I. Lineare Algebra

Keine, eine, unendlich viele Lösungen

$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \\ \\ c \end{pmatrix}$ → keine Lösung

$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ → eine Lösung ($\det(A) \neq 0$)

$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$ → unendlich viele Lösungen

allgemeine Lösung (nur bei unendlich vielen Lösungen!):

$\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ zB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

LGS lösen

- in 2 Zeilen je 1 Null untereinander erzeugen (bei 3x3)
- beide Zeilen miteinander verrechnen sodass in einer Zeile eine zweite Null entsteht

Wenn Variable in LGS:
- **Achtung**, nicht durch Variable teilen, wegen DIV/0
- Fallunterscheidung: keine, eine, unendlich viele Lsg

Wenn mehr Unbekannte als Gleichungen:

- Einheitsmatrix vorne erstellen
- nach ersten x (Anzahl Gleichungen) auflösen
- allgemeine Lösung aufstellen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

Vektoren

Vektorrechnung siehe Papula

Winkel zw. 2 Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$

orthonormal: Basisvektoren senkrecht und Länge aller gleich 1

orthonormale Basis: siehe unten

Lineare Unabhängigkeit

Prüfen: $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots = 0$ darf nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ klappen

Prüfen (Alternative): Vektoren als Matrix schreiben, wenn Rang = Spaltenanzahl → linear unabhängig

Prüfen (Alternative): wenn det von Vektorenmatrix $\neq 0$ → lin. unabh.

Linearkombination

Kann ein Vektor als Lin.komb. anderer Vektoren dargestellt werden?

→ Matrix aufstellen und LGS lösen: $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{v}$ mit A aus Einzelvektoren

Basis eines Vektorraums R^m (m= Zeilenanzahl)

Menge von linear unabhängigen Vektoren

lineare Hülle: Auflistung linear unabhängiger Vektoren: $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$

Dimension Vektorraum/lineare Hülle: Anzahl der aufgelisteten Vektoren

Nullraum berechnen

Matrix mit Nullvektor auf rechter Seite aufstellen → Gauß (0-Dreieck)

Bei unendlich vielen Lösungen:

Basis: Aufzählung der Vektoren, bei denen ein Parameter davorsteht

$\rightarrow N = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}\}$

andere Schreibweise als lineare Hülle: $[(\ldots)]$

bei eindeutiger Lösung nur Nullvektor in Nullraum (Dimension dann = 0)

Dimension: Anzahl der Vektoren in Basis (hier zB = 1)

Rang + Dimension Nullraum = Anzahl Vektorzeilen

Determinanten (Rechenregeln siehe Papula)

nur bei quadratischen Matrizen berechenbar

wenn $\det(A) \neq 0$ → LGS eindeutig lösbar

Entwicklungssatz von Laplace

ab 4x4-Matrizen sinnvoll

Zeile i oder Spalte k mit vielen 0 wählen, dann:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det A_{ik} \qquad \text{k = Spalte}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det A_{ki} \qquad \text{i = Zeile}$$

Wenn nach Quotient zweier Determinanten gefragt: Cramersche Regel

Orthonormale Basis

Besonders schnell lassen sich die Koeffizienten berechnen, wenn wir von einem orthonormalen Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ zu einer anderen orthonormalen Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ wechseln. Auch hier müssen die neuen Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ aus der Gleichung

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + ... + \lambda_n\vec{b}_n$$

gewinnen. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\vec{b}_i$, dann erhalten wir direkt den Koeffizienten λ_i, denn es gilt

$$\begin{aligned} x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_i + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_i + ... + x_n\vec{a}_n \cdot \vec{b}_i &= \lambda_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_i + \lambda_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_i + ... + \lambda_n\vec{b}_n \cdot \vec{b}_i \\ &= \lambda_i. \end{aligned}$$

Eine quadratische Matrix heißt **invertierbar** oder **regulär**, falls sie eine Inverse besitzt. Existiert keine Inverse, so heißt die Matrix **singulär**. Hat die $n \times n$ Matrix A den Rang $\text{rg}(A) = n$, dann ist die Matrix A regulär.

