Allgemein

Druck: $p = \frac{F}{A} = \rho \cdot g \cdot h \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa\right]$ (Normalluftdruck: 1 bar = 10^5 Pa)

Dichte: $\rho = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

Stoffmenge: $n = \frac{N}{N_A} = \frac{Teilchenzahl}{Avogadro-K.} \quad [mol]$ ($N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$, Teilchen pro mol)

Molare Masse: $M_n = \frac{m}{n} \quad \left[\frac{g}{mol}\right]$ (Gewicht von 1 mol)

Gaskonstante: $R = 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}$ spez. Gaskonst.: $R_s = \frac{R}{M_n}$

Leistung: $P = \frac{Q}{t} = \frac{W}{t} \quad [W]$ Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{x} \quad [N]$

Prozessgrößen/ideales Gas

Mechanische Arbeit: $\Delta W = -\int_{v0}^{v1} p(v)\, dv = -p \cdot \Delta v \quad [J = Ws = Nm]$

Wärme: $\Delta Q = c_n \cdot n \cdot \Delta T = c_m \cdot m \cdot \Delta T$ [J] (c_n/ c_m = molare/spezifische Wk.)

Energieerhaltung: $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$ (1. Hauptsatz)

Thermische Zustandsgl.: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

Kalorische Zustandsgl.: $U = c_n \cdot n \cdot \Delta T = c_n \cdot \frac{p \cdot V}{R}$

Kreisprozesse

Kompression: Arbeit wird am Gas verrichtet → $\Delta W > 0$

Expansion: Gas verrichtet Arbeit → $\Delta W < 0$

Wärme rein → Arbeit raus → Wärmepumpe, Wärmekraftmaschine

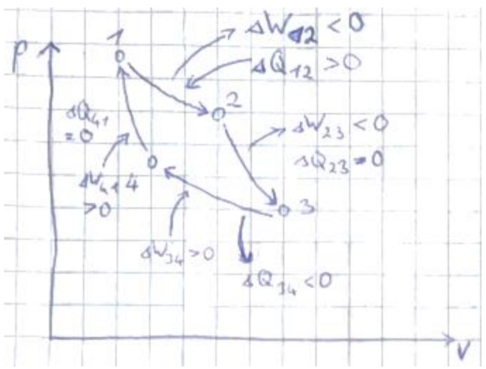
Arbeit rein → Wärme raus → Kältemaschine

	$\frac{Nutzen}{Aufwand}$	$\frac{Nutzen}{Aufwand}$	Carnot (ideal, reversibel)	
	Wirkungsgrad η	**Leistungszahl ε**	**Wirkungsgrad**	**Leistungszahl**
Wärmepumpe T_H= zu heizendes System	$\frac{\lvert\Delta W ges\rvert}{\Delta Qin}$	$\frac{\lvert\Delta Q_{ab}\rvert}{\lvert\Delta W_{ges}\rvert}$	$\frac{\lvert T_K - T_H\rvert}{T_H} = 1 - \frac{T_K}{T_H}$	$\frac{T_H}{T_H - T_K}$
Kältemaschine T_K= zu kühlendes System		$\frac{\lvert\Delta Q_{in}\rvert}{\lvert\Delta W_{ges}\rvert}$		$\frac{T_K}{T_H - T_K}$

Leistungszahl Wärmepumpe: $\varepsilon = \frac{abgebende\ Heizleistung}{aufgewendete\ elektr.\ Leistung} = \frac{P_{Heiz}}{P_{aufw/Antrieb}}$

Leistungszahl Kältemaschine: $\varepsilon = \frac{resultierende\ Kühlleistung}{aufgewendete\ elektr.\ Leistung} = \frac{P_{kühl}}{P_{aufw/Antrieb}}$

Carnot-Prozess



1 – 2: isotherme Expansion

$\Delta W = nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \qquad \Delta Q = nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

2 – 3: adiabatische Expansion

$\Delta W = c_V n(T_K - T_H) \qquad \Delta Q = 0$

3 – 4: isotherme Kompression

$\Delta W = nRT_K \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad \Delta Q = nRT_K \cdot \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$

4 – 1: adiabatische Kompression

$\Delta W = c_V n(T_H - T_K) \qquad \Delta Q = 0$

Wenn Wärme od. Arbeit aus System **raus** geht (System/Gas verrichtet Arbeit), **negatives** Vorzeichen, wenn rein, dann positiv

