Formelsammlung GET 1

Grundlagen

Elektrische Ladung: Q = I · t [C], [As] → Stromstärke: I = $\frac{Q}{t}$

e = Elementarladung:
Elektronen: $Q_e = -e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$
Protonen: $Q_e = +e = +1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$

Stromdichte: J = $\frac{I}{A}$ (Strom pro Querschnitt) $\left[\frac{A}{m^2}\right]$, üblicherweise $\left[\frac{A}{mm^2}\right]$

$I = e \cdot A \cdot (n_p \cdot v_p + n_n \cdot v_n)$

→ $v_p = \frac{1}{e \cdot n_p} \cdot \frac{I_p}{A}$ → $v_p = \frac{J_p}{e \cdot n_p}$
→ $v_n = \frac{1}{e \cdot n_n} \cdot \frac{I_n}{A}$ → $v_n = \frac{J_n}{e \cdot n_n}$
→ $J = e \cdot (n_p \cdot v_p + n_n \cdot v_n)$

Elektrische Feldstärke: $\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q}$ (Kraft auf Ladungsträger durch elektr. Ladung des Ladungsträgers)

→ elektrisches Feld leistet Arbeit: $W = \vec{F_e} \cdot \vec{s}$ (Kraft mal Weg)

→ $\frac{W}{q} = \frac{\vec{F_e}}{q} \cdot \vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s} = U$ $\quad [U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{Nm}{As} = V$

→ Definition <u>Volt</u>: Zwischen 2 Punkten liegt eine Spannung von 1V vor, wenn eine Ladung von 1C zwischen diesen 2 Punkten eine Energieänderung von 1 Nm erfährt.

Beweglichkeit: $b = \frac{v}{E}$ → $v_p = b_p \cdot E$ und $v_n = b_n \cdot E$ → $J = e \cdot (n_n \cdot b_n + n_p \cdot b_p) \cdot E$

→ Leitfähigkeit: $\kappa = \frac{J}{E} = e \cdot (n_n \cdot b_n + n_p \cdot b_p)$

Kugel-Geometrie

$U = 2\pi \cdot r$
$A = 4\pi \cdot r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Ohmscher Widerstand

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ → je <u>größer</u> spez. Widerstand u. Länge u.je <u>kleiner</u> Fläche des Materials, desto höher R

→ $\rho = \frac{R \cdot A}{l}$ (Einheit: Ωm)

Kehrwert zu spez. Widerstand ρ ist die spez. Leitfähigkeit κ (wie bei Widerstand R und Leitwert G)
→ $\kappa = \frac{1}{\rho}$ → $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\kappa \cdot A}$ und $G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l} = \frac{A \cdot \kappa}{l}$

<u>Temperaturabhängigkeit</u>
Temperaturabhängigkeit des Widerstands von metallischen Leitern ist nahezu linear.
Steigung $m = const. = \frac{\Delta R}{\Delta \vartheta} = \frac{R_\vartheta - R_{\vartheta a}}{\vartheta - \vartheta_a}$ → ϑ_a = Ausgangstemperatur

→ Temperaturkoeffizient $\alpha_{\vartheta a} = \frac{1}{R_{\vartheta a}} \cdot \frac{(R_\vartheta - R_{\vartheta a})}{(\vartheta - \vartheta_a)}$ $\left[\frac{1}{K}\right]$

→ $R_\vartheta = R_{\vartheta a} \cdot [1 + \alpha_{\vartheta a} \cdot (\vartheta - \vartheta_a)]$ → um Widerstand R_ϑ bei Temperatur ϑ zu bestimmen
→ $R_\vartheta = R_{\vartheta a} \cdot [1 + \alpha_{\vartheta a} \cdot (\vartheta - \vartheta_a) + \beta_{\vartheta a} \cdot (\vartheta - \vartheta_a)^2]$ → linearer T.koeffizient für große T.bereiche

→ Temperaturkennwert $\tau = \frac{1}{\alpha_0}$ [K] → $\alpha_\vartheta = \frac{1}{(\tau + \vartheta)}$
→ $\frac{R_{\vartheta 1}}{R_{\vartheta 2}} = \frac{\alpha_{\vartheta 2}}{\alpha_{\vartheta 1}}$ → Bestimmung einer unbekannten Temperatur: $\vartheta_2 = \frac{R_{\vartheta 1}}{R_{\vartheta 2}} \cdot (\tau + \vartheta_1) - \tau$

