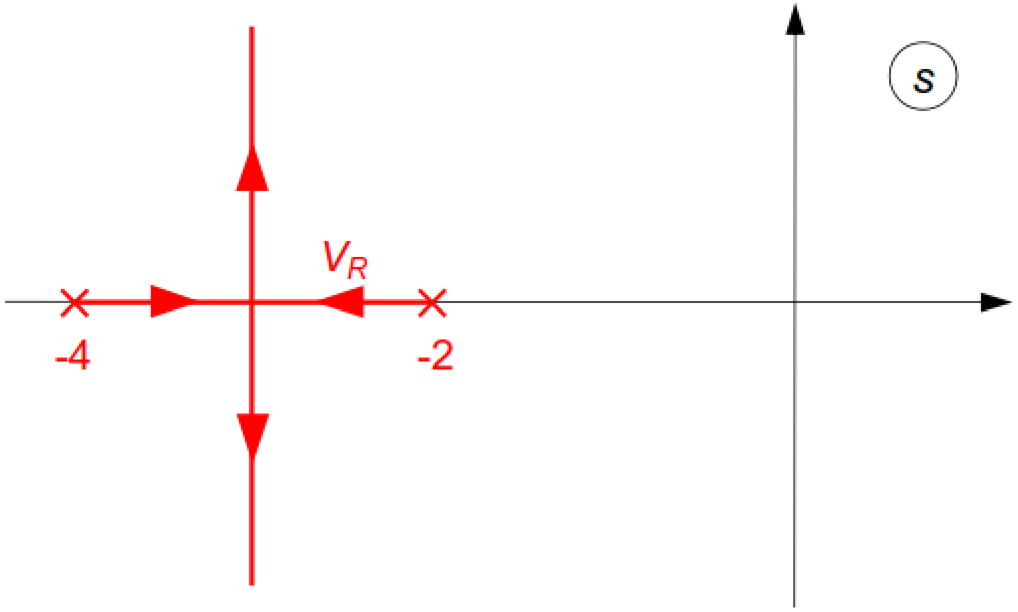
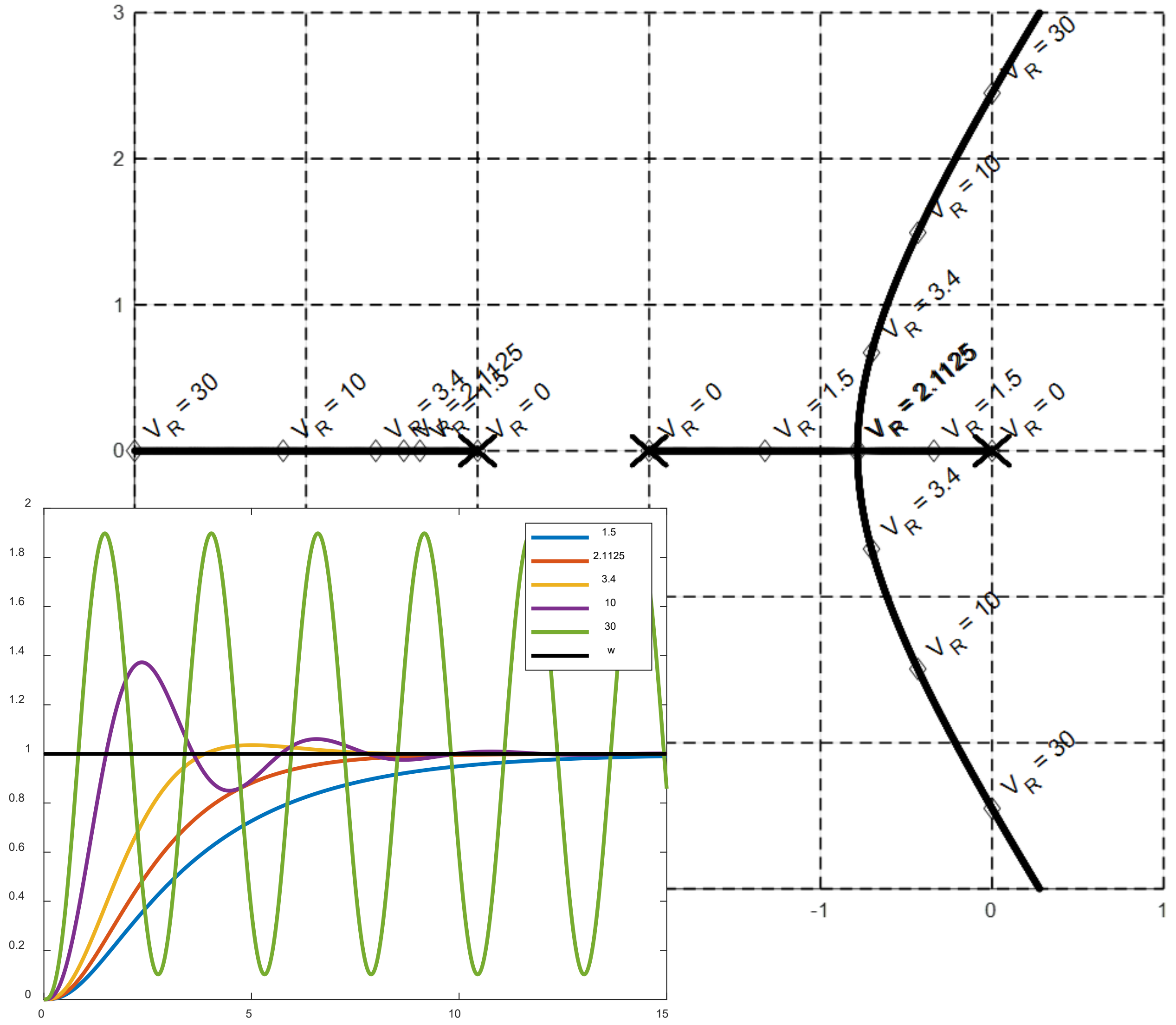
Regelungstechnik

