0

Reguläre Sprache L (Grammatik)

$\Longleftrightarrow$ DFA entscheidet L (Automat)

$\Longleftrightarrow$ NFA entscheidet L (Automat)

$\Longleftrightarrow$ $\text{index}(R_L)$ ist endlich (Äquivalenzklassen)

$\Longleftrightarrow$ Regulärer Ausdruck über Σ (Spezielles Wort)

(*) Theorem 3.23

		Technischer Inhalt (Beweis)
Lemma 3.21 "$\Leftarrow$"	Regulärer Ausdruck R mit $L(R)$ $\Rightarrow$ Baue NFA der $L(R)$ entscheidet	Strukturelle Induktion
Lemma 3.22 "$\Rightarrow$"	DFA entscheidet L $\Rightarrow$ $\exists$ regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$	Dynamische Programmierung

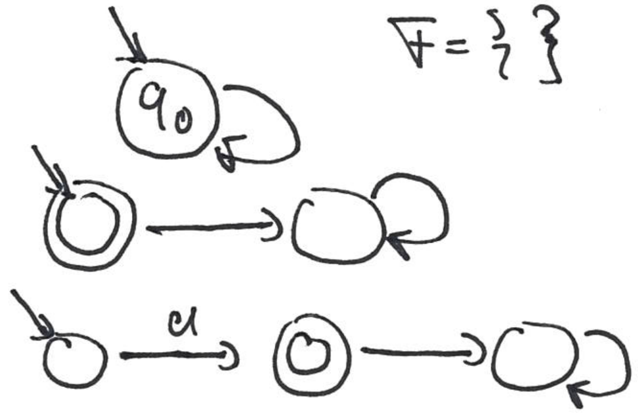
(*)

1

<u>Induktionsanfang</u> (Grundbausteine)

<u>NFA-Skizze</u>

R	L(R)
ϕ	$L(\phi) = \phi$
ε	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
a	$L(a) = \{a\}$



ϕ

$\{\varepsilon\}$

$\{a\}$

<u>Induktionsannahme:</u> R_1, R_2 reguläre Ausdrücke und es ex. NFAs M_1 und M_2 die $L(R_1)$ und $L(R_2)$ entscheiden.

<u>Induktionsschritt:</u> Zeige: Behauptung gilt unter dieser Annahme auch für $R = (R_1) + (R_2)$, $R = (R_1) \cdot (R_2)$, $R = (R_1)^*$

(2)

I. $(R_1) + (R_2) = R$

Skizze

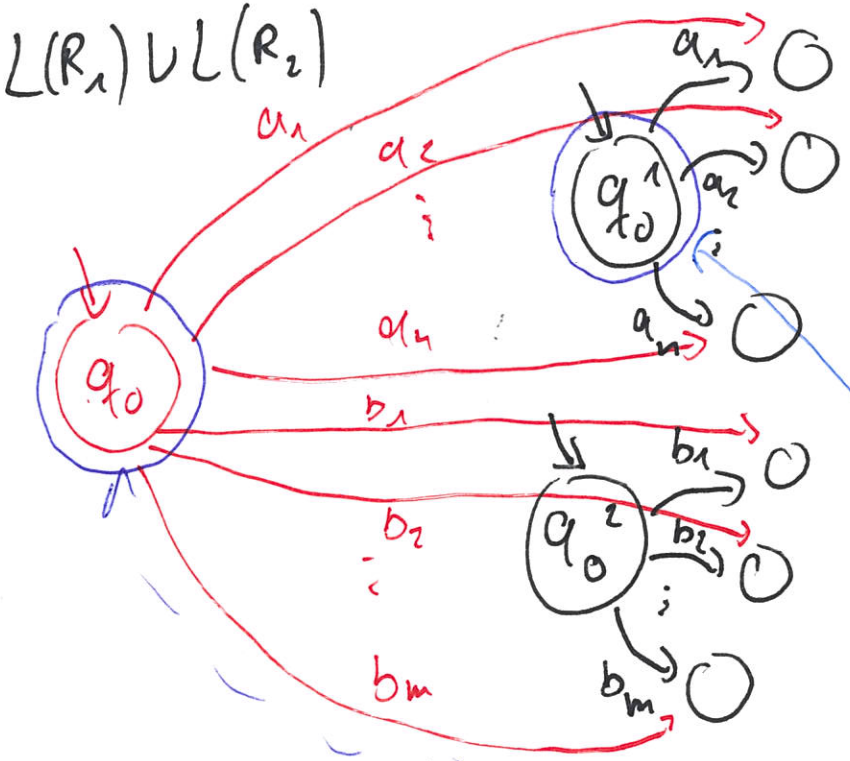
$L((R_1) + (R_2)) = L(R_1) \cup L(R_2)$

gegeben

NFA M

konstruieren für R

"Parallelschaltung"