Netzwerkberechnung

Knotenregel → $I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = 0$
Maschenregel → $U_q + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 0$

Spannungsteiler: $U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_{ges}}$
belasteter Spannungsteiler: $U_2 = U \cdot \frac{R_{2L}}{R_{ges}}$ (R_2 und R_{Last} parallel)

Stromteiler: $I_1 = I \cdot \frac{R_{ges}}{R_1}$ od. $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ od. $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_{ges}$ (bei 2 Widerst.)

Abgeglichene Brückenschaltung: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ und $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$

Elektrische Energie: $W = U \cdot I \cdot t$
(Herleitung über mech. Energie $W = F \cdot s = E \cdot Q \cdot s = \frac{U}{s} \cdot Q \cdot s = U \cdot Q$)
Elektrische Leistung: $P = \frac{W}{t} = U \cdot I$ → $P = \frac{U^2}{R}$ → $P = I^2 \cdot R$

Verbraucher: nimmt immer Leistung auf
Quelle: Gibt Leistung ab, wenn P bei unterschiedl. Zählpfeilen von U u. I positiv ist.
Leistungsanpassung: max. Leistung an R_v durch $R_v = R_i$ → $P_{v\,max} = \frac{U_q^2}{4 \cdot R_i}$
Wirkungsgrad η: Wenn $R_v < R_i$ ist η < 0,5 und wenn $R_v > R_i$ ist η > 0,5

Sonstiges

Sonstige Kraft-Gleichungen: $F = m \cdot g = m \cdot a$ $\left[\frac{kg \cdot m}{s^2} = N\right]$
Arbeit: $W = F \cdot s$ $[Nm = J]$
Energie: $E = m \cdot g \cdot h = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$ $[Nm]$

Netzwerkberechnung

Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze

1. Anzahl Zweige n und Anzahl Knoten p feststellen
2. Zählpfeile für unbekannte Größen eintragen
3. Knotenpunktsatz für p-1 Knoten aufstellen
4. Unabhängige Maschen wählen m = n – (p-1), Umlaufsinn eintragen und Maschengleichungen aufstellen
5. Gleichungssystem sinnvoll (!) lösen

Überlagerungsmethode

1. Erste Spannungs-/Stromquelle aktivieren, andere Quellen deaktivieren (Spannungsq. kurzgeschlossen, Stromq. unterbrochen)
2. Erste Teilströme im Netzwerk berechnen I_n', …
3. Zweite Spannungs-/Stromquelle aktivieren, andere Quellen deaktivieren
4. Zweite Teilströme im Netzwerk berechnen I_n'', …
5. Für alle Spannungs-/Stromquellen durchführen
6. Teilströme addieren: $I_n = I_n' + I_n'' + \dots$

Ersatzzweipolquellen/Schnittmethode

→ Teil des Netzwerkes wird durch eine ideale Spannungs-/Stromquelle und einem Innenwiderstand R_i ersetzt
Netzwerk an betrachteten Klemmen a-b öffnen und 2 der 3 folgenden Größen betrachten:

1. Leerlaufspannung a-b: $U_0 = U_q$ → Maschenregel!
2. Kurzschlussstrom a-b: $I_k = I_q$
3. Innenwiderstand R_i berechnen: Deaktivieren der Quellen und Berechnung des Gesamtwiderstands bei Leerlauf = R_i

→ Berechnung der 3. Größe durch Ohmsches Gesetz

Knotenpotentialverfahren

Optional: 1. Alle Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln, 2. Alle R in G umwandeln

1. Netzwerk betrachten und Pseudo-Zweige mit Stromquellen eliminieren (egal was sonst noch im Zweig ist!)
2. Bezugsknoten wählen mit Potential $\varphi_0 = 0$ (Hinweis: Bezugsknoten wählen, bei dem Belastungsstrom zu- oder abfließt, damit schon mal eine Größe in der Matrix rausfällt)
3. Übrige Knoten durchnummerieren
4. Berechnungen für alle Eigen- und Koppelleitwerte aufstellen
5. Matrix ODER Knotenpunktgleichungen nach folgendem Prinzip aufstellen:

(1) $G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 = \sum_1 I_{KB} + \sum_1 U_q G$

(2) $-G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 = \sum_2 I_{KB} + \sum_2 U_q G$

(3) $-G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = \sum_3 I_{KB} + \sum_3 U_q G$

6. Werte einsetzen und Gleichungssysteme lösen
7. Zweigströme mit Ohmschen Gesetz berechnen, Spannungsquellen berücksichtigen! $I_{13} = (\varphi_1 - \varphi_3 \pm U_q) \cdot G_{13}$
   → mit $+U_q$ wenn U_q gegen Richtung von I und umgekehrt

Netzumwandlung

Stern → Dreieck

$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$

$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$

$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$

Dreieck → Stern

$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

Vektorrechnung / Geometrie

Betrag = Länge (immer positiv): $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Multiplikation mit Skalar:

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Kreuzprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

($\vec{c}$ ist Flächennormalenvektor (senkrecht) zu Fläche die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird)

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} e_{ax} \\ e_{ay} \\ e_{az} \end{pmatrix}$$

oder

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

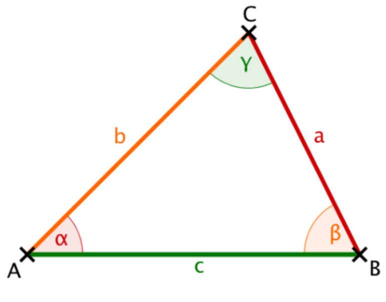
Einheitsvektor: (hat Richtung von $\vec{a}$ und Betrag 1)

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Kosinussatz

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$



Elektrisches Strömungsfeld

Grundprinzip: $I \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow R$

Für alle quellenfreien Felder gilt: $\oint \vec{a} \cdot d\vec{A} = 0$

$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ (ähnlich Knotenpunktsatz Kirchhoff)

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ (Linienintegral über geschl. Weg ist Null → Potential am Anfangs- u. Endpunkt gleich)

Strom durch Fläche im inhomogenen Strömungsfeld: $I_A = \int_A \vec{J} \cdot \overrightarrow{dA}$

Elektrische Feldstärke: $E = \rho \cdot J$ → $J = \kappa \cdot E$

(Ohmsches Gesetz des Strömungsfeldes)

Stromdichtefeld: $\vec{J} = e \cdot n \cdot \vec{v}$ ($\vec{v}$ = Driftgeschwindigkeit)

	Stromdichte J	Feldstäke E	Spannung U	Widerstand R
Grund-formeln	$J = \frac{I}{A}$ $J = \kappa \cdot E = \frac{E}{\rho}$	$E = \rho \cdot J = \frac{J}{\kappa}$ $E = \frac{U}{s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$	$U = \int E\, ds$	$R = \frac{U}{I}$
Ebene	$J(x) = \frac{I}{A(x)} = \frac{I}{(a+mx)^2}$ a = Kantenlänge Startfläche (y_1) m = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $A(x) = (b \cdot \frac{x}{l})^2$ $A(x) = b \cdot h \cdot \frac{x}{x_h}$ $A(x) = \left(r_1 + x \cdot \frac{(r_2-r_1)}{h}\right)^2 \cdot \pi$	$E(x) = \rho \cdot J(x)$ $= \rho \cdot \frac{I}{A}$	$U(x) = \int \vec{E}\, d\vec{x} = \int_{x'=0}^{x} E(x')\, dx'$ $= \rho \cdot I \cdot \int_{x'=0}^{x} \frac{1}{A}\, dx'$	$R = \frac{U(x)}{I} = \rho \cdot \int_{x'=0}^{x} \frac{1}{A}\, dx'$
Kugel	$J(r) = \frac{I}{4\pi \cdot r^2}$	$E(r) = \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot r^2}$	$U(r) = \int_{r1}^{r2} E(r)\, dr = \frac{\rho \cdot I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2}\right)$	$R_{12} = \frac{U(r)}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2}\right)$
Zylinder	$J(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r \cdot l}$	$E(r) = \frac{\rho \cdot I}{2\pi \cdot r \cdot l}$	$U(r) = \int_{r1}^{r2} E(r)\, dr = \frac{\rho \cdot I}{2\pi \cdot l} \cdot ln \frac{r2}{r1}$	$R_{12} = \frac{U(r)}{I} = \frac{\rho}{2\pi \cdot l} \cdot ln \frac{r2}{r1}$

