“СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ”

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 1

Чернівці
2019

ББК 22.183.492

П 627

УДК 519.863

Системний аналіз та теорія прийняття рішень. Конспект лекцій – Ч.1. / Укл.: Руснак М.А. – Електронне видання: 2019. – 33 с.

Укладачі: Руснак Микола Андрійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І ОПТИМІЗАЦІЯ В БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ТА ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

1.1. Прийняття рішень (вибір) і оптимізація

1. Критеріальний підхід до вибору альтернатив

Прийняття рішень (вибір) є дією, яка надає людській діяльності цілеспрямованості. Вибір реалізує підпорядкованість людської діяльності певній цілі (чи сукупності певних цілей). В людській діяльності наступають моменти коли подальші дії можуть бути різними, а значить приводити до різних результатів (добрих, поганих, задовільних, трагічних, і т.д.).

Будемо вважати, що *прийняття рішень* (вибір) це дія над множиною альтернатив, в результаті якої отримується підмножина вибраних альтернатив (зокрема одна альтернатива). Звужувати множину альтернатив можливо, якщо існує спосіб порівняння альтернатив між собою і визначення переважаючих. Кожен такий спосіб називається *критерієм переваг*. Зрозуміло, що процедурі прийняття рішень передує процедура формування множини альтернатив і завчасно визначені цілі, заради досягнення яких здійснюється вибір. Найбільш простим і часто вживаним являється критеріальний підхід до визначення альтернатив – суть якого полягає в тому, що кожну альтернативу можна оцінювати конкретним дійсним числом, а порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм дійсних чисел. Позначимо через X множину всіх альтернатив, а її елементи через x. На множині X задамо функцію $f(x)$, яка володіє властивістю, що якщо альтернатива x_1 переважає альтернативу x_2, то $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки. Таку функцію називають: *критерієм, критерієм якості, цільовою функцією, функцією переваг, функцією корисності*. Якщо крім цього вважати, що значення критерію виражає оцінку наслідку вибору альтернативи x, тоді природно вибирати альтернативу x^*, яка дає найбільше значення критерію:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f(x). \qquad (1.1)$$

Проте, як показує практика, оцінка альтернативи одним критерієм є занадто великим спрощенням ситуації. Життя вимагає оцінювати альтернативи не по одному, а по декількох критеріях, які якісно відрізняються між собою. Наприклад, при проектуванні літака конструкторам необхідно врахувати багато критеріїв, таких як:

1) технічні: висота польоту, швидкість, вантажопідйомність, необхідна довжина злітно-посадочної смуги, тривалість польоту, вага літака і т.д.;
2) економічні: затрати на виробництво, експлуатацію і обслуговування, конкурентноздатність;
3) екологічні: рівень шуму, забруднення атмосфери;
4) ергономічні: умови роботи екіпажу, рівень комфорту пасажирів і т.д.

Будемо вважати, що кожна альтернатива оцінюється m критеріями: $f_i(x),\ i = \overline{1,m}$. Без обмеження загальності можна вважати, що всі частинні критерії $f_i(x)$ діють в одному і тому ж напрямку (інгредієнті), тобто виражають лише позитивні або лише негативні якості альтернативи. Цього легко добитися за рахунок зміни знаків окремих частинних критеріїв.

2. Нормалізований мультикритерій

Відмітимо також, що з метою покращення вибору часто переходять до *нормалізованого мультикритерію* $f_i'(x),\ i = \overline{1,m}$, шляхом введення безрозмірних величин, приведення до однієї розмірності, тощо. Наведемо найбільш часто вживані способи нормалізації:

а) зведення до безрозмірних величин

$$f_i'(x) = f_i(x) / \rho(f_i(x)),$$

де $\rho(\cdot)$ – деяка функція;

б) зведення до однієї розмірності

$$f_i'(x) = f_i(x) / \alpha(i),$$

де $\alpha(i)$ – деяка вагова функція;

в) зміна напрямку (інгредієнта)

$$f_i'(x) = -f_i(x) \text{ або } f_i'(x) = 1/ f_i(x);$$

г) природній

$$f_i'(x) = \frac{f_i(x) - f_{\min}(x)}{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)},$$

де $f_{\min}(x) = \min\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x), \; f_{\max}(x) = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x);$

д) порівняння

$$f_i'(x) = f_i(x) / \max_{x \in X} f_i(x);$$

е) усереднення

$$f_i'(x) = f_i(x) / \sum_{i=1}^{m} f_i(x).$$

Припустимо, що в множині X існує альтернатива $\bar{x}$, яка приймає найбільше значення по всіх m критеріях:

$$f_i(\bar{x}) > f_i(x), \; i = \overline{1,m}, \text{ для всіх } x \in X. \tag{1.2}$$

Тоді ця альтернатива $\bar{x}$ являється найкращою і проблеми вибору в такій ситуації не існує. На практиці такі випадки малоймовірні. Більш реальною є ситуація, коли найбільші значення критерії досягають на різних альтернативах. Розглянемо основні підходи до розв’язування багатокритеріальних задач.

3. Суперкритерій

Зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної здійснюється введенням *суперкритерію*, тобто скалярної функції векторного аргументу

$$f_0(x) = \overline{f}_0\left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\right). \qquad (1.3)$$

Після згортки розв'язується звичайна оптимізаційна задача

знайти $x^* = \arg\max\limits_{x \in X} f_0(x)$ $\left(\text{або } x^* = \arg\min\limits_{x \in X} f_0(x)\right)$.

Наведемо приклади найуживаніших згорток:

а) лінійна

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

б) максимізаційна

$$f_0(x) = \max_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

в) мінімізаційна

$$f_0(x) = \min_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

г) мультиплікативна

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

д) Кобба – Дугласа

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} [\alpha(i) f_i(x)]^{\beta(i)},$$

де $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$ – задані функції натурального аргументу i, $i = \overline{1,m}$.

Вкажемо на недоліки пов'язані з використанням суперкритерію:

- важко обґрунтувати використання певного типу згортки;
- існує проблема вибору параметрів згортки – функцій $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$;
- незначна зміна функції, яка визначає згортку, приводить до значних відхилень розв'язків задачі багатокритеріальної оптимізації.

