

0. Allgemeines

$$F = \frac{As}{V} = \frac{s}{\Omega} \quad H = \frac{Vs}{A} = \Omega s$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j \cdot \sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \rightarrow e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j \cdot \sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$z \rightarrow s \rightarrow j\omega \quad (\text{mit } z = e^{sTa})$$

$$\text{Dirac-Impuls: } \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma(t) - \sigma(t-T)}{T} \right) = \delta(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \rightarrow \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Energiegehalt Spule/Kondensator:

keine Energie wenn:

→ Kondensator: es liegt keine Spannung an

→ Spule: es fließt kein Strom

$$\text{Mitternachtsformel: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(312) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$$

$$(313) \int x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax - 1}{a^2} \right) \cdot e^{ax}$$

$$(314) \int x^2 \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} \right) \cdot e^{ax}$$

4. Systembeschreibung im Zeitbereich (DGL)

allg. DGL zur Beschreibung von LTI-Systemen:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (\text{reale Syst. immer } m \leq n!)$$

homogene Lösung berechnen (Eigenverhalten des Systems):

1. rechte Seite gleich 0 setzen

2. charakteristische Gleichung: $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

2. wenn s_i Einfachpole: $y_h(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i t}$

(mit A_i als Konstanten (Ermittlung aus Anfangsbed.) u. s_i als NS aus charakterist. Gleichung)

3. wenn s_i Mehrfachpole:

$$y_h(t) = \sum_{\lambda=1}^i (A_\lambda \cdot e^{s_\lambda t}) + e^{s_i t} \cdot (A_i + A_{i+1} \cdot t + \dots + A_{i+k-1} \cdot t^{k-1}) + \sum_{\lambda=i+k}^n (A_\lambda \cdot e^{s_\lambda t})$$

3. Systeme

Eigenschaften

Linearität

System linear, wenn aus $u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$ folgt: $u_3 \Rightarrow y_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2$ (mit $k_1, k_2 = \text{const.}$)

Zeitinvarianz

Zeitverschiebung des Eingangssignals muss zur gleichen Zeitverschiebung im Ausgangssignal führen: $u(t - T_0) \Rightarrow y(t - T_0)$

Faustregel: Koeffizienten von Ein- u. Ausgangssignal müssen zeitlich konstant sein

Kausalität: Verlauf Ausgangssignal zu jedem Zeitpunkt nur von Verlauf Eingangssignal zu jedem Zeitp. abhängig

Stabilität: jedes beschränkte Eingangssignal hat ein beschränktes Ausgangssignal zur Folge

Blockschaltbilder

Ladekurve

$$a_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \sigma(t)$$

$$A_1(s) = \frac{1}{s(1 + sT_1)}$$

$$g(t) = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \sigma(t)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + sT_1}$$

Laufzeitglied

$$y(t) = u(t - T)$$

$$G(s) = e^{-sT}$$

Verstärker

$$\text{entspricht Multiplikation mit einer Konstanten}$$

$$Y = V \cdot U$$

Integrator

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$Y(s) = \frac{1}{sT_1} \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{sT_1}$$

nicht-lineares System durch Doppellinie gekennzeichnet

Faltung zweier rect-Funktionen (ergibt Trapez)

$$\text{aus: } f(t) = H \cdot \left(\text{rect}\left(\frac{t}{T_1'}\right) \times \text{rect}\left(\frac{t}{T_2'}\right) \right) \quad \text{folgt: } F(\omega) = 4 \cdot H \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} \cdot T_1'\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2} \cdot T_2'\right)}{\omega^2}$$

$$\text{mit: } H = \frac{A}{T_1'} \quad T_1' = \frac{T_3 - T_2}{2} \quad T_2' = \frac{T_3 + T_2}{2}$$

Sprungantwort PT₁-Glieder

$$\text{DGL RC-Glied: } T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (T = RC)$$

$$\rightarrow a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t) \quad (\text{Ladekurve C})$$

Sprungantwort PT₂-Glieder (Proportionalglied mit Verzögerung 2. Ordnung)

$$\text{DGL RLC-Serienschwingkr.: } LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$\text{Standard: } \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad \text{Kennkreisfr. } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ Dämpfung } D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1 = 0 \rightarrow \text{Pole: } s_{1/2} = -D\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$$

$$1. \text{ Fall: } D < 1: a(t) = \left[1 - e^{-D\omega_0 t} \cdot \left(\cos(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} \cdot t) + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} \cdot t) \right) \right] \cdot \sigma(t)$$

$$2. \text{ Fall: } D = 1 \text{ (aperiod. Grenzfall): } a(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right] \cdot \sigma(t)$$

$$3. \text{ Fall: } D > 1 \text{ (aperiod. Dämpfung): } a(t) = \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \cdot \sigma(t)$$

Sprung- u. Impulsantwort

Sprungantwort auf Einheitssprung $\sigma(t)$: $a(t)$

$$\text{Bsp CR-Hochpass} \rightarrow a(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t)$$

Impulsantwort auf Einheitsimpuls $\delta(t)$: $g(t)$

$$\text{Bsp RC-Tiefpass} \rightarrow g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t)$$

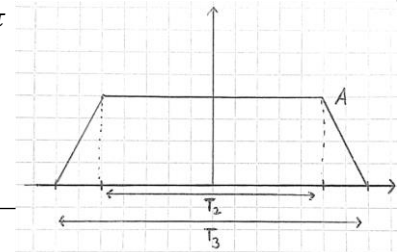
$$g(t) = \frac{da(t)}{dt} \rightarrow a(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Faltung

$$\text{allg.: } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

für LTI u. rechtsseitige Eingangssignale gilt:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$



5. Signal- und Systembeschreibung im Frequenzbereich

Fourier-Reihe

Fourier-Reihe allgemein: $x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \alpha_n)$

(x_0 = Gleichanteil, \hat{x}_n = Amplituden, α_n = Phasenverschiebung, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ = Grundkreisfrequenz)

Fourier-Reihe komplex: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ (Synthesgleichung)

mit $c_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$ (Analysegleichung) **Symmetrien nutzen !**

Parsevalsches Theorem für Effektivwerte: $\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = X_{eff}^2 \rightarrow$ Wurzel

Parsevalsches Theorem allgemein: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

Fourier-Transformation (FT)

Unterschied zur Fourier-Reihe:

Fourier-Reihe: periodisches Signal, dargestellt durch überlagerte sin- u./od. cos-Funktionen

Fourier-Transformation: aperiodisches Signal; Betrachtung einer unendlichen langen Periode T

\rightarrow Abstände im Spektrum verkleinern sich stets $\left(\frac{1}{T}\right)$, sodass FT die Fkt der ∞ vielen Koeffizienten darstellt

FT allgemein: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

Zusammenhänge Übergang periodisch \rightarrow aperiodisch:

Rücktransformation: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$

periodisch		aperiodisch
$n \cdot \omega_0$	\rightarrow	ω
ω_0	\rightarrow	$d\omega$
$T_0 \cdot c_n = \underbrace{X(jn\omega_0)}_{\text{Fourier-Transformierte an der Stelle } \omega = n \cdot \omega_0}$	\rightarrow	$X(j\omega)$

Faltung: aus $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$ folgt: $Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot U(j\omega)$

Parsevalsches Theorem: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

für reelle Signale: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt =$ normierter Energiegehalt

FT reeller Zeitfunktionen (in realen Systemen auftretende Signale immer reell)

jede Fkt in geraden u. ungeraden Anteil zerlegbar: $u(t) = u_g(t) + u_u(t) = \frac{u(-t) + u(t)}{2} + \left(-\frac{u(-t) + u(t)}{2} + \frac{u(t)}{2}\right)$

\rightarrow Koeffizienten einer rein ungeraden Fkt sind rein imaginär (nur Sinus-Terme)

\rightarrow Koeffizienten einer rein geraden Fkt sind rein reell (nur Cosinus-Terme)

nach FT: $Re(U(j\omega)) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt$ und $Im(U(j\omega)) = X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt$

Aus FT folgt: $|G(j\omega_0)| = |G(-j\omega_0)| \rightarrow$ gerade Fkt und $\varphi(-\omega_0) = -\varphi(\omega_0) \rightarrow$ ungerade Fkt.

