Universität Bonn
Mathematisches Institut
Dr. Michael Welter

10. Arbeitsblatt
Analysis (BA-INF022)
== Sommersemester 2023 ==

Woche: 19.-23.6.

Thema: Anwendungen der Differentialrechnung

Videos: Video-13-Anwendungen-Differentialrechnung, Video-14-Extrema-mehrere-Variablen

I. Präsenzaufgaben für die Übungsstunden:

Aufgabe P1.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x},$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)},$$

(iii)
$$\lim_{x\searrow 1} \log(x)\cdot\log(1-x).$$

Aufgabe P2.
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) := x^2 e^{y/3}(y-3) - \frac{1}{2}y^2$$
den Gradienten und die Hessematrix. Bestimmen Sie weiter alle kritischen Punkte und stellen Sie fest, ob es sich um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe P3.
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitze den Gradienten
$$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (3x^2-3)\sin y \\ (x^3-3x)\cos y \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Hessematrix von f.

(ii) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und stellen Sie für jeden kritischen Punkt fest, ob es sich um ein lokales Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkte handelt.

II. Schriftliche Aufgaben: Die Abgabe ist freiwillig. Die Aufgaben sind aber klausurrelevant.

Für jede Aufgabe gibt es maximal 10 Punkte.

Aufgabe 1.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir die *Tangensfunktion* tan durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(i) Bestimmen Sie explizit den maximalen Definitionsbereich der Tangensfunktion.

(ii) Zeigen Sie: Für alle x aus dem Definitionsbereich der Tangensfunktion gilt
a) $\tan(x + \pi) = \tan x$,
b) $\tan(-x) = -\tan x$,
c) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ und $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ bijektiv sind und folglich Umkehrfunktionen besitzen. Diese heißen *Arkus-Funktionen* und werden mit arcsin, arccos und arctan bezeichnet.

(iv) Bestimmen Sie alle Punkte in den Definitionsbereichen der Arkus-Funktionen, wo diese differenzierbar sind, und berechnen Sie die Ableitungen in diesen Punkten.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels der Regel von de l'Hospital

(i)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 - \cos x},$$

(iii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\log(1 + 2x)},$$

(iv)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Aufgabe 3.
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := \cos(x) \sin(y).$$

- **(i)** Bestimmen Sie den Gradienten von f.
- **(ii)** Bestimmen Sie die Hessematrix von f.
- **(iii)** Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und stellen Sie für jeden kritischen Punkt fest, ob es sich um ein lokales Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkte handelt.