für BEI4, BMEI4 und IBT

Prof. Dr. B. Wagner





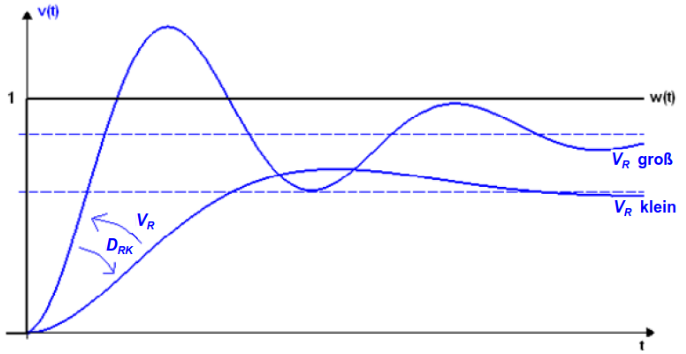
Kap. 6 Stabilitätskriterien
Teil 3: Wurzelortskurven

Wiederholung: Stabilität und Dynamik von Regelkreisen

Kapitel 5: ein paar Sonderfälle wurden betrachtet:

⇒ P-Regler mit PT1-Strecke: stets stabil

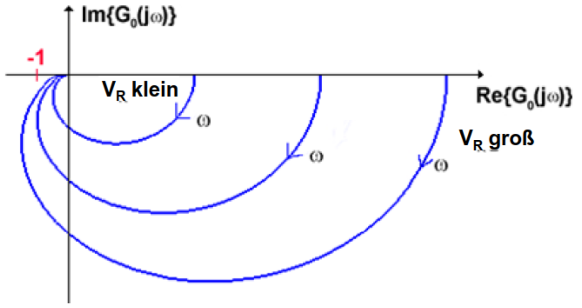
⇒ P-Regler mit PT2-Strecke: stets stabil,
jedoch mit steigendem VR steigt Schwingneigung



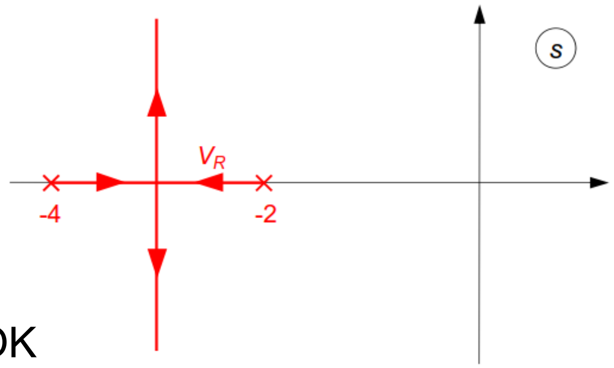
Kapitel 6: Bisher vereinfachtes Nyquist-Verfahren

⇒ Zusammenhang zwischen…
Frequenzgang des offenen Regelkreises
und Stabilität des geschlossenen Regelkreises

⇒ Amplitudenrand und Phasenreserve
Abstand zur Stabilitätsgrenze
Wahl der Reglerverstärkung ⇔ Phasenreserve



Nun: Die Wurzelortskurve (WOK)
⇒ Idee und Herleitung
⇒ Die WOK-Regeln
⇒ Beispiele
⇒ Designstudie (Übungsaufgabe 6.3) ⇔ Reglereinstellung in der WOK



Die Idee der Wurzelortskurven (WOK)

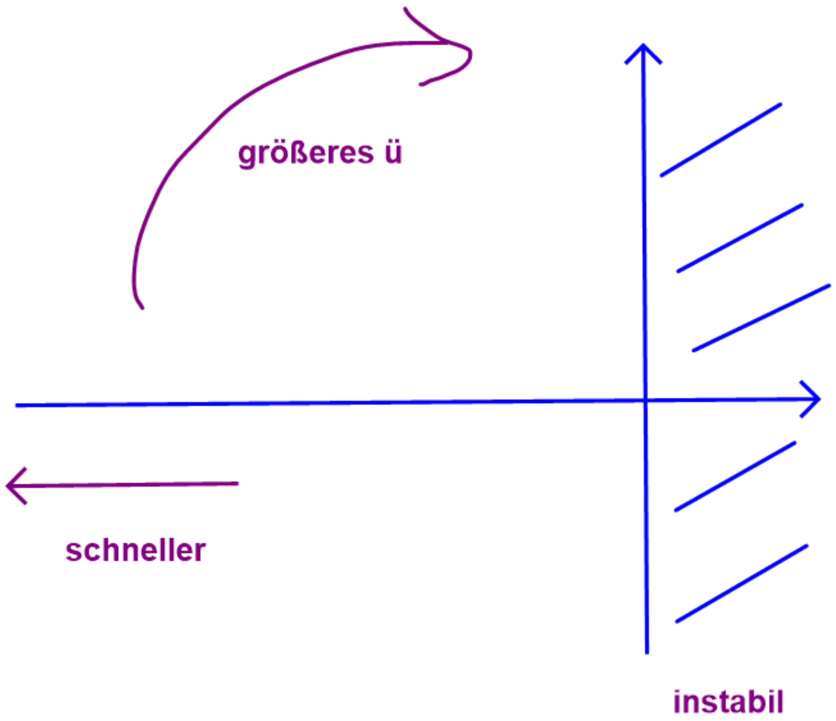
Wo liegen die Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von einem Parameter?