\rightarrow Wenn $u(t)$ reell, muss Amplitudengang gerade und Phasengang ungerade Funktion in ω sein

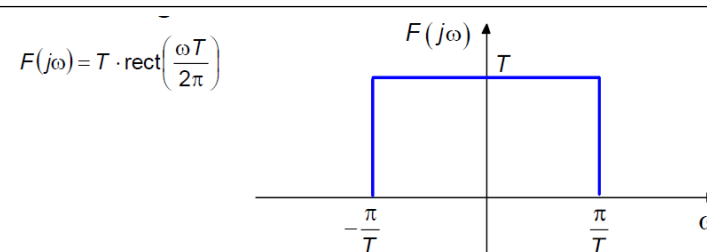
$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = U_g(j\omega)$

$jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(t) \cdot \sin(\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = U_u(j\omega)$

\rightarrow FT des geraden Anteils von $u(t)$ identisch mit Realteil von $U(j\omega)$, und FT des ungeraden Anteils von $u(t)$ identisch mit Imaginärteil von $U(j\omega)$

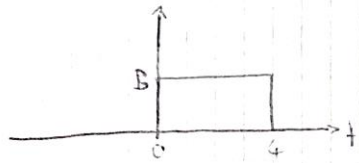
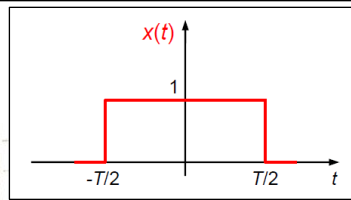
Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)$	$a \cdot U_1(j\omega) + b \cdot U_2(j\omega)$
Verschiebung	$u(t - T)$ $u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$e^{-j\omega T} \cdot U(j\omega)$ $U(j\omega - j\omega_0)$
Differentiation	$\frac{du(t)}{dt}$ $(-jt)^n u(t)$	$j\omega \cdot U(j\omega)$ $\frac{d^n}{d\omega^n} U(j\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \cdot U(j\omega) + \pi \cdot U(0) \cdot \delta(\omega)$
Faltung	$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = u(t) * g(t)$	$G(j\omega) \cdot U(j\omega)$
Multiplikation	$2\pi \cdot u_1(t) \cdot u_2(t)$	$U_1(j\omega) * U_2(j\omega)$
Symmetrie	$u(t)$ $U(jt)$	$U(j\omega)$ $2\pi \cdot u(-\omega)$

Zeitfunktion $x(t)$	Fourier-Transformierte $X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
$\text{si}\left(\pi \frac{t}{T}\right)$	$T \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t) \quad (T > 0)$	$\frac{T}{1 + j\omega T}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	gleiche Amplitude: $\frac{2\pi}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$\pi \left[e^{j\varphi} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \right]$
$\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{\pi}{j} \left[e^{j\varphi} \cdot \delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\varphi} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \right]$



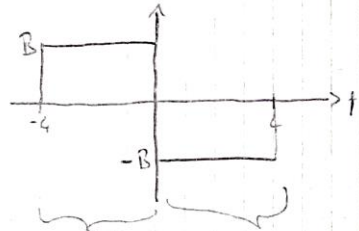
Rechteckimpuls

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(j\omega) = T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega}{2} \cdot T\right)$$



$$f(t) = B \cdot \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$F(j\omega) = B \cdot 4 \cdot \text{si}(2\omega) \cdot e^{-j2\omega}$$



$$B \cdot 4 \left(\text{si}(2\omega) e^{j2\omega} - \text{si}(2\omega) e^{-j2\omega} \right) = 4 \cdot B \cdot \text{si}(2\omega) \cdot \left(e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} \right)$$

$$2j \cdot \sin(2\omega)$$

FT bei periodischen Signalen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(\omega - n\omega_0)$$

→ Impulsreihe mit Fläche von komplexen Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion ($\times 2\pi$)

→ Spektrum des periodischen Signals

Multiplikationssatz

$$\text{betrifft Faltung im Frequenzbereich: } 2\pi \cdot u_1(t) \cdot u_2(t) \rightarrow U_1(j\omega) * U_2(j\omega)$$

$$(\text{Faltungsregel: } \delta(\omega - a) * \delta(\omega - b) = \delta(\omega - a - b)) \text{ auch: } \text{si}(2t) * \delta\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \text{si}\left(2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Frequenzgang

$$\text{Herleitung aus DGL: } a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\text{folgt: } Y(j\omega) \sum_{v=0}^n a_v \cdot (j\omega)^v = U(j\omega) \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot (j\omega)^{\mu} \rightarrow Y(j\omega) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot (j\omega)^{\mu}}{\sum_{v=0}^n a_v \cdot (j\omega)^v} \cdot U(j\omega)$$

$$\rightarrow \text{Frequenzgang: } G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot (j\omega)^{\mu}}{\sum_{v=0}^n a_v \cdot (j\omega)^v}$$

$$\text{Fourier-Transformation RC-Glied (PT}_1\text{): } G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} \quad \text{RLC(PT}_2\text{): } G(j\omega) = \frac{1}{\omega_0^2(j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_0}j\omega + 1}$$

$$\text{Amplitudengang: } |G(\omega)| = \frac{|Z|}{|N|} = \frac{\sqrt{Re^2 + Im^2}}{\sqrt{Re^2 + Im^2}}$$

$$\text{Phasengang: } \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{Im_Z}{Re_Z}\right) - \arctan\left(\frac{Im_N}{Re_N}\right) - \arctan\left(\frac{x}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}!$$

$$\varphi(\omega) = \left[\arctan\left(\frac{0,2\omega}{1-\omega^2}\right) + \varphi_1 \right] \text{ mit } \varphi_1 = \begin{cases} 0 & \text{für } 1-\omega^2 \geq 0 \\ 180^\circ & \text{für } 1-\omega^2 < 0 \text{ und } \omega \geq 0 \\ -180^\circ & \text{für } 1-\omega^2 < 0 \text{ und } \omega < 0 \end{cases}$$

bei gegebenen Pol- und Nullstellen:

$$\varphi(\omega) = + \arctan\left(\frac{\omega - Im_{s01}}{-Re_{s01}}\right) + \arctan\left(\frac{\omega - Im_{s02}}{-Re_{s02}}\right) - \arctan\left(\frac{\omega - Im_{s\infty 1}}{-Re_{s\infty 1}}\right) - \arctan\left(\frac{\omega - Im_{s\infty 2}}{-Re_{s\infty 2}}\right)$$

6. Idealisierte Modellsysteme

$$\text{Dämpfungsmaß: } a(\omega) = -20 \cdot \lg(|G(\omega)|) \cdot dB$$

$$\text{Phasenlaufzeit: } \tau_p = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = \text{const. bei verzerrungsfreien Systemen}$$

Gruppenlaufzeit (Ableitung von Phasengang)

$$\tau_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \text{bei verzerrungsfreien Systemen const. in entspr. Frequenzbereich}$$

Frequenzgang idealer Tiefpass

$$G_{TP}(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) \cdot e^{-j\omega_g \tau_p}$$

$$\text{Rücktransformation ergibt Impulsantwort: } g_{TP}(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{si}\left(\omega_g \cdot (t - \tau_p)\right)$$

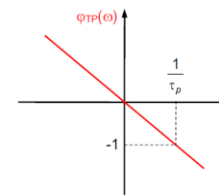
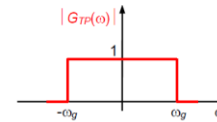