Elektrostatisches Feld

Grundprinzip: $Q \rightarrow \psi \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow C$

elektrostatisches Feld existiert nur in Nichtleitern, Vakuum oder Luft

homogenes Feld: Feldlinien gerade und parallel in gleichem Abstand

Verschiebungsfluss $\psi = Q$

→ Entsteht in positiven Ladungen und „fließt" (bildhaft) zu den negativen Ladungen. „Unterwegs" werden Ladungen verschoben.

wenn A geschlossene Hüllfläche: $\psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

Dielektrizitätskonstante (Permittivität): $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Kapazität Kondensator: $C = \frac{Q}{U}$

Parallelschaltung:

$C = C_1 + C_2$ Ladungsverhältnisse: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$ → $\frac{Q_1}{Q_{ges}} = \frac{C_1}{C_{ges}}$ → $Q_1 + Q_2 = Q_{ges}$

Reihenschaltung:

$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ $Q_1 = Q_2 = Q$ (Ladungen können nur über U_q zu oder abfließen)

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ → $\frac{U_1}{U_{ges}} = \frac{C_{ges}}{C_1}$

Schichtdielektrikum

Reihenschaltung: $Q\ u. D\ konst., \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, U = U_1 + U_2$

→ Zylinder: E am größten, wo $\varepsilon_r \cdot r$ am kleinsten

Parallelschaltung: $E\ u. U\ konstant\ !, \frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$ Q verteilt sich ungleichmäßig !

Kräfte im elektrostatischen Feld

Kraft auf eine Ladung: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ (bei negativen Ladungen entgegen Feldstärke)

Kraft zwischen zwei Punktladungen: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$

Energie im elektrostatischen Feld

Energie $W = Q \cdot U$ [J]

Aufladen eines Kondensators: $W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q U$

Der Spannungsquelle zugeführte Energie bei Vergrößern des Plattenabstandes: $W = UQ$

(Q = Ladung, die der Spannungsquelle beim Vergrößern des Plattenabstandes zugeführt wird; Berechnung: $Q = U(C_{vorher} - C_{nachher})$)

Der Spannungsquelle entnommenen Energie bei Einbringen von Dielektrikum: $W = UQ$

(Q = Ladung, die von der Spannungsquelle beim Einbringen des Dielektrikums geliefert wird; Berechnung: $Q = U(C_{nachher} - C_{vorher})$)

Energiedichte: $w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D = \frac{1}{2} \cdot E^2 \cdot \varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot D^2$ $[\frac{J}{m^3}]$

Potential nimmt in Richtung des Feldstärkevektors ($\vec{E}$) ab

Potential mehrerer Ladungen: algebraische Addition,

z.B.: $\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi \cdot r_1 \cdot \varepsilon} + \frac{Q_2}{4\pi \cdot r_2 \cdot \varepsilon}$ (selber Bezugspunkt!)

Überlagerung elektrischer Felder:

E bzw. D vektoriell addieren; U skalar addieren nach Überlagerungsprinzip bei selbem Bezugspunkt

