3 Komplexe Zahlen

Trigonometrische Tabelle:

$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$
$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$
$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$

Tangens

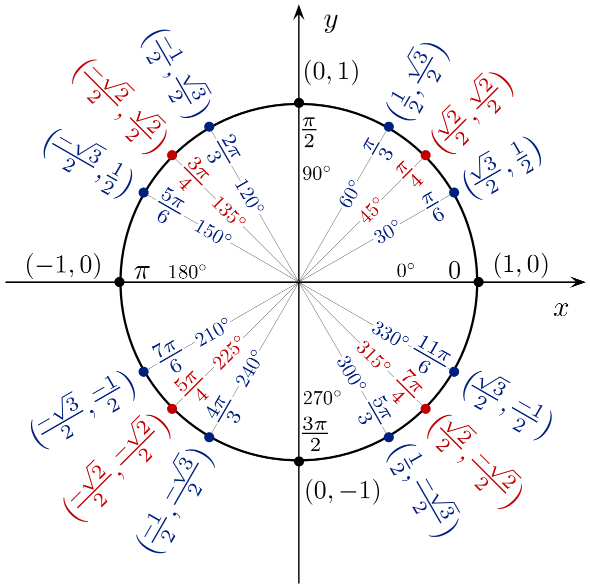
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan(x)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Sinus/Cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Sinus/Cosinus

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin(x)	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos(x)	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Weitere Rechenregeln

$$\sqrt{z \cdot z^*} = |z|$$
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2j}$$
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$
$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Wurzeln von komplexen Zahlen

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{j\frac{\varphi}{n} + j\frac{2\pi k}{n}}$$

kapazitiver Widerstand

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{j(0-\pi/2)} = \frac{1}{j\omega C}.$$

induktiver Widerstand

$$\underline{Z}_L = \omega L e^{j(\pi/2-0)} = j\omega L.$$

(± 1)² = **1**	(± 11)² = **121**	(± 21)² = **441**
(± 2)² = **4**	(± 12)² = **144**	(± 22)² = **484**
(± 3)² = **9**	(± 13)² = **169**	(± 23)² = **529**
(± 4)² = **16**	(± 14)² = **196**	(± 24)² = **576**
(± 5)² = **25**	(± 15)² = **225**	(± 25)² = **625**
(± 6)² = **36**	(± 16)² = **256**	(± 26)² = **676**
(± 7)² = **49**	(± 17)² = **289**	(± 27)² = **729**
(± 8)² = **64**	(± 18)² = **324**	(± 28)² = **784**
(± 9)² = **81**	(± 19)² = **361**	(± 29)² = **841**
(± 10)² = **100**	(± 20)² = **400**	(± 30)² = **900**

4 Folgen und Reihen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.7182\ldots \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Rechenregeln:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = a^c \quad \text{falls } a_n \geq 0 \text{ und } c \in \mathbb{C}$$

Addition von Summen gleicher Länge

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k + c_k + \ldots) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k + \ldots$$

Besteht die Funktion aus einer Summe (Differenz), müssen Klammern gesetzt werden.

Geometrische Reihe:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

5 Differentialrechnung

Tangentengleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Lineare Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Fehlerrechnung I

- absoluter Fehler

$$|\Delta y| = |y - y_0| = |f'(x_0)dx|$$

- relativer Fehler

$$\left|\frac{\Delta y}{y_0}\right| = \left|\frac{f'(x_0)dx}{f(x_0)}\right|$$

1. Ableitung von f(x) berechnen
2. Messwert als x einsetzen
3. mit Δx multiplizieren → absoluter Fehler
4. Ergebnis durch f(x) teilen (x = Messwert) → relativer Fehler

Tangentialebene: Flächennormale

Flächennormale ist $\begin{pmatrix} f_x(x_0; y_0) \\ f_y(x_0; y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = f_x \cdot \frac{v_1}{|\vec{v}|} + f_y \cdot \frac{v_2}{|\vec{v}|}.$$

implizite Differentiation (wenn F(x,y) = 0 gegeben)

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Taylorreihe bei mehreren Veränderlichen

