Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

5. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 8.-12.5.

Thema: Potenzreihen und einige wichtige Funktionen

Videos: Video-07-Potenzreihen-exp-sin-cos

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.
Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Reihen jeweils formal um eine Potenzreihe handelt oder nicht. Geben Sie bei den Potenzreihen die Koeffizientenfolge und den Entwicklungspunkt an.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{1}{x^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-2)^n,$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

(iv)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(x-1)^n}{x^n},$$

(v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

(vi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(x) x^n.$$

Aufgabe P2.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n,$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n},$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{7^n} x^{2n}.$$

Aufgabe P3.
Bestimmen Sie für die Reihen unter (i), (ii), (iv) und (vi) aus Aufgabe P1 alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Reihen konvergieren.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgaben zu diesen Aufgaben sind in den Übungsstunden der folgenden Woche, also zwischen dem 15.5. und dem 19.5., abzugeben. Sie können Ihre Abgabe der Tutorin oder dem Tutor auch elektronisch zukommen lassen.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei $a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \text{ ungerade} \end{cases},$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{n} z^n,$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(3z)^{2n}.$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Reihen konvergieren:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{n^5}$,
Hinweis: Man zeige zunächst, dass $\exp(x) > 1$ für alle positiven x ist.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^2 x)$.

Hinweis: Die obigen Reihen sind nicht alles Potenzreihen!

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

(ii) Die Reihe $g(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Tipp zu (i): $1 - |z|^n \leq |1 - z^n| \leq 1 + |z|^n$.
Tipp zu (ii): Das Vergleichskriterium kann hilfreich sein.