

Regelungstechnik

für BEI4, BMEI4 und IBT

Prof. Dr. B. Wagner

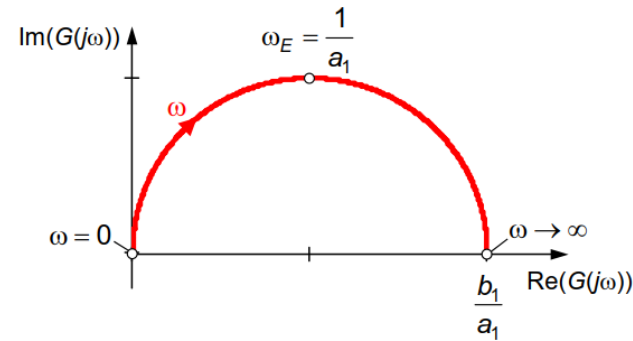


Bild 2-16: Ortskurve des DT₁-Glieds.

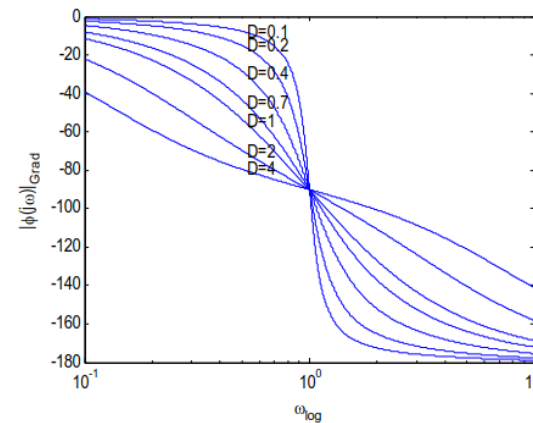
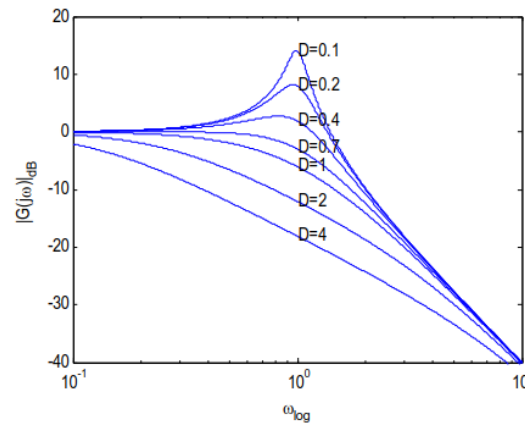
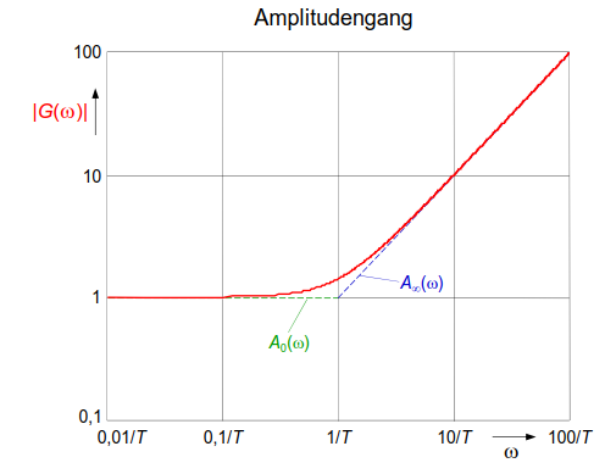
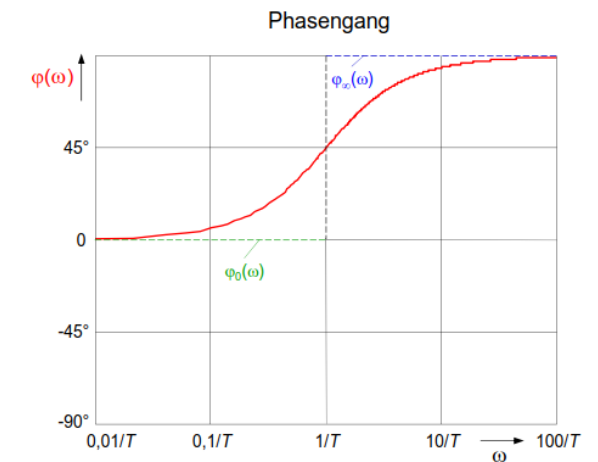


Bild 3-11: Bode-Diagramm des PT₂-Glieds bei unterschiedlichen Dämpfungen



Kap. 3 Frequenzgangfunktionen, (Nyquist-)Ortskurven und Bode-Diagramme Teil a: Basis-Systeme (I, D, PT₁, PD, PT₂, Totzeit)

In Kapitel 2:

Systemtypen (P, PI, PT_2 , IT_3 , PDT_3 , ...)?

Proportionale, integrierende, differenzierende und Totzeitsysteme

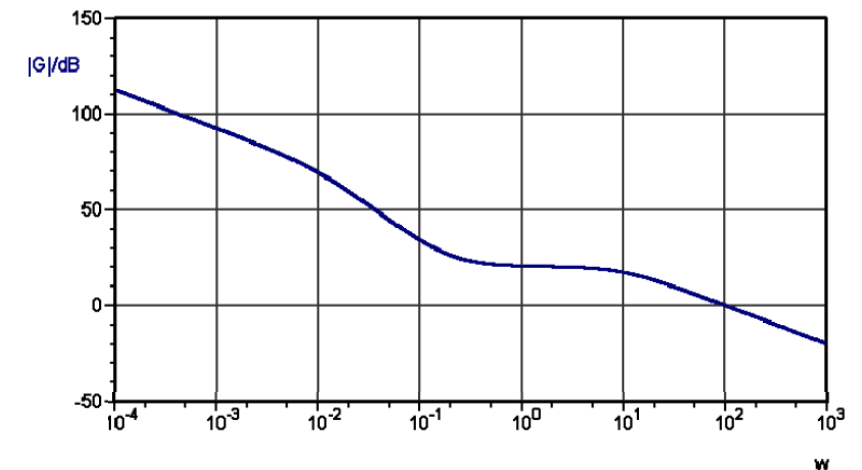
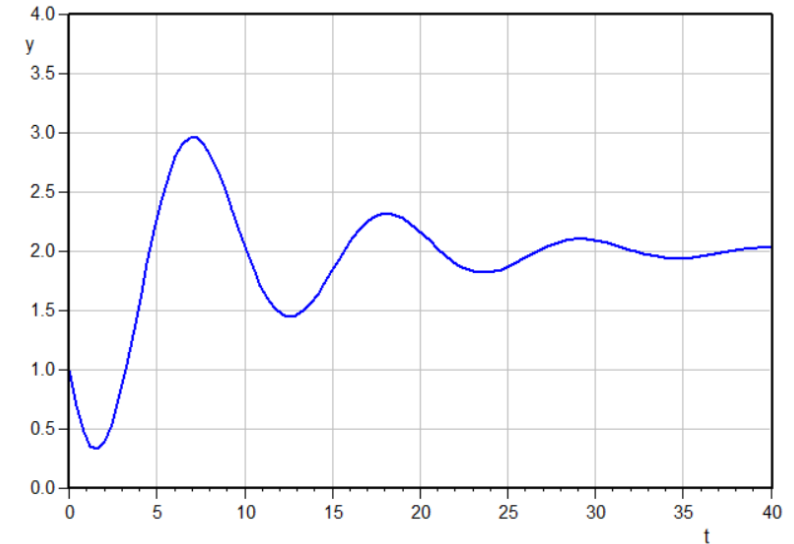
Sprungantworten und Übertragungsfunktionen

In dieser Lehreinheit:

Frequenzgangfunktionen $G(j\omega)$ und deren Darstellung

... im Bode-Diagramm und in der (Nyquist-)Ortskurve

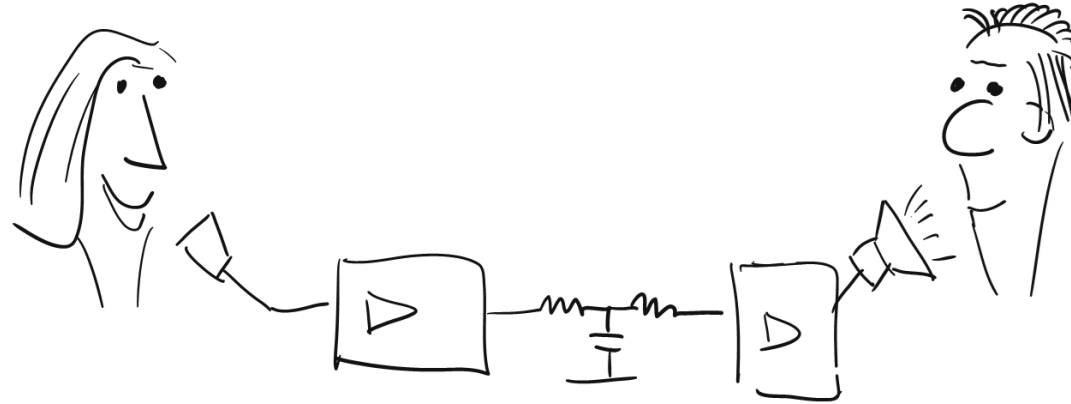
1. Basis-Elemente im Bode-Diagramm (I, PT_1 , D, PD, T_t , PT_2)
2. Konstruktion beliebiger Frequenzgangfunktionen im Bode-Diagramm
3. Zusammenhänge Bode-Diagramm \Leftrightarrow Sprungantwort





