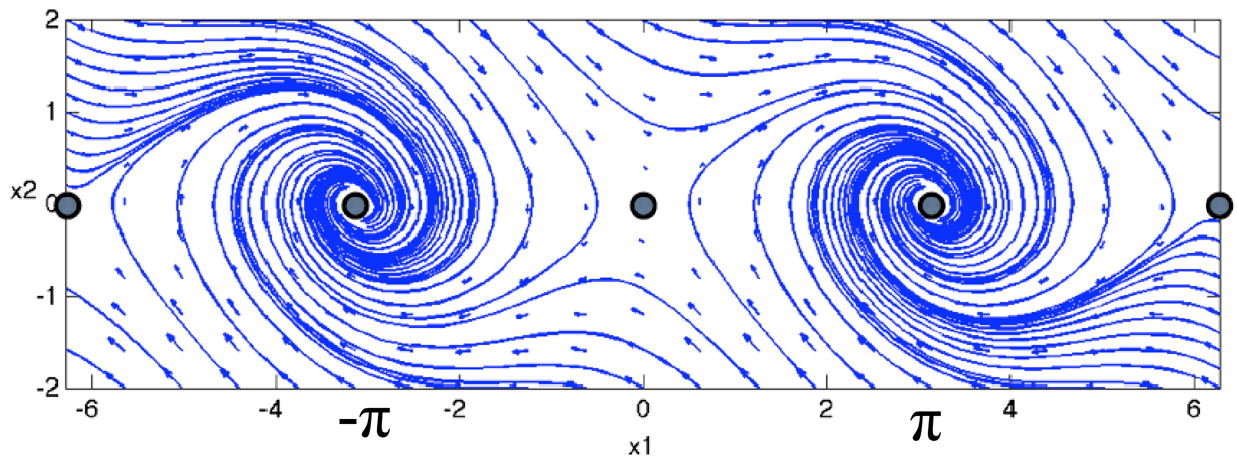


Fixpunkte

- Fixpunkte x_e sind stationäre Zustände der Dynamik: $\dot{x} = F(x) \qquad F(x_e) = 0$
- Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - \gamma x_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Winkel } \theta \\ \text{Winkelgeschwindigkeit } \dot{\theta} \end{matrix}$$

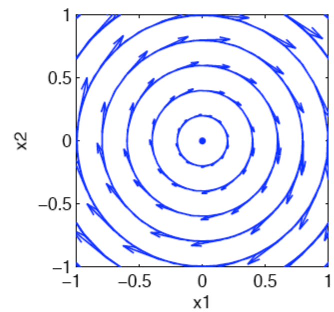


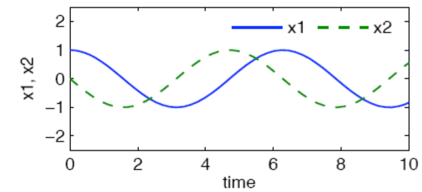


Stabilität von Fixpunkten

Ein Fixpunkt ist:

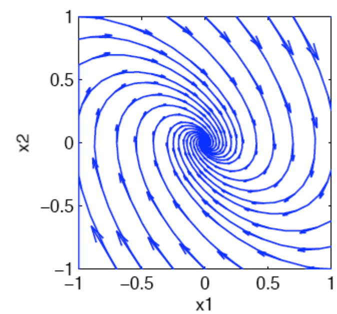
- **Stabil** wenn nahe Start-zustände in seiner Nähe bleiben
  - Lyapunov-Stabilität

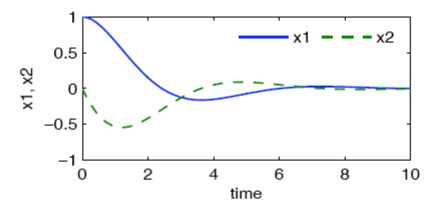




$$\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

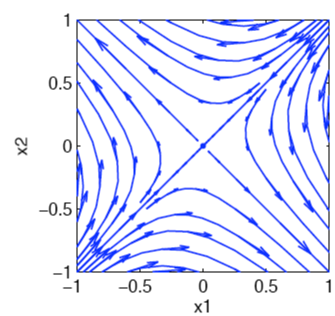
- **Asymptotisch stabil** wenn alle nahen Anfangszustände zum Fixpunkt konvergieren
  - Stabilität + Konvergenz