Bild 6-5: Betrags- und Amplitudenverlauf des idealen Tiefpasses (ω -Achse linear geteilt)

→ idealer Tiefpass nicht realisierbar, da nicht kausal

$$\text{Zeitdauer-Bandbreite-Produkt: } T \cdot B = \frac{2\pi}{\omega_g} \cdot \frac{\omega_g}{2\pi} = 1 = \text{const.}$$

→ hohe Bandbreite des TP verbunden mit kurzer Impulsdauer und hoher Flankensteilheit

Idealer Bandpass

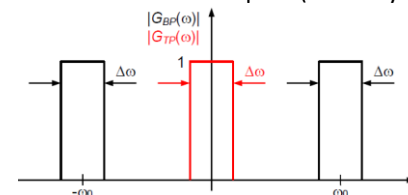
$$G_{BP}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)$$

Rücktransformation ergibt Impulsantwort:

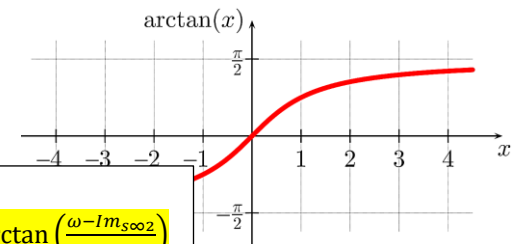
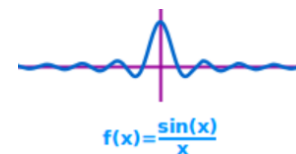
$$g_{BP}(t) = g_{TP}(t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

lässt nur Frequenzen in bestimmtem Bereich passieren

→ verschobener Tiefpass (und an y -Achse gespiegelt, da Frequenzgang immer symm.)



→ idealer Bandpass nicht realisierbar, da nicht kausal



7. Laplace-Transformation

Allgemeines

- wesentlicher Unterschied zu FT: betrachtet auch Einschaltvorgänge
- nützlich wenn Integral von Fourier-Trafo (FT) nicht konvergiert
- geht aus FT hervor, indem $j\omega$ in e-Fkt. Realteil erhält: $s = \sigma + j\omega$
- Laplace-Transformation allgemein: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$
- einseitig: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$ (bei $t = 0$ rechtsseitiger Grenzwert!)
- Rücktransformation: $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$
- Anfangswertsatz: $x(t = +0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot X(s)]$ (nur wenn $x(t)$ bei $t=0$ keine δ -Anteile)
- Endwertsatz: $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)]$ (nur wenn endl. Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t))$)

	Bildfunktion F(s)	Originalfunktion f(t)
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$\epsilon(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	$t \cdot \epsilon(t)$
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \epsilon(t)$
5	e^{-as}	$\delta(t-a)$
6	$\frac{a \cdot s}{1+a \cdot s}$	$\delta(t) - \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \cdot \epsilon(t)$
7	$\frac{1}{s(1+a \cdot s)}$	$(1 - e^{-\frac{t}{a}}) \epsilon(t)$
8	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at) \epsilon(t)$
9	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at) \epsilon(t)$
10	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at) \epsilon(t)$
11	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at) \epsilon(t)$
12	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) - a \cdot t \cdot \cos(at)}{2a^3} \epsilon(t)$
13	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a} \epsilon(t)$

14	$\frac{1}{s-a} / \frac{1}{s+a}$ für $\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$	$e^{at} \cdot \sigma(t) / e^{-at} \cdot \sigma(t)$
15	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ für $\text{Re}(s) > 0$	$t^n \cdot \sigma(t)$
16	$\frac{1}{s \cdot (s+X)}$	$\frac{1}{X} \cdot (1 - e^{-X \cdot t}) \cdot \sigma(t)$
17	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sigma(t)$
18	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at} \cdot \sigma(t)$
19	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \cdot \sigma(t)$
	$t \cdot e^{st} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{(s-s_1)^2}$
	$e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s + \frac{1}{T}}$
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^n}$
	$\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s \cdot (1 + sT)}$
	$\sin(\omega_1 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$
	$\cos(\omega_1 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$
	$(e^{-\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t)) \cdot \sigma(t)$	$\frac{\omega_1}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}$
	$(e^{-\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t)) \cdot \sigma(t)$	$\frac{s + \sigma_1}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}$

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(t) = a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)$	$Y(s) = a \cdot U_1(s) + b \cdot U_2(s)$
Zeitverschiebung	$y(t) = u(t-T)$	$Y(s) = e^{-sT} \cdot U(s)$
Differentiation	$y(t) = \frac{d}{dt}(u(t) \cdot \sigma(t))$	$Y(s) = s \cdot U(s)$
	$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \cdot \sigma(t)$	$Y(s) = s \cdot U(s) - u(-0)$
	$y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \cdot \sigma(t)$	$Y(s) = s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(-0) - \frac{du(t)}{dt} \Big _{t=-0}$
Integration	$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$	$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s)$
Faltung	$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$	$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$

Übertragungsfunktion

aus $y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$ folgt: $Y(s) = G(s) \cdot U(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}}$

wenn Impuls $\delta(t)$ als Eingang $\rightarrow y(t) = g(t)$ da $Y(s) = G(s) \cdot 1$

wenn Sprung $\sigma(t)$ als Eingang $\rightarrow a(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ da $A(s) = \frac{G(s)}{s}$

\rightarrow Impulsantwort $g(t)$ ist Ableitung von Sprungantwort $a(t)$: $g(t) = \frac{da(t)}{dt}$

Herleitung aus DGL: $a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$

$\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n a_v \cdot s^v}$ (für lineare, zeitinvariante Systeme)

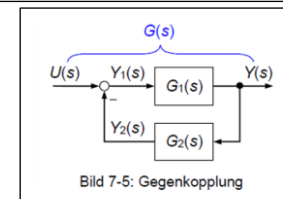
\rightarrow Nullstellen des **Zählers** = **Nullstellen** von $G(s)$, Nullst. des **Nenners** = **Polstellen** von $G(s)$

Übertragungsfunktion – Verknüpfung

Parallelschaltung: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

Reihenschaltung: $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

Gegenkopplung: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$



Übertragungsfunktion – komplexe exponentielle Signale

Eingang zB: $u(t) = C \cdot e^{s_1 t} \rightarrow y(t) = C \cdot G(s_1) \cdot e^{s_1 t}$

Eingang periodisch: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot G(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$

\rightarrow für Fourier-Koeff. von $y(t)$: Multiplikation Fourier-Koeff. $u(t)$ mit $G(jn\omega_0)$

	Originalbereich	Bildbereich
Ohmscher Widerstand	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U(s) = R \cdot I(s)$
Induktivität	$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$	$U(s) = L \cdot (s \cdot I(s) - i(0))$
Kapazität	$u(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$	$U(s) = \frac{I(s)}{s \cdot C} \quad \text{für } u(0) = 0$

Partialbruchzerlegung

Einzelpole

1. Linearfaktorzerlegung Nennerpolynom (Vorfaktor nicht vergessen!)
2. $Y(s) = \frac{c_m \cdot s^m + \dots + c_1 \cdot s^1 + c_0}{h_n \cdot (s-s_1) \cdot (s-s_2) \cdot \dots \cdot (s-s_n)} = \frac{R_1}{s-s_1} + \frac{R_2}{s-s_2} + \dots + \frac{R_n}{s-s_n} + k$ mit $k = \begin{cases} \frac{c_m}{h_n} & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m < n \end{cases}$
(wenn $m = n$ enthält $y(t)$ einen Dirac-Impuls)
3. Konstanten berechnen: $R_v = Y(s) \cdot (s - s_v) \big|_{s=s_v}$
4. konjugiert komplexe Polpaare möglich, Zsmfassung: $\frac{R_v}{s-s_v} + \frac{\bar{R}_v}{s-\bar{s}_v} = \frac{(R_v + \bar{R}_v) \cdot s - (R_v \cdot \bar{s}_v + \bar{R}_v \cdot s_v)}{s^2 - (s_v + \bar{s}_v) \cdot s + s_v \bar{s}_v}$

