ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Чернівці
2019

ББК 22.183.492

П 627

УДК 519.863

Системний аналіз та теорія прийняття рішень. Конспект лекцій – Ч.2. / Укл.: Руснак М.А. – Електронне видання: 2019. – 16 с.

Укладачі: Руснак Микола Андрійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Терміном *„гра”* будемо називати взаємодію декількох гравців за відомими й постійними правилами, які визначають вид даної гри, та відомих і постійних станів цієї взаємодії, які визначають величини платежів між гравцями. Для позначення можливої реалізації цих станів вживатимемо термін *„партія”*. Терміном *„хід”* будемо називати момент партії, коли гравці (один чи кілька) вибирають рішення з деякої множини рішень. Правила гри передбачають, що в кінці гри між гравцями відбуваються взаєморозрахунки. Якщо сума всіх платежів у партії дорівнює нулю, гру називають *грою із нульовою сумою*. Надалі розглядатимемо ігри, в яких беруть участь тільки два гравці, в кожного з яких є по одному ходу в партії, причому вибір ходів скінченний. Платежі гравців у таких іграх зручно задавати у вигляді матриці, звідси походить назва таких ігор - *матричні ігри двох гравців із нульовою сумою*.

Нехай у грі беруть участь два гравці – I_1 та I_2. Перший із них вибирає ціле число $i, i=\overline{1,m}$, другий – ціле число $j,\ j=\overline{1,n}$. Вибір гравцями цих чисел здійснюється незалежно та одночасно. При проведенні взаєморозрахунку перший гравець платить другому суму $c_{i,j}$, яку у випадку $c_{i,j}\geq 0$ будемо називати виграшем, а у випадку $c_{i,j}\leq 0$ відповідно програшем гравця I_2. Очевидно, що виграш гравця I_2 є водночас програшем гравця I_1 і навпаки. Матрицю $C=\{c_{i,j}\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, побудовану за такими правилами, будемо називати *платіжною матрицею гри з точки зору другого гравця*.

Приклад. Розглянемо гру: два гравці одночасно обирають та називають одну із сторін монети. Якщо обрано різні сторони монети - гравець I_1 платить гравцю I_2 одиницю виграшу, якщо обрано однакові сторони – гравець I_2 платить гравцю I_1 одиницю виграшу. Побудувати платіжні матриці гри з точки зору кожного гравця.

Розв’язування. За вказаних умов платіжна матриця гри з точки зору гравця I_2 має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а з точки зору гравця I_1 -

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Надалі будемо розглядати матричні ігри тільки з точки зору гравця I_2. Отже, партію в матричній грі можна уявляти як вибір рядка (гравцем I_1) та стовпчика (гравцем I_2) у платіжній матриці, перетин яких визначає величину платежу. Сукупність усіх партій у грі, як правило, нескінченна. Метою гравців є визначення своєї оптимальної стратегії (поведінки) для всієї гри, яка гарантувала б досягнення максимального виграшу або мінімального програшу кожного з них відповідно.

Вектор-стрічку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ назвемо *змішаною стратегією* гравця I_1, вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ – *змішаною стратегією* гравця I_2. Компоненти цих векторів будемо трактувати як імовірності, з якими гравці впродовж гри обирають рядки чи стовпчики в платіжній матриці. Якщо протягом усієї гри гравець I_1 постійно обирає тільки один (k - й) рядок у платіжній матриці, то така стратегія $x = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ називається *чистою стратегією* гравця I_1. Аналогічно вводиться поняття чистої стратегії гравця I_2. Розглянемо питання про *знаходження оптимальних чистих стратегій* у матричній грі. Якщо гравець I_2 при своєму ході вибере стовпчик з номером j, $1 \leq j \leq n$, то гравець I_1 (мінімізуючи свій програш) може обрати рядок із номером i так, щоб виграш гравця I_2 був $\min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$. Тому гравець I_2 при своєму ході *повинен* вибирати стовпчик із номером j, $1 \leq j \leq n$ так, щоб досягнути виграшу величиною

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \underline{v}. \quad (43)$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що гравець I_1 при своєму ході *повинен* вибирати рядок із номером $i,\ 1 \le i \le m$ так, щоб домогтися програшу величиною

$$\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \overline{v}. \qquad (44)$$

Величина $\underline{v}$ називається нижньою ціною гри (або гарантованим виграшем другого гравця), величина $\overline{v}$ – верхня ціна гри (гарантований програш першого гравця). Якщо має місце рівність $\underline{v} = \overline{v} = v$ або рівність

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = v^*, \qquad (45)$$

то говорять, що матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях, а величину v^* називають *ціною гри*. Номери i^* та j^*, на яких виконується (45), дозволяють побудувати *оптимальні чисті стратегії* гравців

$$x^* = \{x_{i^*} = 1,\ x_i = 0,\ i \ne i^*\},\ y^* = \{y_{j^*} = 1,\ y_j = 0,\ j \ne j^*\}. \qquad (46)$$

Зауважимо, що не кожна матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях - наприклад, розглянута раніше гра з монетами.

Будемо говорити, що матриця C має сідлову точку (i^*, j^*) якщо виконується нерівність $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$ для всіх $i = \overline{1,m}$ і $j = \overline{1,n}$.

Теорема 7. Матрична гра двох гравців має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). При цьому ціна гри $v = c_{i^*,j^*}$, а оптимальні чисті стратегії визначаються формулами (46).

Доведення. Легко переконатися, що для будь-якої матриці C справедлива нерівність

$$\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} \ge \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}. \qquad (47)$$

Покажемо, що існування сідлової точки матриці C необхідно і досить для перетворення нерівності (47) у рівність і при цьому

$$c_{i^*,j^*} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} \qquad (48)$$

Необхідність. Нехай виконується (48), покажемо, що платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Виберемо індекси (i^*, j^*) із умов $\max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i,j}$ та $\min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \min\limits_{i=\overline{i,m}} c_{i,j}$. Згідно з (48), маємо $\max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} = \min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*}$. Врахувавши означення $\min$, отримаємо $\max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, а з урахуванням означення $\max$ маємо $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, $j = \overline{1,n}$. Цілком аналогічно отримаємо нерівність $c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$, $i = \overline{1,m}$, що і вказує на існування сідлової точки.

Достатність. Нехай тепер платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Покажемо, що виконується (48). Дійсно, з означення сідловок точки легко отримати нерівність $\max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le \min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*}$, з якої випливає нерівність $\min\limits_{i=\overline{1,m}} \max\limits_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} \le \max\limits_{j=\overline{1,n}} \min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$, що, з урахуванням (47), і завершує доведення.●

<u>Приклад.</u> Дослідити гру з платіжною матрицею $C = \begin{pmatrix} 50 & 27 & 64 \\ 50 & 5 & 90 \\ 18 & 9 & 12 \\ 25 & 95 & 20 \end{pmatrix}$ на існування розв'язку в чистих стратегіях.

<u>Розв'язування.</u> Безпосередніми підрахунками вияснимо, що умова (48) виконується при $i^* = 3$ і $j^* = 1$. За теоремою 7, гра має розв'язок у чистих стратегіях, $v^* = 18$, $x^* = (0,0,1,0)$, $y^* = (1,0,0)^T$.

Зауважимо, що відхилення від оптимальної чистої стратегії приводить до зменшення виграшу або до збільшення програшу гравця.

У загальному випадку, коли розв'язку в чистих стратегіях немає, його слід шукати у класі змішаних стратегій.

9. Оптимальні змішані стратегії

Розглянемо матричну гру двох гравців із платіжною матрицею C без сідлової точки. Очевидно, що гравцям не вигідно постійно обирати одну з чистих стратегій. Уведемо поняття *оптимальної* стратегії у класі змішаних стратегій. Нагадаємо, що вектор-стрічку $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $x_i \ge 0, i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ називаємо *змішаною стратегією* гравця I_1, вектор-стовпчик $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$, $y_j \ge 0, j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ - *змішаною стратегією* гравця I_2. Сукупність усіх можливих стратегій утворює клас змішаних стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 можна задати так

$$F(x,y) = xCy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \,. \tag{49}$$

Як і у випадку чистих стратегій, гравець I_1 може забезпечити собі середній програш не більше

$$\min_x G(x) = \min_x [\max_y F(x,y)], \tag{50}$$

а гравець I_2 може забезпечити собі середній виграш не менше

$$\max_y H(y) = \max_y [\min_x F(x,y)]. \tag{51}$$

Співвідношення (50) і (51) – це задачі відшукання гарантованих змішаних стратегій гравцями I_1 та I_2. Якщо для деяких змішаних стратегій x^* та y^* виконується нерівність

$$F(x^*,y) \le F(x^*,y^*) \le F(x,y^*),\ \forall x, \forall y, \tag{52}$$

то функція $F(x,y)$ має сідлову точку і, аналогічно теоремі 7, можна показати, що має місце рівність

$$F(x^*,y^*) = \min_x \max_y F(x,y) = \max_y \min_x F(x,y). \tag{53}$$

Уведені в такий спосіб стратегії x^* та y^* будемо називати *оптимальними змішаними стратегіями*, а число $v^* = x^* C y^*$ – *ціною гри*.

Покажемо, що кожна матрична гра має розв'язок у класі змішаних стратегій або, що рівносильне, функція, задана (49), має сідлову точку в класі стратегій.

Теорема 8. Задачі (50) і (51) відшукання гарантованих стратегій гравців I_1 та I_2 еквівалентні парі двоїстих ЗЛП

$$x_{m+1} \longrightarrow \min, \qquad\qquad y_{n+1} \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1},\ j = \overline{1,n},\ (54) \quad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j \ge y_{n+1},\ i = \overline{1,m}, \qquad (55)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Доведення. Покажемо, наприклад, що (50) еквівалентно (54). Перепишемо (50) так:

$$G(x) = \max_y F(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \to \min_x ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Зауважимо далі, що задача

$$\max_y F(x,y) \to \min_x ,\ (x,y) \in D$$

стає еквівалентною задачі

$$z \to \min ,\ F(x,y) \le z ,\ (x,y) \in D,$$

як тільки множина D – замкнена, а функція $F(x,y)$ – обмежена на D.

З урахуванням цього та в позначеннях $x_{m+1} = z$ отримаємо

$$x_{m+1} \to \min ,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \le x_{m+1} ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \qquad (56)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \; y_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Покажемо тепер, що множини допустимих векторів задач (54) і (56) збігаються. Дійсно, нехай вектор x задовольняє умовам задачі (56). Тоді цей же вектор x задовольняє умови задачі (54), наприклад, при $y = (1,0,\ldots,0)^T$. Навпаки, нехай вектор x задовольняє умови задачі (54). Візьмемо будь-який вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Помножимо нерівності $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1}, \; j = \overline{1,n}$ на відповідні $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$ та підсумуємо добутки за індексом j. Отримаємо $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \le x_{m+1}$, що й завершує доведення. •

Зауваження. Задачі (54) і (55) є парою двоїстих ЗЛП.

Тепер можна сформулювати та довести *основну теорему матричних ігор*.

Теорема 9. Кожна матрична гра має розв'язок.

Доведення. Покажемо, наприклад, що задача (54) завжди має розв'язок. Дійсно, допустима множина цієї задачі непорожня, оскільки при $x_{m+1} = \max_{j=\overline{1,n}} \left| c_{1,j} \right|$ вектор $x = (1,0,\ldots,0)$ є, очевидно, допустимим. З обмеженості зверху величин $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i, \; j = \overline{1,n}$ у класі стратегій випливає обмеженість знизу величини x_{m+1}, яка задає цільову функцію, тому розв'язок (54) існує. Із першої теореми двоїстості випливає існування розв'язку задачі (55), а із теореми 8 – існування розв'язків задач (50) і (51). Позначимо ці розв'язки x^* та y^*. Тоді очевидна є рівність $F(x^*, y^*) = \min_x \max_y F(x,y) = \max_y \min_x F(x,y)$, а отже, й існування сідлової точки у функції $F(x,y)$. •

Зауваження. Якщо $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*, x_{m+1}^*)$ - розв'язок задачі (54), а $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots y_n^*, y_{n+1}^*)$ - розв'язок задачі (55), то оптимальна змішана стратегія гравця I_1 - $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_m^*)$, оптимальна змішана стратегія гравця I_2 - $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots y_n^*)$, а ціна гри $v^* = x_{m+1}^* = y_{n+1}^*$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати матричну гру з платіжною матрицею $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язування. </u>Нехай вектори $x = (x_1, x_2)$ і $y = (y_1, y_2)^T$ належать класу стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 задається формулою $F(x, y) = xCy = y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)$.

Задачі (50) і (51) мають вигляд

$$\max_y [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \min_x ,$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$\min_x [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \max_y ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

Відповідні задачі (54) і (55) мають вигляд

$$\begin{array}{lcl} x_3 \to \min, & & y_3 \to \max, \\ -x_1 + x_2 \leq x_3, & & -y_1 + y_2 \geq y_3, \\ x_1 - x_2 \leq x_3, & \text{і} & y_1 - y_2 \geq y_3, \\ x_1 + x_2 = 1, & & y_1 + y_2 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Розв'язуючи їх M -методом, знаходимо:

$x^* = (0.5, 0.5)$, $y^* = (0.5, 0.5)^T$, $v^* = 0$.

10. Активні стратегії

У випадку існування оптимальних чистих стратегій результат відхилення від них для кожного із гравців очевидний, а у випадку змішаних стратегій це не так. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_1, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)^T$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_2. *Чисту стратегію* $x^k = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ гравця I_1 назвемо *активною*, якщо $x_k^* > 0$. Аналогічно вводиться поняття активних стратегій гравця I_2.

Теорема 10. Якщо гравець I_2 дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії y^*, то його середній виграш $F(x, y^*)$ залишається незмінним і дорівнює ціні гри $v^* = F(x^*, y^*)$ незалежно від стратегії гравця I_1, якщо тільки гравець I_1 не виходить за рамки своїх активних стратегій (застосовує їх у чистому вигляді чи змішує в довільних пропорціях).

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що всі чисті стратегії гравця I_1 активні, тобто, $x_i^* > 0$, $i = \overline{1, m}$. Оскільки (x^*, y^*) - сідлова точка функції $F(x, y)$, то з (52) випливає $v^* = F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*)$, або $v^* = x^* C y^* \leq x C y^*$ для всіх стратегій x. Візьмемо $x = x^i$, де x^i - i-та чиста стратегія і отримаємо

$$v^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^*, \; i = \overline{1, m}. \qquad (57)$$

Покажемо, що в нерівності (57) насправді виконується рівність при кожному $i = \overline{1, m}$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай для деяких значень індексу i нерівність (57) виконується строго, таких значень індексів k штук і вони згруповані в такий спосіб, що

$$v^* < \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^*, \; i = \overline{1, k},$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^*, \; i = \overline{k+1, m}.$$

Помножимо кожне з цих відношень на відповідне $x_i^* > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо протиріччя

$$v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i^* < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i^* y_j^* = v^*.$$

Отже,

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^*, \; i = \overline{1, m}. \tag{58}$$

Візьмемо тепер $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i > 0,\ i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ - довільну змішану стратегію гравця I_1. Помножимо кожну з рівностей (58) на відповідне $x_i > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо $v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j^* = xCy^*$, що і завершує доведення. ●

Зауваження. Подібне доведеному твердження виконується і для гравця I_1.

Ця теорема дозволяє в ряді випадків відшукати оптимальні змішані стратегії та знайти ціну гри.

Приклад. Нехай $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і наперед відомо, що всі стратегії гравців активні. Знайти розв'язок гри.

Розв'язування. Якщо p - це ймовірність, з якою гравець I_1 обирає перший рядок матриці C, його оптимальна змішана стратегія повинна мати вигляд $x^* = (p, 1-p)$ і при цьому $\sum_{i=1}^{2} c_{i,j} x_i^* = v^*,\ j = \overline{1, 2}$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -p + (1-p) = v^* \\ p - (1-p) = v^* \end{cases}$, знаходимо $p = 0.5,\ v^* = 0$. Тобто оптимальною для гравця I_1 є стратегія $x^* = (0.5, 0.5)$. Цілком аналогічно з співвідношень $y^* = (q, 1-q)^T$ та $\sum_{j=1}^{2} c_{i,j} y_j^* = v^*,\ i = \overline{1,2}$ знаходимо оптимальну змішану стратегію гравця I_2 : $y^* = (0.5, 0.5)^T$ і $v^* = 0$.

Для знаходження активних стратегій використовують поняття домінуючих стовпців та підпорядкованих рядків у платіжній матриці. Назвемо стовпчик k *домінуючим* над стовпчиком l, якщо виконується нерівність $c_{i,k} \geq c_{i,l}$, $i = \overline{1,m}$, при цьому стовпчик l буде *підпорядкованим* стовпчику k. Аналогічні визначення введемо і для рядків платіжної матриці. Аналізуючи співвідношення (43) та (44), можна зробити висновок: якщо існує стовпчик l, підпорядкований стовпчику k, то відповідна йому l-та чиста стратегія гравця I_2 неактивна; якщо існує рядок k, домінуючий над рядком l, то відповідна йому k-та чиста стратегія гравця I_1 неактивна.

Використання цього твердження дозволяє в ряді випадків значно зменшити розмірність платіжної матриці за рахунок вилучення неактивних стратегій обох гравців.

Особливий інтерес викликають ігри з розміром платіжної матриці $2 \times n$ та $m \times 2$. Для них розроблено *графічний метод* розв'язування. Для гри будується її графічне зображення. У випадку гри $2 \times n$ виділяється верхня (44) границя виграшів та визначається точка з найменшою ординатою, а у випадку гри $m \times 2$ – нижня (43) границя виграшів та визначається точка з найбільшою ординатою. Знайдена ордината буде дорівнювати ціні гри, а пара прямих, перетин яких визначає знайдену точку, відповідає активними стратегіями відповідного гравця. Якщо в точці перетинається більше двох прямих, вибираємо тільки дві з них. Далі розв'язуємо гру 2×2 та знаходимо оптимальні змішані стратегії гравців.

Можна рекомендувати таку послідовність розв'язування матричної гри двох гравців:

1. Досліджуємо платіжну матрицю на наявність сідлової точки: якщо вона є - виписуємо оптимальні чисті стратегії та ціну гри.
2. Виділяємо активні стратегії гравців, використовуючи поняття домінування та підпорядкованості. Стовпчики та рядки матриці, що відповідають неактивним стратегіям, викреслюємо.
3. Якщо отримана після спрощення матриця має розмірність 2×2, $2\times n$ або $m\times 2$, знаходимо розв'язок гри графічно.
4. В інших випадках зводимо гру до пари двоїстих ЗЛП і знаходимо її розв'язок.

Якщо розмір платіжної матриці після спрощення залишається великим, то застосування симплекс-методу вимагає значних обчислень. Для розв'язування матричних ігор у таких випадках розроблено наближені методи. Одним із таких методів є метод Брауна–Робінсон (див. книгу Ю.Д.Попова «Линейное и нелинейное программирование»).

Разом із початковою грою з платіжною матрицею C, розглянемо фіктивну гру, в якій гравці ходять почергово і використовують тільки чисті стратегії. Розпочинає гравець I_1 із довільної чистої стратегії i_1. Нехай проведено деяку кількість партій і після s-го ходу гравця I_1 побудовано вектор $x^s=(x_1^s,x_2^s,\ldots,x_m^s)$, де x_i^s – частота вибору i-ї чистої стратегії. Гравець I_2 буде вибирати свою чисту стратегію j_s так, щоб максимізувати свій виграш з умови $j_s\in\arg\max\limits_{j=\overline{1,n}}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{i,j}x_i^s$.

Аналогічно, після s-го ходу гравця I_2 побудовано вектор $y^s=(y_1^s,y_2^s,\ldots,y_n^s)$, де y_j^s – частота вибору j-ї чистої стратегії. Гравець I_1 буде вибирати свою чисту стратегію i_s так, щоб мінімізувати свій програш із умови $i_s\in\arg\min\limits_{i=\overline{1,m}}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}y_j^s$. Якщо гравці робитимуть ходи за описаними правилами, то

$$x^{s+1}=(\frac{s}{s+1})x^s+(\frac{1}{s+1})x^{i_s}\ \text{і}\ y^{s+1}=(\frac{s}{s+1})y^s+(\frac{1}{s+1})y^{j_s},$$

де x^{i_s} та y^{j_s} – відповідні чисті стратегії гравців.

Теорема 11. В описаній ітераційній процедурі існують границі $\lim_{s\to\infty} x^s = x^*$, $\lim_{s\to\infty} y^s = y^*$, де x^* і y^* – оптимальні стратегії, і при цьому $\lim_{s\to\infty} \min_i Cy^s = \lim_{s\to\infty} \max_j x^s C = v^*$, де v^* – ціна гри.

Цю теорему приймемо без доведення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Попов Ю.Д. Линейное и нелинейное программирование / Ю.Д. Попов. – К. : Изд-во Киев. ун-та, 1988. – 180 с.

2.Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – 7-е видання, перероблене та доповнене / Ю.П.Зайченко. – К. : Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.

3.Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко. – К. : Вища шк., 1975. – 372 с.

4.Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986 . – 319 с.

5.Степанюк В.В. Методы математического программирования / В.В. Степанюк. – К. : Вища шк., 1977. – 272 с.

6. Ашманов С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1981. – 376 с.

7. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К.: Вища школа, 1983. –512 с.

8. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник. –К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. –304 с.

9. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. –М.: Наука, 1971. –384 с.

10. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. –М.: Логос, 2000. –296 с.

11. Макаров И. М., Виноградская Т. М. Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие. –М.: Наука, 1982. –328 с.

12. Подаковский В. В., Ногин В. Д. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. –М.: Наука, 1982. –254 с.

13. Пономаренко О. І., Пономаренко В. О. Системні методи а економіці, менеджменті та бізнесі: Навчальний посібник. Київ. –Либідь, 1995. –240 с.