**3. Systeme**

**0. Allgemeines**

🡪   
 🡪

z 🡪 s 🡪 (mit )

**Eigenschaften**

Linearität

System linear, wenn aus folgt: (mit , = const.)

Zeitinvarianz

Zeitverschiebung des Eingangssignals muss zur gleichen Zeitverschiebung im Ausgangssignal führen:

Faustregel: Koeffizienten von Ein- u. Ausgangssignal müssen zeitlich konstant sein

Kausalität: Verlauf Ausgangssignal zu jedem Zeitpunkt nur von Verlauf Eingangssignal zu jedem Zeitp. abhängig

Stabilität: jedes beschränkte Eingangssignal hat ein beschränktes Ausgangssignal zur Folge

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

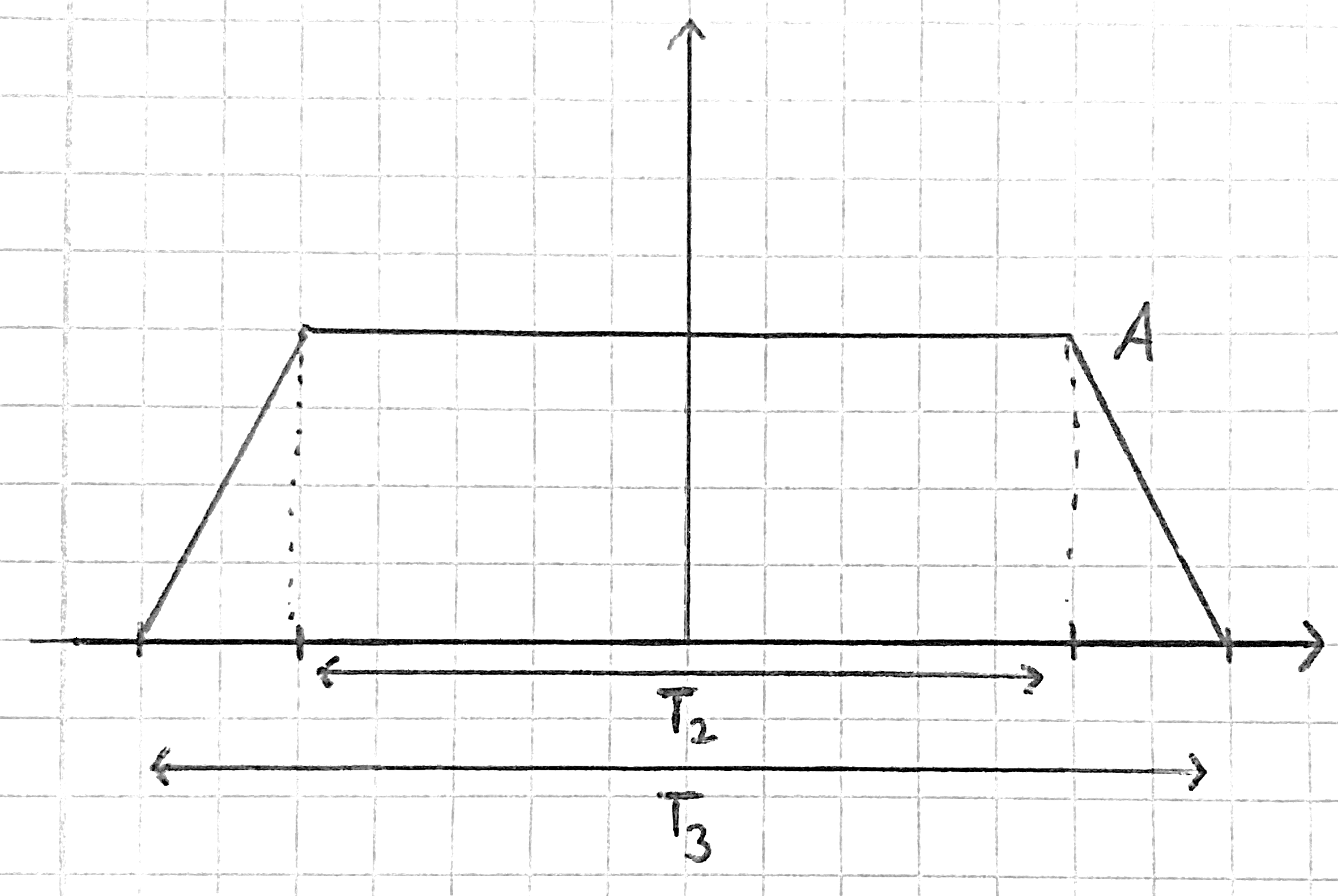
**Faltung**

allg.:

für LTI u. rechtsseitige Eingangssignale gilt:

**Faltung zweier rect-Funktionen** (ergibt Trapez)

aus: folgt:   
mit:



**Sprungantwort PT1-Glied**

DGL RC-Glied: (  
🡪 (Ladekurve C)

**Sprungantwort PT2-Glied** *(Proportionalglied mit Verzögerung 2. Ordnung)*

DGL RLC-Serienschwingkr.:

Standard: Kennkreisfr. , Dämpfung   
charakteristische Gleichung: 🡪 Pole:   
1. Fall: D < 1:

2. Fall: D = 1 (aperiod. Grenzfall):

3. Fall: D > 1 (aperiod. Dämpfung):

Dirac-Impuls:

🡪

allg. DGL zur Beschreibung von LTI-Systemen:

(reale Syst. immer !)

homogene Lösung berechnen (Eigenverhalten des Systems):

1. rechte Seite gleich 0 setzen  
2. charakteristische Gleichung:

2. wenn Einfachpole:

(mit als Konstanten (Ermittlung aus Anfangsbed.) u. als NS aus charakterist. Gleichung)

3. wenn Mehrfachpole:

**4. Systembeschreibung im Zeitbereich (DGL)**

**Sprung- u. Impulsantwort**

Sprungantwort auf Einheitssprung :