4. Метод головного частинного критерію

Наведені вище недоліки згортання декількох критеріїв обумовили появу інших підходів до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. Один із них полягає у використанні того факту, що частинні критерії нерівнозначні між собою, через те виділяють *основний, головний критерій* $f_{i_0}(x)$, а решту критеріїв вважають *додатковими*. Головний критерій максимізують при умові, що додаткові критерії залишаються на заданих їм рівнях. Розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації знаходять як розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \tag{1.4}$$

при обмеженнях

$$f_i(x) = c_i, \quad i = 1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m. \tag{1.5}$$

В багатьох практичних задачах обмеження (1.5) на додаткові критерії формулюються не у формі рівностей, а у формі нерівностей (наприклад, якщо додаткові критерії характеризують вартість витрат, то замість фіксації витрат розумніше задавати їх верхній рівень) і в результаті приходимо до наступної задачі:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \tag{1.6}$$

при обмеженнях

$$f_i(x) \le c_i, \quad i = 1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m. \tag{1.7}$$

5. Метод послідовних поступок

В методах оптимізації (1.4–1.5) і (1.6–1.7) різниця між основним і додатковими критеріями виглядає досить сильною. В методі *послідовних поступок* (який приводиться нижче) ця різниця дещо пом'якшується. Припускається, що критерії пронумеровані у порядку їх важливості, так що $f_1(x)$ – найважливіший з критеріїв, а $f_m(x)$ – найменш важливий. На першому кроці розв'язується задача мінімізації критерію $f_1(x)$:

$$x_1^* = \arg\max_{x \in X} f_1(x).$$

Нехай $f_1^{\max} = f_1(x_1^*)$. З практичних міркувань та прийнятої точності визначається поступка $\Delta_1 > 0$ (тобто величина, на яку зменшується досягнуте значення $f_1^{\max}$ найбільш важливого критерію, щоб за рахунок поступки постаратися наскільки це можливо, збільшити значення наступного по важливості критерію $f_2(x)$) і розв'язується задача оптимізації:

$$x_2^* = \arg\max_{x \in X} f_2(x)$$

при обмеженнях

$$f_1(x) \geq f_1^{\max} - \Delta_1.$$

Визначається $f_2^{\max} = f_2(x_2^*)$ і поступка $\Delta_2 > 0$.

На k-му кроці розв'язується задача:

$$x_k^* = \arg\max_{x \in X} f_k(x)$$

при обмеженнях

$$f_1(x) \geq f_1^{\max} - \Delta_1,$$

$$f_2(x) \geq f_2^{\max} - \Delta_2,$$

$$\ldots$$

$$f_{k-1}(x) \geq f_{k-1}^{\max} - \Delta_{k-1}.$$

Якщо значення x_m^* задовільне, то його приймають за розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації, інакше переходять на перший крок, змінюючи (збільшуючи) Δ_1 і т.д.

6. Пошук альтернативи із заданими властивостями

Третій підхід багатокритеріального вибору відноситься до того випадку коли завчасно можуть бути вказані бажані значення частинних критеріїв (або їх границі), і задача полягає в тому, щоб знайти альтернативу, яка задовольняє цим вимогам, або чи встановити, що такої альтернативи у множині X не існує і вказати альтернативу, яка підходить до поставленої цілі ближче всього.

Бажані значення критеріїв $\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m}$ задають або точно, або у вигляді верхніх чи нижніх границь. Значення $\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m}$ називають *рівнями вимог*, а точку їх перетину x^* в m-вимірному просторі критеріїв *ціллю* (*опорною точкою* чи *ідеальною точкою*). Так як рівні вимог задаються без точного знання структури множини X, то цільова точка може лежати як всередині так і поза множиною X (досяжна чи недосяжна ціль). Оптимізаційна задача полягає в побудові послідовності альтернатив $x^k,\ k=0,1,\ldots$, яка б в границі наближалася до x^*. Для цього вводиться числова міра близькості між альтернативою x і ціллю x^*, тобто між векторами $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_m(x)\right)$ і $\bar{f}=(\bar{f}_1, \bar{f}_2,\ldots, \bar{f}_m)$. В роботі [9] використовується така функція відстані

$$d_k(x)=\bar{d}_k\left(f(x),\bar{f}\right)=\left[\sum_{i=1}^{m} w_i\left|f_i(x)-\bar{f}_i\right|^k\right]^{1/k},$$

де параметр $k\in \mathrm{N}$, $w_i,\ i=\overline{1,m}$ – вагові коефіцієнти.

В роботі [48] використовується наступна функція відстані

$$d(x)=\bar{d}\left(f(x),\bar{f}\right)=\min_{i\in\overline{1,m}}\alpha_i\left(f_i(x)-\bar{f}_i\right)+\alpha_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f_i(x)-\bar{f}_i\right),$$

причому робиться припущення про невід’ємність різниці $f_i(x)-\bar{f}_i,\ i=\overline{1,m};$ $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ – коефіцієнти, які приводять доданки до однакової розмірності і одночасно враховують різну важливість критеріїв; коефіцієнт α_{m+1} виражає відношення до того, що важливіше – зменшити близькість до цілі будь-якого із частинних критеріїв чи сумарну близькість всіх критеріїв до цільових значень.

У випадку коли частина бажаних значень критеріїв є обмеженнями частинних критеріїв знизу

$$f_i(x) \geq \overline{f}_i, \quad i = 1, 2, .., m',$$

інша частина є обмеженням зверху

$$f_i(x) \leq \overline{f}_i, \quad i = m' + 1, .., m'',$$

а решту обмежень виконуються як рівності

$$f_i(x) = \overline{f}_i, \quad i = m'' + 1, .., m,$$

то функцію відстані можна вибирати в наступному вигляді

$$d(x) = \overline{d}\left(f_i(x), \overline{f} \right) = \min_{i \in \overline{1,m}} F\left(f_i(x), \overline{f}_i \right) + \alpha_{m+1} \sum_{i=1}^{m} F\left(f_i(x), \overline{f}_i \right),$$

де

$$F\left(f_i(x), \overline{f}_i \right) = \begin{cases} \alpha_i \left(f_i(x) - \overline{f}_i \right), & \text{якщо } 1 \leq i \leq m', \\ \alpha_i \left(\overline{f}_i - f_i(x) \right), & \text{якщо } m' + 1 \leq i \leq m'', \\ \alpha_i \min\left\{ f_i(x) - \overline{f}_i, \overline{f}_i - f_i(x) \right\}, & \\ & \text{якщо } m'' + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

7. Метод бажаної точки

Для кожного критерію $\overline{f}_i(x),\ i = \overline{1,m}$ розраховується найбільше і найменше його значення на множині альтернатив X :

$$f_i^{\max} = \max_{x \in X} f_i(x); \ f_i^{\min} = \min_{x \in X} f_i(x), \ i = \overline{1,m}.$$

Далі переходять до нових (нормованих, безрозмірних) критеріїв $w_i(x), \quad i = \overline{1,m}$:

$$w_i(x) = \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1,m}.$$

На k –му кроці алгоритму на основі аналізу вибираються бажані значення критеріїв:

$$h_i^k \in [f_i^{\min}, f_i^{\max}], \quad i = \overline{1,m}$$

і на цій основі розраховуються значення

$$w_i^k = \frac{f_i^{\max} - h_i^k}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Потім обчислюють вагові коефіцієнти нових критеріїв

$$\alpha_i^k = \frac{\prod\limits_{j=1,\, j\neq i}^{m} w_j^k}{\sum\limits_{j=1}^{m} \prod\limits_{l=1, l\neq j}^{m} w_l^k}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі

$$x^k = \arg\max_{x\in X} \min_{i=\overline{1,m}} \alpha_i^k w_i(x).$$

В знайденій точці x^k обчислюється значення всіх критеріїв

$$\left(f_1(x^k), f_2(x^k), ..., f_m(x^k) \right).$$

Якщо цей вектор значень критеріїв задовольняє особу, що приймає рішення, то x^k – шукана альтернатива; інакше здійснюється перехід на $(k+1)$-й крок, тобто на основі аналізу вибираються нові бажані значення критеріїв h_i^{k+1}, $i = \overline{1,m}$ і т.д.

8. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Будемо вважати, що задана функція $\varphi(x, y)$, яка визначена на декартовому добутку множин X та Y, де X – множина альтернатив а Y – множина неконтрольованих факторів (збурень). Функція (критерій) $\varphi(x, y)$ характеризує якість альтернативи $x \in X$ при певному значенні неконтрольованих факторів $y \in Y$. Вважаємо, що критерій $\varphi(x, y)$ виражений в позитивному інгредієнті й характеризує позитивну якість стратегії x (наприклад прибуток, дохід, інтегральний рівень життя тощо), тому задача прийняття рішень полягає у виборі альтернативи x, яка буде робити в деякому розумінні критерій “більшим” при різних $y \in Y$.

Якщо неконтрольовані фактори фіксовані, тобто множина Y складається із одного елемента y^0, $Y = \{y^0\}$ (такі одноелементні множини називають синглетонами), то пошук найкращої альтернативи це звичайна оптимізаційна задача знаходження вектора $x^* \in X$, для якого критерій $\varphi(x^*, y^0)$ приймає максимальне можливе значення.

Якщо неконтрольованих факторів багато, тоді можливий варіант, коли найкраща альтернатива для одного неконтрольованого фактора буде найгіршою для іншого неконтрольованого фактора. В такому випадку найчастіше використовуються такі дві оцінки ефективності альтернатив: *гарантовані* $\Phi(x)$ та *середні* $S(x)$.

Гарантована оцінка $\Phi(x)$ ефективності альтернатив орієнтована на найгіршу дію неконтрольованих факторів

$$\Phi(x) = \min_{y \in Y} \varphi(x, y) . \tag{1.8}$$

В тому випадку, коли критерій $\varphi(x, y)$ виражений в негативному інгредієнті (характеризує, наприклад, штрафи, витрати, забруднення, тощо), то гарантована оцінка теж орієнтована на найгіршу дію неконтрольованих факторів і має вигляд

$$\Phi(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x, y) . \tag{1.9}$$

Оптимальну гарантовану альтернативу $\overline{x}^*$ можна обчислити, розв’язуючи максимінну задачу

$$\Phi(\overline{x}^*) = \max_{x \in X} \Phi(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \varphi(x, y)$$

у випадку (1.8), і розв’язуючи мінімаксну задачу

$$\Phi(\overline{x}^*) = \min_{x \in X} \Phi(x) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \varphi(x, y)$$

у випадку (1.9).

Для знаходження середньої оцінки ефективності $S(x)$ усереднюють значення критерію ефективності $\varphi(x, y)$ по всіх значеннях неконтрольованих факторів y, $y \in Y$. Спочатку припустимо, що множина неконтрольованих факторів Y складається із скінченого набору

$$Y = \{y^i, \ \ i = \overline{1, m}\}. \tag{1.10}$$

Тоді середня оцінка визначається формулою

$$S(x) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \varphi(x, y^i), \tag{1.11}$$

де ρ_i, $i = \overline{1, m}$ – вагові коефіцієнти (в основному їх вибирають із таких умов:

$$\rho_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}; \ \ \sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1).$$

Якщо множина неконтрольованих факторів злічена (тобто в рівності (1.10) $m \to \infty$), тоді вагові коефіцієнти ρ_i, $i = 1, 2, ...$ вибираються таким чином, щоб ряд (1.11) збігався.

Розглянемо третій випадок, коли множина неконтрольованих факторів Y є проміжком дійсної осі (скінченим чи нескінченим). Тоді середня оцінка ефективності $S(x)$ визначається таким співвідношенням

$$S(x) = \int_Y \rho(y) \varphi(x, y) dy, \tag{1.12}$$

де вагова функція $\rho(y)$ задовольняє умовам:

$$\rho(y) \geq 0, \ \ y \in Y; \ \ \int_Y \rho(y) dy = 1.$$

Оптимальною у середньому називається альтернатива $\hat{x}^*$, яка задовольняє умову

$$S(\hat{x}^*) = \max_{x \in X} S(x).$$

Накінець відмітимо, що оптимальні альтернативи у середньому використовують і тоді, коли неконтрольовані фактори є випадковою величиною чи випадковим вектором. Критерій ефективності є випадковою величиною $\varphi(x, y)$, а за осереднену оцінку альтернативи x приймають математичне сподівання

$$E_y\varphi(x,y)=S(x).$$

При цьому $S(x)$ задається:

формулою (1.11) при умові, що неконтрольований випадковий фактор y приймає значення y^i з ймовірністю ρ_i;

формулою (1.12), коли неконтрольований фактор y є випадковою величиною із щільністю розподілу $\rho(y)$ на проміжку Y.

9. Приклади постановок задач багатокритеріальної оптимізації

1. Задача проектування оптимального програмного комплексу. При проектуванні програмного комплексу (ПК) необхідно забезпечити виконання декількох вимог: зменшити вартість ПК, збільшити точність задання вхідних даних, скоротити об'єм оперативної пам'яті, зменшити час роботи ПК, зменшити завантаження каналів зв'язку між ЕОМ і зовнішніми запам'ятовуючими пристроями і т.д. Припускається, що ПК повинен реалізувати множину операцій $a=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$. Під операцією розуміється, наприклад, розв'язування лінійних чи нелінійних алгебраїчних рівнянь, систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь, знаходження екстремумів функцій певного типу, сортування інформації, пошук інформації і т.д.

Кожна із операцій $a_i\in a$ може бути реалізована будь-якою програмою із заданої множини $P_i=\left(p_{i1},p_{i2},...,p_{ik_i}\right)$, $i=\overline{1,n}$. Кожна програма p_{ij} характеризується своїми ознаками, які впливають на вимоги до ПК. Програмний комплекс представляє собою набір програм

$$P = \left(p_{1j_1}, p_{2j_2}, \ldots, p_{nj_n} \right),$$

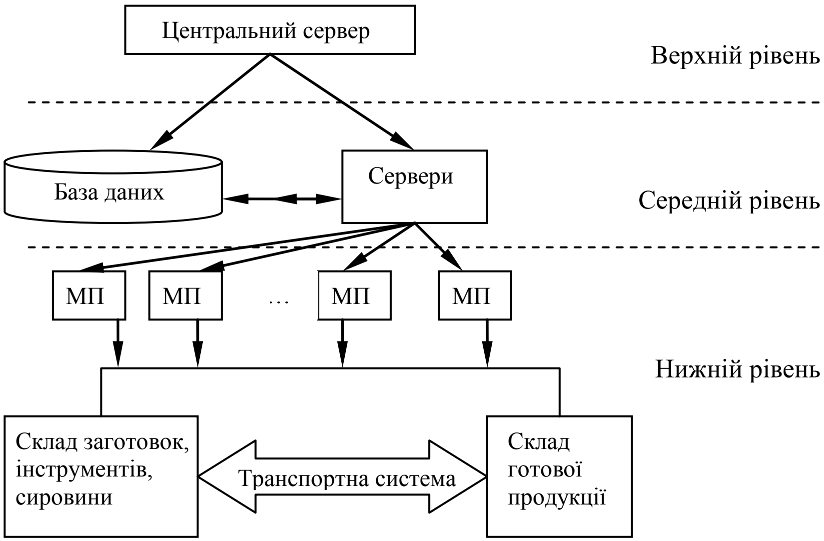
де $p_{ij_i} \in P_i$, $i = \overline{1,n}$.