Für reguläre $n \times n$ Matrizen A und B gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad \text{und} \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Matrizen

spezielle Matrizen und Rechenregeln siehe Papula

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Inverse Matrix berechnen

invertierbar ≙ regulär ≙ det $\neq 0$

(nur quadratische Matrizen invertierbar)

- mit Einheitsmatrix rechts erweitern
- Umformen bis links Einheitsmatrix steht
- Kontrolle: $A^{-1} \cdot A$ muss Einheitsmatrix ergeben

Inverse hilfreich für:

$A \cdot X = B \quad ≙ \quad X = A^{-1} \cdot B$

$X \cdot A = B \quad ≙ \quad X = B \cdot A^{-1}$

Rang einer Matrix

Nummer der letzten Zeile ohne Nullzeile

Orthogonale Matrix

Inverse ergibt transponierte Matrix: $A^{-1} = A^T$

$\vec{x}^T \cdot \vec{x} \longrightarrow$ Zahl

34

$\vec{a} \cdot \vec{a}^T \longrightarrow$ Matrix

Eigenwerte λ bestimmen (Matrix vorher nicht verändern!)

1. Charakteristisches Polynom $det(A - \lambda \cdot E)$ muss 0 sein → λ ausrechnen
2. Eigenvektoren bestimmen durch Fallunterscheidung mit verschiedenen λ

wenn mehr als eine Lösung:

zB: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_3 \\ v_2 + 0 \\ 0 + v_3 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übrigens: Produkt aller λ ist Determinante der Ursprungsmatrix

Falls Eigenwerte Vielfachheit k haben: Anzahl der Eigenvekt. zwischen 1 und k

Matrix diagonalisierbar? Ja, wenn alle Eigenwerte verschieden

Matrix V aus Eigenvektoren: $V^{-1} \cdot A \cdot V$ = Diagonalmatrix

Ausgleichsrechnung

versch. Messwerte führen zu keiner Funktionsgl.

→ kleinsten Fehler bestimmen

1. Messwerte in f(x) einsetzen und Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ aufstellen
2. Normalengleichung berechnen: $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$
3. Anschließend ist LGS lösbar und $\vec{x}$-Parameter können bestimmt werden
4. Funktionsgleichung f(x) aufstellen

II. Differentialgleichungen

DGL 1. Ordnung

Grundsätze

Typ $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ → Trennung der Variablen **(Falluntersch.!)**

Typ $y'(x) = f(ax + by + c)$ → Substitution $u = ax + by + c$

Typ $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ → Substitution $u = \frac{y}{x}$

Typ $y'(x) = f(ax + by + c) \cdot g(y)$ → erst Substitution, dann Trennung der Var.

Typ $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \cdot g(y)$ → erst Substitution, dann Trennung der Var.

Substitution

1. Substitution (am besten: $u = \frac{y}{x}$)
2. Nach y auflösen
3. y nach x ableiten (evtl. $y' = u'x + u$)
4. y' auf linker Seite und u auf rechter Seite einsetzen
5. Lösung durch Trennung der Variablen
6. Rücksubstitution

Lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$ ($f(x)$ = Störfunktion, wenn 0 → homogene DGL)

1. homogene DGL berechnen ($f(x)$ gleich 0 setzen)
   (zuerst in diese Form bringen: $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$)
2. spezielle DGL berechnen: Variation der Konstanten
3. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_s(x)$
4. Partikuläre Lösung $y_p(x)$: Anfangswert einsetzen und C bestimmen

Variation der Konstanten

$y_h(x) = C \cdot y_1(x)$

$K(x) = \int^x \frac{f(t)}{y_1(t)} dt$ ($f(t)$ = Störfkt.)

→$y_s(x) = K(x) \cdot y_1(x)$ (ohne C !)

Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'(x) + a \cdot y(x) = f(x)$

1. homogene DGL berechnen: $y_h(x) = C \cdot e^{-a \cdot x}$
2. spezielle DGL berechnen:
   a. Tabelle mit Lösungsansätzen
   b. y_s ableiten
   c. in DGL einsetzen
   d. Koeffizientenvergleich
   e. y_s aufstellen
3. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_s(x)$
4. Partikuläre Lösung $y_p(x)$: Anfangswert einsetzen und C bestimmen

Störfunktion $f(x)$	Lösungsansatz $y_s(x)$
$f(x) = \alpha_0$	$y_s(x) = c_0$ Parameter: c_0
$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$	$y_s(x) = c_1 x + c_0$ Parameter: c_1, c_0
$f(x) = \alpha_m x^m + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$y_s(x) = c_m x^m + \ldots + c_1 x + c_0$ Parameter: $c_m, \ldots, c_1, c_0$
$f(x) = \alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x)$	$y_s(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$ Parameter: A, B
$f(x) = \alpha e^{\beta x}$	$y_s(x) = Ae^{\beta x}$, falls $\beta \neq -a$ $y_s(x) = A\,x\,e^{\beta x}$, falls $\beta = -a$ Parameter: A

DGL 2. Ordnung

Wronski-Determinante / Linearkombination der homogenen DGL

Ist für mindestens ein x die Wronski-Determinante $W(y_1, y_2)(x)$ ungleich 0, dann sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig und es gilt: $y_h(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$

→ $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bilden Fundamentalsystem

Wenn Wronski-Determinante für alle x = 0, gibt es ein c: $y_1(x) = c \cdot y_2(x)$

Wronski-Determinante

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Lösungsmethode DGL 2. Ordnung

1. Homogene DGL bestimmen (Störfunktion = 0 setzen)
2. charakteristische Gleichung aufstellen: $\lambda^2 + a\lambda + b$
3. $\lambda_{1/2}$ bestimmen durch Mitternachtsformel
   a. wenn Wurzel > 0: $y_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$
   b. wenn Wurzel = 0: $y_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + x \cdot c_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$
   c. wenn Wurzel < 0: $y_h(x) = c_1 \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot \cos(\omega x)$

      Alternativ: $y_h(x) = c_1 \cdot e^{-\frac{a}{2} x + j\omega x} + c_2 \cdot e^{-\frac{a}{2} x - j\omega x}$

      mit $\omega = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ bzw. aus $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm j \cdot \omega$
4. Spezielle Lösung berechnen:
   a. Tabelle mit Lösungsansätzen
   b. y_s ableiten
   c. in DGL einsetzen
   d. Koeffizientenvergleich
   e. y_s aufstellen
5. Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_s(x)$
6. Partikuläre Lösung $y_p(x)$: Anfangswerte einsetzen und Cs bestimmen

Störfunktion $f(x)$	Lösungsansatz $y_s(x)$
Polynom vom Grad n $f(x) = \mathrm{P}_n(x)$	• $y_s(x) = \mathrm{Q}_n(x)$ falls $b \neq 0$ • $y_s(x) = x \cdot \mathrm{Q}_n(x)$ falls $a \neq 0$ und $b = 0$ • $y_s(x) = x^2 \cdot \mathrm{Q}_n(x)$ falls $a = b = 0$ mit $\mathrm{Q}_n(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ Parameter: $q_0, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{K} \cdot e^{cx}$	• $y_s(x) = \mathrm{A} \cdot e^{cx}$ falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung • $y_s(x) = \mathrm{A}x \cdot e^{cx}$ falls c einfache Lösung der charakteristischen Gleichung • $y_s(x) = \mathrm{A}x^2 \cdot e^{cx}$ falls c zweifache Lösung der charakteristischen Gleichung Parameter: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$