Gesamtarbeit (Nutzarbeit während eines Zyklus)

$\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41}$

$= \Delta W_{12} + \Delta W_{34}$

$= nR \cdot \left(T_H \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + T_K \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)\right)$

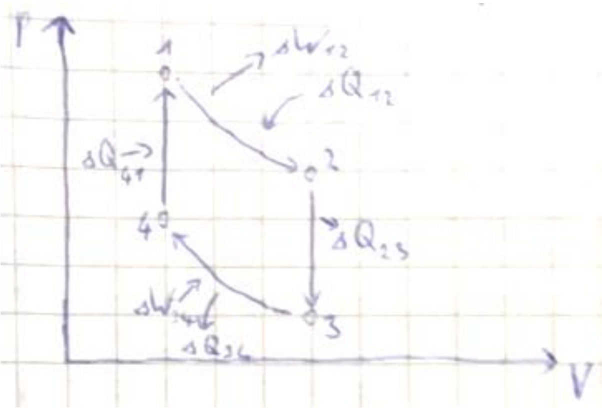
$(\Delta W_{23} + \Delta W_{41} = 0)$

Aufwand:

eingeströmte Wärme: $\Delta Q_{12} = nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

→ Wirkungsgrad: $\eta = \frac{\lvert\Delta W ges\rvert}{\Delta Qin} = \frac{\lvert T_K - T_H\rvert}{T_H} = 1 - \frac{T_K}{T_H}$

Stirling-Prozess



1 – 2: isotherme Expansion

$\Delta W = -nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad \Delta Q = +nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

2 – 3: isochore Abkühlung

$\Delta W = 0 \qquad \Delta Q = c_V \cdot n \cdot (T_K - T_H)$

3 – 4: isotherme Kompression

$\Delta W = +nRT_K \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad \Delta Q = -nRT_K \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

4 – 1: isochore Erwärmung

$\Delta W = 0 \qquad \Delta Q = c_V \cdot n \cdot (T_H - T_K)$

Gesamtarbeit (Nutzarbeit während eines Zyklus)

$\Delta W = \Delta Q_{12} - \lvert\Delta Q_{34}\rvert$

$= nRT_H \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - nRT_K \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

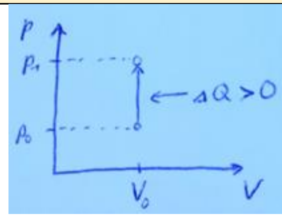
$= nR \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \cdot (T_H - T_K)$

Zustandsänderungen des idealen Gases

<table>
<tr><th></th><th>Wärme ΔQ</th><th>Arbeit ΔW</th><th>innere Energie ΔU</th><th></th></tr>
<tr>
<td>
<u>Isochorer</u> Prozess
V_0 = konstant

Zu-/Abstrom von Wärme, dadurch wird Druck erhöht/verringert

$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$
</td>
<td>
$\Delta Q = \Delta U = c_n \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta Q = c_m \cdot m \cdot \Delta T$
$\Delta Q = \frac{R}{\kappa - 1} \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta Q = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$
$\Delta Q = \frac{f}{2} \cdot m \cdot R_s \cdot \Delta T$
</td>
<td>
$\Delta W = 0$ (mech. Arbeit ist 0)

$p(T) = \frac{n \cdot R}{V_0} \cdot T$
</td>
<td>
$= \Delta Q$
</td>
<td>


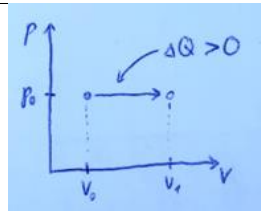
(hier Erwärmung)
p steigt → T steigt / p sinkt → T sinkt
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Isobarer</u> Prozess
p_0 = konstant

$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$
</td>
<td>
$\Delta Q = (c_n + R) \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta Q = c_{mp} \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$
$\Delta Q = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot (p_1 V_1 - p_0 V_0)$
$c_{mp} = (c_n + R) \quad \left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$
(isobare molare Wärmekap.)
1-atomiges Gas: $c_{mp} = \frac{5}{2} R$
2-atomiges Gas: $c_{mp} = \frac{7}{2} R$

$c_p = \frac{c_{mp}}{M} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$
(isobare spezifische Wärmekap.)
</td>
<td>
$\Delta W = -p_0 \cdot \Delta V$
$\Delta W = -\, n \cdot R \cdot \Delta T$
$\Delta W = -\, m \cdot R_s \cdot \Delta T$