Для оцінки якості програмного комплексу $P = \left(p_{1j_1}, p_{2j_2}, \ldots, p_{nj_n} \right)$ вводиться векторний критерій $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_m(P))$. Відображення $\varphi : P \to R^m$ задає правило, по якому кожному набору із n програм відповідає векторна оцінка виконання вимог до ПК. Таким чином задача проектування оптимального програмного комплексу являється багатокритеріальною оптимізаційною задачею.

2. Трьохрівнева задача керування гнучким автоматизованим виробництвом. Гнучке автоматизоване виробництво (ГАВ) являє собою систему, яка складається із підсистем:

- автоматизовані технологічні модулі (станки, лінії, ділянки);
- автоматизований транспорт;
- автоматизовані склади.

Керування роботою цих підсистем і здійснення зв'язків між ними забезпечує підсистема керування ГАВ (ПК ГАВ). З її допомогою здійснюється запуск, керування і контроль за роботою технологічного обладнання, синхронізація виконуваних робіт, оптимізація завантаження обладнання, формування графіку робіт транспортних засобів, автоматизованих складів і т.д. Найбільш поширеною ПК ГАВ є трьохрівнева система керування (мал.1)



Мал. 1. Принципіальна схема трьохрівневої системи керування ГАВ

Верхній рівень розв'язує задачі організаційно-економічного характеру й приймає довгострокові рішення: проводить розрахунок позмінних завдань по кожному станку, завдань по технологічній підготовці ділянки; обліковує запас заготовок, інструменту і сировини на складі; накопичує інформацію для різних служб цеху.

Середній рівень здійснює контроль за роботою мікропроцесорних систем (МП); приймає оперативні рішення у відповідності з надходженням від підсистем нижнього рівня інформації; виробляє керуючі дії на ці підсистеми.

Нижній рівень забезпечує за допомогою мікропроцесорних систем безпосереднє управління технологічним процесом.

Аналіз і управління роботою ГАВ потребує розв'язування значної кількості оптимізаційних багатокритеріальних задач, задач мережевого планування, транспортних задач, задач розміщення і т.д.

1.2. Оптимізація в системах з ієрархічною структурою

Системами з ієрархічною структурою називають сукупність підсистем, які мають послідовне вертикальне розташування з встановленим пріоритетом дій і прийняття рішень, причому результати дій підсистем верхнього рівня залежать від дій підсистем нижчих рівнів. На діяльність підсистем будь-якого рівня (крім верхнього) безпосередню дію справляють підсистеми, які розміщені на більш високих рівнях. Хоча така дія направлена зверху вниз, успіх дії системи в цілому і кожного рівня залежить від поведінки всіх елементів системи. Поняття пріоритету дій вказує на те, що вплив підсистем верхнього рівня передує діям більш низьких рівнів. Тому успішність роботи підсистем вищестоящих рівнів залежить не тільки від власних дій, але й від реакцій підсистем нижніх рівнів на цей вплив.

Підсистему найвищого рівня називають центром, а підсистеми більш низьких рівнів називають елементами. В системах керування елементам надано право виробляти певні керуючі дії, прийняти рішення. Тому поряд з ієрархією системи кажуть про ієрархічну структуру керування. Ієрархічна структура керування в складній системі являє собою сукупність рівнів керування, які слідують один за одним в порядку певного пріоритету. Між елементами різних рівнів ієрархії існують як вертикальні, так і горизонтальні зв’язки.

Поява ієрархічної структури в системах керування і прийняття рішень обумовлена наявністю великого об’єму інформації про керовані процеси в системі, неможливістю обробки цієї інформації і прийняття рішень одним центром керування, а також існуючою в реальних системах децентралізацією процесу прийняття рішень, коли елементи, які підпорядковуються центру, виробляють керуючі дії виходячи із вказівок центру і з врахуванням власних інтересів.

Розглянемо математичну модель *дворівневої ієрархічної системи керування*. Нехай центру Q_0 підпорядковані елементи системи управління $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, які надалі будемо називати підсистемами. Центр Q_0 виробляє керуючу дію $u = \left(u^1, ..., u^m\right)$ і повідомляє її підсистемам нижчого рівня $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, які в свою чергу вибирають власні керування $v^1\left(u^1\right), v^2\left(u^2\right), ..., v^m\left(u^m\right)$ із деяких множин допустимих керувань, відповідно, $V^1\left(u^1\right), V^2\left(u^2\right), ..., V^m\left(u^m\right)$, що залежать від вибору керування центром Q_0. Позначимо через U множину допустимих керувань центра Q_0. Керування $u \in U$ будемо називати *допустимим*, якщо для будь-якого $i = \overline{1, m}$ всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1, m}$ не являються порожніми.

1. Тривіальний випадок

Якщо для будь-якого $u \in U$ всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1, m}$ складаються із єдиних керувань, то в цьому випадку центр володіє повною інформацією про реакцію підсистем нижчого рівня на своє керування.

Нехай $\varphi_0(u, v)$ – критерій оптимальності центра Q_0 (тут $u = \left(u^1, u^2, ..., u^m\right)$, $v = \left(v^1, v^2, ..., v^m\right)$), а $\varphi_i\left(u^i, v^i\right)$, $i = \overline{1, m}$ - критерії оптимальності підсистем $Q_1, Q_2, ..., Q_m$. Центр і підсистеми вибираючи свої керування, намагаються максимізувати свої критерії. У випадку, коли всі множини $V_i\left(u^i\right)$, $i = \overline{1, m}$ складаються із одного елемента, тобто $V_i\left(u^i\right) = \left\{v_i\left(u^i\right)\right\}$, то центр вибирає своє керування з умови

$$\varphi_0\left(u^*, v\left(u^*\right)\right) = \max_{u \in U} \varphi_0\left(u, v(u)\right) \qquad (1.13)$$

(тут $v\left(u^*\right) = \left(v^1\left(u^{1*}\right), \ldots, v^m\left(u^{m*}\right)\right)$), а значення критеріїв підсистем будуть такими

$$\varphi_1\left(u^{1*},v^1\left(u^{1*}\right)\right), \varphi_2\left(u^{2*},v^2\left(u^{2*}\right)\right),..., \varphi_m\left(u^{m*},v^m\left(u^{m*}\right)\right).$$

Отже в тривіальному випадку центр вибираючи оптимальне керування $u*$ (з точки зору центру) однозначно визначає значення критеріїв центра і всіх підсистем.