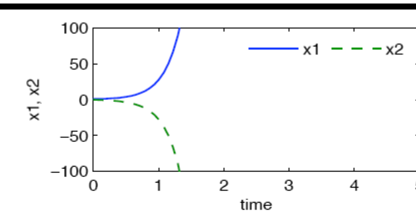




$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e \quad \forall \|x(0) - x_e\| < \epsilon$$

- **Instabil** wenn es Start-zustände gibt, die sich vom Fixpunkt entfernen
  - Einige Startzustände können trotzdem zum Fixpunkt konvergieren

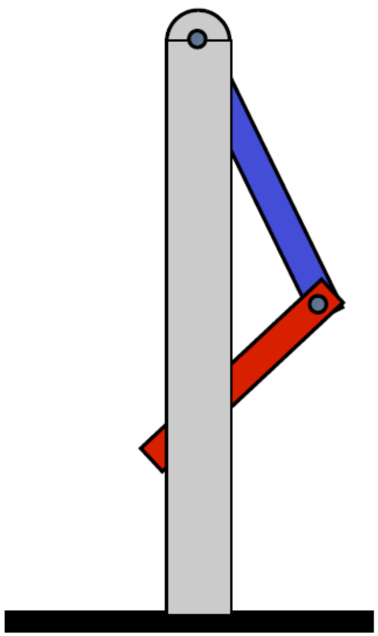


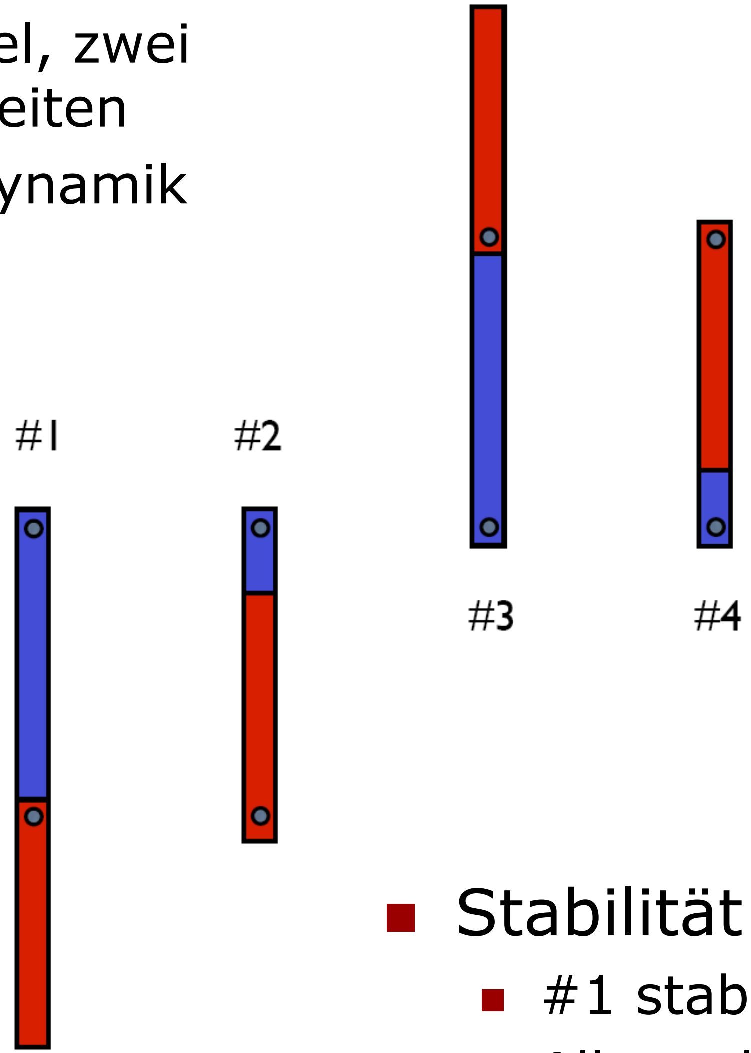


Beispiel: Inverses Doppelpendel

- Zustand: zwei Winkel, zwei Winkelgeschwindigkeiten
- Stark nichtlineare Dynamik

