

0. Allgemeines

- Anfangswertsatz: $x(t = +0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot X(s)]$ (nur wenn $x(t)$ bei $t=0$ keine δ -Anteile)
- Endwertsatz: $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)]$ (nur wenn endl. Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t))$)

Pole-Nullstellen-Diagramm

System realisierbar, wenn Nennergrad \geq Zählergrad

$G(s)$ in Linearfaktoren: $G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s-s_{01}) \cdot (s-s_{02}) \cdot \dots \cdot (s-s_{0m})}{(s-s_{001}) \cdot (s-s_{002}) \cdot \dots \cdot (s-s_{00n})}$ ($s_{0\mu}$ = Nullstellen, $s_{00\nu}$ = Pole)

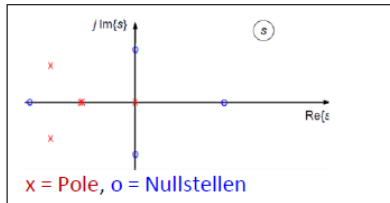
Stabilität

(asympt.) stabil: alle Pole haben $\text{Re} < 0$ (alle Pole links)

grenzstabil: min. 1 Einzeipol mit $\text{Re} = 0$

instabil: min. 1 Einzeipol mit $\text{Re} > 0$ (min. 1 Pol rechts)

instabil: min. 1 Mehrfachpol mit $\text{Re} = 0$



Allpass

reiner Allpass: alle Pole symmetrisch zu Nullstellen (an Im -Achse)

reiner stabiler Allpass: alle Pole symmetrisch zu Nullstellen (an Im -Achse) und Pole mit $\text{Re} < 0$

Allpassanteil: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung mit $\frac{s+s_{01}}{s+s_{01}}$ (s_{01} symm. zu NS mit $\text{Re} > 0$)

Minimalphasigkeit

rein minimalphasig: alle Nullstellen mit $\text{Re} \leq 0$

Minimalphasiges Teilsys.: nur bei stabilen Systemen! Erweiterung siehe Allpass

0,5	1	2	4	5	10	20
-6 dB	0 dB	6 dB	12 dB	14 dB	20 dB	26 dB

Multiplikation von Faktoren \rightarrow Addition von dB

Division von Faktoren \rightarrow Subtraktion von dB

Potenzierung \rightarrow Multiplikation von dB

Logarithmische Skala auf Kästchenpapier:

3 Kästchen $\rightarrow \times 2$

4 Kästchen $\rightarrow \times 2,5$

= 7 Kästchen $\rightarrow \times 5$

mathematisch (bei 10 Kästchen/dek.):

$10 \cdot \log(\text{Wert}) = \text{Anzahl Kästchen}$, zB $10 \cdot \log(5) \approx 7$ Kästchen

Steigung PT_1 -Glied:

eine Dekade: -20dB

Verdopplung: -6dB

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Einführung

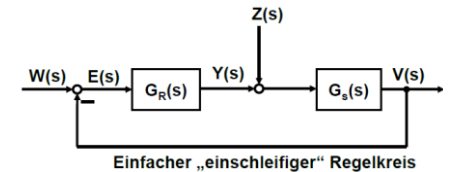
Führungsgröße = Sollwert (w)

Stellgröße = Stellwert (y)

Regelgröße = Istwert (v)

Regelabweichung (e)

Störgröße (z)



Reglerübertragungsfkt: $G_R(s)$

Streckenübertragungsfkt: $G_S(s)$

Störübertragungsfkt: $G_Z(s) = \frac{V(s)}{Z(s)}$ für $W(s) = 0 \rightarrow G_Z(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)}$

Führungsübertragungsfkt: $G_W(s) = \frac{V(s)}{W(s)}$ für $Z(s) = 0 \rightarrow G_W(s) = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)}$

$G_Z(s)$ stationär genau, wenn $G_Z(0) = 0$

vollständige Störunterdrückung = Zähler von $G_Z(s) = 0$

$G_W(s)$ stationär genau, wenn $G_W(0) = 1$ (da Regelabweichung dann $e_\infty = w_\infty - v_\infty = 1 - G_W(0) = 0$)

2. Regelkreisglieder

Allgemeines System:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_{-1} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau + b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt}$$

Verzögerung n-ter Ordnung
-T_n
integrierend
I-
proportional
P-
differenzierend
D-

Bestimmung aus $G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{ds^3 + es^2 + fs}$:

\rightarrow Umformen sodass Nenner Konstante u. positive Potenzen von s enthält: $G(s) = \frac{as+b+\frac{c}{s}}{ds^2+es+f}$

\rightarrow System-Grundtyp aus Zähler: $s = D, b = P, \frac{1}{s} = I$

\rightarrow Verzögerung aus Nenner: höchste Potenz = n

PT₁ – System

V = Endwert $T = t$ bei $0,63 \cdot V$ $\rightarrow G(s) = \frac{V}{1+sT}$ $\rightarrow s_\infty = -\frac{1}{T}$

\rightarrow wenn Pol weiter links, System schneller

PT₂ – System

$a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t)$

$\rightarrow G(s) = \frac{V}{1 + \frac{2D}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$ $\rightarrow s_{\infty 1/2} = -D\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \quad D = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot a_1$$

$D > 1$	2 reelle Pole	aperiodische Dämpfung
$D = 1$	2 reelle Pole (Doppelpol)	aperiodischer Grenzfall
$0 < D < 1$	konj. kompl. Polpaar in linker s-Halbebene	gedämpfte harmonische Schwingung
$D = 0$	konj. kompl. Polpaar auf Im -Achse	ungedämpfte harmonische Schwingung
$D < 0$	min. 1 Pol in rechter s-Halbebene	aufklingende Systemreaktion \rightarrow instabil

PT₂ – System

für $D < 1$:

$$V = b_0$$

T_e = Periodendauer

T_{an} = Anschlagdauer (1. mal Endwert)

$$\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} = \frac{2\pi}{T_e} \quad (\text{Eigen-Kreisfr.})$$

$$\omega_0 = \frac{\arccos(-D)}{T_{an} \sqrt{1 - D^2}} = \frac{1}{D \cdot T_{ab}} \quad (\text{Bogenmaß !})$$

$$D = \frac{-\ln(\ddot{u})}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\ddot{u}))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{T_{ab}^2}{T_e^2}\right)}} \quad (\text{gilt nur für PT}_2 \text{ !})$$

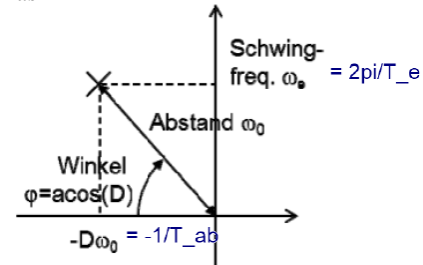
$$\ddot{u} = \frac{y(T_{max}) - V}{V} = e^{-\frac{D\pi}{\sqrt{1 - D^2}}}$$

$$T_{an} = \frac{\arccos(-D)}{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}$$

$$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}$$

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}$$

T_{ab} = Abklingkonstante = Abstand Tangente v. Einhüllende zu SP dieser Tangente mit V



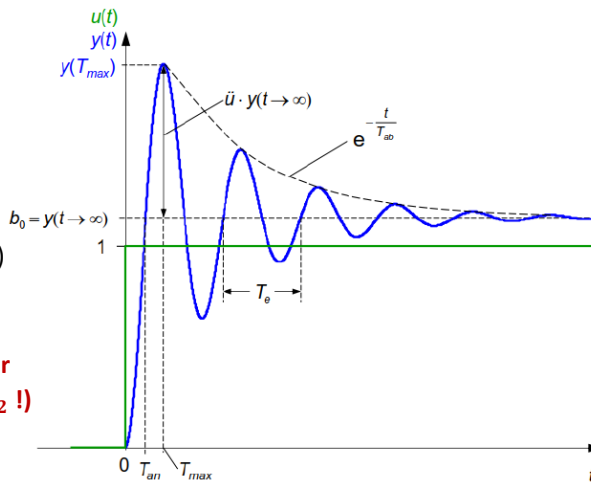
für $D = 0$:

$$G(s) = \frac{V}{1 + s^2 \cdot \frac{1}{\omega_0^2}}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \hat{y}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

für $D \geq 1$: → Kapitel 4



Zusammenhang Übertragungsfunktion - Sprungantwort

Integrierende Systeme

$$y(t) = \frac{1}{A} \cdot \int u(t) dt \quad \rightarrow Y(s) = \frac{1}{As} \cdot U(s)$$

Differenzierende Systeme

$$y(t) = T \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

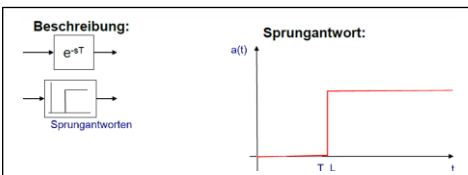
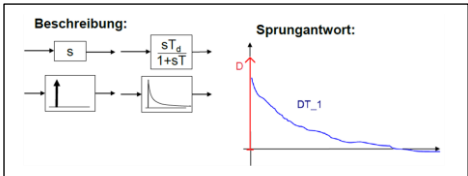
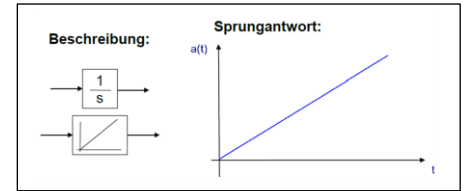
$$\rightarrow Y(s) = sT \cdot U(s) \quad (\text{nicht realisierbar!})$$

$$\rightarrow T \dot{y}(t) + y(t) = T_d \frac{du(t)}{dt}$$

(T = Verzögerungszeit, T_d = Differenzierzeit; bei RC-Glied: $T = T_d$)