Kompression: ΔW positiv, rein
Expansion: ΔW negativ, raus

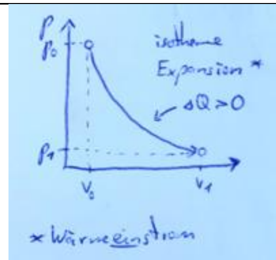
$V(T) = \frac{n \cdot R}{p_0} \cdot T$
</td>
<td>
$\Delta U = c_n \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta U = c_n \cdot \frac{p_0}{R} \cdot \Delta V$

$c_n =$ molare Wärmekap. $\left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$
1-atomiges Gas: $c_n = \frac{3}{2} R$
2-atomiges Gas: $c_n = \frac{5}{2} R$
</td>
<td>


Expansion → T steigt
Kompression → T sinkt
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Isothermer</u> Prozess
T_0 =konstant

transportierte Wärme ≙ negativ verrichteter Arbeit; bei Kompression muss also T abgeführt werden

$p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$
</td>
<td>
$\Delta Q = -\Delta W$
$\Delta Q = nRT_0 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$
$\Delta Q = p_0 V_0 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$
$\Delta Q = mR_s T_0 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$
</td>
<td>
$\Delta W = -\Delta Q$
$\Delta W = -nRT_0 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = -nRT_0 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$
$\Delta W = -p_0 V_0 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = -p_0 V_0 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$
$\Delta W = -mR_s T_0 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$

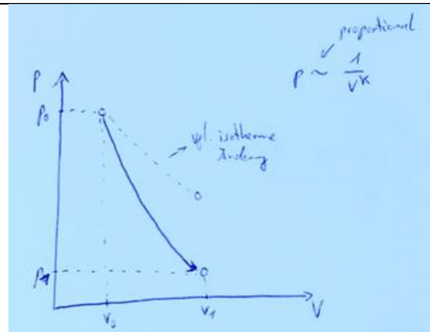
$p(V) = (nRT_0) \cdot \frac{1}{V}$
</td>
<td>
$\Delta U = c_n \cdot n \cdot T_0 = 0$
(da c_n und T hier konstant)
</td>
<td>


T = konstant
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Adiabater</u> Prozess

ΔQ = 0
kein Wärmeaustausch mit Umgebung

$V_0 \cdot T_0^{\frac{c_n}{R}} = V_1 \cdot T_1^{\frac{c_n}{R}}$
$T_0 \cdot V_0^{\kappa - 1} = T_1 \cdot V_1^{\kappa - 1}$
$p_0 \cdot V_0^{\kappa} = p_1 \cdot V_1^{\kappa}$
$p_0^{1-\kappa} \cdot T_0^{\kappa} = p_1^{1-\kappa} \cdot T_1^{\kappa}$
</td>
<td>
$\Delta Q = 0$

Adiabaten- Exponent κ
üblicherweise zwischen 1 u. 2
$\kappa = \frac{c_p}{c_n} = \frac{c_n + R}{c_n} = 1 + \frac{R}{c_n}$
$\rightarrow c_n = \frac{R}{\kappa - 1}$
1-atomiges Gas ($c_n = \frac{3}{2} R$): ca. 1,667
2-atomiges Gas ($c_n = \frac{5}{2} R$):
ca. 1,4 (zB Luft)
</td>
<td>
$\Delta W = c_n \cdot n \cdot \Delta T$
$\Delta W = \frac{R_s}{\kappa - 1} \cdot m \cdot \Delta T$
$\Delta W = c_n \cdot \frac{1}{R} \cdot (p_1 V_1 - p_0 V_0)$
$\Delta W = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\kappa - 1}$
$\Delta W = \frac{p_0 V_0}{\kappa - 1} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0}$

$c_n =$ molare Wärmekap. $\left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$
1-atomiges Gas: $c_n = \frac{3}{2} R$
2-atomiges Gas: $c_n = \frac{5}{2} R$
</td>
<td>
= ΔW
</td>
<td>


(hier Abkühlung) Kompression: T steigt
(Expansion: ΔW raus, negativ / T sinkt)
</td>
</tr>
</table>

Wärmeübertragung

Wärmestrom: $\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ oder $\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$ $\left[\frac{J}{s} = W\right]$

U-Wert: $U = \frac{1}{R_{th}}$ $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$
(bei R_{th} Übergänge berücksichtigen und mit 1 m² rechnen)