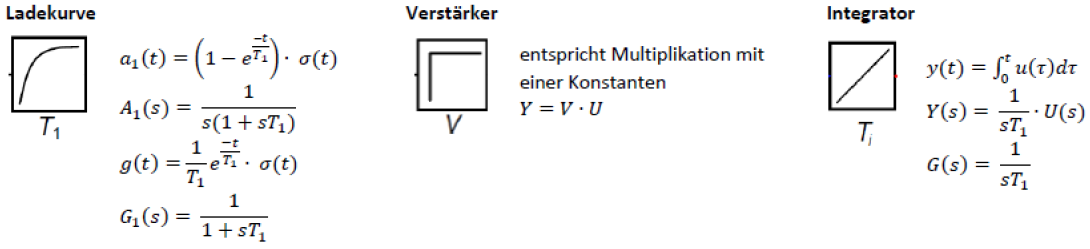
Bsp CR-Hochpass 🡪

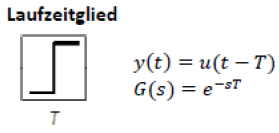
Impulsantwort auf Einheitsimpuls :

Bsp RC-Tiefpass 🡪

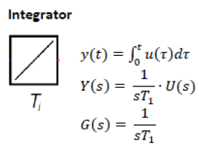
🡪

**Blockschaltbilder**





nicht-lineares System durch Doppellinie gekennzeichnet



Energiegehalt Spule/Kondensator:

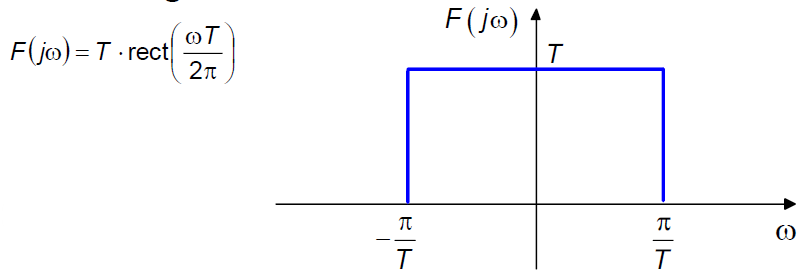
keine Energie wenn:  
🡪 Kondensator: es liegt keine Spannung an  
🡪 Spule: es fließt kein Strom

Mitternachtsformel:

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**5. Signal- und Systembeschreibung im Frequenzbereich**



**Fourier-Reihe**

Fourier-Reihe allgemein:

( = Gleichanteil, = Amplituden, = Phasenverschiebung, = Grundkreisfrequenz)

Fourier-Reihe komplex: (Synthesegleichung)

mit (Analysegleichung) **Symmetrien nutzen !**

Parsevalsches Theorem für Effektivwerte: 🡪 Wurzel

Parsevalsches Theorem allgemein:

**FT reeller Zeitfunktionen** (in realen Systemen auftretende Signale immer reell)

jede Fkt in geraden u. ungeraden Anteil zerlegbar: +  
🡪 Koeffizienten einer rein ungeraden Fkt sind rein imaginär (nur Sinus-Terme)  
🡪 Koeffizienten einer rein geraden Fkt sind rein reell (nur Cosinus-Terme)

nach FT: und

Aus FT folgt: 🡪 gerade Fkt und 🡪 ungerade Fkt.  
🡪 Wenn reell, muss Amplitudengang gerade und Phasengang ungerade Funktion in sein

🡪 FT des geraden Anteils von identisch mit Realteil von , und FT des ungeraden Anteils von identisch mit Imaginärteil von

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Fourier-Transformation (FT)**Unterschied zur Fourier-Reihe:

*Fourier-Reihe:* periodisches Signal, dargestellt durch überlagerte sin- u./od. cos-Funktionen  
*Fourier-Transformation*: aperiodisches Signal; Betrachtung einer unendlichen langen Periode T   
🡪 Abstände im Spektrum verkleinern sich stets , sodass FT die Fkt der vielen Koeffizienten darstellt

FT allgemein:

Zusammenhänge Übergang periodisch 🡪 aperiodisch:

Rücktransformation:

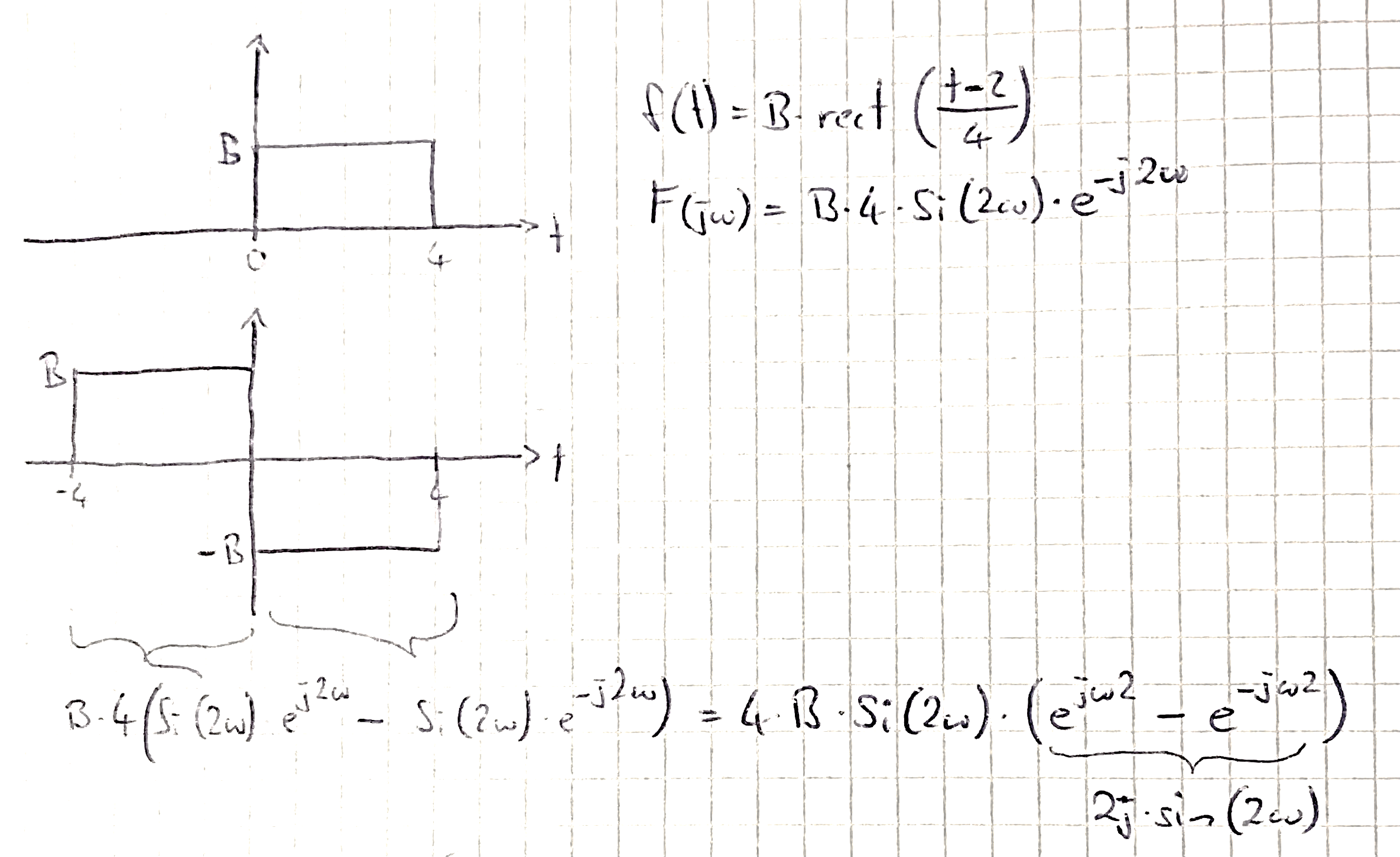
Faltung: aus folgt:

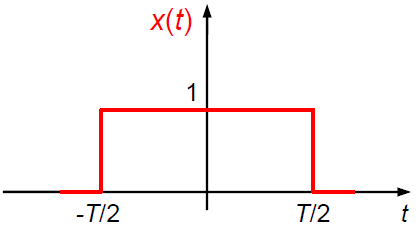
Parsevalsches Theorem:   
 für reelle Signale: 🡪 = normierter Energiegehalt

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Rechteckimpuls**





**6.** **Idealisierte Modellsysteme**

**Dämpfungsmaß:**

**Phasenlaufzeit:**  const. bei verzerrungsfreien Systemen

**Gruppenlaufzeit** (Ableitung von Phasengang)  
 bei verzerrungsfreien Systemen const. in entsprech. Frequenzbereich

**Frequenzgang idealer Tiefpass**

Rücktransformation ergibt Impulsantwort:

Ein Bild, das Text, Antenne enthält.

Automatisch generierte Beschreibung  
🡪 idealer Tiefpass nicht realisierbar, da nicht kausal

Zeitdauer-Bandbreite-Produkt:   
🡪 hohe Bandbreite des TP verbunden mit kurzer Impulsdauer und hoher Flankensteilheit

**Idealer Bandpass**

Rücktransformation ergibt Impulsantwort:

lässt nur Frequenzen in bestimmtem Bereich passieren  
🡪 verschobener Tiefpass (und an y-Achse gespiegelt, da Frequenzgang immer symm.)

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

🡪 idealer Bandpass nicht realisierbar, da nicht kausal

**FT bei periodischen Signalen**

🡪 Impulsreihe mit Fläche von komplexen Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion (x )  
🡪 Spektrum des periodischen Signals

**Multiplikationssatz**

betrifft Faltung im Frequenzbereich:

(Faltungsregel: ) auch:

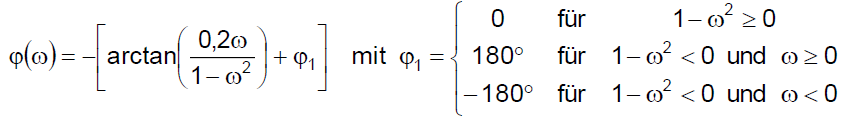
**Frequenzgang**

Herleitung aus DGL:   
folgt: 🡪   
🡪 Frequenzgang:

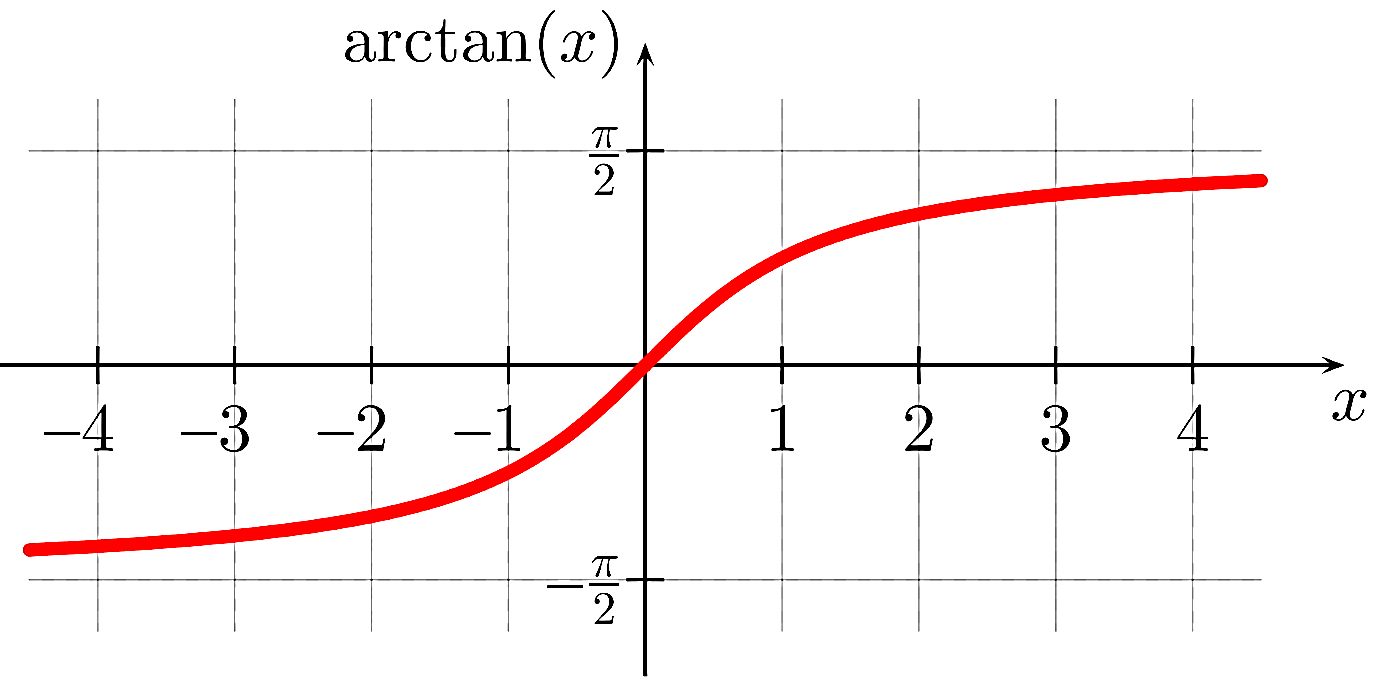
Fourier-Transformation RC-Glied (PT1): RLC(PT2):