Mehrfachpole

1. Linearfaktorzerlegung Nennerpolynom (Vorfaktor nicht vergessen!)
2. $Y(s) = \frac{c_m \cdot s^m + \dots + c_1 \cdot s^1 + c_0}{h_n \cdot (s-s_1)^i \cdot (s-s_{i+1}) \cdot \dots \cdot (s-s_n)} = \frac{A_{1,i}}{(s-s_1)^i} + \frac{A_{1,i-1}}{(s-s_1)^{i-1}} + \dots + \frac{A_{1,1}}{(s-s_1)} + \sum_{v=i+1}^n \frac{R_v}{s-s_v} + k$
3. Konstanten berechnen: $R_v = Y(s) \cdot (s - s_v) \big|_{s=s_v}$
4. Konstanten berechnen: $A_{1,i} = H(s) \big|_{s=s_1}$ ($H(s) = Y(s) \cdot (s - s_1)^i = \frac{c_m \cdot s^m + \dots + c_1 \cdot s^1 + c_0}{h_n \cdot (s-s_{i+1}) \cdot \dots \cdot (s-s_n)}$)
 $A_{1,i-1} = \frac{dH(s)}{ds} \big|_{s=s_1}$
 $A_{1,i-2} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 H(s)}{ds^2} \big|_{s=s_1}$ und $A_{1,1} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1} H(s)}{ds^{i-1}} \big|_{s=s_1}$

Rücktransformation in allgemeiner Form (Einfachpole)

$$Y(s) = \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{s-s_v} + k \rightarrow y(t) = (\sum_{v=1}^n R_v \cdot e^{s_v t}) \cdot \sigma(t) + k \cdot \delta(t)$$

Rücktransformation in allgemeiner Form (Mehrfachpole)

$$Y(s) = \frac{A_{1,i}}{(s-s_1)^i} + \frac{A_{1,i-1}}{(s-s_1)^{i-1}} + \dots + \frac{A_{1,1}}{(s-s_1)} + \sum_{v=i+1}^n \frac{R_v}{s-s_v} + k$$

$$y(t) = \left[\left(\frac{A_{1,i}}{(i-1)!} \cdot t^{i-1} + \frac{A_{1,i-1}}{(i-2)!} \cdot t^{i-2} + \dots + A_{1,2} \cdot t + A_{1,1} \right) \cdot e^{s_1 t} + \sum_{v=i+1}^n R_v \cdot e^{s_v t} \right] \cdot \sigma(t) + k \cdot \delta(t)$$

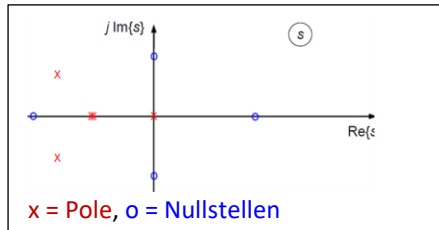
Pole-Nullstellen-Diagramm

System realisierbar, wenn Nennergrad \geq Zählergrad

$$G(s) \text{ in Linearfaktoren: } G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s-s_{01}) \cdot (s-s_{02}) \cdot \dots \cdot (s-s_{0m})}{(s-s_{\infty 1}) \cdot (s-s_{\infty 2}) \cdot \dots \cdot (s-s_{\infty n})} \quad (s_{0\mu} = \text{Nullstellen, } s_{\infty v} = \text{Pole})$$

Stabilität

- (asympt.) stabil: alle **Pole** haben $\text{Re} < 0$ (alle **Pole** links)
- grenzstabil: min. 1 **Einzel**pol mit $\text{Re} = 0$
- instabil: min. 1 **Einzel**pol mit $\text{Re} > 0$ (min. 1 **Pol** rechts)
- instabil: min. 1 **Mehrfach**pol mit $\text{Re} = 0$



Allpass

- reiner Allpass: alle **Pole** symmetrisch zu **Nullstellen** (an Im -Achse)
- reiner stabiler Allpass: alle **Pole** symmetrisch zu **Nullstellen** (an Im -Achse) und **Pole** mit $\text{Re} < 0$
- Allpassanteil: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung mit $\frac{s+s_{01}}{s+s_{01}}$ (s_{01} symm. zu **NS** mit $\text{Re} > 0$)

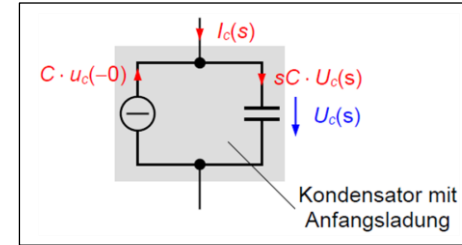
Minimalphasigkeit

- rein minimalphasig: alle **Nullstellen** mit $\text{Re} \leq 0$
- Minimalphasiges Teilsys.: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung siehe Allpass

Kapazität

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\rightarrow I_C(s) = sC \cdot U_C(s) - C \cdot u_C(-0)$$

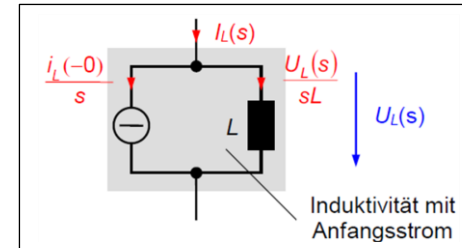


$C \cdot u_C(-0) \leftrightarrow C \cdot u_C(-0) \cdot \delta(t)$
 \rightarrow Stromimpuls durch Stromquelle um C auf $u_C(-0)$ aufzuladen

Induktivität

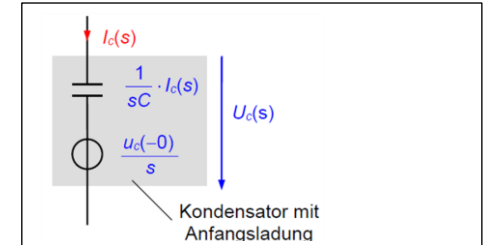
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\rightarrow I_L(s) = \frac{1}{sL} \cdot U_L(s) + \frac{1}{s} \cdot i_L(-0)$$



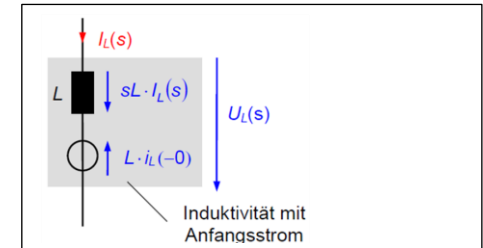
$\frac{1}{s} \cdot i_L(-0) \leftrightarrow i_L(-0) \cdot \sigma(t)$
 \rightarrow Stromquelle mit Sprung, um $i_L(-0)$ einzuprägen

$$\rightarrow U_C(s) = \frac{1}{sC} \cdot I_C(s) + \frac{1}{s} \cdot u_C(-0)$$



$\frac{1}{s} \cdot u_C(-0) \leftrightarrow u_C(-0) \cdot \sigma(t)$
 \rightarrow Spannungsquelle mit Sprung um C auf $u_C(-0)$ aufzuladen

$$\rightarrow U_L(s) = sL \cdot I_L(s) - L \cdot i_L(-0)$$



$L \cdot i_L(-0) \leftrightarrow L \cdot i_L(-0) \cdot \delta(t)$
 \rightarrow Spannungsimpuls durch Spannungsquelle, um $i_L(-0)$ einzuprägen

Hintergrund

stabil \rightarrow Ausgangssignal strebt gegen 0 (nach anfänglicher Anregung)