Fixpunkte:





- Stabilität:
  - #1 stabil
  - Alle anderen instabil

Stabilität Linearer Systeme

- Wir betrachten nur: $$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad x(0) = x_0$$
- Stabilität hängt von Eigenwerten der Dynamik-Matrix A ab:
$$\lambda(A) = \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$
- Einfachster Fall: Diagonale Matrix A

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i$$

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} x(0)$$

Asympt. Stabilität: $\lambda_i < 0$

- Block-Diagonales A (komplexe Eigenwerte)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \sigma_m & \omega_m \\ 0 & 0 & & -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix} x$$

$$\lambda_j = \sigma_j \pm i\omega_j$$

$$x_{2j-1}(t) = e^{\sigma_j t}\big(x_i(0)\cos\omega_j t + x_{i+1}(0)\sin\omega_j t\big)$$

$$x_{2j}(t) = e^{\sigma_j t}\big(x_i(0)\sin\omega_j t - x_{i+1}(0)\cos\omega_j t\big)$$

Asympt. Stabilität: $\operatorname{Re}\lambda_i = \sigma_i < 0$

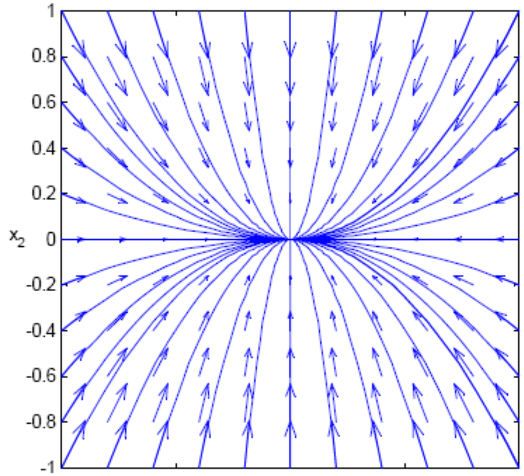
- **Allgemein**: Asymptotische Stabilität g.d.w. $\boxed{\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad \forall\, \lambda_i \in \lambda(A)}$

Eigenwerte der Systemmatrix A bestimmen Stabilität

$$\dot{x} = Ax + \cancelto{0}{Bu} \qquad \cancel{y = Cx + Du}$$

Real e-values

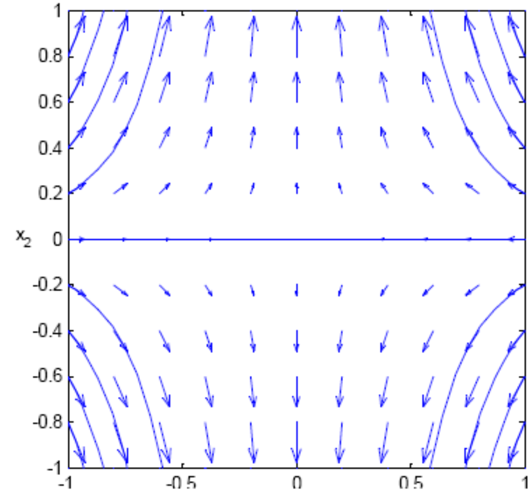
$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$



Real e-values

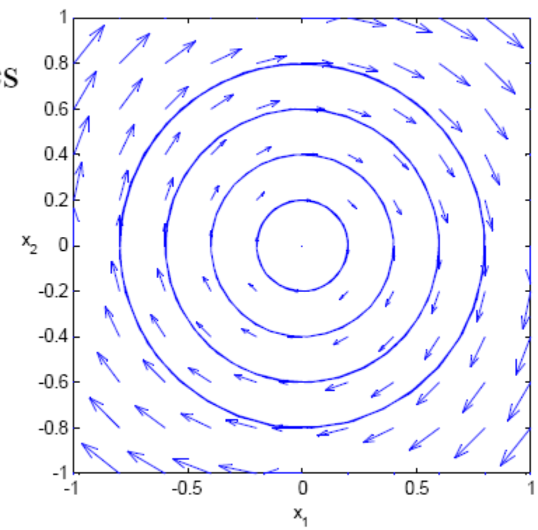
$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$