	Verschiebungsflussdichte D	Feldstärke E	Potential φ / Spannung U	Kapazität C
Grundformeln	$D = \frac{Q}{A}$ $Q = \int D\, dA$ $D = E \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r$	$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ $\quad E = \frac{U}{d}$	$U = \int E\, ds$	$C = \frac{Q}{U}$ $C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$
Platten (homogenes Feld)	da homogenes Feld: $D = \frac{\psi}{A} = \frac{Q}{A}$	$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$	$U = E \cdot d$ d = Plattenabstand bei Reihen-Schichtung: $U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2$	$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$
Kugel (in der Ladung: E gleich 0 und φ konst.)	$\lvert\vec{D}\rvert$ auf gesamter Kugeloberfläche gleich und parallel zum Flächennormalenvektor $d\vec{A}$ →$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$ →gilt auch für Umgebung außerhalb einer geladenen Kugel generell inhomogenes Feld: $\psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon} = \frac{C \cdot U}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon}$ →gilt auch für Umgebung außerhalb einer geladenen Kugel	$U_{r_i, r_a} = \varphi_{r_i} - \varphi_{r_a} = \int_{r_i}^{r_a} E(r')\, dr' = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)$ →mit $\varphi_{r_a} = 0$ als Bezug: $\varphi(r_i) = \frac{Q}{4\pi \cdot r \cdot \varepsilon}$	$C = \frac{4\pi \cdot \varepsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$ $= \frac{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r_i}{1 - \frac{r_i}{r_a}}$ →Grenzfall: r_a unendlich: $C = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot r_i$
Zylinder hier: $\lambda = \frac{Q}{l}$ (in der Ladung: E gleich 0 und φ konst.)	$D(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r}$	$E(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r \cdot \varepsilon}$ $E(r) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$ (bei Reihenschaltung für jedes U einzeln!) <u>Parallel:</u> $E_1(r) = \frac{Q_1}{\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon_1}$ (jeweils) → $E_1 = E_2 = E$	$U_{r_a, r_i} = \varphi_{r_a} - \varphi_{r_i} = \int_{r_i}^{r_a} E(r')\, dr' = \frac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$ $\varphi(r) = \varphi_{r_a} - \frac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) = \varphi_{r_a} - \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$	$C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\frac{r_a}{r_i}}$ und: $C' = \frac{C}{l} = \frac{\lambda}{U}$ <u>Parallel</u>: $C_1 = \frac{\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot l}{\ln\frac{r_a}{r_i}}$ (je C)
Doppelleitung ($+Q$ und $-Q$)	$D_+ = \frac{+Q}{2\pi \cdot r \cdot l}$ $D_- = \frac{-Q}{2\pi \cdot r \cdot l}$	$+Q$ und $-Q$ erzeugen jeweils eigenes $\vec{E}$, beide $\vec{E}$ sind gleichgerichtet. $E_+ = \frac{+Q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon}$ $E_- = \frac{-Q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon}$	$U = \frac{Q}{\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{a-r}{r}\right)$ a = Abstand l = Länge r = Leiterradius	$C = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\frac{a}{r}}$ a = Abstand l = Länge r = Leiterradius
Einzelleitung über Erde			$\varphi = \frac{Q}{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{2h-r}{r}\right)$ (φ am Erdboden, deswegen halb so groß wie bei Doppelleitung)	$C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\frac{2h}{r}}$ h = Höhe, r = Leiterradius

Magnetisches Feld

Grundprinzip: ϕ → B → H → I → ϕ → ....
oder: I → H → B → ϕ

Magnetkraft innerhalb von S nach N, außerhalb von N nach S

Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ $\qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
μ_r bei ferromagnetischen Stoffen <u>nicht</u> linear (Hystereseschleife)

Magn. Spannung	$V_{12} = \int_1^2 \vec{H}\, d\vec{s} \quad [A]$ Weg s parallel zu H: $V_{12} = H \cdot s_{12}$ Weg s senkrecht zu H: $V = 0$ (Äquipotentiallinie)

Magnetischer Fluss	$\phi = \int \vec{B}\, d\vec{A} \quad [Vs][Wb]$ homogenes Feld: $\phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha$ (Winkel zw. Flächennormalenvektor u. B)
verketteter Fluss	$\psi_m = N \cdot \phi$
Flussdichte	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ $\vec{B} = \frac{Fluss}{wirksame\ Fläche} = \frac{d\phi}{d\vec{A}}$ $\vec{B} = \frac{F}{l \cdot I} \quad [T]$
Feldstärke	$H = \frac{eingeschlossene\ Stromstärke}{Feldlinienlänge} = \frac{I}{2\pi \cdot r} = \frac{I}{l} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$
Durchflutung	$\Theta = \int \vec{J}\, d\vec{A} = \oint \vec{H}\, d\vec{s} = N \cdot I\ [A]$ $I = \int \vec{J}\, d\vec{A} = \oint \vec{H}\, d\vec{s} = V$
Magn. Widerstand	$R_m = \frac{l}{\mu \cdot A} \quad \left[\frac{1}{\Omega s}\right]$
Magn. Leitwert	$\Lambda_m = \frac{\mu \cdot A}{l}$