Amplitudengang:

Phasengang:  **!**







bei gegebenen Pol- und Nullstellen:

**7. Laplace-Transformation**

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Allgemeines**

* wesentlicher Unterschied zu FT: betrachtet auch Einschaltvorgänge
* nützlich wenn Integral von Fourier-Trafo (FT) nicht konvergiert
* geht aus FT hervor, indem in e-Fkt. Realteil erhält:
* Laplace-Transformation allgemein:
* einseitig: (bei t = 0 rechtsseitiger Grenzwert!)
* Rücktransformation:
* Anfangswertsatz: (nur wenn x(t) bei t=0 keine -Anteile)
* Endwertsatz: (nur wenn endl. Grenzwert )

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 | /  für | / |
| 15 | für |  |
| 16 |  |  |
| 17 |  |  |
| 18 |  |  |
| 19 |  |  |

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Übertragungsfunktion**

aus folgt: 🡪

wenn Impuls als Eingang 🡪 da   
wenn Sprung als Eingang 🡪 da   
🡪 Impulsantwort ist Ableitung von Sprungantwort :

Herleitung aus DGL:

🡪 (für lineare, zeitinvariante Systeme)  
🡪 Nullstellen des Zählers = Nullstellen von G(s), Nullst. des Nenners = Polstellen von G(s)

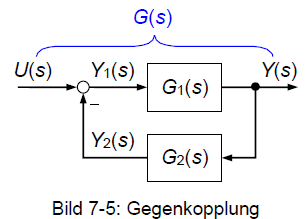
**Übertragungsfunktion – Verknüpfung**

Parallelschaltung:   
Reihenschaltung:

Gegenkopplung:

**Übertragungsfunktion – komplexe exponentielle Signale**

Eingang zB: 🡪   
Eingang periodisch: 🡪   
🡪 für Fourier-Koeff. von : Multiplikation Fourier-Koeff. mit



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Originalbereich** | **Bildbereich** |
| **Ohmscher Widerstand** |  |  |
| **Induktivität** |  |  |
| **Kapazität** |  |  |

Kapazität   
🡪 🡪

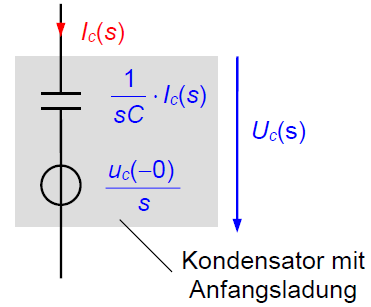
🡪 Stromimpuls durch Stromquelle um C auf 🡪 Spannungsquelle mit Sprung um C  
 aufzuladen auf aufzuladen

Induktivität   
🡪 🡪

🡪 Stromquelle mit Sprung, um 🡪 Spannungsimpuls durch Spannungs-   
 einzuprägen quelle, um einzuprägen

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung



Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung



**Partialbruchzerlegung**

Einzelpole

1. Linearfaktorzerlegung Nennerpolynom (Vorfaktor nicht vergessen!)
2. mit   
   (wenn enthält y(t) einen Dirac-Impuls)
3. Konstanten berechnen:
4. konjugiert komplexe Polpaare möglich, Zsmfassung:

Mehrfachpole

1. Linearfaktorzerlegung Nennerpolynom (Vorfaktor nicht vergessen!)
2. Konstanten berechnen:
3. Konstanten berechnen: ()

und

Rücktransformation in allgemeiner Form (Einfachpole)

🡪

Rücktransformation in allgemeiner Form (Mehrfachpole)

**Pole-Nullstellen-Diagramm** **System realisierbar, wenn Nennergrad > Zählergrad**

G(s) in Linearfaktoren: ( = Nullstellen, = Pole)

**Stabilität**

(asympt.) stabil: alle Pole haben Re < 0 (alle Pole links)

grenzstabil: min. 1 Einzelpol mit Re = 0

instabil: min. 1 Einzelpol mit Re > 0 (min. 1 Pol rechts)

instabil: min. 1 Mehrfachpol mit Re = 0

**Allpass**

reiner Allpass: alle Pole symmetrisch zu Nullstellen (an *Im*-Achse)

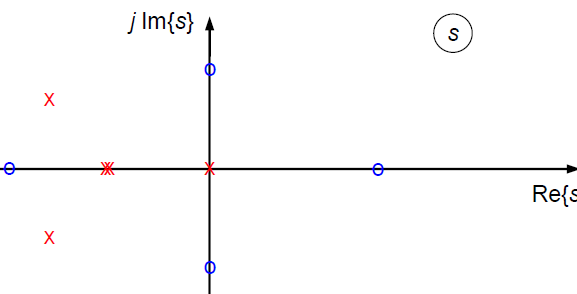
reiner stabiler Allpass: alle Pole symmetrisch zu Nullstellen (an *Im*-Achse) und Pole mit Re < 0

Allpassanteil: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung mit ( symm. zu NS mit Re > 0)

**Minimalphasigkeit**

rein minimalphasig: alle Nullstellen mit Re <= 0

Minimalphasiges Teilsys.: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung siehe Allpass



x = Pole, o = Nullstellen

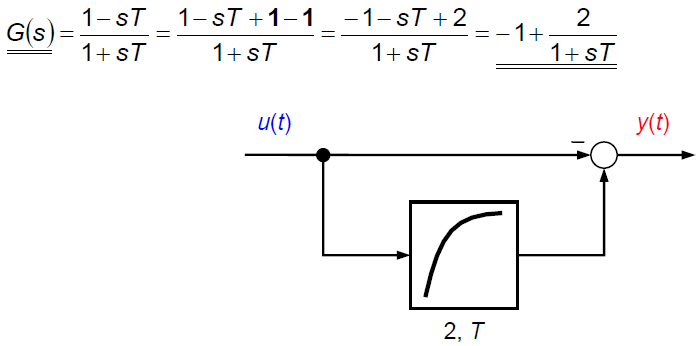
***Hintergrund***

stabil 🡪 Ausgangssignal strebt gegen 0 (nach anfänglicher Anregung)

