Relatório de CCI:
Métodos iterativos para a solução de sistemas lineares de equações

Henrique F. Feitosa

Instituto Tecnológico de Aeronáutica,
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

1 Introdução

Nessa prática, visou-se a utilização de métodos iterativos para resolver sistemas lineares. Os métodos de Gauss Jacobi e Gauss Siedel foram implementados no MATLAB. Além disso, como critério de verificação de convergência, foram implementados no MATLAB o método do critério das linhas e o do critério de sassenfeld.

Para a análise desses algoritmos, fez-se a resolução de seis sistemas lineares e comparou-se os resultados obtidos por cada uma das abordagens de resolução e por cada um dos critérios.Os sistemas que foram resolvidos estão representados pelas equações 1 à 6.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + -3x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + -2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + -1x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + -x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{6}$$

2 Resultados e Discussão

Para a análise e discussão dos resultados, verificou-se a validade do critério das linhas e do critério de sassenfeld para os seis sistemas. Além disso, resolveu-se o sistemas por Gauss Jacobi e por Gauss Siedel. Após cada resolução correspondente a cada algoritmo, anotou-se se a resposta convergiu ou não. Se convergiu, anotava-se o número de iterações necessárias para isso. Esses dados estão organizados nas tabelas 1 e 2.

Tabela 1. Resultado dos critérios de convergência para cada um dos seis sistemas

Sistema Linear	Critério das linhas	Critério de Sassenfeld
1	negativo	negativo
2	positivo	positivo
3	negativo	negativo
4	negativo	negativo
5	negativo	negativo
6	positivo	positivo

Tabela 2. Análise da convergência e do número de iterações necessárias para os dois algoritmos

Sistema Linear	Número de iterações usando Gauss Jacobi	Convergência usando Gauss Jacobi	Número de iterações usando Gauss Seidel	Convergência usando Gauss Seidel
1	100	divergiu	100	divergiu
2	20	convergiu	6	convergiu
3	46	convergiu	13	convergiu
4	4	convergiu	100	divergiu
5	100	divergiu	9	convergiu
6	10	convergiu	6	convergiu

Analisando os dados das tabelas 1 e 2, percebe-se que todos os sistemas que obtiveram resultado positivo nos critérios, tiveram uma solução que convergiu. Isso pode ser mostrado plotando-se o vetor erro relativo em uma forma compacta, que foi calculado por Gauss Jacobi, para os sistemas 2 e 6 que estão respectivamente representados por 6 e 7.

$$[1.0000, 0.4857..., 0.0018, 0.0013, 0.0001] \tag{7}$$

$$[1.0000, 0.3191..., 0.0038, 0.0026, 0.0001] \tag{8}$$

Porém, existiram sistemas que mesmo não satisfazendo ambos os critérios convergiram. Para embasar essa conclusão, mostra-se o vetor erro relativo obtido na resolução do sistema 3 por Gauss Jacobi.

$$[1.0000, 1.7803..., 0.0012, 0.0017, 0.0007] \tag{9}$$

Isso mostra que os critérios são condições suficientes, mas não necessárias para a convergência do sistema linear.

Outro ponto importante de discussão é que os sistemas 1 e 2 diferem apenas pela troca de uma linha, porém o sistema 2 diverge nos dois algoritmos enquanto o sistema 2 converge. Analisando os critérios de convergência, percebe-se que os dois critérios deram negativo para o sistema 1 , ou seja,sistema pode ou não convergir. Já para o sistema 2, os dois critérios são satisfeitos, o que mostra que o sistema certamente convergirá.

Finalmente,é interessante analisar o caso em que os dois algoritmos convergem. Percebe-se, nesses casos, que o algoritmo Gauss Seidel precisa de menos iterações para convergir. Isso se deve pois o algoritmo Gauss Seidel já utiliza resuldos obtidos na mesma iteração, o que torna o processo de convergência muito mais rápido.