“СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

Чернівці
2019

ББК 22.183.492

П 627

УДК 519.863

Системний аналіз та теорія прийняття рішень. Методичні вказівки і завдання для лабораторних занять. / Укл.: Руснак М.А. – Чернівці: 2019. – 18 с.

Укладачі: Руснак Микола Андрійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Розв’язування матричних ігор

Мета: Навчитися розв’язувати матричні ігри 2×2, $2\times n$ та $m\times2$. Вміти застосовувати графічний та алгебраїчний методи, зводити гру $m\times n$ до ЗЛП та розв’язувати її.

Теоретичні відомості: Терміном „гра” будемо називати взаємодію декількох гравців за відомими й постійними правилами, які визначають вид даної гри, та відомих і постійних станів цієї взаємодії, які визначають величини платежів між гравцями. Для позначення можливої реалізації цих станів вживатимемо термін „партія”. Терміном „хід” будемо називати момент партії, коли гравці (один чи декілька) приймають рішення із деякої множини рішень. Правила гри передбачають, що в кінці гри між гравцями відбуваються взаєморозрахунки. Якщо сума всіх платежів у партії дорівнює нулю, гру називають грою із нульовою сумою. Надалі розглядатимемо ігри, у яких беруть участь тільки два гравці, в кожного з яких є по одному ходу в партії, причому вибір ходів скінченний. Платежі гравців у таких іграх зручно задавати у вигляді матриці, звідси походить назва таких ігор – матричні ігри двох гравців із нульовою сумою. Нехай у грі беруть участь два гравці – I_1 та I_2. Перший із них вибирає ціле число $i, i=\overline{1,m}$, другий – ціле число $j,\ j=\overline{1,n}$. Вибір гравцями цих чисел здійснюється незалежно та одночасно. При проведенні взаєморозрахунку перший гравець платить другому суму $c_{i,j}$, яку у випадку $c_{i,j}\ge 0$ будемо називати виграшем, а у випадку $c_{i,j}\le 0$ відповідно програшем гравця I_2. Очевидно, що виграш гравця I_2 є водночас програшем гравця I_1 і навпаки. Матрицю $C=\{c_{i,j}\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, побудовану за такими правилами, будемо називати платіжною матрицею гри з точки зору другого гравця. Наприклад, розглянемо гру : два гравці одночасно обирають та називають одну із сторін монети. Якщо обрано різні сторони монети – гравець I_1 платить гравцю I_2 одиницю виграшу, якщо обрано однакові сторони – гравець I_2 платить гравцю I_1 одиницю виграшу. За таких умов платіжна матриця гри з точки зору гравця I_2 має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а з точки зору гравця I_1 – $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Надалі будемо розглядати матричні ігри з точки зору гравця I_2. Отже, партію в матричній грі можна уявляти як вибір рядка (I_1) та стовпчика (I_2) в платіжній матриці, перетин яких визначає величину платежу. Сукупність усіх партій у грі, як правило, нескінченна. <u>Метою гравців є визначення своєї оптимальної стратегії (поведінки) для всієї гри, яка гарантувала б досягнення максимального виграшу або мінімального програшу кожного з них відповідно, причому відхилення від оптимальної стратегії призведе до зменшення виграшу (або до збільшення програшу) гравця</u>. Вектор $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ назвемо <u>змішаною стратегією</u> гравця I_1, вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ назвемо <u>змішаною стратегією</u> гравця I_2. Компоненти цих векторів будемо трактувати як імовірності, з якими гравці впродовж гри обирають рядки чи стовпчики в платіжній матриці відповідно. Якщо протягом усієї гри гравець I_1 постійно обирає тільки один (k-тий) рядок у платіжній матриці, то така стратегія $x^k = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ називається <u>чистою стратегією</u> гравця I_1. Аналогічно вводиться поняття чистої стратегії гравця I_2. Розглянемо питання про <u>знаходження оптимальних чистих стратегій</u> у матричній грі. Якщо гравець I_2 при своєму ході вибере стовпчик з номером j, $1 \leq j \leq n$, то гравець I_1 (мінімізуючи свій програш) може обрати рядок із номером i так, щоб виграш гравця I_2 був $\min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$. Тому гравець I_2 при своєму ході повинен вибирати стовпчик із номером $j,\ 1 \le j \le n$ так, щоб досягнути виграшу величиною