Störfunktion $f(x)$	Lösungsansatz $y_s(x)$
Sinus- oder Kosinusfunktion $f(x) = \mathrm{K} \cdot \sin(\beta x)$ oder $f(x) = \mathrm{K} \cdot \cos(\beta x)$	• $y_s(x) = \mathrm{A} \cdot \sin(\beta x) + \mathrm{B} \cdot \cos(\beta x)$ falls $j\beta$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung • $y_s(x) = x\left(\mathrm{A} \cdot \sin(\beta x) + \mathrm{B} \cdot \cos(\beta x)\right)$ falls $j\beta$ Lösung der charakteristischen Gleichung Parameter: $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$
Mischterm $f(x) = \mathrm{P}_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $f(x) = \mathrm{P}_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ P_n: Polynom vom Grad n	• $y_s(x) = e^{cx}\left(\mathrm{Q}_n(x) \cdot \sin(\beta x) + \mathrm{R}_n(x) \cdot \cos(\beta x)\right)$ falls $c + j\beta$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung • $y_s(x) = x^r e^{cx}\left(\mathrm{Q}_n(x) \cdot \sin(\beta x) + \mathrm{R}_n(x) \cdot \cos(\beta x)\right)$ falls $c + j\beta$ Lösung der charakteristischen Gleichung mit $\mathrm{Q}_n(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ und $\mathrm{R}_n(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0$ Parameter: $q_0, q_1, \ldots, q_n, r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$

Systeme linearer DGLs

1

Ein System von DGL der Form

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x) \cdot y_1(x) + a_{12}(x) \cdot y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x) \cdot y_n(x) + f_1(x) \\ y_2'(x) &= a_{21}(x) \cdot y_1(x) + a_{22}(x) \cdot y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x) \cdot y_n(x) + f_2(x) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + a_{n2}(x) \cdot y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) + f_n(x) \end{aligned}$$

heißt **Differentialgleichungssystem** (DGL-System) n-ter Ordnung. In Matrixform lautet das System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}}_{\vec{y}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}}_{\vec{f}}.$$

Ordnung eines DGL-Systems = Summe der Ordnungen der einzelnen DGLs

2

Eine DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$$

wird mittels der Transformation

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

zu dem DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

- Transformationsgl. immer so viele wie Ordnung;
- Wenn 2 DGLs gegeben auch folg. Transformation möglich:
  $y_1 = y_a, \quad y_2 = y_a', \quad y_3 = y_b, \quad y_4 = y_b'$

3

Homogene lineare Systeme mit <u>konstanten</u> Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte berechnen: $\det \begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{pmatrix} = 0$ → λ berechnen
2. Eigenvektoren berechnen
3. Allgemeine Lösung: $\vec{y} = c_1 \cdot \vec{v_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot \vec{v_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ (etc. bei größerer A-Matrix)

III. Laplace Transformation

Grundsätzliches

kausale Funktion: $f(t) = 0 \quad für\ alle\ t < 0$

Laplace-Transformation: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$

→ f(t) darf keine Polstellen haben und nicht stärker wachsen als e^{-st} abnimmt

Sprungfunktion

$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\qquad \varepsilon(t - t_1) = \begin{cases} 1, & t \geq t_1 \\ 0, & t < t_1 \end{cases}$

Deltadistribution ("Ableitung" der Sprungfunktion)

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) \cdot f(t) dt = f(t_1)$ (Verschiebung von δ nach t_1)

→ Suche t sodass $\delta(0)$ entsteht und setze dieses t in $f(t)$ ein

Verallgemeinerte Ableitung **(besser: einfach mit Produktregel ableiten)**

$Df(t) = f'(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \delta(t - t_1)$ (n = Anzahl Sprünge, h_i = Sprunghöhe)

Transformationsregeln

R1-Linearität: Auseinanderziehen von zwei Einzelfunktionen und Konstanten raus

R2-Verschiebungssatz: Bei $f(t - t_0)$ → $\mathcal{L}\{f^*(t)\} = e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$

R3-Ähnlichkeitssatz: $\mathcal{L}\{f(c \cdot t)\} = \frac{1}{c} \cdot F\left(\frac{s}{c}\right)$ (s in Bildfunktion durch $\frac{s}{c}$ ersetzen)

R4-Dämpfungssatz: $\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s + a)$ (s in Bildfkt von f(t) ersetzen)

R5-periodisch: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} dt$ (T = Periodendauer)

R6-Ableitung:
$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0+)$
$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0+) - f'(0+)$
$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0+) - s \cdot f'(0+) - f''(0+)$