Hendrik Wade Bode
Quelle: Wikipedia

Nachrichtentechnik



Reihenschaltung mehrerer Teil-Systeme

$$G_{gesamt}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \dots \quad \text{mit } G_1(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_1(j\omega)} \text{ folgt}$$

$$G_{gesamt}(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)| \dots \cdot e^{j(\varphi_1(j\omega) + \varphi_2(j\omega) + \varphi_3(j\omega) + \dots)}$$

Gesamt-Betrag logarithmisch

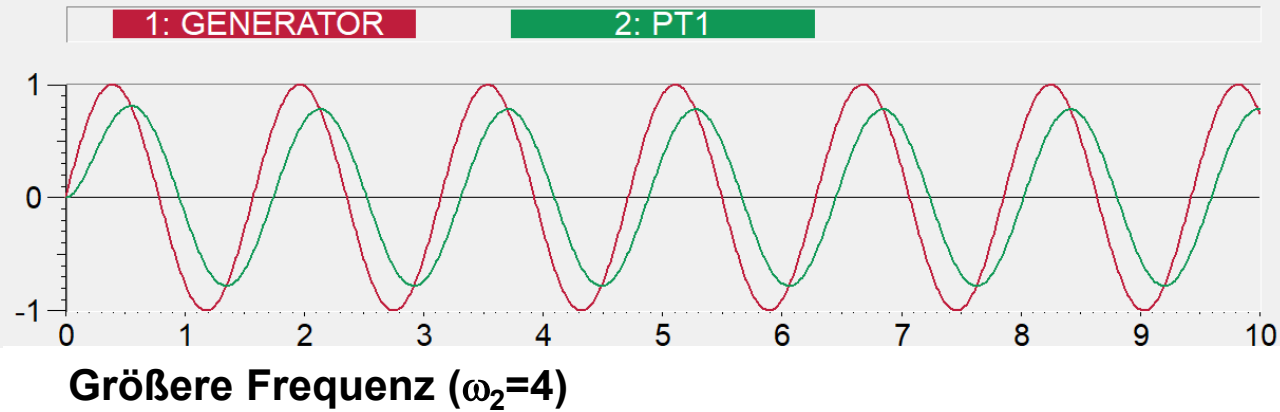
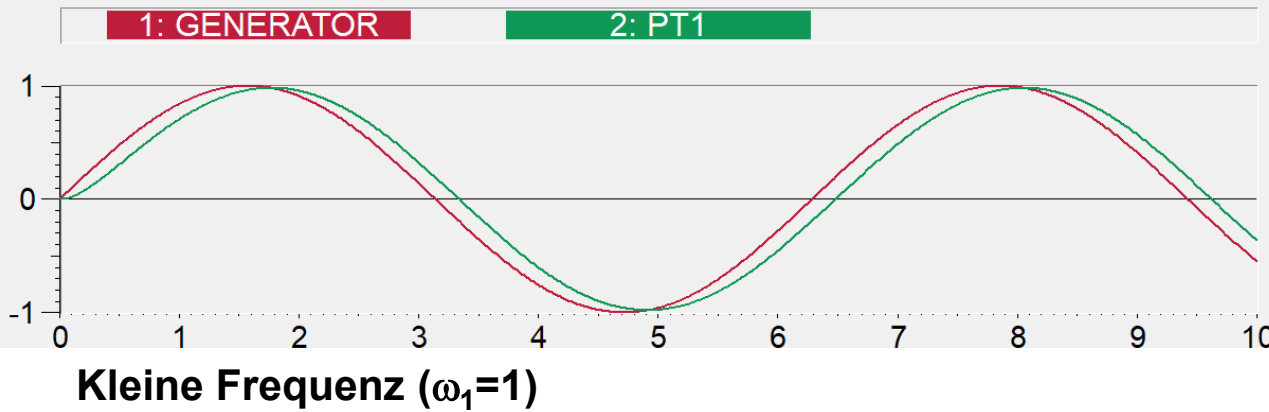
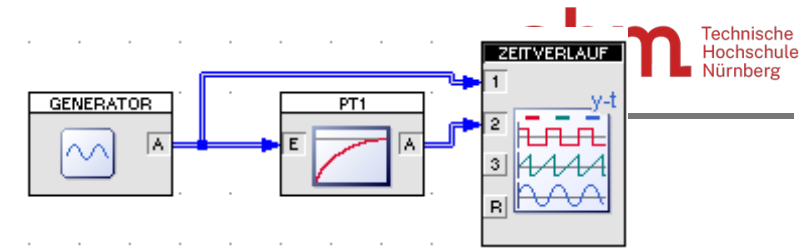
$$\log |G_{gesamt}(j\omega)| = \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \log |G_3(j\omega)| + \dots \Rightarrow \text{Summe der logarithm. Teil-Frequenzgänge}$$

$$\text{Gesamt-Phase: } \varphi_{ges}(j\omega) = \varphi_1(j\omega) + \varphi_2(j\omega) + \varphi_3(j\omega) + \dots \Rightarrow \text{Summe der Teil-Phasengänge}$$

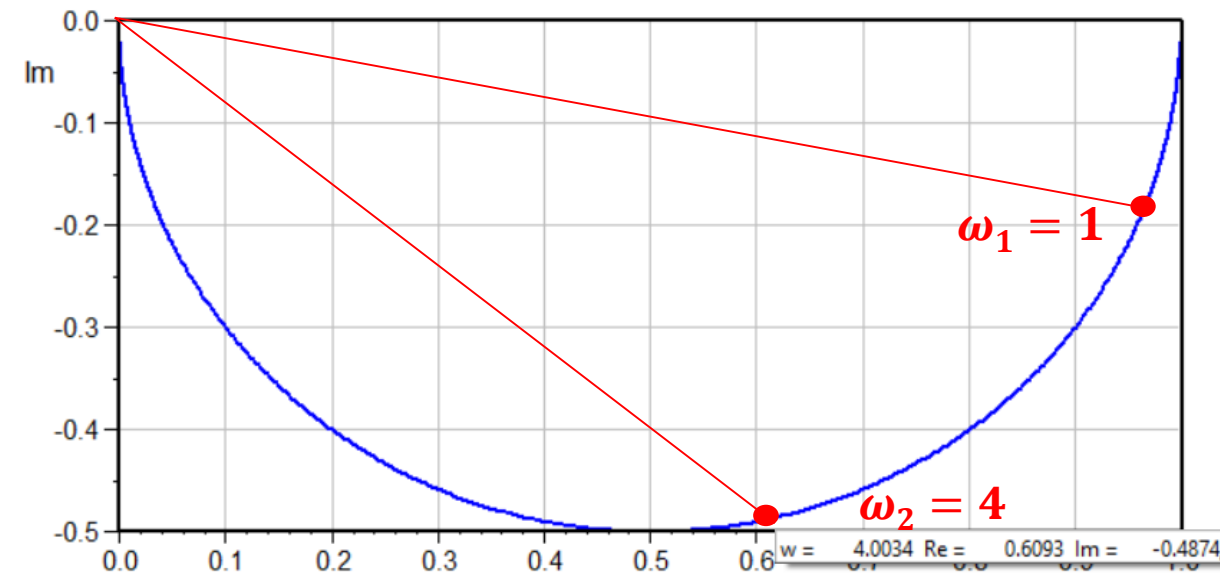
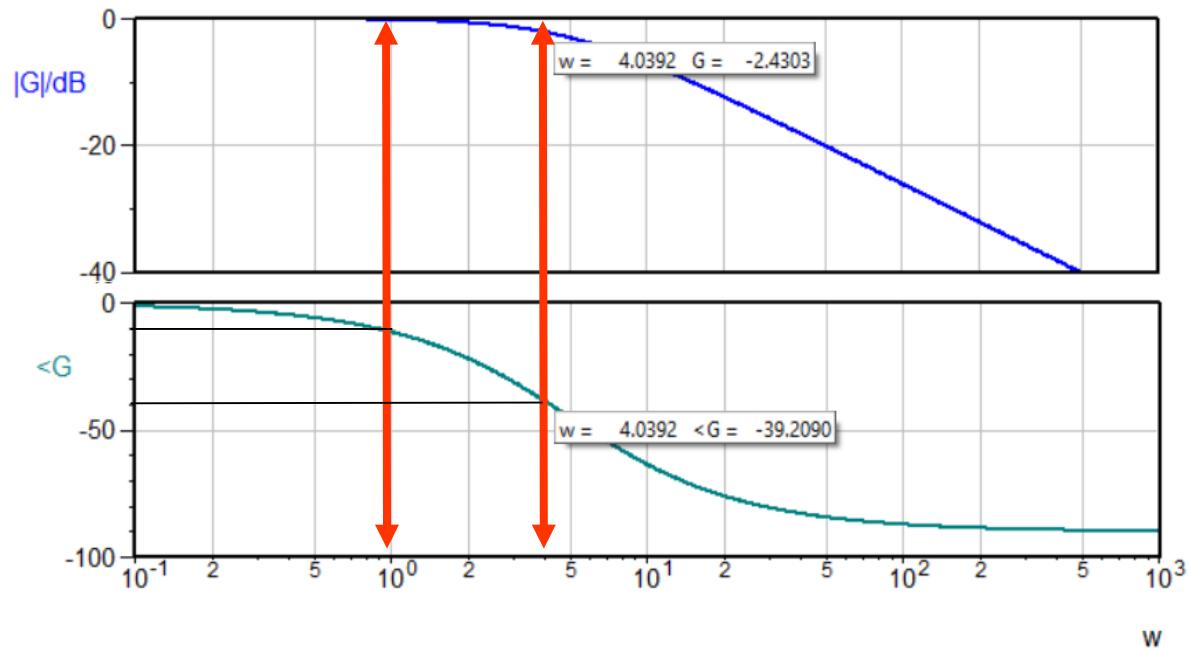
Was ist ein Frequenzgang?