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + R_2.$$

Matrixschreibweise

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + (h_1,h_2)\cdot \operatorname{grad} f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\cdot H(x_0,y_0)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + R_2$$

6 Anwendung der Differentialrechnung

Reihenentwicklung wichtiger Funktionen:

Funktion $f(x)$	Taylorreihe	Konvergenzbereich
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$	$\lvert x\rvert < 1$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$	$\lvert x\rvert < 1$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^k$	$\lvert x\rvert < 1$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$	$\lvert x\rvert < 1$

$$\begin{aligned} e^{j\cdot x} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(jx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(j)^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(j)^{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + j\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + j\sin(x) \end{aligned}$$

Aufg 9 (a) $\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k}}{(2k)!}$ für $|x| < \infty$

(b) $\ln(1+x^4) = x^4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k}}{k+1}$ für $|x| \le 1$

(c) $\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/3}{k}(-1)^k\frac{x^{2k}}{8^k}$ für $|x| < 2\sqrt{2}$

Kurven: Geradengleichung g der Tangente

$$g: \vec{r} + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Umrechnung Parameterform in kartesische Form: eine Gleichung nach t auflösen und in die andere einsetzen

Steigung Kurve berechnen:

Parameterform:	Implizite Form:
1. x(t) und y(t) ableiten 2. Steigung: $m_T = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ 3. waagrechte Tangenten: $\dot{y}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) \neq 0$ a. t berechnen b. in x(t) und y(t) einsetzen c. Punkte mit waagrechten Tangenten definieren P (x_1,y_1) etc. 4. senkrechte Tangenten: $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ a. wie bei waagrechten Tangenten 5. Spitzen: $\dot{y}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = 0$ 6. Tangentengleichung in bestimmtem Punkt: $g = \vec{r}(t) + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ → t-Wert einsetzen (Berechnung t: Überlegen für welches t x(t) und y(t) den Punkt ergeben) → Umwandlung in LGS: $x = x(t) + \lambda \cdot \dot{x}(t)$ und $y = y(t) + \lambda \cdot \dot{y}(t)$ → erste Gleichung nach λ auflösen und in andere einsetzen → Darstellung der Tangentengleichung als Funktion	1. nach x ableiten 2. nach y ableiten 3. Tangentensteigung/Steigung: $y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ 4. Wenn Steigung in best. Punkt gefragt: Dessen x- und y-Werte in $y'(x)$ einsetzen 5. waagrechte Tangente bei $-F_x(x,y) = 0$ a. anschließend nach y auflösen und in F(x,y) einsetzen → Punkte können berech. werden 6. senkrechte Tangente bei $-F_y(x,y) = 0$ a. anschließend nach y auflösen und in F(x,y) einsetzen → Punkte können berech. werden 7. Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, y_0)$: $t(x) = y_0 + y'(x_0)\cdot(x - x_0)$

7 Integralrechnung

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven wenn diese sich im untersuchten Intervall schneiden:

$$A = \left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))dx\right|$$

Schnittpunkte berechnen!!

Mantelfläche in Parameterform: $M_x = 2\pi \int_{t1}^{t2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

Verschiedene Integrale

$$\int \frac{1}{1+2x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\, x) + C$$

$\int \arctan x\, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$ (erst partielle Integration, im zweiten Schritt Substitution u = 1+x²)

b) $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(4x)\, \mathrm{d}x$:

zweimalige partielle Integration $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

mit $u'(x) = \mathrm{e}^x$ und $v(x) = \sin(4x)$ bzw. $v(x) = \cos(4x)$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{[\mathrm{e}^x \sin(4x)]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x (4\cos(4x))\,\mathrm{d}x \\ &= -4\,[\mathrm{e}^x \cos(4x)]_0^{\pi} + 4 \underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x(-4\sin(4x))\,\mathrm{d}x}_{-16I} \end{aligned}$$

---

b) $|z + 1 + \mathrm{i}| = 2|z + 1 - 2\mathrm{i}|$:

$a = -1 - \mathrm{i}$, $b = -1 + 2\mathrm{i}$, $s = 2$ $\rightsquigarrow$ Kreis

explizite Form durch Setzen von $z = x + \mathrm{i}y$

Quadrieren der Betragsgleichung $\rightsquigarrow$

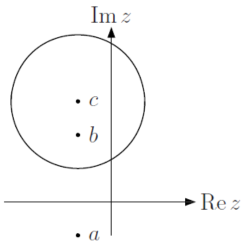
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4\left((x+1)^2 + (y-2)^2\right)$$

Umformen und quadratische Ergänzung $\rightsquigarrow$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = -6 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Mittelpunkt: $c = -1 + 3\mathrm{i} \,\widehat{=}\, (-1, 3)$

Radius: $r = 2$



Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Geradengleichung $y = m \cdot x + b$, die durch

$$|z - 3 + j| = |z|$$

mit $z = x + jy$ gegeben ist. Berechnen Sie explizit die Werte von m und b und zeichnen Sie die Gerade auch in der Gaußschen Zahlenebene.

2 $|z - 3 + j| = |z|$

$|z - 3 + j|^2 = |z|^2$

$(z - 3 + j)(z^* - 3 - j) = x^2 + y^2$

$zz^* - 3z - jz - 3z^* + 9 + 3j + jz^* - 3j + 1 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 - 3(x + jy) - j(x + jy) - 3(x - jy) + 9 + 3j + j(x - jy) - 3j + 1 = x^2 + y^2 \quad | -x^2 - y^2 - 10$

$-3x - \cancel{3jy} - \cancel{jx} + y - 3x + \cancel{3jy} + \cancel{3j} + \cancel{jx} + y - \cancel{3j} = -10$

$-3x + y - 3x + y = -10$

$-6x + 2y = -10 \rightarrow y = 3x - 5 \qquad m = 3, \; b = -5$

Skizzieren Sie die Mengen in der Gaußschen Zahlenebene, die durch

a) $|z| - \operatorname{Im} z = 1$ b) $|z| \leq 2 \operatorname{Re} z$

beschrieben werden.

Verweise: Gaußsche Zahlenebene

Lösungsskizze

Umwandlung in Koordinatenform

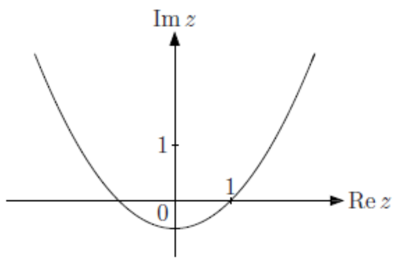
$$z \to x + \mathrm{i}y, \quad x = \operatorname{Re} z,\; y = \operatorname{Im} z$$

a) $|z| - \operatorname{Im} z = 1$:

Definition des Betrags und des Imaginärteils, Quadrieren $\rightsquigarrow$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 + 2y$$

$\rightsquigarrow$ Parabel mit Scheitel bei $(0, -1/2)$



b) $|z| \leq 2 \operatorname{Re} z$:

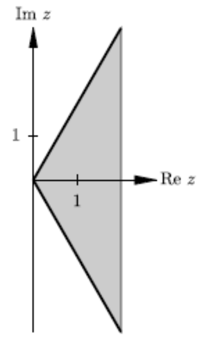
Definition des Betrags und des Realteils $\rightsquigarrow$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2x$$

bzw. nach Quadrieren

$$y^2 \leq 3x^2 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

Sektor, begrenzt durch die Halbgeraden $y = \pm\sqrt{3}\, x$, $x \geq 0$



16. *Aufgabe:* Gegeben ist die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad z=f(x,y)=x^2+4\,y^2$$

und der Punkt $P(3;2)$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten dieser Funktion f im Punkt P.

(b) Berechnen Sie die Höhen-/Isolinie dieser Funktion f, die durch den Punkt P verläuft, und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Zeigen Sie, dass der Gradient von (a) senkrecht steht auf der Tangente an die Höhenlinie von (b), und zeichnen Sie ihn in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion $f(x,y)$ im Punkt $P(a,b)$. Wie müssen die Werte a und b gewählt werden, damit die Tangentialebene parallel zu der Ebene $z=2x+y-23$ ist?

