

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 9

Die Lösungen für die praktischen Aufgaben müssen bis Mittwoch, den 13.12.2023, um 12:00 im eCampus hochgeladen werden. Die Lösungen zu Theorieaufgaben müssen bis 12:00 in die Postfächer im Raum 0.004 im Hörsaalgebäude eingeworfen oder digital im eCampus abgegeben werden. Bei digitaler Abgabe werden keine Scans, Fotos, etc. gewertet.

Aufgabe 1 (LU-Zerlegung von Hand berechnen, 4+4=8 Punkte)

Es sei:

$$A = \begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1.0 \\ 1.4 & 1.1 & -0.7 \\ 0.8 & 4.3 & 2.1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -2.1 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

und die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist (auf fünf Nachkommastellen genau) gegeben durch:

$$x \approx \begin{pmatrix} 0.34995 \\ -0.98023 \\ 2.1595 \end{pmatrix}$$

- Berechne die LU -Zerlegung der Matrix A ohne Pivotisierung auf drei Nachkommastellen genau, siehe Algorithmus 6.1 der Vorlesung. Gib die Matrizen L, U und alle wichtigen Zwischenschritte an. Löse anschließend das Gleichungssystem mit den berechneten L und U durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Berechne den relativen Fehler deiner Lösung.
- Berechne nun die LUP -Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung auf drei Nachkommastellen genau, siehe Algorithmus 6.2 der Vorlesung. Gib die Matrizen L, U, P und alle wichtigen Zwischenschritte an (die Schritte, die gleich denen aus a) sind, müssen nicht nochmal angegeben werden). Löse anschließend das Gleichungssystem mit den berechneten L, U und P durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Berechne den relativen Fehler deiner Lösung und vergleiche den mit dem relativen Fehler aus a). Diskutiere das Ergebnis kurz.

Aufgabe 2 (Gaußsches Eliminationsverfahren, 2+1+1=4 Punkte)

Im folgenden betrachten wir lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $x, b \in \mathbb{C}^m$.

- Implementiere im beiliegenden Framework eine Funktion `LUP`, die eine LU -Zerlegung mit Pivotisierung zu einer gegebenen Matrix A berechnet.
- Schreibe Funktionen `BackSubstitution` und `ForwardSubstitution`, die quadratische lineare Gleichungssysteme zu gegebenen rechten, oberen bzw. linken, unteren Dreiecksmatrizen lösen.
- Schreibe aufbauend auf den oben geschriebenen Funktionen eine Funktion `SolveLinearSystemLUP`, die ein gegebenes Gleichungssystem $Ax = b$ nach x löst.
- Implementiere eine Funktion `LeastSquares(B, c)`, die ein lineares Ausgleichsproblem $\|Bx - c\|_2 \rightarrow \min$ für $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ und $b \in \mathbb{C}^m$ löst. Die Funktion soll intern die gaußsche Normalengleichung und `SolveLinearSystemLUP` benutzen.

Aufgabe 3 (Cholesky-Zerlegung, 4 Punkte)

- a) Programmieren Sie in Python eine Funktion `Cholesky(A)`, die die Cholesky-Faktorisierung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix \mathbf{A} ausrechnet und die berechnete Matrix \mathbf{R} ausgibt.

Bonusaufgabe 4 (Vorbedingung der Cholesky-Zerlegung, 2 Punkte)

- a) Was passiert in der Cholesky-Zerlegung bei einer nicht positiv-definiten Matrix? Finden Sie ein einfaches Beispiel für eine solche Matrix A , berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung und machen Sie die Probe ob $A = R^*R$ gilt. Was geht in diesen Fällen schief? Fällt Ihnen eine Möglichkeit (andere Faktorisierung) ein, die das Problem zu umgeht?