⇒ Frequenzvariables Verhalten

⇒ Z. B. PT_1 -System \Leftrightarrow „Tiefpass 1. Ordnung“ \Leftrightarrow Beispiel $G(s) = \frac{1}{1+0,2s}$



Bode-Diagramm und (Nyquist-)Ortskurve



Wir kennen logarithmische Teilungen aus dem Alltag, z. B. Münz- und Schein-System:

Bode-Diagramm:

Logarithmische Betragsachse

⇒ Meist in Dezibel db:

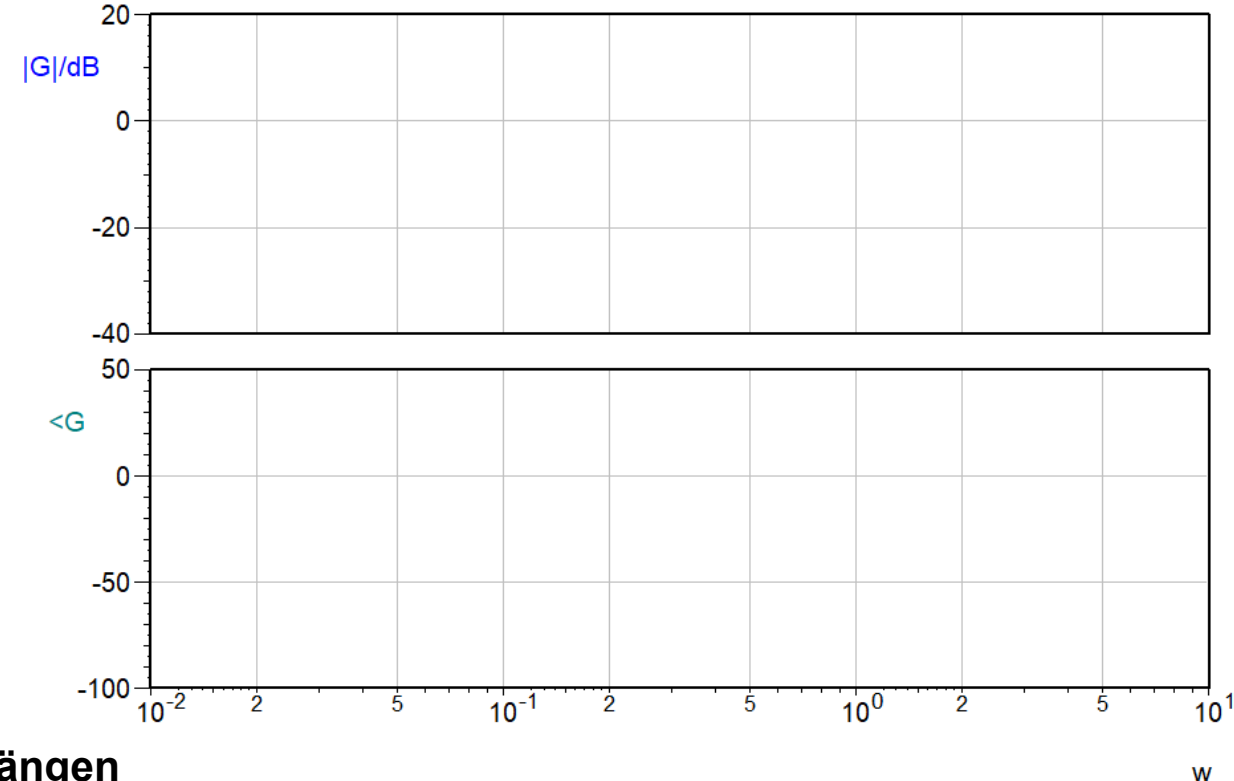
$$Z_{dB} = 20 \log_{10}(Z) \quad \Leftrightarrow \quad Z = 10^{\left(\frac{Z_{dB}}{20}\right)}$$

Lineare Phasenachse

Logarithmische Frequenzachse

Vorteile:

- ⇒ Übersichtlich über weite Frequenzbereiche
- ⇒ Einfache Konstruktion durch Addition von Teil-Frequenzgängen



Ziele:

Nicht immer einen Taschenrechner brauchen

Mit „dB – der unbekannten Einheit“ etwas anfangen können

$$Z_{dB} = 20 \log_{10}(Z) \quad Z = 10^{\left(\frac{Z_{dB}}{20}\right)}$$

Was man wissen sollte:

1 0 dB , da $10^0 \times 20$

10 20 dB , da $10^1 \times 20$

2 ca. 6 dB

Multiplikation von Faktoren --> Addition von dB

Division von Faktoren --> Subtraktion von dB

Potenzierung --> Multiplikation von dB

Beispiele:

4 12 dB

0,5 -6 dB

20 26 dB

5000 74 dB

24 dB

46 dB

-60 dB

78 dB

Ein Integrator = I-System im Bode-Diagramm und in der Ortskurve

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I} = 1/\omega T_I \cdot 1/j \quad \rightarrow \text{Trennung in Betrag u. Phase}$$

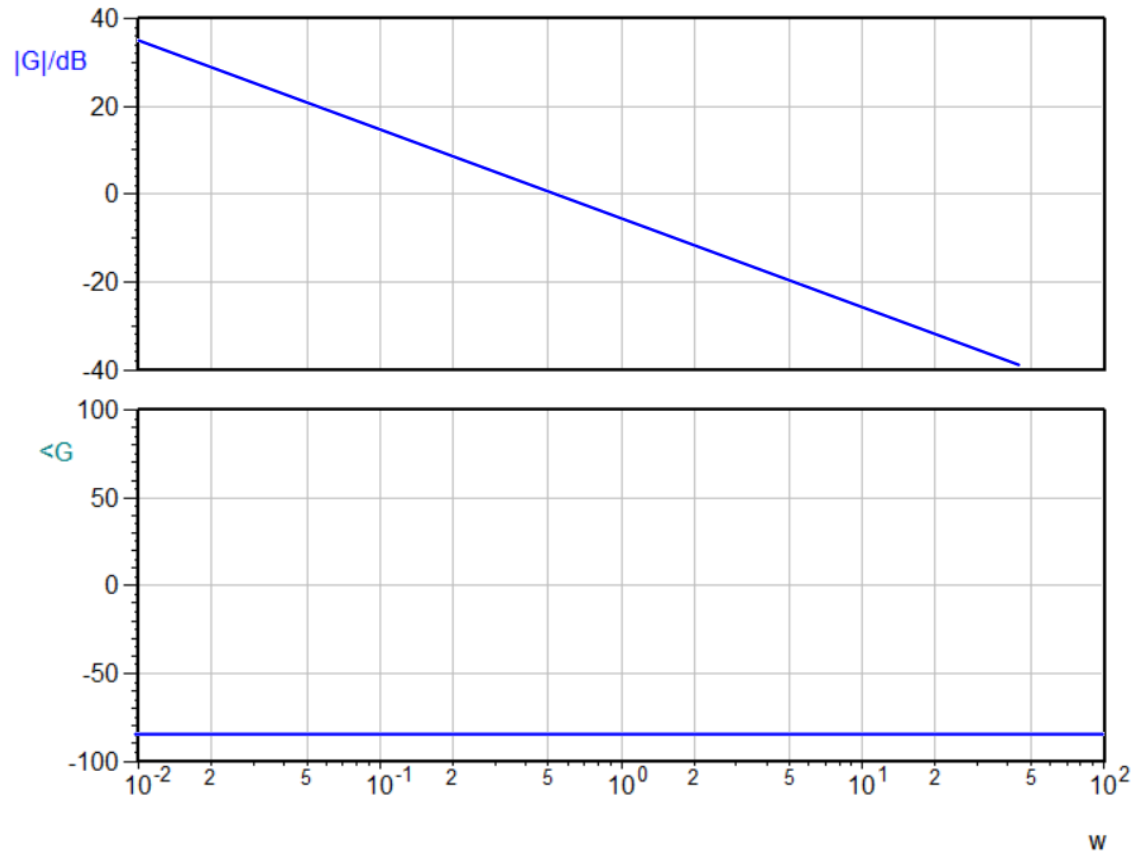
$$\text{Betrag}(j\omega) = 1/\omega T_I$$

