Regelungstechnik

für BEI4, BMEI4 und IBT

Prof. Dr. B. Wagner

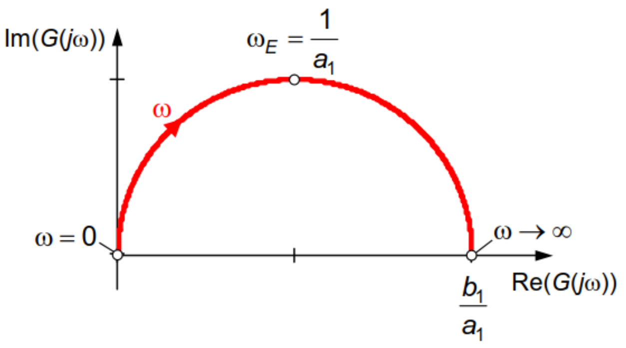
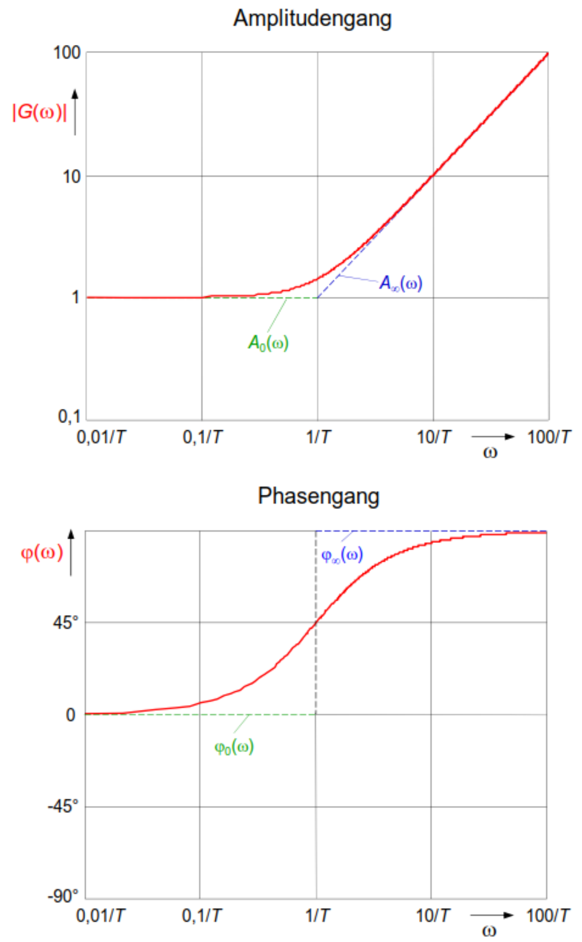


Bild 2-16: Ortskurve des DT_1-Glieds.



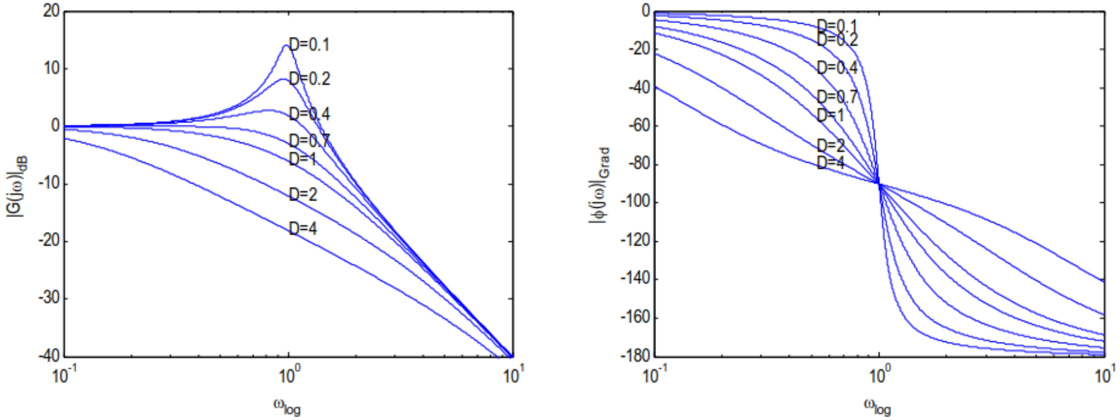


Bild 3-11: Bode-Diagramm des PT_2-Glieds bei unterschiedlichen Dämpfungen

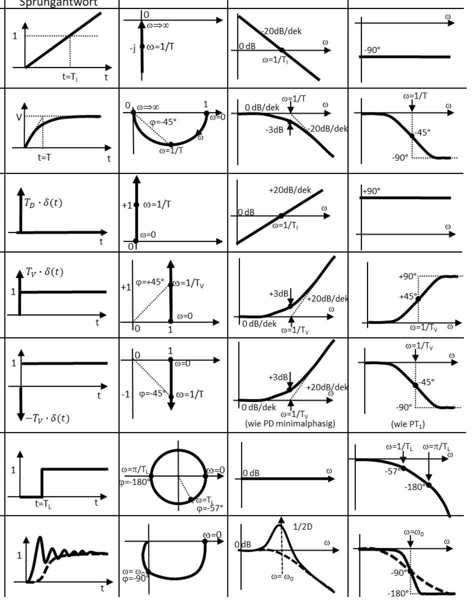
Kap. 3 Frequenzgangfunktionen, (Nyquist-)Ortskurven und Bode-Diagramme
Teil b: Konstruktion zusammengesetzter Frequenzgänge

Wiederholung: Bode-Diagramme von PT_1-, PT_2-, I, D, PD- und T_t-Systemen

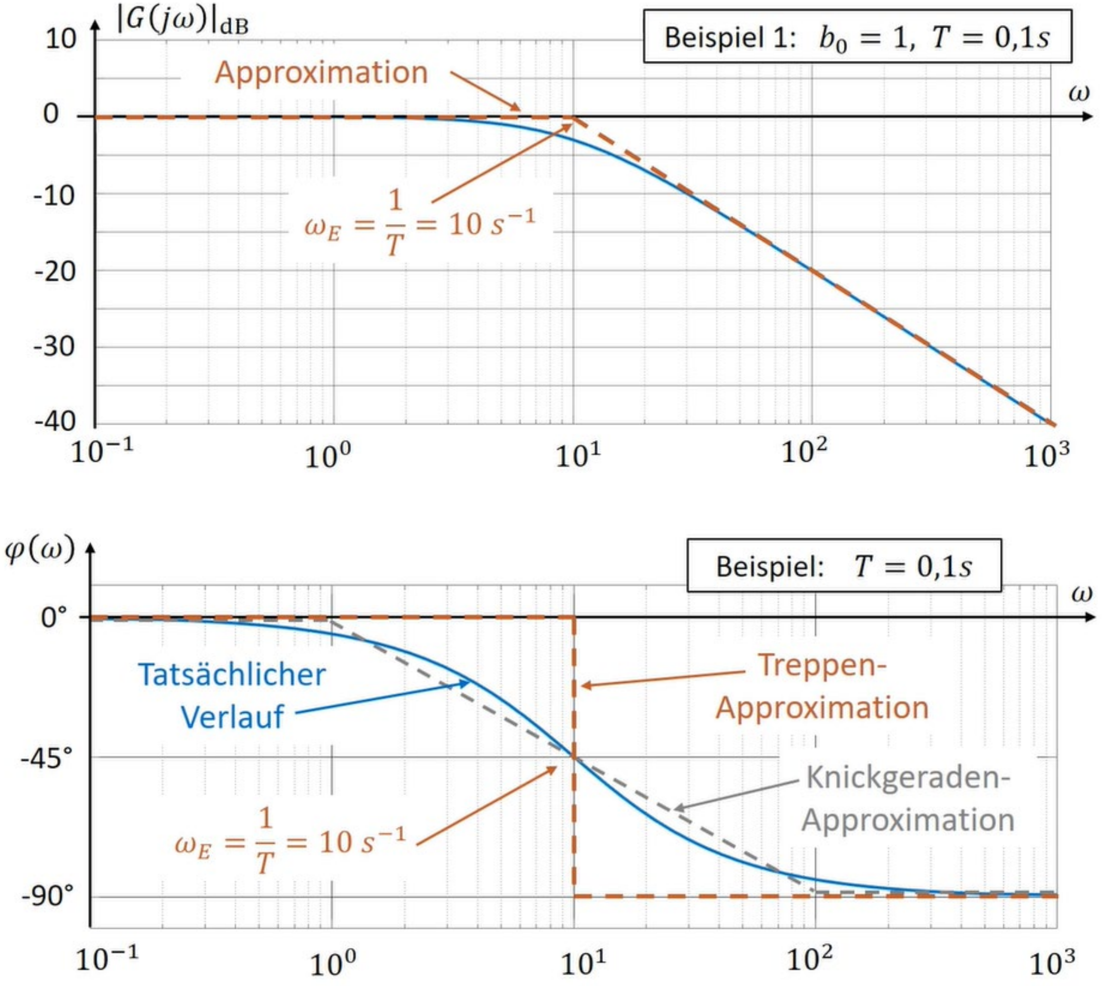
Bisher:

⇒ Bode-Diagramme von Grundsystemen.
⇒ Geraden für I- und D-Systeme
⇒ Asymptoten für kleine + große ω bei PT1, PT2 und PD
⇒ Gerade und Exponentialfunktion für Laufzeit-Systeme
⇒ Bei Verstärkung $V \neq 1$: Verschiebung auf der Betragsachse
⇒ Übersicht der Grundsysteme

Basis-System	G(jω)	Konstruktion d. Frequenzgangs für ω⇒0	für ω⇒∞	Charakteristischer Punkt	Einheits-Sprungantwort	Ortskurve	Bode-Betragsgang	Bode-Phasengang
I	$\frac{1}{j\omega T_I}$	$^1/_{j\omega T_I}$ -20 dB/dek -90°		$\omega = 1/T_I$ 0 dB -90°				
PT_1	$\frac{1}{1+j\omega T}$	1 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$^1/_{j\omega T}$ -20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T$ -3 dB -45°				
D	$j\omega T_D$	$j\omega T_D$ +20 dB/dek +90°		$\omega = 1/T_D$ 0 dB +90°				
PD	$1+j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$j\omega T_V$ +20 dB/dek +90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB +45°				
PD nichtminimalphasig	$1-j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-j\omega T_V$ +20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB -45°				
T_L	$e^{-j\omega T_L}$	Betrag = 1 = konstant Phase = $-\omega T_L$		$\omega = {}^1/_{T_L}$: $\varphi = -57°$ $\omega = {}^\pi/_{T_L}$: $\varphi = -180°$				
PT_2	$\frac{1}{1+j\omega\frac{2D}{\omega_0}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_0{}^2}}$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-{}^{\omega_0^2}/_{\omega^2}$ -40 dB/dek 180° 2. Asymptote	$\omega = \omega_0$ Betrag=$^1/_{2D}$ Phase=-90°				



$$G(s) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 0{,}1}$$

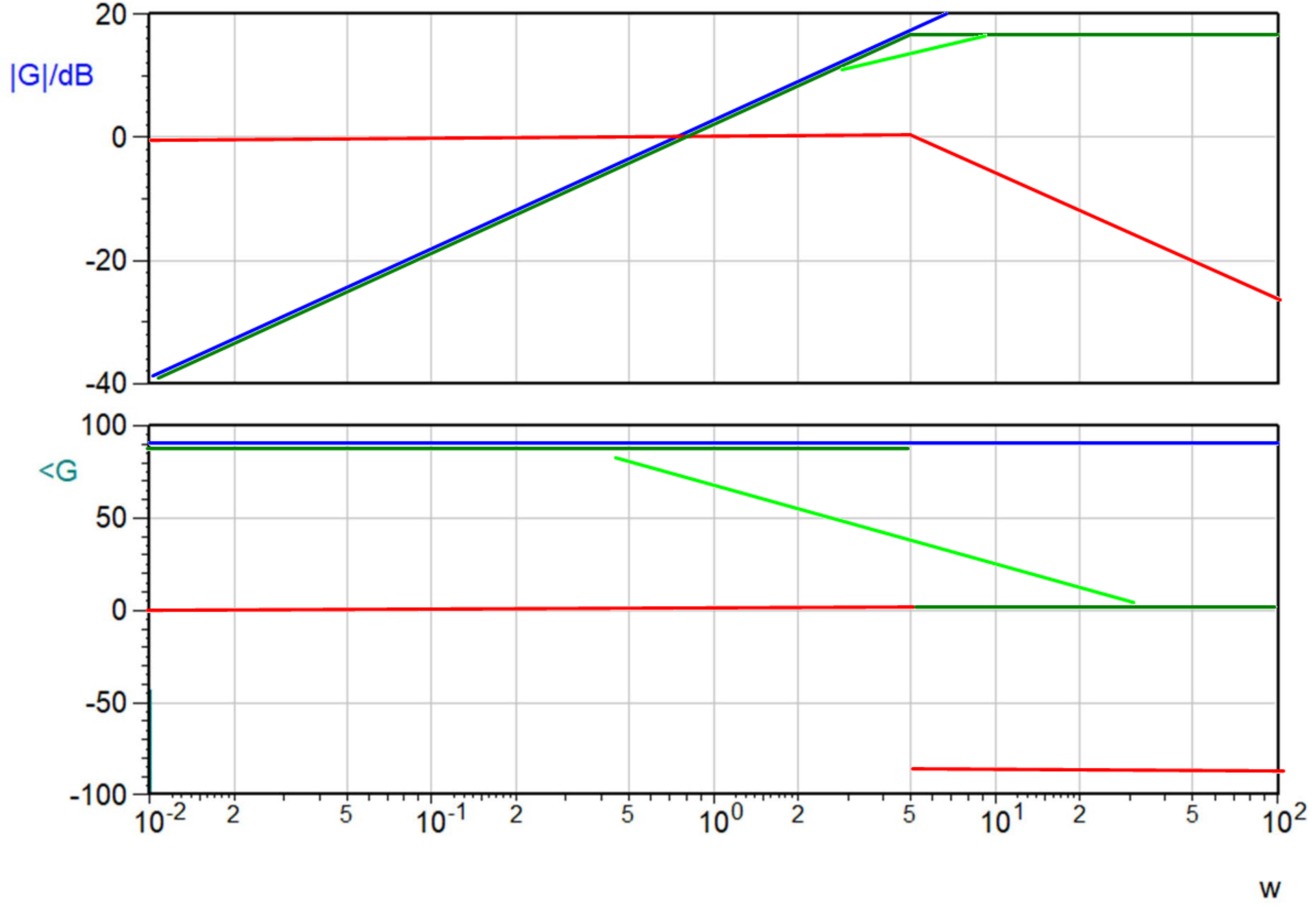


Nun:

⇒ Konstruktion beliebiger Frequenzgangfunktionen

Konstruktion eines zusammengesetzten Frequenzgangs: Beispiel 1: DT_1-System $G(j\omega) = \frac{j\omega 1{,}25}{1+j\omega 0{,}2}$ durch Überlagerung

$$G(j\omega) = \underline{\frac{j\omega 1{,}25}{1+j\omega 0{,}2}} = \underline{j\omega 1{,}25 \cdot \frac{1}{1+j\omega 0{,}2}} = j\omega T_D \cdot \frac{1}{1+j\omega T_1}$$