⇒ Pole des Regelkreises geben Aufschluss über einige wichtige Eigenschaften eines Regelkreises
- ⇒ Stabilität
- ⇒ Schwingneigung ⇔ Überschwingweite
- ⇒ Geschwindigkeit ⇔ Übergangsdauer

⇒ Der Parameter der WOK ist meistens die Reglerverstärkung VR

⇒ Darstellung der Pollagen in einer komplexen s-Ebene

--> keine Aussage über bleibende Regelabweichung (stationäres Verhalten) aus WOK möglich



Wir wissen aus Kapitel 1: Im Nenner der Übertragungsfunktion eines Regelreises steht

--> unverstärkt

$$1 + G_o(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + G_S(s) \cdot G_R\,(s) = 1 + \frac{Z_S(s)}{N_S(s)} \cdot \frac{Z_R(s)}{N_R(s)} = 1 + \frac{Z_S(s)}{N_S(s)} \cdot \frac{\tilde{Z}_R(s)}{\tilde{N}_R(s)} \cdot V_R = 1 + V_R \cdot \frac{\tilde{Z}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)} = 1 + V_R \cdot \tilde{G}_o(s) = 0$$

Die für die Herleitung der WOK mit VR als Parameter relevante Gleichung lautet

$$1 + V_R \cdot \tilde{G}_o(s) = 1 + V_R \cdot \frac{\tilde{Z}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\tilde{N}_o\,(s) + V_R \cdot \tilde{Z}_o(s) = 0}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich einige Konstruktionsregeln herleiten

1. Regel: Startpunkte der WOK für $V_R = 0$: $\quad \tilde{N}_o(s) + 0 \cdot \tilde{Z}_o(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{N}_o\,(s) = 0$

Regel 1: Die Startpunkte der WOK sind die Pole des offenen Regelkreises!

2. Regel: Endpunkte der WOK für $V_R \rightarrow \infty$: $\quad \tilde{N}_o(s) + V_R \cdot \tilde{Z}_o(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{V_R}\tilde{N}_o\,(s) + \tilde{Z}_o(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{Z}_o\,(s) = 0$

Regel 2: Die Endpunkte der WOK sind die Nullstellen des offenen Regelkreises!

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Regeln 1 + 2: PD-Regler für eine PT_1-Regelstrecke

$$G_O(s) = \underbrace{V_R(1+sT_V)}_{\text{Regler}} \cdot \frac{V_S}{\underbrace{1+sT_S}_{\text{Strecke}}}$$

$$\underbrace{1+sT_S}_{N_O(s)} + \underbrace{V_R(1+sT_V)\cdot V_S}_{Z_O(s)} = 0$$

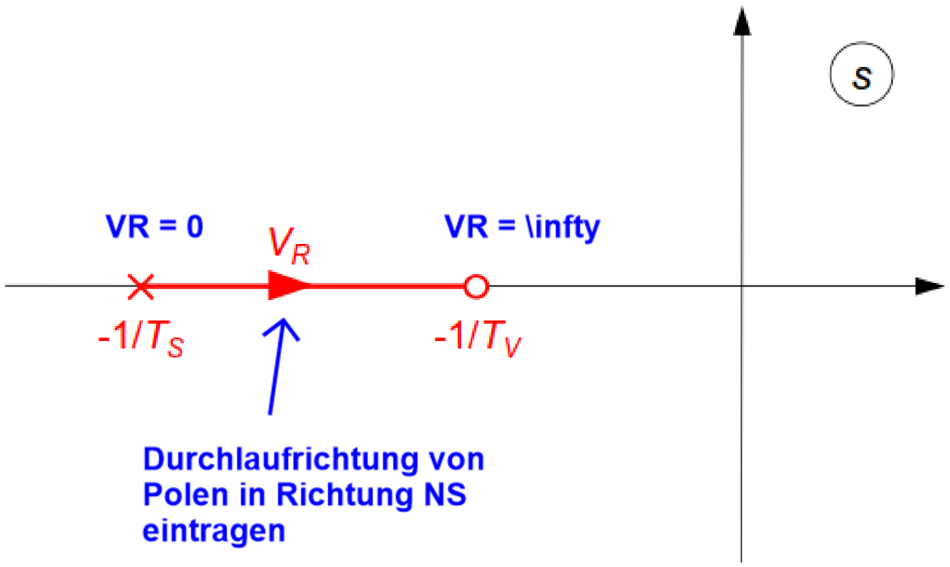
$$\underbrace{1+sT_S}_{\tilde{N}_O(s)} + V_R \cdot \underbrace{V_S(1+sT_V)}_{\tilde{Z}_O(s)} = 0$$

Regel 1: Die Startpunkte der WOK sind die Pole des offenen Regelkreises!