1 Punkt wählen:
entweder $\omega = 1/T_I \rightarrow |G(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}$

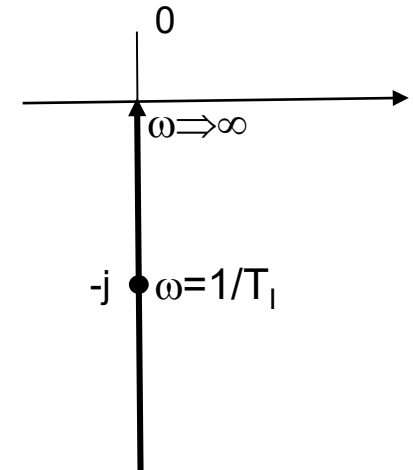
oder $\omega = \omega_{\min}$ einsetzen $\rightarrow 1/0,01 \cdot 2 = 50 = 34 \text{ dB}$

$$\text{Phase}(j\omega) = 1/j = -j = e^{-j90^\circ}$$

$$\text{Bode-Diagramm für } G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I} = \frac{1}{j\omega 2}$$



(Nyquist)-Ortskurve



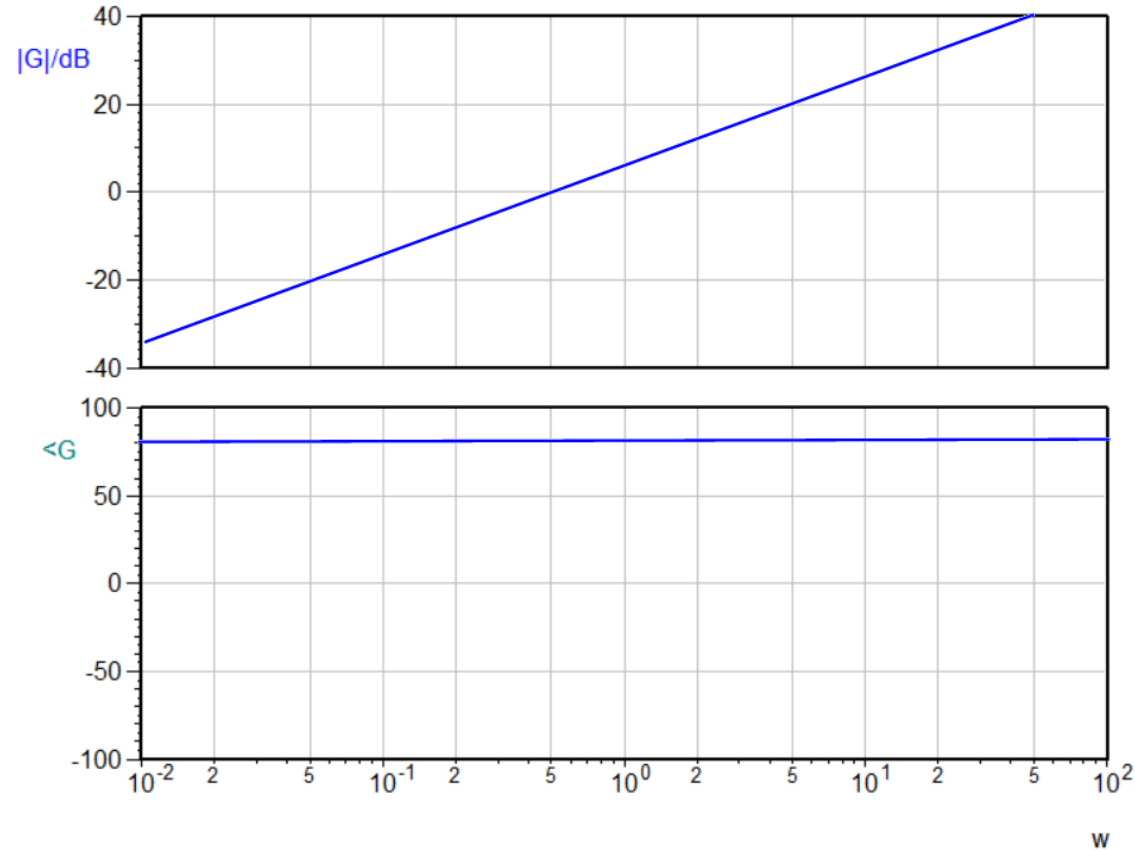
$$G(j\omega) = j\omega T_D$$

$$\text{Betrag}(j\omega) = \omega T_D$$

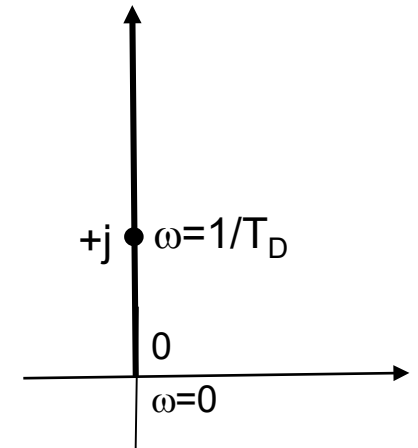
1/T einsetzen: Betrag = 1 = 0dB

oder ω_{\min} : Betrag = $0,01 \cdot 2 = 0,02 = -34 \text{ dB}$

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = j\omega T_D = j\omega 2$



(Nyquist)-Ortskurve



$$\text{Phase}(j\omega) = j = e^{+j90^\circ}$$

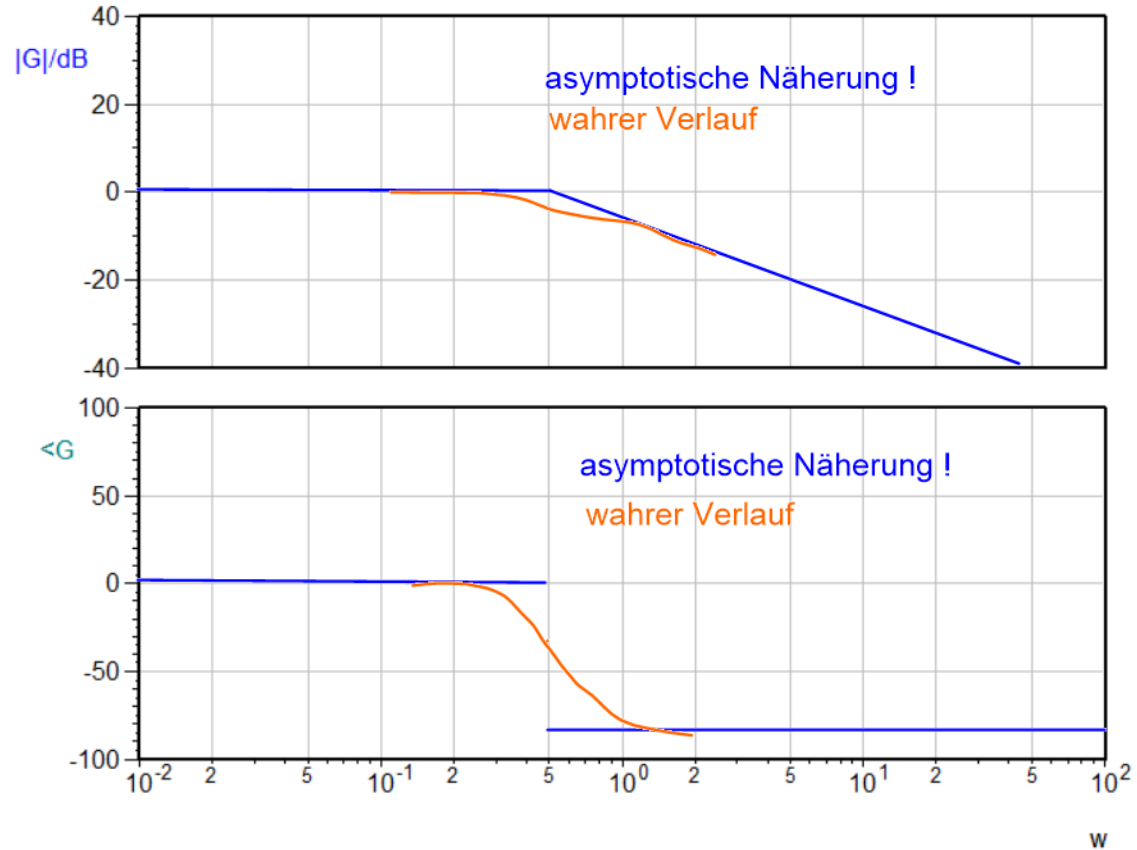
Ein PT₁-System im Bode-Diagramm und in der Ortskurve $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

