PD Dr. Elmar Langetepe
Christine Dahn
Joshua Könen
Institut für Informatik

Übungszettel 10

Aufgabe 10.1: Algebraische Strukturen über Funktionen (4+4 Punkte)

Sei $F := \mathrm{Abb}(\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Im folgenden seien f und g zwei beliebige Funktionen aus F und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten unterschiedliche Verknüpfungen auf dieser Menge. Geben Sie für jede entsprechende Struktur an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder keines von alledem handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist. Begründen Sie ihre Antworten.

a) $(F, \sim)$ mit $(f \sim g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

b) $(F, \wedge)$ mit $(f \wedge g)(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = g(x) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 10.2: Gruppe und Körper (4+4 Punkte)

a) Seien $(M, \circ)$ eine Halbgruppe und $e \in M$ ein Element von M mit der Eigenschaft, dass $e \circ x = x$ für alle $x \in M$ gilt und für jedes $y \in M$ ein $x \in M$ mit $x \circ y = e$ existiert. Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist.

b) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass dann $a \cdot (-1) = -a$ für alle $a \in R$ gilt. Geben Sie dabei in jedem Schritt an welche Regel Sie verwenden.