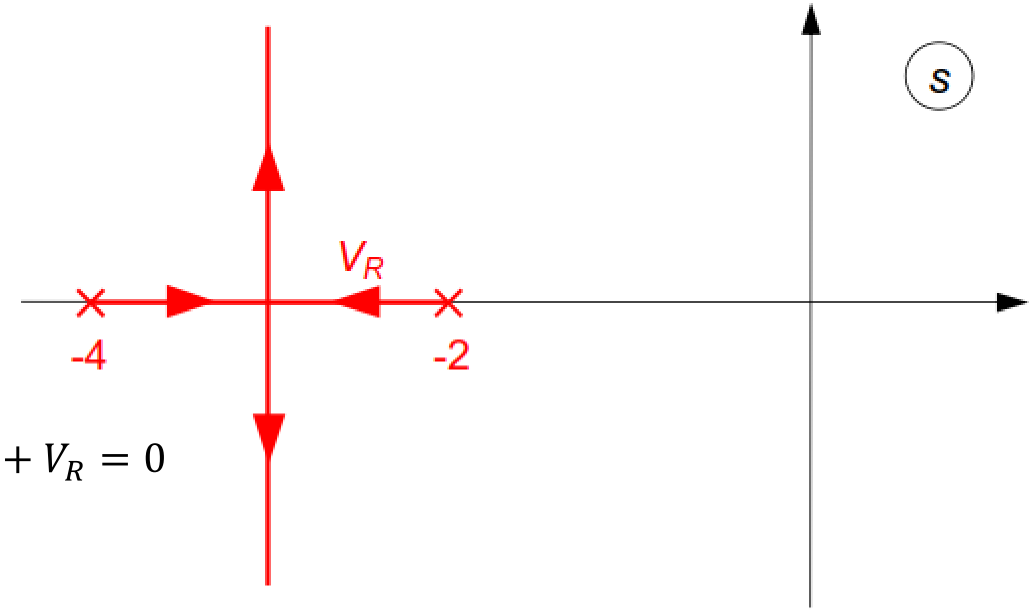
--> Pole von ~G_O(s) eintragen ("x")

Regel 2: Die Endpunkte der WOK sind die Nullstellen des offenen Regelkreises!

--> Nullstellen von ~G_O(s) eintragen ("o")



Herleitung von Regel 3:
Was passiert, wenn $G_o(j\omega)$ mehr Pole als Nullstellen aufweist?



Beispiel: P-Regler für PT2-Strecke

$$G_O(s) = \underbrace{V_R}_{\text{Regler}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s+2)(s+4)}}_{\text{Strecke}}$$

In diesem Fall können wir „zu Fuß" die Lage der Pole berechnen:

Eingesetzt in die Gleichung von Seite 4 liefert:

$\Rightarrow \; 1 + G_o(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + G_S(s) \cdot V_R = 1 + \frac{1}{(s+2)(s+4)} \cdot V_R \quad \rightarrow \quad (s+2)(s+4) + V_R = 0$

$\Rightarrow$ Mit der „Mitternachtsformel" berechnet man: $s_{\infty 1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - V_R}$

- $\Rightarrow$ Für $V_R = 0$ => Pole bei $s_{\infty 1} = -2 \quad s_{\infty 2} = -4$ (Regel 1)
- $\Rightarrow$ Für $V_R = 1$ => Pole bei $s_{\infty 1} = s_{\infty 2} = -3$ (Reeller Doppelpol)
- $\Rightarrow$ Für $V_R > 1$ =>Pole bei $s_{\infty 1,2} = -3 \pm j\sqrt{V_R - 1}$ (Konjugiert komplexes Polpaar mit Realteil = -3 = konstant)

$\Rightarrow$ Man sieht: für VR $\Rightarrow \infty$ streben **zwei Pole gegen Unendlich ⇔ zwei „Äste" der WOK**

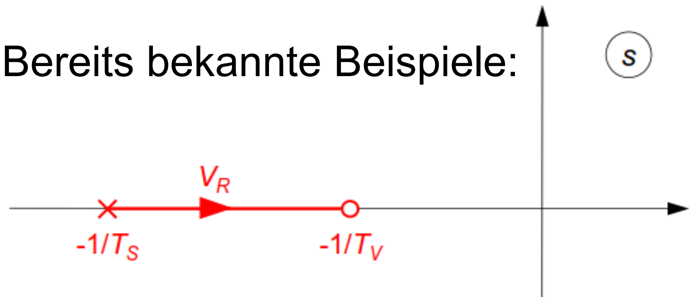
> Regel 3: Die WOK besitzt n – m Äste, die für $\overset{= \text{VR}}{k(\lambda)} \rightarrow \infty$ ins Unendliche gehen
> m = Anzahl der Nullstellen des offenen Regelkreises
> n = Anzahl der Pole des offenen Regelkreises