* nur Pole mit Re < 0: Lösungsanteil 🡪 schnelles Abklingen
* konjugiert komplexes Polpaar mit Re < 0: 🡪 Fkt schwingt abklingend
* ein Pol = 0: Impulsantwort enthält Anteil mit 🡪 Impulsantw. hat konst. Endwert 0
* konjugiert komplexes Polpaar mit Re = 0: 🡪 Fkt schwingt nicht abklingend
* Mehrfachpol = 0: 🡪 Fkt wächst unendlich hoch an
* Mehrfachpol > 0: enthält 🡪 exponentielles Ansteigen bis unendlich

Allpass: für alle und beliebig 🡪 Verwendung zur Phasenkorrektur  
🡪 verändert Energieinhalt nicht Realisierung:

Darstellung mit Phase zB:



Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**8.** **Beschreibung linearer Systeme im Zustandsraum**

**Übertragungsfunktion**

(**Achtung!** Gilt nur für )

**Lösung mit Laplace**1. Zustandsgleichung transformieren:   
2. 🡪 und

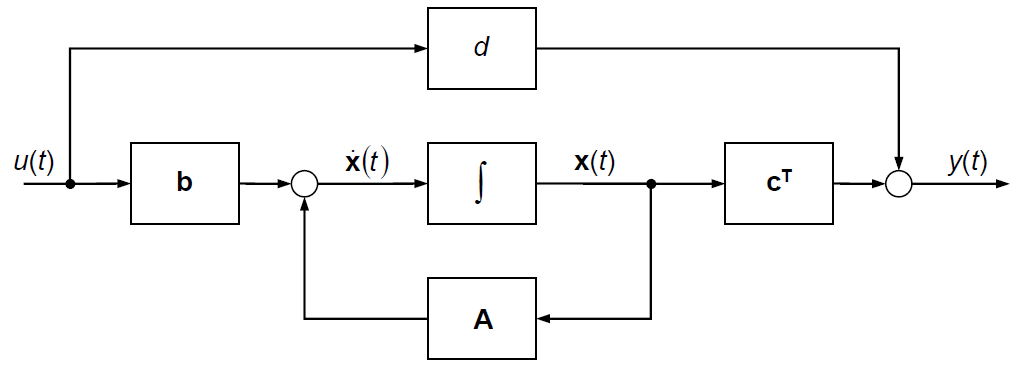
**Allgemeines**

Zustandsvektor: (enthält Zustandsvariablen wie zB , etc.)

1. Ordnung (= Anzahl Gleichungen) wird durch Anzahl Energiespeicher bestimmt
2. Maschen- und Knotengleichungen aufstellen, sodass jeweils eine erste Ableitung enthalten ist (, und )
3. Ableitungen auf linke Seite bringen
4. Zustandsgleichung:
5. Ausgangsgleichung:

(A = Systemmatrix, b = Eingangsvektor, c = Ausgangsvektor, d = Durchgriff)

**Blockschaltbild Zustands- u. Ausgangsgleichung**



**Inverse:**

für 2x2-Matrizen:

**Determinante:**

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Kanonische Strukturen**

allgemeine DGL: daraus folgt:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Zustandsgleichung** | **Ausgangsgleichung** | **Strukturbild** | |
| **1. Kanonische Form**  **Beobachternormalform** |  |  |  | |
| **2. Kanonische Form**  **Regelungsnormalform** |  |  |  | |
| **3. Kanonische Form**  **Kaskadenform** |  |  |  | |
| **4. Kanonische Form**  **Parallelform**  geht nicht bei Mehrfachpolen u./od. konjugiert komplexen Polpaaren |  |  |  |  |

**10.** **Beschreibung zeitdiskreter Signale und Systeme**

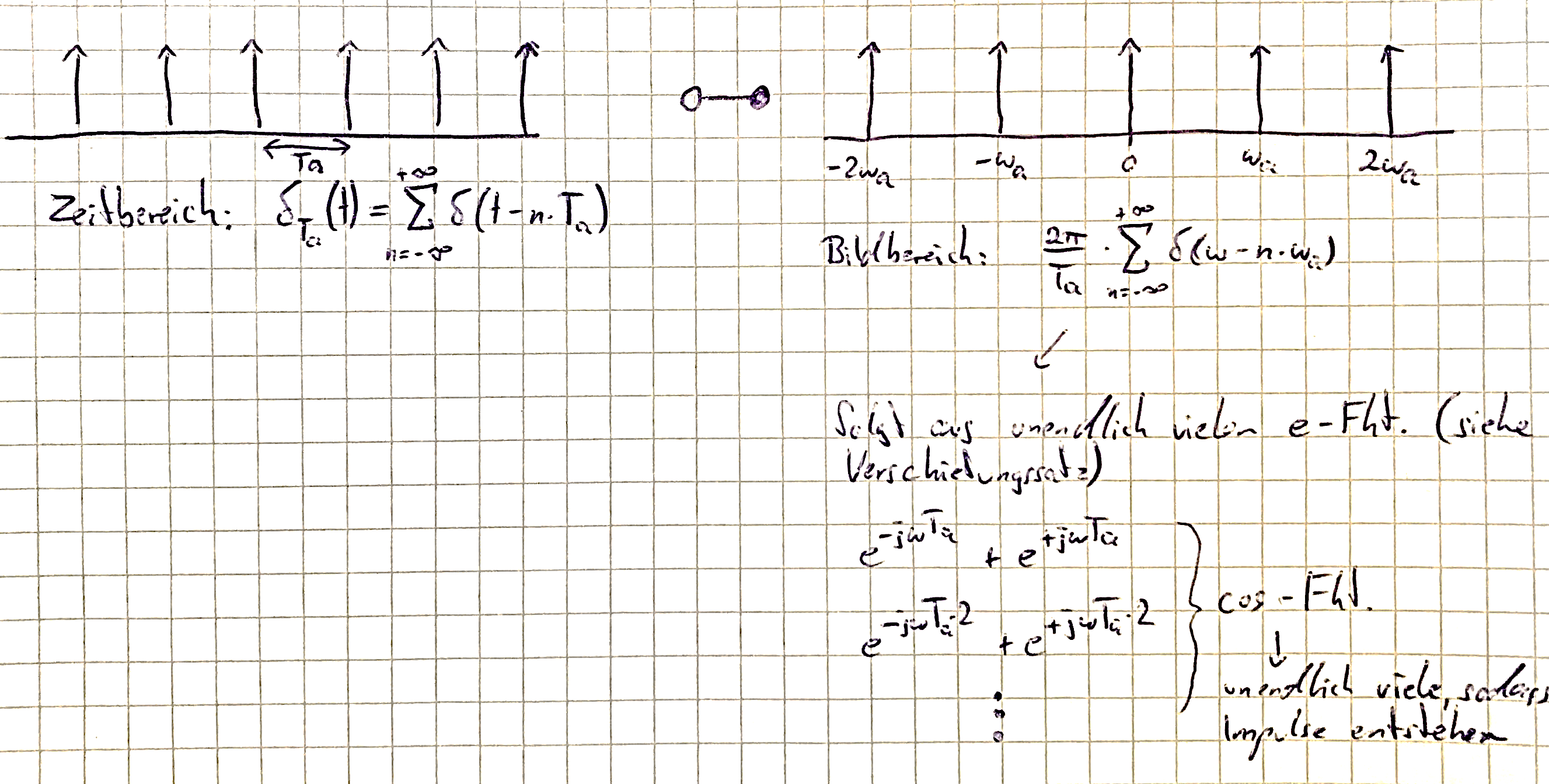
**9.** **Abtastsysteme und Abtasttheorem**