- nur Pole mit $\text{Re} < 0$: Lösungsanteil $R_v \cdot e^{s_{\infty v} t} \cdot \sigma(t) \rightarrow$ schnelles Abklingen
- konjugiert komplexes Polpaar mit $\text{Re} < 0$: $2 \cdot |R_v| \cdot e^{\sigma_v t} \cdot \cos(\omega_v t + \alpha_v) \cdot \sigma_t \rightarrow$ Fkt schwingt abklingend
- ein Pol $= 0$: Impulsantwort enthält Anteil mit $R_v \cdot \sigma(t) \rightarrow$ Impulsantw. hat konst. Endwert $\neq 0$
- konjugiert komplexes Polpaar mit $\text{Re} = 0$: $2 \cdot |R_v| \cdot \cos(\omega_v t + \alpha_v) \cdot \sigma_t \rightarrow$ Fkt schwingt nicht abklingend
- Mehrfachpol $= 0$: $\left(\frac{A_{1,i}}{(i-1)!} \cdot t^{i-1} + \frac{A_{1,i-1}}{(i-2)!} \cdot t^{i-2} + \dots + A_{1,2} \cdot t + A_{1,1} \right) \cdot \sigma(t) \rightarrow$ Fkt wächst unendlich hoch an
- Mehrfachpol > 0 : enthält $e^{s_{\infty v} t} \rightarrow$ exponentielles Ansteigen bis unendlich

Allpass: $|G(\omega)| = \text{const}$ für alle ω und $\varphi(\omega) = \text{beliebig}$ \rightarrow Verwendung zur Phasenkorrektur

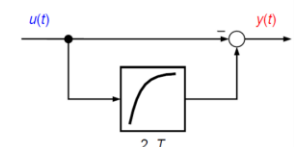
\rightarrow verändert Energieinhalt nicht Realisierung:

Darstellung mit Phase zB:

$$G(j\omega) = \frac{|j\omega+3| \cdot |13-\omega^2+j4\omega|}{|j\omega+1| \cdot |5-\omega^2+j2\omega|} \cdot e^{j(\varphi_{01}+\varphi_{02/3}-\varphi_{\infty 1}+\varphi_{\infty 2/3})}$$

$$G(s) = \frac{1-sT}{1+sT} = \frac{1-sT+1-1}{1+sT} = \frac{-1-sT+2}{1+sT} = -1 + \frac{2}{1+sT}$$

Nullstelle beziehungsweise Pol	Phasenanteil
reelle Nullstelle links liefert	$0^\circ \dots 90^\circ$
reeller Pol links liefert	$0^\circ \dots 90^\circ$
konjugiert komplexes Nullstellenpaar links liefert	$0^\circ \dots 180^\circ$
konjugiert komplexes Polpaar links liefert	$0^\circ \dots 180^\circ$
reelle Nullstelle rechts liefert	$90^\circ \dots 180^\circ$
konjugiert komplexes Nullstellenpaar rechts liefert	$180^\circ \dots 360^\circ$



8. Beschreibung linearer Systeme im Zustandsraum

Allgemeines

Zustandsvektor: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ (enthält Zustandsvariablen wie zB $i_1(t), u_c(t)$, etc.)

1. Ordnung (= Anzahl Gleichungen) wird durch Anzahl Energiespeicher bestimmt
2. Maschen- und Knotengleichungen aufstellen, sodass jeweils eine erste Ableitung enthalten ist ($\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ und $\dot{x}_3(t)$)
3. Ableitungen auf linke Seite bringen
4. Zustandsgleichung: $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)$

5. Ausgangsgleichung: $y(t) = c^T \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + d \cdot u(t)$

(A = Systemmatrix, b = Eingangsvektor, c = Ausgangsvektor, d = Durchgriff)

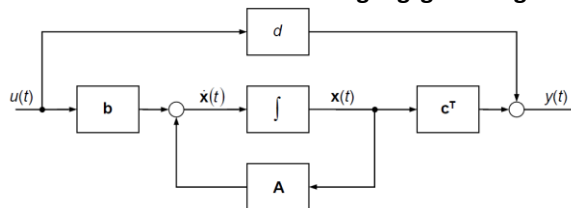
Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c^T \cdot \text{adj}(s \cdot I - A) \cdot b}{\det(s \cdot I - A)} + d \quad (\text{Achtung! Gilt nur für } x(-0) = 0)$$

Lösung mit Laplace

1. Zustandsgleichung transformieren: $s \cdot X(s) - x(-0) = A \cdot X(s) + b \cdot U(s)$
2. $\rightarrow X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x(-0) + (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b \cdot U(s)$ und $Y(s) = c^T \cdot X(s) + d \cdot U(s)$

Blockschaltbild Zustands- u. Ausgangsgleichung



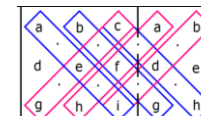
Inverse: $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det(M)} =$

$$\frac{1}{\det(M)} \cdot \begin{bmatrix} (-fh + ei) & (ch - bi) & (-ce + bf) \\ (fg - di) & (-cg + ai) & (cd - af) \\ (-eg + dh) & (bg - ah) & (-bd + ae) \end{bmatrix}$$

für 2x2-Matrizen: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Determinante:

$$\text{adj}(M) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



9. Abtastsysteme und Abtasttheorem

Allgemeines

zeitdiskretes gleich kontinuierliches Signal wenn für $y(k \cdot T_a) = u(k \cdot T_a)$ gilt: $y(t) = u(t)$
 Delta-Abtaster eines kontinuierlichen Signals: $u^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_a) \cdot \delta(t - kT_a)$

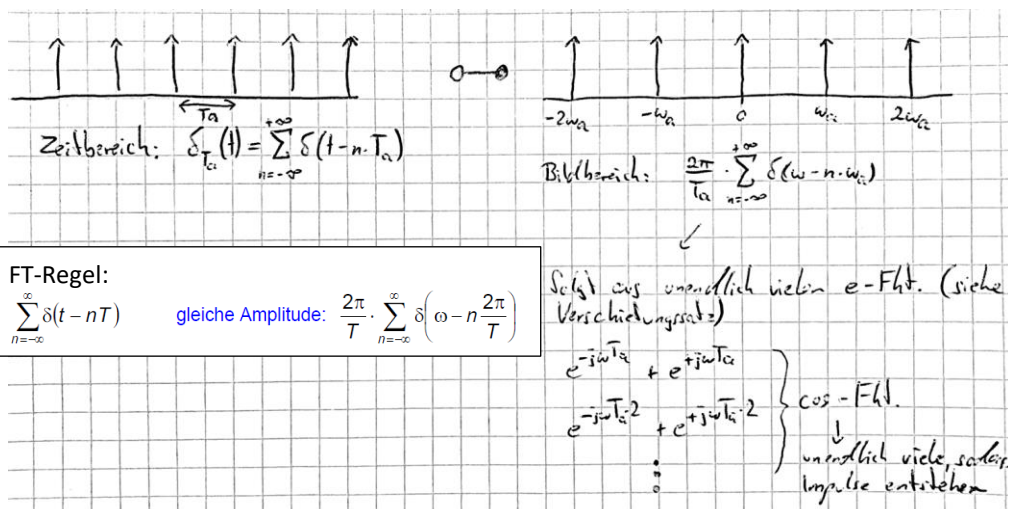
→ FT: $U^*(\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(\omega - k\omega_a)$ (mit $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$ und $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$)
 (mit ω_a = Abstand zur periodischen Wiederholung der FT des abgetasteten Signals)

→ abgetastetes Signal besitzt periodische Fourier-Transformierte

→ wird durch idealen TP wieder auf Grenzfrequenz ω_g begrenzt ($G_{TP}(\omega) = T_a \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)$)

Abtasttheorem: Um Überlappung (Aliasing) der Frequenzbänder zu vermeiden, muss $u(t)$ streng bandbegrenzt sein auf ω_g , dann fehlerfreie Beschreibung mgl mit: $\omega_a > 2\omega_g$