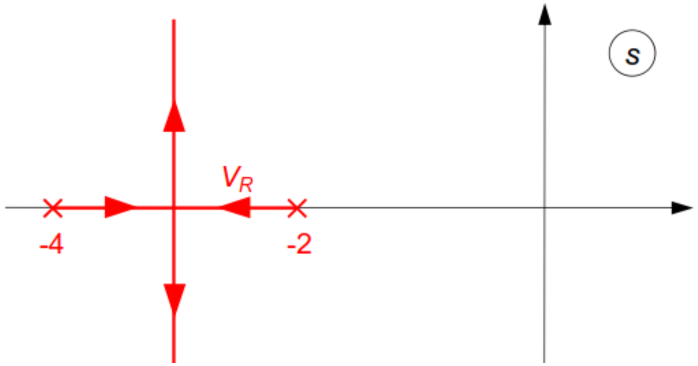
Regel 4: Wurzelorte auf der reellen Achse (ohne Herleitung)

> Regel 4: Falls alle Pole und Nullstellen des offenen Regelkreises in der abgeschlossenen linken s-Halbebene liegen, gilt:
> Jeder Ort auf der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe von reellen Polen und Nullstellen ungerade ist, ist ein Wurzelort.

bedeutet: Bestandteil der WOK

Bereits bekannte Beispiele:





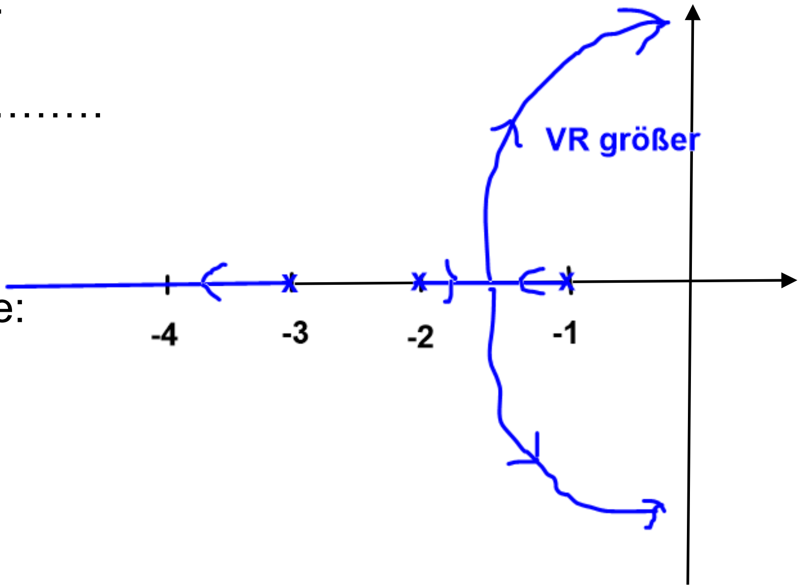
Ein weiteres Beispiel: $G_o(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot V_R$

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: -1, -2, -3

Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: keine

Regel 3: Äste nach Unendlich: 3

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse:



Was gibt es noch für Regeln?

Regel 5: Die WOK ist für reale physikalische Systeme (mit reellen und/oder konjugiert komplexen Polen und Nullstellen von $G_O(s)$) symmetrisch zur reellen Achse.

Es gibt noch weitere WOK-Konstruktionsregeln – diese sind für die Klausur „Regelungstechnik“ jedoch nicht relevant.

Siehe im Moodle-Kurs: WOK-Regeln aus dem Buch "Regelungstechnik" von H. Schlitt

Zur Konstruktion von Wurzelortskurven gibt es neben den fünf aus der Vorlesung bekannten Regeln noch weitere. Diese Datei umfasst sämtliche Regeln. Für die Prüfung sind nur die im RT-Skript besprochenen Regeln relevant.

Wenden Sie die WOK-Regeln an (1)
Skizzieren Sie die WOK mit V_R als Parameter

PT$_1$-Strecke mit P-Regler $G_S(s) = \frac{V_S}{1 + sT_S} = \frac{3}{1 + 2s}$; $G_R(s) = V_R$

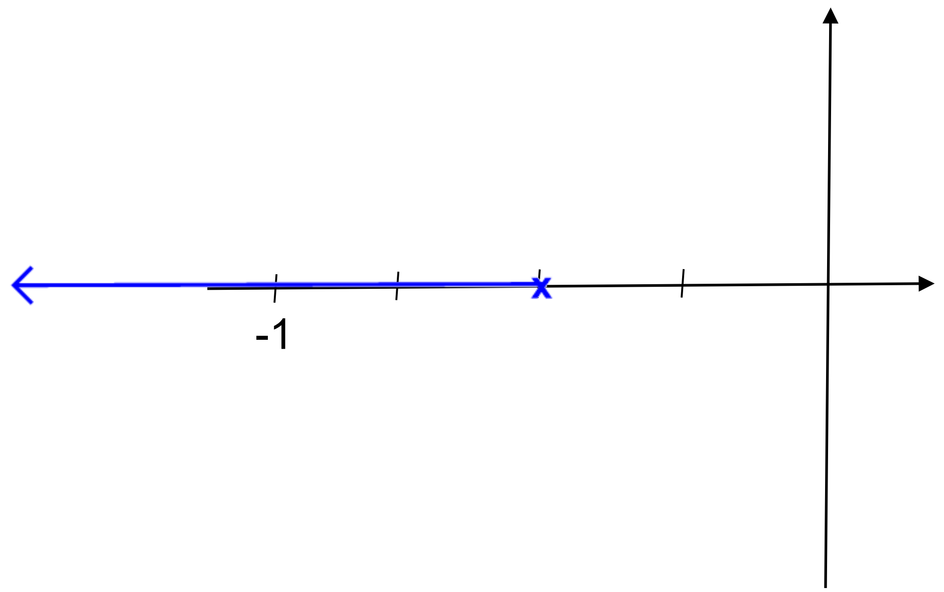
Stellen Sie $1 + V_R \cdot \frac{\tilde{Z}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)}$ auf   **1 + VR * (3 / (0,5 + s)) = 0**