2. Загальний випадок

Природно припускати, що вибір центром Q_0 допустимого керування $u \in U$ визначає не єдине керування кожної підсистеми, тобто кожна із множин $V_i\left(u^i\right)$, $i=\overline{1,m}$ складаються більше ніж із одного елемента. Визначимо множину $G_i\left(u^i\right)$ оптимальних реакцій i-ої підсистеми на керування $u \in U$ центра наступним чином:

$$G_i\left(u^i\right)=\left\{v^i \in V_i\left(u^i\right) | \varphi_i\left(u^i,v^i\right) \geq \varphi_i\left(u^i,\bar{v}^i\right)\right.$$

$$\left.\forall\ \bar{v}^i \in V_i\left(u^i\right)\right\}, \quad i=\overline{1,m}.$$

Якщо множини $G_i\left(u^i\right)$, $i=\overline{1,m}$ не є одноелементними, то центр Q_0 приймаючи певне рішення (вибираючи керування $u \in U$) знаходиться в умовах невизначеності. Роблячи певні припущення про характер реакцій підсистем $Q_1,Q_2,...,Q_m$ на керування u центру Q_0, приходимо до різних постановок задач оптимізації в дворівневих ієрархічних системах.

2.1. Принцип гарантованого результату.

Будемо припускати, що у відповідь на керування $u \in U$ центру Q_0 підсистеми $Q_1,Q_2,...,Q_m$ вибирають управління v^i, $i=\overline{1,m}$, які задовольняють нерівність

$$\varphi_0\left(u,v\right) \leq \varphi_0\left(u,\bar{v}\right) \quad \forall \bar{v}^i \in G_i\left(u^i\right), \ i=\overline{1,m}, \tag{1.14}$$

тобто підсистеми $Q_1,Q_2,...,Q_m$ діють найгіршим чином для центра Q_0. Тоді для центра найкращим буде вибір керування $\bar{u} \in U$, яке задовольняє наступним співвідношенням

$$\varphi_0\left(\bar{u},\bar{v}\right) = \min_{v \in G(\bar{u})} \varphi_0\left(\bar{u},v\right) \geq \min_{v \in G(u)} \varphi_0\left(u,v\right) \quad \forall u \in U, \qquad (1.15)$$

де $G(u) = \prod_{i=1}^{m} G_i\left(u^i\right)$.

Вибір центром Q_0 керування $\bar{u} \in U$ згідно умов (1.14)–(1.15) називають *принципом гарантованого результату*.

2.2. Прийняття рішень в умовах доброзичливості.

Якщо припустити, що проявляючи доброзичливість до центру, підсистеми $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ у відповідь на керування $u \in U$ центру вибирають найкращі для нього керування $\hat{v}\left(u^i\right),\ i = \overline{1,m}$, тобто

$$\varphi_0\left(u,\hat{v}(u)\right) = \max_{v \in G(u)} \varphi_0\left(u,v\right). \qquad (1.16)$$

Тоді природно вважати, що центр Q_0 буде вибирати своє керування $\hat{u}$ з умови

$$\varphi_0\left(\hat{u},\hat{v}(\hat{u})\right) = \max_{u \in U} \varphi_0\left(u,\hat{v}(u)\right) = \max_{u \in U} \max_{v \in G(u)} \varphi_0\left(u,v\right). \qquad (1.17)$$

Оскільки для будь-якого $u \in U$ виконується нерівність

$$\max_{v \in G(u)} \varphi_0(u,v) \geq \min_{v \in G(u)} \varphi_0(u,v),$$

то справджується також і наступна нерівність

$$\max_{u \in U} \max_{v \in G(u)} \varphi_0(u,v) \geq \max_{u \in U} \min_{v \in G(u)} \varphi_0(u,v),$$

яка стверджує, що діючи в умовах доброзичливості центр отримує більше значення критерію, ніж в умовах гарантованого результату.

3. Приклади ієрархічних систем керування

3.1. Приклад 1. (**Розподіл ресурсів** [5, стор. 131])

Адміністративний центр Q_0 розподіляє обмежений об'єм ресурсів між підлеглими йому підрозділами

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, які використовують цей ресурс для виробництва продукції з врахуванням власних критеріїв.

Нехай центр виділяє для i-го підрозділу набір ресурсів із l найменувань, який позначено вектором $u^i = \left(u_1^i, u_2^i, \ldots, u_l^i\right)$, тобто центр вибирає систему із m векторів

$$u = \left(u^1, u^2, \ldots, u^m\right),$$

які задовольняють умовам

$$u^i \geq 0, \;\; i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u^i \leq b,$$

де b – вектор максимально можливих об'ємів ресурсів центра. Кожен із підрозділів Q_i, знаючи вибір центру Q_0, визначає вектор $v^i = \left(v_1^i, v_2^i, \ldots, v_n^i\right)$, який задовольняє нерівностям

$$v^i A_i \leq u^i + g^i, \;\; v^i \geq 0, \;\; g^i \geq 0, \; A_i \geq 0. \qquad (1.18)$$

тут v^i інтерпретується як виробнича програма підрозділу Q_i по n видах виготовлюваної продукції; A_i – виробнича (технологічна) матриця підрозділу Q_i; g^i – вектор власних ресурсів підрозділу Q_i. Критерій центра Q_0 визначимо наступним чином:

$$\varphi_0(u, v) = \varphi_0\left(u^1, \ldots, u^m, v^1\left(u^1\right), \ldots, v^m\left(u^m\right)\right) = \sum_{i=1}^{m} \left\langle a^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle,$$

де $u = \left(u^1, u^2, \ldots, u^m\right)$ – керування центра Q_0; $v^i\left(u^i\right)$ – виробнича програма підрозділу Q_i, яка задовольняє нерівностям (1.18); $a^i = \left(a_1^i, \ldots, a_n^i\right) \geq 0$ – вектор корисності центру Q_0 від продукції, яка випускається підрозділом Q_i; $\left\langle a^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle$ – скалярний добуток векторів a^i та $v^i\left(u^i\right)$.

Критерій i-го виробничого підрозділу Q_i визначимо так:

$$\varphi_i\left(u^i, v^i\left(u^i\right)\right)=\left\langle c^i, v^i\left(u^i\right)\right\rangle, \quad i=\overline{1,m},$$

де $c^i=\left(c_1^i, c_2^i, \ldots, c_n^i\right) \geq 0$ – вектор корисності підрозділу Q_i від своєї продукції. І центр і кожен i-й підрозділ намагаються максимізувати свій критерій.