Alternativ: $\mathcal{L}\{Df(t)\} = s \cdot F(s)$ (verallgemeinerte Ableitung)

R7-Integration: wenn $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, dann $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$ (nur für g(0)=0)

R8-Differ./Integr. im Bildbereich:
$F'(s) = \mathcal{L}\{(-t) f(t)\}$
$F''(s) = \mathcal{L}\{(-t)^2 f(t)\}$
$\int_s^\infty F(u) du = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}$ (wenn $\frac{1}{t} f(t)$ transformierbar)

R9-Faltungssatz: $H(s) = F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}$
→ $h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$

	Bildfunktion F(s)	Originalfunktion $f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	$t \cdot \varepsilon(t)$
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon(t)$
5	e^{-as}	$\delta(t - a)$
6	$\frac{a \cdot s}{1 + a \cdot s}$	$\delta(t) - \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \cdot \varepsilon(t)$
7	$\frac{1}{s(1 + a \cdot s)}$	$\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) \varepsilon(t)$
8	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at) \varepsilon(t)$
9	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at) \varepsilon(t)$
10	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at) \varepsilon(t)$
11	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at) \varepsilon(t)$
12	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) - a \cdot t \cdot \cos(at)}{2a^3} \varepsilon(t)$
13	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a} \varepsilon(t)$
14	$\frac{1}{s-a} / \frac{1}{s+a}$ für $Re(s) > Re(a)$	$e^{at} \cdot \varepsilon(t) \,/\, e^{-at} \cdot \varepsilon(t)$
15	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ für $Re(s) > 0$	$t^n \cdot \varepsilon(t)$

$x^t \rightarrow e^{t \cdot \ln(x)}$

Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$

→ Partialbruchzerlegung

mögliche Typen:

$\frac{1}{s-a} \rightarrow e^{at} \cdot \varepsilon(t)$

$\frac{1}{(s-a)^n} \rightarrow e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \varepsilon(t)$

$\frac{1}{s^2+1} \rightarrow \sin(t) \cdot \varepsilon(t)$

$\frac{s}{s^2+1} \rightarrow \cos(t) \cdot \varepsilon(t)$

Laplace-Trafo und lineare DGLs

Einsatz nur bei linearen DGLs mit konstanten Koeffizienten

Wenn Berechnung für t > 0 gefordert: Alles in einem Schritt, aber NICHT mit verallgemeinerter Ableitung.

1. Homogene DGL lösen (Störfunktion = 0) (nur wenn Anfangsbed. ≠ 0)
    a. Einzelne Terme Laplace-transformieren: $\boldsymbol{y(t)} \rightarrow Y(s)$, $\quad \boldsymbol{y'(t)} \rightarrow s \cdot Y(s) - y(0)$, $\quad \boldsymbol{y''(t)} \rightarrow s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$
    b. In DGL einsetzen **(Achtung auf Vorzeichendrehung innerhalb eines Terms wenn zB -y" !)**
    c. Vergangenheitswerte für $y(0)$ und $y'(0)$ einsetzen
    d. $Y(s)$ ausklammern und alles ohne $Y(s)$ auf andere Seite, dann nach $Y(s)$ auflösen
    e. Rücktransformation zu Originalfunktion, prüfen ob $\varepsilon(t)$ notwendig ist (nur notwendig wenn nur t > 0 gefordert) → $y_h(t)$
2. Inhomogene DGL lösen
    a. DGL mit verallgemeinerter Ableitung formulieren, z.B.: $D^2 y + 2Dy + y = \varepsilon(t)$
    b. Laplace-Trafo: $\boldsymbol{y(t)} \rightarrow Y(s)$, $\quad \boldsymbol{Dy} \rightarrow s \cdot Y(s)$, $\quad \boldsymbol{D^2 y} \rightarrow s^2 \cdot Y(s)$ (ohne y(0)-Terme !)
    c. $Y(s)$ ausklammern und alles ohne $Y(s)$ auf andere Seite, dann nach $Y(s)$ auflösen
    d. Rücktransformation zu Originalfunktion, $\varepsilon(t)$ hier unbedingt notwendig!
3. Allgemeine Lösung: Summe aus 1 und 2