Totzeit-/Laufzeitsysteme

$$y(t) = u(t - T_L) \quad \rightarrow Y(s) = U(s) \cdot e^{-sT_L}$$



Anfangswert:

$$a(0) = G(\infty) = \frac{b_n}{a_n} \quad (\text{Herleitung Anfangswertsatz})$$

Endwert:

$$a(\infty) = G(0) = \frac{b_0}{a_0} \quad (\text{wenn kein I-Anteil})$$

Anfangssteigung:

$$r = \text{Nennergrad} - \text{Zählergrad}$$

für $b_n \neq 0$:

$$\dot{a}(t \rightarrow 0_+) = \frac{b_{n-1} - b_n \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}}{a_n} \rightarrow r = 0, \text{ System sprunghfähig, Anfangsw} \neq 0$$

für $b_n = 0$ u. $b_{n-1} \neq 0$:

$$\dot{a}(t \rightarrow 0_+) = \frac{b_{n-1}}{a_n} \rightarrow r = 1, \text{ Anfangswert} = 0, \text{ Steigung} = \frac{b_{n-1}}{a_n}$$

für $b_n = 0$ u. $b_{n-1} = 0$:

$$\dot{a}(t \rightarrow 0_+) = 0 \rightarrow r \geq 2, a(t) \text{ läuft flach aus Nullpunkt}$$

Nenner in Linearfaktordarstellung:

Summe der kleinen Zeitkonstanten $\rightarrow T_\sigma \rightarrow$ Näherung für Reglerentwicklung

Summe aller Zeitkonstanten $\rightarrow T_\Sigma \rightarrow$ Abschätzung Einschwingdauer = $T_\Sigma \cdot (3 \sim 5)$

bleibende Regelabweichung

bei Führungssprüngen: $e_\infty = w_\infty - v_\infty = 1 - G_W(0)$

bei Störsprüngen: $e_\infty = w_\infty - v_\infty = 0 - G_Z(0)$

Einstellung V_R eines P-Reglers für bestimmte Regelabweichung (hier zB < 5%):

$$e_\infty = w_\infty - v_\infty = 1 - G_W(0) < 0,05$$

Totzeit

verlangsamt Wirkungen

Wirkung der Totzeit verschwindet für $t \rightarrow \infty \rightarrow$ kein Einfluss auf bleibende Regelabweichung

3. Frequenzgangfunktionen, Ortskurven, Bode-Diagramme

Basis-System	$G(j\omega)$	Konstruktion d. Frequenzgangs für $\omega \rightarrow 0$	Konstruktion d. Frequenzgangs für $\omega \rightarrow \infty$	Charakteristischer Punkt	Einheits-Sprungantwort	Ortskurve	Bode-Betragsgang	Bode-Phasengang
I	$\frac{1}{j\omega T_I}$	$\frac{1}{j\omega T_I}$ -20 dB/dek -90°		$\omega = 1/T_I$ 0 dB -90°				
PT ₁	$\frac{1}{1+j\omega T}$	$\frac{1}{1+j\omega T}$ 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$\frac{1}{j\omega T}$ -20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T$ -3 dB -45°				
D	$j\omega T_D$	$j\omega T_D$ +20 dB/dek +90°		$\omega = 1/T_D$ 0 dB +90°				
PD	$1+j\omega T_V$	$1+j\omega T_V$ 1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$j\omega T_V$ +20 dB/dek +90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB +45°				
PD nichtminimalphasig	$1-j\omega T_V$	$1-j\omega T_V$ 1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-j\omega T_V$ +20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB -45°				
T _L	$e^{-j\omega T_L}$	Betrag = 1 = konstant Phase = $-\omega T_L$		$\omega = 1/T_L$: $\varphi = -57^\circ$ $\omega = \pi/T_L$: $\varphi = -180^\circ$				
PT ₂	$\frac{1}{1+j\omega \frac{2D}{\omega_0} + \frac{j\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{1}{1+j\omega \frac{2D}{\omega_0} + \frac{j\omega^2}{\omega_0^2}}$ 1 = 0 dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ -40 dB/dek -180° 2. Asymptote	$\omega = \omega_0$ Betrag = $1/2D$ Phase = -90°				

Frequenzgang eines Systems bestimmen:

- $G(j\omega)$ nach Betrag u. Phase aufteilen
- charakteristische Punkte bestimmen

Besonderheiten PT₂:

wenn $D \geq 1$ (also nur reelle Pole) → Aufteilung in 2 x PT₁

wenn $D < 1$:

bei $\omega = \omega_0$ gilt: Betrag = $\frac{1}{2D}$ → aber nicht Maximum!

Resonanzüberhöhung nur bei $D < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Maximalwert bei Resonanzfrequ. $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1-2D^2}$

dort: Resonanzüberhöhung $\ddot{U} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$ (bei $V \neq 1$ ab $V!$)

Achtung!

ω_0

$\omega_E = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$

$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1-2D^2}$

Kennkreisfrequenz

Schwingkreisfrequenz

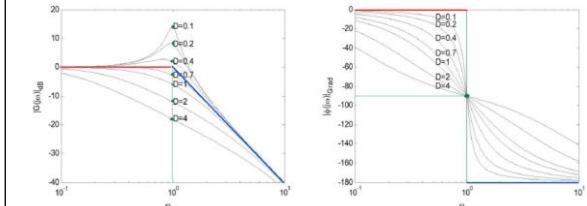
Resonanzkreisfrequenz

→ schwingfähig für $D < 1$

→ rel. Überschwingweite $\ddot{u} > 0$ (sichtbar in Sprungantwort)

→ Resonanzüberhöhung für $D < \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ Resonanzüberhöhung $\ddot{U} > 0$ (sichtbar an Betragsgang)



Konstruktion zusammengesetzter Frequenzgänge

1. Pole und Nullstellen bestimmen um daraus Ordnung zu bestimmen
2. reelle Pole u. Nullstellen → Faktoren 1. Ordnung → auf Form „ $1+j\omega T$ “ bringen
3. konjugiert komplexe Pole u. Nullstellen → Faktoren 2. Ordnung → auf Form „ $1 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2$ “ bringen
4. Knickstellen bestimmen + Konstruktion von Grenzfrequenz zu Grenzfrequenz

Erkennen des Systemtyps:

	PT ₁	PT ₂	PT ₃	mit I-Anteil	D ohne P od. I
Ortskurve:	nur im 4. Quadranten	im 4. + 3. Quadranten	im 4., 3. + 2. Quadranten	kommt aus $-\infty$	Anfangsbetrag 0 Anfangsphase +90°
Bodediagramm:	-20dB/dek, -90°	-40dB/dek, -180°	-60dB/dek, -270°	Anfangssteigung -20dB/dek. Anfangsphase -90°	Anfangssteigung +20dB/dek. Anfangsphase +90°

aus Bodediagramm: 1. einpendeln auf festen dB-Wert: $r = 0$ (sprungfähig) 2. -20dB/dek.: $r = 1$ 3. -40dB/dek. od. mehr: $r \geq 2$

System	Steigung Betragsgang	asympt. Phase	
P	0dB/dek	0°	} minimalphasig
PT ₁	0dB/dek => -20 dB/dek	0° => -90°	
I	-20 dB/dek	-90°	
D	+20 dB/dek	+90°	
PD	0dB/dek => +20 dB/dek	0° => +90°	
PT ₂	0dB/dek => -40 dB/dek	0° => -180°	
Ausnahmen:			} nicht minimalphasig
PD nicht-minimalphasig	0dB/dek => +20 dB/dek	-90°	
Totzeitglied	0dB/dek	$-\omega T_L$	

4. Modellbildung von Regelstrecken

experimentelle Modellbildung

Zusammenfassen kleiner Zeitkonstanten (\sim Faktor 5): T_σ (ggf. inkl. Totzeit)
 Zusammenfassen aller Zeitkonstanten: $T_\Sigma \rightarrow$ **Einschwingdauer** $= T_\Sigma \cdot 3.5 = T_\Sigma \cdot 4$

Alternative: $T_\Sigma = \frac{a_1}{a_0}$

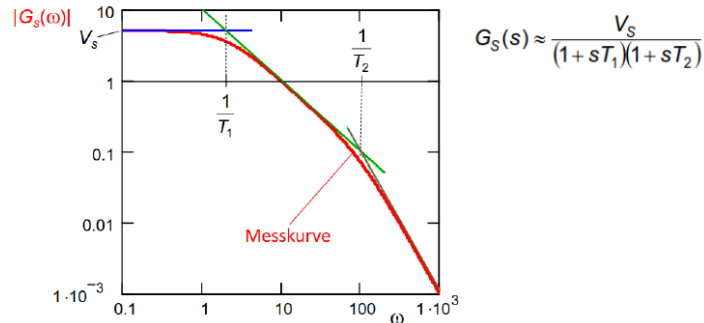
Welche Testsignale eignen sich für eine Identifikation?



Sprung	Vorteil: + sehr einfach zu erzeugen + bei vielen Strecken zulässig	Nachteil: - nur geringe Anregung bei hohen Freq. - nicht im laufenden Betrieb
Impuls	Vorteil: + Anregung bei allen Frequenzen	Nachteil: - benötigte Stellamplitude zu hoch - hohe mechanische Belastung - nicht im laufenden Betrieb
Sinus	Vorteil: + einfach zu erzeugen + bei vielen Strecken zulässig	Nachteil: - Anregung bei nur einer Frequenz pro Mess. viele Messpunkte nötig => lange Dauer! - nicht im laufenden Betrieb
Rauschen	Vorteil: + Anregung bei kleiner Amplitude + Identifikation im laufenden Betrieb + sehr breitbandige Anregung	Nachteil: - Auswertung mathematisch anspruchsvoll (Korrelationsverfahren)

Ermittlung Übertragungsfunktion aus Betragsgang:

Approximation der Frequenzgangpunkte durch Asymptoten



PT_2 -System mit Totzeit

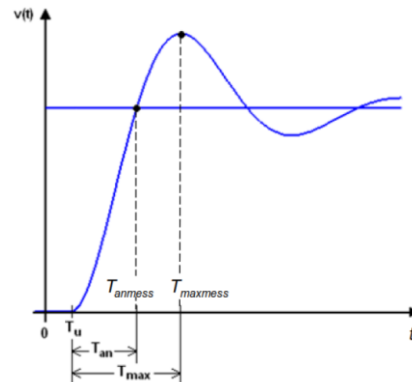
$$G(s) = \frac{V}{1 + \frac{2D}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \cdot e^{-sT_U}$$

1. D aus \ddot{u} ermitteln: $D = \frac{-\ln(\ddot{u})}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\ddot{u}))^2}}$

2. $T_U = \frac{T_{\max\text{mess}} \cdot \arccos(-D) - T_{\text{anmess}} \cdot \pi}{\arccos(-D) - \pi}$