$\omega \ll \frac{1}{T}$ $G(j\omega) = \text{ca. } 1 = 0 \text{ dB, } 0^\circ$

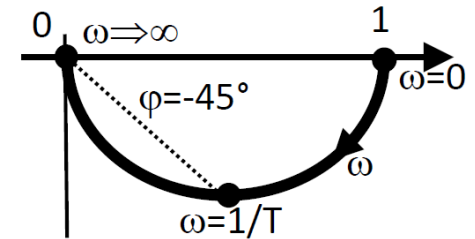
$\omega \gg \frac{1}{T}$ $G(j\omega) = \text{ca. } 1/j\omega T \rightarrow \text{siehe Integrator}$
 $\rightarrow \text{Phase } -90^\circ$

$\omega = \frac{1}{T}$ $G(j\omega) = 1/(1+j) = 1/\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}$
 $\rightarrow 1/\sqrt{2} = -3 \text{ dB}$

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+j\omega 2}$



(Nyquist)-Ortskurve



$$G(j\omega) = 1 + j\omega T_V$$

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = (1 + j\omega T_V) = (1 + j\omega 2)$

(Nyquist)-Ortskurve

$$\omega \ll \frac{1}{T_V} : G(j\omega) \approx 1$$

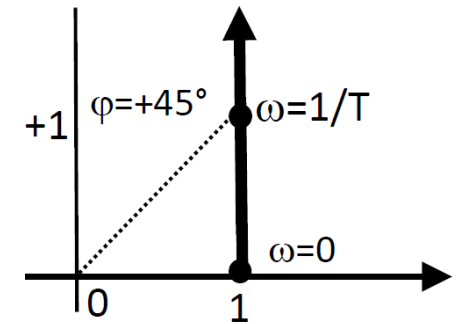
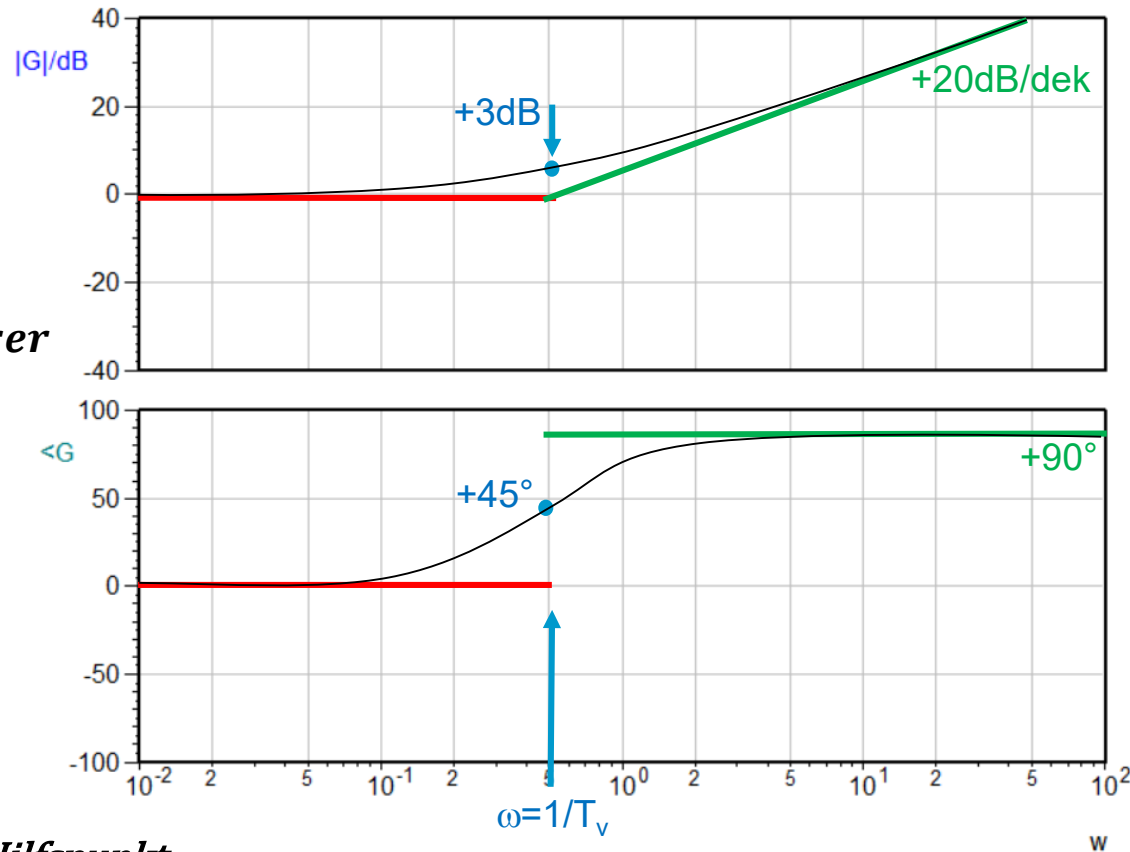
Betrag = 1 = 0dB, Phase = 0°
1. Asymptote

$$\omega \gg \frac{1}{T_V} : G(j\omega) \approx j\omega T_V \text{ wie Differenzierer}$$

Betrag = +20dB/dek Phase = +90°
2. Asymptote

$$\omega = \frac{1}{T_V} : G(j\omega) = 1 + j$$

Betrag = $\sqrt{2} = +3dB$; Phase = +45° Hilfspunkt



$$G(j\omega) = 1 - j\omega T_V$$

$$\omega \ll \frac{1}{T_V}: G(j\omega) = 1$$

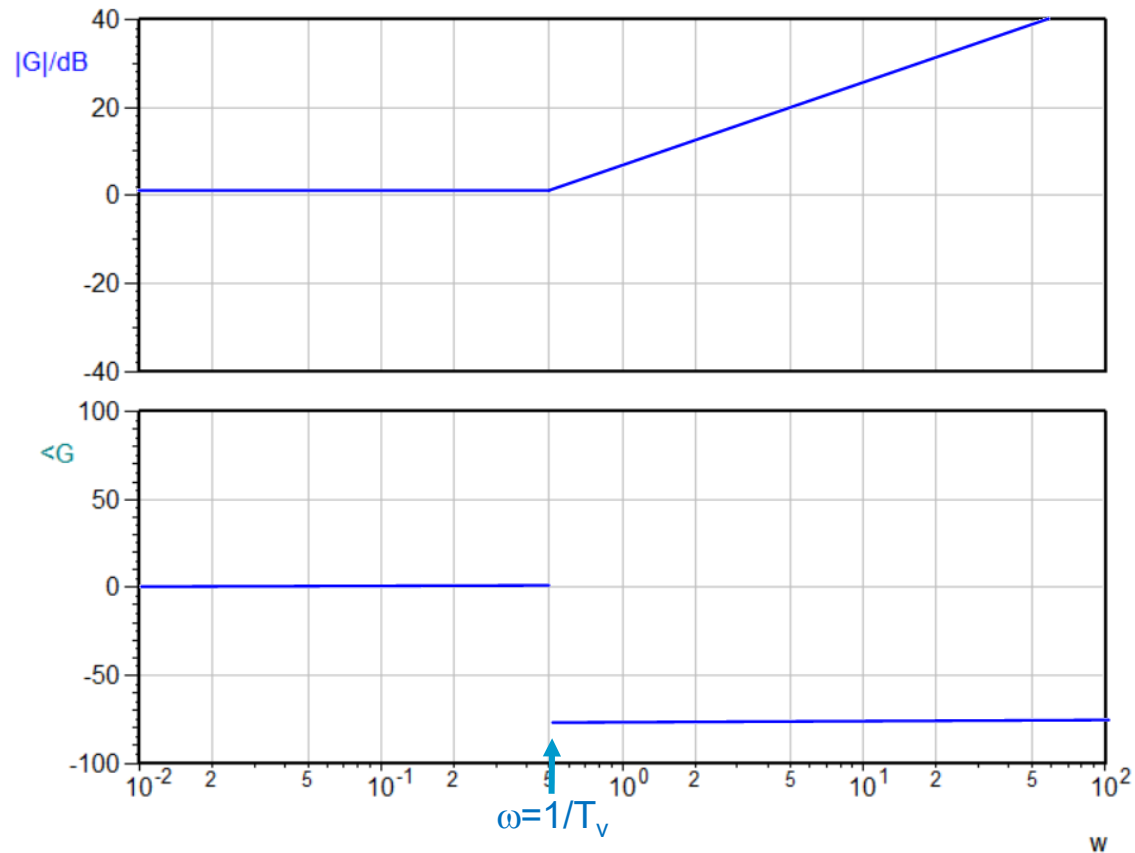
Betrag $\approx 0 \text{ dB}$ **Phase** $\approx 0^\circ$