Situation 1: Magnetischer Kreis mit Eisenkern, Eisenkern mit Luftspalt, ohne Kern, …

Durchflutung: $\Theta = N \cdot I = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \cdots \rightarrow H_1 = \frac{N \cdot I - H_2 \cdot l_2 - \cdots}{l_1}$

Ohmsches Gesetz des magn. Kreises: $\Theta = R_m \cdot \phi$ bzw. $\phi = \Lambda_m \cdot \Theta$

$\phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{N \cdot I}{R_m} \left(= \frac{V}{R_m} \right)$

Maschenregel: $\Theta = \phi \cdot R_{m1} + \phi \cdot R_{m2} = V_1 + V_2$

$B = \mu \cdot H = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{l} \rightarrow$ bei Reihenschaltung einzeln betrachten!

Induktivität: $L = \frac{N \cdot \phi}{I} = \frac{N^2}{R_{m_{ges}}}$

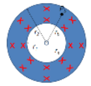
lange dünne Zylinderspule:

$\phi = \int \vec{B}\, d\vec{A}$ (meist homogen) $H_i = \frac{I \cdot N}{l}$ (im Inneren) $L = \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$

Situation 2: Gerade Leiter innerhalb und außerhalb, Koaxialkabel

Gerader Leiter innerhalb: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot R^2} \cdot r$ (R = kompletter Radius Leiter) $\phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi}$ (r-unabhängig)

Gerader Leiter außerhalb: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r}$ (vektoriell: $\vec{H}(\vec{r}) = H \cdot \vec{e_H} = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot (\vec{e_J} \times \vec{e_r})$)

Gerader Leiter mit Loch in der Mitte: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{(r^2 - R_i^2)}{(R_a^2 - R_i^2)}$  $\phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{4\pi} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot R_i^2}{(R_a^2 - R_i^2)} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i}\right)$

Koaxial, $I_i = -I_a$:

(1) innerhalb Innenleiter: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot R^2} \cdot r$ (R = kompletter Radius Leiter)

(2) im Dielektrikum: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r}$

(3) innerhalb Außenleiter: $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{(R_{a2}^2 - r^2)}{(R_{a2}^2 - R_{a1}^2)}$ (R_{a2} = Außenradius Außenl., R_{a1} = Innenradius Außenl.)

(4) außerhalb Außenleiter: : $H(r) = 0$

Konzentrischer Ring um Leiter (Klapp-Ferrit): $\phi = \int \vec{B}\, d\vec{A} = \frac{I \cdot l \cdot \mu}{2\pi} \cdot ln \frac{r_a}{r_i}$ $H(r) = \frac{I}{2\pi \cdot r}$

Situation 3: Zwei parallele Leiter

unterschiedliche Stromrichtung:

$H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ $\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\mu_0 \cdot l \cdot I}{\pi} \cdot ln \frac{a-r}{r}$ (a = Abstand zw. Leitern, r = Leiterradius)

$L = \frac{\phi_a + \phi_i}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \left(ln \frac{a-r}{r} + \frac{1}{4}\right)$ (φ_a = zwischen den Leitern, φ_i = im Leiterinneren)

gleiche Stromrichtung:

$H = H_1 - H_2 = \frac{I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Grenzflächen

Tangentialkomponenten der Feldstärke H parallel zu Grenze: $H_{t1} = H_{t2}$

Normalkomponenten der Flussdichte B senkrecht zu Grenze: $B_{n1} = B_{n2}$

$\rightarrow \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ $\frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ analog: elektrisches Feld: $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ bzw $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Kräfte

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im homogenen Magnetfeld: $F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha$ (l = Leiterlänge, α = Winkel zw. $\vec{B}$ und $\overrightarrow{I \cdot l}$)

Vektoriell: $\vec{F} = \overrightarrow{I \cdot l} \times \vec{B}$

Kraft auf bewegte Ladung im Magnetfeld (Lorentzkraft): $F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$ (v = Geschwindigkeit)

Vektoriell: $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ (Bahnradius bei Ablenkung, Herleitung durch Fliehkraft: $r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B}$)