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \underline{v}. \qquad (12.1)$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що гравець I_1 при своєму ході повинен вибирати рядок із номером $i,\ 1 \le i \le m$ так, щоб домогтися програшу величиною

$$\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \overline{v}. \qquad (12.2)$$

Величина $\underline{v}$ називається нижньою ціною гри (або гарантованим виграшем другого гравця), величина $\overline{v}$ – верхня ціна гри (найбільший програш першого гравця). Якщо має місце рівність $\underline{v} = \overline{v} = v$ або рівність

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = v, \qquad (12.3)$$

то говорять, що матрична гра має розв’язок у чистих стратегіях, а величину v називають ціною гри. Номери i^* та j^*, на яких виконується (12.3), дозволяють побудувати оптимальні чисті стратегії гравців $-x^* = \{x_{i^*} = 1,\ x_i = 0,\ i \ne i^*\}$ та $y^* = \{y_{j^*} = 1,\ y_j = 0,\ j \ne j^*\}$.(12.4) Зауважимо, що не кожна матрична гра має розв’язок у чистих стратегіях. Для визначення цього можна використовувати критерій : матрична гра двох гравців має розв’язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). При цьому ціна гри $v = c_{i^*, j^*}$, а оптимальні чисті стратегії визначаються формулами (12.4). У загальному випадку, коли розв’язку в чистих стратегіях немає, його слід шукати у класі змішаних стратегій. Можна довести, що кожна матрична гра має розв’язок у класі змішаних стратегій. Для знаходження оптимальних змішаних стратегій використовують твердження: матрична гра гравців I_1 та I_2 еквівалентна парі двоїстих ЗЛП

$$x_{m+1} \longrightarrow \min, \qquad\qquad y_{n+1} \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1},\ j=\overline{1,n}, \quad (12.5) \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j \ge y_{n+1},\ i=\overline{1,m}, \quad (12.6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Легко помітити, що задачі (12.5) та (12.6) завжди мають розв'язки. Якщо $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*, x_{m+1}^*)$ – розв'язок задачі (12.5), а $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*, y_{n+1}^*)$ – розв'язок задачі (12.6), то оптимальна змішана стратегія гравця I_1 – $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$, оптимальна змішана стратегія гравця I_2 – $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*)$, а ціна гри $v = x_{m+1}^* = y_{n+1}^*$. Якщо у випадку існування оптимальних чистих стратегій результат відхилення від них для кожного із гравців очевидний, то у випадку змішаних стратегій це не так. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$– оптимальна змішана стратегія гравця I_1. Чисту стратегію $x^k = \{x_k = 1, x_i = 0, i \ne k\}$ гравця I_1 назвемо <u>активною</u>, якщо $x_k^* > 0$. Аналогічно вводиться поняття активних стратегій гравця I_2. Має місце <u>теорема</u>: якщо гравець I_2 дотримується оптимальної змішаної стратегії y^*, то його середній виграш у грі залишається незмінним і дорівнює ціні гри v незалежно від стратегії гравця I_1, якщо тільки гравець I_1 не виходить за рамки своїх активних стратегій (застосовує їх у чистому вигляді чи змішує в довільних пропорціях). Це дозволяє в ряді випадків відшукати оптимальні змішані стратегії та знайти ціну гри. Наприклад, нехай $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і наперед відомо, що всі стратегії гравців активні. Тоді, якщо p - це імовірність, з якою гравець I_1 обирає перший рядок матриці C , його оптимальна змішана стратегія повинна мати вигляд $x^* = (p, 1-p)$ і при

цьому $\sum_{i=1}^{2} c_{i,j} x_i^* = v,\ j = \overline{1,2}$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -p + (1-p) = v \\ \ \ p - (1-p) = v \end{cases}$, знаходимо $p = 0.5,\ v = 0$. Тобто оптимальною для гравця I_1 є стратегія $x^* = (0.5, 0.5)$. Цілком аналогічно із співвідношень $y^* = (q, 1-q)^T$ та $\sum_{j=1}^{2} c_{i,j} y_j^* = v,\ i = \overline{1,2}$ знаходимо оптимальну змішану стратегію гравця I_2 : $y^* = (0.5, 0.5)^T$ та $v = 0$
.