Konstruktion eines zusammengesetzten Frequenzgangs: Beispiel 2: PT_3-System

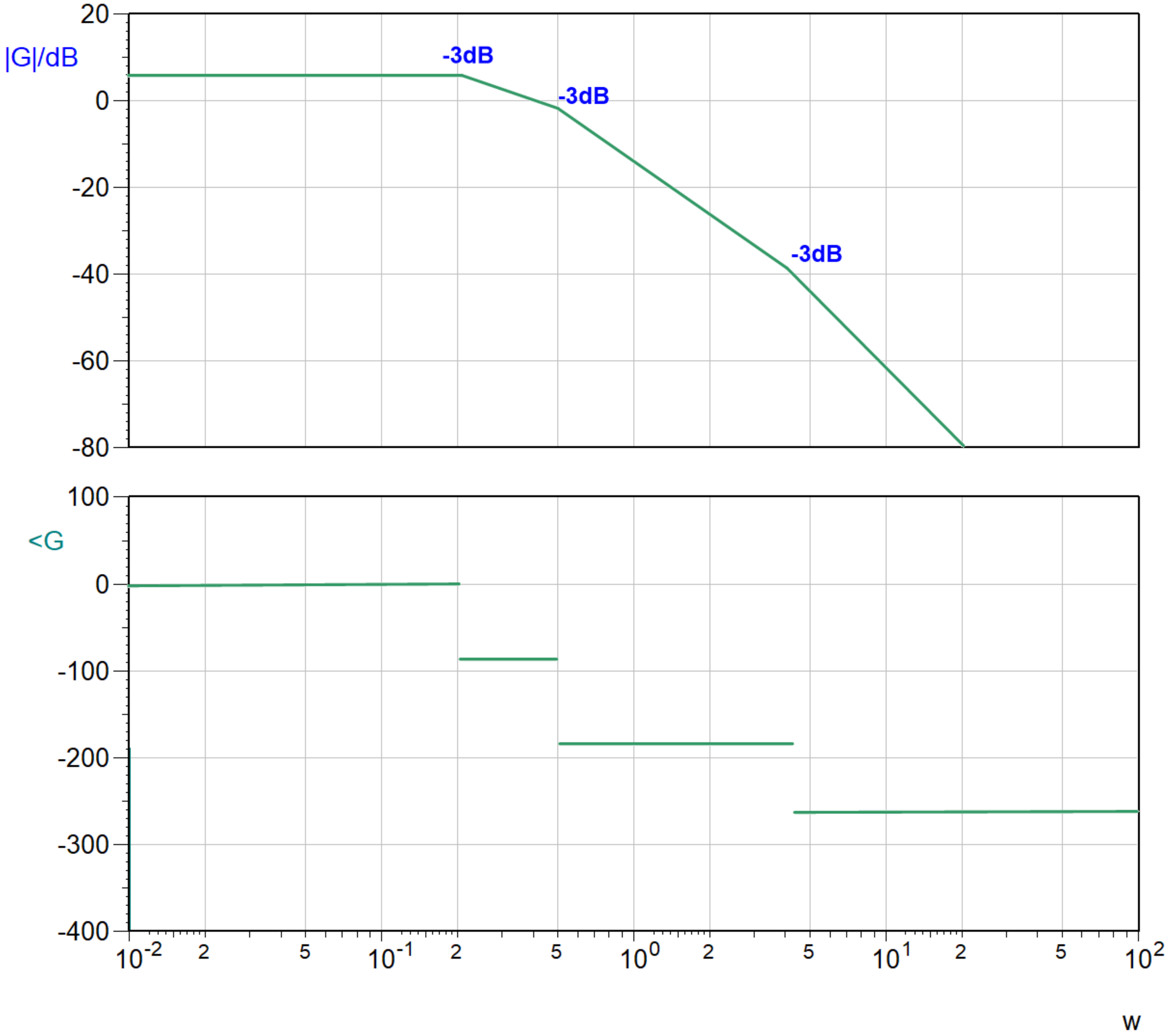
$$G(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{1 + j\omega 5} \cdot \frac{1}{1 + j\omega 2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega 0{,}25}$$

w_g = 0,2

w_g = 0,5

w_g = 4,0

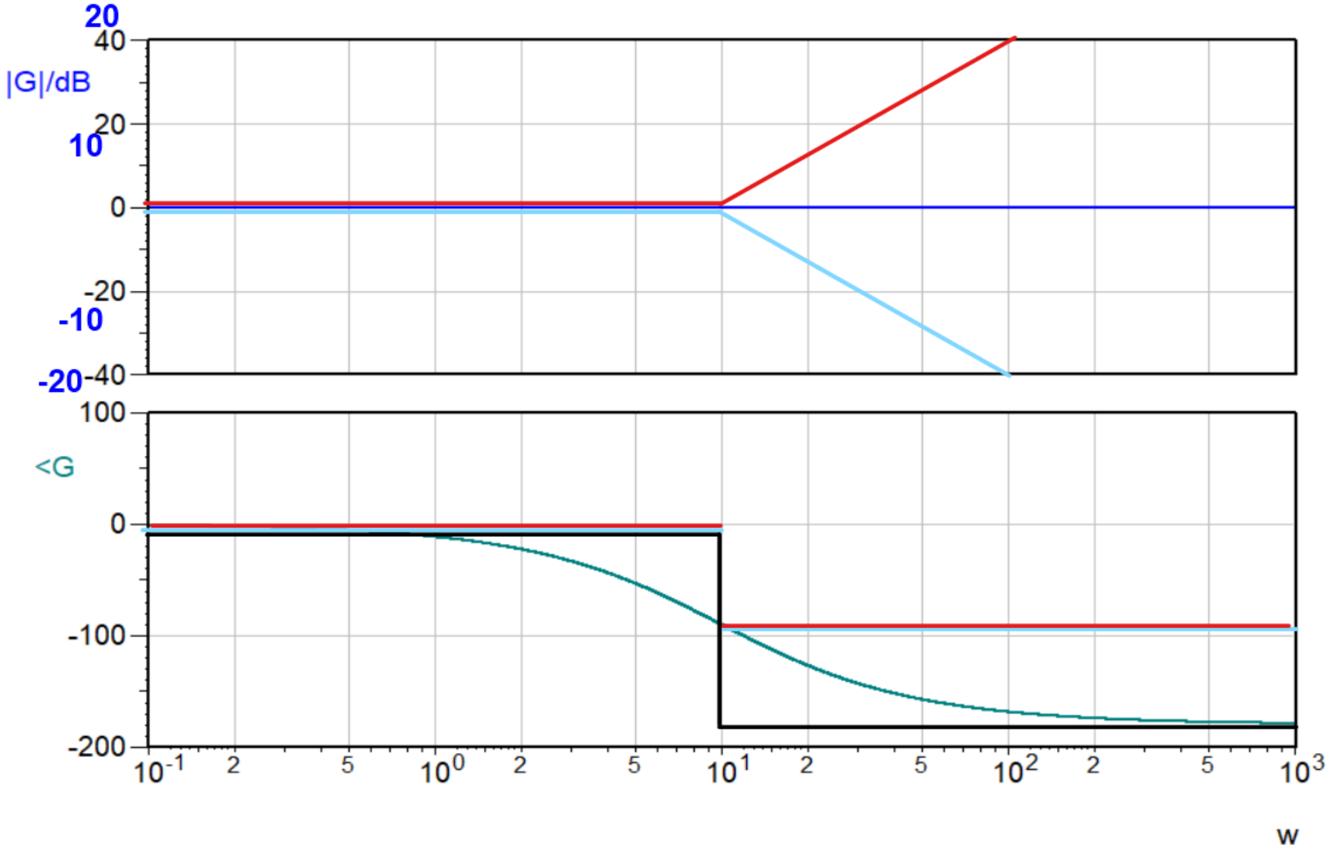
Konstruktion von Grenzfrequenz zu Grenzfrequenz



Konstruktion eines zusammengesetzten Frequenzgangs: Beispiel 3: Allpass 1. Ordnung $G_A(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega 0{,}1}{1+j\omega 0{,}1}$

$$G_A(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega 0{,}1}{1+j\omega 0{,}1} = (1-j\omega 0{,}1) \cdot \frac{1}{1+j\omega 0{,}1}$$

Basis-System	G(jω)	Konstruktion d.Frequenzgangs für ω⇒0	für ω⇒∞	Charakteris-tischer Punkt	Einheits-Sprungantwort	Ortskurve	Bode-Betragsgang	Bode-Phasengang
I	$\frac{1}{j\omega T_I}$	$^1/_{j\omega T_I}$ -20 dB/dek -90°		$\omega = 1/T_I$ 0 dB -90°				
PT_1	$\frac{1}{1+j\omega T}$	1 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$^1/_{j\omega T}$ -20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T$ -3 dB -45°				
D	$j\omega T_D$	$j\omega T_D$ +20 dB/dek +90°		$\omega = 1/T_D$ 0 dB +90°				
PD	$1+j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$j\omega T_V$ +20 dB/dek +90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB +45°				
PD nichtminimalphasig	$1-j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-j\omega T_V$ +20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB -45°				
T_L	$e^{-j\omega T_L}$	Betrag = 1 = konstant Phase = $-\omega T_L$		$\omega = {}^1/_{T_L}$: $\varphi = -57°$ $\omega = {}^\pi/_{T_L}$: $\varphi = -180°$				
PT_2	$\frac{1}{1+j\omega\frac{2D}{\omega_0}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-\omega_0^2/_{\omega^2}$ -40 dB/dek 180° 2. Asymptote	$\omega = \omega_0$ Betrag=$^1/_{2D}$ Phase=-90°				



Vorbereiten einer Frequenzgangfunktion für die Konstruktion eines Bode-Diagramms

$$G(j\omega) = \frac{2(j\omega)^3 + 10(j\omega)^2 + 12(j\omega)}{3(j\omega)^2 + 1{,}5(j\omega) + 3}$$

1. Schritt: Pole und Nullstellen ermitteln

   Pole: **-0,25 + 0,97 j** **-0,25 - 0,97 j** **--> PT2-Nenner mit D < 1** **--> PT2-Anteil konstruieren**

   Nullstellen: **-2** **-3** **0** **--> Nullstelle bei 0 -> D-Anteil** **--> 2 reelle Nullstellen --> 2 x PD-Anteil (auch PT1 möglich)**

2. Schritt: alle reellen Pole und Nullstellen => Faktoren erster Ordnung durch Ausklammern auf die Form „$1 + j\omega T_x$" bringen:

   Nullstellen: 12s * (0,5s + 1) * (0,33s + 1)

3. Schritt: Faktoren zweiter Ordnung (nur die mit konjugiert komplexen Nullstellen!) auf die Form „$(j\omega/\omega_0)^2 + j\omega 2D/\omega_0 + 1$" bringen D und ω_0 ermitteln

   3 * (s^2 + 0,5s+1) --> w_0 = 1 --> D = 0,25

Somit erhält man folgende umgeformte Frequenzgangfunktion:

w_g = 2 w_g = 3

$$G(j\omega) = \frac{12}{3} \cdot j\omega \cdot \frac{\left(1 + j\omega\frac{1}{2}\right)\left(1 + j\omega\frac{1}{3}\right)}{(j\omega)^2 + 0{,}5(j\omega) + 1}$$

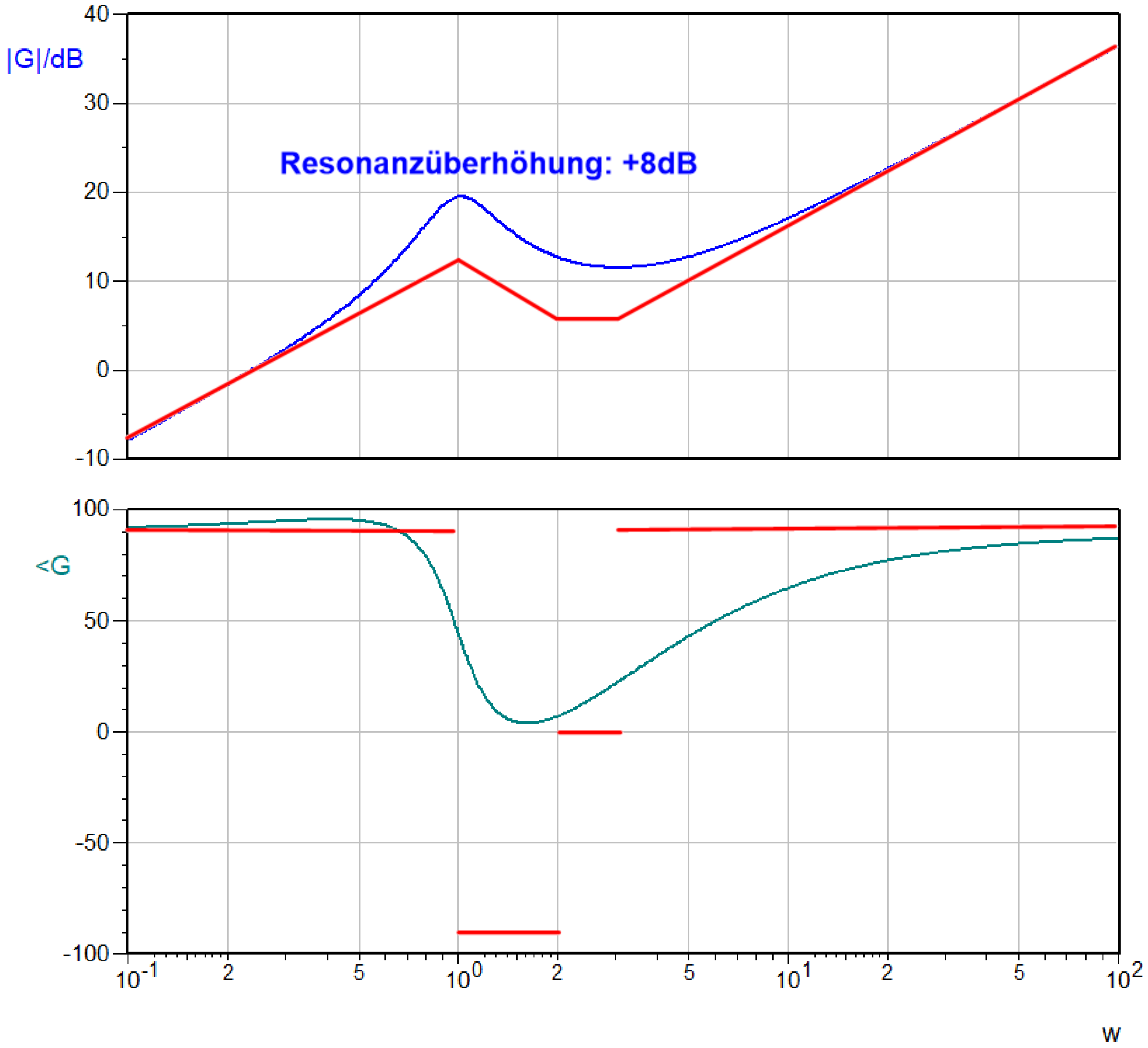
w_g = 1

Bis 1. Knick: 4jw -> D-Verhalten (+20dB/dek., +90°)

Nach 1. Knick PT2-Verhalten --> -40dB/dek. --> insgesamt -20dB/dek.
--> -180° --> insgesamt -90°

Nach 2. Knick PD-Verhalten --> +20dB/dek. --> insgesamt 0dB
--> +90° --> insgesamt 0°

Nach 3. Knick PD-Verhalten --> +20dB/dek. --> insgesamt +20dB
--> +90° --> insgesamt +90°



Konstruktion eines zusammengesetzten Frequenzgangs

Beispiel 4: $G(j\omega) = \frac{4(1+j\omega 2)}{j\omega(1+j\omega 0{,}1+(j\omega)^2\,0{,}0625)}$

Bereiten Sie $G(j\omega)$ aufs Zeichnen des Bode-Diagramms vor

$\Rightarrow$ bei welchen Kreisfrequenzen gibt es welche Knicke?

w_g1 = 0,5
w_g2 = 4
w_g3 = 4

wenn Pole nicht komplex --> Auftrennung in zwei PT1-Glieder statt PT2!!

$\Rightarrow$ wie ist das Verhalten links des 1. Knicks?

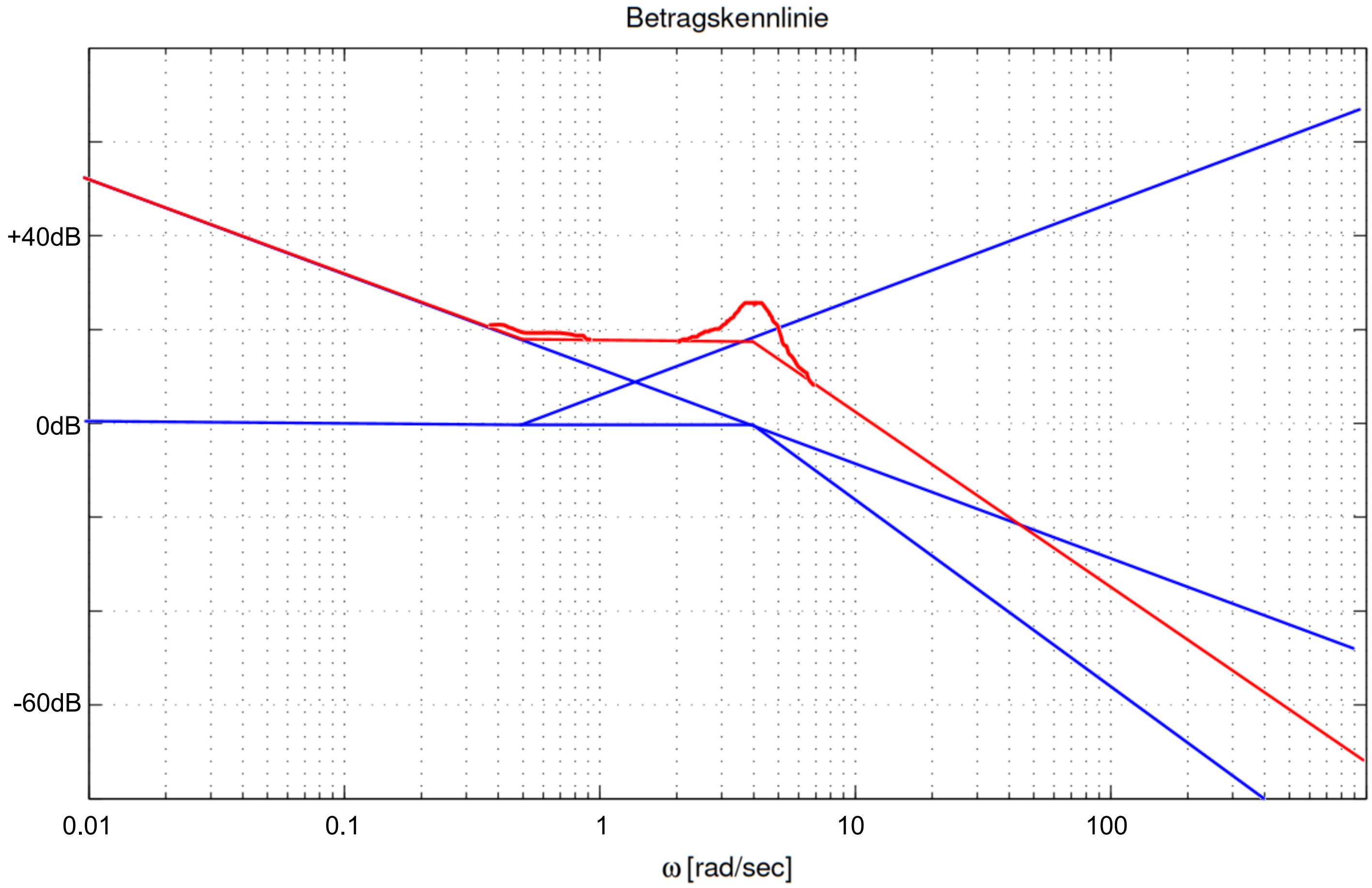
4/jw --> I-Verhalten --> Hilfspunkt w = 4 --> 0dB