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: ……**-0,5**………

Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: ……**keine**………

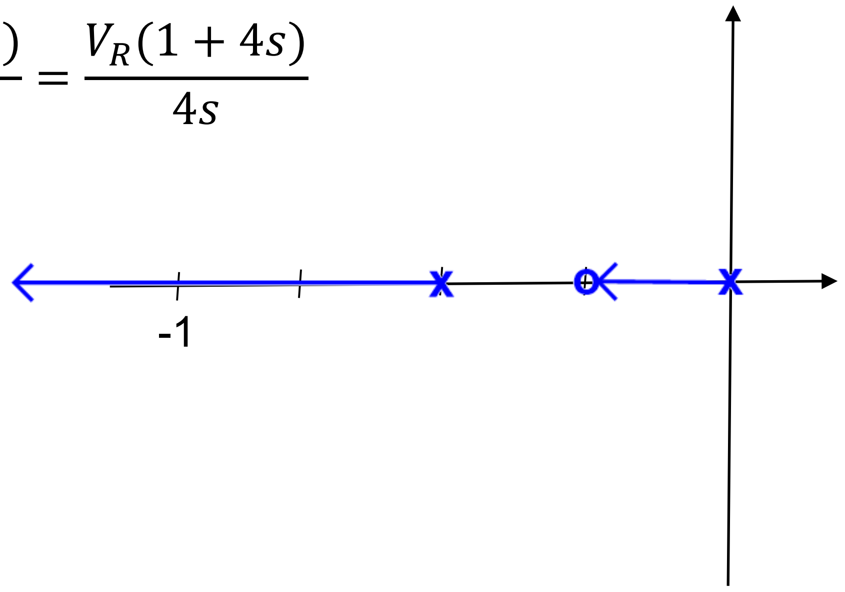
Regel 3: Äste nach Unendlich: …**1**….

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse



Wenden Sie die WOK-Regeln an (2)
Skizzieren Sie die WOK mit V_R als Parameter

PT$_1$-Strecke mit PI-Regler $G_S(s) = \frac{V_S}{1+sT_S} = \frac{3}{1+2s}$; $G_R(s) = \frac{V_R(1+sT_N)}{sT_N} = \frac{V_R(1+4s)}{4s}$



Stellen Sie $1 + V_R \cdot \frac{\tilde{Z}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)}$ auf $1 + V_R \cdot \frac{3\cdot(0{,}25+s)}{4s\cdot(0{,}5+s)}$

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: 0, -0.5 ....

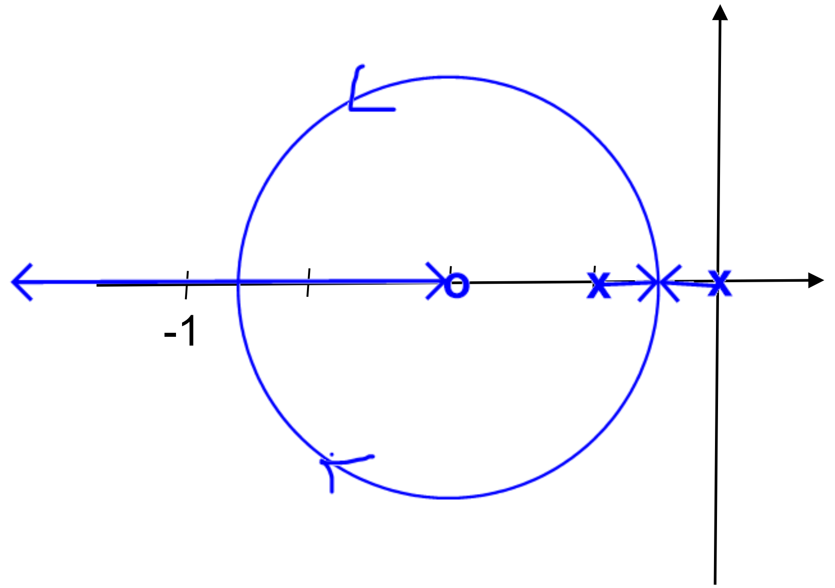
Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: -0,25 ....

Regel 3: Äste nach Unendlich: ..1....