Wärmeleitung
(Schwingungen der Teilchen)

$\phi = \frac{1}{d} \cdot A \cdot \lambda \cdot \Delta T$ (d=Abstand, A=Fläche, λ=Wärmeleitfähigkeit in $\frac{W}{m \cdot K}$)

$R_{th} = \frac{d}{A \cdot \lambda}$ $\left[\frac{K}{W}\right]$

→ „Reihenschaltung" thermischer Widerstände: $R_{ges} = R_1 + R_2 + \cdots$ und $\phi_{ges} = \phi_1 = \phi_2$

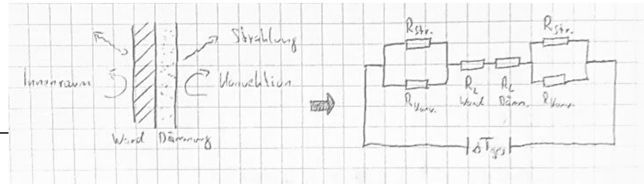
→ „Parallelschaltung" thermischer Widerstände: $R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ und $\phi_{ges} = \phi_1 + \phi_2$

Konvektion
(Stoffumwälzung)

$\phi_K = \alpha_K \cdot A \cdot \Delta T$ (α_K=Übertragungs-Koeffizient)

$R_{th} = \frac{1}{\alpha_K \cdot A}$

Wenn verschiedene Wärmeübertragungsarten am besten R_{ges} berechnen und dann $\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$



Wärmestrahlung
(Abstrahlung elektromagnetischer Lichtwellen)

(Emission: $\phi_{str} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$)
(Absorption: $\phi_{str} = \varepsilon' \cdot \sigma \cdot A \cdot T_U^4$)
(ε=Emissionsgrad/Emissivität 0…1, σ = 5,67 · 10^{-8} $\frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, T_U = Temperatur Umgebung)
→ Netto-Wärmestrom: $\phi_{str} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_U^4)$

$R_{th} = \frac{1}{\varepsilon_1 \cdot \sigma \cdot A \cdot 4 T_U^3}$

Herleitung: $T^4 - T_U^4 = (T^2 - T_U^2)(T^2 + T_U^2) = (T - T_U)(T + T_U)(T^2 + T_U^2) = \cdots$
→ wenn $T \approx T_U$: $\ldots = \Delta T \cdot 2T_U \cdot 2T_U^2 = 4T_U^3 \cdot \Delta T$

SCHWINGUNGEN

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$rad = \frac{deg}{360°} \cdot 2\pi$
$deg = \frac{rad}{2\pi} \cdot 360°$

Allgemeines

Impulserhaltung: $p = m \cdot v$ $\left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$ → $\dot{p} = m \cdot \dot{v}$ → $F = m \cdot a = \dot{p}$

Federkonstante / Hooksche Kraft: $D = \frac{F}{\Delta x} = const.$ $\left[\frac{N}{m}\right]$

Freie ungedämpfte harmonische Schwingung (Federpendel)

DGL: $\ddot{y} + \frac{D}{m} \cdot y = 0$ (Herleitung: $F = -D \cdot y$ → $m \cdot \ddot{y} = -D \cdot y$)

Schwingungsgleichung: $y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$
Ableitung: $y'(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ (= Geschwindigkeit)

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

Schwingungsdauer: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{\omega}$

y_0 = Anfangsauslenkung
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

Amplitude: $A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$

Nullphasenwinkel: $\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{y_0 \cdot \omega}\right)$ **Achtung!** Wenn $y_0 = 0$ dann $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$
Wenn $v_0 = 0$ dann $\varphi_0 = 0$

Energie: $E_{ges} = \frac{D}{2} \cdot A^2$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{D}{2} \cdot A^2 \cdot sin^2(\omega t + \varphi_0)$ $E_{pot} = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{D}{2} \cdot A^2 \cdot cos^2(\omega t + \varphi_0)$
(Energie schwingt mit doppelter Frequenz!)