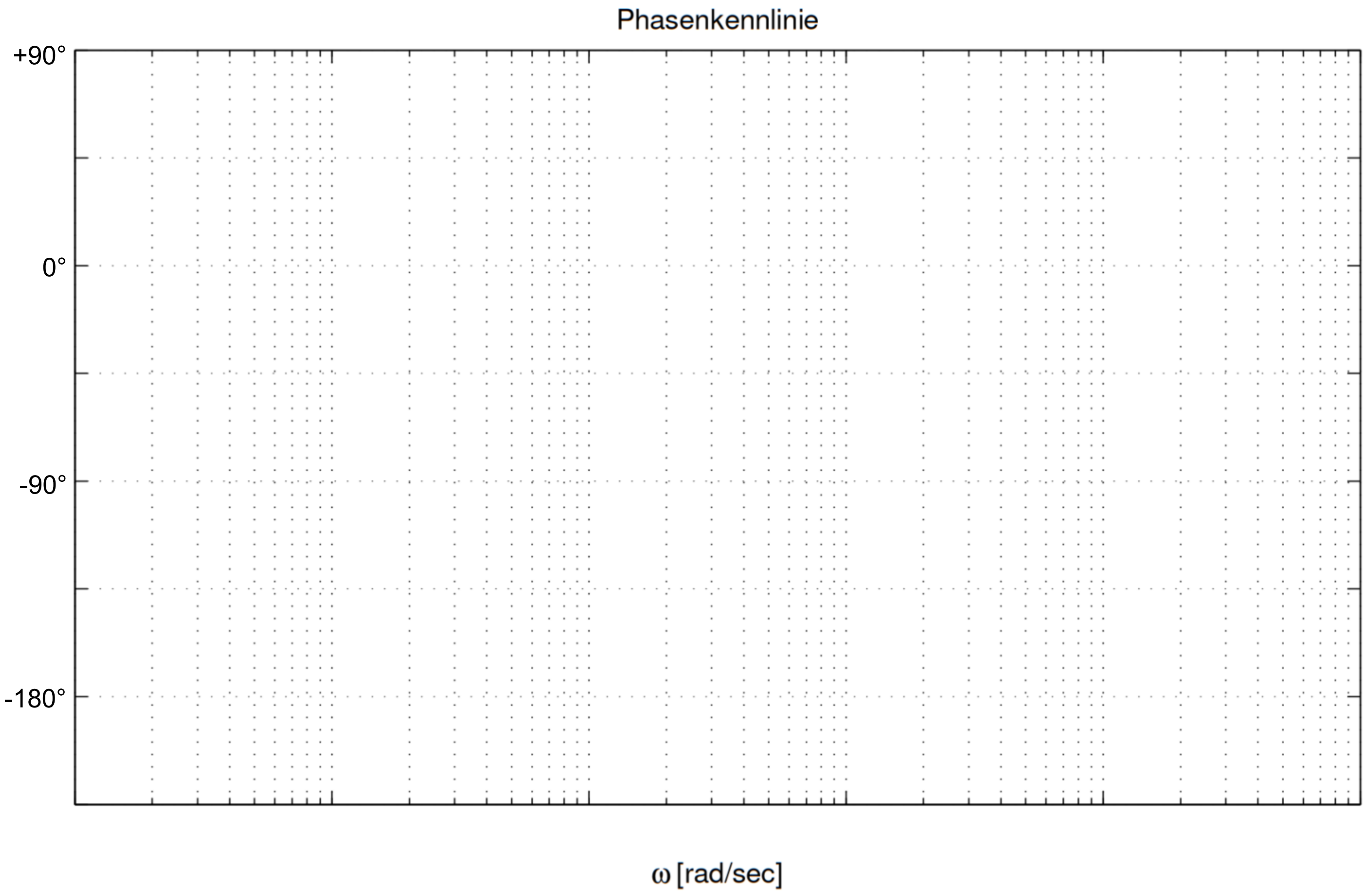
Konstruieren Sie die Asymptoten der Frequenzgangfunktion

Ermitteln Sie die Hilfspunkte für den wahren Verlauf

Skizzieren Sie den wahren Verlauf

Überprüfen Sie Ihre Lösung mit LISA!


Betragskennlinie
+40dB
0dB
-60dB
0.01
0.1
1
10
100
ω [rad/sec]


Phasenkennlinie
+90°
0°
-90°
-180°
ω [rad/sec]

Zusammenhang Asymptoten-Steigung des Betragsgangs ⬄ asymptotischer Phasengang bei minimalphasigen Systemen

Aus unserer Tabelle:

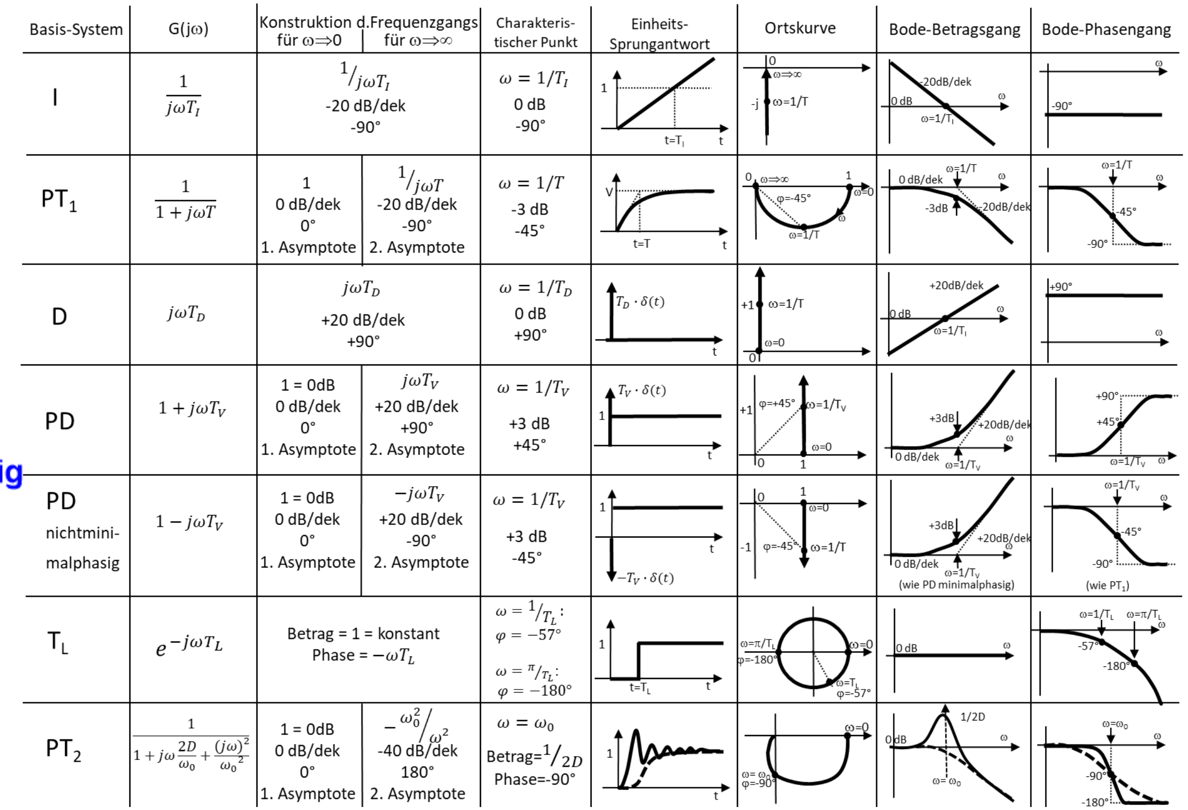
System	Steigung Betragsgang	asympt. Phase
P	0dB/dek	0°
PT1	0dB/dek => -20 dB/dek	0° => -90°
I	-20 dB/dek	-90°
D	+20 dB/dek	+90°
PD	0dB/dek => +20 dB/dek	0° => +90°
PT2	0dB/dek => -40 dB/dek	0° => -180°

mini-mal-phasig

Ausnahmen:

PD nicht-minimalphasig	0dB/dek => +20 dB/dek	-90°
Totzeitglied	0dB/dek	$-\omega T_t$

nicht minimalphasig



Basis-System	G(jω)	Konstruktion d. Frequenzgangs für ω⇒0	für ω⇒∞	Charakteristischer Punkt	Einheits-Sprungantwort	Ortskurve	Bode-Betragsgang	Bode-Phasengang
I	$\frac{1}{j\omega T_I}$	$1/j\omega T_I$ -20 dB/dek -90°		$\omega = 1/T_I$ 0 dB -90°				
PT_1	$\frac{1}{1+j\omega T}$	1 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$1/j\omega T$ -20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T$ -3 dB -45°				
D	$j\omega T_D$	$j\omega T_D$ +20 dB/dek +90°		$\omega = 1/T_D$ 0 dB +90°				
PD	$1+j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$j\omega T_V$ +20 dB/dek +90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB +45°				
PD nichtminimalphasig	$1-j\omega T_V$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-j\omega T_V$ +20 dB/dek -90° 2. Asymptote	$\omega = 1/T_V$ +3 dB -45°			(wie PD minimalphasig)	(wie PT_1)
T_L	$e^{-j\omega T_L}$	Betrag = 1 = konstant Phase = $-\omega T_L$		$\omega = 1/T_L$: $\varphi = -57°$ $\omega = \pi/T_L$: $\varphi = -180°$				
PT_2	$\frac{1}{1+j\omega\frac{2D}{\omega_0}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$	1 = 0dB 0 dB/dek 0° 1. Asymptote	$-\omega_0^2/\omega^2$ -40 dB/dek 180° 2. Asymptote	$\omega = \omega_0$ Betrag=$1/2D$ Phase=-90°				

Verallgemeinerung: Bei minimalphasigen Systemen hängen Betragsgang und Phasengang voneinander ab:

Steigung des asymptotischen Betragsgangs	Asymptotischer Phasengang bei minimalphasigem System
+40 dB/dek	+180°
+20 dB/dek	+90°
0 dB/dek	0°
-20 dB/dek	-90°
-40 dB/dek	-180°
-60 dB/dek	-270°
…	…

⇒ **Was ist überhaupt ein „nichtminimalphasiges“ System?**

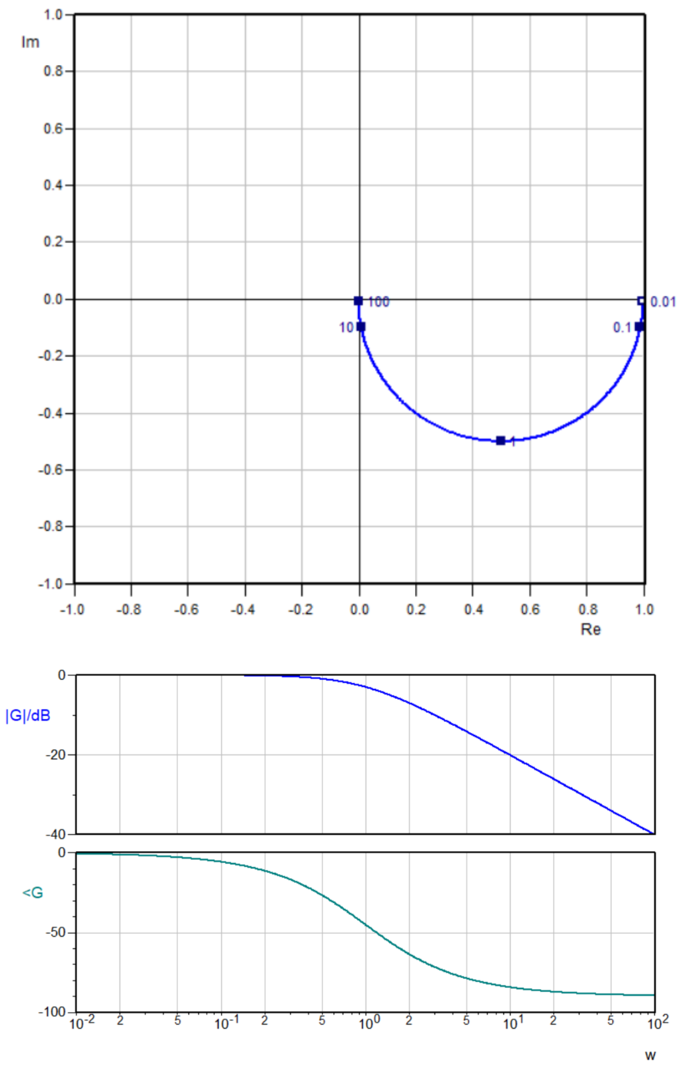
- ⇒ **Zu einem gegebenen Betragsgang gibt es genau ein stabiles System, das den Frequenzgang mit minimaler Phasen-Nacheilung realisiert: „minimalphasig“. Alle anderen Realisierungen sind nichtminimalphasig!**

- ⇒ **Zur Erinnerung aus der Systemtheorie:**
  Nichtminimalphasig ⬄ Mind. eine Nullstelle in rechter s-Halbebene --> (1 - jwT)

- ⇒ **Beispiele:**
  - ⇒ **nichtminimalphasiges PD-System:** $G(j\omega) = 1 - j\omega T$ **bzw. ein System mit diesem Term im Zähler**
  - ⇒ **Allpass** $G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$
  - ⇒ **Totzeitsystem** $e^{-j\omega T_t}$

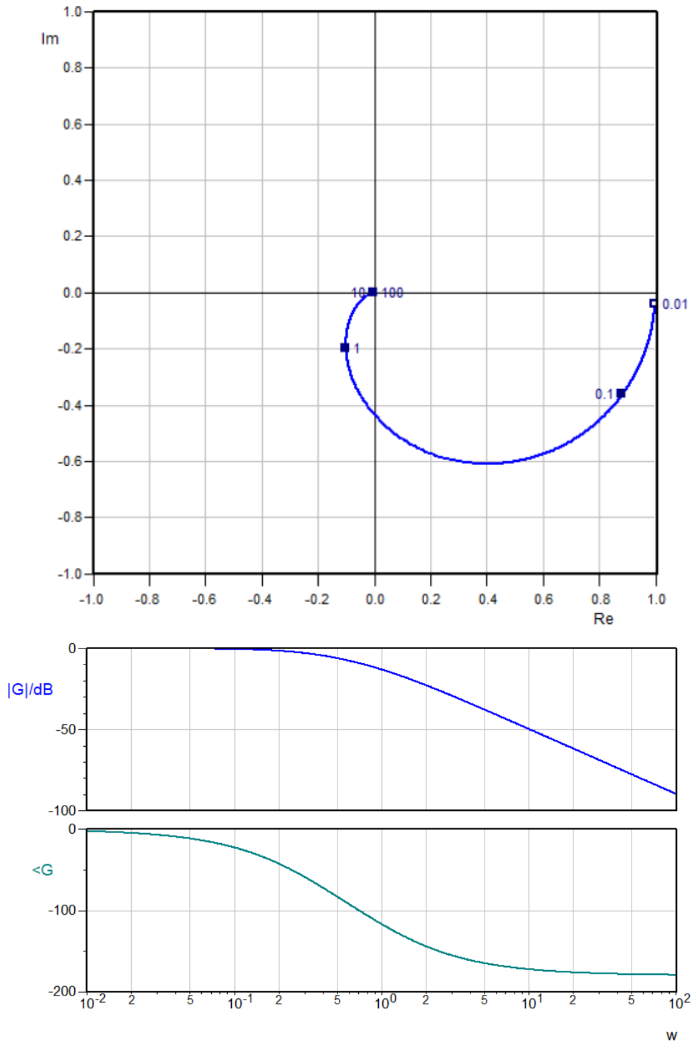
Wie erkennt man am Bode-Diagramm / an der Ortskurve den Systemtyp - PT_n-Systeme?