Пропонується наступна процедура прийняття рішення. Нехай $v_*^i\left(u^i\right), \quad i=\overline{1,m}$ – розв'язок задачі параметричного програмування (параметром вважається вектор u^i):

$$v_*^i\left(u^i\right)=\arg \max_{v^i \in G_i\left(u^i\right)}\left\langle c^i, v^i\right\rangle, \tag{1.19}$$

де $G_i\left(u^i\right)=\left\{v^i \mid v^i \geq 0, v^i A_i \leq u^i+g^i, u^i \geq 0, g^i \geq 0\right\}$,

а $u_*=\left(u_*^1, u_*^2, \ldots, u_*^m\right)$ – розв'язок задачі

$$u_*=\arg \max_{u \in U} \sum_{i=1}^m\left\langle a^i, v_*^i\left(u^i\right)\right\rangle, \tag{1.20}$$

де $U=\left\{u \middle| u^i \geq 0, \sum_{i=1}^m u^i \leq b\right\}$.

Неважко переконатися в справедливості таких нерівностей:

$$\varphi_0\left(u_*, v^*\left(u_*\right)\right) \geq \varphi_0\left(u, v^*(u)\right), \quad u \in U, \tag{1.21}$$

$$\varphi_i\left(u_*^i, v_*^i\left(u_*^i\right)\right) \geq \varphi_i\left(u_*^i, v^i\right), \quad v^i \in V^i\left(u_*^i\right), \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.22}$$

Нерівності (1.21), (1.22) вказують на те, що ні центру Q_0, ні підрозділам Q_i, $i=\overline{1,m}$ не вигідно відступати від ситуації

$$\left(u_*^1, \ldots, u_*^m, v_*^1\left(u_*^1\right), \ldots, v_*^m\left(u_*^m\right)\right).$$

Така ситуація в теорії ігор називається *рівновагою за Нешем*.

В даному прикладі центр впливає тільки на множину допустимих керувань підлеглих підрозділів і не впливає на їх критерії.

3.2. Приклад 2. (Задача нормування шкідливих викидів [5, стор. 133])

Рівень шкідливих викидів в певному регіоні описується скалярною функцією

$$q(v) = q(v^1,...,v^m) = \sum_{i=1}^{m} a^i v^i, \quad 0 \le v^i \le b^i, \; i = \overline{1,m},$$

де a^i, $i = \overline{1,m}$ – вагові коефіцієнти; v^i, $i = \overline{1,m}$ – об'єми викидів шкідливих речовин i-м підприємством. Залежність між об'ємами шкідливих викидів і затратами i-го підприємства на переробку не скинутих відходів задається функцією:

$$h_i\left(v^i\right) = c^i\left(b^i - v^i\right), \quad c_i > 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Якщо рівень забруднень в регіоні перевищує величину $q_{\max}$, то на підприємства накладаються штрафи $s^i > 0$, $i = \overline{1,m}$. Кожне підприємство намагається мінімізувати свій критерій

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1,...,v^m\right) = \begin{cases} c^i\left(b^i - v^i\right), & \text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a^i v^i \le q_{\max}, \\ c^i\left(b^i - v^i\right) + s^i, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a^i v^i > q_{\max}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Адміністративному центру доручено здійснювати контроль за рівнем забруднень шляхом встановлення обмежень шкідливих викидів підприємств і накладанням штрафів за забруднення, тобто встановлювати значення величин $b^1,...,b^m, s^1,...,s^m$. Центр намагається максимізувати свій критерій

$$\varphi_0\left(v^1,...,v^m\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a^i v^i \le q_{\max}, \\ 0, & \text{якщо } \sum_{i=1}^{m} a^i v^i > q_{\max} \end{cases} \tag{1.24}$$

шляхом вибору величин $b^1,...,b^m$, $s^1,...,s^m$. Нехай об'єми викидів $v = \left(v^1,...,v^m\right)$ такі, що виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} a^i v^i = Q. \qquad (1.25)$$

Тоді з (1.23), (1.24) впливає

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^m\right) = c^i\left(b^i - v^i\right), \ i = \overline{1,m},$$

$$\varphi_0\left(v^1, ..., v^m\right) = 1. \qquad (1.26)$$

Дослідимо при яких значеннях b^i, s^i вказано точка являється точкою мінімуму функції $\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^m\right)$ по аргументу v^i. Для цього фіксуємо значення викидів $v^1, ..., v^{i-1}, v^{i+1}, ..., v^m$ та покладемо $v^i = b^i$. Тоді отримуємо

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, b^i, v^{i+1}, ..., v^m\right) = s^i, \ i = \overline{1,m}.$$

Із формули (1.23) із врахуванням (1.25), (1.26) для $\bar{v}^i \in \left(v^i, b^i\right)$ і $\tilde{v}^i \in \left[0, v^i\right]$ випливають такі нерівності

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, \overline{v^i}, v^{i+1}, ..., v^m\right) >$$

$$> \varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, b^i, v^{i+1}, ..., v^m\right),$$

$$\varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, v^i, v^{i+1}, ..., v^m\right) <$$

$$< \varphi_i\left(b^i, s^i, v^1, ..., v^{i-1}, \tilde{v}^i, v^{i+1}, ..., v^m\right).$$

Отже для того, щоб вектор $\left(v^1, ..., v^m\right)$ являвся точкою мінімуму по кожному із аргументів, достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$c^i\left(b^i - v^i\right) < s^i.$$

Розв’язком задачі про нормування шкідливих викидів є будь-який вектор $\left(b^1, ..., b^m, s^1, ..., s^m, v^i, ..., v^m\right)$, який задовольняє умовам

$$\sum_{i=1}^{m} a^i v^i = q_{\max},$$

$$c^i\left(b^i - v^i\right) < s^i, \ b^i > 0, \ s^i > 0, \ i = \overline{1,m}.$$

В даному прикладі центр впливає як на область допустимих розв’язків підсистем (підприємств), так і на їх критерії (функції затрат).

3.3. Приклад 3. (Задача управління економічною системою за допомогою штрафів і доплат (заохочень)). [11].

Припускаємо, що i-те $(i=\overline{1,m})$ підприємство виробляє продукцію v^i, яка задається виробничою функцією Кобба-Дугласа:

$$v^i=\alpha_i x_i^{k_i} L_i^{1-k_i}, \quad k_i\in[0,1], \; i=\overline{1,m} \;, \tag{1.27}$$

де x_i – об’єм фондів, L_i – кількість робочої сили, α_i, k_i – деякі характеристики i-го підприємства. Для спрощення викладок надалі вважається, що $k_i = 1/2$, $i=\overline{1,m}.$ Цільову функцію (критерій) i-го підприємства задамо в такому вигляді:

$$\varphi_i(L_i)=c_i\alpha_i x_i^{1/2} L_i^{1/2}-\omega_i L_i+s_i(v^i), \quad i=\overline{1,m}, \tag{1.28}$$

де c_i – ціна продукту i-го підприємства , ω_i – середня ставка заробітної плати i-го підприємства, $s_i(v^i)$ – додаткова доплата (або штраф), яка виплачується центром i-му підприємству (який i-те підприємство платить центру) в залежності від об’ємів випуску продукції. Будемо вважати величини x_i, $i=\overline{1,m}.$ фіксованими, тому (1.28) можна записати так:

$$\varphi_i(L_i)=\bar{\alpha}_i L_i^{1/2}-\omega_i L_i+s_i(v^i), \quad i=\overline{1,m}, \tag{1.29}$$

де $\bar{\alpha}_i=c_i\alpha_i x_i^{1/2}$.