Laplace-Trafo und lineare DGL-Systeme
Einsatz nur bei linearen DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten

→ Wenn Anfangsbedingungen $\vec{y}(0-) = (0;0)$ → homogene DGLs = 0

1. Matrix in Gleichungen umformen
2. Laplace-Transformation nach Schritt 1a siehe oben (Achtung, wenn $y(0) = 0$ kann $y(0)$ weggelassen werden)
3. Gleichungen umstellen und $Y_1(s)$ bzw. $Y_2(s)$ jeweils zusammenfassen
4. Gleichungen nach $Y_1(s)$ und $Y_2(s)$ auflösen
5. Rücktransformation der beiden Terme → Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ aufstellen

Achtung auf Vorzeichendrehung beim Einsetzen!

→ Wenn Anfangsbedingungen $\vec{y}(0-)\ != (0;0)$:

1. Schritte unter 1 siehe oben erst für Störfunktionen = 0 durchführen (homogene DGLs)
2. Für inhomogen DGLs Methode mit verallgemeinerter Ableitung D verwenden, siehe oben Schritt 2

	Originalbereich	**Bildbereich**
Ohmscher Widerstand	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U(s) = R \cdot I(s)$
Induktivität	$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$	$U(s) = L \cdot \big(s \cdot I(s) - i(0)\big)$
Kapazität	$u(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)d\tau$	$U(s) = \frac{I(s)}{s \cdot C} \qquad f\ddot{u}r\ u(0) = 0$

LTI-Systeme / Übertragungsfunktion

$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$ → $G(s)$ ist Übertragungsfunktion → $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ ist Impulsantwort (→ $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ausgang}{Eingang}$)

Duhamel'sches Integral: $y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot g(t-\tau)d\tau$ (folgt aus Faltungssatz)

wenn $x(t) = \delta(t)$ (Impuls als Eingangssignal) → $y(t) = g(t)$ da $Y(s) = G(s) \cdot 1$

wenn $x(t) = \varepsilon(t)$ (Sprung von 0 auf 1) → $h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$ da $H(s) = \frac{G(s)}{s}$ (h = Sprungantw., g = Impuls)

→ Sprungantwort ist Integral von Impulsantwort! → $Dh(t) = g(t)$ und $s \cdot H(s) = G(s)$

→ $Y(s) = G(s) \cdot X(s) = s \cdot H(s) \cdot X(s)$ und $y(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot Dx(\tau)\, d\tau$

Wachstum der Ausgangsfunktion y(t)
Ablesbar anhand Nullstellen von $G(s)$

- $s_1 < 0$: exponentiell abnehmend
- $s_1 > 0$: exponentiell zunehmend
- $s_1 = 0$: konstant
- $s_1 = (\alpha \pm j\beta),\ \ \alpha < 0$: gedämpfte Schwingung
- $s_1 = (\alpha \pm j\beta),\ \ \alpha > 0$: anwachsende Schwingung
- $s_1 = \pm j\beta,\ \ \alpha = 0$: stationäre Schwingung

IV. Fourier Reihen

Fourier-Reihe: $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right)$

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$ → bei Punktsymmetrie im Ursprung = 0

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt$ → bei Punktsymmetrie = 0

$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt$ → bei Achsensymmetrie = 0

Wenn Integral aufgeteilt werden muss bleiben $\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$ (und Sinus und e) trotzdem mit ganzem T

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz der Grundschwingung

$k\omega$ Kreisfrequenz der k-ten Oberschwing.

$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ diskretes Amplit.spektrum

$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

a_1 = Amplitude der Grundschwingung
$a_{k>1}$ = Amplituden der Oberschwingungen

Umrechnung zw. Fourier-Koeffizienten siehe Papula!

Polarform: $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt - \varphi_k\right)$

Exponentialform: $F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ mit $c_k = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$ (wenn nötig: $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$)

Parseval'sche Gleichung: $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$

Achtung! $e^{-j\pi k}$ und $\cos(\pi k)$ sind immer $(-1)^k$!!

