Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

6. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 15.-19.5.2022

Thema: Stetige Funktionen und Sätze über stetige Funktionen

Videos: Video-08-Stetigkeit

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ alle $x_0 \in D$, in denen f stetig ist (mit Beweis!).

(i) $D := \mathbb{R}$ und
$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \text{falls } x \leq 0, \\ 0 & , \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

(ii) $D := \mathbb{R}$ und
$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(iii) $D := \mathbb{R}$ und
$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \text{falls } x \leq \sqrt{2}, \\ 0 & , \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

(iv) $f(x)$ wie in (iii), aber $D := \mathbb{Q}$.

(v) $D := \mathbb{R}$ und $f(x) := [x] + \sqrt{x - [x]}$, wobei $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$ die sogenannte *Gauß-Klammer* ist.
Hinweis: Man unterscheide die Fälle $x_0 \in \mathbb{Z}$ und $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

Aufgabe P2.

(i) Zeigen Sie, dass es eine positive reelle Zahl x_0 mit
$$\frac{1}{1+\sqrt{x_0}} = x_0$$
gibt.

(ii) Wie viele Nullstellen besitzt die Polynomfunktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 - 3x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 10x^2 + x - 3$$
im Intervall $[-2, 2]$?
Hinweis: Eine Polynomfunktion vom Grad n hat maximal n Nullstellen. Dies folgt aus dem Hauptsatz der Algebra mittels Polynomdivision.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 22.5. und dem 26.5., abzugeben. Am 24.5. ist Dies Academicus und deshalb fallen an diesem Tag sowohl die Vorlesung als auch die Übungsgruppen aus.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.

(i) Untersuchen Sie, für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen in $x = 0$ stetig sind:

a) $f(x) := \begin{cases} ax + b & , \text{ falls } x < 0, \\ 1 & , \text{ falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $g(x) := \begin{cases} a\exp(bx) & , \text{ falls } x < 0, \\ 1 + x & , \text{ falls } x \geq 0. \end{cases}$

(ii) Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{|x|}(x - [x])$ stetig ist.

Aufgabe 2.

(i) Es sei $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom ungeraden Grades. Man zeige, dass $P(x)$ wenigstens eine reelle Nullstelle hat.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \exp(x) + x$. Zeige, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$ gibt.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch
$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & , \text{ sonst} \end{cases},$$
auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ stetig ist.