→ Realität: $u(t)$ nie stark bandbegrenzt → Signal vor Abtastung durch TP mit steiler Flanke näherungsweise bandbegrenzt (Anti-Aliasing-Filter)



FT-Regel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{gleiche Amplitude:} \quad \frac{2\pi}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right)$$

Zeitdiskrete Fourier-Transformation

FT zeitdiskretes Signal: $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot e^{-j\omega T_a k}$

= FT abgetastetes Signal: $U^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT_a) \cdot e^{-j\omega T_a k}$

Bsp: $u(k) = 3 \cdot \delta(k) + 2 \cdot \delta(k-1) + 7 \cdot \delta(k-5) \rightarrow U(j\omega) = 3 + 2 \cdot e^{-j\omega T_a} + 7 \cdot e^{-j\omega T_a 5}$

Rücktransformation: $x(k) = \frac{T_a}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{T_a}}^{\frac{2\pi}{T_a}} X(j\omega) \cdot e^{j\omega T_a k} d\omega$ **Symmetrien ausnutzen!**

Annäherung:

DFT (diskrete FT): $N \cdot T_a \cdot c_n = T_a \sum_{m=0}^{N-1} x_1(k) \cdot e^{-jn\omega_0 T_a k}$ (mit N = Anzahl Abtastwerte)

Zeitdiskrete Fourier-Reihe

zeitdiskretes Signal periodisch, wenn $x(k) = x(k+N) \rightarrow$ Grundkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{NT_a}$

Fourier-Reihe: $x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 T_a k}$ (mit N = Anzahl Abtastwerte einer Periode)

Analysegleich.: $c_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=m}^{m+N-1} x(k) \cdot e^{-jn\omega_0 T_a k}$ (m = Startpkt; beliebig; für c_0 : n = 0)

10. Beschreibung zeitdiskreter Signale und Systeme

Signaldarstellung im Zeitbereich

da Zeitabstand zw Abtastungen T_a hier konstant, kann geschrieben werden: $x(kT_a) \equiv x(k)$

Zusammenhang: $\delta(k) = \sigma(k) - \sigma(k-1)$ und $\sigma(k) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(v)$

→ $g(k) = a(k) - a(k-1)$ → $a(k) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} g(v)$

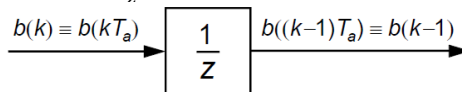
komplexe Exponentialfunktion: $C \cdot e^{sk \cdot T_a} = C \cdot e^{(\sigma + j\omega)k \cdot T_a} = C \cdot e^{\sigma k \cdot T_a} \cdot e^{j\omega k T_a}$

→ Baustein für periodische zeitdiskrete Signale

Faltungssumme: $y(k) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} u(v) \cdot g(k-v)$ → $y(k) = [\sum_{v=0}^k u(v) \cdot g(k-v)] \cdot \sigma(k)$

Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich

Herleitung $\frac{1}{z}$: $y(t) = u(t - T_a) \rightarrow Y(s) = e^{-sT_a} \cdot U(s) \rightarrow$ setze $e^{sT_a} = z \rightarrow Y(s) = \frac{1}{z} \cdot U(s)$



$\frac{1}{z}$ = Laufzeitglied

Allgemeine Differenzengleichung

$\alpha_0 \cdot y(k) + \alpha_1 \cdot y(k+1) + \dots + \alpha_n \cdot y(k+n) = \beta_0 \cdot u(k) + \beta_1 \cdot u(k+1) + \dots + \beta_n \cdot u(k+n)$

Verschiebung:

$\alpha_0 \cdot y(k-n) + \alpha_1 \cdot y(k-n+1) + \dots + \alpha_n \cdot y(k-n+n) =$

$\beta_0 \cdot u(k-n) + \beta_1 \cdot u(k-n+1) + \dots + \beta_n \cdot u(k-n+n)$

Differenzengleichung zeitdiskreter Integrator: $y(k) - y(k-1) = \frac{T_a}{T_i} \cdot u(k)$

Differenzengleichung zeitdiskreter Differenzierer: $y(k) = \frac{T_d}{T_a} \cdot [u(k) - u(k-1)]$

Rekursive Lösung von Differenzengleichungen

Differenzengleichung nach $y(k)$ auflösen → Tabelle von k = -1 bis k = ...

Analytische Lösung von Differenzengleichungen

1. homogene Differenzengleichung: $\alpha_0 \cdot y(k) + \alpha_1 \cdot y(k+1) + \dots + \alpha_n \cdot y(k+n) = 0$

2. charakteristische Gleichung: $\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$

3. Pole bestimmen

4. homogene Lösung bei Einzelpolen: $y_h(k) = \sum_{v=1}^n A_v \cdot z_{\infty v}^k$

..Doppelpol: $y_h(k) = (A_1 + A_2 \cdot k) \cdot z_{\infty 1}^k + \sum_{v=3}^n A_v \cdot z_{\infty v}^k$

→ stabil, wenn alle Pole im Einheitskreis ($|z_{\infty v}| < 1$)

5. partikuläre Lösung: bei Sprungantwort Konstante ansetzen, Gesamtlösung $y(k)$ bestimmen, in Differenzengleichung einsetzen, homogene Lsg = 0, partikuläre Lösung verbleibt, angesetzte Konstante einsetzen, nach dieser Konstante auflösen, Ergebnis ist partikuläre Lsg

6. Konstanten A_v durch Einsetzen der Anfangsbedingungen bestimmen

Sprungantwort zeitdiskretes PT₁-Glied: $y(k) = V \left(1 - e^{-\frac{T_a k}{T_1}}\right) \cdot \sigma(k)$

Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\sum_{\mu=0}^m \beta_{\mu} \cdot e^{j\mu\omega T_a}}{\sum_{v=0}^n \alpha_v \cdot e^{jv\omega T_a}} \quad (\text{folgt aus Differenzengleichung})$$

11. z-Transformation

z-Transformierte: $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \cdot z^{-k}$ (mit $z = e^{sT_a}$)

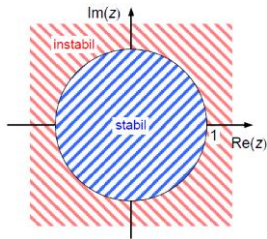
Übertragungsfunktion: $G(z) = \frac{d_n \cdot z^{-n} + \dots + d_1 \cdot z^{-1} + d_0}{c_n \cdot z^{-n} + \dots + c_1 \cdot z^{-1} + c_0} \rightarrow \text{Mult. } z^n: G(z) = \frac{\beta_m \cdot z^m + \dots + \beta_1 \cdot z^1 + \beta_0}{\alpha_n \cdot z^n + \dots + \alpha_1 \cdot z^1 + \alpha_0} \quad (m \leq n)$

\rightarrow Linearfaktorzerlegung: $G(z) = \frac{\beta_m}{\alpha_n} \cdot \frac{(z-z_{01}) \cdot (z-z_{02}) \cdot \dots \cdot (z-z_{0m})}{(z-z_{\infty 1}) \cdot (z-z_{\infty 2}) \cdot \dots \cdot (z-z_{\infty n})}$

Sprungantwort: $A(z) = G(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

Anfangswertsatz: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} [X(z)]$ Endwertsatz: $x(k \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot X(z)]$

Ordnung: Nennergrad!



Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(k) = a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)$	$Y(z) = a \cdot U_1(z) + b \cdot U_2(z)$
Zeitverschiebung	$y(k) = u(k-1)$	$Y(z) = z^{-1} \cdot U(z) + u(-1)$
	$y(k) = u(k-2)$	$Y(z) = z^{-2} \cdot U(z) + z^{-1} \cdot u(-1) + u(-2)$
Differenz	$y(k) = u(k) - u(k-1)$	$Y(z) = (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - u(-1)$
Summation	$y(k) = \sum_{v=0}^k u(v)$	$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot U(z) = \frac{z}{z-1} \cdot U(z)$
Faltung	$y(k) = \sum_{v=0}^k u(v) \cdot g(k-v)$	$Y(z) = U(z) \cdot G(z)$
Multiplikation mit k	$y(k) = k \cdot u(k)$	$Y(z) = -z \cdot \frac{dU(z)}{dz}$
Modulation	$y(k) = a^k \cdot u(k)$	$Y(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$

Zeitfunktion x(k)	z-Transformierte X(z)
$\delta(k)$	1
$\sigma(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$k \cdot \sigma(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$z_1^k \cdot \sigma(k)$ z.B. $z_1 = e^{s_1 T_a}$	$\frac{z}{z - z_1}$
$k \cdot z_1^k \cdot \sigma(k)$	$\frac{z_1 z}{(z - z_1)^2}$
$[\sin(\omega_0 T_a k)] \cdot \sigma(k)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a) \cdot z}{z^2 - 2 \cos(\omega_0 T_a) \cdot z + 1}$
$[\cos(\omega_0 T_a k)] \cdot \sigma(k)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a) \cdot z}{z^2 - 2 \cos(\omega_0 T_a) \cdot z + 1}$
$[e^{-\sigma_0 T_a k} \sin(\omega_0 T_a k)] \cdot \sigma(k)$	$\frac{e^{-\sigma_0 T_a} \cdot \sin(\omega_0 T_a) \cdot z}{z^2 - 2e^{-\sigma_0 T_a} \cdot \cos(\omega_0 T_a) \cdot z + e^{-2\sigma_0 T_a}}$
$[e^{-\sigma_0 T_a k} \cos(\omega_0 T_a k)] \cdot \sigma(k)$	$\frac{z^2 - e^{-\sigma_0 T_a} \cdot \cos(\omega_0 T_a) \cdot z}{z^2 - 2e^{-\sigma_0 T_a} \cdot \cos(\omega_0 T_a) \cdot z + e^{-2\sigma_0 T_a}}$

Stabilität von zeitdiskreten Systemen

- stabil** $\rightarrow |z_{\infty v}| < 1$ \rightarrow alle **Pole** innerhalb Einheitskreis
- grenzstabil** $\rightarrow |z_{\infty \text{einzel}}| = 1$ \rightarrow min. ein **Einzelpol** auf Einheitskreis
- instabil** $\rightarrow |z_{\infty v}| > 1$ od. $|z_{\infty \text{mehrfach}}| = 1$
- \rightarrow min. ein **Pol** außerhalb Einheitskreis od. min. ein **Mehrfachpol** auf Einheitskreis
- minimalphasig** $\rightarrow |z_{0\mu}| \leq 1$ \rightarrow alle **NS** kleiner gleich 1
- Allpass** $\rightarrow |z_0| = \frac{1}{|z_{\infty}|}$ und $\varphi_0 = \varphi_{\infty}$ \rightarrow **Pol** und **NS** liegen auf einem **Strahl**
- Verzögerung** $\rightarrow G(z) = z^{-i}$ $\rightarrow i$ **Pole** in Ursprung

aus $G(z) = \frac{\beta_n \cdot z^n + \dots + \beta_1 \cdot z^1 + \beta_0}{\alpha_n \cdot z^n + \dots + \alpha_1 \cdot z^1 + \alpha_0}$ \rightarrow auf α_n normieren!

folgt:

$$g(0) = \beta_n$$

$$g(1) = \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}$$

$$a(0) = \beta_n$$

$$a(1) = \beta_{n-1} + \beta_n (1 - \alpha_{n-1})$$

Einschwingvorgänge / Partialbruchzerlegung

z muss im Zähler stehen

- wenn **mindestens eine NS** bei $z = 0$:
VORHER nach vorne ziehen: $\frac{Y(z)}{z} = \frac{Y_0}{z} + \sum_{v=1}^n \frac{Y_v}{z - z_{\infty v}} + k$,
anschließend hochmultiplizieren
- wenn **keine NS** bei $z = 0$: NACH Partialbruchzerlegung alle Brüche mit $\frac{z}{z}$ erweitern \rightarrow Verschiebungssatz bei Rücktrafo

Zustandsraum

Zustandsgleichung: $x(k+1) = A \cdot x(k) + b \cdot u(k)$

→ z-transformiert: $z \cdot X(z) = A \cdot X(z) + b \cdot U(z)$

$X(z) = (z \cdot I - A)^{-1} \cdot x(-1) + (z \cdot I - A)^{-1} \cdot b \cdot U(z)$ (mit Anfangsbedingung)

Ausgangsgleichung: $y(k) = c^T \cdot x(k) + d \cdot u(k)$

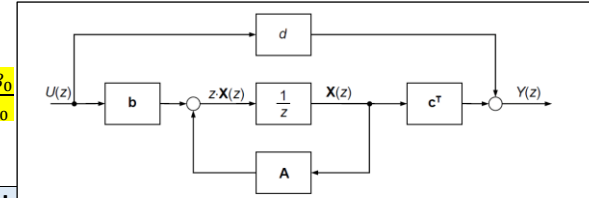
→ z-transformiert: $Y(z) = c^T \cdot X(z) + d \cdot U(z)$

z-Übertragungsfunktion: $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c^T \cdot \text{adj}(z \cdot I - A) \cdot b}{\det(z \cdot I - A)} + d$

(Achtung! Gilt nur für $x(-1) = 0$)

Ausgangsform: $\alpha_0 \cdot y(k) + \alpha_1 \cdot y(k+1) + \dots + \alpha_n \cdot y(k+n) = \beta_0 \cdot u(k) + \beta_1 \cdot u(k+1) + \dots + \beta_n \cdot u(k+n)$ oder

$$G(z) = \frac{\beta_m \cdot z^m + \dots + \beta_1 \cdot z^1 + \beta_0}{\alpha_n \cdot z^n + \dots + \alpha_1 \cdot z^1 + \alpha_0}$$



$\alpha_n = 1$	Zustandsgleichung	Ausgangsgleichung	Strukturbild
1. Kanonische Form	$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_n \\ \vdots \\ \beta_1 - \alpha_1\beta_n \\ \beta_0 - \alpha_0\beta_n \end{pmatrix}}_b \cdot u(k)$	$y(k) = \underbrace{(1 \ 0 \ \dots \ 0)}_{c^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \frac{\beta_n}{d} \cdot u(k)$	
2. Kanonische Form	$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_b \cdot u(k)$	$y(k) = \underbrace{(\beta_0 - \beta_n\alpha_0 \ \beta_1 - \beta_n\alpha_1 \ \dots \ \beta_{n-1} - \beta_n\alpha_{n-1})}_{c^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \frac{\beta_n}{d} \cdot u(k)$	

→ 3. und 4. Kanonische Form selbes Prinzip wie bei zeitkontinuierlichen Systemen

12. Zeitdiskrete Systeme

FIR-Systeme (finite impulse response)

Übertragungsfunktion in Form: $G(z) = \frac{\beta_n \cdot z^n + \dots + \beta_1 \cdot z^1 + \beta_0}{\alpha_n \cdot z^n}$

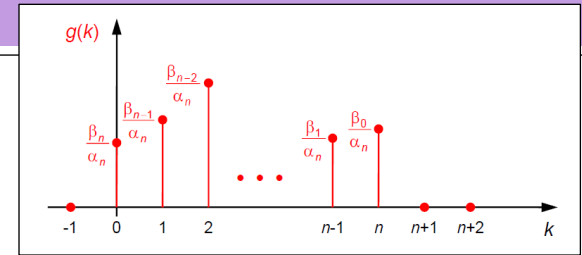
$$\rightarrow g(k) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \cdot \delta(k) + \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_n} \cdot \delta(k-1) + \frac{\beta_{n-2}}{\alpha_n} \cdot \delta(k-2) + \dots + \frac{\beta_0}{\alpha_n} \cdot \delta(k-n)$$