1. Streckung der Periode: Wenn Funktion g(t) vielfache Periode von f(t) hat → Koeffiz. gleich, $c_k = C_k$, nur Periode verschieden

2. Verschiebung um t₀: $g(t) = f(t+t_0)$ → $G(t) = F(t+t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}k(t+t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt_0}\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$

Koeffizient von G(t): $C_k = c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt_0}$

3. Multiplikation mit Schwingung: $g(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\cdot f(t)$ → $G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n}\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ Koeffizienten von G(t): $C_k = c_{k-n}$

4. Ableitung: $g(t) = f'(t)$ → $G(t) = F'(t) = \sum_{k=-\infty;\,k\neq 0}^{\infty} c_k \cdot \left(j\frac{2\pi}{T}k\right)\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$

Koeffizient von G(t): $C_0 = 0$ und $C_k = c_k \cdot \left(j\frac{2\pi}{T}k\right)$ für $k \neq 0$

5. Integration: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ → $G(t) = \int_0^t F(\tau)d\tau = \sum_{k=-\infty;\,k\neq 0}^{\infty}\frac{c_k}{j\frac{2\pi}{T}k}\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt} - \sum_{k=-\infty;\,k\neq 0}^{\infty}\frac{c_k}{j\frac{2\pi}{T}k}$

Koeffizienten von G(t): $C_0 = -\sum_{k=-\infty;\,k\neq 0}^{\infty}\frac{c_k}{j\frac{2\pi}{T}k}$ und $C_k = \frac{c_k}{j\frac{2\pi}{T}k}$ für $k \neq 0$

Faltung

Wenn $g(t) = (f_1 * f_2)(t)$ dann gilt $G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ mit c_k und d_k als Koeffizienten von $F_1(t)$ und $F_2(t)$

LTI-System

Ausgangssignal $Y(t) = (X * g)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ wobei $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ (ähnlich Impulsantwort)

DGL vom Typ $y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(t)$

1. Fourier-Reihe von Störfunktion f(t) bestimmen, deren Koeffizienten heißen d_k
2. Bestimme $Q(k) = \left(j\frac{2\pi}{T}k\right)^3 + a_2 \cdot \left(j\frac{2\pi}{T}k\right)^2 + a_1 \cdot \left(j\frac{2\pi}{T}k\right) + a_0$ (Q(k) darf nicht 0 werden können!)
3. Koeffizienten der Lösung berechnen: $c_k = \frac{d_k}{Q(k)}$ (wenn Fallunterscheidung bei d_k auch Fallunterscheidung bei c_k)
4. Lösung der DGL: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$

Wenn Funktion in der Form $f(t) = \sin(t) + \sin(3t) - \cos(5t)$ *etc.* gegeben:

1. Periode T = kleinster gemeinsamer Wert der für t eingesetzt werden muss damit in sin bzw. *cos* Vielfaches von 2π steht
2. Fourier-Reihe in allgemeiner Form hinschreiben und T einsetzen: $F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$
3. f(t) mit Euler-Formeln schreiben: $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$
4. Brüche einzeln darstellen (Vorsicht falls Minus!)
5. Einzelne c_k überlegen indem geschaut wird was für k in allgemeiner Form aus (2) eingesetzt werden muss, damit der Term in f(t) entsteht. Der Vorfaktor vor dem e-hoch-Term (zB $-\frac{3}{2j}$) ist dann das jeweilige c_k
6. „c_k = 0 sonst" hinschreiben