Lösung: (a) Gradient als Vektor der partiellen Ableitungen ist

$$\operatorname{grad} f(3;2)=\begin{pmatrix}f_x(3;2)\\ f_y(3;2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\16\end{pmatrix}.$$

(b) Höhenlinie durch $P(3;2)$ ist $F(x;y)=x^2+4\,y^2-25=0$. Dies ist eine Ellipse mit $-5\le x\le 5$ und $-2.5\le y\le 2.5$.

(c) Steigung der Ellipse in P ist $y'=-F_x/F_y=-3/8$. Gradient und Tangentenvektor erfüllen

$$\begin{pmatrix}6\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3/8\end{pmatrix}=0$$

also orthogonal.

(d) $f(a,b)=a^2+4b^2$, $f_x(a,b)=2a$ und $f_y(a,b)=8b$.
Tangebtialebene: $z=a^2+4b^2+2a(x-a)+8b(y-b)$
Tangentialebene parallel zu der Ebene $z=2x+y-23$ heißt $2a=2\Rightarrow a=1$ und $6b=1\Rightarrow b=1/8$.

16) Inversion $w=\frac{1}{z}$ von Kreis um $(1+3j)$, Radius $\sqrt{10}$

$|z-(1+3j)|=\sqrt{10}$

$|z-(1+3j)|^2=10$

$(z-(1+3j))(z^*-(1-3j))=10$

$(z-1-3j)(z^*-1+3j)=10$

$zz^*-z+3jz-z^*+1\cancel{-3j}-3jz^*\cancel{+3j}+9=10 \quad |-10$

$\to w:\ \frac{1}{ww^*}-\frac{1}{w}+\frac{3j}{w}-\frac{1}{w^*}-\frac{3j}{w^*}=0 \quad |\cdot ww^*$

$1-w^*+3jw^*-w-3jw=0$

$1-(x-jy)+3j(x-jy)-(x+jy)-3j(x+jy)$

$1-x+\cancel{jy}+\cancel{3jx}+3y-x\cancel{-jy}\cancel{-3jx}+3y=0$

$1-2x+6y=0 \to 6y=2x-1 \to y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$

Ortskurven

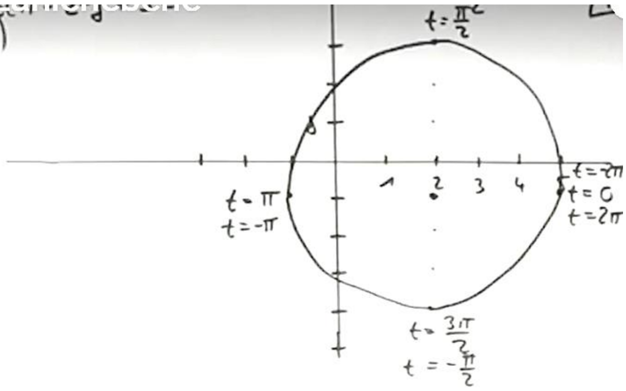
Skizzieren Sie die folgenden Ortskurven

(I) $(1-2j)+t\cdot(-3+j)\quad ,t\in\mathbb{R}$

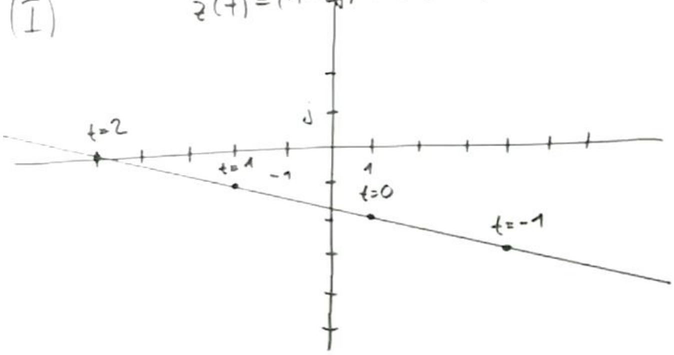
(II) $2-j+3\cdot e^{j\cdot t}\quad ,t\in\mathbb{R}$