PT_1



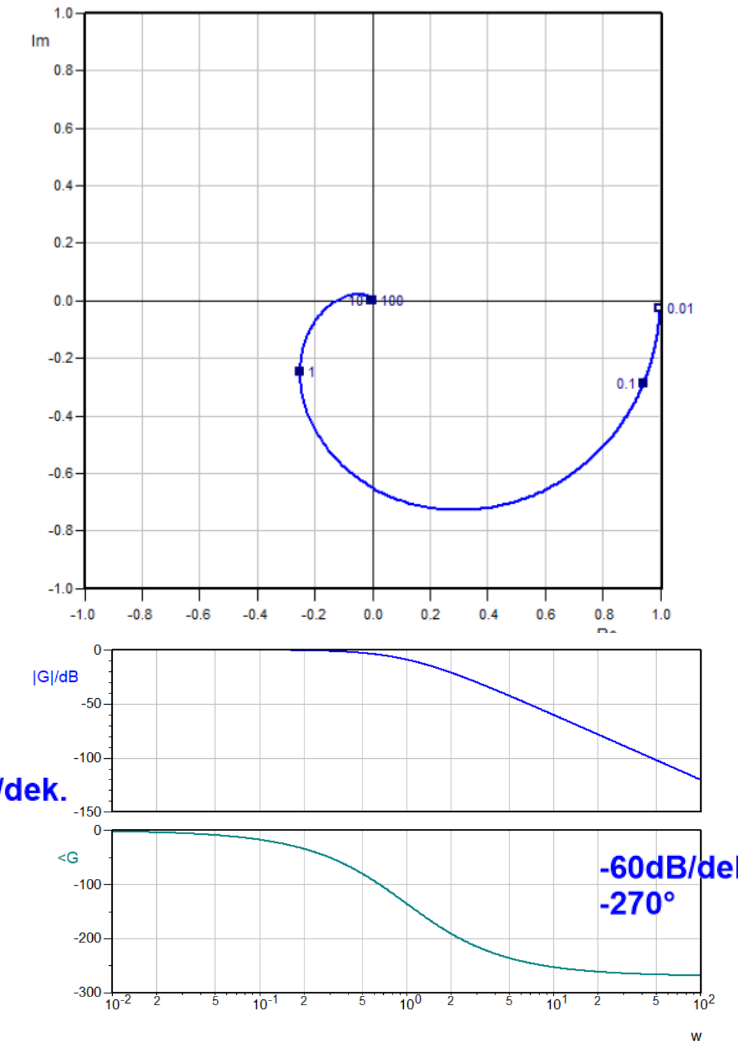
-20dB/dek.
-90°

PT_2



-40dB/dek.
-180°

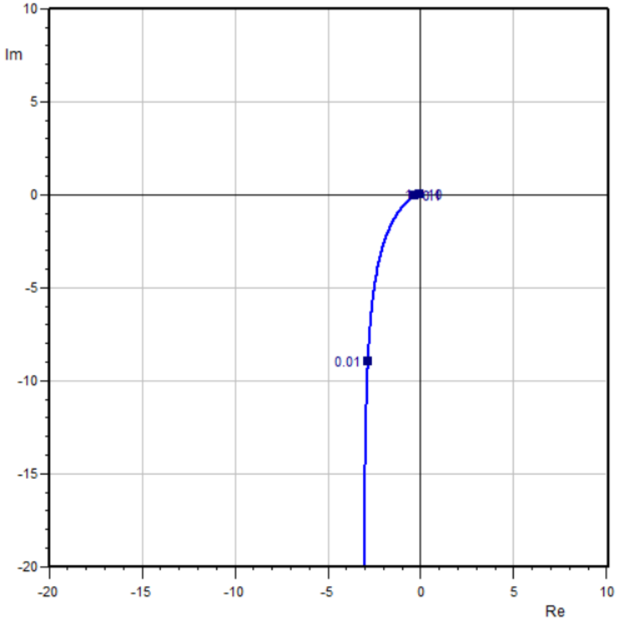
PT_3



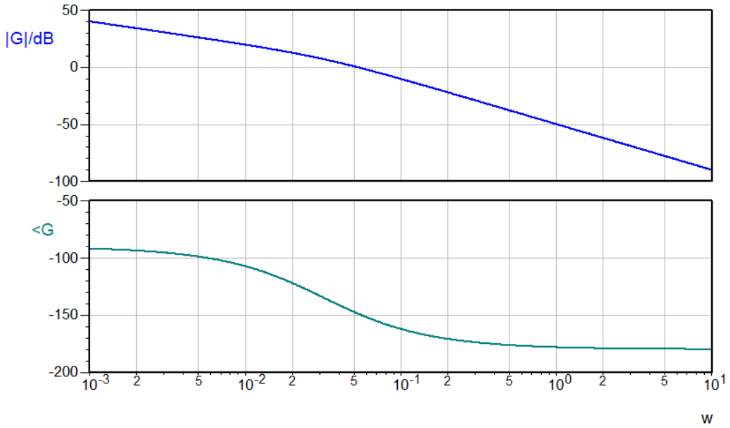
-60dB/dek.
-270°

Wie erkennt man am Bode-Diagramm / an der Ortskurve den Systemtyp?

System mit I-Anteil



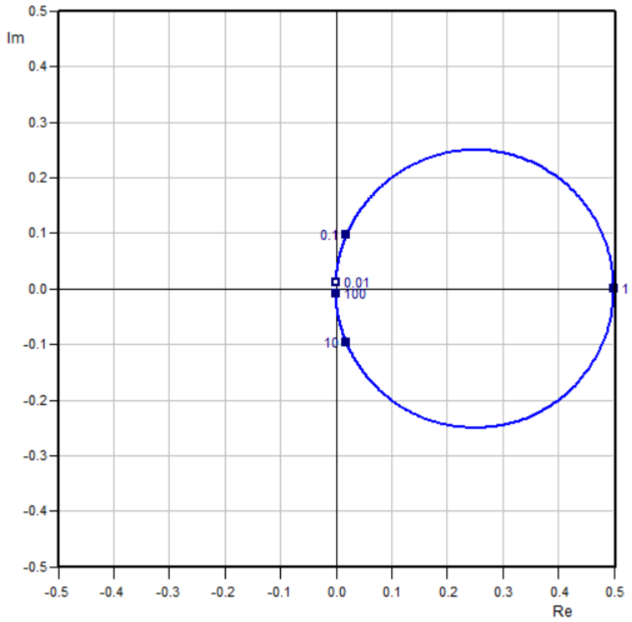
kommt aus Unendlich



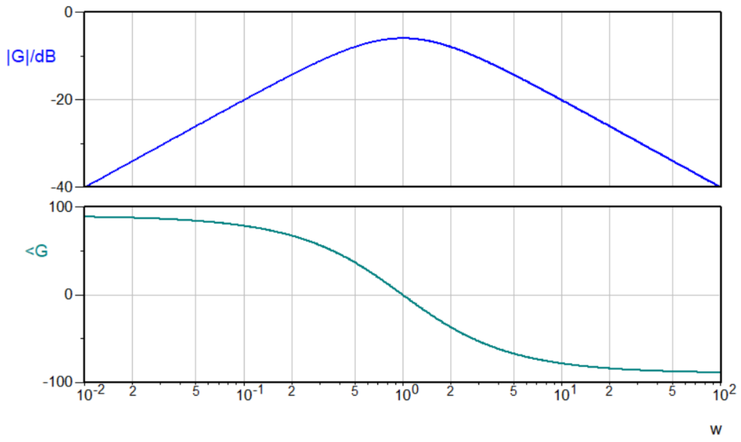
Anfangssteigung -20dB/dek.

Anfangsphase -90°

Differenzierendes System ohne P- und I-Anteile:



Anfangsbetrag 0 und Anfangsphase +90°



Anfangssteigung +20dB/dek.