M_1 $L(R_1)$

M_2 $L(R_2)$

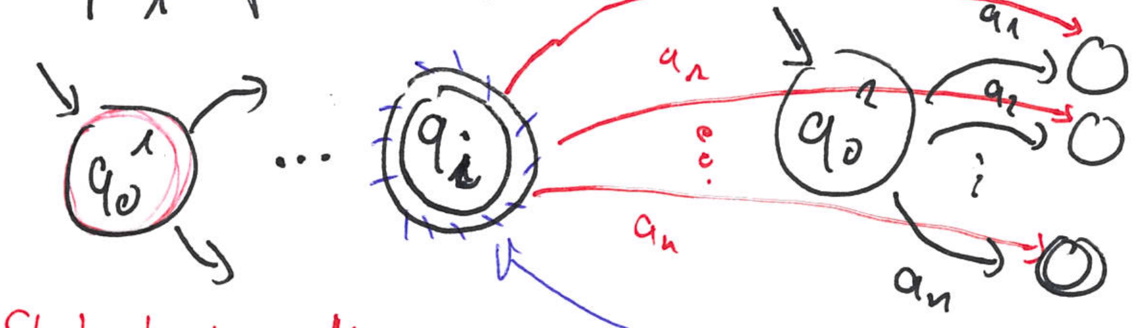
M akzeptiert $L(R)$

Anpassen falls $\{\varepsilon\}$ beteiligt ist

II. $(R_1) \cdot (R_2) = R$ Konkatenation   Skizze

NFA M für $L(R)$ konstruieren!

M_1 für $L(R_1)$ M_2 für $L(R_2)$ gegeben



Startzustand von M

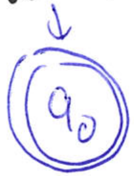
Anpassen: ε nicht Element von $L(R_2)$

„Hintereinanderschaltung"

M akzeptiert $L(R)$.

III. $(R_1)^* = R$ konstruiere M aus M_1

„Rückkopplung"   Hintereinanderschaltung auf sich selbst.



ε in $L(R)$ $q_0 \in F$

□

Lemma 3.22 L regulär Sprache
$\Rightarrow \exists R$ regulärer Ausdruck mit $L(R) = L$.

Beweis: L reguläre Sprache
$\Rightarrow \exists$ DFA M mit M entscheidet L.

Konstruktiv $\rightsquigarrow$ Algorithmus

O.E.: $Q = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $q_0 = 1$

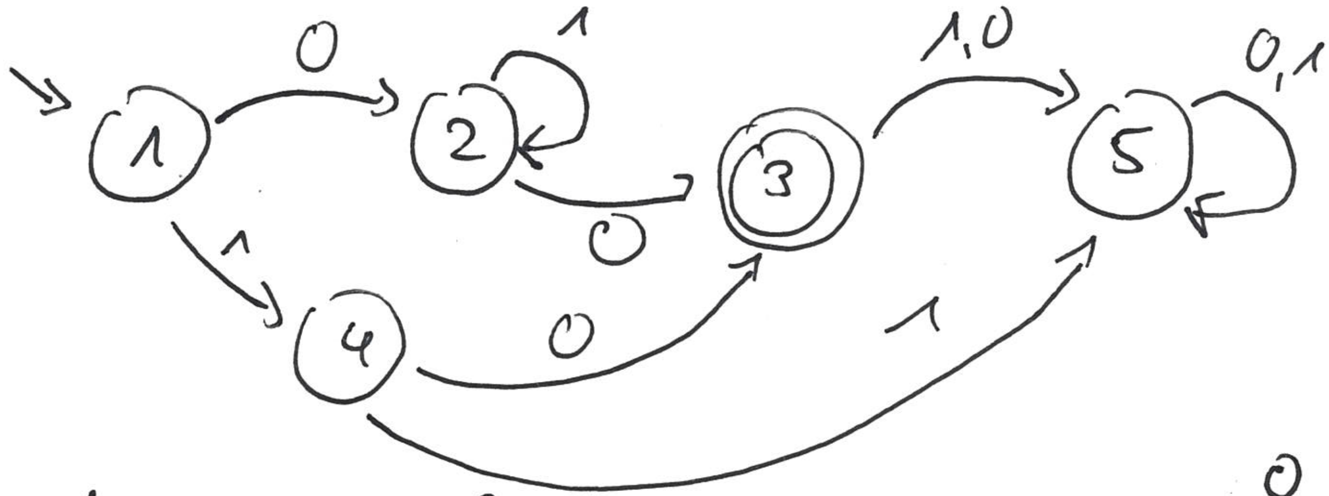
$L_{i,j}^{k}$ — $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ dazwischen; i Start, j Ende

$$L_{i,j}^{k} := \{ w \in \Sigma^* \mid w = w_1 w_2 \cdots w_m,\ w_i \in \Sigma,\ \delta^*(i, w) = j \text{ und } \forall s \text{ mit } 1 \leq s \leq m-1\ \delta^*(i, w_1 w_2 \dots w_s) \leq k \}$$

Idee: Für jedes $L_{i,j}^{k}$ regulären Ausdruck $R_{i,j}^{k}$ bauen.