(III) $\frac{1}{t+1}\cdot e^{-j\cdot\pi t}\quad ,t\geq 0$

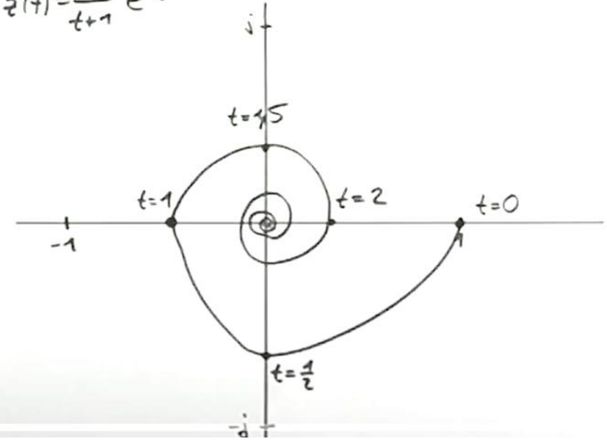
(II)



(I) $z(t)=(1-2j)+t\cdot(-3+j)$



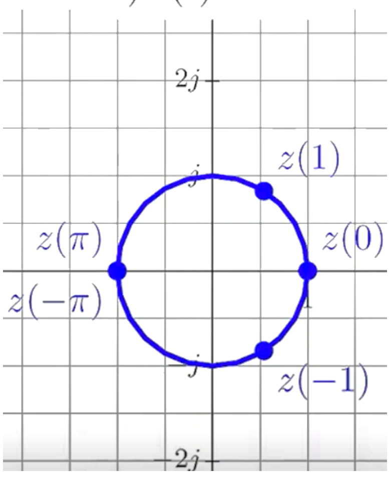
(III) $z(t)=\frac{1}{t+1}e^{-j\pi t}$



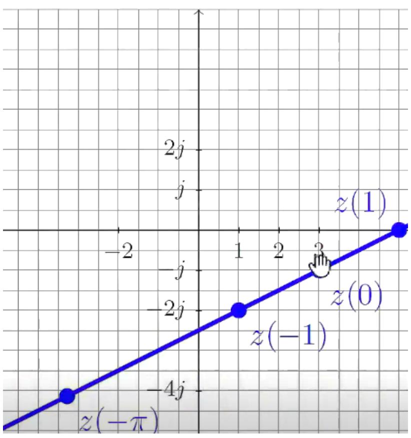
NR

$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

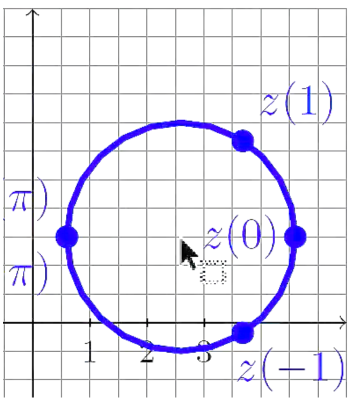
1) $z(t)=e^{j\cdot t}$



2) $z(t)=(3-j)+t(2+j)$



$3e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}+2e^{j\cdot t}$



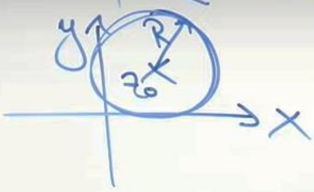
exe Mengen zeichnen & grafisch darstellen | Betrag, Argument, Realteil, Imaginärt

① Betrag (= Radius)

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |1 - z + i| \leq 3\}$$

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1\}$$

$$|z - z_0| \gtreqless R$$



② Argument (= Winkel)

$$M = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) < \frac{\pi}{3}\}$$

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z^2)| \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\varphi_0 \leq \arg(z) \leq \varphi_1$$

③ Realteil, Imaginärteil

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > i \cdot (z - \bar{z})\}$$

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 2|z| - 2 = z + \bar{z}\}$$

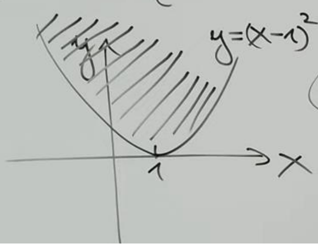
$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z^2| \leq \mathrm{Re}(z)\}$$