3. $T_{\text{an}} = T_{\text{anmess}} - T_U$

4. $\omega_0 = \frac{\arccos(-D)}{T_{\text{an}} \sqrt{1-D^2}}$



Identifikation aperiodischer PT_n -Strecken (Sprungantworten ohne Überschwinger)

\rightarrow als Reihenschaltung von n PT_1 -Strecken darstellbar, da nur reelle Pole
 (je höher n , desto langsamer anfängliche Systemreaktion)

$$PT_1 T_t \rightarrow \frac{V}{1+sT_G} \cdot e^{-sT_U}$$

$$PT_2 \rightarrow \frac{V}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}$$

$$PT_n \rightarrow \frac{V}{(1+sT)^n} \text{ oder } \frac{V}{(1+sT)^n \cdot (1+sT_n)}$$

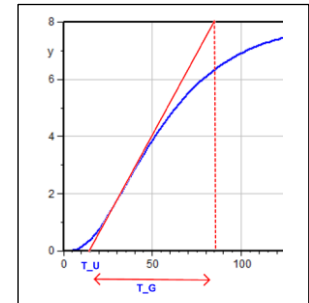
1. Methode: Näherung durch **Wendetangente**

Tangente mit maximaler Steigung in Sprungantwort finden

$T_U \rightarrow 0$ bis SP Tangente mit x-Achse

$T_G \rightarrow T_U$ bis SP Tangente mit Endwert

$\rightarrow PT_1 T_t$ - Näherung



Vorteil: einfach + in allen Fällen möglich

Nachteil: sehr grobe Näherung

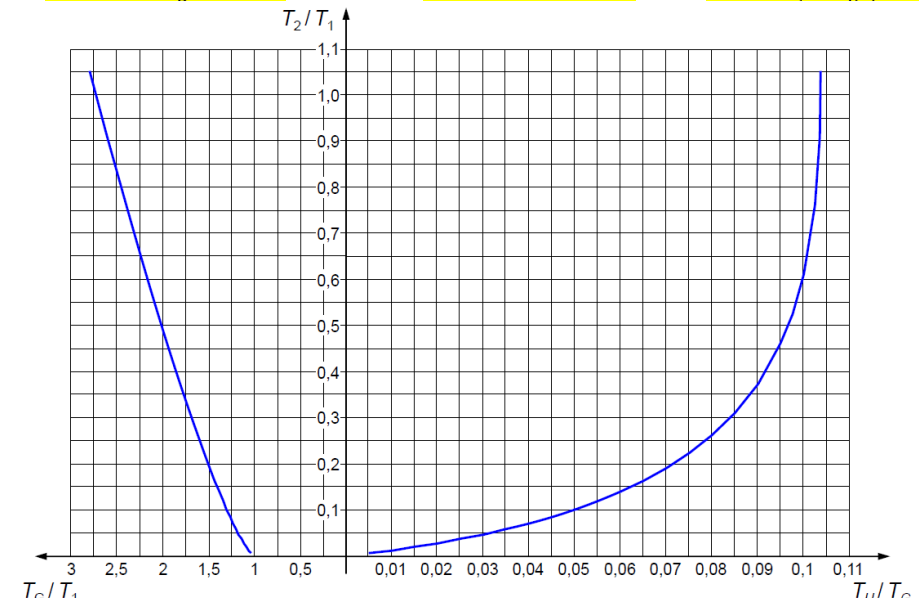
2. Methode: **Semigrafische** Näherung für $\frac{T_U}{T_G} < 0,104$

1. $\frac{T_U}{T_G}$ berechnen u. auf positiver x-Achse eintragen

2. y-Wert ablesen = $\frac{T_2}{T_1}$

3. Wert an neg. x-Achse ablesen = $\frac{T_G}{T_1}$

$$\rightarrow T_1 = \frac{T_G}{\text{Wert neg. x-Achse}} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot y - \text{Wert} \rightarrow G(s) = \frac{V}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}$$



2. Methode: Semigrafische Näherung für $\frac{T_U}{T_G} > 0,104$

1. $\frac{T_U}{T_G}$ berechnen u. auf positiver x-Achse eintragen
2. y-Wert ablesen = n oder n^*

wenn $n = \text{ganzzahlig}$:

3. Wert an neg. x-Achse ablesen = $\frac{T_G}{T}$
 $\rightarrow T = \frac{T_G}{\text{Wert neg. x-Achse}} \rightarrow G(s) = \frac{V}{(1+sT)^n}$

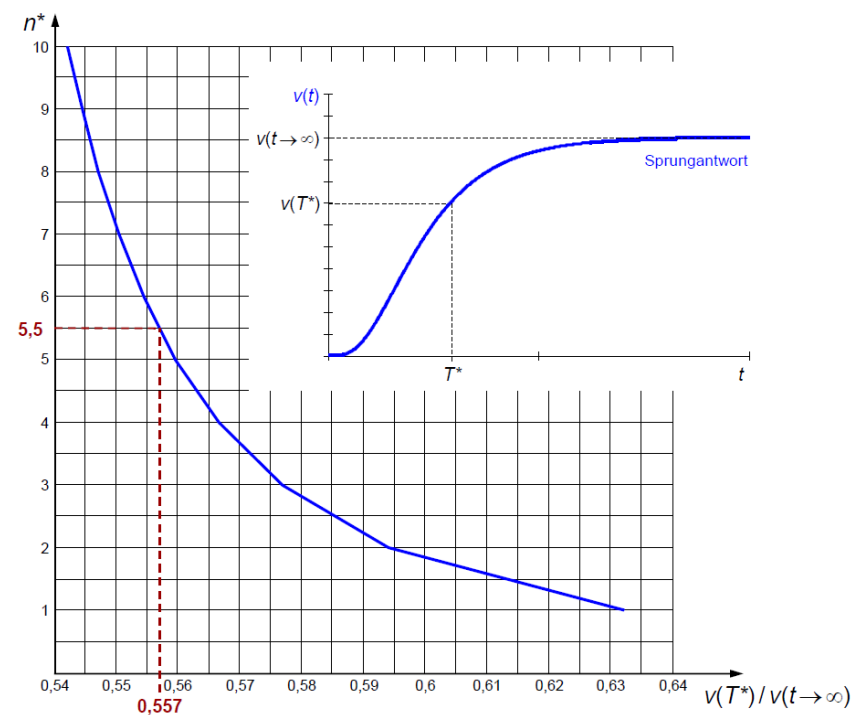
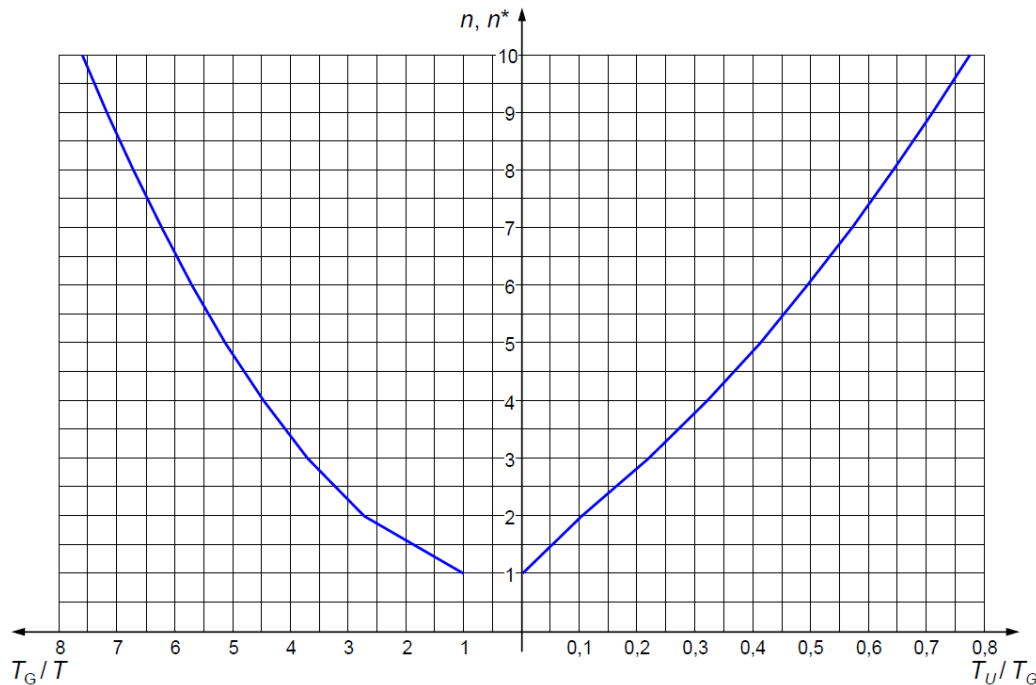
wenn $n \neq \text{ganzzahlig}$:

3a. Aufrunden $\rightarrow G(s) = \frac{V}{(1+sT)^n} \rightarrow \text{sehr ungenau!}$

3b. In Diagramm rechts n^* eintragen u. x-Wert ablesen = $\frac{v(T^*)}{v(t \rightarrow \infty)}$

4b. Aus Sprungantwort T^* ablesen, bei dem „x – Wert · Endwert“ erreicht wird

$\rightarrow T = \frac{T^*}{n^*} \rightarrow T_n = T^* - n \cdot T \text{ (mit } n = n^* \text{ abgerundet!)} \rightarrow G(s) = \frac{V}{(1+sT)^n \cdot (1+sT_n)}$



3. Methode: Zeitprozentkennwert (Methode von Strejc)

Aus Sprungantwort T_3 bei $0,3 \cdot v(t \rightarrow \infty)$ und T_7 bei $0,7 \cdot v(t \rightarrow \infty)$ ablesen

1. Näherung durch PT_1T_t :

$\rightarrow T = \frac{T_7 - T_3}{0,84} \rightarrow T_U = \frac{T_3 - 0,3 \cdot T_7}{0,7}$

$\rightarrow G(s) \approx \frac{V}{1+sT} \cdot e^{-sT_U}$

2. Näherung durch PT_2 :

$\rightarrow T_{1/2} = \frac{T_7}{2,4} \pm \frac{T_3 + T_7}{1,2} \cdot \sqrt{0,45 - \frac{T_3}{T_7}}$

$\rightarrow G(s) \approx \frac{V}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}$