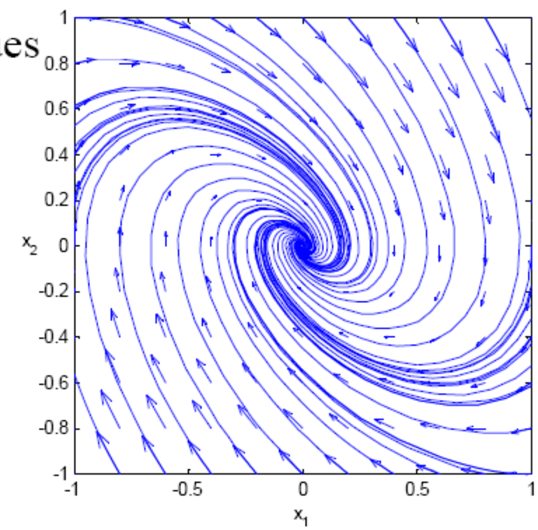
Complex e-values

$\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$



Complex e-values

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$



Lokale Stabilität Nichtlinearer Systeme

- Asymptotische Stabilität der Linearisierung um den Fixpunkt impliziert **lokale** asymptotische Stabilität des Fixpunkts
- Linearisierung um den Fixpunkt:

$$\dot{x} = \underbrace{F(x_e)}_{0} + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e) + \text{Terme höherer Ordnung} \xrightarrow{\text{Linearisierung}} \begin{array}{l} z = x - x_e \\ \dot{z} = Az \end{array}$$

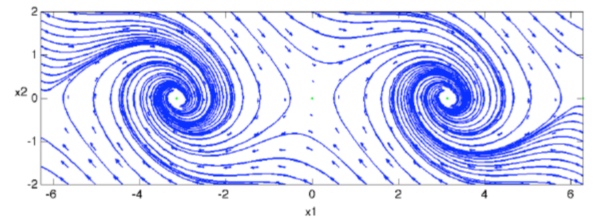
  - Linearisierung instabil => Originalsystem lokal instabil
  - Linearisierung stabil, aber nicht asymptotisch stabil => keine Aussage über die Stabilität des nichtlinearen Systems möglich.

  Bsp: Nichtlineares System $\dot{x} = \pm x^3 \xrightarrow{\text{Linearisierung}} \dot{x} = 0$

    - Linarisierung ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil
    - Je nach Vorzeichen ist Originalsystem stabil oder instabil

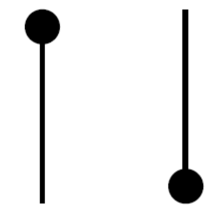
- Lokale Approximation nützlich für Auslegung von Reglern
  - Regler wird benutzt, um System nahe am Fixpunkt zu halten
  - Wenn die Dynamik durch die Linearisierung gut repräsentiert ist, kann man daraus einen linearen Regler ableiten

Stabilitätsanalyse für Pendel



- Systemdynamik: $x = (\theta, \dot{\theta})$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - \gamma x_2 \end{bmatrix}$$



- Oberer Fixpunkt
  - Linearisierung: $\theta = x_1 \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \sin x_1 \approx x_1$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - \gamma x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix} x$$

  - Eigenwerte: $-\frac{1}{2}\gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + \gamma^2}$ positiver Eigenwert => **instabil**

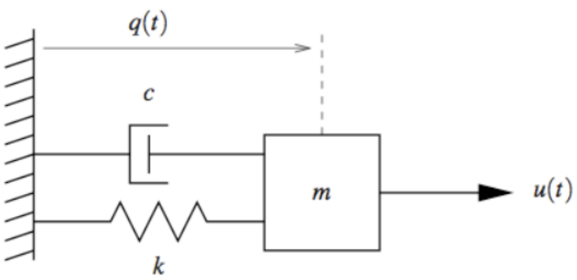
- Unterer Fixpunkt
  - Linearisierung: $x_1 = \pi + z_1$: $\sin(\pi + z_1) = -\sin z_1 \approx -z_1$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \pi \\ z_2 &= x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \gamma\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix} z$$

  - Eigenwerte: $-\frac{1}{2}\gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4 + \gamma^2}$ haben alle negativen Realteil => **lokale Stabilität**