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \cdot z > 3 + 2 \cdot \mathrm{Im}(z)\}$$

$$z = \underbrace{x}_{\mathrm{Re}(z)} + i \overbrace{y}^{\mathrm{Im}(z)} \quad , \bar{z} = x - iy$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \; (= |z^2|) = x^2 + y^2$$

Bsp: $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq (\mathrm{Re}(z) - 1)^2\}$



$$y \geq (x-1)^2$$

ET1-1 Aufgabe 1: Graphen skizzieren

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm – GET1-Ü – Gruppe: Sven Pfleger

Potenzfunktion

$$y = f(x) = \pm a \cdot x^{\pm b} \pm c$$

- a: **Steilheit der Kurve** – wenn a > ▲, wenn a < 0 ▼
- b: **Art der Kurve** – wenn b < 0: Hyperbel, wenn b > 0: Parabel
- c: **Verschiebung auf der y-Achse** – wenn d < 0 ▼, wenn d > 0 ▲

ET1-1 Aufgabe 1: Graphen skizzieren

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm – GET1-Ü – Gruppe: Sven Pfleger

Quadratische Funktion

$$y = f(x) = \pm(a \cdot x \pm b)^2 \pm (c \cdot x) \pm d$$

- a: **Öffnung der Parabel** (enger, wenn a ▲)
- b: **Verschiebung auf der x-Achse** – wenn b < 0 ►, wenn b > 0 ◄
- c: **Verschiebung des Scheitelpunktes** entlang einer invertierten Normalparabel
- d: **Verschiebung auf der y-Achse** – wenn d < 0 ▼, wenn d > 0 ▲

ET1-1 Aufgabe 1: Graphen skizzieren

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm – GET1-Ü – Gruppe: Sven Pfleger

Trigonometrische Funktion

$$y = f(x) = \pm a \cdot \sin(\pm b \cdot x \pm c) \pm d$$

- a: **Höhe der Auslenkung** „Amplitude“
- b: **Dehnung/Streckung in x-Richtung** „Frequenz“
- c: **Verschiebung in x-Richtung** „Phase“
- d: **Verschiebung auf der y-Achse** „Offset“

ET1-1 Aufgabe 1: Graphen skizzieren

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm – GET1-Ü – Gruppe: Sven Pfleger

Logarithmus-Funktion

$$y = f(x) = \pm a \cdot \ln(\pm b \cdot x \pm c) \pm d$$

- a: **Steilheit der Kurve** – wenn a > ▲, wenn a < 0 ▼
- b: **Lage der Kurve** – wenn b < 0 ◄, wenn b > 0 ►
- c: **Verschiebung auf der x-Achse** – wenn c > 0 ◄, wenn c < 0 ►
- d: **Verschiebung auf der y-Achse** – wenn d < 0 ▼, wenn d > 0 ▲

ET1-1 Aufgabe 1: Graphen skizzieren

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm – GET1-Ü – Gruppe: Sven Pfleger

Exponential-Funktion

$$y = f(x) = \pm a \cdot e^{(\pm b \cdot x \pm c)} \pm d$$

- a: **Steilheit der Kurve** – wenn a > ▲, wenn a < 0 ▼
- b: **Steilheit der Kurve** – umso steiler, je größer b; Spiegelung an der y-Achse, wenn b < 0
- c: **Verschiebung auf der x-Achse** – wenn c > 0 ◄, wenn c < 0 ►
- d: **Verschiebung auf der y-Achse** – wenn d < 0 ▼, wenn d > 0 ▲

Aufg 1 .

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	f	w	w	w

Aufg 22 Berechnen Sie den komplexen Widerstand der Reihenschaltung aus ohmschen Widerstand $R = 100\Omega$, Kapazität $C = 20\mu F$ und Induktivität $L = 0,2H$ bei der Kreisfrequenz $\omega = 10^6 s^{-1}$.

Aufg 22 $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 100\Omega + j199999,95\Omega$.