Freie ungedämpfte ~~harmonische~~ Schwingung (Fadenpendel)

DGL: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0$ (Herleitung: $F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$ → $m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$)

Ansatz über Näherung, dass für kleine Winkel $\sin\varphi \approx \varphi$ → **harmonische** Beschreibung möglich

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (l = Länge des Fadens, g = Gewichtskraft 9,81 $\frac{m}{s^2}$)

Schwingungsdauer: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Freie ungedämpfte harmonische Schwingung (Elektromagnetischer Schwingkreis)

DGL: $\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$ (Herleitung: $u_C + u_L = 0$)

Schwingungsgleichung: $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
Ableitung: $q'(t) = -\hat{q} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{2\pi}{T}$

Gedämpfte Schwingung (Federpendel)

Geschwindigkeitsabh. Reibungskraft: $F_R = -b \cdot v$ (prop. zur Geschwindigkeit)   logarithmisches Dekrement: $\Lambda = \delta \cdot T_\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$

Dämpfungskoeffizient: $b > 0 \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$ Dämpfung/Abklingen beschrieben durch: $e^{-\delta t}$

DGL: $\ddot{y} + \frac{b}{m} \cdot \dot{y} + \frac{D}{m} \cdot y = 0$ ungedämpfte Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Abklingkoeffizient: $\delta = \frac{b}{2 \cdot m} \quad \left[\frac{1}{s}\right]$

→DGL: $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$ → Ansatz zur Lösung über $y(t) = e^{r \cdot t}$ führt zu: $r_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

1. Schwingfall (schwache Dämpfung)

$\delta < \omega_0$

(δ auch über Amplitudenabnahme ermittelbar: $\delta = -\frac{1}{T} \cdot \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$)

gedämpfte Kreisfrequenz: $\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ → $r_{1/2} = -\delta \pm i\omega$

→ $\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\delta^2}$ → $\omega_\delta = \frac{2\pi}{T_\delta}$

allgemeine Lösung: $y(t) = e^{-\delta t} \cdot (c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t))$

$c_1 = y_0$ (Anfangsauslenkung)

$c_2 = \frac{v_0 + \delta \cdot y_0}{\omega}$

Schwingungsgleichung: $y(t) = \hat{y} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Ableitung:

$y'(t) = \hat{y} \cdot e^{-\delta t} \cdot (-\delta \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$

Anfangsamplitude: $\hat{y} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(y_0)^2 + \left(\frac{v_0 + \delta \cdot y_0}{\omega}\right)^2}$

Nullphasenwinkel: $\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{c_2}{c_1}\right) = \arctan\left(-\frac{\frac{v_0}{y_0} + \delta}{\omega}\right)$

(nur wenn $y_0 \neq 0$, sonst $-\frac{\pi}{2}$!)

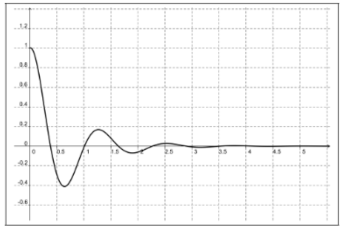
Elektromagnetischer Schwingkrei

Dämpfung durch R

DGL: $\ddot{q} + \frac{R}{L} \cdot \dot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Abklingkoeffizient: $\delta = \frac{R}{2L}$



ung 15: Gedämpfte Schwingung mit $a = \sqrt{8}$ und

Energie

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad E_{pot} = \frac{1}{2} D y^2$

2. Kritische Dämpfung (möglichst schnelle Dämpf., aperiodisch)

$\delta = \omega_0$ → $r_{1/2} = -\delta$

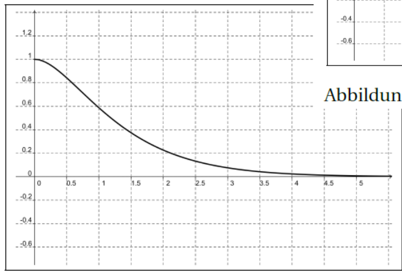
allgemeine Lösung: $y(t) = e^{-\delta t} \cdot (c_1 + c_2 t)$

$c_1 = y_0$ (Anfangsauslenkung)

$c_2 = v_0 + \delta \cdot y_0$

Schwingungsgleichung: $y(t) = e^{-\delta t} \cdot (y_0 + v_0 \cdot t + \delta \cdot t \cdot y_0)$

Ableitung: : $y'(t) = e^{-\delta t} \cdot (v_0 - \delta \cdot t \cdot v_0 - \delta^2 \cdot t \cdot y_0)$



lung 14: Aperiodischer Grenzfall mit $a = \sqrt{8}$ unc

3. Kriechfall (starke Dämpfung)

$\delta > \omega_0$

gedämpfte Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

allgemeine Lösung: $y(t) = e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t})$