**Allgemeines**

zeitdiskretes gleich kontinuierliches Signal wenn für gilt:

Delta-Abtaster eines kontinuierlichen Signals:   
🡪 FT: **(mit und )**  
 (mit = Abstand zur periodischen Wiederholung der FT des abgetasteten Signals)  
🡪 abgetastetes Signal besitzt periodische Fourier-Transformierte  
🡪 wird durch idealen TP wieder auf Grenzfrequenz begrenzt ()

Abtasttheorem: Um Überlappung (Aliasing) der Frequenzbänder zu vermeiden, muss streng bandbegrenzt sein auf , dann fehlerfreie Beschreibung mgl mit:   
🡪 Realität: nie stark bandbegrenzt 🡪 Signal vor Abtastung durch TP mit steiler Flanke näherungsweise bandbegrenzt (Anti-Aliasing-Filter)



**Signaldarstellung im Zeitbereich**

da Zeitabstand zw Abtastungen hier konstant, kann geschrieben werden:

Zusammenhang: und   
🡪 🡪

komplexe Exponentialfunktion:   
 🡪 Baustein für periodische zeitdiskrete Signale

Faltungssumme: 🡪

**Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich**  
Herleitung : 🡪 setze 🡪

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

= Laufzeitglied

Allgemeine Differenzengleichung

Verschiebung:

Differenzengleichung zeitdiskreter Integrator:

Differenzengleichung zeitdiskreter Differenzierer:

**Rekursive Lösung von Differenzengleichungen**

Differenzengleichung nach auflösen 🡪Tabelle von k = -1 bis k = …

**Analytische Lösung von Differenzengleichungen**

1. homogene Differenzengleichung:
2. charakteristische Gleichung:
3. Pole bestimmen
4. homogene Lösung bei Einzelpolen:   
   ..Doppelpol:   
   🡪 stabil, wenn alle Pole im Einheitskreis ()
5. partikuläre Lösung: bei Sprungantwort Konstante ansetzen, Gesamtlösung bestimmen, in Differenzengleichung einsetzen, homogene Lsg = 0, partikuläre Lösung verbleibt, angesetzte Konstante einsetzen, nach dieser Konstante auflösen, Ergebnis ist partikuläre Lsg
6. Konstanten durch Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmen

Sprungantwort zeitdiskretes PT1-Glied:

FT-Regel:



**Zeitdiskrete Fourier-Transformation**

FT zeitdiskretes Signal:   
= FT abgetastetes Signal:

Bsp:

Rücktransformation: **Symmetrien ausnutzen!**

Annäherung:

DFT (diskrete FT): (mit N = Anzahl Abtastwerte)

**Zeitdiskrete Fourier-Reihe**   
zeitdiskretes Signal periodisch, wenn 🡪 Grundkreisfrequenz   
Fourier-Reihe: (mit = Anzahl Abtastwerte einer Periode)  
Analysegleich.: ( = Startpkt; beliebig; für : )

**Frequenzgang**

(folgt aus Differenzengleichung)

**11. z-Transformation**

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

z-Transformierte: (mit ) **Ordnung: Nennergrad!**

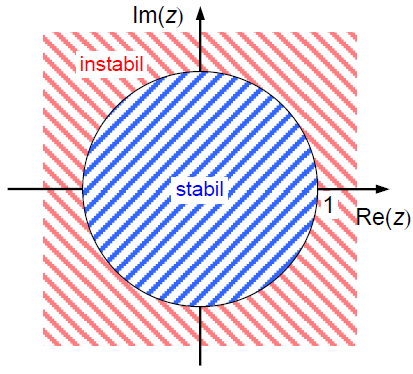
Übertragungsfunktion: 🡪 Mult. : ()  
🡪 Linearfaktorzerlegung:

Sprungantwort:

Anfangswertsatz: Endwertsatz:

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung



**Einschwingvorgänge / Partialbruchzerlegung**

muss im Zähler stehen

1. wenn mindestens eine NS bei :  
   VORHER nach vorne ziehen: , anschließend hochmultiplizieren
2. wenn keine NS bei : NACH Partialbruchzerlegung alle Brüche mit erweitern 🡪 Verschiebungssatz bei Rücktrafo

**Stabilität von zeitdiskreten Systemen**

stabil 🡪 🡪 alle Pole innerhalb Einheitskreis

grenzstabil 🡪 🡪 min. ein Einzelpol auf Einheitskreis

instabil 🡪 od.   
🡪 min. ein Pol außerhalb Einheitskreis od. min. ein Mehrfachpol auf Einheitskreis

minimalphasig 🡪 🡪 alle NS kleiner gleich 1

Allpass 🡪 und 🡪 Pol und NS liegen auf einem **Strahl**

Verzögerung 🡪 🡪 Pole in Ursprung

aus **🡪 auf normieren!**

folgt:

**Zustandsraum**

Zustandsgleichung: 🡪 z-transformiert: (mit Anfangsbedingung)