Aufg 23 Berechnen Sie den komplexen Widerstand und den komplexen Stromzeiger $\underline{I}$ der Parallelschaltung aus ohmschen Widerstand $R = 100\Omega$ und Induktivität $L = 0,5H$ bei Kreisfrequenz $\omega = 500s^{-1}$ und Spannung $U = 100V$.
Tipp: Berechnen Sie zunächst den komplexen Leitwert und beachten Sie, dass sich bei Parallelschaltung die (komplexen) Einzelleitwerte addieren.

Aufg 23 Wegen $\frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$ ist $\underline{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = 0,01S - j0,004S = 0.0108 \cdot e^{-0.3805 \cdot j}\ S$ und
$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = 92.8477 \cdot e^{0.3805 \cdot j}\ \Omega$.
$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = 0.0108 \cdot e^{-0.3805 \cdot j}\ S \cdot 100 \cdot e^{0.3805 \cdot j}\ V = 1.08A$

Aufg 24 Berechnen bzw. zeichnen Sie die Ortskurven des komplexen Widerstandes und des komplexen Leitwertes bei Parallelschaltung aus festem ohmschen Widerstand R und Induktivität L bei variabler Kreisfrequenz ω.
Tipp: Bei Parallelschaltung addieren sich die (komplexen) Einzelleitwerte.

Aufg 24 Wegen $\dfrac{1}{j\omega L} = -j\dfrac{1}{\omega L}$ ist $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{\omega L}$. Zeichnen!

Aufg 25 Beschreiben Sie das Bild des Kreises $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ in der Gauß'schen Zahlenebene unter der komplexen Inversion $z = x + j \cdot y \longrightarrow 1/z = w = u + j \cdot v$.

Aufg 25 Man hat $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$ und $y = \dfrac{-v}{u^2+v^2}$ und $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{u^2+v^2}$
Ausmultiplizieren der Kreisgleichung in der (x, y)-Ebene: $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -4$
Einsetzen der obigen Gleichungen: $\dfrac{1}{u^2+v^2} - \dfrac{2u}{u^2+v^2} + \dfrac{4v}{u^2+v^2} = -4$
Erweitern mit $u^2 + v^2$ und Kürzen durch 4: $u^2 - \dfrac{1}{2}u + v^2 + v = -\dfrac{1}{4}$
Quadratische Ergänzung: $(u - 1/4)^2 + (v + 1/2)^2 = 1/16$,
dh. Kreis mit Radius 1/4 um $(1/4, -1/2)$ in der (u,v) -Ebene.

Aufg 26 Berechnen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ der Reihenschaltung aus Spule mit Induktivität L_1 mit $\omega L_1 = 3,2\Omega$; ohmschen Widerstand $R_1 = 3\Omega$; Spule mit Induktivität L_2 mit $\omega L_2 = 0,5\,t\,\Omega$ und ohmschen Widerstand $R_2 = 2\,t\,\Omega$ ($t > 0$).
Stellen Sie die Ortskurve $\underline{Z}(t)$ in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufg 26 Wegen Reihenschaltung addiere:
$\underline{Z} = (3 + 2t)\,\Omega + j \cdot (3.2 + 0.5t)\,\Omega$
Nun Umordnen nach Termen mit t und ohne t :
$\underline{Z} == \underbrace{(3 + 3.2\,j)\,\Omega}_{\underline{a}} + \underbrace{(2 + 0.5\,j)\,\Omega}_{\underline{b}} \cdot t\ = \underline{a} + t \cdot \underline{b}$
Das ist Gerade durch $\underline{a}$ mit Richtungszeiger $\underline{b}$:
$\underline{a}$ ist eine feste komplexe Zahl = Vektor = Aufpunkt der Gerade
$\underline{b}$ ist eine feste komplexe Zahl = Vektor = Richtungsvektor der Geraden

13. Ein Bierfass ist $8dm$ hoch, sein Durchmesser beträgt in der Mitte $8dm$ und am Rand $6dm$. Die Fassdauben haben die Form einer Parabel.

    (a) Zeichnen Sie das Fass und ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Parabel (quadratische Funktion).

    (b) Wie groß ist das Volumen des Fasses?

13. (a) $4 - x^2/16$

    (b) $340dm^2$