$c_1 = \frac{v_0 + y_0(\delta + \omega_0)}{2\omega}$

$c_2 = -\frac{v_0 + y_0(\delta - \omega_0)}{2\omega}$

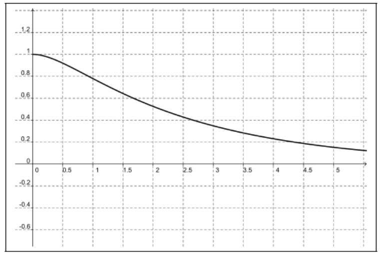


Abbildung 13: Kriechfall mit $a = \sqrt{8}$ und $b = 1$

Gekoppelte Schwingung

2 Gleichungen:

I. $\quad m\ddot{x}_1 = -Dx_1 - d(x_1 - x_2)$

II. $\quad m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - d(x_2 - x_1)$

linear gekoppeltes System von DGLs ergibt Matrix:

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + D + d & -d \\ -d & -m\omega^2 + D + d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht-triviale Lösung falls det = 0 ergibt:

Eigenfrequenzen: $\omega_+^2 = \frac{D + 2d}{m} \qquad \omega_-^2 = \frac{D}{m}$

→ ω_+: $\alpha_1 = -\alpha_2$ und ω_-: $\alpha_1 = \alpha_2$

→ keine Energie übertragen, Fundamentalschwingung

Gekoppelte Schwingung

allgemeine Lösung durch Linearkomb. der Eigenschwingungen:

Anfangsbedingungen: $x_1(0) = \hat{x}$ und $x_2(0) = 0$

$x_1 = \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \cdot t\right)$

$x_2 = \hat{x} \cdot \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \cdot t\right)$

→ falls $d \ll D$ Schwebung, da $\omega_+ \approx \omega_-$

Eigenwertprobleme: $\frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

→ Eigenwerte: $\omega_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bsp gekoppeltes Fadenpendel:

gleichphasig: $\omega_- = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

gegenphasig: $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2}$

(l = Länge Faden, L = Abstand Decke – Feder)

Erzwungene Schwingung

Erzeuger-Kraft: $\vec{F}_E = \hat{F}_E \cdot \cos(\Omega t)$ (Ω = Anrege-Frequenz)

DGL: $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = \frac{\hat{F}_E}{m} \cdot \cos(\Omega t)$ ungedämpfte Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

→ Ansatz zur Lösung über $y(t) = y_h + y_p = \hat{y} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \hat{y} \cdot \cos(\Omega t - \gamma)$

→ komplexer Ansatz: $\vec{F}_E = \hat{F}_E \cdot e^{i\Omega t}$ und $y_p = \hat{y} \cdot e^{i(\Omega t - \gamma)}$

Amplitude der anregenden Kraft: $\hat{F}_E = y_{stat} \cdot m \cdot \omega_0^2$

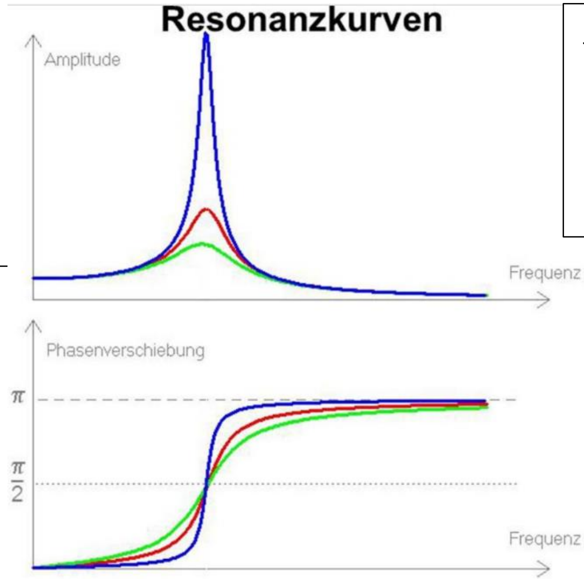
Abklingkoeffizient: $\delta = \frac{b}{2 \cdot m}$ $\left[\frac{1}{s}\right]$

(γ = Phasenwinkel der Schwinger dem Erreger hinterher hängt)

Wie sehen Amplitude und Phasenwinkel **nach** dem Einschwingvorgang aus?