Bsp

$\{10\} \cup \{01^n0 \mid n \in \mathbb{N}_0\} = L$



$L^{1}_{1,3} = \emptyset \qquad L^{2}_{2,3} = \{1^n0 \mid n \in \mathbb{N}_0\} \qquad L^{0}_{4,3} = \{0\}$

$L^{1}_{2,2} = \{\varepsilon, 1\}, \ \delta(2,\varepsilon) = 2, \ \delta(2,1) = 2$

$\underline{\underline{L^{5}_{1,3}}} = \{10\} \cup \{01^n0 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$= L^{4}_{1,3} \neq L^{5}_{1,5}$

Jedes $L^{k}_{i,j}$ durch ein $R^{k}_{i,j}$ darstellen! $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

$i,j \in \{1,2,3,\dots,n\}$

6

Ann: Gilt schon, Ausdrücke existieren!

$$L_{i,j}^{k} = L\left(R_{i,j}^{k}\right) \qquad R_{i,j}^{k} \text{ regulärer Ausdruck!}$$

w wird von DFA M akzeptiert $\Longleftrightarrow w \in L$

$$\Longleftrightarrow \exists q \in F: \delta^{*}(1, w) = q \Longleftrightarrow w \in \bigcup_{q \in F} \underline{L_{1,q}^{n}}$$

Sei $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ bezüglich M

$$R = R_{1,f_1}^{n} + R_{1,f_2}^{n} + \ldots + R_{1,f_r}^{n}$$

klar $\quad L(R) = L \quad$!

7

<u>Beh.:</u> $\forall\, i, j, k \quad \exists\, R^k_{i,j}$ regulärer Ausdruck

$$L^k_{i,j} = L(R^k_{i,j})$$

<u>Beweis:</u> Induktion über k! $\quad (i,j)$ beliebig, aber fest!

<u>Ind. Anfang:</u> $k = 0$

$$L^0_{i,j} = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ „führt" in } M \text{ \underline{direkt} von } i \text{ zu } j \}$$

$$= \{ a \in \Sigma \mid \delta(i,a) = j \} \qquad \ulcorner i = j \Rightarrow \{\varepsilon\} \text{ kommt dazu} \urcorner$$

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_z$ alle Buchstaben von Σ mit

$$\delta(i, a_l) = j \quad \text{für } l = 1, 2, \ldots, z \qquad \text{endlich viele}$$

$$R^0_{i,j} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_z \qquad \ulcorner i = j \quad \varepsilon + \cdots \text{ dazu} \urcorner$$

(8)

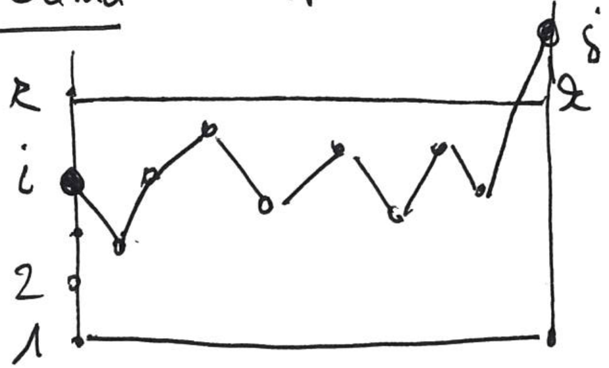
Ind. Ann: Beh. gilt für $k-1$, $k \geq 1$

Für $L_{i,j}^{k-1}$ $\forall\, i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