Для знаходження активних стратегій використовують поняття домінуючих стовпців та підпорядкованих рядків у платіжній матриці. Назвемо стовпчик k домінуючим над стовпчиком l, якщо виконується нерівність $c_{i,k} \ge c_{i,l}$, $i = \overline{1,m}$, при цьому стовпчик l буде підпорядкованим стовпчику k. Аналогічні визначення введемо і для рядків платіжної матриці. Аналізуючи співвідношення (12.1) та (12.2), можна зробити висновок : якщо існує стовпчик l, підпорядкований стовпчику k, то відповідна йому l - та чиста стратегія гравця I_2 є неактивною; якщо існує рядок k, домінуючий над рядком l, то відповідна йому k - та чиста стратегія гравця I_1 є неактивною.

Використання цього твердження дозволяє в ряді випадків значно зменшити розмірність платіжної матриці за рахунок вилучення неактивних стратегій обох гравців. Тому особливий інтерес викликають ігри із розмірностями платіжної матриці $2 \times n$ та $m \times 2$. Для них розроблено графічний метод розв'язування. Для гри будується її графічне зображення. У випадку гри $2 \times n$ виділяється верхня (12.2) границя виграшів та визначається точка з найменшою ординатою, а у випадку гри $m \times 2$ – нижня (12.1) границя виграшів та визначається точка з найбільшою ординатою. Знайдена ордината буде дорівнювати ціні гри, а пара стратегій, перетин яких визначає знайдену точку, є активними стратегіями відповідного гравця. Якщо в цій точці перетинається більше двох стратегій, вибираємо тільки дві з них.

Далі розв’язуємо гру 2×2 та знаходимо оптимальні змішані стратегії гравців.

Можна рекомендувати таку послідовність розв’язування матричної гри двох гравців:

1. Досліджуємо платіжну матрицю на наявність сідлової точки: якщо вона є – виписуємо оптимальні чисті стратегії та ціну гри;
2. Виділяємо активні стратегії гравців, використовуючи поняття домінування та підпорядкованості. Стовпчики та рядки матриці, що відповідають неактивним стратегіям, викреслюємо;
3. Якщо отримана після спрощення матриця має розмірність 2×2, $2\times n$ або $m\times2$, знаходимо розв’язок гри;
4. В інших випадках зводимо гру до пари двоїстих ЗЛП та знаходимо її розв’язок.

<u>Література</u>: [5,с.116; 3,с.239]

<u>Завдання</u>:

Лабораторна робота1. Побудова моделі гри. (4/1 год.)

Завдання: Побудувати платіжні матриці гри з точки зору першого та другого гравців. Дослідити можливість розв’язання гри у чистих стратегіях та відшукати розв’якок гри у чистих стратегіях, якщо це можливо. У противному випадку – дати верхню та нижню оцінки ціни гри.

Варіант 1

Кожен із двох гравців, не знаючи вибору іншого, кладе свою монету гербом або решкою догори. Співпадіння гербів дає подвійний виграш першому гравцю, а не співпадіння сторін монет призводить до потрійного програшу першого гравця.

Варіант 2

Два гравці незалежно один від одного вибирають одне із чисел -1, 0, 1. Позначимо число, вибране першим гравцем через s, а вибране другим – через t. Сума, яку другий гравець виплатить першому задається формулою $s(t-s)+t(t+s)$.

Варіант 3

Два гравці незалежно один від одного вибирають одне із чисел 1, 2, 3. Якщо ними вибрано одне і те саме значення, то перший гравець виплачує другому суму в розмірі вибраного числа. В іншому випадку перший отримає суму виграшу, рівну числу вибрану ним.

Варіант 4
Кожен із двох гравців може вибрати один із трьох предметів: «камінь», «мішок», «ножиці», причому «мішок» перемагає «камінь», «ножиці» – «мішок», «камінь» – «ножиці». Гравець, який вибрав виграшний предмет, отримає одиницю виграшу. Якщо гравці обирають однакові предмети, гра закінчується нічиєю.

Варіант 5
Гравці обирають одне із цілих чисел від 1 до k. Якщо перший вибрав i, а другий – j, то перший отримує i – j одиниць виграшу, якщо $i \geq j$, та виплачує $i + j$ одиниць виграшу, якщо $i < j$.

Варіант 6
Кожен із двох гравців обирає одне із цілих чисел між 1 і 9. Якщо число, вибране одним із гравців, на одиницю більше, ніж число, вибране другим, то перший гравець програє дві одиниці виграшу. Якщо вибір одного із гравців більше хоча-б на дві одиниці, то перший гравець отримує одну одиницю виграшу. У тому випадку, коли вибрані гравцями числа співпадають, гра закінчується нічиєю.