Kraft zwischen 2 parallelen stromdurchflossenen Leitern: $F = \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} \cdot \mu_0 \cdot l$ (Kraft auf einen einzelnen Leiter)

(bei gleicher Stromr. Anziehung, bei unterschiedl. Stromr. Abstoßung)

Kraft zwischen stromdurchflossenen Leiter und Eisenteil: Spiegelprinzip: $F = \frac{\mu_0 \cdot l}{4\pi \cdot r} \cdot I^2$ (r = einfacher Abstand Leiter zu Eisenteil)

Kraft Elektromagnet: : $F_{Pol} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A_{Pol} = \frac{\phi^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot A_{Pol}} \rightarrow$ mechanische Zugspannung: $\sigma_{mech} = \frac{F_{Pol}}{A_{Pol}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Rechte-Hand-Regel: Daumen zeigt in die Richtung, in die physikalisch die positiven Ladungsträger fließen, also in die technische Stromrichtung.

Energie

Ausgangsformel immer:

$dW = U \cdot I \cdot dt$ oder $dW = u(t) \cdot i(t) \cdot dt$

mit Induktivität L:

$dW_m = L \cdot i \cdot di \longrightarrow W_m = L \cdot \int_{i=0}^{i=I} i\, di = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \psi_m =$

$= \frac{1}{2} \cdot I \cdot N \cdot \phi = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \phi$

(Energiegehalt stromdurchflossener Spule)

mit B und H:

$dW_m = L \cdot i \cdot di = N^2 \mu \frac{A}{l} \cdot \frac{H \cdot l}{N} \cdot \frac{l}{N} dH = AlH\mu \cdot dH = V \cdot H \cdot dB$

$\rightarrow dB = \mu \cdot dH$:

$\rightarrow W_m = V \int H\, dB = V\mu \int H\, dH = \frac{1}{2} H^2 \mu V = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2\mu} B^2 \cdot V$

(wenn $\mu = const.$ u. Energie in V homogen !)

$\rightarrow W_m = \int_V w_m\, dV = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2\, dV$

(wenn $\mu = const.$ u. Energie in V inhomogen !)

Energiedichte:

wenn $\mu = const.$: $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} H^2 \mu = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2\mu} B^2$

wenn $\mu \neq const.$: $w_m = \int_0^B H\, dB$

Induktion

Bewegungsinduktion (ruhendes Magnetfeld, Bewegung eines stromlosen Leiters):

Trennung frei beweglicher Ladungsträger durch Lorentzkraft: Induktionsspannung, wenn Leiter geschlossen: Induktionsstrom

wenn $\vec{B}$ homogen u. $\vec{v}, \vec{B}$ und Leiter senkrecht: $u_i = -B \cdot l \cdot v \cdot N$ oder $u_i = -N \cdot \left(\frac{dA(t)}{dt} \cdot B(t)\right)$ (induzierte Spannung)

wenn $\vec{B}$ homogen u. $\vec{v}$ und $\vec{B}$ nicht senkrecht: $u_i = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{s} = -B \cdot l \cdot v \cdot \sin\varphi$ (induzierte Sp., φ = Winkel zw. v und B)

→ Messung mit Voltmeter zeigt positiven Wert: $U = -u_i$ (induktive Spannung U_L oder u_q)

$F_{mech} = F_{magn.} = I \cdot B \cdot l$ (mechanische Kraft um Leiterschleife zu bewegen ist gleich der magnetischen Kraft)

Vorzeichen: Rechte-Hand-Regel andersherum ausführen, Daumen zeigt in Bewegungsrichtung der Elektronen; Anschließend Spannungspfeil von ⊕ nach ⊖ einzeichnen und Maschenregel ausführen

Ruheinduktion (zeitlich veränderliches Magnetfeld, ruhende Leiterschleife):

Leiterschleife wirkt Flussänderung entgegen, indem es Spannung induziert

$u_q = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad \left(= -\frac{d\psi_m}{dt}\right)$ oder $u_i = -N \cdot \left(\frac{dB(t)}{dt} \cdot A(t)\right)$

mit L: $u_i(t) = -L \cdot \frac{di}{dt}$

Vorzeichen: Lenzsche Regel: induzierter Strom generiert Fluss ϕ, der seiner Ursache (ϕ) entgegenwirkt. Dann Rechte-Hand-Regel ausführen. Oder gleich ursprünglichen Fluss und **Linke**-Hand-Regel nehmen.