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse

„Thema mit Variation":
PT$_1$-Strecke mit PI-Regler leicht verändert (Pol und Nullstelle vertauscht)

$$G_S(s) = \frac{V_S}{1+sT_S} = \frac{3}{1+4s}; \quad G_R(s) = \frac{V_R(1+sT_N)}{sT_N} = \frac{V_R(1+2s)}{2s}$$



Wenden Sie die WOK-Regeln an (3)
Skizzieren Sie die WOK mit V_R als Parameter

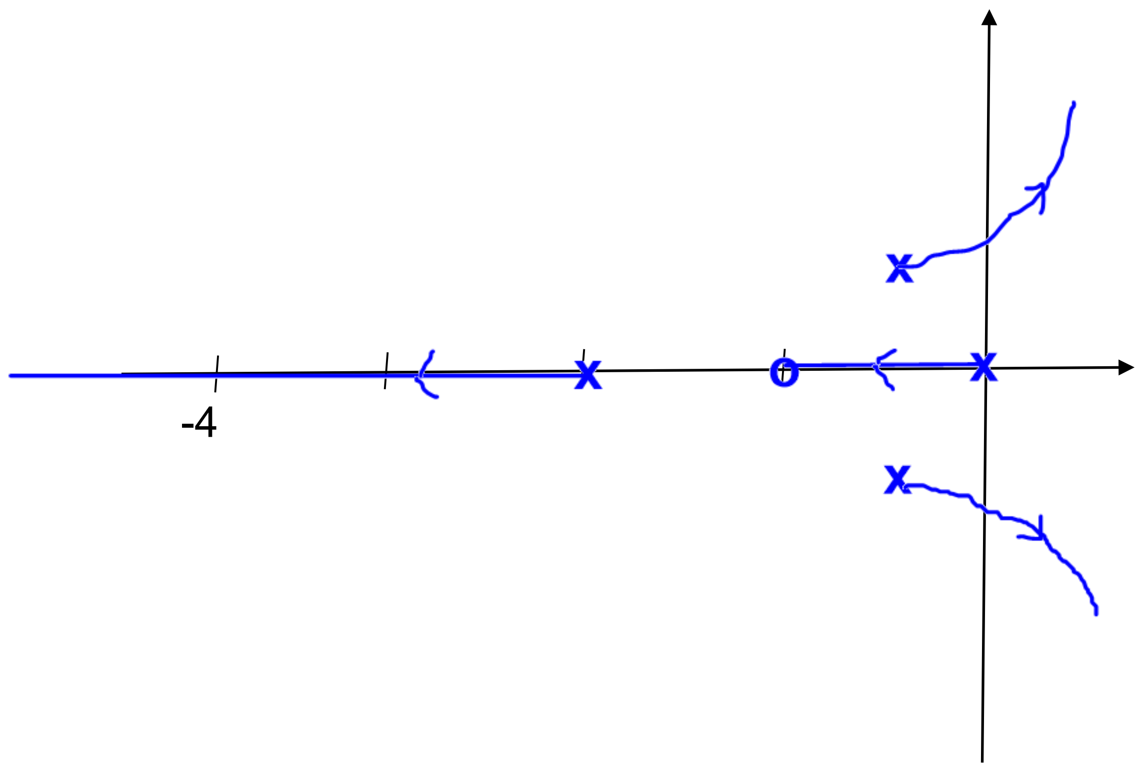
$$\tilde{G}_o(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+s+1)3s}$$

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: ……………… 0, -2, -0.5+0.87j, -0.5-0.87j

Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: …………… -1

Regel 3: Äste nach Unendlich: ……. 3

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse



Wenden Sie die WOK-Regeln an (3)
Skizzieren Sie die WOK mit V_R als Parameter

mit mehrfachen Polen:

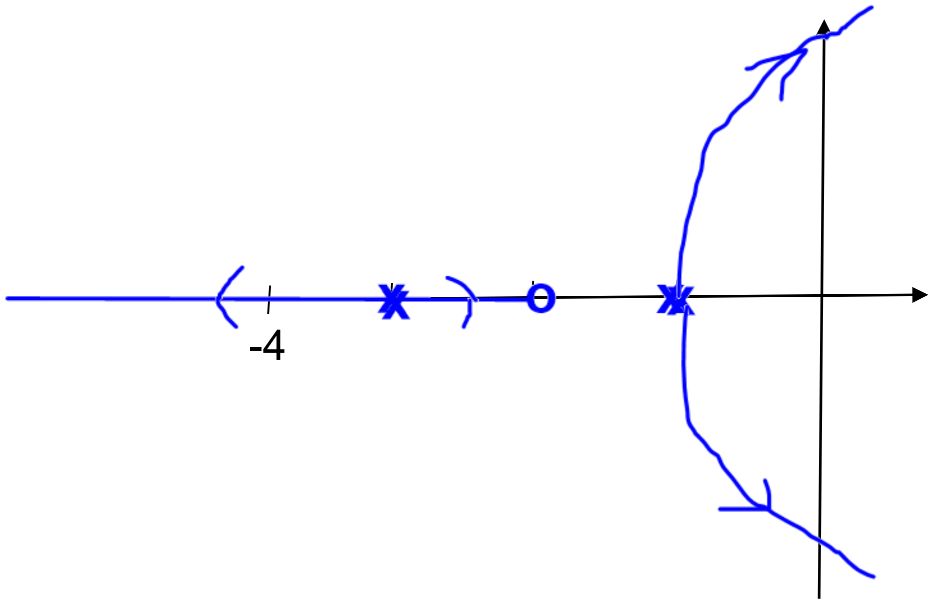
$$\tilde{G}_o(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)^2}$$

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: -1, -3 …………… doppelt

Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: -2 ……………

Regel 3: Äste nach Unendlich: 3 …….