Stabilitätsanalyse mit Ljapunow-Funktion (Direkte Methode)

- Idee: Beschreibe Entwicklung einer "Energie" im System
  - Finde eine Funktion, die den Abstand zum Fixpunkt beschreibt
  - Analysiere deren Verhalten
- Beispiel: Feder-Masse-System



$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0$$

  - Können wir zeigen, dass alle Anfangszustände zum Ruhezustand laufen, ohne Differentialgleichungen zu lösen?
  - Systemdynamik:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \end{aligned}$$

  - Berechne Energie und deren Ableitung

$$V(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 \qquad \frac{dV}{dt} = kx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2$$

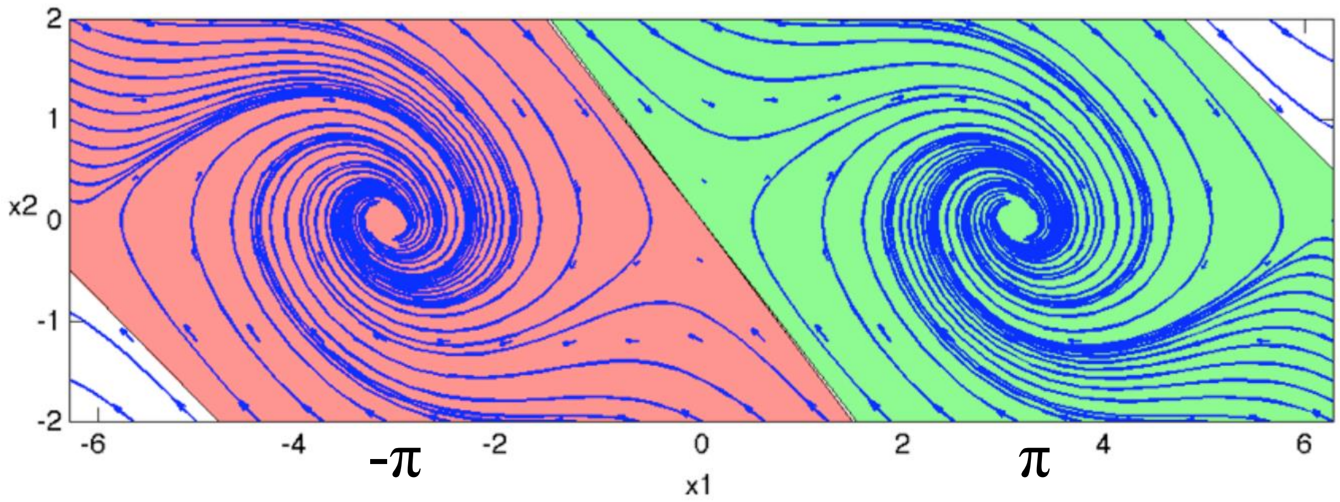
$$= kx_1x_2 + mx_2(-\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1) = -cx_2^2$$

  - Energie ist nichtnegativ und fällt immer => muss sich Null annähern => x_1 und x_2 fallen auf Null

Lokales und Globales Verhalten

- **Stabilität ist ein lokales Konzept**
  - Fixpunkte definieren das lokale Verhalten eines Systems
  - Ein System kann stabile und instabile Fixpunkte haben

- **Einzugsgebiet**
  - Menge der Startwerte, die gegen einen Attraktor konvergieren