Zusammen:

$u_i = -N \cdot \left(\frac{dA(t)}{dt} \cdot B(t) + \frac{dB(t)}{dt} \cdot A(t)\right)$

Induktivität

Selbstinduktivität L:

$L = \frac{\psi_m}{I} = \frac{N \cdot \phi}{I} = \frac{N \cdot \phi}{\frac{\Theta}{N}} = \frac{N^2}{R_m} = \Lambda_m \cdot N^2 = \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \quad [H]$ (bei unveränderter Anordnung nur geometrieabhängig)

→ $u_i(t) = -L \cdot \frac{di}{dt} = -u_L$

Gegeninduktivität M:

$M_{12} = \frac{N_2 \cdot \phi_{12}}{i_1} = \frac{verketteter\ Fluss\ in\ Spule\ 2}{Strom\ in\ Spule\ 1}$ analog: $M_{21} = \frac{N_1 \cdot \phi_{21}}{i_2} = \frac{verketteter\ Fluss\ in\ Spule\ 1}{Strom\ in\ Spule\ 2} \quad \left[\frac{Vs}{A}\right]$

wenn $\mu = const.$: $M_{12} = M_{21} = M$

wenn keine Streuung und beide Spulen führen Strom: $M^2 = L_1 \cdot L_2 \rightarrow M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ (Herleitung: $\phi_1 = \phi_{12}$)

wenn Streuung und beide Spulen führen Strom: $M = k_m \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

Kopplungsfaktor $k_m = \sqrt{\frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\phi_1 \cdot \phi_2}} = \sqrt{(1-\sigma_1) \cdot (1-\sigma_2)} \quad \left(= \sqrt{(1-\sigma)}\right)$

Streufaktor $\sigma_1 = 1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{\sigma 1}}{\phi_1} \left(= 1 - \frac{N_1 \cdot M}{N_2 \cdot L_1}\right)$ (Anteil des Flusses, der NICHT in zweiter Spule landet)

Gesamtstreuung: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2$ (σ_2 ist Streufaktor der zweiten Spule)

Widerstand der magnetischen Kopplung: $R_{mk} = \frac{\Theta_1}{\phi_{12}} = \frac{i_1 \cdot N_1}{\frac{M \cdot i_1}{N_2}} = \frac{N_1 \cdot N_2}{M} \rightarrow M = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_{mk}}$

Induktive Kopplung

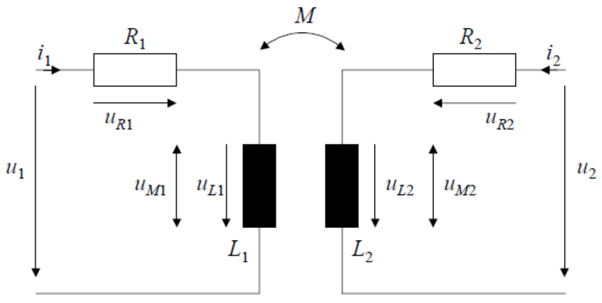
gleichgerichtete Flüsse ϕ werden addiert,
entgegengerichtete Flüsse ϕ werden subtrahiert
(Wenn Punkt in Schaltbild auf gleicher Seite, sind Flüsse gleichgerichtet)

verkettete Gesamtflüsse:

Spule 1: $\psi_{m1} = \psi_{m11} + \psi_{m21} = L_1 \cdot i_1 \pm M_{21} \cdot i_2$

Spule 2: $\psi_{m2} = \psi_{m22} + \psi_{m12} = L_2 \cdot i_2 \pm M_{12} \cdot i_1$

(selbst erzeugter Fluss + fremd erzeugter Fluss)



$u_1 = u_{R_1} + u_{L1} \pm u_{M1} = i_1 R_1 + N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \pm N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt}$
$= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{21} \frac{di_2}{dt}$

$u_2 = u_{R_2} + u_{L2} \pm u_{M2} = i_2 R_2 + N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \pm N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}$
$= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{12} \frac{di_1}{dt}$