РОЗДІЛ 9

ЕФЕКТИВНІСТЬ КОДУВАННЯ ТА ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

При проектуванні та розробленні систем збирання, передавання й оброблення інформації значну увагу приділяють таким чинникам, як вибір коду для захисту інформації під час передачі по каналах зв'язку, можливість її стиснення для збільшення швидкості передачі повідомлень, необхідність додаткового захисту інформації при передачі по каналах із значним рівнем завад та ін. Про все це йтиметься в цьому розділі.

9.1. ВІРОГІДНІСТЬ ПЕРЕДАЧІ КОДОВАНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Вірогідністю передачі кодованих повідомлень оцінюється відповідність між кодовими комбінаціями, прийнятими на приймальному боці, та комбінаціями, переданими в канал зв'язку.

У свою чергу, оцінка вірогідності обміну інформацією визначається ймовірністю спотворень повідомлень, тобто прийняттям $P_п$ помилкового повідомлення при відомій імовірності $P_е$ спотворення елемента повідомлення, що передається. Таким чином, вірогідність передачі є похідною характеристикою, яка залежить як від коректувальної здатності коду, так і від типу каналу (лінії) зв'язку та умов передачі по ньому елементів кодової комбінації.

Для двійкових кодів дія завад на елемент кодової комбінації може призвести до різних наслідків у несиметричних і симетричних каналах. Так, у несиметричних каналах імовірності переходу під впливом завад 0 в 1 (P_{01}) та 1 в 0 (P_{10}) не будуть однаковими, а в симетричних вони збігаються. Проте для спрощення розрахунків при оцінюванні вірогідності повідомлень, що передаються, вважатимемо двійковий канал симетричним, тобто $P_{01} = P_{10} = P_е$.

Крім того, розрізняють канали з *незалежними помилками*, коли виникнення однієї помилки не залежить від появи іншої (канал без пам'яті), та канали з *пакетним розподілом помилок*, в яких є залежність імовірності спотворення наступного елемента, що передається, від спотворення попереднього (канал має пам'ять).

Розглянемо оцінку вірогідності при передачі кодованих повідомлень по цих двійкових симетричних каналах.

У разі передачі повідомлень по каналах із незалежними помилками ймовірність відсутності спотворень двійкового елемента повідомлення позначимо як $(1 - P_e)$. Тоді для двійкової послідовності завдовжки n елементів [12] імовірність правильно прийнятої послідовності

$$P_{пр} = (1 - P_e)^n, \tag{9.1}$$

а ймовірність помилки в прийнятій послідовності

$$P_п = 1 - (1 - P_e)^n. \tag{9.2}$$

Останній вираз можна подати так:

$$P_п = C_n^1 P_е + C_n^2 P_е^2 + C_n^3 P_е^3 + \dots + C_n^\nu P_е^\nu, \tag{9.3}$$

де $C_n^\nu = \dfrac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$, а $\nu = 1, 2, 3, \dots$ — кратність помилки.

Через те, що $P_е << 1$, ймовірність помилки в n-елементній кодовій послідовності можна записати як

$$P_п \approx nP_е.$$

Як відомо, коректувальні коди дають змогу виявляти або виправляти (залежно від кодової відстані) ту чи іншу кількість помилок. Тому для оцінювання ефективності кодів необхідно знати ймовірність виникнення в кодовій комбінації помилок будь-якої кратності.

При незалежних помилках імовірність появи ν-кратних помилок визначається за формулою Бернуллі

$$P_п(\nu) = C_n^\nu P_е^\nu (1 - P_e)^{n-\nu}. \tag{9.4}$$

Для кодів з $d_{min} > 1$, що використовуються з метою виявлення всіх помилок кратністю $\nu_в = d_{min} - 1$ і меншою, ймовірність помилкової (неправильної) комбінації на виході декодера легко знайти, врахувавши, що при передачі комбінації можуть бути такі чотири ситуації:

• комбінація, яка приходить з каналу, прийнята без помилок (правильно) з імовірністю $P_{пр}$;

• комбінація містить не більш як $\nu_в$ спотворених елементів, що виявляються кодом (імовірність такої події $P_{в.п}$);

• комбінація містить $\nu > \nu_в$ помилок, але вони розташовані так, що виявляються кодом (імовірність такої події $P'_{в.п}$);

• комбінація містить $\nu > \nu_в$ помилок, які кодом не виявляються з імовірністю $P_{нв.п}$.

Оскільки сума ймовірностей всіх перелічених подій дорівнює 1, а ймовірність $P'_{в.п} \approx 0$,

$$P_п = P_{в.п} + P_{нв.п}. \qquad (9.5)$$

З урахуванням того, що спотворені комбінації, які виявляються декодером, не видаються споживачеві інформації, ймовірність здобуття ним помилкових комбінацій оцінюватиметься тільки ймовірністю невиявленої помилки $P_{нв.п}$, яку можна записати у вигляді [12]

$$P_{нв.п} = \sum_{\nu=d_{\min}}^{n} W(w) P_e^{\nu} (1-P_e)^{n-\nu}, \qquad (9.6)$$

де $W(w)$ — вагова характеристика коду (кількість його комбінацій вагою w, тобто кількість варіантів помилок, які не виявляються цим кодом); $d_{\min}$ — мінімальна кодова відстань.

Значення $W(w)$ визначається за спеціальними методиками для різних кодів [14]. Так, доведено, що коли двійковий (n, k)-код має кодову відстань d, то

$$W(w) = \begin{cases} = 0, \nu < d; \\ \le \dfrac{C_n^{\nu-t}}{C_n^t}, \nu > d, \end{cases} \qquad (9.7)$$

де $t = (d-1)/2$.

З урахуванням (9.7) маємо

$$P_{нв.п} \le \frac{1}{(1-P_e)^t C_{n+t}^t} \left[1 - \sum_{\nu=0}^{2t} C_{n+t}^t P_e^t (1-P_e)^{n+t-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{n+t} C_{n+t}^{\nu} P_e^{\nu} (1-P_e)^{n+t-\nu} \right]. \qquad (9.8)$$

Права частина (9.8) при $0 < P_e < 0{,}5$ обмежена зверху значенням) $P_e = 0{,}5$; тому в будь-якому каналі з незалежними помилками

$$P_{нв.п} \le 2^t / C^t_{n+t}.$$

Цю оцінку можна застосувати для коротких кодів з невеликою надмірністю. Для кодів з великою надмірністю бажано користуватися виразом [14]

$$P_{нв.п} \le 2^k (d/n)^d (1 - d/n)^{n-d},$$

де k — кількість інформаційних елементів; d — мінімальна кодова відстань; n — довжина коду.

На практиці поширенішою є формула для приблизного оцінювання ймовірності виникнення невиявленої помилки [12]

$$P_{\text{нв.п}} \approx \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=d}^{n} C_n^\nu P_\text{е}^\nu \left(1 - P_\text{е}\right)^{n-\nu}, \tag{9.9}$$

де r — кількість перевірних елементів коду; ν — кратність помилки; d — мінімальна кодова відстань.

Для кодів з $d > 2$, що використовуються для виправлення всіх помилок кратністю $\nu_\text{вп} = [(d - 1)/2]$, де $[\cdot]$ означає цілу частину й менше, ймовірність $P_\text{п}$ виникнення помилкової комбінації на виході декодера можна знайти, врахувавши, що після проходження кодової комбінації по каналу можливими є такі чотири ситуації:

- комбінація прийнята без помилок (правильно) з імовірністю $P_\text{пр}$;
- комбінація містить не більш як $\nu_\text{вп}$ спотворених елементів, які виправляються кодом з імовірністю $P_\text{вп.п}$;
- комбінація містить $\nu > \nu_\text{вп}$ помилок, розташованих так, що вони виправляються кодом з імовірністю $P'_\text{вп.п}$;
- комбінація містить $\nu > \nu_\text{вп}$ помилок, які не виправляються кодом (імовірність такої події $P_\text{н.вп.п}$).

Оскільки ймовірність $P'_\text{вп.п} \approx 0$, маємо

$$P_\text{п} = P_\text{вп.п} + P_\text{н.вп.п}, \tag{9.10}$$

звідки

$$P_\text{н.вп.п} = P_\text{п} - P_\text{вп.п}.$$

При незалежних помилках імовірність виправлення помилок кратністю до ν кодами, що виправляють помилки, визначається виразом

$$P_\text{вп.п} = \sum_{i=1}^{\nu} C_n^i P_\text{е}^i \left(1 - P_\text{е}\right)^{n-i}. \tag{9.11}$$

З урахуванням виразів (9.2) та (9.11) дістаємо

$$P_\text{н.вп.п} = 1 - \left(1 - \text{P}_\text{е}\right)^n - \sum_{i=1}^{\nu} C_n^i P_\text{е}^i \left(1 - P_\text{е}\right)^{n-i}. \tag{9.12}$$

На основі здобутих значень $P_\text{п}$ можна визначити коректувальний код, оптимальний для даного каналу.

Двійковий коректувальний код завдовжки n з N комбінаціями називається *оптимальним* для двійкового симетричного каналу, якщо ймовірність $P_\text{п}$ виникнення помилкової комбінації на виході декодера не перевищує такої самої імовірності для будь-якого іншого двійкового коду тієї самої довжини n із тією самою кількістю комбінацій N.

У разі передачі повідомлень по каналах із пакетним розподілом помилок визначення ймовірності їх за формулами (9.3) — (9.12) дають значення, які набагато відрізняються від реальних. Це пояснюється тим, що в цих каналах на проходження сигналів (а це в основному радіоканали) сильно впливають сезонні та добові зміни метеорологічних умов, промислові завади, інтенсивність яких змінюється протягом доби та тижня, тощо [5, 12]. Все це призводить до виникнення в каналах пакетів (пачок) помилок. Визначити ймовірність їх за таких умов досить складно, оскільки необхідно провести дослідження реальних характеристик каналів.

Формула, що дає приблизне значення ймовірності помилок при пакетному розділі їх і передачі двійкової послідовності n елементів [21], має вигляд

$$P_{\text{п}} \approx \frac{P_{\text{e}}}{\bar{l}} \sum_{b=1}^{b_{\max}} \left(1 + \frac{n-1}{b}\right) \frac{bP_b}{\sum\limits_{b=1}^{b_{\max}} bP_b}, \tag{9.13}$$

де P_{e} — імовірність спотворення двійкового елемента; $\bar{l}$ — щільність помилок у пакеті, яка визначається відношенням кількості помилок у ньому до довжини пакета b; P_b — умовна ймовірність виникнення пакета помилок завдовжки b.

Для кодів, що виявляють пакети помилок, імовірності помилок можна знайти за формулами [21]:

$$P_{\text{в.п}} \approx \frac{P_{\text{e}}}{\bar{l}} \left\{ \sum_{b=1}^{b_{\max}} \left(1 + \frac{n-1}{b}\right) \frac{bP_b}{\sum\limits_{b=1}^{b_{\max}} bP_b} - \frac{1}{2^r} \sum_{b=l_k+1}^{b_{\max}} \left[1 + \frac{n-(2l_k+1)}{b}\right] \frac{bP_b}{\sum\limits_{b=1}^{b_{\max}} bP_b} \right\}; \tag{9.14}$$

$$P_{\text{нв.п}} \approx \frac{1}{2^r} \frac{P_{\text{e}}}{\bar{l}} \sum_{b=l_k+1}^{b_{\max}} \left[1 + \frac{n-(2l_k+1)}{b}\right] \frac{bP_b}{\sum\limits_{b=1}^{b_{\max}} bP_b}, \tag{9.15}$$

де l_k довжина пакета помилок, яка виявляється.

Значення усіх величин, які входять у ці формули, дістають експериментально, визначаючи характер розподілу помилок, або беруть із літератури для каналів аналогічного типу.

У [46] реальні канали описано за допомогою двох параметрів: імовірності P_e спотворення двійкового елемента та показника α групування помилок. При цьому наближені формули для визначення ймовірності невиявлених помилок мають такий вигляд:

• для кодів, що виявляють помилки,

$$P_{\text{нв.п}} \approx \frac{P_e}{2^r}\left(\frac{n}{d}\right)^{1-\alpha};$$

• для кодів, що виправляють помилки,

$$P_{\text{нв.п}} \approx \left(\frac{n}{\nu+1}\right)^{1-\alpha} P_e;$$

• для кодів, що виявляють і виправляють помилки,

$$P_{\text{нв.п}} \approx \frac{\sum_{i=0}^{\nu} C_n^i}{2^r}\left(\frac{n}{d-\nu}\right)^{1-\alpha} P_e,$$

де d — мінімальна кодова відстань; ν — кратність помилки, що виправляється; r — кількість перевірних елементів.

Ці формули дають непогані результати при $\nu < 0{,}3n$, де n — кількість елементів кодової комбінації.

9.2. СТИСНЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ*

Стиснення інформації застосовується для прискорення та зниження витрат на її оброблення, зберігання й пошук, а також для зменшення ємності пам'яті, зайнятої в ЕОМ.

Під *стисненням інформації* розумітимемо операцію, внаслідок якої певному коду чи повідомленню ставиться у відповідність код або повідомлення меншої довжини.

Способи стиснення інформації поділяють за призначенням, характером і ступенем стиснення, швидкістю та ступенем відновлення початкового стану інформації (втратами).

За *призначенням* розрізняють дві великі групи способів стиснення: для передачі даних і для їх архівації. Різниця між ними полягає в тому, що перші оперують з незначними інформацій-

---

* Написано спільно з канд. техн. наук *Б. Ю. Жураковським*.

ними масивами (до кількох десятків, сотень байтів), а другі — зі значно більшим обсягом інформації (мегабайти).

За *характером* стиснення інформації розрізняють лінійні, матричні, комбіновані та каскадні способи. До *лінійних* належать способи, за якими стиснення елементів інформаційного масиву виконується в одному з напрямків (горизонтальному або вертикальному). Залежно від цього лінійними способами можуть виконуватися поздовжнє (горизонтальне) та поперечне (вертикальне) стиснення інформації.

До *матричних* належать способи стиснення інформації, за якими елементи інформаційного масиву стискаються з використанням матричного принципу заміни повторюваних елементів.

Комбіновані способи поєднують одночасне використання для стиснення інформаційного масиву двох чи більше лінійних або/та матричних способів.

До *каскадних* належать способи стиснення інформації, за якими воно виконується послідовно різними способами.

За ступенем стиснення інформації розрізняють низькоефективні (з коефіцієнтом стиснення до 1,5), середньоефективні (1,51...3) та високоефективні (понад 3) способи; за швидкістю стиснення/розпаковування — низько-, середньо- та високошвидкісні, при яких швидкість стиснення/розпаковування змінюється від кількох кілобайтів за секунду (низькошвидкісні) до кількох мегабайтів за секунду (високошвидкісні).

За *ступенем відновлення початкового стану інформації* (втратами) способи стиснення поділяють на без відновлення початкового стану інформації, з частковою її втратою та без втрати інформації (з повним її відновленням). Що стосується останнього поділу способів стиснення інформації, то до першої групи належать найпримітивніші, а до другої та третьої груп — складніші й ефективніші способи.

Так, до відомих способів стиснення інформації без відновлення її початкового стану можна віднести стиснення за допомогою поділу кодової комбінації на кілька частин [19, 22, 42] і з порозрядним зсувом [42]. Ці способи застосовуються дуже рідко, оскільки не гарантують повного відновлення стисненої інформації з точки зору неоднозначності утвореної при стисненні послідовності символів.

У той же час способи з частковою втратою інформації мають специфічне застосування [22] , коли часткова її втрата майже не позначається на якості відновлюваної інформації. Тому в підручнику розглядаються тільки способи стиснення, що гарантують повне відновлення стисненої інформації й які широко використовуються в системах збирання, передавання та оброблення інформації.

9.2.1. СПОСОБИ СТИСНЕННЯ ДАНИХ ПРИ ПЕРЕДАЧІ

Розглянемо кілька найпоширеніших способів стиснення даних, які застосовуються при передачі їх. До них належать лінійні, матричні, комбіновані та каскадні способи, що гарантують повне відновлення початкового стану стисненої та переданої інформації.

Лінійні способи. ***Стиснення даних із використанням замість повторень додаткових символів.*** Ці способи ґрунтуються на заміні повторюваних елементів деякими умовними символами. Вони є ефективними в тому разі, коли масиви інформації, які подаються у вигляді рядків або стовпців, розташованих у зростаючому порядку, мають однакові значення елементів в одних і тих самих розрядах, що характерно для техніко-економічної інформації. Таке стиснення даних дає змогу скоротити масив у кілька разів [42].

Так, якщо елементи повторюються на початку рядків (стовпців) відносно попередніх, то замість виключених розрядів у масив уводиться знак поділу ρ, який дає можливість відокремити елементи в згорнутому масиві. При розгортанні замість знака ρ поновлюють всі пропущені розряди, які були до елемента, що знаходився безпосередньо за ρ в стисненому тексті. Запис знаків, які знаходяться після ρ, виконується з кінця рядка (стовпця).

Як приклад розглянемо масив, у якому інформацію записано у вигляді рядків, що складаються з восьми десяткових знаків:

```
3 9 1 4 5 6 8 0   5 6 7 1 8 3 2 9
3 9 1 4 5 6 8 6   5 6 7 1 8 3 4 3
3 9 1 6 7 5 9 6   5 6 7 2 9 4 6 2
3 9 1 4 5 7 2 1   5 6 7 1 8 3 4 8
3 9 1 4 5 6 3 8   5 6 7 1 7 6 3 1
```

Згорнутий масив інформації матиме такий вигляд:

```
3 9 1 4 5 6 8 0   2 9 ρ 4 3 ρ 2 9
ρ 6 ρ 6 7 5 9 6   7 6 2 ρ 1 8 3 4
ρ 4 5 7 2 1 ρ 6   8 ρ 7 6 3 1
3 8 5 6 7 1 8 3
```

Розгортку виконуємо з кінця масиву. При цьому на наступний рядок переходимо або після заповнення рядка, або при знаку поділу ρ:

```
3 9 1 4 5 6 8 0   5 6 7 1 8 3 2 9
. . . . . . . 6   . . . . . . 4 3
. . . 6 7 5 9 6   . . . 2 9 7 6 2
. . . 4 5 7 2 1   . . . 1 8 3 4 8
. . . . . 6 3 8   . . . . 7 6 3 1
```

Після заповнення пропущених цифр за аналогічними розрядами попереднього рядка дістаємо масив інформації, який був до стиснення.

слова (байта) дає змогу закодувати $2^8 = 256$ знаків, тоді як реальні алфавіти з урахуванням цифр і деяких допоміжних символів містять до 50...60 знаків, тобто для кодування їх потрібні п'яти-шестибітові комбінації та аналогічні структури комірок пам'яті. Два-три біти, що залишаються, не вирішують проблему стиснення інформації, оскільки за їх допомогою можна записати тільки 4...8 знаків.

Однак, якщо використати півбайта для запису $2^4 = 16$ знаків деякого абстрактного алфавіту, а потім закодувати повідомлення в цьому q = 16-знаковому алфавіті по m = 2 знаки в кодовому слові, то одним байтом можна передавати ті самі $N = q^m = 16^2 = 256$ знаків.

Цей 16-знаковий алфавіт можна побудувати так, щоб 13 якісних ознак використовувалися як основні символи, а три — як допоміжні. Такий алфавіт матиме вигляд

0.	0000	4.	0100	8.	1000	C.	1100
1.	0001	5.	0101	9.	1001	D.	1101
2.	0010	6.	0110	A.	1010	E.	1110
3.	0011	7.	0111	B.	1011	F.	1111

Перші 12 символів умовно називатимемо ЦИФРА, а решту 4 — ЗОНА (співвідношення «цифр» і «зон» можна змінювати від 8 : 8 до 15 : 1).

Умовимось, що в кодовому слові вторинного алфавіту перші чотири розряди завжди становитимуть зону, а чотири інші — цифри. Кількість можливих комбінацій вторинного алфавіту в даному разі буде $N = 4 \cdot 12 = 48$.

Для виконання зонного стиснення інформації потрібно знаки вторинного алфавіту розбити на зони. При цьому, якщо в тексті зустрічаються поруч знаки, які належать до однієї зони, номер її вказується тільки перед першим знаком, а запис наступних знаків обмежується записом цифрової частини їх.

Для того щоб знаки, які мають однакові зони, утворювали більш довгі послідовності при створенні кодових слів, у вторинному алфавіті необхідно враховувати статистичні характеристики алфавіту, з якого складаються тексти, які слід обробляти. Бажано також врахувати ймовірність різних сполучень деяких знаків.

Ефективність розбиття на зони встановлюють за допомогою потенціального коефіцієнта стиснення, який визначається виразом

$$K_{\text{ст}} = N_1/N_2,$$

де N_1, N_2 — відповідно кількість байтів у первинному та стисненому текстах.

Стиснення інформації відбудеться тільки тоді, коли наступний знак у тексті належатиме до тієї самої зони. Тому ймовірність цієї події

$$P_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

де a, b, c, d — ймовірності того, що наступний знак належить відповідно першій, другій, третій та четвертій зонам.

Імовірність відсутності стиснення інформації

$$P_2 = 1 - P_1.$$

При стисненні на кожний знак відводиться півбайта, а при його відсутності — повний байт. Таким чином,

$$N_2 = N_1 P_1/2 + N_1(1 - P_1);$$

$$K_{ст} = \frac{N_1}{N_1 P_1/2 + N_1(1-P_1)} =$$

$$= \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)/2 + 1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} =$$

$$= \frac{2}{2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 - 2d^2} =$$

$$= \frac{2}{2 - \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)}.$$

Розподіл літер українського алфавіту та знаків на чотири зони наведено в табл. 9.1, де враховано частість появи їх у тексті.

Таблиця 9.1

Зона				Код знака в зоні
C	D	E	F	
Літера	Літера	Літера (знак)	Цифра (знак)	
Пробіл	М	Ф	—	Ø
О	П	Щ	1	1
Е	Є	Ш	2	2
А	З	Ц	3	3
Р	К	Ч	4	4
Л	Д	Ж	5	5
Т	Я	Х	6	6
Н	У	Ю	7	7
В	Ь	,	8	8
І	Б	.	9	9
И	Й	;	!	A
С	Г	:	?	B

Розглянемо стиснення інформації на конкретному прикладі.

Закодуємо такий текст: «Постійний запам'ятовуючий пристрій є невід'ємною частиною електронної обчислювальної машини». У закодованій за допомогою табл. 9.1 формі він матиме вигляд

D1C1B69DAC7ADACOD3C3D1C3D0E8D6C618D7E74CA
DAC0D1C4AB649DAC0D2C07289D5E8D20C71E7C0E4C3
B6A71E7C0252D4C641771901D9E4CAB5E7C835D8C7190D0
C3E2CA7AE9

Коефіцієнт стиснення тексту $K_{ст} = 1,3$.

Стиснення інформації зменшенням розрядності кодованих слів [42]. За цим способом ефект стиснення інформації досягається завдяки поділу послідовності наперед упорядкованих чисел на кілька однакових відрізків, всередині яких відлік ведеться не за їх абсолютним значенням, а від межі попереднього відрізка. При цьому утворена розрядність чисел буде завжди менша від розрядності відповідних реальних чисел, для чого в пам'яті ЕОМ необхідно зберігати ці стиснені числа з розрядністю меншою, ніж розрядність реальних чисел.

Ємність пам'яті (двійкових розрядів) ЕОМ для розміщення N кодів визначається виразом

$$Q = N\log_2 M, \tag{9.16}$$

де M — кількість кодів, що розміщуються в пам'яті ЕОМ.

Як випливає з (9.16), зі збільшенням M зростає довжина кодової комбінації ($\log_2 M$). Тому для економії ємності пам'яті число $2^{(\log_2 M)}$ (де $[\log_2 M]$ округляється до найближчого цілого числа) розбивається на L однакових частин. Максимальне число в утвореному інтервалі чисел буде не більше $\log_2 \frac{M}{L}$, а ємність пам'яті для їх зберігання $Q_L = N\log_2 \frac{M}{L}$.

Якщо в пам'яті ЕОМ зберігати також адреси меж відрізків і порядкові номери чисел, що зберігаються, відлік яких ведеться від чергової межі, то розрядність чисел для запису номеру межі можна визначити як $\log_2(N-1)$, а ємність пам'яті для зберігання номерів меж — як $(L-1)\log_2(N-1)$, де $(L-1)$ — кількість меж між відрізками, причому $(L-1) \le (N-1)$.

Загальна ємність пам'яті ЕОМ з урахуванням викладеного визначається виразом

$$Q' = N\log_2 \frac{M}{L} + (L-1)\log_2(N-1). \tag{9.17}$$

Якщо продиференціювати (9.17) по L і прирівняти похідну до нуля, то дістанемо значення Q_{min}, яке буде при $L_{опт} = \frac{N}{\ln N}$.

Ємність пам'яті при оптимальній кількості зон, на які розбиваються числа, що зберігаються в пам'яті ЕОМ, знайдемо після підставлення в (9.17) значення $L_{опт}$:

$$Q' = N\log_2 \frac{eM\ln N}{N} - \log_2 (N-1). \tag{9.18}$$

При $N > 100$ можна користуватися приблизною формулою

$$Q' = M\log_2 \frac{eM\ln N}{N}.$$

Щоб знайти інформацію, записану в пам'ять ЕОМ, спочатку визначають $L_{опт}$, а потім — значення інтервалів між двома межами

$$C = \frac{2^{[\log_2 M]}}{L},$$

де $[\log_2 M]$ — округлене до найближчого цілого числа значення $\log_2 M$. Після цього встановлюють інтервал, у якому знаходиться шукане число X:

$$K = X/C.$$

Адреса шуканого числа визначається як різниця між його абсолютним значенням і числом, що є граничним для цього інтервалу.

Виграш у ємності пам'яті визначається як

$$\Delta Q = Q - Q' = N\log_2 M - N\log_2 \frac{eM\ln N}{N} - \log_2 (N-1).$$

Розглянемо конкретний приклад.

Якщо $M = 800$, $X = 300$ і $N = 25$, то пошук числа 500 ведемо за такою послідовністю:

$$L = \frac{25}{\ln 25} = \frac{25}{3{,}22} \approx 8; \qquad C = \frac{2^{[\log_2 800]}}{L} = \frac{1024}{8} = 128;$$

$$K = \frac{X}{C} = \frac{300}{128}; \qquad 3 > K > 2.$$

Отже, шукане число лежить у третьому інтервалі, де знаходяться числа від $128 \cdot 2 = 256$ до $383 = 256 + 127$ (додаємо 127, а не 128, оскільки в інтервалі знаходиться всього 128 чисел, з яких одне — нуль). Порядковий номер числа визначаємо як різницю між шуканим числом і числом, що є граничним для шуканого інтервалу:

$$300 - 256 = 44.$$

Знаходимо виграш у ємності пам'яті ΔQ:

$$Q = N \log_2 M = 25\log_2 800 \approx 25 \cdot 10 = 250 \text{ двійкових розрядів;}$$

$$Q'' = N\log_2 \frac{eM\ln N}{N} = 25\log_2 \frac{2{,}3\cdot 800\ln 25}{25} \approx$$

$$\approx 25\log_2 237 \approx 200 \text{ двійкових розрядів;}$$

$$\Delta Q = Q - Q'' = 250 - 200 = 50 \text{ двійкових розрядів.}$$

Стиснення інформації заміною деяких комбінацій літер одиничними символами [42]. Цей спосіб ґрунтується на заміні деяких сполучень літер, які найчастіше зустрічаються в тексті, одиничними символами у вигляді двійкових кодових комбінацій, що не використовуються для подання знаків і символів при кодуванні як в ЕОМ, так і при обміні даними за допомогою ліній зв'язку.

Так, для подання алфавітно-цифрової та службової інформації в кодах КОІ-8 і ДКОІ з 256 можливих не застосовуються 167 символів, які не мають графічних еквівалентів. За цим способом стиснення інформації пропонується використати цей резерв для кодування біграм, що найчастіше зустрічаються в тексті. Ефективність стиснення науково-технічних текстів при цьому досягає 40 % і більше. Даний спосіб можна поширити також на заміну в тексті сполучень з трьох і більше літер.

Стиснення інформації використанням адаптивного кодування [8]. Воно з успіхом застосовується при передачі техніко-економічної, статистичної та інших видів інформації, де, як правило, дуже висока вірогідність передачі потрібна не завжди.

Вимоги до вірогідності інформації можуть коливатися в широких межах залежно від характеру повідомлень. Так, при передачі статистичної інформації про кількість виробленої продукції помилка в молодших розрядах повідомлення (десятки та одиниці) менше впливатиме на правильність переданої інформації, ніж спотворення старших розрядів (мільйони та тисячі). При передачі текстових повідомлень вплив помилок на передачу ще менший.

Таким чином, доцільно передавати повідомлення з заданою вірогідністю у відповідних межах, використовуючи адаптивне кодування відносно джерела повідомлень, що дає змогу забезпечити вірогідність інформації, яка передається, залежно від вимог джерела повідомлень.

Для цього повідомлення необхідно поділити за категоріями з заданою вірогідністю передачі. На початку кожної категорії в інформацію вводяться додаткові службові комбінації, які при надходженні в кодер (під час передавання) та декодер (під час приймання) системи передачі перебудовують їх. Перебудова кодера може виконуватися також за сигналами від аналізатора інформації, якщо він установлений на вході системи передачі. Аналізатор обробляє інформацію, що надходить від джерела повідомлень, і поділяє її на категорії.

Для передачі доцільно використовувати три категорії інформації з різною вірогідністю (з різною ймовірністю помилок): $10^{-3}...10^{-4}$ — для передачі текстів; $10^{-5}...10^{-6}$ — для передачі цифрових повідомлень від одиниць до тисячі; $< 10^{-6}$ — для передачі цифрових повідомлень більше тисячі та будь-яких дуже важливих цифрових і текстових повідомлень. Принципи поділу інформації на категорії можуть змінюватися залежно від конкретних умов і вимог.

Передачу інформації з різною вірогідністю можна забезпечити зміною способу кодування. Так, для передачі інформації по проводових каналах з вірогідністю $10^{-3}...10^{-4}$ досить застосувати двійковий первинний код без уведення будь-якого захисту інформації; з вірогідністю $10^{-5}...10^{-6}$ — двійковий код, що виявляє помилки, а з вірогідністю $< 10^{-6}$ — код, який виправляє відповідну кількість помилок. Тоді для передачі, наприклад, 32 кодових комбінацій їх довжина в першому випадку становитиме $n_1 = 5$, у другому — $n_2 = 6...7$, у третьому — $n_3 = 8...12$ елементів.

Середня довжина кодової комбінації при використанні адаптивного кодування залежатиме від процентного співвідношення повідомлень різної категорії і загалом може бути визначена як

$$n_{\text{сер}} = \frac{n_1 N_1 + n_2 N_2 + n_3 N_3}{N},$$

де n_1, n_2, n_3 — довжини кодових комбінацій при передачі повідомлень першої, другої та третьої категорій; N_1, N_2, N_3 — відповідна кількість цих комбінацій; N — загальна кількість їх.

Коефіцієнт стиснення інформації можна визначити як відношення максимальної довжини n кодової комбінації до її середньої довжини $n_{\text{сер}}$:

$$K_{\text{ст}} = n/n_{\text{сер}}.$$

Наприклад, при передачі $N = 1000$ повідомлень, з яких $N_1 = 700$, $N_2 = 200$ і $N_3 = 100$, якщо $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, матимемо

$$n_{\text{сер}} = \frac{5 \cdot 700 + 6 \cdot 200 + 8 \cdot 100}{1000} = 5{,}5 \text{ елемента}$$

і коефіцієнт стиснення

$$K_{\text{ст}} = \frac{8}{5{,}5} \approx 1{,}45.$$

Стиснення інформації збільшенням основи коду. Ґрунтується воно на перекодуванні кодованих послідовностей символів системи числення з меншою основою в систему з більшою основою. Так, якщо інформаційний масив, який складається з двійкових елементів, подати у вісімковій або шістнадцятковій системі числення (тобто перекодувати його), то це приведе до значного зменшення кількості елементів масиву (в кілька разів):

$$\left.\begin{matrix}
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1\\
0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1\\
1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0\\
1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0
\end{matrix}\right\} N_1=192;$$

$$\left.\begin{matrix}
0&1&2&3&4&5&6&7\\
1&2&3&4&5&6&7&0\\
2&3&4&5&6&7&0&1\\
3&4&5&6&7&0&1&2\\
4&5&6&7&0&1&2&3\\
5&6&7&0&1&2&3&4\\
6&7&0&1&2&3&4&5\\
7&0&1&2&3&4&5&6
\end{matrix}\right\} N_2=64; \quad
\left.\begin{matrix}
0&5&3&9&7&7\\
2&9&C&B&B&8\\
4&E&5&D&C&1\\
7&2&E&E&0&A\\
9&7&7&0&5&3\\
B&B&8&2&9&C\\
D&C&1&4&E&5\\
E&0&A&7&2&E
\end{matrix}\right\} N_3=48.$$

При цьому коефіцієнти стиснення первинного масиву двійкових елементів у вісімкову і шістнадцяткову системи числення становитимуть

$$K_{ст8}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{192}{64}=3; \qquad K_{ст16}=\frac{N_1}{N_3}=\frac{192}{48}=4,$$

тобто залежать від кількості бітів, що несе один елемент інформаційного масиву (у вісімковій системі $8=2^3 \to 3$ біт/елемент, у шістнадцятковій — $16=2^4 \to 4$ біт/елемент).

Матричні способи. До ефективних матричних способів стиснення інформації при передачі даних належить ***спосіб зі зберіганням атрибутів у вигляді бітової матриці*** [42]. При цьому способі скінченна кількість атрибутів (табл. 9.2) виноситься в першу частину («шапку») матриці, тілом якої є набір двійкових елементів, з яких 1 означає наявність, а 0 — відсутність атрибута (табл. 9.3). «Шапка» бітової матриці та її тіло можуть зберігатися на різних ділянках пам'яті ЕОМ.

Значний ефект стиснення дає інший ***матричний спосіб із заміною елементів,*** що повторюються на деякій площі інформаційного масиву, одиничними елементами, які несуть ознаки цих ділянок масиву [8]. Так, якщо ввести символи, що відбивають

Таблиця 9.2

Номер виробничої дільниці	Тип комплектувального виробу					
0001	0301	1017	2216	1100		
0012	1008	0011	2001	2216	1017	
0015	1100	2001	2000	1008	0301	
0117	1100	0011	0301			
1206	2001	2216	0011	0301	1100	1017

Таблиця 9.3

Номер виробничої дільниці	Тип комплектувального виробу							
	0011	0301	1008	1017	1100	2002	2001	2216
0001	0	1	0	1	1	0	0	1
0012	1	0	1	1	0	0	1	1
0015	0	1	1	0	1	1	1	0
0117	1	1	0	0	1	0	0	0
1206	1	1	0	1	1	0	1	1

деякі обмежені площі інформаційного масиву, в яких елементи повторюються порівняно з однойменними розрядами попереднього рядка (наприклад, R – 2 × 2, X – 2 × 5, Y – 3 × 2, Z – 5 × 3), то інформаційний масив

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	8	6	7	5	9	0
3	2	3	4	7	6	7	3	9	0
3	2	3	4	7	6	7	3	9	0
3	2	3	4	7	6	7	3	9	0
3	2	3	4	7	8	9	1	9	0

після згортання матиме вигляд

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	Y	8	R	5	X	3	7	3	Z
Y	8	9	1						

Розгортка виконується з початку масиву:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	.	.	.	8	.	.	5	.	.
3	.	.	.	7	.	.	3	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	8	9	1	.	.

Коефіцієнт стиснення $K_{ст} = 60/24 = 2{,}5$.

Стиснення інформації з типовими матрицями застосовується головним чином для відносно великих масивів. При цьому в пам'яті ЕОМ зберігаються матриці деяких найпоширеніших наборів символів, які зустрічаються в інформаційному масиві, що стискається. Для цього заздалегідь аналізують інформаційний масив, утворюють типові матриці і при стисненні замість наборів символів, які відповідають цій типовій матриці, в послідовність символів інформаційного масиву вводять адреси цих матриць.

Комбіновані та каскадні способи. З комбінованих способів як приклад можна навести ***лінійно-матричне стиснення інформації***, при якому первинний інформаційний масив стискається за допомогою додаткових елементів, якими позначають повторення елементів у рядках порівняно з попереднім (наприклад, символами K – 2, L – 3, M – 5 та в обмежених ділянках — матрицях символами X – 2 × 2, Y – 2 × 5, Z – 3 × 5). Тоді, якщо інформаційний масив має вигляд

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	5	9	0
2	2	3	4	5	6	4	6	9	0
2	2	3	4	5	6	4	4	9	0
3	2	3	4	5	6	4	2	9	0
3	2	3	4	5	7	4	2	9	0
3	2	3	4	5	7	4	2	9	0,

то згорненим він матиме такий вигляд:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	Z	K	5	Y	X	6	4	6
X	4	3	2	2	X	7	K	L	M.

Розгортання виконується з початку масиву:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	.	.	.	.	.	5	.	.
.	.	.	.	.	6	4	6	.	.
.	.	.	.	.	.	.	4	.	.
3	2	.	.	.	.	.	2	.	.
.	.	.	.	.	7	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Коефіцієнт стиснення $K_{ст} = 70/30 = 2{,}33(3)$.

Каскадні способи стиснення інформації застосовуються для збільшення коефіцієнта стиснення. При цьому, як правило, використовуються комбінації лінійних і матричних способів. Можна утворити такі каскадні способи стиснення, як кодо-зонний, кодо- та зонно-матричні тощо.

9.2.2. СПОСОБИ СТИСНЕННЯ ДАНИХ ПРИ АРХІВАЦІЇ

При архівації даних в ЕОМ, на дисках, як правило, оперують зі значно більшим обсягом інформації, ніж при передачі даних. При цьому для стиснення застосовують архіватори [16, 26]. Бажано, щоб останні працювали в реальному часі. Крім того, вони мають задовольняти дві вимоги: забезпечувати максимально високі ступені стиснення даних і швидкості довільного доступу до них.

Для виконання першої вимоги, з одного боку, логічно було б стискати всі дані на диску в цілому, тобто як один неперервний потік інформації. Проте з іншого боку, в цьому разі для забезпечення доступу необхідно перепаковувати (розпаковувати) весь диск. Тому на практиці весь логічний простір диска розбивають на окремі області, дані в яких стискаються незалежно від інших, а файли подають як ланцюги дискового простору (кластери).

Щоб записувати дані на диск і зберігати координати положення їх для подальших операцій зчитування та модифікації, виникає необхідність уведення додаткових структур для планування областей стиснених даних диска. До цих даних належать: початкове положення (номер стартового сектора) та розмір сегмента (кількість секторів). Ці дані для кожного кластера оформляються у вигляді додаткової таблиці його дескрипторів.

Таким чином, для читання деякого кластера досить за допомогою таблиці дескрипторів визначити, де знаходиться фрагмент з його стисненими даними, прочитати та розпакувати його.

Однак при записуванні кластера в область даних користуватися інформацією про дисковий простір у тому вигляді, як її подано в таблиці дескрипторів, дуже складно. Тому, як правило, її подають у вигляді списку вільного простору області стиснених даних. Як альтернатива може бути утворена також бітова карта зайнятих секторів області стиснених даних [26].

При обробленні запитів драйвером стисненого диска можна виділити три групи алгоритмів, які мають самостійне значення: планування дискового простору, хешування (організація структур даних, що забезпечує ефективний пошук та доповнення), стиснення/розпаковування.

При архівації стискають, як правило, блоки даних ємністю 1...8 Кбайт, але при цьому самі алгоритми стиснення мають використовувати мінімальну ємність пам'яті ЕОМ.

Із *лінійних* способів стиснення інформації, які широко застосовуються при архівації, можна виділити ***кодування потоків символів*** у деякому алфавіті з різною частотою появи символів у потоці. Метою кодування є перетворення цього потоку на потік бітів мінімальної довжини. Це досягається завдяки зменшенню надмірності вхідного потоку врахуванням частоти появи символів на вході та довжини коду, яка має бути пропорційною інформації, що міститься у вхідному потоці даних. Такі способи ґрунтуються на використанні оптимального кодування.

Якщо розподіл імовірностей появи символів у вхідному потоці даних наперед невідомий, то можна скористатися одним із двох підходів. Згідно з першим підходом слід переглянути вхідний потік даних і побудувати оптимальний код (наприклад, код Хаффмена), ґрунтуючись на наявній статистиці. При цьому дістають вихідний потік даних, закодований оптимальним кодом. Як приклад використання такого підходу можна назвати ***статистичне кодування Хаффмена*** [16]. У цьому разі вхідним символам, поданим послідовностями бітів однакової довжини, зіставляються послідовності бітів змінної довжини. Довжина коду для символу пропорційна (з округленням до цілого) двійковому логарифму частоти його появи, що береться з оберненим знаком. Це кодування є префіксним, що дає змогу декодувати його однопрохідним алгоритмом. Префіксний код зручно подавати у вигляді двійкового кодового дерева, в якого шлях від кореня до вершини визначає код символу (див. п.5.7).

Нехай, наприклад, вхідний алфавіт складається з чотирьох символів *a*, *b*, *c* та *d*, ймовірності появи яких відповідно дорівнюють 1/2, 1/4, 1/8, 1/8. Тоді кодом Хаффмена для цього алфавіту замість рівномірного коду 00, 01, 10, 11 може бути код *a* – 0, *b* – 10, *c* – 110, *d* – 111, і вхідна комбінація *abaabbaaacd*, замість 0001000001010000001011 матиме вигляд 010001010000110111, тобто замість 22 біт на вході на виході буде 18 біт.

Згідно з другим підходом використовується адаптивний кодер, який змінює схему кодування оптимальним кодом, залежно від первинних даних. Декодер, що декодує кодований потік, синхронно з кодером змінює схему декодування, починаючи з деякої заданої наперед.

Адаптивне кодування інформації дає більший ступінь її стиснення, оскільки враховуються локальні зміни ймовірностей у вхідному потоці даних. Прикладом такого кодування є ***адаптивне (динамічне) кодування Хаффмена*** [16] . При такому кодуванні потрібне постійне коректування кодового дерева відповідно до зміни статистики вхідного потоку. При реалізації цього способу виникає складність перебудови кодового дерева згідно з новими ймовірностями символів на кожному кроці стиснення.

Кодування Хаффмена відзначається мінімальною надмірністю за умови, що кожний символ кодується окремою послідовністю в алфавіті {0,1} і забезпечує досить високі швидкість та якість стиснення інформації. До недоліків цього способу слід віднести залежність ступеня стиснення від близькості ймовірностей символів до від'ємного степеня двійки, що пов'язано з необхідністю округлення до цілого числа в бік збільшення, оскільки кожний символ кодується цілим числом бітів. Це призводить до того, що, наприклад при двосимвольному алфавіті, стиснення інформації взагалі неможливе, якщо кожний з символів округляється до 1/2.

Більший ступінь стиснення дає ***арифметичне кодування*** [16, 32]. У цьому разі текст, стиснений арифметичним кодером, розглядається як деякий двійковий дріб з інтервалу [0, 1]. Результат стиснення можна подати як послідовність двійкових символів цього дробу. Первинним текстом є запис дробу, в якому кожний вхідний символ має вагу, пропорційну ймовірності його появи.

Нехай, наприклад, алфавіт складається з двох символів *a* та *b* з імовірностями появи їх 3/4 і 1/4 відповідно. Розглянемо відкритий праворуч інтервал [0, 1). Поділимо цей інтервал на кілька частин, довжина яких пропорційна ймовірностям появи символів, тобто [0, 3/4) та [3/4, 1). Кожному слову у вхідному алфавіті відповідає деякий підінтервал з [0,1), а порожньому слову — весь інтервал [0, 1). Після приймання кожного наступного символу арифметичний кодер зменшує інтервал, вибираючи ту його частину, яка відповідає поданому в даний момент на вхід символу. Кодом послідовності є інтервал, що виділяється після оброблення всіх її символів, тобто двійковий запис координати будь-якої точки з цього інтервалу. Таким чином, довжина утвореного інтервалу пропорційна ймовірності появи кодованої послідовності символів.

При реалізації цього алгоритму необхідна дійсна арифметика необмеженої точності. Крім того, результат кодування стає відомим тільки після закінчення приймання вхідного потоку символів.

Найбільшого поширення зі способів стиснення при архівації даних дістали алгоритми Лемпеля — Зіва та їхні різновиди (Лемпеля— Зіва — Велча LZW, Міллера — Ведмана MW, AP, Y тощо) [16, 26].

Розглянемо як приклад *алгоритм* LZ77, запропонований А. Лемпелем та Я. Зівом у 1977 р. Роботу LZ77-кодера за цим алгоритмом пояснює рис. 9.1 [26]. Основною операцією кодера є пошук рядка у вхідному буфері, який якомога краще збігався б з поточною позицією вхідного потоку. Для прискорення процедури цього пошуку застосовується хешування. При цьому за першими двома або трьома символами вхідного потоку даних визначається деяка величина, яка, незважаючи на те, що є обмеженою зверху (наприклад, числом 2000), досить добре характеризує рядок, з якого вона була утворена. Значення цієї величини використовується далі як індекс до деякої таблиці, в якій розміщуються адреси рядків з певними значеннями хеш-індекса в порядку появи їх у вхідному буфері.

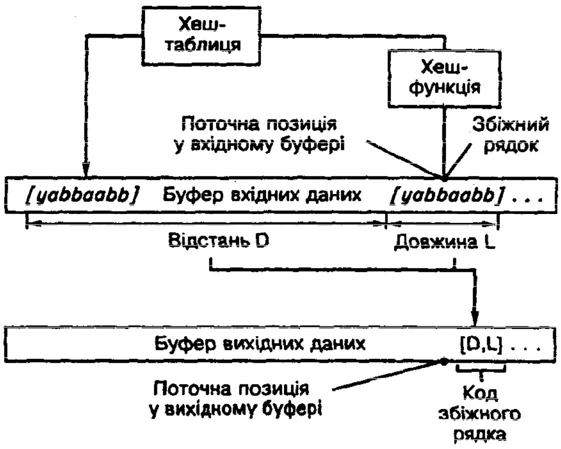

Рис. 9.1

Якщо тепер при обновленні змісту хеш-таблиці з'ясується, що в ній вже зберігалася адреса деякого рядка, то при цьому залишиться тільки перевірити, наскільки цей рядок збігається з поточною послідовністю символів.

Для збільшення ймовірності знаходження потрібного рядка застосовується також перелік дозволених колізій — ланцюга адрес рядків, які мають однакові хеш-індекси, тобто якщо найближчий рядок, занесений до хеш-таблиці, в дійсності не збігається з поточною послідовністю символів, то процес пошуку рядка, що найбільше підходить, продовжується вже в переліку колізій. Після закінчення цього аналізу в хеш-таблицю заноситься адреса поточного рядка, а перелік колізій доповнюється рядком, який витискується з хеш-таблиці.

Якщо такий пошук є вдалим, тобто довжина збігу одного з підрядків з поточною послідовністю символів у вхідному буфері перевищує деякий поріг (як правило, два або три символи), то у вихідний потік пересилається її код, який складається зі значень відстані D та довжини L (див. рис. 9.1).

У тому разі, коли жоден з рядків, які розглядаються, не підходить, у вихідний буфер пересилається поточний символ вхідного потоку й увесь цей процес повторюється для подальших символів.

Для поділу кодів рядків, які збігаються, та окремих символів у вихідний потік подаються також біти ознак рядок/символ.

Ефективність стиснення інформації певним способом залежить від її виду. Так, ступінь стиснення може змінюватися від 1,2...1,5 раза для текстової інформації до 6...8 разів для чорнобілих зображень, а швидкість стиснення — відповідно від 0,07...0,2 Мбайт/с до 1,5...1,9 Мбайт/с [26].

9.3. ЗБІЛЬШЕННЯ ОСНОВИ КОДУ

Підвищення ефективності кодування, що поліпшує якість передачі інформації, можна розуміти по-різному, але прийняті в теорії кодування показники якості зводяться до трьох наступних тверджень, які є критеріями ефективності завадостійких кодів:

1) серед кодів з однаковими довжиною n та мінімальною кодовою відстанню d_{min} найкращі коди мають найбільшу довжину інформаційної частини блока;

2) серед кодів з однаковими довжиною n і кількістю k інформаційних елементів найкращі коди мають найбільшу мінімальну кодову відстань d_{min};

3) серед кодів з однаковими k та d_{min} найкращі коди мають найменшу довжину n блока.

Відповідно до першого твердження у кращому коді ефективніше використовується коректувальний потенціал* d_{min}, який захищає більшу кількість k інформаційних елементів у блоці, ніж в іншому коді.

Відповідно до другого твердження кращий код має більший коректувальний потенціал d_{min}, що дає змогу йому виправляти більшу кількість $\nu_{вп}$ спотворених елементів у кодовому блоці.

Відповідно до третього твердження кращий код має меншу кількість r надмірних елементів у блоці ($r = n - k$), а тому й меншу надмірність r/n.

Оскільки наведені твердження стосуються трьох параметрів коду (n, k та d_{min}), переформулюємо їх у термінах відносних величин, що дасть змогу, замаскувавши один із цих парамет рів, проводити порівняння кодів у площинній формі двох вим рювань.

Для цього, поділивши k та d_{min} на довжину n блока, діст мо швидкість $R = k/n$ коду і відносну кодову відстань d. Додамо до визначення останньої коефіцієнт 1/2, щоб про ти аналіз у єдиних з відомими джерелами одиницях [2 Останнє робиться з урахуванням функціональної зал $d_{min} = 2\nu_{вп} + 1$, звідки випливає, що $\nu_{вп} = (d_{min} - 1)/2$. У відносному поданні ν/n для досить великих значен

$$\frac{\nu_{вп}}{n} = \frac{d_{min} - 1}{2n} \approx \frac{d_{min}}{2n}.$$

---

* Під *коректувальним потенціалом* розумітимемо коре ість коду, яка визначається показником d_{min}, а втілюєт них елементів у блоці, які можуть бути випра 2ν + 1 [12, 25].

...м чином, наступний розгляд зводиться до двох параметрів: $R = k/n$ і $\nu_{вп}/n \approx d_{min}/(2n)$. Для спрощення відкинемо індекс min біля d, маючи на увазі, що d і є мінімальною кодовою відстанню.

Тоді наведені вище твердження можуть бути викладені так:

1) серед кодів з однаковою відносною кодовою відстанню $d/(2n) = \mathrm{const}$ кращим є код із більшою кодовою швидкістю R;

2) серед кодів з однаковою швидкістю $R = k/n = \mathrm{const}$ кращим є код із більшою кодовою відстанню $d/(2n)$;

3) серед кодів з однаковими значеннями k та d кращим є код із більшими значеннями $R = k/n$ і $d/(2n)$.

Розглянемо з позицій цих критеріїв вплив на ефективність кодування основи q коду. Загальновизнаним методом оцінювання ефективності кодування взагалі є відшукання граничних залежностей типу $R = f[d/(2n)]$ для найкращих кодів, якими є не якісь конкретні коди, а коди завдовжки $n \to \infty$ [25]. Остання умова дає змогу таким кодам відповідно до (9.19) мати досить велику коректувальну здатність $\nu_{вп}$. Ці граничні залежності $R[d/(2n)]$ називаються межами (верхніми або нижніми) для мінімальної кодової відстані d.

У [25, 32] межу Плоткіна записано у вигляді

$$k \le n - \frac{qd-1}{q-1} + 1 - \log_q d. \qquad (9.20)$$

Поділивши цю нерівність на n, дістанемо

$$R = \frac{k}{n} \le 1 - \frac{q}{q-1}\frac{d}{n} + \frac{1}{n(q-1)} + \frac{1}{n} + \frac{\log_q d}{n}.$$

...кщо збільшувати n до $n \to \infty$, то матимемо нерівність

$$R \le 1 - \frac{2q}{q-1}\frac{d}{2n}, \qquad (9.21)$$

...кинуто доданки вищих ступенів.

...ежі Плоткіна $П_q$, що відповідають (9.21), показано на ...ля $q = 2$ це лінія $П_2$, а для $q = \infty$ — лінія $П_\infty$. З рисунка ...о зі збільшенням основи q коду в повній відповід... ...х наведених вище критеріїв збільшується ефектив... ...ння. Так, при фіксованому значенні $d/(2n)$ збіль... ...q коду приводить до зростання $R = k/n$ і навпа... ...ерхніх меж для d, зміст якої полягає в тому, щ... ...ідображається на рис. 9.2 у вигляді точ... ...и R та $d/(2n)$ і немає жодного к...

ти якого перевищували б відповідні координати будь-якої точки верхньої межі, тобто не існують коди, кращі від тих, що відображаються верхньою межею.

Є ще дві верхні та одна нижня межі для d, поширені завдяки своїй невеликій складності також тому, що вони адекватно відображають багато відомих кодів [25, 32], уточнюючи та доповнюючи одна одну. Розглянемо їх докладніше. Це межі Хеммінга, Еліаса та нижня межа Варшамова — Гільберта. Всі вони пов'язані з нерівністю Чернова [32], де використовується функція виду

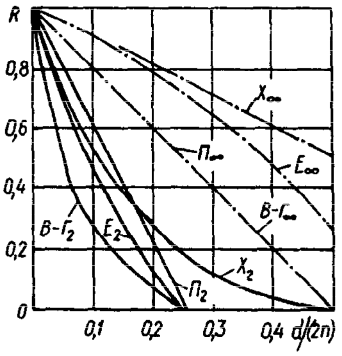

Рис. 9.2

$$\varphi(x) = x\log_q(q-1) - x\log_q x - (1-x)\log_q(1-x), \qquad (9.22)$$

яка тісно пов'язана з ентропією $H(x)$ джерела і при $q = 2$ збігається з нею.

Межа Хеммінга має такий вигляд [25]:

$$R \le 1 - \varphi(\nu_{вп}/n). \qquad (9.23)$$

Якщо врахувати (9.19) і $n \to \infty$, то дістанемо

$$R \le 1 - \varphi\left(\frac{d}{2n}\right) = 1 - \varphi(x), \qquad (9.24)$$

де $x = d/(2n)$.

Включивши до (9.24) вираз (9.22), матимемо рівняння межі

$$R = 1 - x\log_q(q-1) + x\log_q x + (1-x)\log_q(1-x). \qquad (9.25)$$

Проаналізуємо вираз (9.25) детальніше. Для малих значень $x \to 0$ при $q \to \infty$ деякі складові його прямують до нуля й тоді $R \le 1 - x$. В іншому випадку, коли $x \to 1$ та $q \to \infty$, з тих самих причин $R \le 1 - x$. Середня область для x визначається виразом (9.25), з якого випливає межа Хеммінга X_q; для двійкового коду це лінія X_2 на рис. 9.2. Якщо збільшувати основу коду до $q \to \infty$, то лінія межі X_q піднімається вище над лінією X_2 — при $q = \infty$ займає положення X_∞, даючи той самий асимптотичний вираз межі Хеммінга при великих значеннях основи q, тобто

$$R \le 1 - x. \qquad (9.26)$$

Верхня межа Еліаса визначається виразом [25]

$$d/n<\delta(R)\left[2-\frac{\delta(R)q}{q-1}\right]+\varepsilon, \tag{9.27}$$

де $\delta(R)$ – розв'язок рівняння $\varphi(x) = 1 - R$, утвореного з (9.23), а $\varphi(x)$ — функція (9.22); $\varepsilon > 0$ — як завгодно мала складова.

Позначимо $x = \delta(R)$, тоді $\varphi[\delta(R)] = 1 - R$. Таким чином, за допомогою межі Хеммінга (9.24) або (9.25) дістаємо парні значення $x = \delta(R)$ та R. Після цього для кожного R за відомим $x = \delta(R)$ розраховуємо значення $d/(2n)$ межі Еліаса, користуючись виразом (9.27), перетвореним до вигляду

$$\frac{d}{2n}<\frac{1}{2}\delta(R)\left[2-\frac{q}{q-1}\delta(R)\right]+\varepsilon. \tag{9.28}$$

Лінії E_2 (для $q = 2$) та E_∞ (для $q = \infty$) верхньої межі Еліаса відповідно до (9.28) зображено на рис. 9.2. Всі проміжні лінії E_q для $2 < q < \infty$ розташовуються між цими двома лініями.

Нарешті нижня межа Варшамова — Гільберта визначається виразом [25]

$$q^{n-k} \le \sum_{i=0}^{d-2} C_n^i (q-1)^i, \tag{9.29}$$

де C_n^i – біномні коефіцієнти. Щоб виключити їх із розгляду, скористаємося асимптотичною оцінкою цих коефіцієнтів у вигляді нерівності Чернова

$$\sum_{i=0}^{\nu} C_n^i (q-1)^i \le q^{n\varphi(\nu/n)}, \tag{9.30}$$

де $\varphi(x)$ — функція (9.22).

З урахуванням (9.30) вираз (9.29) набуває вигляду

$$q^{n-k} \le q^{n\varphi\left(\frac{d-2}{n}\right)}. \tag{9.31}$$

Після логарифмування обох частин (9.31) матимемо

$$n-k \le n\varphi\left(\frac{d-2}{n}\right),$$

звідки

$$R=k/n \ge 1-\varphi\left(\frac{d}{n}-\frac{2}{n}\right).$$

Збільшуючи n до $n \to \infty$, дістаємо асимптотичну форму нижньої межі Варшамова — Гільберта

$$R \geq 1 - \varphi(d/n). \qquad (9.32)$$

Якщо (9.32) порівняти з межею Хеммінга (9.24), то можна побачити, що

$$R \geq 1 - \varphi\left(2\frac{d}{2n}\right) = 1 - \varphi(2x), \qquad (9.33)$$

де $x = d/(2n)$ — спільний аргумент усіх розглянутих асимптотичних меж, а значення R у формі (9.33) може бути розраховане за (9.25), якщо аргумент x межі Хеммінга замінити аргументом $y = 2x$ межі Варшамова — Гільберта.

Остаточно після перетворення (9.25) знаходимо

$$R \geq 1 + \log_q\left[\left(\frac{2x}{q-1}\right)^{2x}(1-2x)^{(1-2x)}\right], \qquad (9.34)$$

де $x = d/(2n)$.

Лінії B — Γ_2 (для $q = 2$) та B — Γ_∞ (для $q = \infty$) нижньої межі Варшамова — Гільберта, що відповідають (9.34), показано на рис. 9.2. Всі проміжні лінії B — Γ_q для $2 < q < \infty$ розташовуються між цими двома лініями.

Різниця між наведеними асимптотичними межами для мінімальної кодової відстані пояснюється різницею між існуючими і ще не відшуканими в явному вигляді кращими кодами. Проте більш важливими є загальні риси цих меж. Роль усіх проміжних меж $2 < q < \infty$ полягає в тому, що для кожного значення q немає кодів, точки відображення яких зі своїми координатами R і $d/(2n)$ на рис. 9.2 лежали б вище відповідної лінії верхньої або нижче відповідної лінії нижньої меж. Це дає змогу оцінити із загальних позицій граничні можливості кодів взагалі і вказати ті параметри, коди з якими потрібно відшукувати і будувати як найефективніші. Разом із тим ці асимптотичні (для $n \to \infty$) межі при різних значеннях q дають змогу виявити великий позитивний вплив основи коду на ефективність кодування інформації відповідно до зазначених вище критеріїв.

9.4. ВИКОРИСТАННЯ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

При передачі повідомлень первинним кодом вірогідність приймання їх в основному визначається лінією (каналом) зв'язку, а також рівнем і видом завад, які діють в ній. Здобута при цьому вірогідність дуже часто не задовольняє вимоги споживачів інформації; тому для підвищення вірогідності передачі повідомлень, як правило, вживаються спеціальні заходи.

Одним із них є використання зворотного зв'язку. При цьому поряд із підвищенням вірогідності повідомлень досягається також збільшення ефективності передачі інформації.

Дійсно, якщо в системах передачі інформації без зворотного зв'язку для підвищення вірогідності передачі повідомлень потрібно застосовувати більш складні коректувальні коди (такі як, наприклад, циклічні коди БЧХ, Файра та інші, що, у свою чергу, призводить до збільшення довжини кодових комбінацій і, як наслідок, до зменшення швидкості передачі інформації), то в системах зі зворотним зв'язком дуже складні (й дуже довгі) коректувальні коди використовувати не треба. В таких системах для передачі повідомлень досить користуватися кодами, що виявляють помилки та які мають значно меншу довжину порівняно з коректувальними кодами, що виправляють помилки.

У разі виявлення помилки в прийнятій по прямому каналу кодовій комбінації в системі передачі зі зворотним зв'язком по зворотному каналу посилається сигнал запиту, за яким передавальний пристрій системи повторює передачу інформації по прямому каналу. У зв'язку з цим передавальний пристрій системи має зберігати інформацію про передані кодові комбінації на період часу, достатній для аналізу їх приймальним пристроєм й одержання можливого запиту при виявленні помилок.

Кількість повторень залежить від стану каналу зв'язку і, як правило, обмежується з урахуванням вимог замовника. Зі збільшенням повторень швидкість передачі інформації зменшується, але це помітно тільки при поганому стані каналу зв'язку.

Таким чином, ефективність передачі повідомлень у системах зі зворотним зв'язком залежатиме як від вибору коду, що виявляє помилки, так і від інтенсивності та виду помилок у каналі зв'язку.

Критерієм ефективності методу підвищення вірогідності передачі повідомлень може бути вираз

$$k_{\text{еф}} = \log_2 \frac{a}{g}, \tag{9.35}$$

де $a = P_{\text{п}k}/P_{\text{п}n}$ — виграш у захисті від помилок (тут $P_{\text{п}k}$, $P_{\text{п}n}$ — відповідно ймовірності помилки в повідомленні без надмірності та з надмірністю); $g = g_{\text{ін}} + g_{\text{сх}} = \frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{k}}} + \mu \frac{C_{\text{пд}}}{C_0}$ — надмірність [тут $g_{\text{ін}}$, $g_{\text{сх}}$ — відповідно інформаційна та схемна надмірності; $V_{\text{с}}$, V_{k} – відповідно сумарна та корисна (без надмірності) швидкості передачі інформації; μ — ваговий коефіцієнт, що зводить інформаційну та схемну надмірності до еквівалентних техніко-економічних показників; $C_{пд}$, $C_о$ – відповідно об'єми передавальної апаратури з пристроями підвищення вірогідності передачі повідомлень і без цих пристроїв в еквівалентних одиницях].

Для кодів, що виявляють помилки з наступним запитом, інформаційна надмірність [12] визначається виразом

$$g=\left(1+\frac{r}{k}\right)\left(\frac{1}{1-P'_{пп}}\right). \tag{9.36}$$

Другий множник у (9.36) показує збільшення надмірності через повторення.

Оцінимо ефективність використання двійкового (7, 4)-коду Хеммінга для виправлення однократних помилок у системі передачі повідомлень без зворотного зв'язку та цього самого коду для виявлення двократних помилок із запитом у системах зі зворотним зв'язком. Умовимося, що ймовірність спотворення одиничного елемента $P_е = 5 \cdot 10^{-3}$.

При біномному характері розподілу помилок маємо

$$P_{пп} = 1 - (1 - P_е)^n = 1 - (1 - 5 \cdot 10^{-3})^7 \approx 3{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Інформаційна надмірність:

• при виправленні однократної помилки

$$g_{ін1} = (1 + r/k) = 1 + 3/4 = 1{,}75;$$

• у разі виявлення помилок

$$g_{ін2} = (1+r/k)\left(\frac{1}{1-P'_{пп}}\right) = 1{,}75 \cdot \frac{1}{1-3{,}5 \cdot 10^{-2}} = 1{,}81.$$

Якщо умовно взяти схемну надмірність [12] для систем передачі повідомлень при виправленні помилок $q_{сх1} = 1{,}5$ і в разі їх виявлення $q_{сх2} = 2{,}5$, то

$$g_1 = g_{ін1} + g_{сх1} = 1{,}75 + 1{,}5 = 3{,}25;$$
$$g_2 = g_{ін2} + g_{сх2} = 1{,}81 + 2{,}5 = 4{,}31.$$

Імовірність появи помилки в повідомленні без надмірності

$$P_{пk} = 1 - (1 - P_е)^k = 1 - (1 - 5 \cdot 10^{-3})^4 \approx 0{,}02,$$

а в повідомленні з використанням двійкового (7, 4)-коду Хеммінга, що виправляє одну помилку,

$$P_{пп}(1) = 1 - (1 - P_е)^n - nP_е(1 - P_е)^{n-1} =$$
$$= 1 - (1 - 5 \cdot 10^{-3})^7 - 7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}(1 - 5 \cdot 10^{-3})^6 \approx 0{,}002.$$

Імовірність виникнення помилки при застосуванні цього самого коду для виявлення двократних помилок

$$P_{пл}(2) = 7P_e^3(1 - P_e)^4 + 7P_e^4(1 - P_e)^3 + P_e^7 =$$
$$= 7(5 \cdot 10^{-3})^3(1 - 5 \cdot 10^{-3})^4 +$$
$$+ 7(5 \cdot 10^{-3})^4(1 - 5 \cdot 10^{-3})^3 + (5 \cdot 10^{-3})^7 \approx 0,86 \cdot 10^{-6}.$$

Виграш у захисті від помилок

$$a_1 = \frac{P_{пk}}{P_{пл}(1)} = \frac{0,02}{0,002} = 10;$$

$$a_2 = \frac{P_{пk}}{P_{пл}(2)} = \frac{0,02}{0,86 \cdot 10^{-6}} \approx 23000.$$

Критерії ефективності

$$k_{1еф} = \log_2 \frac{a_1}{g_1} = \log_2 \frac{10}{3,25} \approx 1,6;$$

$$k_{2еф} = \log_2 \frac{a_2}{g_2} = \log_2 \frac{23000}{4,31} \approx 12,3,$$

тобто використання двійкового (7, 4)-коду Хеммінга для виявлення помилок більш ефективне, ніж для їх виправлення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Визначити ймовірності виникнення виявлених $P_{в.п}$ і невиявлених $P_{нв.п}$ помилок у двійковому коді, що виявляє помилки, якщо він складається з таких трьох комбінацій: 001, 010, 100.

2. Визначити ймовірності виникнення виявлених $P_{в.п}$ і невиявлених $P_{нв.п}$ помилок у n-елементному двійковому коді, що виявляє помилки, якщо він складається з таких кодових комбінацій: 0001, 0010, 0100, 1000. Мінімальна кодова відстань $d_{min} = 2$. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 10^{-4}$).

3. Визначити ймовірності виникнення виявлених $P_{в.п}$ і невиявлених $P_{нв.п}$ помилок у двійковому коді завдовжки $n = 6$ з перевіркою на парність, якщо канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 5 \cdot 10^{-4}$).

Р о з в ' я з а н н я. Заданий код виявляє всі помилки непарної кратності й не виявляє помилки парної кратності. Тому ймовірність виявлення помилок

$$P_{в.п} = P(1) + P(3) + P(5) =$$
$$= C_6^1 P_e(1 - P_e)^5 + C_6^3 P_e^3(1 - P_e)^3 + C_6^5 P_e^5(1 - P_e).$$

Очевидно, найбільша ймовірність виявлення помилки припадає тут на перший член, тобто

$$P_{в.п} \approx P(1) = C_6^1 P_e(1 - P_e)^5 \approx 6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Імовірність виникнення невиявлених помилок

$$P_{\text{нв.п}} = \frac{1}{2^r}[P(2)+P(4)+P(6)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[C_6^2 P_e^2 (1-P_e)^4 + C_6^4 P_e^4 (1-P_e)^2 + C_6^6 P_e^6 (1-P_e)^0\right],$$

але через те, що $P(2) > P(4) > P(6)$, маємо

$$P_{\text{нв.п}} \approx \frac{1}{2}P(2) = \frac{1}{2}C_6^2 P_e^2 (1-P_e)^4 \approx \frac{15}{2}\left(5\cdot 10^{-4}\right)^2 \approx 1{,}88\cdot 10^{-6}.$$

4. Визначити ймовірності виникнення виявлених і невиявлених помилок у двійковому коді завдовжки $n = 5$ з перевіркою на парність. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 2 \cdot 10^{-4}$).

5. Визначити ймовірності виникнення виявлених і невиявлених помилок у двійковому коді зі сталою вагою при $w = 3$ та $n = 5$. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$).

6. Визначити ймовірності виникнення виявлених і невиявлених помилок у двійковому інверсному коді при $n = 4$. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$).

7. Визначити ймовірності виникнення виявлених і невиявлених помилок у двійковому кореляційному коді при $n = 6$. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$).

8. Визначити ймовірності виникнення виправлених $P_{\text{вп.п}}$, виявлених $P_{\text{в.п}}$ і невиявлених $P_{\text{нв.п}}$ помилок у двійковому (7, 4)-коді Хеммінга ($n = 7$, $k = 4$). Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 10^{-3}$), мінімальна кодова відстань $d_{\min} = 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Заданий код виправляє однократні помилки, а виявляє двократні. Тому імовірність виправлення помилок

$$P_{\text{вп.п}} = P(1) = C_7^1 P_e (1 - P_e)^6 \approx 7 \cdot 10^{-3},$$

імовірність виявлення їх

$$P_{\text{в.п}} = P(2) = C_7^2 P_e^2 (1 - P_e)^5 \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5},$$

а ймовірність виникнення невиявлених помилок

$$P_{\text{нв.п}} = P(3) = C_7^3 P_e^3 (1 - P_e)^4 \approx 1{,}05 \cdot 10^{-7}.$$

9. Розв'язати попередню задачу стосовно двійкового (15, 11)-коду Хеммінга ($n = 15$, $k = 11$).

10. Визначити ймовірності виникнення виправлених і невиправлених помилок у двійковому циклічному (7, 4)-коді ($n = 7$, $k = 4$). Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 2 \cdot 10^{-3}$), мінімальна кодова відстань $d_{\min} = 3$.

11. Визначити ймовірності виникнення виправлених і невиправлених помилок у двійковому циклічному (11, 7)-коді. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 5 \cdot 10^{-4}$), мінімальна кодова відстань $d_{\min} = 3$.

12. Визначити ймовірності виникнення виправлених і невиправлених помилок у двійковому (15, 7)-коді БЧХ. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 4 \cdot 10^{-3}$), мінімальна кодова відстань $d_{\min} = 5$.

13. Визначити ймовірності виникнення виправлених і невиправлених помилок у двійковому (15, 5)-коді БЧХ. Канал зв'язку симетричний ($P_{01} = P_{10} = P_e = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$), мінімальна кодова відстань $d_{\min} = 7$.

14. Стиснути лінійним способом, використовуючи знак поділу ρ, масив інформації, який має вигляд

4	1	5	2	3	3	8	6	7	1
4	1	5	2	3	3	8	6	7	2
4	1	5	2	3	3	8	6	7	4
4	1	5	2	3	3	8	6	7	0
4	1	5	2	3	3	8	6	7	2
4	1	5	2	3	3	8	6	7	5
4	1	5	2	3	3	8	6	7	1

15. Розв'язати попередню задачу та визначити коефіцієнт стиснення стосовно такого масиву інформації:

2	8	1	4	5	7	5	2
2	8	1	4	5	7	3	6
2	8	1	4	5	7	4	1
2	8	1	4	5	7	6	9
2	8	1	4	5	7	2	2
2	8	1	4	5	7	3	8

16. Розгорнути стиснений масив інформації

3	5	6	2	3	3	7	8
ρ	2	1	ρ	3	9	ρ	4
4	2	5	ρ	4	ρ	6	ρ
ρ	ρ	3	8				

17. Відновити первинний масив інформації, якщо на проміжному етапі розгортання стиснений масив мав такий вигляд:

6	4	4	5	3	9	8	8
.	.	.	.	.	.	.	7
.	.	.	.	.	.	.	3
.	.	.	.	.	4	5	6
.	.	.	.	.	.	2	1
.	.	.	.	3	1	0	8
4	5	6	1	1	8	4	2
.	.	.	.	.	3	5	4
.	.	.	.	.	.	.	6
.	.	.	.	.	.	2	2

18. Використовуючи знак поділу ρ та знак К кінця рядка, стиснути масив інформації

3	1	8	8	4	4	1	5	2	0
4	0	8	8	4	4	1	5	2	4
5	6	8	8	4	4	1	5	2	5
7	5	8	8	4	4	1	5	2	1
2	8	8	8	4	4	1	5	2	3
9	7	8	8	4	4	1	5	2	8
7	3	8	8	4	4	1	5	2	2
6	2	8	8	4	4	1	5	2	9

19. Розгорнути стиснений масив інформації

3	1	8	8	4	4	1	5	2	0
K	4	0	ρ	4	K	5	6	ρ	5
K	7	5	ρ	1	K	2	8	ρ	3
K	9	7	ρ	8	K	7	3	ρ	2
K	6	2	ρ	9	K				

20. Розв'язати попередню задачу стосовно таких двох масивів інформації:

4	7	3	9	3	5	5	6	6	1
K	3	ρ	2	K	9	ρ	8	K	ρ
K	ρ	K	7	ρ	1	K	2	ρ	0
1	3	5	0	2	K	6	ρ	8	K

1	5	4	6	8	7	7	6
K	4	ρ	8	K	6	ρ	4
7	K	8	ρ	1	4	4	K
5	6	ρ	0	K			

21. Стиснути масив інформації, заданий в задачі 18, використовуючи символи X = 2 та Z = 5.

22. Використовуючи символи X = 2, Y = 3 та Z = 5, стиснути масив інформації

0	2	3	9	4	5	6	7	1	8	6	1	5
2	2	3	9	4	5	6	7	1	8	6	2	6
3	2	3	9	4	5	6	7	1	8	6	3	3
3	2	3	9	7	5	6	7	0	7	6	3	3
6	2	3	9	7	5	5	1	0	7	6	3	4
5	1	3	9	7	4	5	1	0	7	6	3	4

23. Розгорнути такі два стиснені масиви інформації:

0	2	3	9	4	5	6	7	1	8	6	1	5
2	Z	Z	2	6	3	Z	Z	3	3	3	Y	7
Y	0	7	Y	6	Z	5	1	X	X	4	5	1
Y	4	Z	X									

1	2	2	1	1	5	6	7	1	2
3	Z	X	X	4	6	Y	Y	5	3
X	2	Y	6	Y	3	Z	X	X	2
X	7	Z	2	1	7	Y	4	X	X

24. Використовуючи символи X, Y і Z, стиснути масив інформації

0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	9	8	7	6	8	4	3	2	1	3
1	9	8	7	4	8	4	3	2	0	6
4	3	8	7	3	8	4	3	2	0	1
4	3	8	7	5	8	4	3	2	0	1
5	3	8	7	5	3	4	3	6	0	1
5	3	7	7	5	3	4	3	6	0	1
7	1	7	7	4	3	4	3	2	0	1

25. Стиснути масив інформації, заданий у попередній задачі, використовуючи знак поділу ρ та знак K кінця рядка.

26. Первинний масив інформації має вигляд

8	7	0	1	2	3	4	5	6	8	8	2	3	5	6
8	7	0	1	2	3	4	5	6	8	8	1	3	4	2
4	7	0	1	2	3	4	5	6	8	8	1	4	3	1
4	7	0	1	2	3	4	5	6	8	8	1	4	1	7
2	6	0	1	2	3	4	5	6	8	8	1	4	1	5
2	6	0	1	2	3	4	5	6	8	8	1	5	4	7

Стиснути цей масив, використовуючи: а) знак поділу ρ; б) знак поділу ρ та знак К кінця рядка; в) символи X, Y, Z. Порівняти утворені масиви між собою.

27. Яким способом найкраще стиснути такий масив інформації:

0	9	8	7	6	5	4	3
0	9	8	7	6	5	4	3
0	9	8	7	6	5	4	3
0	9	8	7	6	5	4	3
0	9	8	7	6	5	4	3?

Показати процес згортання та розгортання цього масиву.

28. Способом зонного стиснення інформації з використанням табл. 9.3 закодувати такий текст: «Стиснення інформації використовується для прискорення процесів оброблення, зберігання та пошуку інформації». Визначити коефіцієнт стиснення.

29. Розв'язати попередню задачу стосовно такого тексту: «Майже всі сучасні ЕОМ побудовано на дискретних елементах».

30. Розгорнути масив інформації

D1C4A08AD9C1490D4C1D5C980D5C5D6C0D1C242D5C3
E4C9097E0C14D0C3E3C990D4C24D7E7C6D8CBD6C08A
D0C1DBC3D0CA0D5C108941DBC9D5C71B69097E0C14D
0C3E3C99E8C0E1C10D1C242D5C3D2C6D8CBD6E8C0
630E2C8AD54C1B690990D1C242D5C3E4C9E9,

який був згорнений способом зонного стиснення з використанням табл. 9.1, та визначити коефіцієнт стиснення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим оцінюється вірогідність кодованих повідомлень?
2. Як визначається ймовірність виникнення *i*-кратних помилок у разі їх незалежності?
3. Як оцінюються ймовірності виникнення виявлених і невиявлених помилок у симетричному каналі для кодів, що виявляють помилки?
4. Як оцінюються ймовірності виникнення виправлених і невиправлених помилок для кодів, що виправляють помилки?
5. Як визначається ймовірність виникнення помилок у разі передачі повідомлень по каналах з пакетним розподілом помилок?
6. Що розуміють під стисненням інформації?
7. Як класифікуються способи стиснення інформації?
8. Який основний недолік способів стиснення інформації без відновлення її початкового стану?

9. Які способи стиснення належать до лінійних?
10. Що характеризує матричні, комбіновані та каскадні способи стиснення інформації?
11. Як виконується стиснення інформації з використанням замість повторень додаткових символів?
12. Які способи стиснення використовуються для архівації даних на дисках?
13. На чому ґрунтується стиснення інформації виключенням даних, які повторюються в різних файлах?
14. Які переваги має спосіб зонного стиснення інформації?
15. У чому полягає спосіб стиснення інформації зменшенням розрядності кодованих слів?
16. Які переваги має спосіб стиснення інформації заміною деяких комбінацій літер одиничними символами?
17. На чому ґрунтується спосіб стиснення інформації використанням адаптивного кодування?
18. У чому полягає спосіб стиснення інформації зберіганням атрибутів у вигляді бітової матриці?
19. Які основні критерії ефективності завадостійких кодів?
20. Що показують верхні та нижні межі для кодової відстані?
21. Як впливає збільшення основи коду на його ефективність?
22. Які коди рекомендується використовувати в системах передачі інформації зі зворотним зв'язком?
23. Як впливає на вірогідність передачі повідомлень уведення зворотного зв'язку в системах передачі інформації?
24. Як оцінюється ефективність методів підвищення вірогідності передачі інформації?

Додаток 1. **Фрагмент таблиці значень двійкових логарифмів цілих чисел**

x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$
1	0,000	36	5,170	71	6,150	106	6,728
2	1,000	37	5,209	72	6,170	107	6,741
3	1,585	38	5,248	73	6,190	108	6,755
4	2,000	39	5,285	74	6,209	109	6,768
5	2,322	40	5,322	75	6,229	110	6,781
6	2,585	41	5,358	76	6,248	111	6,794
7	2,807	42	5,392	77	6,267	112	6,807
8	3,000	43	5,426	78	6,285	113	6,820
9	3,170	44	5,459	79	6,304	114	6,833
10	3,332	45	5,492	80	6,322	115	6,845
11	3,459	46	5,524	81	6,340	116	6,858
12	3,585	47	5,555	82	6,358	117	6,870
13	3,700	48	5,585	83	6,375	118	6,883
14	3,807	49	5,615	84	6,392	119	6,895
15	3,907	50	5,644	85	6,409	120	6,907
16	4,000	51	5,672	86	6,426	121	6,919
17	4,087	52	5,700	87	6,443	122	6,931
18	4,170	53	5,728	88	6,459	123	6,943
19	4,248	54	5,755	89	6,476	124	6,954
20	4,322	55	5,781	90	6,492	125	6,966
21	4,392	56	5,807	91	6,508	126	6,977
22	4,459	57	5,833	92	6,524	127	6,989
23	4,524	58	5,858	93	6,539	128	7,000
24	4,585	59	5,883	94	6,555	200	7,644
25	4,644	60	5,907	95	6,570	256	8,000
26	4,700	61	5,931	96	6,585	300	8,229
27	4,755	62	5,951	97	6,600	400	8,644
28	4,807	63	5,977	98	6,615	500	8,966
29	4,858	64	6,000	99	6,629	512	9,000
30	4,907	65	6,022	100	6,614	600	9,229
31	4,954	66	6,044	101	6,658	700	9,451
32	5,000	67	6,066	102	6,672	800	9,644
33	5,044	68	6,087	103	6,687	900	9,814
34	5,087	69	6,109	104	6,700	1000	9,965
35	5,129	70	6,129	105	6,714	10 000	13,288

Додаток 2. **Фрагмент таблиці значень функції $-p\log_2 p$**

p	$-p\log_2 p$	p	$-p\log_2 p$	p	$-p\log_2 p$	p	$-p\log_2 p$
0,001	0,0099	0,027	0,1407	0,150	0,4105	0,600	0,4432
0,002	0,0179	0,028	0,1444	0,160	0,4230	0,610	0,4350
0,003	0,0251	0,029	0,1481	0,175	0,4400	0,625	0,4238
0,004	0,0319	0,030	0,1518	0,180	0,4453	0,650	0.4040
0,005	0,0382	0,032	0,1589	0,190	0,4552	0,675	0,3828
0,006	0,0443	0,035	0,1693	0,200	0,4644	0,700	0,3602
0,007	0,0501	0,037	0,1760	0,210	0,4728	0,710	0,3508
0,008	0,0557	0,040	0,1858	0,225	0,4842	0,725	0,3364
0,009	0,0612	0,042	0,1941	0,250	0,5000	0,750	0,3113
0,010	0,0664	0,045	0,2013	0,275	0,5122	0,775	0,2850
0,011	0,0716	0,047	0,2073	0,300	0,5211	0,800	0,2575
0,012	0,0766	0,050	0,2161	0,310	0,5238	0,810	0,2462
0,013	0,0814	0,055	0,2301	0,325	0,5270	0,825	0,2290
0,014	0,0862	0,060	0,2435	0,350	0,5301	0,850	0,1993
0,015	0,0909	0,065	0,2563	0,375	0,5306	0,875	0,1810
0,016	0,0954	0,070	0,2686	0,400	0,5288	0,900	0,1368
0,017	0,0999	0,075	0,2803	0,410	0,5274	0,910	0,1238
0,018	0,1043	0,080	0,2915	0,425	0,5246	0,925	0,1040
0,019	0,1086	0,085	0,3023	0,450	0,5184	0,950	0,0703
0,020	0,1129	0,090	0,3127	0,475	0,5102	0,975	0,0356
0,021	0,1170	0,095	0,3226	0,500	0,5000	0,980	0,0286
0,022	0,1211	0,100	0,3322	0,510	0,4954	0,990	0,0143
0,023	0,1252	0,110	0,3503	0,525	0,4880	0,095	0,0072
0,024	0,1291	0,125	0,3750	0,550	0,4744	0,097	0,0043
0,025	0,1330	0,130	0,3826	0,575	0,4591	0,999	0,0014
0,026	0,1369	0,140	0,3971				

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арманд В. А., Железнов В. В.* Штриховые коды в системах обработки информации. — М.: Радио и связь, 1989. — 92 с.
2. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. — М.: Мир, 1986. — 576 с.
3. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь. — М.: Сов. радио, 1974. — 720 с.
4. *Горяинов О. А., Хохлов Г. И.* Элементы теории информации и кодирования / МИРЭА. — М., 1985. — 117 с.
5. *Емельянов Г. А., Шварцман В. О.* Передача дискретной информации. — М.: Радио и связь, 1982. — 240 с.
6. *Жураковский Ю. П., Волошин В. И.* Многочастотные системы передачи дискретных сигналов. — К.: Техніка, 1981. — 120 с.
7. *Жураковский Ю. П., Назаров В. Д.* Каналы связи. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. — 236 с.
8. *Жураковский Ю. П.* Передача информации в ГАП. — К.: Вища шк., 1991. — 216 с.
9. *Злотник Б. М.* Помехоустойчивые коды в системах связи. — М.: Радио и связь, 1989. — 232 с. — (Стат. теория связи; Вып. 31).
10. *Зюко А. Г., Коробов Ю. Ф.* Теория передачи сигналов. — М.: Связь, 1972. — 282 с.
11. *Игнатов В. А.* Теория информации и передачи сигналов. — М.: Радио и связь, 1991. — 280 с.
12. *Кодирование* информации (двоичные коды) / Н. Т. Березюк, А. Г. Андрущенко, С. С. Мощицкий и др. — Харьков: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1978. — 252 с.
13. *Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш.* Курс теории информации. — М.: Наука, 1982. — 416 с.
14. *Коржик В. И., Финк Л. М.* Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. — М.: Связь,1975. — 272 с.
15. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956. — 152 с.
16. *Кохманюк Д.* Сжатие данных: Как это делается. Ч. 2 // Index PRO. — 1993. — № 2. — С. 30—49.
17. *Кричевский Р. Е.* Сжатие и поиск информации. — М.: Радио и связь, 1989. — 168 с.
18. *Кузьмин И. В., Кедрус В. А.* Основы теории информации и кодирования. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. — 238 с.
19. *Курбаков К. И.* Кодирование и поиск информации в автоматическом словаре. — М.: Сов. радио, 1968.
20. *Логинов В. М., Цепков Г. В., Чинаев П. И.* Экономичное кодирование. — К.: Техніка, 1976. — 176 с.

21. *Мельников Ю. Н.* Достоверность информации в сложных системах. — М.: Сов. радио, 1973. — 192 с.
22. МикроЭВМ в информационно-измерительных системах / С. М. Переверткин, Н. И. Гаранин, Ю. Н. Костин, И. И. Миронов. — М.: Машиностроение, 1987. — 248 с.
23. *Митюшин К. Г.* Телеконтроль и телеуправление в энергосистемах. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 288 с.
24. *Муттер В. М.* Основы помехоустойчивой телепередачи информации. — Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. —288 с.
25. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. — 590с.
26. *Резник Ю.* Алгоритмы в системах сжатия реального времени // Index PRO. — 1994. — № 1. — С.22—33.
27. *Самойленко С. И.* Помехоустойчивое кодирование. — М.: Наука, 1966. — 240 с.
28. *Советов Б. Я.* Теория информации. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 184 с.
29. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. — М.: Сов. радио, 1975. — 420 с.
30. *Субье-Ками А.* Двоичная техника и обработка информации: Пер. с фр. / Под ред. Д. Ю.Панова. — М.: Мир, 1964. — 500с.
31. *Темников Ф. Е., Афонин В. А., Дмитриев В. И.* Теоретические основы информационной техники. — М.: Энергия, 1979. — 512 с.
32. *Теория* кодирования: Пер. с яп. / Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, Я. Инагаки. — М.: Мир, 1978. — 576 с.
33. *Теория* передачи сигналов / А. Г.Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. — М.: Радио и связь,1986. — 304 с.
34. *Тутевич В. Н.* Телемеханика. — М.: Высш. шк., 1985. — 423 с.
35. *Файнстейн А.* Основы теории информации. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 140 с.
36. *Фано Р.* Передача информации. Статистическая теория связи. — М.: Мир, 1965. — 483 с.
37. *Форни Д.* Каскадные коды / Пер с англ. под ред. С. И. Самойленко. — М.: Мир, 1970. — 208с.
38. *Харкевич А. А.* Очерки общей теории связи // Избр.тр. — М.: Наука, 1973 — Т.3. — 194 с.
39. *Хайслей Т.* Передача данных и системы телеобработки: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1982. — 200 с.
40. *Хохлов Г. И.* Элементы теории корректирующих кодов / МИРЭА. — М., 1980. — 136 с.
41. *Цымбал В. П.* Задачник по теории информации и кодированию. — К: Вища шк. Головное изд-во, 1976. — 276 с.
42. *Цымбал В. П.* Теория информации и кодирование. — К.: Вища шк., 1992. — 263 с.
43. *Четвериков В. Н.* Подготовка и телеобработка данных в АСУ. — М.: Высш. шк., 1981. — 320 с.
44. *Шеннон К.-Э.* Работы по теории информации и кибернетики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 830 с.
45. *Шляпоберский В. И.* Элементы дискретных систем связи. — М.: Воениздат, 1965. — 304 с.
46. *Элементы* теории передачи дискретной информации / Л. П. Пуртов, А. С. Замрий, А. И. Захаров, В. М. Охорзин; Под ред. Л. П. Пуртова. — М.: Связь, 1972. — 232 с.
47. *Элементы* технической кибернетики. Терминология. — М.: Наука, 1968. — 52 с.
48. *Элиас П.* Безошибочное кодирование: Коды с обнаружением и исправлением ошибок / Под ред. А.М.Петровского. — М., 1956. — С.59—71.
49. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973. - 511 с.

Навчальне видання

Жураковський Юрій Павлович
Полторак Вадим Петрович

Теорія інформації та кодування

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Л. О. Зеленько, Р. Б. Попович*
Комп'ютерна верстка *А. А. Коркішко*

Свідоцтво про внесення до державного реєстру від 04.12.2000 серія ДК №268

Підп. до друку 07.11.2001. Формат $84 \times 108/_{32}$. Папір офс. № 1. Гарнітура Times New Roman. Офс. друк. Ум. друк. арк. 13,44. Обл.-вид. арк. 15,58. Тираж 5000 пр. Вид. № 9935. Зам. № 1-195

Видавництво "Вища школа", 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві "Вища школа",у ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика", 09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4