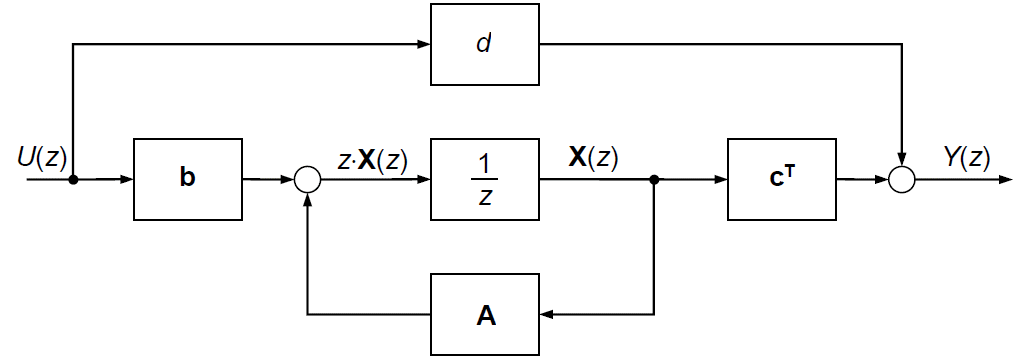
Ausgangsgleichung: 🡪 z-transformiert:

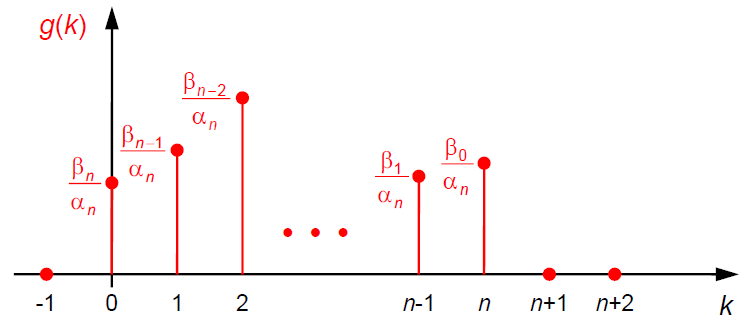
z-Übertragungsfunktion: (**Achtung!** Gilt nur für )

Ausgangsform: oder

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Zustandsgleichung** | **Ausgangsgleichung** | **Strukturbild** |
| **1. Kanonische Form** |  |  |  |
| **2. Kanonische Form** |  |  |  |

* 3. und 4. Kanonische Form selbes Prinzip wie bei zeitkontinuierlichen Systemen





**12. Zeitdiskrete Systeme**

**FIR-Systeme** *(finite impulse response)*

Übertragungsfunktion in Form:

🡪 Überlagerung von n+1 verschobenen Impulsen:

aus folgt Transformation: 🡪 Verschiebung des Nullpunkts:

keine Rückkopplungen, da nicht rekursiv FIR-Systeme immer stabil, da -facher Pol bei

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Zustandsgleichung** | **Ausgangsgleichung** | **Strukturbild** |
| **1. Kanonische Form** |  |  |  |
| **2. Kanonische Form** |  |  |  |

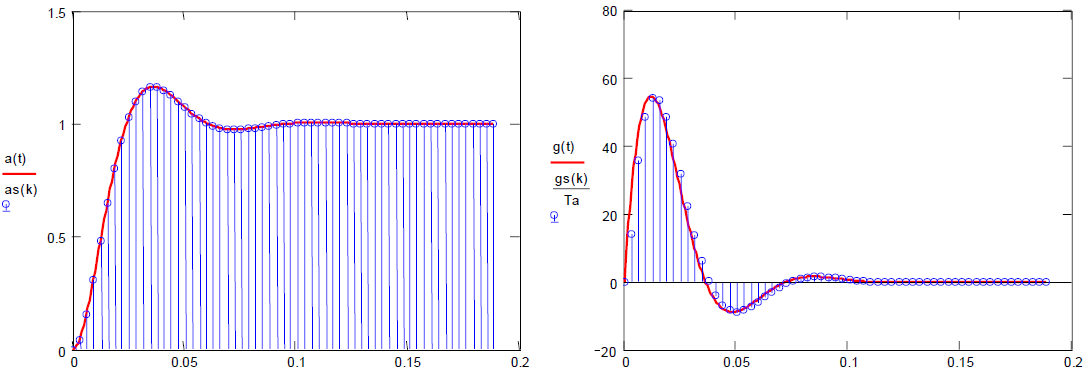
**IIR-Systeme** *(infinite impulse response)*

jedes System mit Pol bei ist IIR-System 🡪 mindestens 1 Rückführung in Blockschaltbild, daher auch rekursiv (siehe allgemein Abschnitt „**Zustandsraum**“)

**Sprunginvariante Transformation** (Ziel: Sprungantwort entspricht exakt )

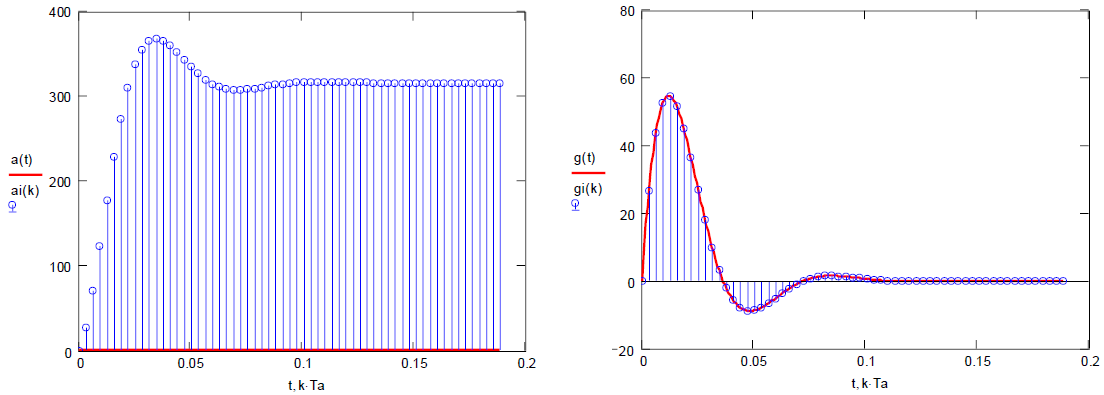
aus folgt:   
🡪 Vorgehen:

**(bei nur !!)**

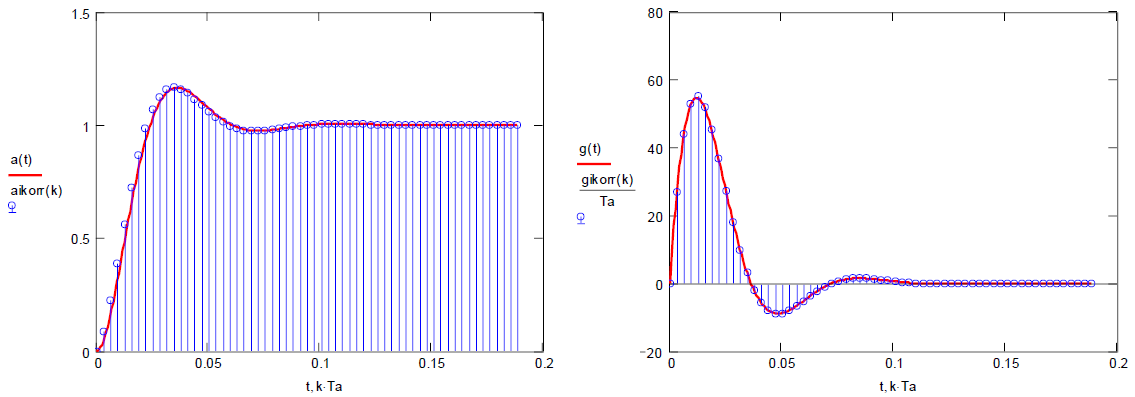


**Impulsinvariante Transformation** (Ziel: Impulsantwort entspricht exakt )

aus folgt:   
 **(bei nur !!)**



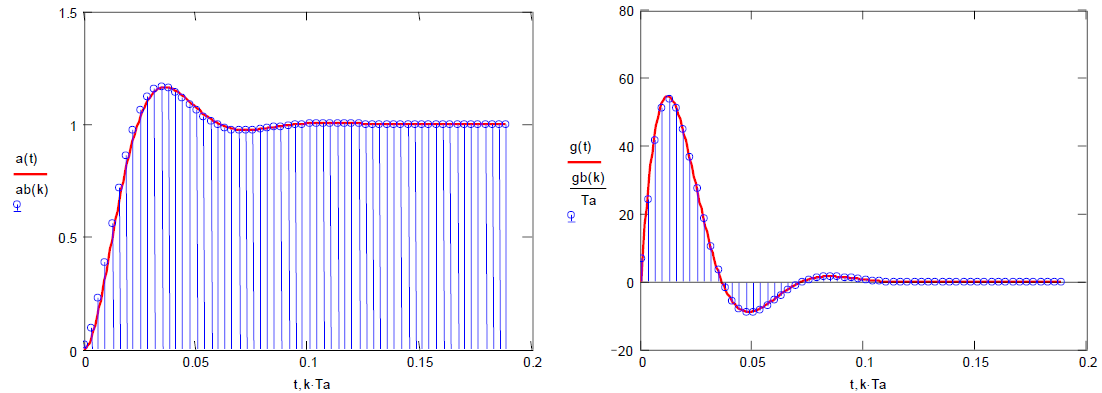
**Korrektur** für Sprungantwort erforderlich: (Endwertsatz!)



**Bilineare Transformation**

im Bildbereich von Laplace anwendbar  
aus folgt: 🡪 Taylorreihe: 🡪 aus folgt

nur geringe Abweichungen zum Zeitkontinuierlichen:



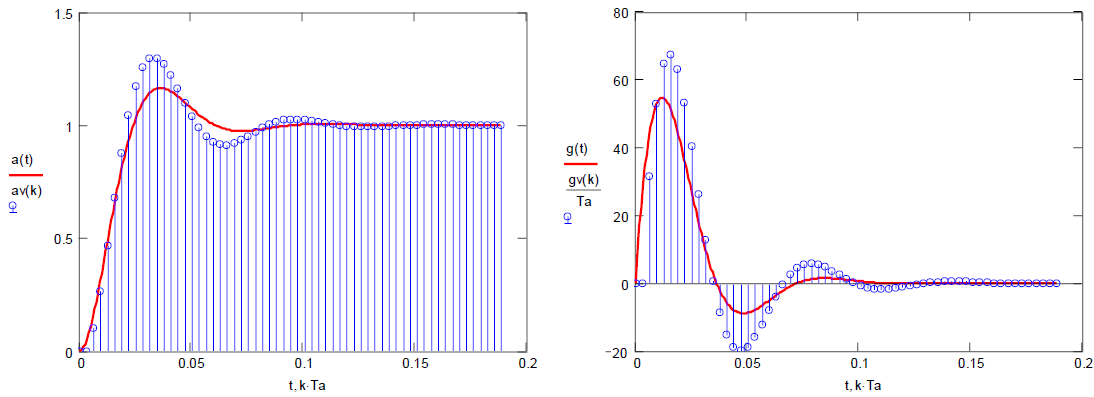
**Näherung durch Vorwärtsdifferenzieren**

Ersetzen der zeitkontinuierlichen durch zeitdiskrete Signale:

z-Transformation:

Aus folgt mit Ersetzen:

höhere Schwingungsneigung als im Zeitkontinuierlichen:



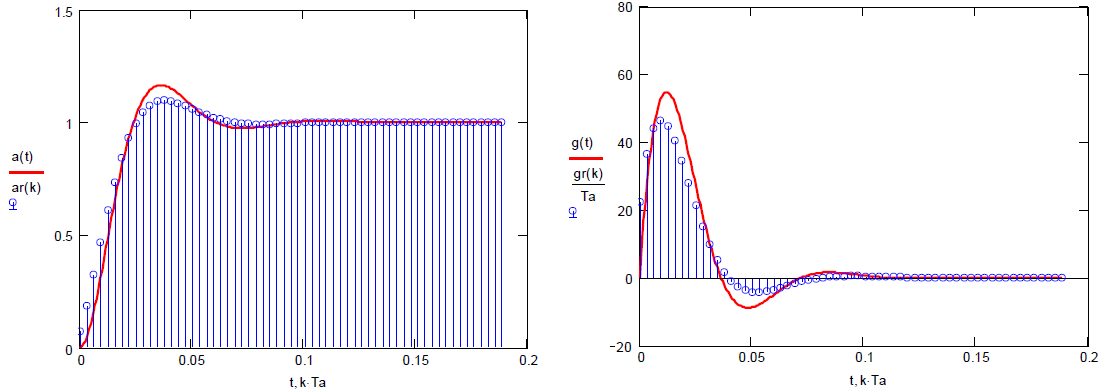
**Näherung durch Rückwärtsdifferenzieren**

Ersetzen der zeitkontinuierlichen durch zeitdiskrete Signale:

z-Transformation:

Aus folgt mit Ersetzen:

geringere Schwingungsneigung als im Zeitkontinuierlichen:



Vergleich der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Impulsantwort mit:

**12.3** **Entwurf** **zeitdiskreter Systeme** (Ermittlung zeitdiskretes System aus bekanntem zeitkontinuierlichem System)