I. Lineare Algebra

**Vektoren**Vektorrechnung siehe Papula  
Winkel zw. 2 Vektoren: mit   
orthonormal: Basisvektoren senkrecht und Länge aller gleich 1  
orthonormale Basis: siehe unten  
  
**Lineare Unabhängigkeit**Prüfen: darf nur mit klappen  
Prüfen (Alternative): Vektoren als Matrix schreiben, wenn   
 Rang = Spaltenanzahl 🡪 linear unabhängig  
Prüfen (Alternative): wenn det von Vektorenmatrix 0 🡪 lin. unabh.

**Linearkombination**Kann ein Vektor als Lin.komb. anderer Vektoren dargestellt werden?  
🡪 Matrix aufstellen und LGS lösen: mit A aus Einzelvektoren  
  
**Basis eines Vektorraums Rm (m= Zeilenanzahl)**Menge von linear unabhängigen Vektoren  
  
**lineare Hülle:** Auflistung linear unabhängiger Vektoren:   
  
**Dimension Vektorraum/lineare Hülle:** Anzahl der aufgelisteten Vektoren

**Keine, eine, unendlich viele Lösungen**

🡪 keine Lösung

🡪 eine Lösung ()

🡪 unendlich viele Lösungen

allgemeine Lösung (nur bei unendlich vielen Lösungen!):  
 zB:

**Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung**Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**LGS lösen**

* in 2 Zeilen je 1 Null untereinander erzeugen (bei 3x3)
* beide Zeilen miteinander verrechnen sodass in einer Zeile eine zweite Null entsteht

Wenn Variable in LGS:  
- **Achtung**, nicht durch Variable teilen, wegen DIV/0  
- Fallunterscheidung: keine, eine, unendlich viele Lsg

Wenn mehr Unbekannte als Gleichungen:

* Einheitsmatrix vorne erstellen
* nach ersten x (Anzahl Gleichungen) auflösen
* allgemeine Lösung aufstellen:

**Determinanten** (Rechenregeln siehe Papula)nur bei quadratischen Matrizen berechenbar  
wenn 🡪 LGS eindeutig lösbar

Entwicklungssatz von Laplace  
ab 4x4-Matrizen sinnvoll

Zeile i oder Spalte k mit vielen 0 wählen, dann:

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Wenn nach Quotient zweier Determinanten gefragt: Cramersche Regel

**Nullraum berechnen**Matrix mit Nullvektor auf rechter Seite aufstellen 🡪 Gauß (0-Dreieck)Bei unendlich vielen Lösungen:   
Basis: Aufzählung der Vektoren, bei denen ein Parameter davorsteht  
   
andere Schreibweise als lineare Hülle:   
bei eindeutiger Lösung nur Nullvektor in Nullraum (Dimension dann = 0)  
Dimension: Anzahl der Vektoren in Basis (hier zB = 1)  
Rang + Dimension Nullraum = Anzahl Vektorzeilen

**Orthonormale Basis**

**Rang einer Matrix**Nummer der letzten Zeile ohne Nullzeile

**Orthogonale Matrix**Inverse ergibt transponierte Matrix:

Ein Bild, das Text, Whiteboard enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Inverse hilfreich für:

**Matrizen**spezielle Matrizen und Rechenregeln siehe Papula 

**Inverse Matrix berechnen**invertierbar regulär det 0  
(nur quadratische Matrizen invertierbar)  
- mit Einheitsmatrix rechts erweitern  
- Umformen bis links Einheitsmatrix steht  
- Kontrolle: muss Einheitsmatrix ergeben

**Eigenwerte λ bestimmen** (Matrix vorher nicht verändern!)  
1. Charakteristisches Polynom muss 0 sein 🡪 ausrechnen  
2. Eigenvektoren bestimmen durch Fallunterscheidung mit verschiedenen

wenn mehr als eine Lösung:

zB: 🡪   
  
Übrigens: Produkt aller ist Determinante der Ursprungsmatrix  
Falls Eigenwerte Vielfachheit k haben: Anzahl der Eigenvekt. zwischen 1 und k

Matrix diagonalisierbar? Ja, wenn alle Eigenwerte verschieden  
Matrix V aus Eigenvektoren: Diagonalmatrix