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse



Ein Beispiel, bei dem nicht V_R der Parameter ist

PT_1-Strecke mit PI-Regler
a ist der Parameter

$$G_S(s) = \frac{0{,}25}{s+a}; \quad G_R(s) = \frac{(1+0{,}5s)}{0{,}5s}$$

$\Rightarrow$ Kann die Regelung bei veränderlichem Parameter a instabil werden?

hier muss a stehen

$\Rightarrow$ Umformen der Gleichung $1 + G_S(s) \cdot G_R(s) = 0$ auf die Standardform $\tilde{N}_o(s) + V_R \cdot \tilde{Z}_o(s) = 0$:

$G_O(s) = \frac{0{,}25+0{,}125s}{0{,}5s^2+a\cdot 0{,}5s} \rightarrow 1 + \frac{Z_O}{N_O} = 0 \rightarrow N_O + Z_O = 0$

$\rightarrow (0{,}5s^2 + a \cdot 0{,}5s) + (0{,}25 + 0{,}125s) = 0{,}5s^2 + 0{,}25 + 0{,}125s + a \cdot 0{,}5s = 0$

$\rightarrow \tilde{N}_O(s) = 0{,}5s^2 + 0{,}25 + 0{,}125s$

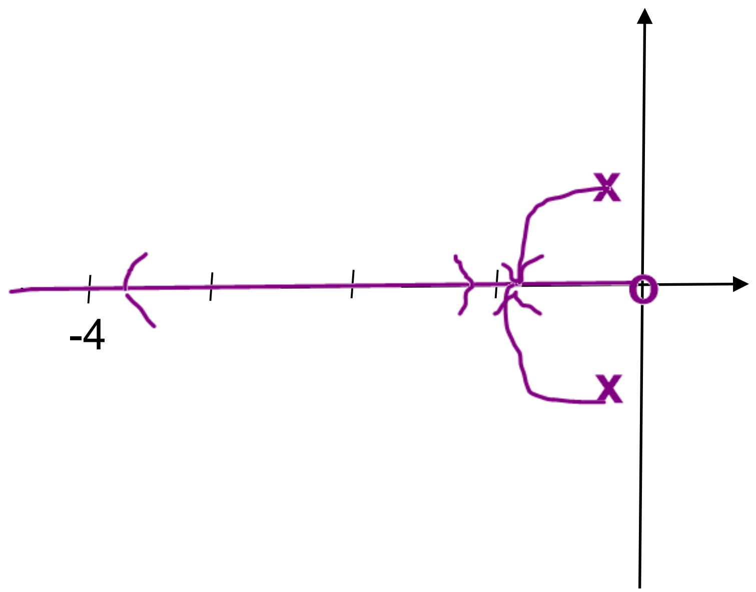
$\rightarrow \tilde{Z}_O(s) = 0{,}5s$

Regel 1: Pole von $\tilde{G}_o(s)$: -0,125+j*0,7 -0,125-j*0,7 ……………

Regel 2: Nullstellen von $\tilde{G}_o(s)$: …0…………

Regel 3: Äste nach Unendlich: …1…..

Regel 4: Wurzelorte auf reeller Achse



Wie arbeitet man mit WOKs? Nutzen Sie die Bezifferung mit dem Parameter!

Beispiel: IT2-Strecke mit P-Regler $\tilde{G}_o(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)s}$

Zur Analyse / Einstellung der Dynamik: Betrachte den
„dominanten Pol“ bzw. das „dominante Polpaar“ -
das ist der Pol bzw. das Polpaar, das am nächsten an Null liegt

$\Rightarrow$ Für $V_R = 1{,}5$: einfacher Pol bei $s_\infty = -0{,}34$
Einschwingdauer ca. … 4 * 1 / 0,34 = 12 nichtschwingend
da reeller dominanter Pol

$\Rightarrow$ Für $V_R = 2{,}11$: doppelter Pol bei $s_\infty = -0{,}8$
Einschwingdauer ca. … 4 * 1 / 0,8 * 2 = 10 reeller Doppelpol,
nichtschwingernd
(aperiodischer Grenzfall)

$\Rightarrow$ Für $V_R = 10$: konj. kompl. Polpaar bei -0,43±j1,5
D = cos(atan(1,5/0,43)) = 0,28 , ω_0 = 1,55
ü ≅ 40%, Tan ≅ 1,2

$\Rightarrow$ Für $V_R = 30$: konj. kompl. Polpaar bei ±2,45j
Dauerschwingung mit Periodendauer … 2pi / 2,45 = 2,6

$\Rightarrow$ Für $V_R > 30$: instabiler Regelkreis

Typische Frage: Wie ist V_R zu wählen, um ü = 4% zu erhalten?

Vorgehen:
1. D mit Formel berechnen --> D = 0,7
2. Winkel phi berechnen --> phi = arccos(0,7) = 45°
3. Winkel einzeichnen und SP mit WOK ablesen --> VR = 3,4