Варіант 7.
Перший гравець називає одне з чисел 1 або 2, а другий – одне із чисел 1, 2, 3. При цьому кожний із партнерів намагається вгадати, яке із чисел назве противник. Якщо обидва партнери вгадали або помилились одночасно, то гра закінчується нічиєю, якщо ж один із них вгадав, то він отримує виграш, що дорівнює числу, названому противником.

Варіант 8
1.Полководець, який захищає місто, має три дивізії, а у його противника – дві дивізії. Відомо, що місто капітулює, тільки в тому випадку, якщо на одній з двох застав наступаючі дивізії матимуть в чисельну перевазу.

Варіант 9
Обидва гравці обирають і називають одну з чотирьох літер із сукупності – {a, c, b, d}. Гравець який назвав літеру, яка знаходиться раніше у цій сукупності, отримує одиницю виграшу. Якщо обидва гравці називають однакову літеру, гра завершується нічиєю .

Варіант 10
Гра полягає в тому, що перший гравець записує одне з чисел 1,2 або 3. Другий гравець, в свою чергу, може записати число 1,2,3 або 4. Якщо обидва числа виявляться однакової парності, то перший виграє суму цих чисел, якщо різної парності, то другий виграє суму цих чисел.

Варіант 11.
«Двопальцева Морра». Кожний із двох гравців показує іншому один або два пальці і одночасно називає кількість пальців, які, на його думку, має показати противник. Якщо один із противників вгадує правильно, він виграє суму, що дорівнює числу пальців, вказаних обома противниками, в іншому випадку – нічия.

Варіант 12.
У полководця, що обороняє місто, є 4 дивізії, а у його противника – 3 дивізії. Відомо, що місто буде здане тільки у тому випадку, коли на одній із двох застав наступаючі дивізії опиняться у чисельній перевазі.

Варіант 13
Кожен з двох гравців показує другому 1,2 або 3 пальці і одночасно намагається вгадати кількість пальців, показаних його противником. Якщо один із гравців вгадує правильно, він виграє суму, яка рівна кількості пальців, показаних обома гравцями, в іншому випадку – нічия.

Варіант 14
Два воєнних підрозділи з метою розвідки визначеного району можуть одночасно вислати або танк, або бійців із протитанковою зброєю, або бійців-кулеметників. Якщо в цьому районі

зустрінуться бойові одиниці однакових видів, то розвідка не відбудеться, и жодна зі сторін нічого не отримує. При зустрічі різних підрозділів: танк перемагає бійців-кулеметників, бійці-кулеметники перемагають бійців із протитанковою зброєю, бійці з протитанковою зброєю перемагають танк. Виграш оцінюється одиницею.

Лабораторна робота2(а). Графічне розв'язування матричних ігор. (6/1 год.)

Лабораторна робота3(b). Зведення матричної гри до меншої розмірності. (6/0 год.)

Лабораторна робота4(c). Розв'язування матричних ігор зведенням до пари двоїстих задач із відшуканням розв'язку за допомогою математичних пакетів. (6/1 год.)

<u>Варіанти завдань</u>

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 19 & 15 & 17 & 16 \\ 0 & 20 & 15 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

8. a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

11. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

13. a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

15. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

16. a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 5 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

18.a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & -3 \\ 7 & 7 & 6 & 3 & -5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 5 & -4 \\ 1 & 5 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20.a) $\begin{pmatrix} 42 & 34 & 31 \\ 47 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

22. a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

23. a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 5 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

24.a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 25 & 22 & 32 & 13 \\ 44 & 22 & 33 & 13 \\ 32 & 31 & 30 & 12 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

25. a) $\begin{pmatrix} 21 & -11 \\ 10 & 31 \\ -41 & 0 \\ 22 & -43 \\ 11 & 32 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. a) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

27. a) $\begin{pmatrix} 14 & 13 & 23 \\ -2 & 19 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

28. a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

29. a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

30.a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

<u>Додаткові запитання:</u>

1. Дайте визначення верхньої та нижньої ціни гри, якими співвідношеннями вони зв'язані?
2. Наведіть умови існування оптимальних чистих стратегій.
3. Що таке змішані стратегії гравців та які умови існування оптимальних змішаних стратегій?
4. Як знаходити активні та неактивні стратегії?
5. Виведіть формули для розв'язання гри 2×2.