**Ausgleichsrechnung**  
versch. Messwerte führen zu keiner Funktionsgl. 🡪 kleinsten Fehler bestimmen

1. Messwerte in f(x) einsetzen und Gleichungssystem aufstellen
2. Normalengleichung berechnen:
3. Anschließend ist LGS lösbar und -Parameter können bestimmt werden
4. Funktionsgleichung f(x) aufstellen

**Substitution**

1. Substitution (am besten: )
2. Nach y auflösen
3. y nach x ableiten (evtl. )
4. y‘ auf linker Seite und u auf rechter Seite einsetzen
5. Lösung durch Trennung der Variablen
6. Rücksubstitution

DGL 1. Ordnung

II. Differentialgleichungen

**Grundsätze**

Typ 🡪 Trennung der Variablen **(Falluntersch.!)**

Typ 🡪 Substitution

Typ 🡪 Substitution

Typ 🡪 erst Substitution, dann Trennung der Var.  
Typ 🡪 erst Substitution, dann Trennung der Var.

**Lineare DGL 1. Ordnung** ( = Störfunktion, wenn 0 🡪 homogene DGL)

1. homogene DGL berechnen ( gleich 0 setzen)   
   (zuerst in diese Form bringen: )
2. spezielle DGL berechnen: Variation der Konstanten
3. Allgemeine Lösung:
4. Partikuläre Lösung : Anfangswert einsetzen und C bestimmen

**Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

1. homogene DGL berechnen:
2. spezielle DGL berechnen:
   1. Tabelle mit Lösungsansätzen
   2. ableiten
   3. in DGL einsetzen
   4. Koeffizientenvergleich
   5. aufstellen
3. Allgemeine Lösung:
4. Partikuläre Lösung : Anfangswert einsetzen und C bestimmen

**Variation der Konstanten**

( = Störfkt.)

🡪 (ohne C !)

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

DGL 2. Ordnung

**Wronski-Determinante**

**Wronski-Determinante / Linearkombination der homogenen DGL**Ist für mindestens ein x die Wronski-Determinante ungleich 0, dann sind und linear unabhängig und es gilt:

🡪 und bilden Fundamentalsystem

Wenn Wronski-Determinante für alle x = 0, gibt es ein c:

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Lösungsmethode DGL 2. Ordnung**

1. Homogene DGL bestimmen (Störfunktion = 0 setzen)
2. charakteristische Gleichung aufstellen:
3. bestimmen durch Mitternachtsformel
   1. wenn Wurzel > 0:
   2. wenn Wurzel = 0:
   3. wenn Wurzel < 0:   
       Alternativ:

mit bzw. aus

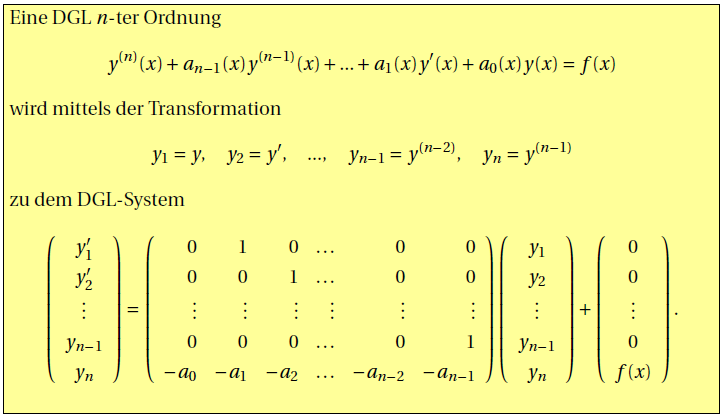
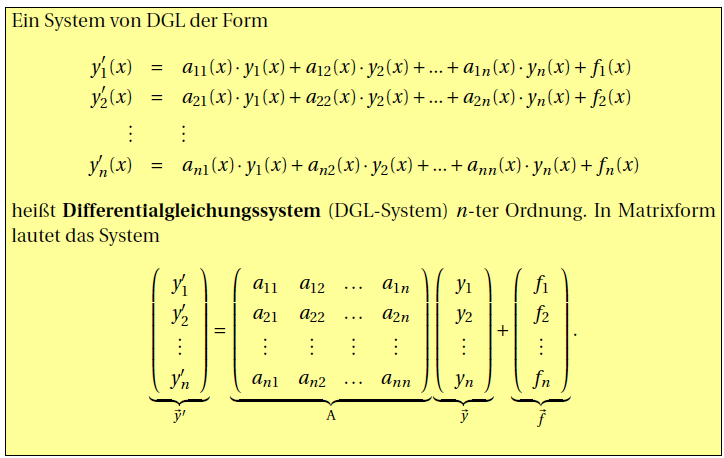
1. Spezielle Lösung berechnen:
   1. Tabelle mit Lösungsansätzen
   2. ableiten
   3. in DGL einsetzen
   4. Koeffizientenvergleich
   5. aufstellen
2. Allgemeine Lösung:
3. Partikuläre Lösung : Anfangswerte einsetzen   
   und Cs bestimmen