Підприємства вибираючи керування максимізують свій критерій. Центр зацікавлений, щоби підприємства приймаючи рішення знали заохочення чи штрафи, тобто вигляд функції $s_i(v^i)$. Для знаходження точки максимуму функції (1.29) при кожному i знайдемо її похідну й прирівняємо до нуля:

$$\frac{\partial \varphi_i(L_i)}{\partial L_i} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_i L_i^{-1/2} - \omega_i + \frac{ds_i}{dv^i} \cdot \frac{dv^i}{dL_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (1.30)$$

З рівняння (1.30) можна визначити значення L_i^*, на якому досягається максимум функції $\varphi_i(L_i)$. Зрозуміло, що L_i^* залежить від вигляду функції доплат (штрафів) $s_i(v^i)$, тобто L_i^* є фунціоналом від $s_i(v^i)$: $L_i^* = L_i^*[s_i(v^i)]$. У відповідності із формулою (1.27) оптимальний об'єм продукції i-го підприємства також буде функціоналом від функції $s_i(v^i): v^{i*} = v^{i*}[s_i(v^i)]$.

Задача центру полягає у виборі таких функцій доплат (штрафів) $s_i(v^i)$, $i = \overline{1,m}$, які доставляють максимум критерію центра $\phi(v^1,\ldots,v^m)$. Тобто з врахуванням оптимальної поведінки підприємств критерій центра можна записати у такому вигляді:

$$\phi = \phi(v^{1*}[s_1], v^{2*}[s_2], \ldots, v^{m*}[s_m]). \qquad (1.31)$$

Задача знаходження екстремального розв'язку функціоналу (1.31) є складною і нестандартною оптимізаційною задачею. Для її розв'язування необхідні спеціальні оптимізаційні методи.

Позначимо через $\hat{v}^i$, $i = \overline{1,m}$ об'єми продукції підприємств, на яких критерій центра $\phi = \phi(v^1,\ldots,v^m)$ приймає максимальне значення, і задамо функції штрафу підприємств в наступному вигляді:

$$s_i(v^i) = \lambda_i (v^i - \hat{v}^i)^2 - c_i \alpha_i x_i L_i^{1/2} + \omega_i L_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (1.32)$$

де λ_i, $i = \overline{1,m}$ – довільні від'ємні числа. Із співвідношень (1.28) і (1.32) отримуємо такий критерій i-го підприємства:

$$\varphi_i(v^i) = \lambda_i (v^i - \hat{v}^i)^2, \quad \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Звідси випливає, що оптимальним для i-го підприємства є випуск продукції $v^i = \hat{v}^i$, $i = \overline{1,m}$, тобто при виборі центром функції штрафу (1.32) інтереси центра і підприємств співпадають.

В реальних задачах величину штрафу чи заохочення або обмежують, тобто

$$s_i \in G_\varphi, \quad i = \overline{1,m},$$

де G_φ – деяка множина; або значення критерію центра вибирають залежним також від функцій s_i, $i = \overline{1,m}$, тобто

$$\phi = \phi[v^1, ..., v^m, s_1, ..., s_m].$$

Складність оптимізації такого критерію полягає в тому, що необхідно шукати функції $s_i(v^i)$, $i = \overline{1,m}$, які залежать від фазових координат v^i, $i = \overline{1,m}$. Нижче розглядаються два підходи для розв’язування таких задач. Перший підхід базується на ідеї параметризації шуканих функцій, а другий – на еквівалентності розв’язків ієрархічної гри двох осіб і спеціальної задачі нелінійного програмування [4]

Спочатку спростимо ситуацію: вважаємо, що система керування складається із центра і одного підприємства. Центр вибирає елемент x, підприємство – y, максимізуючи свої критерії:

$$\phi(x, y) \to \max_{(x,y)}, \tag{1.33}$$

$$\varphi(x, y) \to \max_{(x,y)}. \tag{1.34}$$

Центр вибирає функцію $x = \psi(y)$ і повідомляє її вигляд підприємству. Припускається, що підприємство доброзичливо відноситься до центру і вибирає y як розв’язок оптимізаційної задачі

$$\varphi(\psi(y), y) \to \max_{y}. \tag{1.35}$$

В результаті розв'язування цієї задачі визначається точково-множинний оператор $y = Y[\psi(\cdot)]$. Отже центру потрібно вибирати функцію $\psi(\cdot)$ як розв'язок задачі:

$$\sup_{\psi(\cdot)} \inf_{y \in Y[\psi(\cdot)]} \phi(\psi(y), y). \tag{1.36}$$

Якщо додатково припустити, що для будь-якої функції $\psi(\cdot)$ розв'язок задачі (1.35) єдиний, то замість (1.36) центру потрібно визначати функцію $\psi(\cdot)$, яка реалізує

$$\sup_{\psi(\cdot)} \phi(\psi(y), y),$$

де y – розв'язок (єдиний) задачі (1.35) при заданій функції $\psi(\cdot)$.

I. *Перший підхід* до розв'язування цієї задачі полягає в параметризації функції $\psi(y)$. Задамо, наприклад, цю функцію в квадратичному вигляді

$$\psi(y) = ay + by^2, \tag{1.37}$$

де a, b – деякі параметри.

Використовуючи представлення (1.37), критерій (1.35) можна записати в такій формі:

$$\varphi^*(a, b, y) \to \max_y .$$

Якщо розв'язок останньої оптимізаційної задачі при довільних параметрах a і b єдиний, то y – це деяка функція від параметрів a і b:

$$y = y(a, b),$$

і задача (1.34) перетворюється в спеціальну задачу математичного програмування.

II. Опишемо реалізацію *другого підходу*. Сформулюємо спочатку таку оптимізаційну задачу:

$$\varphi(x, y) \to \min_x . \tag{1.38}$$

Розв'язок x цієї задачі залежить від $y : x = x^*(y)$. Тепер сформулюємо наступну оптимізаційну задачу:

$$\varphi(x^*(y), y) \to \max_y . \tag{1.39}$$

Оптимальне значення функціоналу задачі (1.39) позначимо через φ^*, тобто $\varphi^* = \max\limits_{y} \varphi(x^*(y), y)$.

Накінець сформулюємо третю оптимізаційну задачу для центра:

$$\phi(x, y) \to \max_{(x,y)} \tag{1.40}$$

при обмеженнях

$$\varphi(x, y) \geq \varphi^*. \tag{1.41}$$

Позначимо розв'язок задачі (1.40), (1.41) через (x^0, y^0). Згідно з теоремою Гермейєра оптимальною стратегією центра буде функція $x(y)$:

$$x(y) = \begin{cases} \bar{x}^0, & \text{якшо } y = \bar{y}^0, \\ x^*(y), & \text{якщо } y \neq \bar{y}^0, \end{cases} \tag{1.42}$$

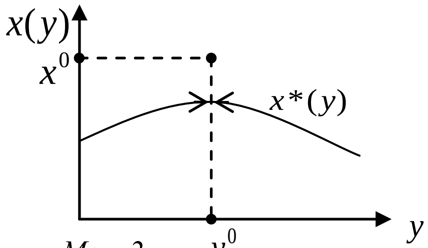
де $\bar{x}^0 = x^0$ та $\bar{y}^0 = y^0$, якщо $\varphi(x^0, y^0) > \varphi^*$; якщо ж $\varphi(x^0, y^0) = \varphi^*$, то $(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ такі, що $\varphi(x^0, y^0) > \varphi^*$ і $(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ з ε-точністю (яка задається центром) реалізують розв'язок задачі (1.40). Отже, якщо оптимізаційні задачі (1.38), (1.39), (1.40) розв'язані, то функція синтезу $x(y)$ виписується явно згідно (1.42).