3. Näherung durch PT_2T_t :

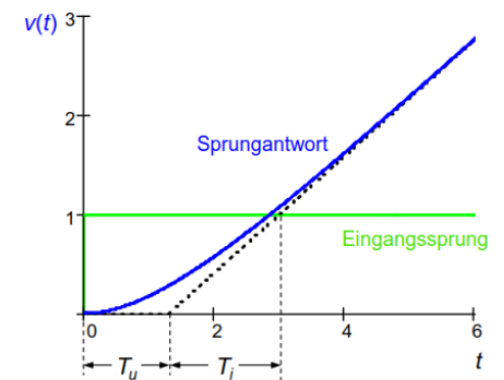
$\rightarrow T = \frac{T_7 - T_3}{1,32} \rightarrow T_U = \frac{T_3 - 0,45 \cdot T_7}{0,55}$

(nur für Zähler $> 0 \triangleq \frac{T_3}{T_7} > 0,45 \rightarrow$ sonst nicht kausal)

$\rightarrow G(s) \approx \frac{V}{(1+sT)^2} \cdot e^{-sT_U}$

Identifikation von IT_n – Strecken

aperiodischer Fall



IT_1 -Näherung: $G_S(s) \approx \frac{1}{sT_I} e^{-sT_U}$

IT_1 -Näherung: $G_S(s) \approx \frac{1}{sT_I(1+sT_U)}$

5. Regler und Regelkreise

	P-Regler ($G_R(s) = V_R$)			I-Regler ($G_R(s) = \frac{V_R}{s}$)
	PT_1-Strecke	PT_2-Strecke	PT_n-Strecke	PT_1-Strecke
Strecken- übertragungs- funktion	$G_S(s) = \frac{V_S}{1+s \cdot T_S}$	$G_S(s) = \frac{V_S}{1+\frac{2D_S}{\omega_{0S}} \cdot s + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot s^2}$	$G_S(s) = \frac{V_S}{1+s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + \dots}$	$G_S(s) = \frac{V_S}{1+s \cdot T_S}$
Führungs/Stör- übertragungs- funktion	$G_W(s) = \frac{\frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}}{1+s \cdot \frac{T_S}{1+V_R \cdot V_S}} = \frac{V_W}{1+s \cdot T_W}$	$G_W(s) = \frac{\frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}}{1+\frac{2D_S}{\omega_{0S}(1+V_S V_R)} \cdot s + \frac{1}{\omega_{0S}^2(1+V_S V_R)} \cdot s^2} = \frac{\frac{V_{RK}}{1+\frac{2D_{RK}}{\omega_{0RK}} \cdot s + \frac{1}{\omega_{0RK}^2} \cdot s^2}}{1+\frac{2D_{RK}}{\omega_{0RK}} \cdot s + \frac{1}{\omega_{0RK}^2} \cdot s^2}$	$G_W(s) = \frac{\frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}}{1+s \cdot \frac{a_1}{1+V_R V_S} + s^2 \cdot \frac{a_2}{1+V_R V_S} + \dots}$	$G_W(s) = \frac{1}{1+s \cdot \frac{1}{V_R V_S} + s^2 \cdot \frac{T_S}{V_R V_S}}$ $G_Z(s) = \frac{s \cdot V_S}{1+s \cdot \frac{1}{V_R V_S} + s^2 \cdot \frac{T_S}{V_R V_S}}$
Koeffizienten	$V_W = \frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}$ → immer < 1 $T_W = \frac{T_S}{1+V_R \cdot V_S}$ → immer < T_S , wenn $V_R \uparrow \rightarrow T_W \downarrow$	$V_{RK} = \frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}$ $\omega_{0RK} = \omega_{0S} \cdot \sqrt{1+V_S V_R}$ $D_{RK} = D_S \cdot \frac{1}{\sqrt{1+V_S V_R}}$ → schwächer gedämpft als unregelte Strecke!		
Stabilität	immer stabil	immer stabil	ab n=3 von V_R abhängig	von V_R abhängig
Endwert $G_W(s)$	$a(t \rightarrow \infty) = G_W(0) = V_W \rightarrow$ immer < 1	$v(t \rightarrow \infty) = G_W(0) = V_{RK} \rightarrow$ immer < 1	$v(t \rightarrow \infty) = G_W(0) = \frac{V_R \cdot V_S}{1+V_R \cdot V_S}$	$a_W(t \rightarrow \infty) = G_W(0) = 1 \rightarrow$ unabh. v. V_R ! $a_Z(t \rightarrow \infty) = G_Z(0) = 0 \rightarrow$ unabh. v. V_R !
Endwert $G_Z(s)$		$v(t \rightarrow \infty) = G_Z(0) = \frac{V_S}{1+V_R \cdot V_S}$	$v(t \rightarrow \infty) = G_Z(0) = \frac{V_S}{1+V_R \cdot V_S}$	
steigendes V_R	<ul style="list-style-type: none"> sinkende Regelabweichung Regelkreis wird schneller 	<ul style="list-style-type: none"> sinkende Regelabweichung sinkende D_{RK} steigende Schwingneigung 		
Fazit	"Der P-Regler braucht eine Regelabweichung $e(t) \neq 0$, um am Ausgang ein Stellsignal $y(t) \neq 0$ auszugeben." (Da $e(t)$ einfach nur mit V_R multipliziert wird)			"Der Integrator integriert so lange, bis sein Eingangssignal $e(t) = w(t) - v(t) = 0$ ist!" → keine bleibende Regelabweichung ($e(t \rightarrow \infty) = 0$) im Führungs- UND Störverhalten (gut)

PI-Regler ($G_R(s) = V_R \left(\frac{1+sT_N}{sT_N} \right)$) (mit T_N = Nachstellzeit)

Sprungantwort:

Frequenzgang:

Bode-Diagramm

Ortskurve

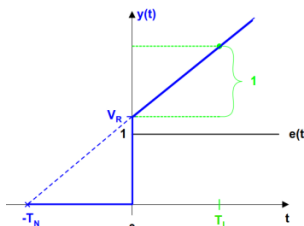
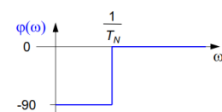
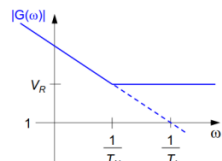


Bild 5-7: Sprungantwort des PI-Reglers

"Nachstellzeit"



bei Stellbegrenzung: **Wind-Up-Effekt** (erforderliches Stellsignal kann nicht aufgebracht werden → I-Anteil integriert Regelabweichung immer weiter auf)
→ höhere Überschwinger, höhere Ausregelzeiten

PD-Regler ($G_R(s) = V_R(1+sT_V)$)

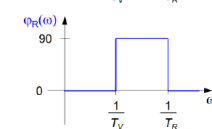
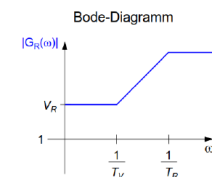
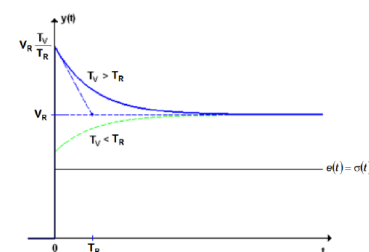
schnelle Reaktion auf Regelabweichung; T_V = Vorhaltezeit → nicht realisierbar, da $r < 0$!

PDT₁-Regler ($G_R(s) = \frac{V_R(1+sT_V)}{(1+sT_R)}$)

$T_R \cong (0,01 \dots 0,2) \cdot T_V \rightarrow$ klein gewählt

Sprungantwort:

Frequenzgang:



Pol-Nullstellen-Kompensation (Ziel: Kompensation eines langsamen Streckenpols)
 zB PD-Regler mit PT2-Strecke: $T_V = T_2 \rightarrow$ günstiges Führungsverhalten (Störverh. ggf Kriechen)

PIDT₁-Regler

\rightarrow schnelle Reaktion + stationäre Genauigkeit

\Rightarrow Parallelstruktur (PID)

$$G_{PID}(s) = V_R^* + \frac{1}{sT_I^*} + sT_D^*$$

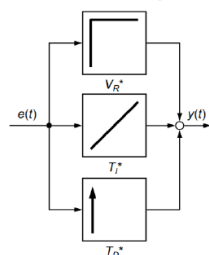


Bild 5-22: PID-Regler in Parallelstruktur

PIDT₁ additive Form

$$G_{RM}(s) = V_R^* \cdot \frac{1 + \frac{1}{sT_I^*} + sT_D^*}{1 + sT_R} = V_R^* \cdot \frac{s^2 T_I^* T_D^* + sT_I^* + 1}{sT_I^* (1 + sT_R)}$$

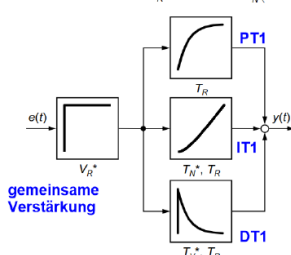
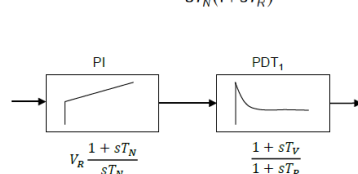


Bild 5-23: PIDT₁-Regler in Parallelstruktur (additive Form)

gemeinsame Verstärkung
 hier auch Kompensation von komplexen Polen möglich

PIDT₁ multiplikative Form

$$G_{RM}(s) = V_R \cdot \frac{(1 + sT_N)(1 + sT_V)}{sT_N(1 + sT_R)} \quad 2 \text{ reelle NS}$$



Sprungantwort (additive Form):

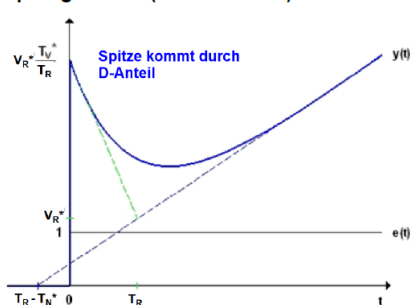


Bild 5-24: Sprungantwort des PIDT₁-Reglers

$$V_R^* = V_R \left(1 + \frac{T_V}{T_N} \right) \quad T_N^* = T_N \left(1 + \frac{T_V}{T_N} \right) \quad T_V^* = \frac{T_V}{1 + \frac{T_V}{T_N}} \quad \rightarrow \text{Umrechnung von additiver in multiplikative Form}$$