$$\omega \gg \frac{1}{T_V}: G(j\omega) = -j\omega T_V$$

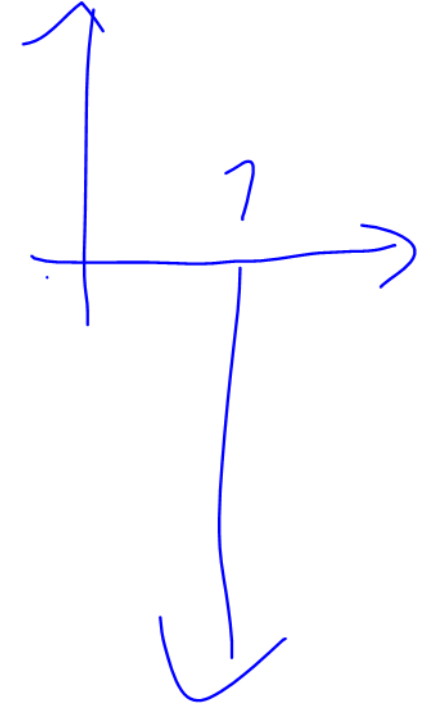
Betrag $= \omega T_V$ **Phase** $= -90^\circ$

$$\omega = \frac{1}{T_V}: \text{Betrag} = \sqrt{2} \text{ dB} = +3 \text{ dB} \quad \text{Phase} = -45^\circ$$

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = 1 - j\omega T_V = 1 - j\omega 2$



(Nyquist)-Ortskurve



$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

Betrag = 1 = 0 dB

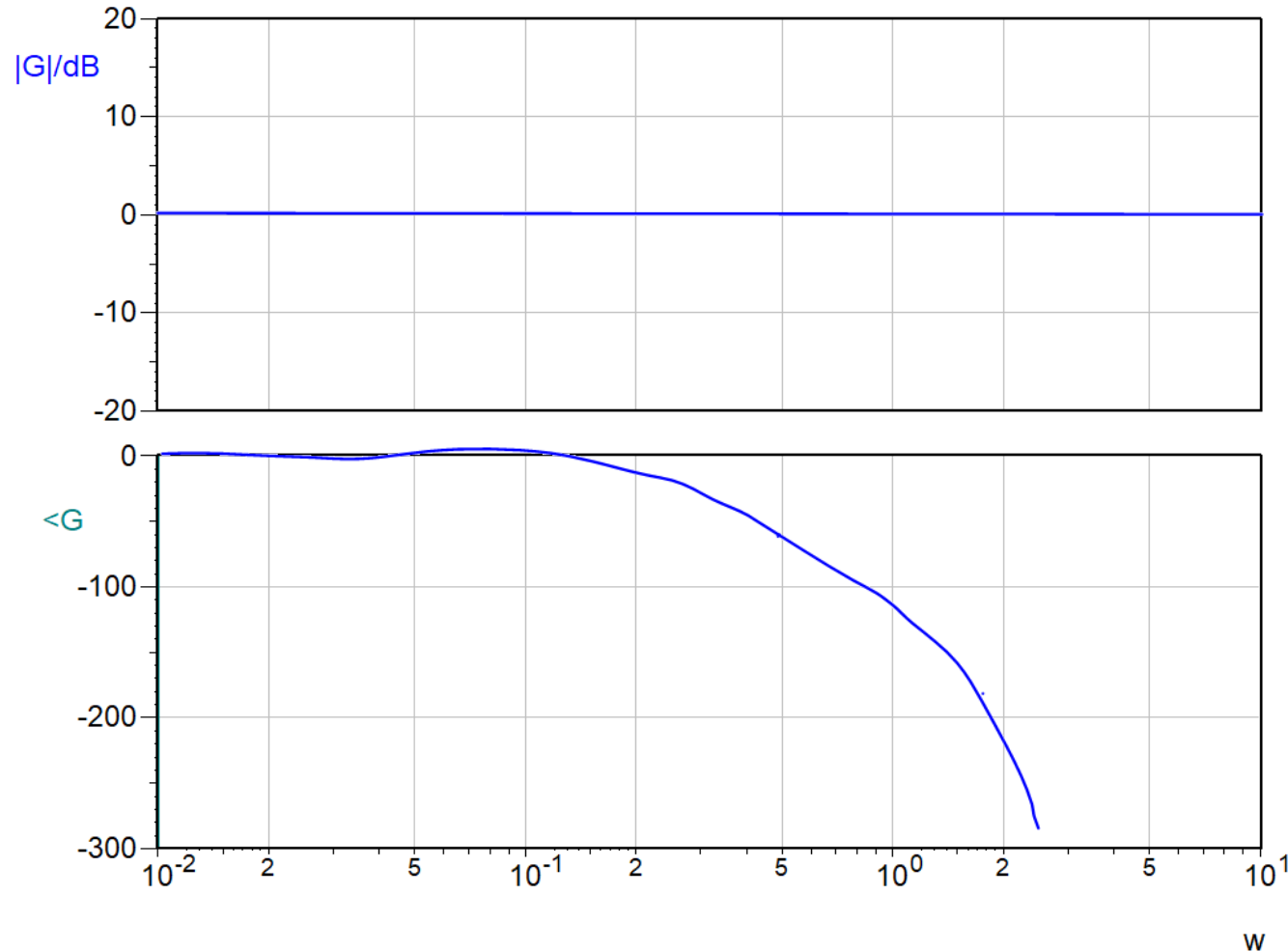
Phase = $-\omega T_t$

Zwei Hilfspunkte:

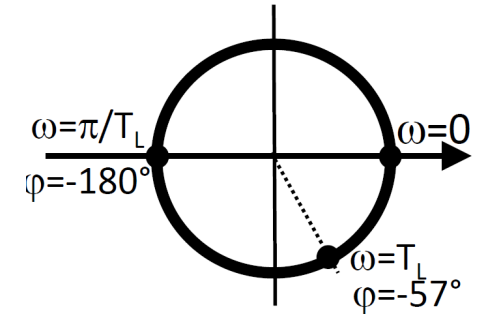
$\omega = \frac{1}{T_t}$ --> $\phi = -1 \text{ (rad)} = -57^\circ$

$\omega = \frac{\pi}{T_t}$ --> $\phi = -\pi \text{ (rad)} = -180^\circ$

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t} = e^{-j\omega 2}$



(Nyquist)-Ortskurve



Allpass, weil Betragsgang konstant und Ortskurve ein Kreis ist

Ein PT₂-System im Bode-Diagramm und in der Ortskurve => für den Schwingfall: $0 < D < 1$
 falls $D \geq 1$ --> PT2 als Reihenschaltung von 2 PT1-Gliedern konstruierbar

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{2D}{\omega_0} + (j\omega)^2 \frac{1}{\omega_0^2}}$$