Amplitudenresonanzfunktion: $\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{y_{stat} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

Phasenresonanzfunktion: $\gamma = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$



Dämpfung:
klein
mittel
groß

je kleiner Dämpfung desto höher wird Amplitude und desto steiler wird γ

Maximale Amplitude $\hat{y}_{Res}$ ist der Punkt, an dem letztmögliches Amplituden-Maxima auftritt
→ Grenzdämpfung $\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

1. Resonanz

$\Omega \approx \omega_0$

A) $\Omega = \omega_0$ und Dämpfung $\delta = 0$

Nenner = 0 → $\hat{y} \rightarrow \infty$ → Resonanzkatastrophe

$\tan\gamma$ unbestimmt → Phasensprung von 0 auf π

B) $\Omega \approx \omega_0$ und Dämpfung $\delta > 0$

Amplitude maximal bei: $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

Maximale Amplitude:

$$\hat{y}_{Res} = \frac{\hat{F}_E}{2m\delta\omega_\delta} = \frac{y_{stat} \cdot \omega_0^2}{2\delta\omega_\delta} = \frac{y_{stat} \cdot \omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

(mit ω = gedäm. Kreisfrequ. und da $\hat{F}_E = y_{stat} \cdot m \cdot \omega_0^2$)

2. quasistatische Anregung

$\Omega \ll \omega_0$

Amplitude: $\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m \cdot \omega_0^2} = \frac{\hat{F}_E}{D} = y_{stat}$ (Ω vernachlässigbar klein)

Phase: $\gamma \approx 0$ (Schwingung kann Erreger sofort folgen)

3. hochfrequente Anregung

$\Omega \gg \omega_0$

Amplitude: $\hat{y} \rightarrow 0$ Phase: $\gamma = \pi$

→ Amplitude ist fast 0 weil Schwingung nicht hinterherkommt, da Erreger sehr schnell schwingt; Phase gegenphasig, deshalb π

Überlagerte Schwingung-A

Fall a) ω gleich, $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$ unterschiedliche Amplituden

$y_1(t) = \hat{y}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$

$y_2(t) = \hat{y}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$

überlagerte Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

überlagerter Phasenwinkel: $\tan\varphi = \frac{\hat{y}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\hat{y}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cdot \cos(\varphi_2)}$

Spezialfälle:

1. Maximale Verstärkung: $\hat{y}$ maximal bei $\Delta\varphi = 0$ oder $\Delta\varphi = n \cdot 2\pi$ mit $n \in 0,1,2,3,\dots$
   → $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$
2. Auslöschung: $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ und $\Delta\varphi = (2n-1) \cdot \pi$
   → $\hat{y} = 0$

Überlagerte Schwingung-B

Fall b) $\hat{y}$ gleich, $\omega_1 \neq \omega_2$ unterschiedliche Frequenzen

$y_1(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega_1 t)$

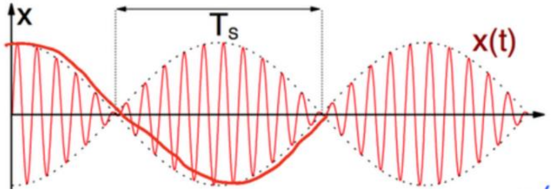
$y_2(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega_2 t)$ (Phase hier unwichtig)

Schwingungsgleichung: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2 \cdot \hat{y} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t\right)$

→ wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ Schwebung mit $\overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

$T_S = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} = \frac{1}{|f_1-f_2|} = \frac{1}{|f_S|}$ (f_s = Schwebungsfrequ.)

$T_r = \frac{2\pi}{\overline{\omega}}$ (Abstand zw. 2 Amplituden)



Energietransport einer Welle

$E_{ges} = E_{kin,max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \hat{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2$ ($\hat{v} = \hat{u} \cdot \omega$ → maximale Teilchengeschwindigkeit)

Ableitung der Wellengleichung: $\dot{u} = v = -\hat{u} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx_0 + \varphi_0) = -\hat{v} \cdot \sin(\omega t - kx_0 + \varphi_0)$

mit $m = \rho \cdot V$ → $E_{ges} = \frac{1}{2}\rho V \cdot \hat{v}^2 = \frac{1}{2}\rho V \cdot \hat{u}^2\omega^2$

Energiedichte: $w = \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\rho \cdot \hat{u}^2\omega^2$

