

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 2

Die Lösungen müssen bis Mittwoch, den 25.10.2023, um 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (Normen, 1+2+1=4 Punkte)

a) Gegeben ist folgende Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechne $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$ und

$$\|B\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 |B_{i,j}|^2}.$$

Bemerkung: $\|B\|_F$ wird Frobeniusnorm genannt.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{C}^m . Beweise, dass für eine invertierbare Matrix $W \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Funktion $\|x\|_W := \|W \cdot x\|$ ebenfalls eine Norm ist.

Hinweis Verwende, dass für $\|\cdot\|$ die Normeigenschaften gelten, um diese für $\|\cdot\|_W$ zu zeigen.

c) Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{0,5} : \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_m)^T &\mapsto \left(\sum_{j=1}^m \sqrt{|x_j|} \right)^2 \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung eine Norm? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2 (Äquivalenz von Normen, 1+1+1+1=4 Punkte)

Vektor und Matrix p -Normen stehen durch verschiedene Ungleichungen in Beziehung. Im folgenden ist $x \in \mathbb{C}^m$ und $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Beweise jede der folgenden Ungleichungen. Gib außerdem jeweils ein Beispiel eines Vektors $x \neq 0$ oder einer Matrix $A \neq 0$ für beliebiges m, n an für die Gleichheit gilt.

- a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$
- b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$
- c) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$
- d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|A\|_\infty$

Hinweis: Nutze für c) und d) die Ungleichungen a) und b) zusammen mit der Definition induzierter Matrixnormen.

Aufgabe 3 (Spiegelungsmatrizen, 1+1+2=4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.

- a) Sei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und

$$Q := I - \frac{2}{v^*v} \cdot v \cdot v^*.$$

Zeige, dass für alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v^*(Q \cdot w) = -v^*w.$$

- b) Was bedeutet diese Gleichung geometrisch? Zeichne für den zweidimensionalen Fall $n = 2$ mit $v^*v = 1$ eine Skizze aus der die Relationen zwischen v , H , w und $Q \cdot w$ hervorgehen. Dabei bezeichnet H die Gerade orthogonal zu v :

$$H := \{w \in \mathbb{R}^n \mid w^*v = 0\}$$

- c) Zeige, dass Q unitär ist, d.h. $Q^* \cdot Q = I$.

Aufgabe 4 (Orthogonalität, 2+2=4 Punkte)

- a) Wir bezeichnen mit $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}^8$ bzw. $c_1, \dots, c_3 \in \mathbb{C}^4$ die Spalten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4} \quad C := \begin{pmatrix} -1-11i & 1 & -1 \\ -1 & 5+8i & 1 \\ 1 & 1-3i & -5+8i \\ -1 & -5 & -5-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 3}$$

Sind die Spalten von A bzw. von C paarweise orthogonal? Zeige mit Rechenweg warum (nicht).

- b) Bestimme die Matrizen $A^* \cdot A$, $(A^* \cdot A)^{-1}$ und $(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$. Was fällt auf?

Bemerkung: Die Matrix $(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$ ist die sogenannte Pseudoinverse. Multipliziert man sie mit einem Vektor $b \in \mathbb{C}^8$ erhält man gemäß Normalengleichung die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|A \cdot x - b\|_2 \rightarrow \min$.