→ Überlagerung von n+1 verschobenen Impulsen:

aus $G(z)$ folgt Transformation: $\alpha_n \cdot y(k+n) = \sum_{\mu=0}^n \beta_{\mu} \cdot u(k+\mu)$ → Verschiebung des Nullpunkts: $y(k) = \sum_{\mu=0}^n \frac{\beta_{(n-\mu)}}{\alpha_n} \cdot u(k-\mu)$

keine Rückkopplungen, da nicht rekursiv

FIR-Systeme immer stabil, da n-facher Pol bei $z = 0$



$\alpha_n = 1$	Zustandsgleichung	Ausgangsgleichung	Strukturbild
1. Kanonische Form	$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u(k)$	$y(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}_d \cdot u(k)$	
2. Kanonische Form	$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u(k)$	$y(k) = \underbrace{(\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1})}_{\mathbf{c}^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}_d \cdot u(k)$	

IIR-Systeme (infinite impulse response)

jedes System mit Pol bei $z \neq 0$ ist IIR-System → mindestens 1 Rückführung in Blockschaltbild, daher auch rekursiv

(siehe allgemein Abschnitt „Zustandsraum“)

Näherung durch Rückwärtsdifferenzieren

Ersetzen der zeitkontinuierlichen durch zeitdiskrete Signale:

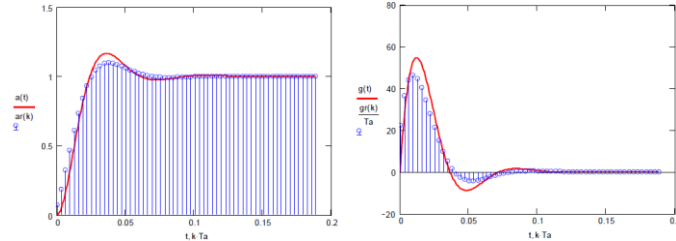
$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{y(k) - y(k-1)}{T_a} \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_a^2} \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} \rightarrow \frac{y(k) - 3y(k-1) + 3y(k-2) - y(k-3)}{T_a^3}$$

z-Transformation:

$$\frac{y(k) - y(k-1)}{T_a} \rightarrow \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_a} \right) \cdot Y(z) \quad \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_a^2} \rightarrow \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_a} \right)^2 \cdot Y(z) \quad \dots \rightarrow \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_a} \right)^n \cdot Y(z)$$

Aus $G(s)$ folgt $G(z)$ mit Ersetzen: $s = \frac{1 - z^{-1}}{T_a}$

geringere Schwingungsneigung als im Zeitkontinuierlichen:

Vergleich der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Impulsantwort mit: $g_{kont}(k) = \frac{g(k)}{T_a}$ **Näherung durch Vorwärtsdifferenzieren**

Ersetzen der zeitkontinuierlichen durch zeitdiskrete Signale:

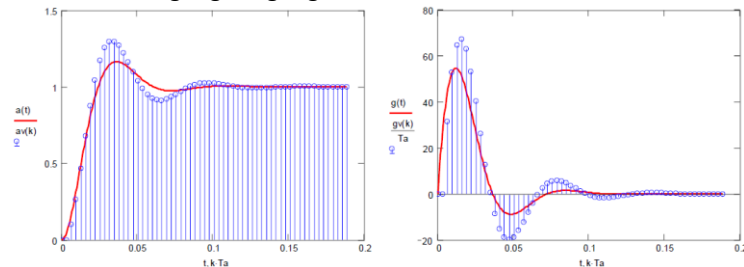
$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{y(k+1) - y(k)}{T_a} \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T_a^2} \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} \rightarrow \frac{y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k)}{T_a^3}$$

z-Transformation:

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T_a} \rightarrow \left(\frac{z - 1}{T_a} \right) \cdot Y(z) \quad \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T_a^2} \rightarrow \left(\frac{z - 1}{T_a} \right)^2 \cdot Y(z) \quad \dots \rightarrow \left(\frac{z - 1}{T_a} \right)^n \cdot Y(z)$$

Aus $G(s)$ folgt $G(z)$ mit Ersetzen: $s = \frac{z - 1}{T_a}$

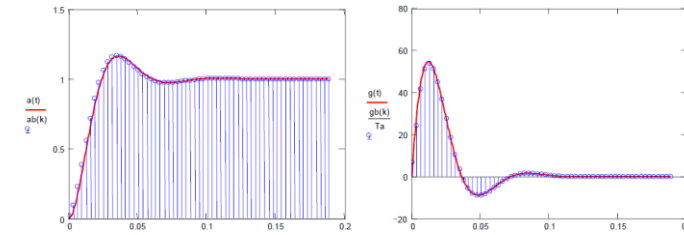
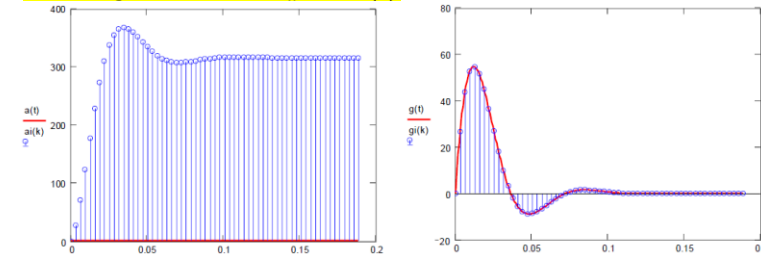
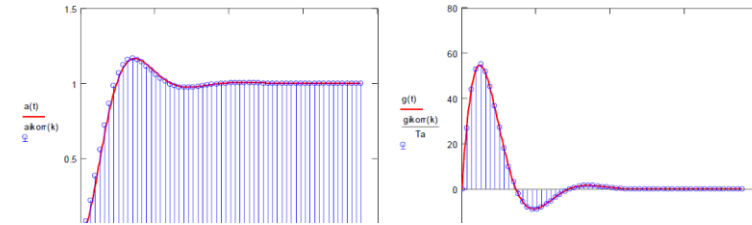
höhere Schwingungsneigung als im Zeitkontinuierlichen:

**Bilineare Transformation**

im Bildbereich von Laplace anwendbar

aus $z = e^{sT_a}$ folgt: $s = \frac{1}{T_a} \cdot \ln(z) \rightarrow$ Taylorreihe: $s \approx \frac{2(z-1)}{T_a(z+1)}$ \rightarrow aus $G(s)$ folgt $G(z)$

nur geringe Abweichungen zum Zeitkontinuierlichen:

**Impulsinvariante Transformation** (Ziel: Impulsantwort $g(k)$ entspricht exakt $g(t)$)aus $G(s) = \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{s - s_{\infty v}} + k$ folgt: $G(z) = \sum_{v=1}^n B_v \cdot \frac{z}{z - z_v} + k$ $G(s) \rightarrow g(t) \rightarrow (t = kT_a) \rightarrow G(z)$ (bei $\sigma(t)$ nur $t = k!!$)**Korrektur** für Sprungantwort erforderlich: $G_{korrr}(z) = \frac{1}{a(k \rightarrow \infty)} \cdot G(z)$ (Endwertsatz!)**Sprunginvariante Transformation** (Ziel: Sprungantwort $a(k)$ entspricht exakt $a(t)$)aus $A(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \sum_{v=0}^n \frac{R_v}{s - s_{\infty v}}$ folgt: $A(z) = \sum_{v=0}^n B_v \cdot \frac{z}{z - z_v} = G(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$ $\rightarrow G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot A(z)$ Vorgehen: $A(s) \rightarrow a(t) \rightarrow (t = kT_a) \rightarrow A(z) \rightarrow G(z)$ (bei $\sigma(t)$ nur $t = k!!$)