Tangens

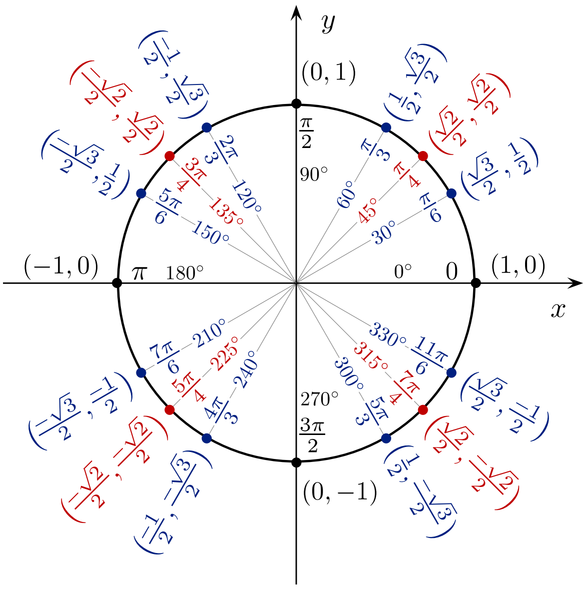
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Sinus/Cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Sinus/Cosinus

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

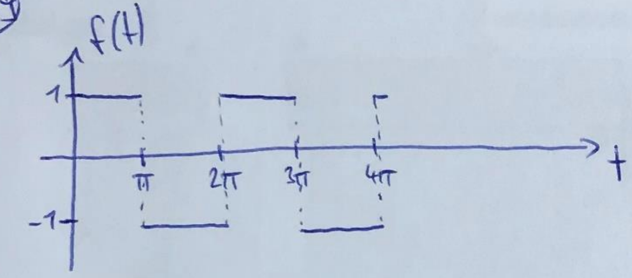


$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

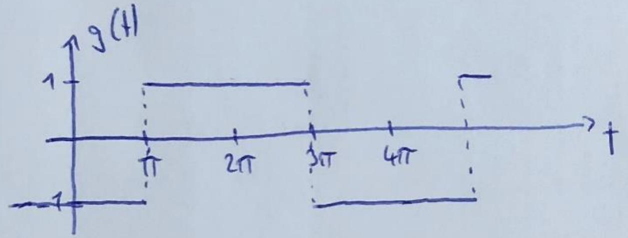
10a

$$h(t)=\int_0^t \tau\cdot\varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau-t_0)\,d\tau=\int_0^t \tau\cdot\underbrace{\varepsilon(\tau)}_{\text{immer } 1}\cdot\underbrace{\varepsilon(t-t_0-\tau)}_{\substack{\text{immer } 1\\ \text{wenn } \tau<t-t_0\\ \text{sonst } 0}}\,d\tau=\int_0^{t-t_0}\tau\,d\tau=\left[\tfrac{1}{2}\tau^2\right]_0^{t-t_0}=\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2\cdot\varepsilon(t-t_0)$$

4a



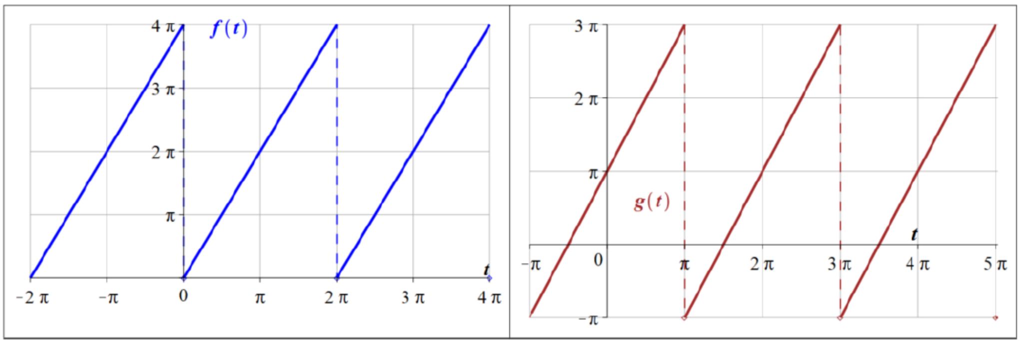
$$F(t)=\frac{2}{j\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot e^{j(2k-1)t}$$



$$g(t)=f\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow G(t)=\frac{2}{j\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot e^{j(2k-1)\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{j\cdot\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot e^{-j(2k-1)\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j(2k-1)\frac{t}{2}}$$



$$g(t)=f(\pi+t)-\pi$$