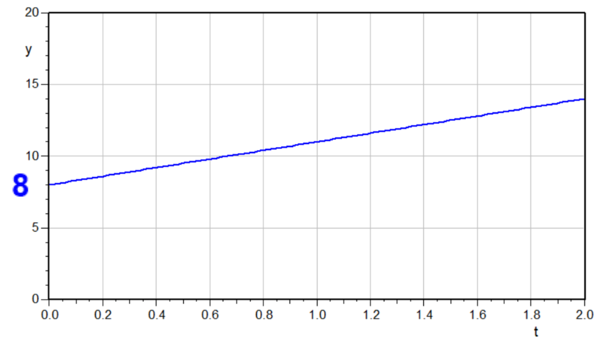
Anfangsphase +90°

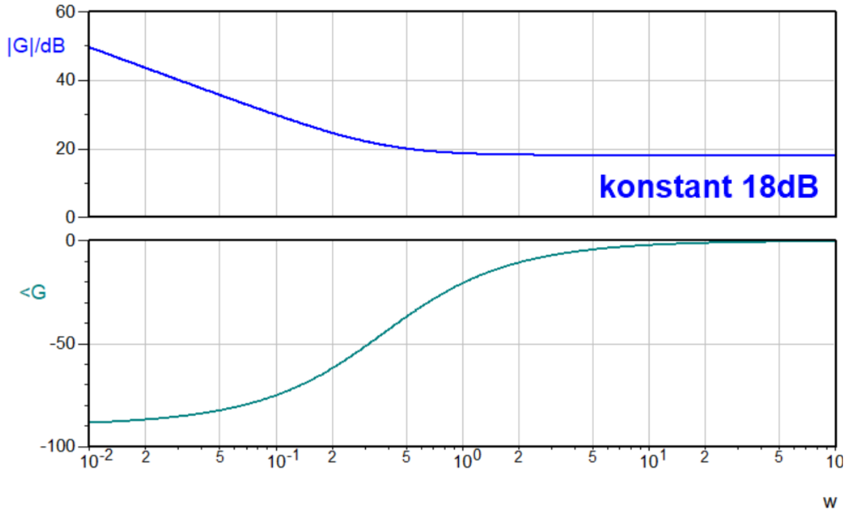
Wie erkennt man am Bode-Diagramm den Systemtyp?

Differenzordnung = r = relativer Grad = Nennergrad – Zählergrad = n - m

Sprungfähiges System

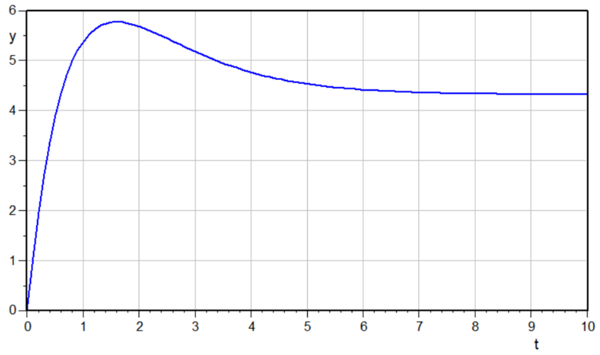
$a(0) \neq 0$ ⇔ **r = 0**

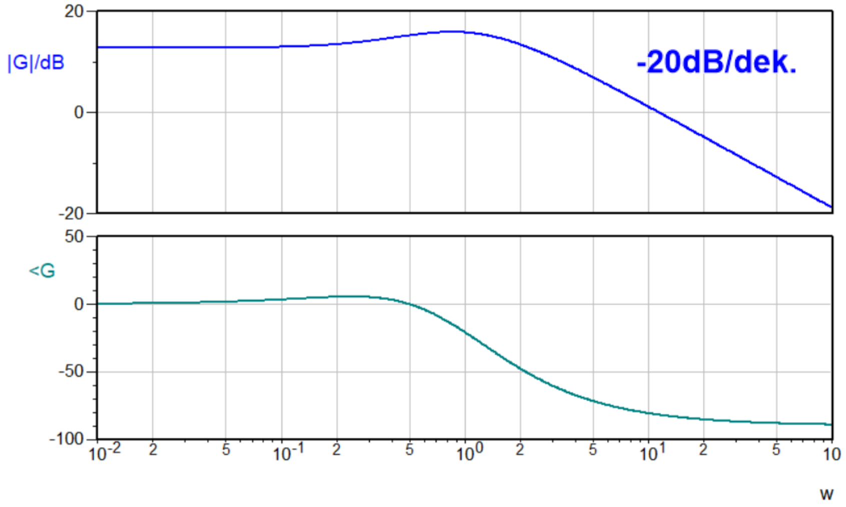




Knickfähiges System

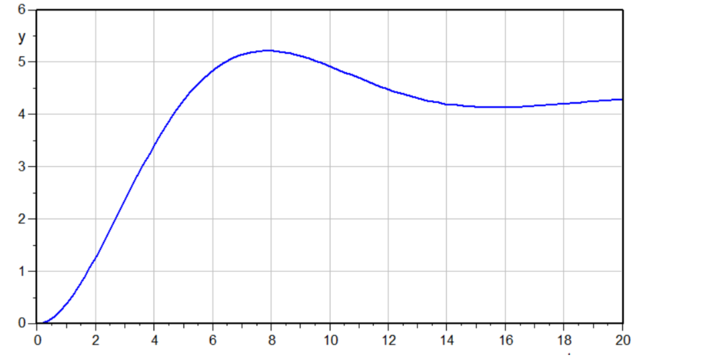
$a(0) = 0; \dot{a}(0) \neq 0$ ⇔ **r = 1**

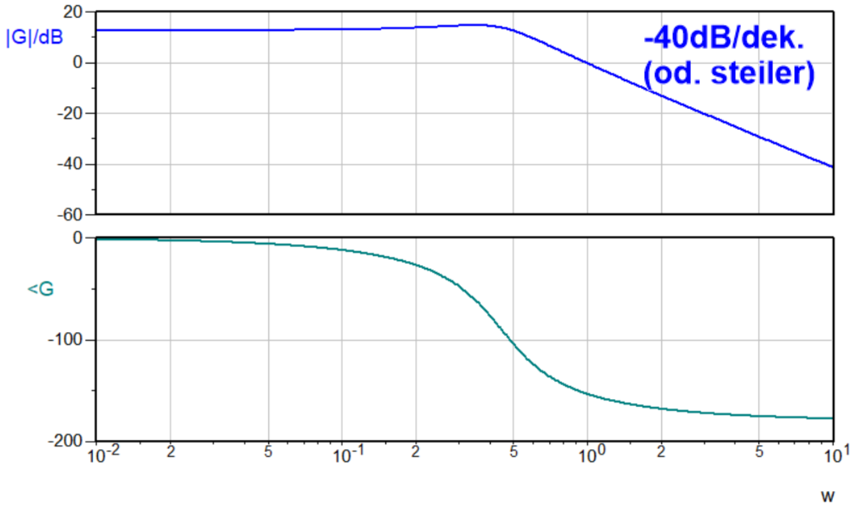




System mit flach startendem $a(t)$

$a(0) = 0; \dot{a}(0) = 0$ ⇔ **r ≥ 2**



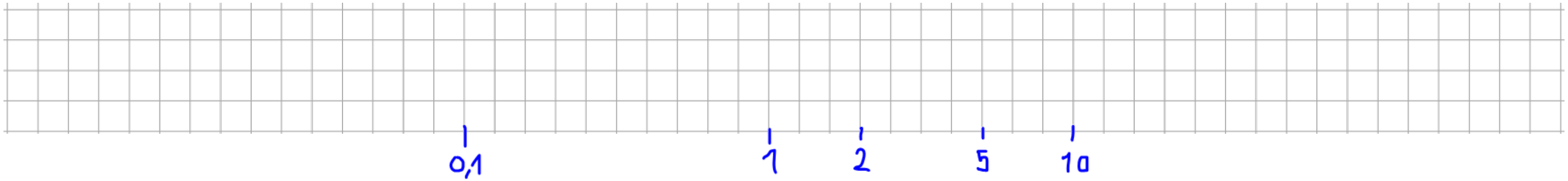


an Phasengang nicht erkennbar

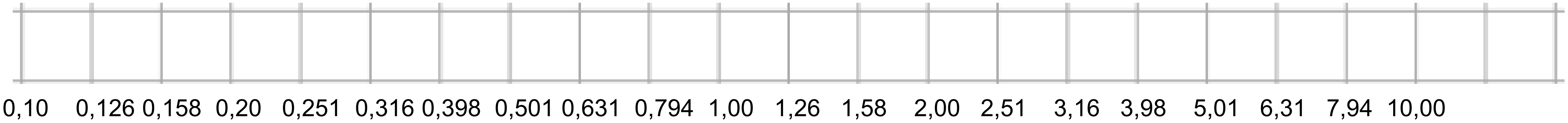
Tipp: Zeichnen eines Bode-Diagramms auf kariertem Papier ⇔ logarithmische Frequenzachse?!

Ziel: Erstelle ein Bode-Diagramm ohne Logarithmen-Papier in „ordentlicher Zeichenqualität“ !

$\Rightarrow$ **Nutze Kästchen-Schema für die Betragsachse: 10 Kästchen pro Dekade**



$\Rightarrow$ **Nutze 10-Kästchen-Schema mit genauen Zwischenwerten (Faktor zwischen zwei Kästchen = 10^(1/10) = 0,1259!):**



Übungsaufgabe: Konstruiere den asymptotischen Frequenzgang $G(j\omega) = \dfrac{5-30j\omega}{1+j\omega+0{,}25(j\omega)^2}$ auf kariertem Papier (10 Kästchen / Dekade)

⇒ **Knicke?!**

⇒ **Hilfspunkte?!**