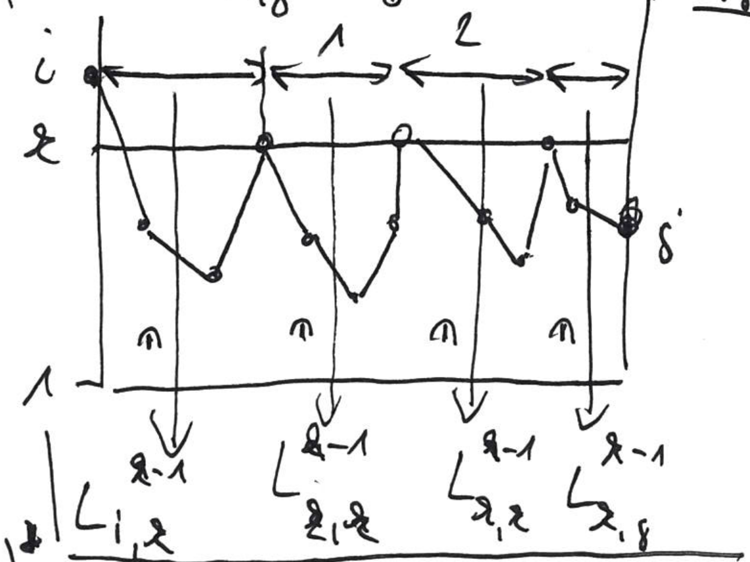
ex. reguläre Ausdrücke $R_{i,j}^{k-1}$ mit $L(R_{i,j}^{k-1}) = L_{i,j}^{k-1}$

Ind.-Schluss: Betracht $L_{i,j}^{k}$ Wie entsteht das in M! aus $L_{i,j}^{k-1}$

Schema "alte" $L_{i,j}^{k-1}$



$\cup$ "neue" $L_{i,j}^{k}$



Formal: $L_{i,j}^{k} = L_{i,j}^{k-1} + L_{i,k}^{k-1} \circ \left(L_{k,k}^{k-1}\right)^{*} \circ L_{k,j}^{k-1}$

9

$$\Rightarrow R^{k}_{i,j} \underset{\text{Ind. Ann.}}{=} R^{k-1}_{i,j} + R^{k-1}_{i,k} \cdot \left(R^{k-1}_{k,k}\right)^{*} \cdot R^{k-1}_{k,j}$$

mit $L(R^{k}_{i,j}) = L^{k}_{i,j}$

$\Rightarrow$ Ind. Schluss gelungen! $\square$

$L^{n}_{1,q}$, $q \in F$ verwenden bzw. $R^{n}_{1,q}$ mit $q \in F$.

$R^{n}_{1,q}$ <u>berechnen</u>! Dynamische Programmierung!

$$L^{k}_{i,j} = L^{k-1}_{i,j} + L^{k-1}_{i,k} \circ \left(L^{k-1}_{k,k}\right)^{*} \cdot L^{k-1}_{k,j}$$

$$R^{k}_{i,j} = R^{k-1}_{i,j} + R^{k-1}_{i,k} \circ \left(R^{k-1}_{k,k}\right)^{*} \circ R^{k-1}_{k,j}$$

$\underline{\underline{n}}$ <u>Matrizen</u> $\quad i,j,k \quad i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

$\delta(i,a_l)=j$

$k=0$

$$\underline{\underline{R^{0}_{i,j}}} \begin{pmatrix} \boxed{R^{0}_{1,1}} & R^{0}_{1,2} & \boxed{R^{0}_{1,3}} & \cdots & R^{0}_{1,n} \\ \boxed{R^{0}_{2,1}} & R^{0}_{2,2} & \boxed{R^{0}_{2,3}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ R^{0}_{n,1} & & \cdots & & R^{0}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{R^{1}_{i,j}}} \begin{pmatrix} R^{1}_{1,1} & R^{1}_{1,2} & R^{1}_{1,3} & \cdots & R^{1}_{1,n} \\ & R^{1}_{2,2} & \boxed{R^{1}_{2,3}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ R^{1}_{n,1} & & & & R^{1}_{n,n} \end{pmatrix}$$

4 Elemente

<u>usw usf.</u>

Rechenaufwand

$\approx n^2 \cdot \underline{4}$ für

<u>n Matrizen</u> $\approx n^3$

Kapitel 4

Mengen kardinalitäten, Kombinatorik

Wahrscheinlichkeiten $\rightsquigarrow$ Berechnungsprobleme analysieren!

4.1 Abzählbare und überabzählbare Mengen

Theorem 4.1 (Schubfachprinzip) Formal

Seien A, B endliche Menge $|A| > |B|$

Dann gilt für jede Abb. $f: A \to B$

$\exists\, a \neq a' \in A : f(a) = f(a')$. (nicht injektiv)

Bsp $|Q| < \ell$ viele Zustände (B) Worte $w_1, w_2, \dots, w_\ell$ $w_i \neq w_j$ $\forall\, 1 \leq i,j \leq \ell,\ i \neq j$ (A)

$\Rightarrow \exists\, w_i, w_j$ mit $w_i \neq w_j$ $\delta^*(q_0, w_i) = \delta^*(q_0, w_j)$, δ^* Abb.