Intensität/Energiestromdichte: $I = \frac{E}{A_\perp \cdot \Delta t} = \frac{w \cdot A_\perp \cdot c \cdot \Delta t}{A_\perp \cdot \Delta t} = w \cdot c = \frac{1}{2}\rho \cdot \hat{u}^2\omega^2 \cdot c$ ($A_\perp = \frac{\rho}{A}$)

Lautstärke definiert durch $L = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0}$ mit $I_0 \approx 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ als Hörschwelle

Wellen

Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\left[\frac{1}{m}\right]$ → Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (analog: T bei Schwingungen)

Wellengleichung: $u(x,t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

Ableitung: $\frac{\delta u(x,t)}{\delta t} = -\hat{u} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

Phasengeschwindigkeit: $c = \pm\frac{\omega}{k}$ (Herleitung über cos(…) = 1 und $x = x(t_0) \mp \frac{\omega}{k} \cdot t$)

→ $|c| = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$

(entweder λ oder f frei wählbar, c durch System festgelegt, jeweils andere Größe kann dadurch berechnet werden)

Wellengleichung: $u(x,t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0) = \hat{u} \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$

→ +: Verschiebung nach links (-x), -: Verschiebung nach rechts (+x)

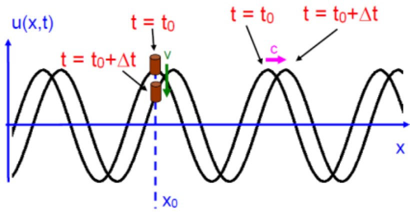
$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\rho \cdot A}{F} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$ → $c = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

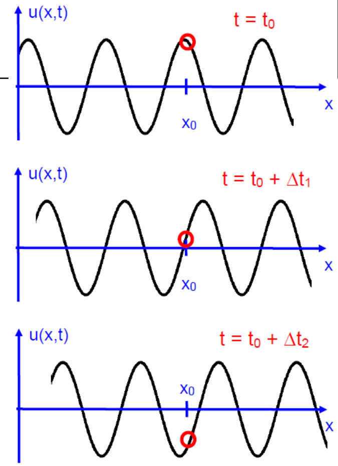
(μ = Massenbelegung = $\frac{dm}{dx}$, zB Klaviersaite $\mu = \frac{20g}{m}$)

Schallwellen: $c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{RT}{M}}$

(Herleitung aus allg. Gasgleichung, zB in Luft ($\kappa = 1{,}4\ u.\ 20K$) $c = 343\,\frac{m}{s}$)

Lichtwellen: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$





Wellenausbreitung über Grenzflächen / stehende Wellen

Amplitudenreflektionsfaktor: $r = \frac{\hat{u}_r}{\hat{u}} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$ (k_1 = Wellenzahl in Medium 1, k_2 in Medium 2)

Amplitudentransmissionsfaktor: $t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = \frac{2k_1}{k_1+k_2}$

wenn $k_1 = k_2$ → r= 0, t= 1 (nichts reflektiert, alles transmittiert)

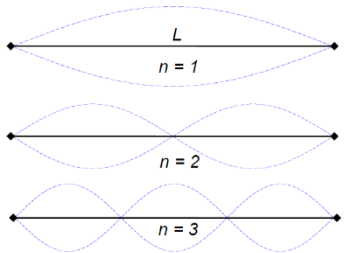
wenn $k_2 = \infty$ → r= -1, t= 0 (alles reflektiert)

wenn $k_2 = 0$ → r= +1, t= 2 (alles reflektiert)

Stehende Wellen

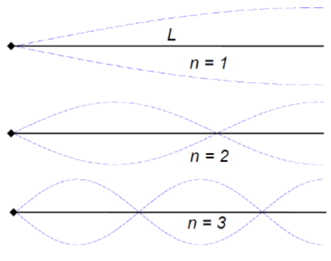
$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = \cdots = 2\hat{u} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)$ (Abstand benachbarter Wellenbäuche = $\frac{\lambda}{2}$)

(= ortsunabhängige harmonische Schwingung, = ortsabhängige Amplitude)



Fall 1: beide Seiten fest: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} \cdot n = f_1 \cdot n$ $f_1 = \frac{c}{2L}$ (zB eingespannte Saite)

Fall 2: nur eine Seite fest (loses Ende mit Bauch!): $\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$ $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c \cdot (2n-1)}{4L} = f_1 \cdot (2n-1)$ $f_1 = \frac{c}{4L}$ (zB Orgelpfeife)



n = Anzahl der Schwingungsbäuche ! → **Anzahl Knoten = n-1**