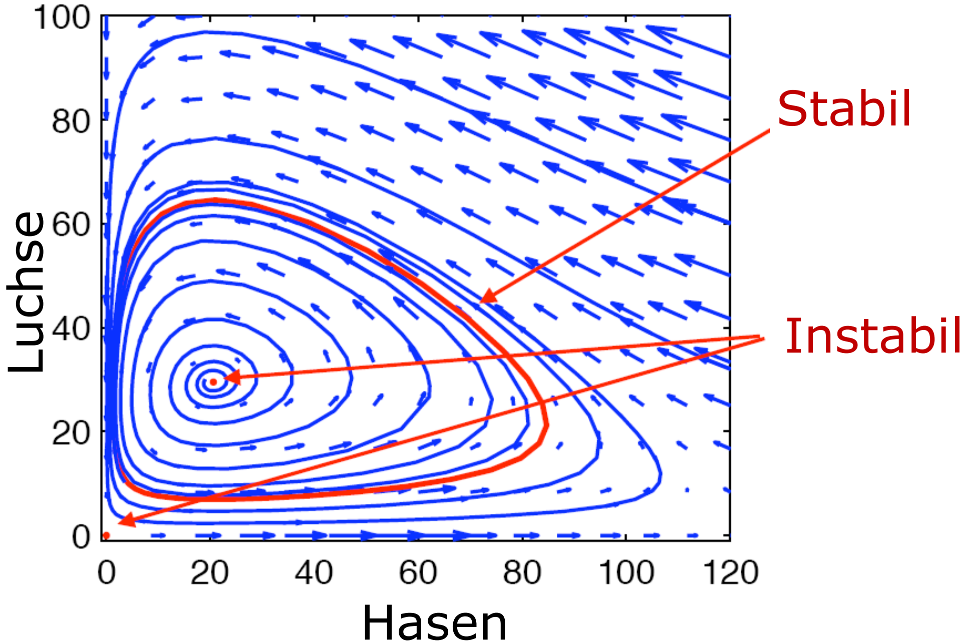
Periodische Attraktoren / Grenzzyklen

- Räuber-Beute-Dynamik

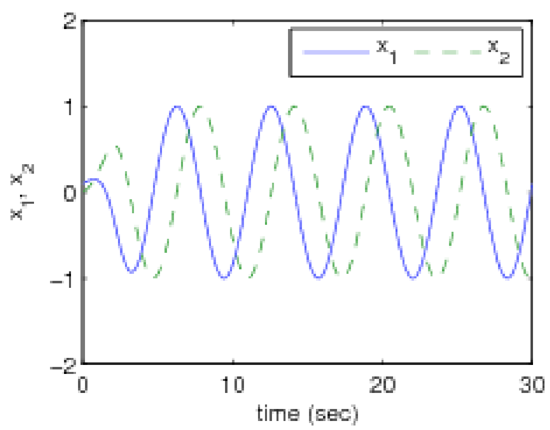
$$\frac{dH}{dt} = rH\left(1 - \frac{H}{k}\right) - \frac{aHL}{c+H} \qquad H \geq 0$$
$$\frac{dL}{dt} = b\frac{aHL}{c+H} - dL \qquad L \geq 0.$$

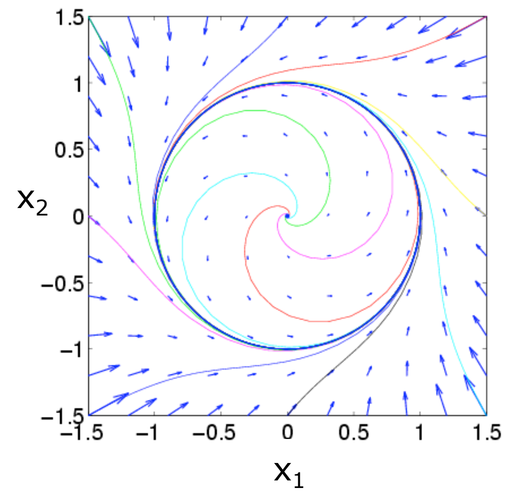
$H(t)$ — Anzahl der Hasen
$L(t)$ — Anzahl der Luchse
r — Vermehrungsrate der Hasen
k — Maximale Hasenanzahl
a — Dezimierung der Hasen durch Luchse
c — verhindert Aussterben der Hasen
b — Vermehrungsrate der Luchse
d — Sterberate der Luchse

- Grenzzyklus:
  - Populationen oszillieren
  - Grenzzyklus ist stabil (nahe Startpunkte konvergieren gegen den periodischen Attraktor)
  - Dies ist ein globales Systemverhalten



Einfaches Beispiel für Grenzzyklus





- Dynamik:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

- Stabilität einer Invariante:

$$V(x) = \frac{1}{4}\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2$$
$$\dot{V}(x) = -\left(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2\right)(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$= \cdots$$
$$= -(x_1^2 + x_2^2)\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2$$

- $\|x\| = 1$ ist eine invariante Menge

$$\boldsymbol{x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \ \forall\, t \in R}$$

=> asymptotisch stabil!