Задачі (1.38), (1.39), (1.40) мають простий економічний зміст. Оптимізаційну задачу (1.38) можна трактувати, як задачу визначення таких дій центра на підприємство, які ставлять його в найбільш важкі умови. Оскільки ці дії знаходяться в певних рамках і кількість дій невелика, то задача (1.38) часто буває тривіальною. Наприклад, якщо центр визначає ціни, то вони повинні бути мінімальними, якщо штраф – то максимально допустимий і т.д.

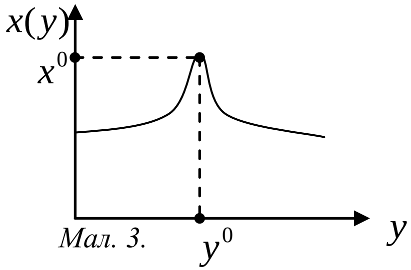
Задача (1.39) – це задача вибору підприємством своєї найкращої стратегії в найгірших для нього умовах, а величина φ^* – гарантований результат підприємства.

Задача (1.40) – це задача вибору оптимальної стратегії центра в умовах повної централізації з виконанням вимоги (1.41). Розв'язок $\left(x^0, y^0\right)$ інтерпретується як узгоджена програма: підприємству вигідно її притримуватись – воно отримує максимальне заохочення. Відступ від узгодженої програми призводить до погіршення результату.

На малюнку 2 зображено графік функції (1.42). Функція $x(y)$ є розривною.



Мал. 2.



Мал. 3.

Всюди (за виключенням точки y^0) вона співпадає з функцією $x^*(y)$– розв'язком задачі (1.38), який визначає найгірші умови функціонування підприємства – максимальний штраф. На практиці функція може змінюватися в певному діапазоні, тому замість (1.42) користуються згладженою функцією $x(y)$ (мал. 3).

Застосуємо обидва підходи до розв'язування початкової задачі управління дворівневою економічною системою. Ввівши позначення $z_i = L_i^{1/2}$, $i = \overline{1,m}$, максимізацію критерію (1.29) i-го підприємства з врахуванням (1.27), можна записати в такому вигляді

$$\varphi_i(z_i) = \bar{\alpha}_i z_i - \omega_i z_i^2 + s_i(z_i) \to \max \qquad (1.43)$$

при умовах $z_i \geq 0$, $s_i(z_i) \geq 0$. Розв'яжемо цю задачу першим способом (використовуючи параметризацію). Задамо функцію $s_i(z_i)$ у квадратичній формі:

$$s_i(z_i) = c_{i1} z_i + c_{i2} z_i^2, \tag{1.44}$$

де c_{i1} і c_{i2} – дійсні параметри. Прирівнявши похідну функції φ_i до нуля, знайдемо розв'язок задачі (1.43)

$$z_i = \frac{c_{i1} + \bar{\alpha}_i}{2(\omega_i - c_{i2})}. \tag{1.45}$$

Цільову функцію центра задамо в такому вигляді:

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{m} d_i z_i - \sum_{i=1}^{m} s_i(z_i)$$

або з врахуванням рівності (1.44):

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{m} d_i z_i - \sum_{i=1}^{m} \left(c_{i1} z_i + c_{i2} z_i^2\right) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i, \tag{1.46}$$

де $\phi_i = (d_i - c_{i1}) z_i - c_{i2} z_i^2$.

Підставимо в останню формулу замість z_i праву частину формули (1.45):

$$\phi_i = \frac{(d_i - c_{i1})(c_{i1} + \bar{\alpha}_i)}{2(\omega_i - c_{i2})} - \frac{c_{i2}(c_{i1} + \bar{\alpha}_i)^2}{4(\omega_i - c_{i2})^2}.$$

Максимізація функції ϕ_i по змінних (параметрах) c_{i1}, c_{i2} є звичайною задачею математичного програмування.

Тепер опишемо реалізацію другого підходу. Оскільки $s_i(z_i) \geq 0$, то найгіршою дією центра на підприємство буде $s_i(z_i) = 0$, тоді критерій i-го підприємства набуде вигляду

$$\varphi_i(z_i) = \bar{\alpha}_i z_i - \omega_i z_i^2 \to \max.$$

Максимальне значення цієї функції досягається у вершині параболи $z_i = \bar{\alpha}_i / (2\omega_i)$ і дорівнює

$$\varphi_i^* = \bar{\alpha}_i \frac{\bar{\alpha}_i}{2\omega_i} - \omega_i \frac{\bar{\alpha}_i^{\,2}}{4\omega_i^2} = \frac{\bar{\alpha}_i^{\,2}}{4\omega_i}.$$

Третьою оптимізаційною задачею (1.40), (1.41) при кожному $i = \overline{1, m}$ буде така:

$$\phi_i = d_i z_i - s_i\left(z_i\right) \to \max_{z_i}$$

при умові $\varphi_i\left(z_i\right) \geq \bar{\alpha}_i^{\,2} / \left(4\omega_i\right)$.

Звідси отримуємо:

$$s_i = 0, \quad z_i = \bar{\alpha}_i / 2\omega_i.$$

Література

1. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983. –512 с.
2. *Волошин О. Ф., Мащенко С. О.* Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник. –К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. –304 с.
3. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. –М.: Наука, 1971. –384 с.
4. *Ю.П. Зайченко*. Дослідження операцій. Підручник. Сьоме видання, перероблене та доповнене. – К.:Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816с.
5. *Губанов В. А., Захаров В. В., Коваленко А. Н.* Введение в системный анализ: Учебное пособие. –Санкт-Пет. ЛГУ. –1988. –232 с.
6. *Згуровский М. З., Панкротова Н. Д.* Системний аналіз: Проблеми, методологія, застосування. –К.: Наук. думка, 2005. –743 с.
7. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений. –М.: Логос, 2000. –296 с.
8. *Макаров И. М., Виноградская Т. М.* Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие. –М.: Наука, 1982. –328 с.
9. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации. –М.: Наука, –1986.
10. *Месарович М., Мако Д.,Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. –М.: Мир, 1973. –344 с.
11. *Подаковский В. В., Ногин В. Д.* Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. –М.: Наука, 1982. –254 с.
12. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи а економіці, менеджменті та бізнесі: Навчальний посібник. Київ. –Либідь, 1995. –240 с.