Frequenzgang (multiplikative Form):

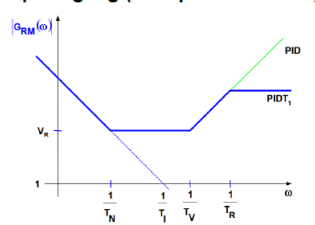


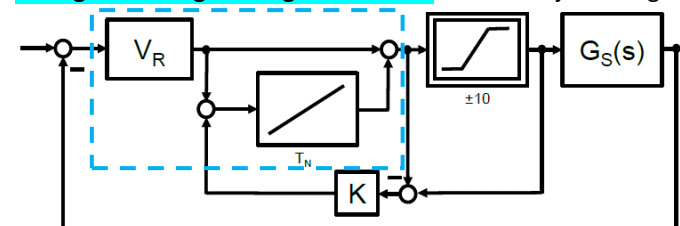
Bild 5-25: Bode-Diagramm (Asymptoten) des PID- und PIDT₁-Reglers

$$T_N = 0,5 \cdot T_N^* \left[1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_V^*}{T_N^*}} \right] \quad T_V = 0,5 \cdot T_N^* \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_V^*}{T_N^*}} \right]$$

\rightarrow Umrechnung von additiver in multiplikative Form

P-Regler:	V_R	<ul style="list-style-type: none"> + einfach in der Implementierung + rasche Reaktion - bleibende Regelabweichung bei PT_n-Strecken ($G_W(s)$ und $G_Z(s)$) - bei größeren Verstärkungen Schwingneigung (bei $n > 1$)
I-Regler:	V_R bzw. TIR	<ul style="list-style-type: none"> + stationär genaue Regelung ($G_W(s)$ und $G_Z(s)$) durch Integration - in den meisten Anwendungen zu langsamer / zu schwach gedämpfter Regelkreis
PI-Regler:	V_R, T_N	<ul style="list-style-type: none"> + rasche Reaktion durch P-Anteil + stationär genaue Regelung ($G_W(s)$ und $G_Z(s)$) durch I-Anteil + DER Standard-Regler überhaupt (!!!) - Für manche Anwendungen zu langsamer / zu schwach gedämpfter Regelkreis
PDT ₁ -Regler:	V_R, T_V, T_R	<ul style="list-style-type: none"> + sehr rasche Reaktion durch D-Anteil \Rightarrow sehr schnelle Regelung + Reduktion der Schwingneigung - bleibende Regelabweichung - in manchen Anwendungen (bei Messrauschen) unruhige Regelung
PIDT ₁ -Regler:	V_R, T_N, T_V, T_R	<ul style="list-style-type: none"> + sehr rasche Reaktion durch P- und D-Anteil \Rightarrow sehr schnelle Regelung + Reduktion der Schwingneigung durch D-Anteil + stationär genau durch I-Anteil - aufwändigster Standard-Regler - in manchen Anwendungen (bei Messrauschen) unruhige Regelung

PI-Regler mit Begrenzungsbeobachter \rightarrow I-Anteil jedes Reglers muss überwacht werden



(K nicht zwingend nötig)

Kompensationsregler \rightarrow Idee: G_W vorgeben und passenden Regler berechnen

$$G_R(s) = \frac{G_{W,soll}(s)}{G_S(s) \cdot (1 - G_{W,soll}(s))} = \frac{Z_W(s) \cdot N_S(s)}{Z_S(s) \cdot (N_W(s) - Z_W(s))} \quad (\text{wenn bleibende Regelabweichung kein I-Anteil mgl.})$$

\rightarrow gesamtes dynamisches Verhalten wird kompensiert,

da $N_S(s)$ und $Z_S(s)$ Pole und Nullstellen der Strecke $G_S(s) = \frac{Z_S(s)}{N_S(s)}$ kompensieren

\rightarrow durch $N_W(s)$ und $Z_W(s)$ wird gewünschtes Führungsverhalten eingestellt

\rightarrow ABER: schlechtes Störverhalten („Kriechen“),

da kompensierte Streckenpole $N_S(s)$ auftreten: $G_Z(s) = \frac{Z_S(s) \cdot (N_W(s) - Z_W(s))}{N_S(s) \cdot N_W(s)}$

\rightarrow Außerdem: nicht bei minimalphasigen Strecken einsetzen,

da $G_{WY}(s)$ instabil: $G_{WY}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{\dots}{1 + \frac{\dots}{Z_S(s)}} = \frac{\dots}{Z_S(s)} \rightarrow$ strebt gegen $-\infty$

\rightarrow **Kompensationsregler nicht für instabile oder minimalphasige Strecken anwenden!**

für $G_{W,soll}(s)$ muss gelten: $n_W - m_W \geq n_S - m_S$ (n = Pole, m = NS, W = G_W , S = Strecke)

6. Stabilitätskriterien

(geschlossener) Regelkreis am Stabilitätsrand

Dauerschwingsbedingung: $G_O(j\omega_x) = G_R(j\omega_x) \cdot G_S(j\omega_x) = -1 \rightarrow 0 \text{ dB}, -180^\circ$

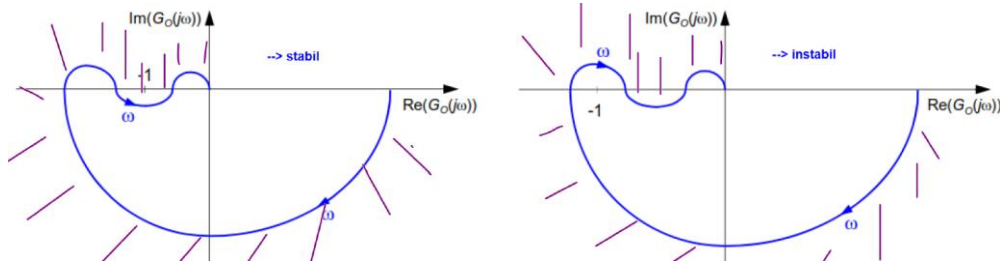
Ortskurve von $G_O(s)$ läuft durch $-1 + j \cdot 0$ (kritischer Punkt) \rightarrow zugehörige Kreisfrequenz: ω_{krit}

Bodediagramm: es gibt ein ω_{krit} , bei dem Betrag = 0 dB und Phase = -180° sind

(geschlossener) Regelkreis stabil

Ortskurve

kritischer Punkt $-1 + j \cdot 0$ liegt auf der linken Seite der Ortskurve von $G_O(s)$ (wenn diese in ω -Laufrichtung durchlaufen wird), wobei der Teil der Ortskurve entscheidend ist, der am nächsten am kritischen Punkt liegt

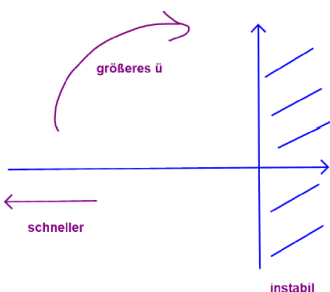


Bode-Diagramm

bei allen Kreisfrequenzen, bei denen $\varphi = -180^\circ$, ist Betrag $< 0 \text{ dB}$ (\triangleq positive a_R)

Wurzelortskurven

Parameter: Reglerverstärkung V_R
aus WOK keine Aussage über bleibende Regelabweichung (stationäres Verhalten)



$\tilde{N}_O(s) + V_R \cdot \tilde{Z}_O(s) = 0$ (Herleitung: $1 + V_R \cdot \tilde{G}_O(s) = 1 + \frac{Z_S(s)}{N_S(s)} \cdot \frac{\tilde{Z}_R(s)}{\tilde{N}_R(s)} \cdot V_R$ mit $\frac{\tilde{Z}_R(s)}{\tilde{N}_R(s)}$ als unverstärkter Regler)
(wenn nicht V_R sondern zB a Parameter ist, muss Gleichung so aufgestellt werden, dass a anstelle von V_R steht)

WOK-Konstruktionsregeln

Regel 1: Startpunkte sind Pole des offenen Kreises

(da bei $V_R = 0 \rightarrow \tilde{N}_O(s) = 0$)

Regel 2: Endpunkte sind NS des offenen Kreises

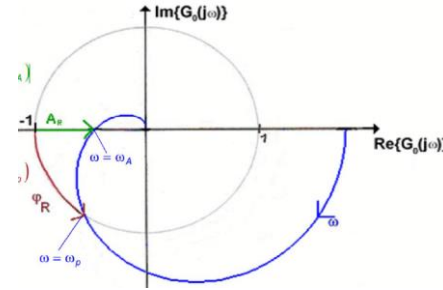
(da bei $V_R \rightarrow \infty \rightarrow \tilde{Z}_O(s) = 0$)

Regel 3: Anzahl Äste gegen Unendlich = $n - m = \text{Pole} - \text{NS}$

Regel 4: falls alle Pole u. NS in linker s-Halbebene (inkl. 0): jeder Ort auf reeller Achse, auf dessen rechter Seite Pole + NS = ungerade, ist Wurzelort

Regel 5: für reale physikalische Systeme (reelle und/oder konjugiert komplexe Pole u. NS) ist WOK symmetrisch zu reeller Achse

Amplituden-/Phasenreserve (wenn positiv: geschlossener Regelkreis stabil)



$$A_R = 1 - |G_O(\omega_A)|$$

(mit ω_A = Kreisfrequenz bei -180°)

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi_O(\omega_p)$$

(mit ω_p = Kreisfrequenz bei Betrag = 1 (\triangleq 0 dB), SP Einheitskreis)

Bode-Diagramm

$$a_R = 0 \text{ dB} - G_O(\omega_A)$$

(mit ω_A = Kreisfrequenz bei -180°) \rightarrow wenn φ nie -180° keine Angabe mgl.

$$\varphi_R = 180^\circ + \varphi_O(\omega_p)$$

(mit ω_p = Kreisfrequenz bei Betrag = 1 (\triangleq 0 dB))

kritische Verstärkung ermitteln

Ortskurve: $V_{krit} = \frac{1}{SP_{reelle\ Achse}}$ (Bode: $V_{krit} = \frac{V_{R,bisher}}{10^{\left(\frac{G_O(\omega_A)}{20 \text{ dB}}\right)}}$) \rightarrow hier wirklich nachdenken!

V_R für bestimmtes φ_R einstellen

(Bode-Diagramm: $V_{R,neu} = 10^{\frac{V_{R,bisher, in \text{ dB}} - |G(\omega_{\varphi_R})|}{20}}$) \rightarrow TIMO, hier wirklich nachdenken!

V_I für bestimmtes φ_R einstellen (I-Regler $G_R(j\omega) = \frac{V_I}{j\omega}$)

ω_x ablesen, an dem gewünschte φ_R erreicht (Verschiebung Phasengang um -90° beachten!)

$-|G_O(\omega_x)| = \frac{V_I}{j\omega_x} \rightarrow$ Nenner normieren \rightarrow Bsp.: $-|G_O(0,1)| = -6 \text{ dB} = 0,5 = \frac{V_I}{j \cdot 0,1} \rightarrow V_I = 0,05$

praktische Richtlinien:

$\varphi_R \approx 90^\circ \rightarrow$ kein Überschwinger

$\varphi_R \approx 60^\circ \rightarrow$ 1 Überschwinger

$\varphi_R \approx 30^\circ \rightarrow$ ein paar Überschwinger, dafür bessere Störunterdrückung

Fortsetzung WOK

Einstellung / Analyse Dynamik: **dominanten Pol/Polpaar** betrachten = Pol(paar) am nächsten an Null

- reeller Einfachpol: nichtschwingend, Einschwingdauer ca. $= 4 \cdot \frac{1}{-s_{\infty}}$
- reeller Doppelpol: nichtschwingend (aperiodischer Grenzfall), Einschwingdauer ca. $= 4 \cdot \frac{1}{-s_{\infty}} \cdot 2$
- conj. komplexes Polpaar mit Realteil: schwingend, $D = \cos\left(\arctan\left(\frac{\text{Im}(s_{\infty})}{\text{Re}(s_{\infty})}\right)\right)$, $\omega_0 = |s_{\infty}|$
- conj. komplexes Polpaar ohne Realteil: Dauerschwingung, Periodendauer $T_e = \frac{2\pi}{\text{Im}(s_{\infty})}$
- positiver Realteil: instabil

wenn gefragt, wie V_R für ein bestimmtes \ddot{u} zu wählen ist:

1. $D = \frac{-\ln(\ddot{u})}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\ddot{u}))^2}}$ (**nur PT2!**)
2. $\varphi = \arccos(D)$
3. Winkel einzeichnen und SP mit WOK ablesen

Wahl von T_N bei PI-Regler

Bsp: $G_S(s) = \frac{1}{(1+s)(1+5s)}$

1. Kompensation der langsamen Zeitkonstante ($T_N = 5$) → **beste Option!**

gutes Führungsverhalten
schlechtes Störverhalten, da Kriechen

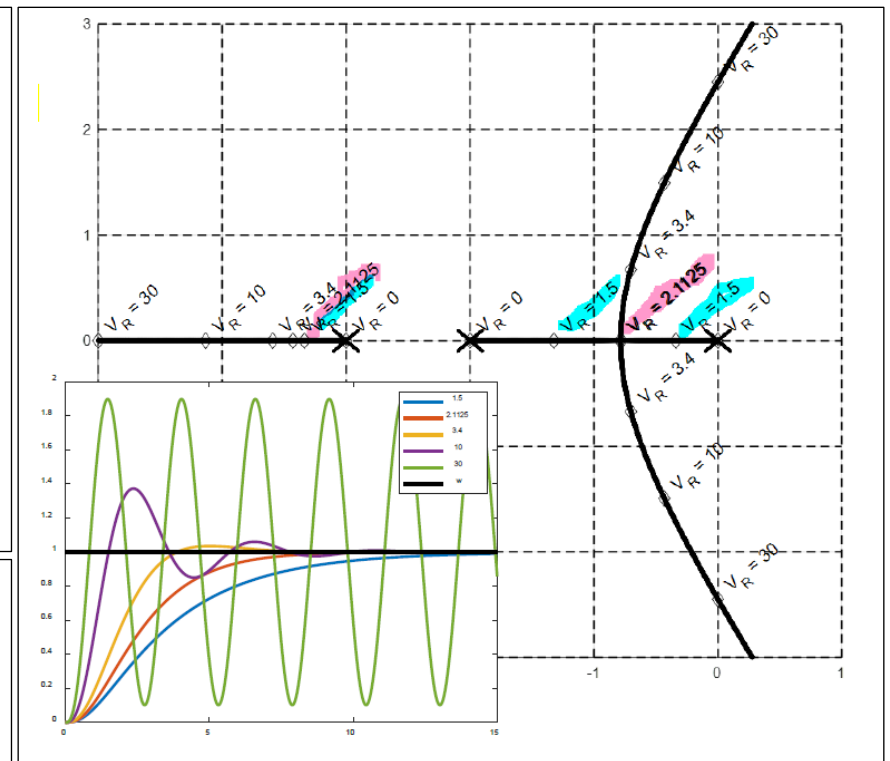
2. Kompensation der schnellen Zeitkonstante ($T_N = 1$)

Führungs- u. Störverhalten noch schlechter als bei 1., da Pole näher an 0 (und somit langsamer)

3. Keine Kompensation ($T_N = 2$)

etwas besser als 2., da V_R etwas größer, da Äste der WOK aufgrund von NS leicht nach links gezogen werden
deutlicher Überschwinger in Führungssprungantwort, da nun PDT_3 (45° für $\ddot{u} = 4\%$ gilt nicht mehr)

→ PT1-Vorfilter im Sollwertkanal dämpft Überschwinger



7. Optimierung von Regelkreisen

Spezifikationen einer guten Regelung

gutes Führungsverhalten: $v(t)$ nicht zu langsam, nicht zu schwach gedämpft
 → Kompensation langsamer Streckenzeitkonstanten durch Reglernullstellen

gutes Störverhalten: $v(t)$ kein Kriechen
 → Vermeidung der Kompensation langsamer Streckenzeitkonstanten
 → höhere Verstärkung

Methode von Chien, Hrones & Reswick

$T_U - T_G$ – Approximation der Streckensprungantwort durch
 Methode „Näherung durch Wendetangente“

Regler	aperiodischer Regelvorgang kürzester Dauer		20% Überschwungung kleinster Schwingungsdauer ($D \approx 0,45$)	
	Führungsverhalten	Störverhalten	Führungsverhalten	Störverhalten
P-Regler	$V_R = \frac{0,3 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,3 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,7 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,7 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$
PI-Regler	$V_R = \frac{0,35 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,6 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,6 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,7 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$
Kompensation:	$T_n = 1,2 \cdot T_G$	$T_n = 4 \cdot T_u$ keine Komp.	$T_n = T_G$	$T_n = 2,3 \cdot T_u$
	$V_R = \frac{0,6 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,95 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{0,95 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$	$V_R = \frac{12 \cdot T_G}{V_s \cdot T_u}$
PID-Regler	$T_n = T_G$	$T_n = 2,4 \cdot T_u$	$T_n = 1,35 \cdot T_G$	$T_n = 2 \cdot T_u$
	$T_v = 0,5 \cdot T_u$	$T_v = 0,42 \cdot T_u$	$T_v = 0,47 \cdot T_u$	$T_v = 0,42 \cdot T_u$

→ für Führungsverhalten kleineres V_R und Kompensation

Vorteile: einfache Anwendung; keine aufwendige Modellbildung; praxiserprobt

Nachteile: bei extremen $T_U - T_G$ – Verhältnissen nicht sinnvoll; keine Regeln für schwingfähige Systeme; Spezifikation wird oft nicht wirklich eingehalten

Einstellwerte nach Ziegler u. Nichols

1. Regelkreis mit P-Regler schließen 2. V_R erhöhen, bis Regelkreis schwingt (Dauerschw.)

3. Kenndaten Regelkreis am Stabilitätsrand entnehmen: $V_{R,krit}$ und $T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}}$

4. Einstellwerte für günstiges Führungsverhalten:

P-Regler	PI-Regler	PID-Regler
$V_R = 0,5 \cdot V_{R-krit}$	$V_R = 0,45 \cdot V_{R-krit}$ $T_n = 0,85 \cdot T_{krit}$	$V_R = 0,6 \cdot V_{R-krit}$ $T_n = 0,5 \cdot T_{krit}$ $T_v = 0,12 \cdot T_{krit}$

Vorteil: einfach

Nachteile: schwach gedämpfte Regelung; erst ab ... T_3 -Strecken; Schwingversuch muss zulässig

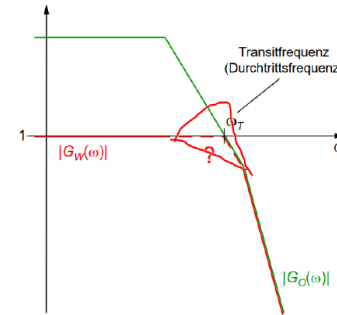
Optimierung im Frequenzbereich

Führungsverhalten

Durchtrittsfrequenz \leftrightarrow Bandbreite Führungsverh.

$$|G_O(\omega)| \ll 1 \rightarrow G_W(j\omega) \approx G_O(j\omega)$$

$$|G_O(\omega)| \gg 1 \rightarrow G_W(j\omega) \approx 1$$



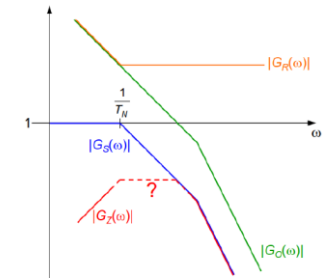
Störverhalten

→ größeres V_R

→ bessere Störunterdrückung

$$|G_O(\omega)| \ll 1 \rightarrow G_Z(j\omega) \approx G_S(j\omega)$$

$$|G_O(\omega)| \gg 1 \rightarrow G_Z(j\omega) \approx \frac{1}{G_R(j\omega)}$$



Betragsoptimum und symmetrisches Optimum

betragsoptimale Dämpfung ($D = \frac{1}{\sqrt{2}}$), damit $|G_W(\omega)|$

1. Regler mit I-Anteil wählen (wg. stationärer Genauigkeit)
2. **Große** Streckenzeitkonstante(n) mit Regler-NS kompensieren (1xT: PI oder 2xT: PIDT1)
3. Kleine Zeitkonstanten v. Strecke u. Regler zu T_σ zusammenfassen
4. V_R so wählen, dass $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erfüllt (45°-Winkel in WOK)

→ Führungssprungantwort immer $\ddot{u} = 4,3\%$ und $T_{an} = 4,7 \cdot T_\sigma$ und $T_{aus} = 8,4 \cdot T_\sigma$

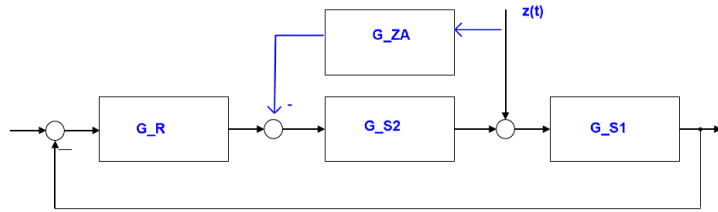
Gegebene Regelstrecke	Opt. verf.	Reglerstruktur und Optimierung				Glättungszeitkonstante im Sollwertkanal T_G
			V_R	T_N bzw. T_I	T_V	
$G_S(s) = \frac{V_s}{1 + sT_\sigma}$ (PT1, keine große Zeitkonstante)	$T_1 < 4T_\sigma$	BO	I	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = T_1$	
$G_S(s) = \frac{V_s}{(1 + sT_1)(1 + sT_\sigma)}$ (PT2, eine große Zeitkonstante)	$T_1 > 4T_\sigma$	BO ¹⁾	PI	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = T_1$	
	$T_1 > 4T_\sigma$	SO ²⁾	PI	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = 4T_\sigma$	$4T_\sigma(1 - e^{-(T_1/4T_\sigma)})$
$G_S(s) = \frac{V_s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_\sigma)}$ (PT3, zwei große Zeitkonstanten)	$T_1 > 4T_\sigma$	BO	P	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$		
	$T_1 > 4T_\sigma$	BO	PID	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = T_1$	T_2
$G_S(s) = \frac{1}{sT_0(1 + sT_1)(1 + sT_\sigma)}$ (IT1, keine große Zeitkonstante)	$T_0 < 4T_\sigma$	BO ¹⁾	PID	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = T_1$	T_2
	$T_0 > 4T_\sigma$	SO ²⁾	PID	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$	$T_N = 4T_\sigma$	$4T_\sigma(1 - e^{-(T_1/4T_\sigma)})$
$G_S(s) = \frac{1}{sT_0(1 + sT_1)(1 + sT_\sigma)}$ (IT2, eine große Zeitkonstante)	$T_0 > 4T_\sigma$	BO	PD	$T_1 / (2T_\sigma V_s)$		T_2
	$T_0 > 4T_\sigma$	BO	P	$T_0 / 2T_\sigma$	$T_N = 4T_\sigma$	$4T_\sigma$
$G_S(s) = \frac{1}{sT_0(1 + sT_1)(1 + sT_\sigma)}$ (IT2, eine große Zeitkonstante)	$T_0 < 4T_\sigma$	SO	PI	$T_0 / 2T_\sigma$	$T_N = 4T_\sigma$	
	$T_0 > 4T_\sigma$	SO	PID	$T_0 / 2T_\sigma$	$T_N = 4T_\sigma$	T_1

Achtung!
Zähler muss 1 sein

BO gutes Führungsverhalten; SO besseres Störverhalten → daher aber PT_1 -Vorfilter notwendig

8. Erweiterung des einfachen Regelkreises: Störgrößenaufschaltung, Vorfilter, Kaskadenregelung

Störgrößenaufschaltung (Ziel: Verbesserung Störunterdrückung)



→ wenn Störung kommt, kann gleich Stellsignal erhöht werden

$$G_Z(s) = \frac{G_{S1}(s)(1 - G_{ZA}(s) \cdot G_{S2}(s))}{1 + G_R(s) \cdot G_{S2}(s) \cdot G_{S1}(s)} \quad (\text{d.h. Voraussetzung ist, dass Störung gemessen werden kann})$$

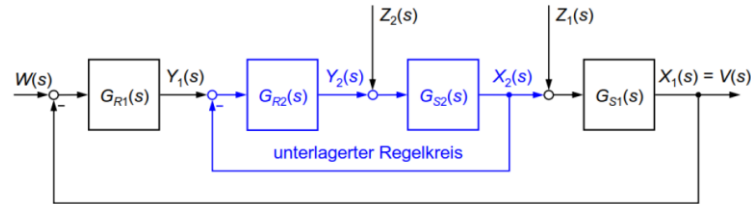
→ für Störunterdrückung muss Zähler = 0 werden

→ ideale Störunterdrückung: $G_{ZA}(s) = \frac{1}{G_{S2}(s)}$ → meist nicht realisierbar

bzw. $G_{ZA}(s) = \frac{1}{G_{S2}(s)} \cdot \frac{1}{1+sT_x}$ (mit $T_x < T_{Strecke}$) (zB $G_{ZA}(s) = \frac{1+0,2s}{4 \cdot (1+0,02s)}$ mit $T_x = 0,02 < T_s = 0,2$)

→ asymptotische Störunterdrückung: $G_{ZA}(s) = \frac{1}{G_{S2}(0)}$ (in diesem Fall ist $G_{ZA}(s)$ ein P-Glied!)

Kaskadenregelung



(nur möglich wenn zusätzliche Messgröße $X_2(s)$ vorliegt/ermittelbar ist)

$$\text{Dimensionierung unterlagerten Regelkreises: } G_{W2} = \frac{X_2}{Y_1} = \frac{G_{R2} \cdot G_{S2}}{1 + G_{R2} \cdot G_{S2}}$$

$$\text{Dimensionierung äußerer Regelkreises: } \text{Strecke} = G_{S1} \cdot G_{W2} \quad (T_{S1} = \text{groß}, T_{W2} = \text{klein})$$

→ Ausgangssignal G_{R1} ist Sollwert des inneren Regelkreises → somit Grenzwerte für X_2 einhaltbar

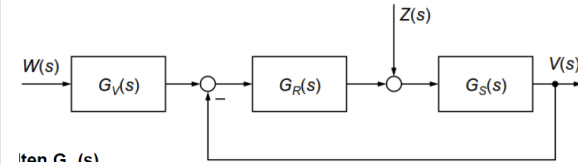
→ **gutes Resultat wenn G_{S2} schneller als G_{S1}** (innerer Kreis liefert kleine Zeitkonstante)

→ Störung Z_2 wird in innerer Schleife unterdrückt und wirkt sich dadurch weniger auf $V(s)$ aus

Führungsgrößenumformung / Vorfilter (Ziel: Verbesserung Führungsverhalten)

wenn Regler auf gutes Störverhalten eingestellt wurde, zB mit SO

1. Möglichkeit: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit Vorfilter



mit $G_V(s)$

Ergänzung Vorfilter außerhalb Regelkreis-Schleife

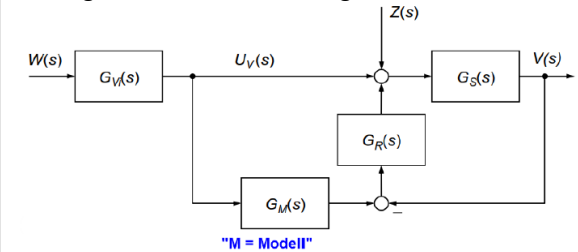
$$\text{Führungsübertragungsfunktion: } G_W = G_V \cdot \frac{G_S \cdot G_R}{1 + G_S \cdot G_R}$$

→ $G_V = G_{W,soll} \cdot \frac{1 + G_S \cdot G_R}{G_S \cdot G_R}$ (G_W so vorgeben, dass G_V realisierbar (genug Pole!))

→ damit $G_Z(s)$ und $G_W(s)$ unabhängig voneinander einstellbar

Nachteil: Bei Änderung von Regler $G_R(s)$, muss auch $G_V(s)$ neu dimensioniert werden

2. Möglichkeit: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit Vorfilter und Streckenmodell



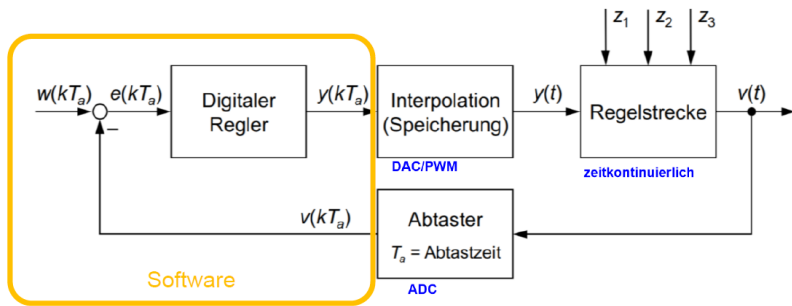
Ergänzung Vorfilter außerhalb Regelkreis-Schleife und Ergänzung Streckenmodell

→ am besten $G_M = G_S$ (kann dann in G_W gekürzt werden)

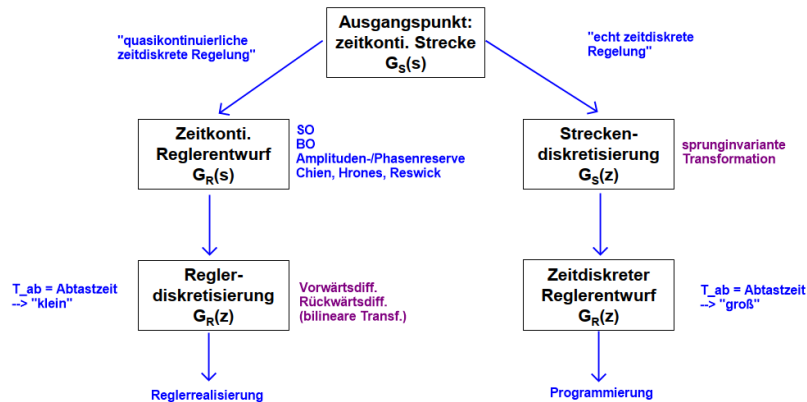
$$\text{Führungsübertragungsfunktion: } G_W = G_{Vi} \cdot \frac{(1 + G_M \cdot G_R) \cdot G_S}{1 + G_S \cdot G_R}$$

→ $G_{Vi} = \frac{G_{W,soll}}{G_S}$ (da $G_M = G_S$) (G_W so vorgeben, dass G_V realisierbar (genug Pole!))