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**r**

Systeme linearer DGLs



* Transformationsgl. immer so viele wie Ordnung;
* Wenn 2 DGLs gegeben auch folg. Transformation möglich:

Ordnung eines DGL-Systems = Summe der Ordnungen der einzelnen DGLs

**Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten**Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

1. Eigenwerte berechnen: 🡪 berechnen
2. Eigenvektoren berechnen
3. Allgemeine Lösung: (etc. bei größerer A-Matrix)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14 | /  für | / |
| 15 | für |  |

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

III. Laplace Transformation

**Grundsätzliches**kausale Funktion:

Laplace-Transformation:

🡪 f(t) darf keine Polstellen haben und nicht stärker wachsen als abnimmt

**Sprungfunktion**

**Deltadistribution** (“Ableitung” der Sprungfunktion)

(Verschiebung von nach )

🡪 Suche t sodass entsteht und setze dieses t in ein

**Verallgemeinerte Ableitung (besser: einfach mit Produktregel ableiten)**

(n = Anzahl Sprünge, hi = Sprunghöhe)

**Transformationsregeln**

R1-Linearität: Auseinanderziehen von zwei Einzelfunktionen und Konstanten raus

R2-Verschiebungssatz: Bei 🡪

R3-Ähnlichkeitssatz: (s in Bildfunktion durch ersetzen)

R4-Dämpfungssatz: (s in Bildfkt von f(t) ersetzen)

R5-periodisch: (T = Periodendauer)

R6-Ableitung:

Alternativ: (verallgemeinerte Ableitung)

R7-Integration: wenn , dann (nur für g(0)=0)

R8-Differ./Integr. im Bildbereich:   
   
 (wenn transformierbar)

R9-Faltungssatz:   
 🡪

**Laplace-Trafo und lineare DGLs**Einsatz nur bei linearen DGLs mit konstanten Koeffizienten

1. Homogene DGL lösen (Störfunktion = 0) (nur wenn Anfangsbed. 0)   
   a. Einzelne Terme Laplace-transformieren:   
   b. In DGL einsetzen **(Achtung auf Vorzeichendrehung innerhalb eines Terms wenn zB -y‘‘ !)**  
   c. Vergangenheitswerte für und einsetzen  
   d. ausklammern und alles ohne auf andere Seite, dann nach auflösen  
   e. Rücktransformation zu Originalfunktion, prüfen ob notwendig ist (nur notwendig wenn nur t > 0 gefordert) 🡪
2. Inhomogene DGL lösen  
   a. DGL mit verallgemeinerter Ableitung formulieren, z.B.:   
   b. Laplace-Trafo: (ohne y(0)-Terme !)  
   c. ausklammern und alles ohne auf andere Seite, dann nach auflösen  
   d. Rücktransformation zu Originalfunktion, hier unbedingt notwendig!
3. Allgemeine Lösung: Summe aus 1 und 2

**Rücktransformation**

🡪 Partialbruchzerlegung  
mögliche Typen:

**Wenn Berechnung für t > 0 gefordert: Alles in einem  
Schritt, aber NICHT mit verallgemeinerter Ableitung.**

**Laplace-Trafo und lineare DGL-Systeme**Einsatz nur bei linearen DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten

🡪 Wenn Anfangsbedingungen 🡪 homogene DGLs = 0

1. Matrix in Gleichungen umformen
2. Laplace-Transformation nach Schritt 1a siehe oben (Achtung, wenn kann weggelassen werden)
3. Gleichungen umstellen und bzw. jeweils zusammenfassen
4. Gleichungen nach und auflösen
5. Rücktransformation der beiden Terme 🡪 Lösungsvektor aufstellen

🡪 Wenn Anfangsbedingungen :

1. Schritte unter 1 siehe oben erst für Störfunktionen = 0 durchführen (homogene DGLs)
2. Für inhomogen DGLs Methode mit verallgemeinerter Ableitung D verwenden, siehe oben Schritt 2