$\omega \ll \omega_0 \quad G(j\omega) \approx 1$

Betrag ≈ 0 dB **Phase** $\approx 0^\circ$

1. Asymptote bis ω_0

$\omega \gg \omega_0 \quad G(j\omega) \approx (\omega_0 / \omega)^2 \cdot -1$

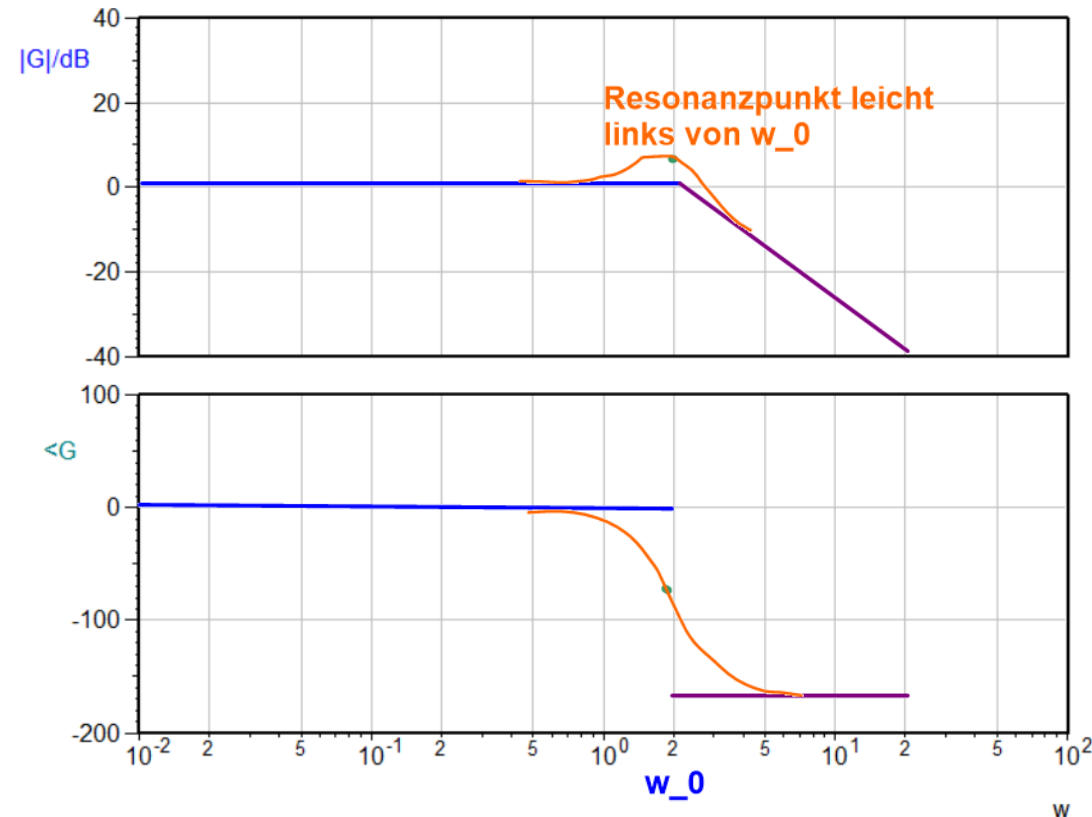
Betrag ≈ -40 dB/Dek. **Phase** $\approx -180^\circ$

2. Asymptote ab ω_0

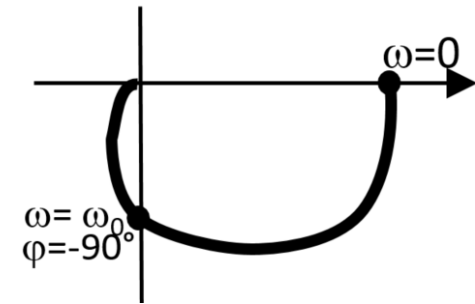
$\omega = \omega_0 \quad G(j\omega) = -j \cdot 1/2D$

Betrag = $1/2D$ **Phase** = -90°
 --> im Bsp 8 dB

Bode-Diagramm für $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{2D}{\omega_0} + (j\omega)^2 \frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{2 \cdot 0.2}{2} + (j\omega)^2 \frac{1}{2^2}}$



(Nyquist)-Ortskurve



Wir haben gesehen: Bei $\omega = \omega_0$ gilt für den Betrag $1/2D$.

Das ist aber nicht das Maximum des Betragsgangs!

Beispiel: $\frac{1}{1+j\omega 0,8+(j\omega)^2} \Leftrightarrow \omega_0 = 1, D = 0,4$

Maximalwert bei Resonanzfrequenz $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$

Resonanzüberhöhung tritt nur auf für $D < 1/\sqrt{2}$!

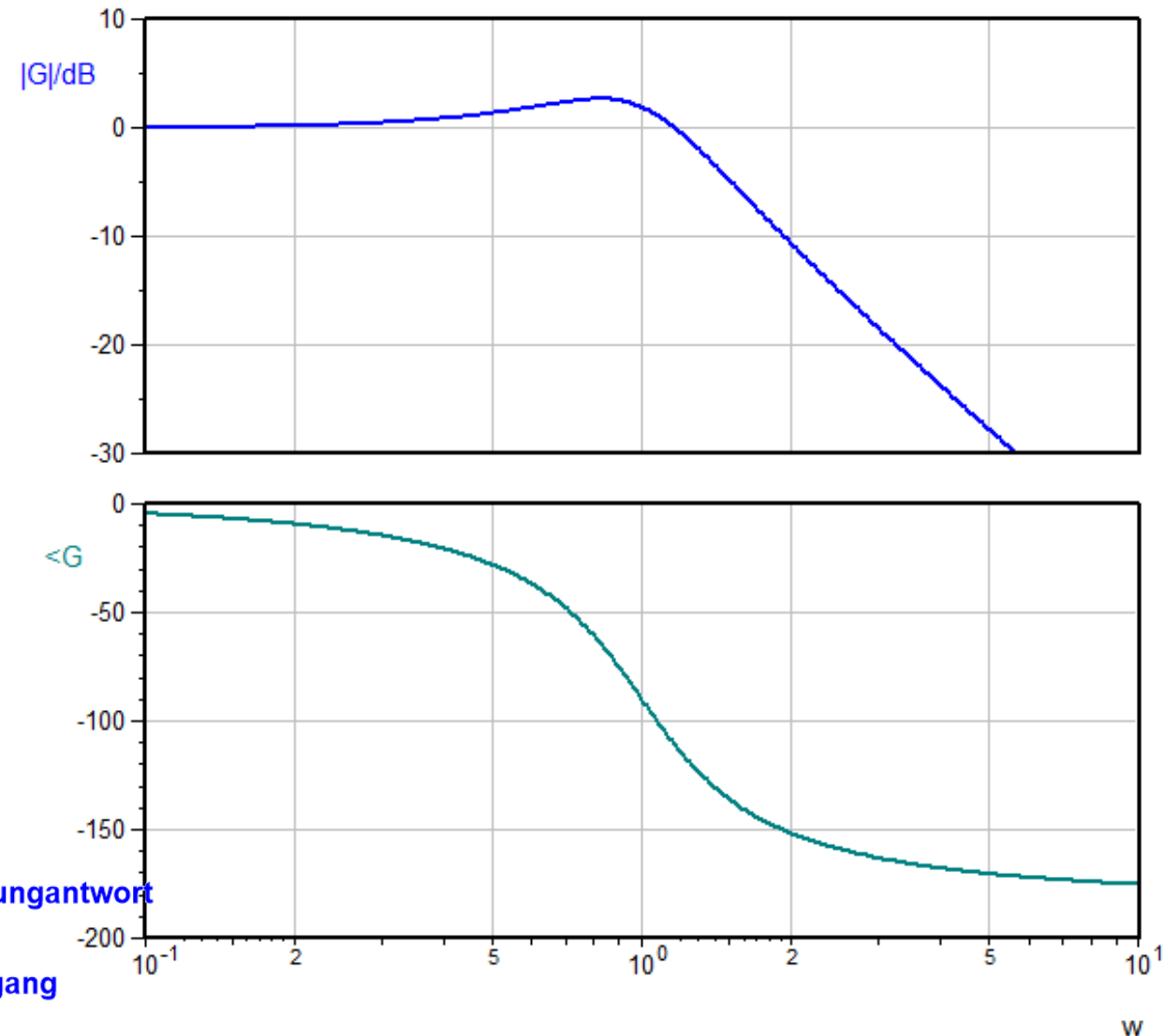
Beim Maximalwert: Resonanzüberhöhung $\ddot{U} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$

Achtung!

ω_0	Kennkreisfrequenz
$\omega_E = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$	Schwingkreisfrequenz
$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$	Resonanzkreisfrequenz

Schwingfähig für $D < 1 \Leftrightarrow$ relative Überschwingweite $\ddot{u} > 0$

Resonanz für $D < 0,71 \Leftrightarrow$ Resonanzüberhöhung $\ddot{U} > 0$

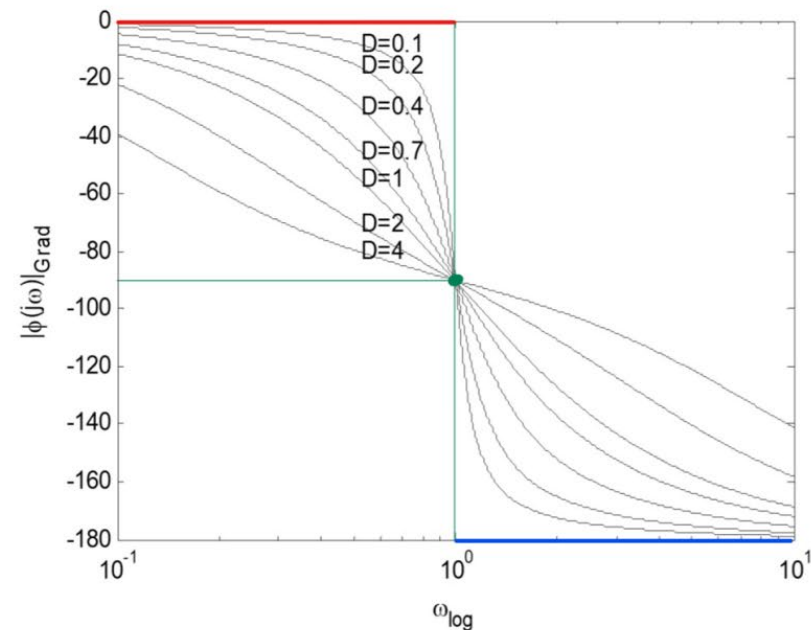
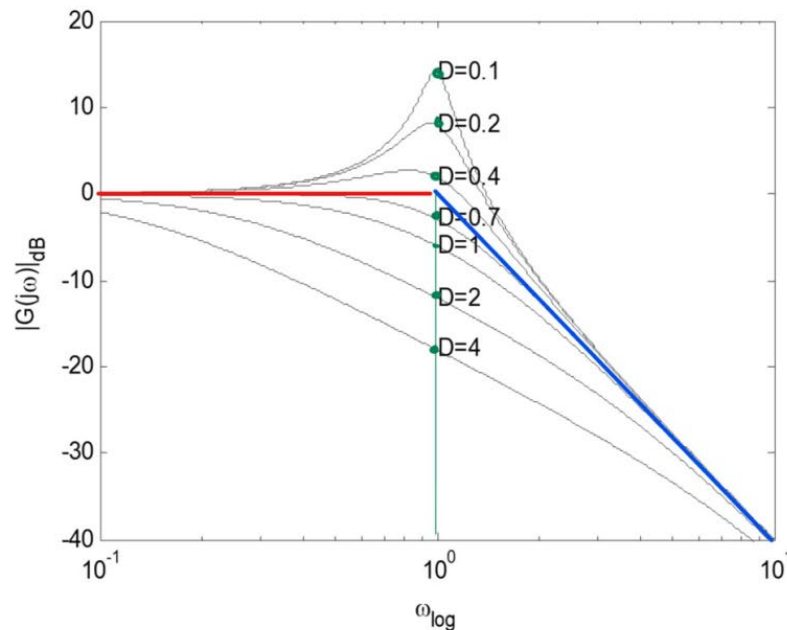


Für den Dämpfungsfall: $D \geq 1$:

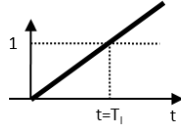
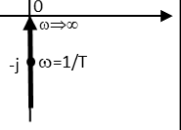
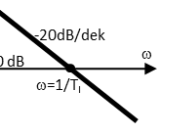
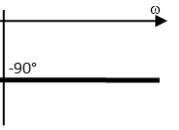
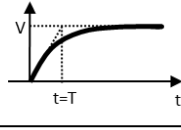
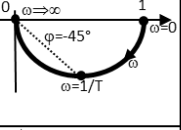
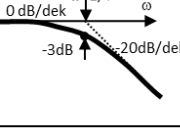
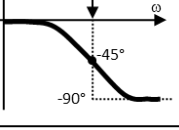
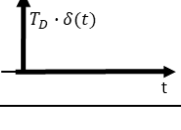
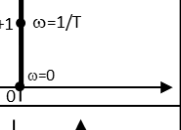
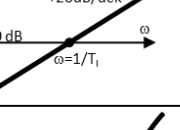
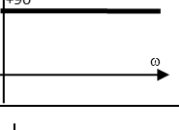
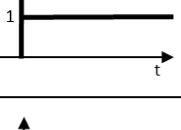
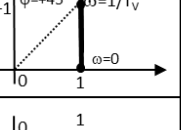
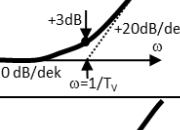
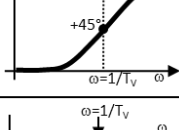
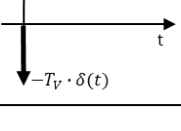
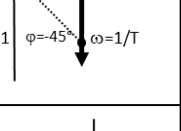
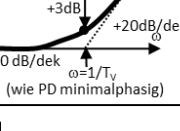
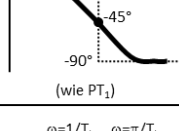
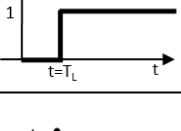
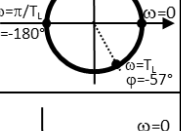
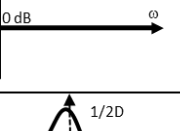
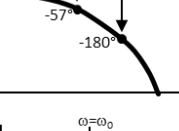
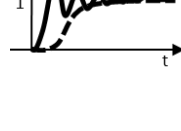
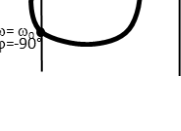
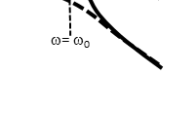
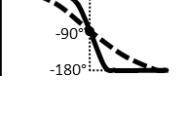
⇒ „Im Prinzip“ gelten die Regeln (Asymptoten etc.) für den Schwingfall $D < 1$ auch für $D \geq 1$

⇒ Jedoch: genaueres Bode-Diagramm, wenn man das PT₂-System als Reihenschaltung zweier PT₁-Systeme konstruiert

Bode-Diagramme für $\omega_0 = 1$ und unterschiedliche Werte der Dämpfung D :



Übersichtstabelle der Grund-Systeme zum Nachschlagen (=> Moodle!)

Basis-System	$G(j\omega)$	Konstruktion d. Frequenzgangs für $\omega \Rightarrow 0$ für $\omega \Rightarrow \infty$		Charakteristischer Punkt	Einheits-Sprungantwort	Ortskurve	Bode-Betragsgang	Bode-Phasengang
I	$\frac{1}{j\omega T_I}$	$\frac{1}{j\omega T_I}$	-20 dB/dek -90°	$\omega = 1/T_I$ 0 dB -90°				
PT ₁	$\frac{1}{1+j\omega T}$	1 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$\frac{1}{j\omega T}$ -20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T$ -3 dB -45°				
D	$j\omega T_D$	$j\omega T_D$ +20 dB/dek +90°		$\omega = 1/T_D$ 0 dB +90°				
PD	$1 + j\omega T_V$	1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$j\omega T_V$ +20 dB/dek +90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB +45°				
PD nichtminimalphasig	$1 - j\omega T_V$	1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-j\omega T_V$ +20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB -45°				
T _L	$e^{-j\omega T_L}$	Betrag = 1 = konstant Phase = $-\omega T_L$		$\omega = 1/T_L$: $\varphi = -57^\circ$ $\omega = \pi/T_L$: $\varphi = -180^\circ$				
PT ₂	$\frac{1}{1+j\omega \frac{2D}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$	1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ -40 dB/dek 180° 2. Asymptote	$\omega = \omega_0$ Betrag = $1/2D$ Phase = -90°				

Bisher: Verstärkungswert $V = 1$

Falls $V \neq 1$: Verschieben des Frequenzgangs durch Addition von V_{dB}

\Rightarrow Beispiel eines PT2-Systems mit $V \neq 1$

$$G(j\omega) = \frac{25}{2 + 1,2 j\omega + 18(j\omega)^2}$$

- \Rightarrow Bestimmen Sie V , D , ω_0 und V_{dB}**
- \Rightarrow Bestimmen Sie die Resonanzparameter ω_{res} und \ddot{U}**
- \Rightarrow Konstruieren Sie den asymptotischen Verlauf des Frequenzgangs**
- \Rightarrow Skizzieren Sie den wahren Verlauf des Frequenzgangs unter Nutzung von Hilfspunkten bei ω_{res} und ω_0**
- \Rightarrow Kontrollieren Sie mit LISA!**