9. Zeitdiskrete Regelung



statt Integratoren $\left(\frac{1}{s}\right)$ nun Verzögerungsglieder $\left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow$ Verzögerung um einen Abtasttakt
stabil wenn alle Pole im Einheitskreis liegen



quasikontinuierliche Regelung für Abtastzeit $T_a \leq \frac{0,1}{r}$
(mit r = Radius Kreis in s -Ebene um Nullpunkt, der **alle Pole und NS von G_R und G_S** (nicht G_W !) einschließt; alternativ rechnerisch: maximaler Betrag aller Pole und NS)
 \rightarrow da in Praxis häufige Verletzung der Faustformel Stabilitäts-/Dynamik-Kontrolle erforderlich

Bilineare Transformation (Standard für Digitalfilter-Entwurf; in Praxis keine Vorteile)

$$s \approx \frac{2 \cdot (z-1)}{T_a \cdot (z+1)}$$

Sprunginvariante Transformation (aufwendige Rechnung, dafür „echt“ zeitdiskreter Entwurf)

Vorgehen: $A(s) \rightarrow a(t) \rightarrow (t = kT_a) \rightarrow A(z) \rightarrow G(z)$ mit $G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot A(z)$

(bei $\sigma(t)$ nur $t = k!!$)

Diskretisierungsmethoden

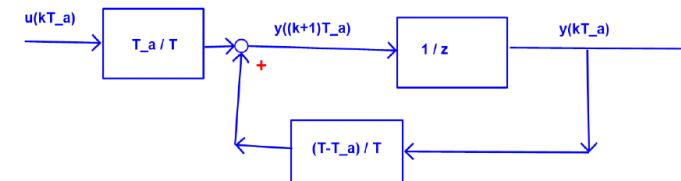
Vorwärtsdifferenz (einfach und in Praxis beliebt)

Bsp. PT1: $G(s) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow \dot{y}(t) = \frac{1}{T} \cdot (-y(t) + u(t))$

Näherung: $\frac{y((k+1) \cdot T_a) - y(kT_a)}{T_a} = \frac{1}{T} \cdot (-y(kT_a)) + \frac{1}{T} \cdot u(kT_a)$

$$\begin{aligned} \rightarrow y((k+1) \cdot T_a) &= y(kT_a) \cdot \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) + \frac{T_a}{T} \cdot u(kT_a) \\ \text{„neu“} &= \text{„alt“} + \text{„alt“} \end{aligned}$$

$\rightarrow z$ -Übertragungsfunktion: $G(z) = \frac{\frac{T_a}{T} \cdot \frac{1}{z}}{1 - \frac{T_a}{T} \cdot \frac{1}{z}} = \frac{\frac{T_a}{T}}{z - \frac{T_a}{T}}$ (alt.: $s = \frac{z-1}{T_a}$)

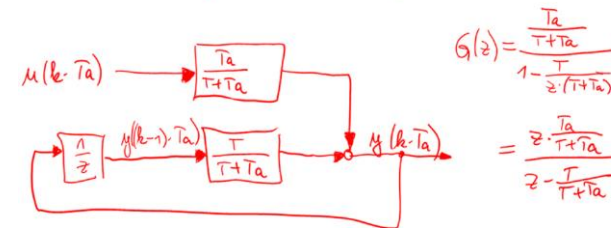


Rückwärtsdifferenz (unempfindlicher gegen größere T_a)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{T} \cdot (u(t) - y(t)) \\ y(k \cdot T_a) - y((k-1) \cdot T_a) &= \frac{1}{T} \cdot u(k \cdot T_a) - \frac{1}{T} \cdot y(k \cdot T_a) \end{aligned}$$

\rightarrow implizite Gleichung!

$$\begin{aligned} y(k \cdot T_a) - y((k-1) \cdot T_a) &= \frac{T_a}{T} \cdot u(k \cdot T_a) - \frac{T_a}{T} \cdot y(k \cdot T_a) \\ y(k \cdot T_a) \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) &= \frac{T_a}{T} \cdot u(k \cdot T_a) + \frac{T_a}{T} \cdot y((k-1) \cdot T_a) \\ y(k \cdot T_a) &= \frac{T_a}{T+T_a} \cdot u(k \cdot T_a) + \frac{T}{T+T_a} \cdot y((k-1) \cdot T_a) \end{aligned}$$



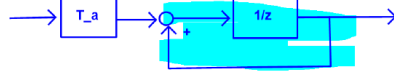
Aus $G(s)$ folgt $G(z)$ mit Ersetzen: $s = \frac{1-z^{-1}}{T_a}$

Integrator im Kontinuierlichen und Diskreten

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Vorwärtsdifferenz:

$$T_a / (z-1)$$

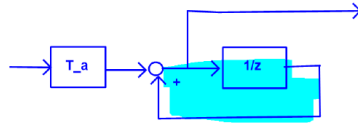


Merkmal eines integrierenden Systems im Zeitdiskreten:

- immer Rückführung mit Faktor +1

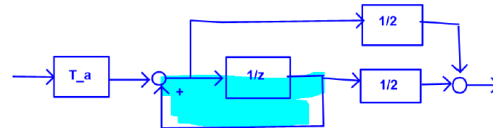
Rückwärtsdifferenz:

$$(z \cdot T_a) / (z-1)$$



Bilineare Transformation:

$$\frac{(z+1) \cdot T_a}{(z-1) \cdot 2}$$



Merkmal eines Systems mit I-Anteil:

- im Zeitkontinuierlichen: Pol bei $s = 0$

- im Zeitdiskreten: Pol bei $z = 1$ und damit Summe der Nenner-Koeffizienten = 0

Differenzierer im Kontinuierlichen und Diskreten

$$G(s) = s$$

--> nicht realisierbar

Vorwärtsdifferenz:

$$G(z) = (z-1) / T_a$$

--> nicht kausal --> nicht realisierbar!

Rückwärtsdifferenz:

$$G(z) = (z-1) / z \cdot T_a$$

--> realisierbar, da Zählergrad = Nennergrad

in der Praxis trotzdem DT1, um Rauschen zu unterdrücken

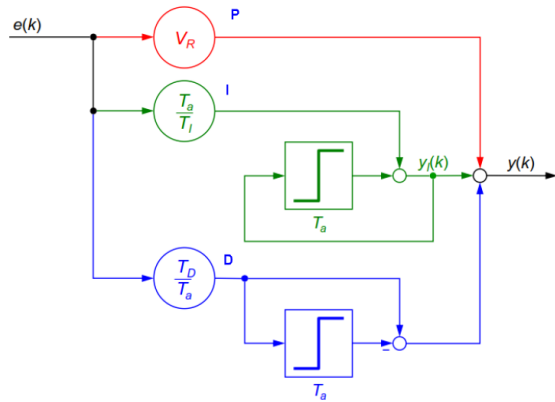
Bilineare Transformation:

$$\frac{(z-1) \cdot 2}{(z+1) \cdot T_a}$$

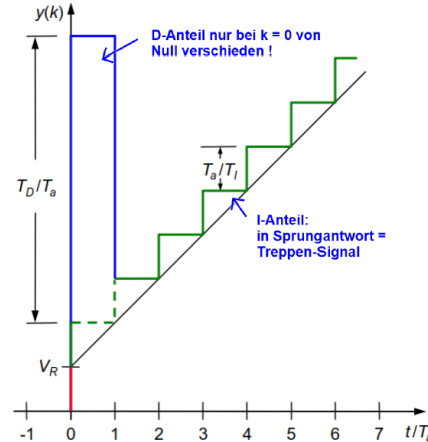
--> realisierbar, aber IdR nicht verwendet

Der PID-Regler im Zeitdiskreten → realisierbar mit Rückwärtsdifferenz

Strukturbild:



Sprungantwort:

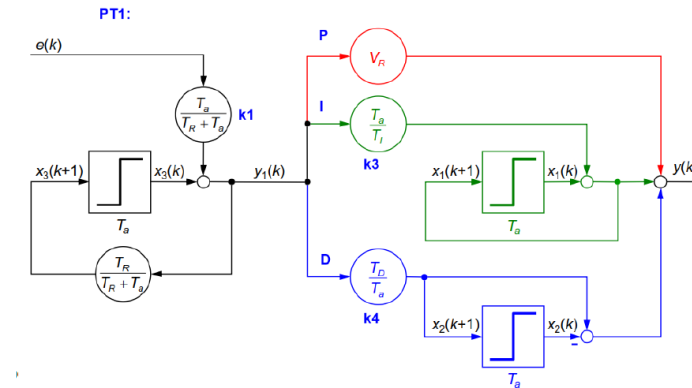


Der zeitdiskrete PIDT1-Regler als Programm



$$G_R(s) = V_R \cdot \frac{1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V}{1 + sT_R} = \frac{1}{1 + sT_R} \cdot V_R \left(1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right) = \frac{1}{1 + sT_R} \cdot \left(V_R + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

PT₁-Teil PID-Teil



```
// Initialisierung von Variablen und Parametern
void init(void){
    Ta = ...;
    TR = ...;
    TI = ...;
    TD = ...;
    VR = ...;

```

```
k1 = Ta/(TR+Ta);
k2 = ...; k3=...; k4 = ...;

```

```
x1k = 0;
x2k = 0;
x3k = 0;
}

```

```
void TimerInterrupt(void) {

```

```
// Einlesen der Regelabweichung
ek = Read_Ek();

```

```
// Bestimme Ausgangssignal
y1k = k1 * ek + x3k;
yk = (VR + k3 + k4) * y1k + x1k - x2k;
StellsignalAusgabe(yk);

```

```
// Aktualisieren der Reglerzustände
x1neu = x1k + k3 * y1k;
x2neu = k4 * y1k;
x3neu = y1k * k2;

```

```
// Umspeichern
x1k = x1neu;
x2k = x2neu;
x3k = x3neu;
}

```

Ergänzung zu 3.	Betragsgang	Sprungantwort
IT_1		
IT_2		
DT_1 $\frac{s}{s+1}$		
DT_2		
PT_2 $\left(\frac{1}{0,1s^2 + 0,07s + 1}\right)$		
PT_2 $\left(\frac{1}{(0,4s + 1)(0,25s + 1)}\right)$		
PI		