**Achtung auf Vorzeichendrehung beim Einsetzen!**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Originalbereich** | **Bildbereich** |
| **Ohmscher Widerstand** |  |  |
| **Induktivität** |  |  |
| **Kapazität** |  |  |

**LTI-Systeme / Übertragungsfunktion**

🡪 ist Übertragungsfunktion 🡪 ist Impulsantwort ()

Duhamel’sches Integral: (folgt aus Faltungssatz)  
 wenn (Impuls als Eingangssignal) 🡪 da   
 wenn (Sprung von 0 auf 1) 🡪 da (h = Sprungantw., g = Impuls)

🡪 Sprungantwort ist Integral von Impulsantwort! 🡪 und   
🡪 und

Wachstum der Ausgangsfunktion y(t)  
Ablesbar anhand Nullstellen von

* : exponentiell abnehmend
* : exponentiell zunehmend
* : konstant
* : gedämpfte Schwingung
* : anwachsende Schwingung
* : stationäre Schwingung

IV. Fourier Reihen

**Fourier-Reihe**: Kreisfrequenz der Grundschwingung

🡪 bei Punktsymmetrie im Ursprung = 0 Kreisfrequenz der k-ten Oberschwing.

🡪 bei Punktsymmetrie = 0 diskretes Amplit.spektrum

🡪 bei Achsensymmetrie = 0

Amplitude der Grundschwingung  
 Amplituden der Oberschwingungen

Umrechnung zw. Fourier-Koeffizienten siehe Papula!

**Polarform**:

**Exponentialform**: mit (wenn nötig: )

**Parseval’sche Gleichung:**

**Wenn Integral aufgeteilt werden muss bleiben   
 (und Sinus und e) trotzdem mit ganzem T stehen**

**Achtung! und sind immer !!**

**1. Streckung der Periode:** Wenn Funktion g(t) vielfache Periode von f(t) hat 🡪 Koeffiz. gleich, , nur Periode verschieden

**2. Verschiebung um t0:**  🡪   
 Koeffizient von G(t):

**3. Multiplikation mit Schwingung:**  🡪 Koeffizienten von G(t):

**4. Ableitung:**  🡪   
 Koeffizient von G(t): und für

**5. Integration:**  🡪   
 Koeffizienten von G(t): und für

**Faltung**

Wenn dann gilt mit und als Koeffizienten von und

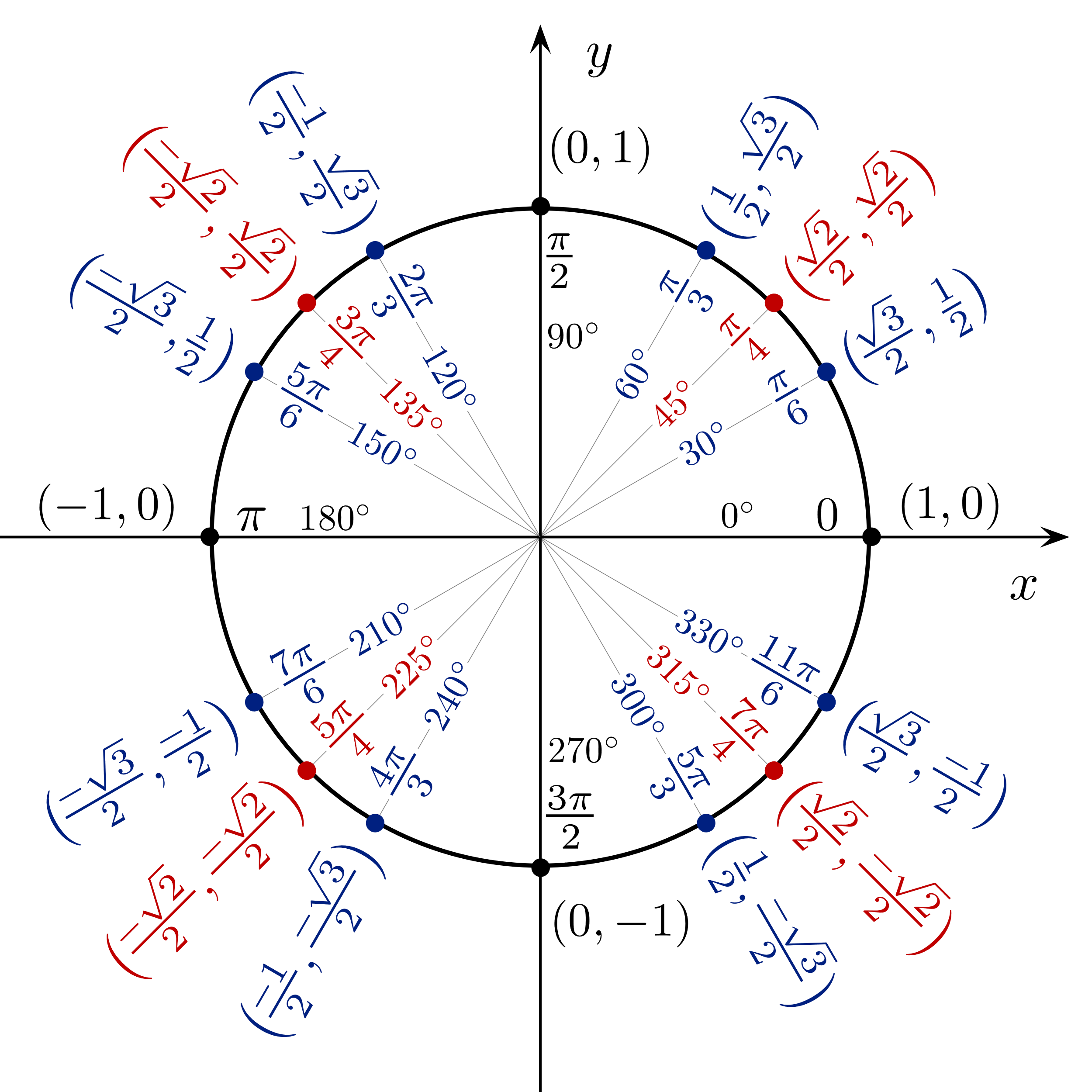
**LTI-System**

Ausgangssignal wobei (ähnlich Impulsantwort)

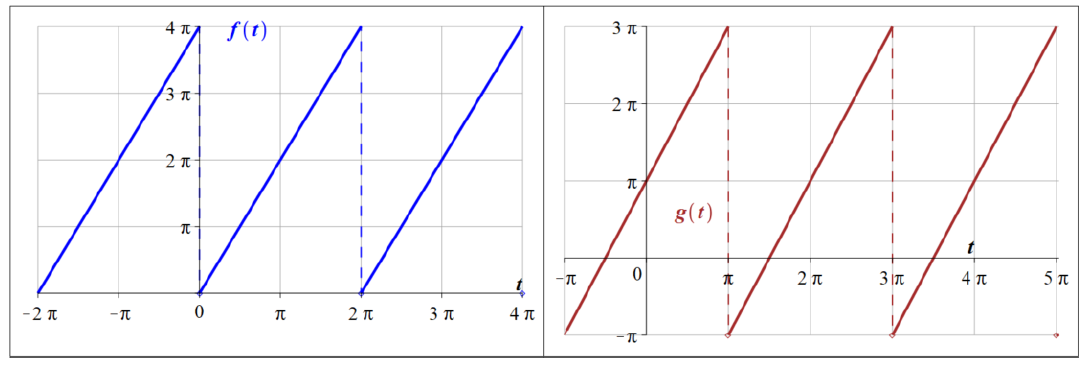
**DGL** vom Typ

1. Fourier-Reihe von Störfunktion f(t) bestimmen, deren Koeffizienten heißen dk
2. Bestimme (Q(k) darf nicht 0 werden können!)
3. Koeffizienten der Lösung berechnen: (wenn Fallunterscheidung bei dk auch Fallunterscheidung bei ck)
4. Lösung der DGL:

Wenn Funktion in der Form gegeben:  
1. Periode T = kleinster gemeinsamer Wert der für t eingesetzt werden muss damit in bzw. Vielfaches von steht  
2. Fourier-Reihe in allgemeiner Form hinschreiben und T einsetzen:   
3. f(t) mit Euler-Formeln schreiben:   
4. Brüche einzeln darstellen (Vorsicht falls Minus!)  
5. Einzelne ck überlegen indem geschaut wird was für k in allgemeiner Form aus (2) eingesetzt werden muss, damit der Term in f(t) entsteht. Der Vorfaktor vor dem e-hoch-Term (zB ) ist dann das jeweilige ck  
6. „ck = 0 sonst“ hinschreiben

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ein Bild, das Text, Whiteboard enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ein Bild, das Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung