Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний

університет імені Юрія Федьковича

*Підлягає поверненню на кафедру*

# МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

*Методичні вказівки та завдання до практичних занять*

Чернівці

Чернівецький національний університет

2010

ББК 22.183.4
М 545
УДК 519.852

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Методи оптимізації : методичні вказівки та завдання до практичних занять / укл.: М.А Руснак, А.М. Садов'як. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 84 с.

М 545 Видання містить теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, завдання для самостійної роботи та додаткові запитання з дисципліни «Методи оптимізації». Для студентів факультетів комп'ютерних наук та прикладної математики, які здобувають освіту в галузі знань „Системні науки та кібернетика".

ББК 22.183.4
УДК 519.852

*Навчальне видання*
Методи оптимізації
Методичні вказівки та завдання до практичних занять

Укладачі: Руснак Микола Андрійович
Садов'як Антон Михайлович
Відповідальний за випуск Сопронюк Ф. О.
Літературний редактор Колодій О.В.
Технічний редактор

*Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №891 від 08.04.2002 р.*

Підписано до друку . Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. ....
Обл..-вид. арк..... Зам……..Тираж …. .
Друкарня Чернівецького національного університету
58012, Чернівці, вул.. Коцюбинського,2

## *Індивідуальне завдання 1. Елементи лінійної алгебри*

***Мета:*** повторення та перевірка знань студентів щодо основних навичок розв’язування задач лінійної алгебри – обчислення визначників, знаходження оберненої матриці, дослідження та розв’язування системи лінійних рівнянь.

***Теоретичні відомості.*** Нехай $A$ – квадратна матриця з елементами $a_{ij}$, $(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n})$. Оберненою матрицею до матриці $A$ називається така матриця $A^{-1}$, що $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де $E$ – одинична матриця розміром ($n\times n$). Матриця $A^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, коли матриця $A$ невироджена, тобто $\Delta=|A|=\det A\neq 0$.

Якщо $A^{-1}$ існує, її можна побудувати за такими правилами:

- обчислити мінори $M_{ij}$, відповідні елементам $a_{ij}$ матриці $A$;
- обчислити алгебраїчні доповнення $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ елементів $a_{ij}$ матриці $A$;
- замінити елементи $a_{ij}$ матриці $A$ числами $\frac{1}{\Delta}A_{ji}$.

Зазначимо, що запропонований метод вимагає великої кількості арифметичних операцій і тому може використовуватись при малих $n$. При великих $n$ вдаються до спеціальних методів.

<u>Приклад.</u> Нехай задано матрицю $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Ця матриця невироджена, бо $\Delta=\det A=5\neq 0$. Обчислимо мінори $M_{ij},(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$: $M_{11}=1,\ M_{12}=3,\ M_{13}=1,\ M_{21}=-3,$ $M_{22}=1,\ M_{23}=2,\ M_{31}=-2,\ M_{32}=-1, M_{33}=3$ та алгебраїчні доповнення $A_{ij}$, $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$:

$A_{11}=1, A_{12}=-3, A_{13}=1, A_{21}=3, A_{22}=1, A_{23}=-2, A_{31}=-2, A_{32}=1,$ $A_{33}=3$.



Будуємо матрицю $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

називається сумісною, якщо існує хоча б один її розв’язок. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок, і невизначеною – в протилежному випадку. Умови сумісності системи задаються у відомій теоремі Кронекера–Капеллі. Якщо ранг $r$ сумісної системи рівнянь менший від кількості невідомих $n$, то система має нескінченно багато розв’язків. При цьому $r$ невідомих (головних, базисних) лінійно виражаються через $n-r$ інших (вільних, небазисних) невідомих. Загальний розв’язок системи рівнянь є сумою будь-якого її частинного розв’язку і загального розв’язку відповідної однорідної системи. Загальний розв’язок однорідної системи є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи розв’язків однорідної системи з довільними дійсними коефіцієнтами.

Можна рекомендувати такі правила розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

a) обчислити ранги основної $A$ та розширеної $\overline{A}$ матриць системи. Якщо система сумісна, то вибираємо будь-який її базисний мінор порядку $r$;

b) в системі з $r$ рівняннями (відповідно рядкам базисного мінору) виразити базисні змінні (відповідно стовпчикам базисного мінору) через небазисні, тобто розв’язати її відносно базисних змінних;

c) надаючи небазисним змінним будь-яких конкретних числових значень (як правило, нульових), знайти частинний розв'язок вихідної системи;
d) побудувати фундаментальну систему розв'язків однорідної системи;
e) записати загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вважаючи, що небазисні змінні набувають довільних значень.

Приклад. Дослідити систему лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо вона сумісна – розв'язати її

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Обчислюємо ранги $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ – система сумісна. Мінор $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ порядку $r = 2$ можна взяти за базисний, оскільки $\Delta = 5 \neq 0$.

Відповідна система рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - x_3 + x_4, \\ x_1 + 3x_2 = 1 + x_3 - 3x_4. \end{cases}$

Розв'яжемо її відносно базисних $(x_1, x_2)$ змінних

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4, \\ x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4. \end{cases}$$

Знаходимо частинний розв'язок вихідної системи $\left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 0\right)^T$ та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи

$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Вважаючи, що небазисні змінні $x_3$ та $x_4$ набувають довільних дійсних значень $u$ та $v$ відповідно, запишемо загальний розв'язок вихідної системи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

***Література:*** [1, 2].

***Завдання.*** 1. Для заданої матриці $X$ обчислити обернену матрицю $X^{-1}$ та перевірити результат множенням.

2. Дослідити систему рівнянь $Ax = b$. Якщо вона сумісна, розв'язати її та знайти загальний розв'язок.

***Варіанти завдань***

$$X = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 \\ n+3 & n-5 & n-20 \\ n+1 & n-2 & n+3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2n & 2n-4 & 2n-5 & 1 \\ 4n+6 & n-10 & n+2 & n \\ n-20 & 3n+9 & n-1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} m-18 \\ 2m+1 \\ m-5 \end{bmatrix}$$

де $n$ – порядковий номер студента в списку групи, $m$ – остання цифра номера групи.

***Додаткові запитання***

1. Дайте означення та наведіть основні властивості оберненої матриці.
2. Дайте означення та наведіть основні властивості рангу матриці.
3. Сформулюйте теорему Кронекера–Капеллі.
4. Запишіть структуру загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

## Індивідуальне завдання 2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

***Мета:*** засвоїти та вміти застосовувати графічний метод розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП).

***Теоретичні відомості.*** Графічно на площині можна розв'язати ЗЛП із двома змінними та ЗЛП, що зводяться до задач із двома змінними. В першому випадку потрібно побудувати на площині допустиму множину (врахувавши основні та природні обмеження ЗЛП) та лінію рівня цільової функції $L(x)=const$ при деякому фіксованому значенні $const$. Рухаючи далі лінію рівня в напрямку градієнта функції $L(x)$ (в ЗЛП на максимум) чи в напрямку антиградієнта (в ЗЛП на мінімум), знаходимо її останній перетин із допустимою множиною. Координати цієї точки знаходимо як розв'язок системи відповідних рівнянь, які отримуються з обмежень ЗЛП. Значення цільової функції підраховуємо підстановкою цих координат у $L(x)$.

Другий випадок має місце, якщо основні обмеження ЗЛП задано у вигляді рівностей та ранг $r$ матриці основних обмежень ЗЛП дорівнює $n-2$ (очевидно, що $m \ge n-2$). Тоді базисних змінних в основних обмеженнях буде $n-2$, небазисних – 2. Виражаючи базисні змінні через небазисні та врахувавши природні обмеження, одержимо систему нерівностей, які задають проекцію допустимої множини на площину небазисних змінних. Підставивши вирази для базисних змінних у цільову функцію, знайдемо її екстремальне значення на проекції допустимої множини та координати розв'язку.

Приклад. Розв'язати графічно ЗЛП

$$L(x)=4x_1-6x_2+2x_3-x_4 \to extr,$$
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-6, \\ 5x_1+4x_2+x_4=20, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,4},\ extr \in \{\min,\max\}.$$

У цьому випадку $n=4,\ m=2,\ r=2$. Отже, задачу можна звести до задачі з двома змінними. За базисні змінні виберемо $x_3$ та $x_4$, небазисними будуть змінні $x_1$ та $x_2$. Визначимо $\begin{cases} x_3=-6-2x_1+3x_2, \\ x_4=20-5x_1-4x_2, \end{cases}$ та запишемо допоміжну задачу

$$\overline{L}(x)=5x_1+4x_2-32 \to extr,$$
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2 \le -6, \\ 5x_1+4x_2 \le 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Цю допоміжну задачу можна розв'язати графічно. Для допоміжної задачі на мінімум знаходимо $x_1^*=0,\ x_2^*=2,\ \overline{L}(x_1^*,x_2^*)=-24$. Відповідно, для вихідної задачі на мінімум одержуємо $x^*=(0,2,0,12),\ L(x^*)=-24$. Для допоміжної задачі на максимум $\overline{L}(x_1^*,x_2^*)=-12$, де $(x_1^*,x_2^*)$ – довільна точка з відрізка $[B,C]$, $B=(\frac{36}{23},\frac{70}{23})$, $C=(0,5)$. У параметричній формі рівняння цього відрізка має вигляд

$$\begin{cases} x_1=\frac{36}{23}\theta, \\ x_2=\frac{70}{23}\theta+5(1-\theta), \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Отже, для вихідної задачі на максимум маємо $L(x^*)=-12$. Це значення досягається у кожній точці вигляду $x^*=(\frac{36}{23}\theta, 5-\frac{45}{23}\theta, 9-\frac{207}{23}\theta, 0)^T$ при $0 \le \theta \le 1$.

***Література:*** [2, 3, 4].

***Завдання.*** Розв'язати графічно ЗЛП, записати її розв'язок та обчислити значення цільової функції.

***Варіанти завдань***

1. $$L(x)=x_1-x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 1 \le x_1+x_2 \le 2, \\ 2 \le x_1-2x_2 \le 3, \\ 1 \le 2x_1-x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. $$L(x)=4x_1-2x_2+x_3-x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3-2x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

3. $L(x)=x_1+x_2\to\min,$
$$\begin{cases}0\le x_1+x_2\le 3,\\ -1\le x_1-x_2\le 0,\\ 0\le x_1\le 1,\\ 0\le x_2\le 2.\end{cases}$$

4. $L(x)=x_1+2x_2+x_3-x_4\to\min,$
$$\begin{cases}-x_1+5x_2+x_3+x_4+x_5=10,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=6,\\ 10x_2+x_3+2x_4+3x_5=25,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0.$

5. $L(x)=2x_1-3x_2\to\min,$
$$\begin{cases}-4x_1+5x_2\le 20,\\ 2x_1+x_2\ge 6,\\ 5x_1-x_2\le 45,\\ x_1-x_2\le 6,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

6. $L(x)=-4x_1+3x_2+x_4-x_5\to\max,$
$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-1,\\ x_1-3x_2-x_4=-13,\\ 4x_1+x_2+x_5=26,\\ x_1-3x_2+x_6=0,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0, x_6\ge 0.$

7. $L(x)=x_1+3x_2\to\max,$
$$\begin{cases}-x_1-x_2\ge -3,\\ 6x_1+x_2\le 42,\\ 2x_1-3x_2\le 6,\\ x_1+x_2=4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

8. $L(x)=-3x_1+2x_2-3x_4-x_5\to\max,$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2-x_3+x_4=2,\\ 4x_1-x_2+x_4+x_5=21,\\ 4x_1-x_2-x_4+x_5=13,\\ x_1+x_2-x_6=3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0, x_6\ge 0.$

9. $L(x)=3x_1+4x_2\to\max,$
$$\begin{cases}-1\le -x_1+x_2\le 1,\\ x_1+x_2\ge -1,\\ -x_1+2x_2\le 2,\\ 2x_1-x_2\le 2,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

10. $L(x)=x_1-x_2\to\max,$
$$\begin{cases}4x_1-3x_2-x_3+x_4+x_5=6,\\ x_1+4x_2+x_3+x_5=15,\\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0.$

11. $L(x)=x_1+3x_2\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_5+x_6=10,\\ 2x_1+2x_2+x_4+x_6=25,\\ 2x_1-3x_2-x_3+x_5=-9,\\ 6x_2+x_3+x_4=36,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\dots,x_6\ge 0.$

12. $L(x)=x_1+3x_2\to\max,$
$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_5+x_6=10,\\ 2x_1+2x_2+x_4+x_6=25,\\ 2x_1-3x_2-x_3+x_5=-9,\\ 6x_2+x_3+x_4=36,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\dots,x_6\ge 0.$



13. $L(x)=2x_1+x_2\to\max,$
$$\begin{cases}x_1-2x_2\le 1,\\ 2x_1-x_2\ge 1,\\ -3x_1+x_2\le 0,\\ 2x_1-x_2\ge 0,\\ 2x_1-3x_2\le 3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

14. $L(x)=x_1+2x_2\to\max,$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 1,\\ 2x_1+x_2\le 1,\\ x_1-x_2\le 1,\\ x_1-2x_2\le 1,\\ 2x_1-x_2\le 1,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

15. $L(x)=x_1-x_2\to\min,$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 1,\\ x_1-2x_2\le 1,\\ 2x_1+3x_2\le 2,\\ x_1+x_2\ge 0.5,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

16. $L(x)=0.5x_1+0.2x_2\to\min,$
$$\begin{cases}30x_1+5x_2-x_4=4,\\ 10x_1+60x_2-x_5=13,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0.$

17. $L(x)=2x_1+x_2\to\min,$
$$\begin{cases}x_1-2x_2\le 1,\\ 2x_1-x_2\le 1,\\ -3x_1+x_2\le 0,\\ 2x_1-x_2\le 0,\\ 2x_1+3x_2\ge 3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

18. $L(x)=5x_1-10x_2\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 1,\\ -x_1+x_2\le 2,\\ 3x_1+x_2\le 8,\\ -2x_1+3x_2\ge -9,\\ 4x_1+3x_2\ge 0,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

19. $L(x)=-x_1-x_4\to\min,$
$$\begin{cases}x_1+4x_2+4x_3+x_4=5,\\ x_1+7x_2+8x_3+2x_4=9,\end{cases}$$
$x_i\ge 0, i=\overline{1,4}.$

20. $L(x)=x_1+2x_2-x_3\to\max,$
$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+3x_4=2,\\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=1,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

21. $L(x)=x_1-x_2\to\min,$
$$\begin{cases}4x_1-3x_2-x_3+x_4+x_5=6,\\ x_1+4x_2+x_3+x_5=15,\\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0.$

22. $L(x)=3x_1+4x_2\to\max,$
$$\begin{cases}-1\le -x_1+x_2\le 1,\\ x_1+x_2\ge -1,\\ -x_1+2x_2\le 2,\\ 2x_1-x_2\le 2,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

23. $L(x)=x_1+x_3-x_4\to\max,$
$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_4-2x_5=3,\\ x_2-x_3-x_4-x_5=0,\\ x_1+x_4-x_5=0,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, i=\overline{1{,}5}.$

24. $L(x)=-4x_1-5x_2\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3=5,\\ 3x_1+x_2+x_4=4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

25 $L(x)=-2x_2-x_4\to\min,$
$$\begin{cases}x_1-x_2+4x_3-2x_4=2,\\ 3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

26 $L(x)=x_1+2x_2-x_5\to\min,$
$$\begin{cases}-x_1+5x_2+x_3+x_4=10,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=6,\\ 10x_2+x_3+2x_4+3x_5=24,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\cdots,x_5\ge 0.$

27. $L(x)=5x_1-10x_2\to\max,$
$$\begin{cases}-2x_1+x_2\le 1,\\ -x_1+2x_2\ge 2,\\ 3x_1+x_2\le 8,\\ -2x_1+3x_2\ge -9,\\ 4x_1+3x_2\le 0,\end{cases}$$
$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

28. $L(x)=-4x_1+3x_2+x_4-x_5\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-1,\\ x_1-3x_2-x_4=-13,\\ 4x_1+x_2+x_5=26,\\ x_1-3x_2+x_6=0,\\ x_1+x_2-x_7=4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\dots,x_7\ge 0.$



29. $L(x)=x_1+2x_3+x_5\to\min,$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5,\\ x_2+x_3+x_4-x_5=2,\\ x_3-x_4+x_5=1,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\cdots,x_5\ge 0.$

30. $L(x)=-3x_1-3x_4\to\min,$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2-x_3+x_4=2,\\ 4x_1-x_2+x_4+x_5=21,\\ 4x_1-x_2-x_4+x_5=15,\\ x_1+x_2-x_6=4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\dots,x_6\ge 0.$

***Додаткові запитання***

1. Рівняння прямої має вигляд $ax+by+c=0$. Запишіть нормальний вектор прямої.
2. У яких випадках ЗЛП може не мати розв'язку?
3. Скільки розв'язків може мати ЗЛП?
4. Наведіть приклад допустимої множини, на якій цільова функція $L(x)=x_1-2x_2$ необмежена знизу.

## *Індивідуальне завдання 3. Симплекс-метод розв'язування ЗЛП*

***Мета:*** вміти застосовувати симплекс-метод до розв'язування ЗЛП.

***Теоретичні відомості.*** Загальна задача лінійного програмування (ЗЗЛП) полягає в знаходженні точок мінімуму (або максимуму) лінійної функції

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (3.1)$$

на деякому замкненому опуклому багатограннику $D\subset R^n$, який задається умовами

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ S\ b_i\ ,\ i=\overline{1,m} \qquad (3.2)$$

та
$$x_j\ge 0, j=\overline{1,k}\ ,\ k\le n. \qquad (3.3)$$

Функція $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ називається цільовою функцією задачі. Знак $S$ означає одне із відношень "$\le$", "$\ge$" або "$=$". Серед умов виділяють окремо умови типу (3.3), які називаються природними і відіграють важливу роль при розв'язуванні ЗЛП.

Вважатимемо надалі, що в ЗЗЛП мова йде про мінімізацію цільової функції. Будь-який вектор $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$ називається допустимим вектором задачі (3.1 – 3.3) (іноді – допустимим розв'язком або допустимим планом). Розв'язком задачі (3.1 – 3.3) називається такий вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in D$, що

$$L(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) = \min_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D} L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = L_{\min}^* . \qquad (3.4)$$

Іноді вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ називають оптимальним розв'язком або оптимальним планом задачі (3.1-3.3). Відомо, що розв'язку задачі (3.1-3.3) може не існувати, задача може мати єдиний або безліч розв'язків. Розв'язати задачу (3.1-3.3) означає – знайти хоча б один її розв'язок $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ і обчислити значення цільової функції $L_{\min}^*$ або довести, що розв'язку задачі не існує. Причому в останньому випадку треба розрізняти дві можливості: а) $D = \emptyset$; б) $L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ необмежена знизу на $D$.

Відомо, що від ЗЗЛП можна завжди перейти до відповідної стандартної задачі лінійного програмування (СЗЛП)

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min , \qquad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = \overline{1, m} , \qquad (3.6)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} , \qquad (3.7)$$

яку часто записують у матрично-векторній формі

$$L(x) = c^T x \to \min, \qquad (3.8)$$

$$Ax = b, \qquad (3.9)$$

$$x \geq 0, \qquad (3.10)$$

де $x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$

Надалі вважатимемо, що система лінійних рівнянь (3.6) (і відповідно (3.9)) сумісна і має місце співвідношення

$$rank(A) = rank(\overline{A}) \leq m < n . \qquad (R)$$



Допустимий вектор $x \in D$ називається *опорним* або *базисним вектором* (розв'язком) задачі (3.8-3.10), якщо відповідні його ненульовим компонентам стовпці матриці $A$ є лінійно незалежними. Базисний вектор називається невиродженим, якщо кількість його ненульових компонент дорівнює $m$, або виродженим, якщо вона менша ніж $m$. Базисом такого вектора називається впорядкований набір вектор-стовпців матриці $A$, що відповідають його ненульовим компонентам. При виконанні умови (R) із векторів, що утворюють базис, можна скласти базисну матрицю $B$ розмірністю $(m \times m)$. Вважатимемо, що матриця $B$ складена з перших $m$ стовпчиків матриці $A$. Змінні $x_1, x_2, \cdots, x_m$ називатимемо базисними, а змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ – небазисними. Помножимо обмеження (3.9) на матрицю $B^{-1}$ зліва і одержимо еквівалентні обмеження

$$\left[ E \mid \alpha \right] \ x = \beta \ , \qquad (3.11)$$

де $E$ – одинична матриця розміром $(m \times m)$, $\alpha$ – матриця розміром $(m \times (n-m))$, $\beta = B^{-1} b$ – вектор розміром $m$. Якщо при цьому елементи вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)^T$ невід'ємні, тобто $\beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, то задачу (3.8-3.10) називають *канонічною задачею лінійного програмування* (КЗЛП). Отже, якщо відомо деякий базисний вектор задачі (3.8-3.10), то можна перейти від СЗЛП до КЗЛП у формі (3.8), (3.11), (3.10). Якщо ж ні, то процес знаходження базисної матриці зводиться до перебору можливих комбінацій вектор-стовпців матриці $A$. Кількість цих комбінацій не перевищує $C_n^m$. Якщо після перебору всіх варіантів потрібної матриці не знайдено, то канонічної форми СЗЛП не існує, тобто ЗЗЛП має порожню допустиму множину.

Для розв'язування КЗЛП найбільш часто використовують *симплекс-метод*, який полягає в цілеспрямованому переборі базисних векторів або, що те ж саме, вершин допустимої множини. Перехід намагаються здійснити так, щоб при цьому значення цільової функції зменшилось. Як ознаку зупинки алгоритму використовують *критерій оптимальності базисного вектора* – невід'ємність відносних оцінок $\Delta_j$ небазисних змінних. Особливий випадок виникає тоді, коли деяка $\Delta_j < 0$, а у відповідному стовпчику $\alpha_j$ матриці $\alpha$ немає додатних елементів – тоді цільова функція необмежена знизу на допустимій множині $D$. Хід розв'язування записують у симплекс-таблиці такої структури:

| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $\dots$ | $x_n$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | $\dots$ | 0 | $\alpha_{1m+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{1n}$ | $\beta_1$ | $\theta_1$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\dots$ | 0 | $\alpha_{2m+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{2n}$ | $\beta_2$ | $\theta_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | | $\dots$ | $\dots$ | | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_m$ | 0 | 0 | $\dots$ | 1 | $\alpha_{mm+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{mn}$ | $\beta_m$ | $\theta_m$ |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | $\dots$ | 0 | $\Delta_{m+1}$ | $\dots$ | $\Delta_n$ | | |

Як правило, до базису вводять таку змінну $x_k$, що $\Delta_k = \min\limits_{\Delta_j<0} \Delta_j$.

Із базису виводять змінну $x_l$, таку, що $\theta_k = \min\limits_{\alpha_{ik}>0} \theta_i = \min\limits_{\alpha_{ik}>0} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$.

Число $\alpha_{lk}$ називають провідним елементом таблиці. Рядок із номером $l$ таблиці ділять на $\alpha_{lk}$, решту її елементів перерозраховують за відомим правилом прямокутників. При переході до нового базисного вектора значення цільової функції зменшується на величину $\theta_k|\Delta_k|$. Скінченність множини базисних векторів забезпечує скінченність методу: за певну кількість кроків або знайдемо розв'язок КЗЛП, або встановимо необмеженість знизу цільової функції на множині $D$.

Зауважимо, що при вказаному способі вибору $\theta_l$, наприклад при $\beta_l = 0$, може виникнути явище, відоме як "зациклювання" симплекс-методу.

Приклад 1. Мінімізувати лінійну функцію

$$L(x) = 7x_1 + x_2 \tag{3.12}$$

на багатокутнику $D$, який визначається умовами

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 6x_2 \ge 8, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 27, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$x_2 \ge 0. \tag{3.14}$$

Розв'язування. Це ЗЗЛП. На $x_1$ не накладено умови невід'ємності, тому в (3.12) і (3.13) зробимо заміну $x_1 = x_3 - x_4$, де $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$. Введемо в розгляд невід'ємні змінні $x_5, x_6, x_7$ так, щоб у (3.13) всі нерівності перетворилися в рівності. Одержимо СЗЛП

$$x_2 + 7x_3 - 7x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 10, \\ 6x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 + x_7 = 27, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{2,7}.$$

Оскільки $rank(A) = rank(\overline{A}) = 3$, то базисних змінних повинно бути також 3. Змінні $x_3, x_4, x_5$ не можна вибрати за базисні, бо матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ вироджена. Змінні $x_3, x_6, x_7$ також не можна вибрати за базисні, незважаючи на те, що матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ невироджена, оскільки вектор $\beta = B^{-1}b = (5, -13, 2)^T$ містить від'ємну компоненту. Якщо ж за базисні взяти змінні $x_2, x_5, x_6$, то легко переконатися, що $\det(B) = 3$, $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 46 \end{pmatrix}$. Перейдемо від СЗЛП до КЗЛП та виразимо в цільовій функції базисні змінні через небазисні

$$9+\frac{16}{3}x_3-\frac{16}{3}x_4-\frac{1}{3}x_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2+\frac{5}{3}x_3-\frac{5}{3}x_4+\frac{1}{3}x_7=9, \\ \frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4+x_5=1, \\ 11x_3-11x_4+x_6=46, \end{cases} \qquad (3.15)$$

$x_j \geq 0,\ j=\overline{2,7}.$

Знайдемо відносні оцінки небазисних змінних $\Delta_3=\frac{16}{3}, \Delta_4=-\frac{16}{3}, \Delta_7=-\frac{1}{3}$, зауваживши, що від'ємній відносній оцінці $\Delta_4$ відповідає стовпчик із від'ємними елементами в матриці $\alpha$. За алгоритмом симплекс-методу це означає, що цільова функція ЗЗЛП на заданому багатокутникові необмежена знизу.

Приклад 2. Максимізувати лінійну функцію $L(x_1,x_2)=7x_1+x_2$ на багатокутникові $D$, заданому обмеженнями

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leq 10, \\ -x_1+6x_2\geq 8, \\ 5x_1+3x_2\leq 27, \end{cases}$$

$$x_2\geq 0.$$

Розв'язування. Перейдемо від задачі максимізації до задачі мінімізації функції $-7x_1-x_2$ і запишемо КЗЛП (3.15) із цільовою функцією

$$-9-\frac{16}{3}x_3+\frac{16}{3}x_4+\frac{1}{3}x_7 \to \min .$$

Серед відносних оцінок є від'ємна $(\Delta_3)$ , тому змінну $x_3$ потрібно ввести до базису.

Будуємо симплекс-таблицю



| $x_{баз}$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | $\frac{5}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 9 | $\frac{27}{5}$ |
| $x_5$ | 0 | $\boxed{\frac{1}{3}}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $x_6$ | 0 | 11 | -11 | 0 | 1 | 0 | 46 | $\frac{46}{11}$ |
| $\Delta_j$ | 0 | $-\frac{16}{3}$ | $\frac{16}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | | |

Оскільки $\min\limits_i \theta_i=3$, то вивести з базису потрібно змінну $x_5$ ($l=2$).

| $x_{баз}$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{5}{9}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 4 | |
| $x_3$ | 0 | 1 | -1 | 3 | 0 | 0 | 3 | |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{11}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{127}{3}$ | |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{16}{9}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | | |

Усі відносні оцінки невід'ємні. Отже, розв'язком КЗЛП є вектор $(x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x_6^*,x_7^*)^T=(4,3,0,0,\frac{127}{3},0)^T$. Враховуючи заміну, будуємо розв'язок ЗЗЛП: $x_1^*=x_3^*-x_4^*=3,\ x_2^*=4$ при цьому $L(x_1^*,x_2^*)=25$.

***Література:*** [1, 2].

***Завдання.*** Розв'язати симплекс-методом ЗЗЛП.

***Варіанти завдань***

1. $L(x)=x_1+2x_2-x_3 \to \max,$
$$\begin{cases} -x_1+4x_2-2x_3\leq 6, \\ x_1+x_2+2x_3\geq 6, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \end{cases}$$
$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0.$

2. $L(x)=3x_1+2x_5-5x_6 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_5+5x_6=34, \\ 4x_1+x_3+2x_5-4x_6=28, \\ -3x_1+x_4-3x_5+6x_6=24, \end{cases}$$
$x_1\geq 0,\cdots,x_6\geq 0.$

3. $L(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \dots, x_6 \ge 0.$

4. $L(x) = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \dots, x_6 \ge 0.$

5. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \dots, x_6 \ge 0.$

6. $L(x) = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \cdots, x_6 \ge 0.$

7. $L(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0.$

8. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 + 6x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

9. $L(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

10. $L(x) = -3x_1 + 3x_3 - x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

11. $L(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$
$$\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 4, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

12. $L(x) = -3x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 = 3, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0.$

14. $L(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \ge 7, \\ 7x_1 - 5x_2 \ge 35, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$



15. $L(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$

16. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$

17. $L(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$

18. $L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

19. $L(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

20. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \dots, x_6 \ge 0.$

21. $L(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

22. $L(x) = 3x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

23. $L(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ -6x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

24. $L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 = 6, \end{cases}$$
$x_2 \ge 0.$

25. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0.$

26. $L(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

$$L(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min, \qquad L(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \min,$$

27. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 80, \\ 3x_2 + 3x_3 - 1.5x_4 \ge 36, \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 27, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$ $\qquad x_2 \ge 0.$

$$L(x) = 2x_1 - 4x_2 \to \min, \qquad L(x) = x_1 - x_2 \to \max,$$

29. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$

$x_1 \ge 0.$ $\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$

***Додаткові запитання***

1. Дайте означення базисного вектора (плану) СЗЛП.
2. Як потрібно вибирати провідний елемент у симплекс-методі?
3. Сформулюйте критерій закінчення обчислень у симплекс-методі.
4. Охарактеризуйте проблему "зациклення" симплекс-методу.

## *Індивідуальне завдання 4. Метод штучної бази та М-метод розв'язування ЗЛП*

***Мета:*** засвоїти методи розв'язування ЗЛП у стандартній формі.

***Теоретичні відомості.*** Перехід від СЗЛП до КЗЛП ускладнюється пошуком першого базисного вектора. Для подолання цих труднощів використовуються спеціальні методи.

*1. Метод штучної бази.* Розглянемо СЗЛП

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$
$$Ax = b, \tag{4.1}$$
$$x \ge 0, b \ge 0.$$

Нехай у матриці $A$ є лише $0 \le k < m$ стовпців одиничної матриці. Припустимо, що вони відповідають змінним $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Уведемо в розгляд штучні змінні $y_1, y_2, \cdots, y_{m-k}$, такі, що $y_j \ge 0, j = \overline{1, m-k}$. Матрицю $A$ доповнимо $m-k$



одиничними стовпцями так, щоб результуюча матриця містила повний набір стовпців одиничної матриці порядку $m$. Позначимо нову матрицю $\overline{A}$. Розглянемо допоміжну задачу

$$\sum_{j=1}^{m-k} y_j \to \min,$$
$$\overline{A}\,\overline{x} = b,$$
$$\overline{x} \ge 0, b \ge 0.$$

Тут $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k})^T \in R^{n+m-k}$. За побудовою це КЗЛП із базисними змінними $(x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k})$ і її можна розв'язати симплекс-методом. Нехай $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$ – знайдений розв'язок. Якщо серед штучних змінних є додатні, то допустима множина початкової задачі порожня. Якщо ж усі штучні змінні нульові, то вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ є базисним для початкової задачі. Далі обчислення проводять за загальною схемою симплекс-методу.

<u>Приклад</u>. Знайти базисний розв'язок СЗЛП

$$4x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

<u>Розв'язування.</u> Одиничний вектор $(0,0,1)^T$ відповідає лише одній змінній $x_4$. Уводимо штучні змінні $y_1 \ge 0$ та $y_2 \ge 0$ і будуємо нову задачу

$$y_1 + y_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}, \; y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0.$$

Застосувавши симплекс-метод, одержимо розв'язок цієї задачі $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, y_1^*, y_2^*)^T = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1, 0, 0)^T$. Отже, за початковий базисний вектор вихідної задачі можна взяти $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1)^T$ і при цьому базисними будуть змінні $x_1, x_2, x_4$.

*2. М-метод.* Розглянемо СЗЛП $(4.1)$ та побудуємо допоміжну $M$ - задачу в канонічній формі

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{j=1}^{m-k} y_j \to \min,$$
$$\overline{A}\ \overline{x} = b,$$
$$\overline{x} \ge 0, b \ge 0.$$

Постійній $M$ не надають конкретного значення, але вважають її більшою за всі числа, з якими вона порівнюється під час обчислень. Розв'язавши $M$-задачу, одержимо вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$. Якщо серед штучних змінних є додатні, то початкова задача не має розв'язку. Якщо ж всі штучні змінні нульові, то вектор $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ є розв'язком початкової задачі.

<u>Приклад.</u> Розв'язати задачу

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

<u>Розв'язування.</u> Побудуємо $M$ - задачу

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + M(y_1 + y_2) \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4},\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Базисними тут є змінні $y_1$ та $y_2$. Виразимо базисні змінні через небазисні і підставимо значення в цільову функцію.



Групуючи доданки, отримаємо

$$(-3M - 3)x_1 + 2x_2 + (-2M - 1)x_3 - 4x_4 + 3M \to \min.$$

Застосуємо до $M$ - задачі симплекс-метод.

| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y_1$ | $y_2$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| $y_2$ | $\boxed{2}$ | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| $\Delta_j$ | $-3M-3$ | 2 | $-2M-1$ | -4 | 0 | 0 | | |

На цій ітерації змінна $y_1$ виводиться з базису, змінна $x_1$ вводиться в базис. Після кількох ітерацій, одержимо останню симплекс-таблицю

| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y_1$ | $y_2$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 0 | | | 1 | | | 1 | |
| $x_1$ | 1 | | | 0 | | | 1 | |
| $\Delta_j$ | 0 | 6 | $\frac{14}{6}$ | 0 | $M+\frac{11}{3}$ | $M-\frac{1}{3}$ | | |

Всі відносні оцінки невід'ємні, отже, вектор $(1,0,0,1,0,0)^T$ є розв'язком $M$ - задачі, а вектор $(1,0,0,1)^T$ відповідно є розв'язком початкової задачі.

***Література:*** [1, 2, 3, 4].

***Завдання.*** 1. Розв'язати методом штучної бази ЗЛП.
2. Розв'язати М-методом ЗЛП.

***Варіанти завдань***

1. $L(x) = c^T x \to \min,\quad Ax = b,\quad x \ge 0.$

2. . $L(x) = c^T x \to \max,\quad Ax \ge b,\quad x \ge 0.$

де $c^T = (n, n+5, n-10, n+15), \quad b^T = (m, m-8, m-15),$

$$A = \begin{bmatrix} n+1 & n-30 & n+4 & n-18 \\ 2n-15 & \grave{}n+2 & n-30 & n+4 \\ n+1 & 3n-8 & n-20 & n-30 \end{bmatrix}$$

## *Індивідуальне завдання 5. Двоїстий симплекс-метод, теореми двоїстості*

***Мета:*** засвоїти алгоритм двоїстого симплекс-методу, навчитися застосовувати теореми двоїстості для знаходження розв'язків пари двоїстих задач.

***Теоретичні відомості.*** Кожній задачі ЛП можна поставити у відповідність іншу ЗЛП. При виконанні певних умов ці задачі утворюють пару двоїстих (спряжених) задач. Одна із задач такої пари називається прямою, інша – двоїстою (спряженою) задачею. Сукупність правил, за якою будується пара двоїстих (спряжених) задач, відома і забезпечує зворотність цього процесу: двоїстою до двоїстої задачі знову є пряма задача. Між розв'язками пари двоїстих задач існує тісний взаємозв'язок. Знаючи розв'язок однієї задачі, можна, користуючись відомими теоремами двоїстості, побудувати розв'язок іншої, не розв'язуючи її.

*Несиметричною парою двоїстих задач* ЛП називають такі задачі:

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \qquad W(u)=\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{m1}u_m\le c_1,\\ a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{m2}u_m\le c_2,\\ \ldots\\ a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{mn}u_m\le c_n. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,m}.$$

*Симетричною парою двоїстих задач* ЛП називають такі задачі:

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \qquad W(u)=\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\ge b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\ge b_2,\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\ge b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{m1}u_m\le c_1,\\ a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{m2}u_m\le c_2,\\ \ldots\\ a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{mn}u_m\le c_n, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,m}. \qquad u_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$



Перша з теорем двоїстості стверджує, що якщо одна із задач двоїстої пари має розв'язок, то і друга задача теж має розв'язок, причому значення цільових функцій на цих розв'язках збігаються. Більше того, якщо на деяких допустимих векторах значення цільових функцій збігаються, то ці вектори є розв'язками відповідних ЗЛП. Друга теорема двоїстості дозволяє знайти розв'язок однієї задачі за відомим розв'язком іншої.

У випадку *несиметричної пари* вектор $x^* \in D$ є розв'язком прямої ЗЛП тоді і тільки тоді, коли існує допустимий вектор двоїстої задачі $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)^T$ , такий, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* = c_j \text{, якщо } x_j^*>0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \le c_j \text{, якщо } x_j^*=0.$$

При цьому вектор $u^*$ є розв'язком двоїстої задачі.

У випадку *симетричної пари* допустимі вектори $x^*$ та $u^*$ будуть розв'язками пари двоїстих задач тоді і тільки тоді, коли справджуються співвідношення

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - c_j\Big)x_j^* = 0,\ j=\overline{1,n},$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\Big)u_i^* = 0,\ i=\overline{1,m}.$$

<u>Приклад.</u> Розв'язком задачі

$$-3x_1+2x_2-x_3-4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$$

є вектор $x^*=(1,0,0,1)^T$. Необхідно побудувати двоїсту задачу та знайти її розв'язок.

<u>Розв'язування.</u> Побудуємо двоїсту до заданої задачі

$$W(u) = 2u_1 + u_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 \le -3, \\ u_1 - u_2 \le 2, \\ u_1 + u_2 \le -1, \\ u_1 - u_2 \le -4. \end{cases}$$

Маємо несиметричну пару двоїстих задач. За другою теоремою двоїстості, її розв'язок повинен задовольняти умови $\begin{cases} u_1 + 2u_2 = -3, \\ u_1 - u_2 = -4. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо $u^* = (-\frac{11}{3}, \frac{1}{3})^T$. Безпосередньо підраховуємо $L(x^*) = W(u^*) = -7$.

На базі теорії двоїстості розроблено метод розв'язування ЗЛП – *двоїстий симплекс-метод* (ДСМ). ДСМ застосовується до ЗЛП, які зводяться до "майже канонічної " задачі лінійного програмування. Суттєвою є вимога невід'ємності відносних оцінок небазисних змінних $\Delta_{m+1} \ge 0, \cdots, \Delta_n \ge 0$. Відмітимо також, що в "майже канонічній " задачі відсутня вимога $\beta_i \ge 0, i = \overline{1,m}$ і тому вектор $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m, 0, \cdots, 0)^T$ не обов'язково допустимий.

Приклад. Розв'язати двоїстим симплекс-методом задачу

$$4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язування.

Відповідна " майже канонічна" задача має вигляд

$$4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -8, \\ x_2 + 3x_3 - 6x_4 + x_6 = -4, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + x_7 = 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Заповнимо симплекс-таблицю



| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | -3 | -2 | 1 | $\boxed{-5}$ | 1 | 0 | 0 | -8 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 3 | -6 | 0 | 1 | 0 | -4 |
| $x_7$ | -2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\Delta_j$ | 4 | 3 | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
| $\frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | ---- | 1 | ---- | ---- | ---- | |

Перерозрахуємо таблицю:

| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 1 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{5}$ |
| $x_6$ | $\frac{18}{5}$ | $\frac{17}{5}$ | $\frac{9}{5}$ | 0 | $-\frac{6}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{28}{5}$ |
| $x_7$ | $\boxed{-\frac{13}{5}}$ | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{8}{5}$ |
| $\Delta_j$ | 1 | 1 | 11 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| $\frac{\Delta_j}{-\alpha_{lj}}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{55}{4}$ | ---- | ---- | ---- | ---- | |

Провідний елемент $\alpha_{71} = -\frac{13}{5}$. Будуємо таблицю:

| $x_{баз}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 0 | | | 1 | | 0 | | $\frac{16}{13}$ |
| $x_6$ | 0 | | | 0 | | 1 | | $\frac{45}{13}$ |
| $x_1$ | 1 | | | 0 | | 0 | | $\frac{8}{13}$ |
| $\Delta_j$ | 0 | $\frac{11}{13}$ | $\frac{139}{13}$ | 0 | $\frac{14}{13}$ | 0 | $\frac{5}{13}$ | |

Усі $\beta_i \ge 0$. Розв'язок задачі: $x^* = (\frac{8}{13},0,0,\frac{16}{13})^T$, при цьому $L(x^*) = \frac{112}{13}$.

Зауважимо, що ознакою необмеженості цільової функції є відсутність від'ємних $\alpha_{ij}$ при $\beta_i < 0$.

Двоїстою до розв'язуваної задачі є задача

$$8u_1 + 4u_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_3 \le 4, \\ 2u_1 - u_2 \le 3, \\ -u_1 - 3u_2 + u_3 \le 10, \\ 5u_1 + 6u_2 - u_3 \le 5, \end{cases}$$

$$u_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

За теоремою двоїстості,

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_3 = 4, \\ 5u_1 + 6u_2 - u_3 = 5. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь можна записати, наприклад, у вигляді

$$u_1 = \frac{14}{13} - \frac{12}{13}u,$$

$$u_2 = u,$$

$$u_3 = \frac{5}{13} + \frac{18}{13}u,$$

де $u$ – довільне дійсне число. Легко переконатись, що при $u < 0$ або при $u > \frac{7}{6}$ одержуємо недопустимимі для двоїстої задачі вектори. Більше того, хоча при $0 \le u \le \frac{7}{6}$ отримуємо допустимі вектори, не кожен із них буде розв'язком двоїстої задачі. Наприклад, при $u = 1$ маємо $W(\frac{2}{13},1,\frac{23}{13}) = \frac{108}{13} \ne \frac{112}{13}$. У таких випадках рекомендується дописати до одержаних за другою теоремою двоїстості рівнянь умову $W(u) = L(x^*)$.

Наприклад, у даному випадку



$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 4, \\ 5u_1 + 6u_2 - u_3 = 5, \\ 8u_1 + 4u_2 = \frac{112}{13}. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок $u = (\frac{14}{13},0,\frac{5}{13})^T$, допустимий для двоїстої задачі, а оскільки $W(u) = L(x^*)$, то вектор $u$ є її розв'язком. Зауважимо, що компоненти цього вектора знаходяться в рядку відносних оцінок останньої симплекс-таблиці ДСМ у стовпчиках, які відповідають початковому базисові.

***Література:*** [2, 4].

***Завдання.*** 1. Розв'язати одну із задач двоїстої пари і за цим розв'язком, використовуючи теореми двоїстості, знайти розв'язок другої задачі.

2. Звести задану ЗЛП до "майже канонічного" вигляду і розв'язати її за допомогою двоїстого симплекс-методу. Записати двоїсту задачу до розв'язуваної та її розв'язок.

***Варіанти завдань***

1. $L(x) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

2. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 - 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \ge 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

3. $L(x) = 6x_1 + 223x_2 - 42x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - 13x_2 + 3x_3 \le -1, \\ 2x_1 + 17x_2 - 7x_3 \ge 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

4. $L(x) = 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

5. $L(x) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge -2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

6. $L(x) = 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 12, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 14, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

7. $L(x)=12x_1+8x_2\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2\ge 4,\\2x_1+3x_2\ge 8,\\x_1+6x_2\ge 6,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

8. $L(x)=4x_1+3x_2+10x_3+5x_4\to\min,$ $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3+5x_4\ge 8,\\-x_2-3x_3+6x_4\ge 4,\\x_3-x_4\ge 0,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

9. $L(x)=2x_1+x_3+2x_4\to\max,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+2x_4\le 4,\\x_1-2x_2+5x_3-3x_4\ge 1,\\4x_1+10x_2+3x_3+x_4\le 8,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

10. $L(x)=2x_1-x_2-3x_3\to\max,$ $\begin{cases}x_2+x_3\ge 9,\\x_1-x_2\le 4,\\2x_1+x_2-2x_3\ge 10,\\x_1-2x_3\le 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

11. $L(x)=-x_1+x_2\to\max,$ $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 10,\\x_1+x_2\ge 3,\\-2x_1+x_2\le 3,\\3x_1-2x_2\le 5,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

12. $L(x)=x_1+3x_2+x_3\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\ge 2,\\x_1+x_2\ge 3,\\3x_1+x_3\ge 1,\\x_2+2x_3\ge 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

13. $L(x)=4x_1+6x_2+3x_3\to\min,$ $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\ge 9,\\x_1+2x_2+2x_3\ge 8,\\x_1+6x_2\ge 12,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

14. $L(x)=2x_1+3x_2+5/2x_3\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3\ge 6,\\2x_1+4x_2+3x_3\ge 16,\\3x_1+4x_2+2x_3\ge 12,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

15. $L(x)=2x_1+3x_3+4x_4\to\max,$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4\le 2,\\2x_1-x_2+2x_3-3x_4\ge 3,\\3x_1+4x_2-5x_3+2x_4\le 4,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

16. $L(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min,$ $\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+x_4\ge 6,\\-x_1+x_3\le 2,\\2x_2-3x_3+2x_4\le 8,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$



17. $L(x)=-2x_1+5x_2\to\max,$ $\begin{cases}7x_1+2x_2\ge 14,\\5x_1+6x_2\le 30,\\3x_1+8x_2\ge 24,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

18. $L(x)=-2x_1+5x_2\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_4\le 4,\\x_1-2x_2+5x_3-3x_4\ge 1,\\4x_1+3x_3+x_4\le 8,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

19. $L(x)=9x_1+8x_2+4x_3\to\min,$ $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3\ge 1,\\3x_1+x_2-x_3\ge 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

20. $L(x)=18x_1+7x_2+30x_3\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3\ge 3,\\3x_1+x_2+2x_3\ge 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

21. $L(x)=5x_1+4x_2+8x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3\ge 2,\\-5x_1+x_2+x_3\ge 3,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

22. $L(x)=5x_1+3x_2+5x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3\ge 1,\\x_1-3x_2-5x_3\ge -3,\\2x_1+x_2+6x_3\ge -2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

23. $L(x)=18x_1+9x_2+10x_3\to\min,$ $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3\ge 4,\\3x_1+3x_2-x_3\le 5,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

24. $L(x)=6x_1+9x_2+15x_3\to\min,$ $\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\ge 4,\\2x_1+x_2-x_3\ge 2,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

25. $L(x)=x_2+3x_3-2x_4\to\max,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3\le -4,\\2x_2+5x_3-3x_4\ge 1,\\4x_1+10x_2\le 8,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

26. $L(x)=2x_1-3x_3+2x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+2x_4\le -4,\\x_1-2x_2-3x_4\ge 1,\\4x_1+x_4\le -8,\end{cases}$ $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.$

$L(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le -3, \\ x_1 + 5x_3 - 3x_4 \ge 4, \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \le -6, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

$L(x) = x_3 + 2x_4 \to \max,$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 \le 4, \\ x_1 - 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 10x_2 + 3x_3 + x_4 \le 8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

$L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 \le -14, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 \ge 9, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \le -8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

$L(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \ge 1, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 \le -8, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

***Додаткові запитання***

1. У чому суть двоїстого симплекс-методу?
2. У яких випадках двоїста задача не має розв'язку?
3. У яких випадках зручно користуватися двоїстим симплекс-методом?

## *Індивідуальне завдання 6. Транспортні задачі без обмежень на пропускні здатності (ТЗБО)*

***Мета:*** навчитися будувати початковий план перевезень та розв'язувати транспортні задачі без обмежень.

***Теоретичні відомості.*** ТЗБО можна записати у вигляді СЗЛП:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{6.1}$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}. \tag{6.3}$$

Будемо вважати, що $a_i > 0$, , $b_j > 0$, $c_{ij} \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, а одиниці виміру в задачі (6.1-6.3) узгоджені. Припустимо також,



що задача (6.1-6.3) збалансована, тобто виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d, \tag{6.4}$$

де $d$ – деяке число. Якщо умова (6.4) не виконується, задача (6.1) – (6.3) називається незбалансованою.

Розв'язати задачу (6.1) – (6.3) означає знайти такий план перевезень $x^* = \{x_{ij}^*\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$ який задовольняє умови (6.2-6.3) і має мінімальну вартість $L(x^*)$.

Зауважимо, що умови (6.2), (6.3) визначають у просторі $R^{nm}$ обмежений замкнений багатокутник. Користуючись співвідношенням (6.4), можна побудувати одну із точок цього багатокутника: дійсно, вектор $x = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1m}, x_{21}, \cdots, x_{nm}) \in R^{nm}$ з компонентами $x_{ij} = \frac{1}{d} a_i b_j$ допустимий. Отже, задача (6.1-6.3) завжди має розв'язок.

Відомо, що ранг матриці $A$, яка задає обмеження (6.2), дорівнює $n+m-1$. Отже, базисний план СЗЛП (6.1-6.3) має не більше $n+m-1$ додатних компонент. Побудувати початковий базисний план можна методом північно-західного кута або методом мінімального елемента. Вважатимемо надалі, що всі базисні плани СЗЛП (6.1) – (6.3) невироджені.

На основі теорії двоїстості ЗЛП розроблено метод розв'язування ТЗБО – метод потенціалів. Поставимо у відповідність першій групі обмежень (6.2) двоїсті змінні $-u_i, i = \overline{1,m}$, а другій групі обмежень (6.2) – двоїсті змінні $v_j, j = \overline{1,n}$. Змінні $u_i$ називають потенціалами пунктів постачання, а змінні $v_j$ – потенціалами пунктів споживання. За другою теоремою двоїстості, допустимий вектор $x = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1m}, x_{21}, \cdots, x_{nm}) \in R^{nm}$ буде розв'язком СЗЛП (6.1-6.3) тоді й тільки тоді, коли існують такі потенціали $u_i$ та $v_j$, що

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0,$$
$$v_j - u_i \le c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = 0. \qquad (6.5)$$

У позначеннях $\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$ умови (6.5) можна записати так:

$$\Delta_{ij} = 0, \text{ якщо } x_{ij} > 0,$$
$$\Delta_{ij} \ge 0, \text{ якщо } x_{ij} = 0. \qquad (6.6)$$

Якщо відомо деякий базисний план СЗЛП (6.1-6.3), то для знаходження $m+n$ потенціалів маємо $n+m-1$ рівняння вигляду $v_j - u_i = c_{ij}$ для тих $i$ та $j$, для яких $x_{ij} > 0$. Як правило, припускають, що $u_1 = 0$, а інші потенціали знаходять з відповідних рівнянь. Базисний план буде розв'язком СЗЛП (6.1-6.3), якщо виконуються умови (6.6), інакше – план перевезень можна поліпшити. Перехід до нового базисного плану здійснюють за правилами:

- визначають пару індексів $(i_0, j_0)$, таку, що $x_{i_0 j_0} = 0$, але $\Delta_{i_0 j_0} < 0$. Якщо таких пар кілька, вибрати одну з найменшим $\Delta_{i_0 j_0}$. Змінну $x_{i_0 j_0}$ вводять у базис;
- будують замкнений цикл $(i_0, j_0)$-$(i_1, j_0)$-$(i_1, j_1)$-$(i_2, j_1)$-…-$(i_k, j_k)$-$(i_0, j_k)$-$(i_0, j_0)$ з вершинами в клітках, які відповідають базисним змінним;
- позначають $I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\}$ і $I_- = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$ та знаходять $\theta = \min\limits_{(i,j)\in I_-} x_{ij}$. Відповідна $\theta$ змінна виводиться з базису.
- компоненти нового базисного плану $x'$ знаходять зі співвідношень

$$x'_{ij} = x_{ij}, \text{якщо} (i,j) \notin I_+ \cup I_-,$$
$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta, \text{якщо} (i,j) \in I_+,$$
$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta, \text{якщо} (i,j) \in I_-.$$

Очевидно, що при цьому $L(x') = L(x) + \theta\Delta_{i_0 j_0}$.

Умови задачі та хід її розв'язування зручно записувати в таблицях такої структури:



| | $B_1$ | … | $B_n$ | Запаси |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | $a_1$ |
| $A_2$ | | | | $a_2$ |
| … | | $c_{ij}$ <br> $x_{ij}$ | | … |
| $A_m$ | | | | $a_m$ |
| Потреби | $b_1$ | … | $b_n$ | $d$ |

У правому верхньому куті внутрішньої клітинки запишемо вартість доставки $c_{ij}$ одиниці товару з пункту $A_i$ в пункт $B_j$, в лівому нижньому куті – кількість одиниць товару $x_{ij}$, що перевозиться. Як правило, значення $x_{ij} = 0$ не заносять до таблиці.

<u>Приклад.</u> Чотири пункти постачання $A_1, A_2, A_3, A_4$ мають запаси в 12, 32, 16, 20 умовних одиниць одного товару відповідно. Три пункти споживання $B_1, B_2, B_3$ мають потреби відповідно в 24, 38, 18 одиниць цього товару. Вартість доставки одиниці товару з пункту постачання $A_i$ в пункт споживання $B_j$ задається значеннями $c_{ij}, i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3$ у вигляді матриці $C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Потрібно так спланувати перевезення товару, щоб максимально задовольнити потреби пунктів споживання та мінімізувати витрати на його доставку.

<u>Розв'язування.</u> Співвідношення (6.4) виконується, отже, задача збалансована. Заповнимо початкову таблицю та побудуємо початковий базисний план методом північно-західного кута.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | Запаси |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 <br> 12 | 3 | 4 | 12 |
| $A_2$ | 7 <br> 12 | 8 <br> 20 | 8 | 32 |
| $A_3$ | 2 | 4 | 6 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 16 | | |
| $A_4$ | 6 | 10<br>2 | 7<br>18 | 20 |
| Потреби | 24 | 38 | 18 | 80 |

Величини запасів і потреб участі в наступних розрахунках не беруть. Замість них у відповідному рядку запишемо значення потенціалів пунктів споживання, а у відповідному стовпці – значення потенціалів пунктів постачання. Для їх визначення потрібно розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = 9, \\ v_1 - u_2 = 7, \\ v_2 - u_2 = 8, \\ v_2 - u_3 = 4, \\ v_2 - u_4 = 10, \\ v_3 - u_4 = 7. \end{cases}$$

Вважаючи що $u_1 = 0$, визначимо потенціали та заповнимо наступну таблицю. У відповідній $d$ клітинці проставимо вартість перевезень за початковим планом.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9<br>12 | 3 | −4 | 0 |
| $A_2$ | 7<br>12 | 8<br>20 | +8 | 2 |
| $A_3$ | 2 | 4<br>16 | 6 | 6 |
| $A_4$ | 6 | 10<br>2 | 7<br>18 | 0 |
| $v_j$ | 9 | 10 | 7 | 562 |

Для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) підраховуємо $\Delta_{12} = -7$, $\Delta_{13} = -3$, $\Delta_{23} = 3$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{33} = 5$, $\Delta_{41} = -3$. Визначаємо змінну, яку вводимо в базис: $(i_0, j_0) = (1,2)$. Будуємо замкнений цикл $(1,2)$ - $(1,1)$ - $(2,1)$ - $(2,2)$ - $(1,2)$. При цьому $I_+ = \{(1,2),(2,1)\}$, $I_- = \{(1,1),(2,2)\}$, $\theta = \min\{12,20\} = 12$. Змінна $x_{11}$ виводиться з базису. В таблиці



клітинки з множини $I_+$ зручно позначати ’+’, а клітинки з множини $I_-$ – ’-’. Здійснюємо перерозподіл перевезень, отримуємо новий базисний план і будуємо нову таблицю.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 3<br>12 | 4 | 0 |
| $A_2$ | 7<br>24 | 8<br>8 | 8 | -5 |
| $A_3$ | 2 | 4<br>16 | 6 | -1 |
| $A_4$ | 6 | 10<br>2 | 7<br>18 | -7 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 0 | 478 |

Для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) підраховуємо $\Delta_{11} = 7$, $\Delta_{13} = 4$, $\Delta_{23} = 3$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{33} = 5$, $\Delta_{41} = -3$. Визначаємо змінну, яку вводимо в базис: $(i_0, j_0) = (4,1)$. Будуємо замкнений цикл $(4,1)$ - $(2,1)$ - $(2,2)$ - $(4,2)$ - $(4,1)$. При цьому $I_+ = \{(4,1),(2,2)\}$, $I_- = \{(2,1),(4,2)\}$, $\theta = \min\{24,2\} = 2$. Змінна $x_{42}$ виводиться з базису. Здійснюємо перерозподіл перевезень, отримуємо новий базисний план і будуємо нову таблицю.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 3<br>12 | 4 | 0 |
| $A_2$ | 7<br>22 | 8<br>10 | 8 | -5 |
| $A_3$ | 2 | 4<br>16 | 6 | -1 |
| $A_4$ | 6<br>2 | 10 | 7<br>18 | -4 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 3 | 472 |

Для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) підраховуємо $\Delta_{11} = 7$, $\Delta_{13} = 1$, $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{33} = 2$, $\Delta_{42} = 3$. Визначаємо змінну, яку вводимо в базис: $(i_0, j_0) = (3,1)$. Будуємо замкнений цикл $(3,1)$ -

$(2,1)-(2,2)-(3,2)-(3,1)$. При цьому $I_+ = \{(3,1),(2,2)\}$, $I_- = \{(2,1),(3,2)\}$, $\theta = \min\{22,16\} = 16$. Змінна $x_{32}$ виводиться з базису. Здійснюємо перерозподіл перевезень, отримуємо новий базисний план і будуємо нову таблицю.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 3<br>12 | 4 | 0 |
| $A_2$ | 7<br>6 | 8<br>26 | 8 | -5 |
| $A_3$ | 2<br>16 | 4 | 6 | 0 |
| $A_4$ | 6<br>2 | 10 | 7<br>18 | -4 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 3 | 456 |

Для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) підраховуємо $\Delta_{11} = 7$, $\Delta_{13} = 1$, $\Delta_{23} = 0$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 3$, $\Delta_{42} = 3$. Усі отримані величини невід'ємні. Отже, побудований план перевезень оптимальний.

Відповідь: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 6 & 26 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, $L(X^*) = 456.$

Зауважимо, що, як правило, базисний план, знайдений методом мінімального елемента, має вартість меншу, ніж план, знайдений методом північно-західного кута. При цьому, відповідно, може зменшитись кількість ітерацій методу потенціалів.

У загальному випадку ТЗБО може мати вироджені базисні плани й безпосереднє застосування методу потенціалів ускладнюється. Рекомендується побудувати та розв'язати "збурену" задачу, побудовану за правилами:

- запаси кожного постачальника збільшують на величину $\varepsilon > 0$, вважаючи її досить малою. При цьому сумарний запас товару збільшується на величину $m\varepsilon$;



- потреби одного зі споживачів, як правило $n$-го, також збільшують на величину $m\varepsilon$. Збалансованість задачі при цьому не порушується;
- розв'язують "збурену" задачу методом потенціалів і вважають у розв'язку $\varepsilon = 0$. Отриманий план є розв'язком ТЗБО.

***Література:*** [1, 3, 4].
***Завдання.*** Розв'язати методом потенціалів транспортну задачу без обмежень.

***Варіанти завдань***

1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 30 | 17 | 10 | 16 | 4 |
| 30 | 27 | 26 | 9 | 23 | 6 |
| 13 | 4 | 22 | 3 | 1 | 10 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 24 | 10 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 2 | |

2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 22 | 19 | 1 | 20 |
| 21 | 18 | 11 | 4 | 3 | 20 |
| 26 | 29 | 23 | 26 | 24 | 20 |
| 21 | 10 | 3 | 19 | 27 | 20 |
| 19 | 19 | 19 | 19 | 4 | |

3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 29 | 26 | 25 | 15 |
| 3 | 4 | 5 | 15 | 24 | 15 |
| 19 | 2 | 22 | 4 | 13 | 15 |
| 20 | 27 | 1 | 17 | 19 | 15 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 16 | |

4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 26 | 24 | 26 | 29 | 13 |
| 15 | 20 | 29 | 26 | 23 | 17 |
| 4 | 10 | 27 | 30 | 7 | 17 |
| 9 | 16 | 29 | 30 | 3 | 13 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | |

5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 34 | 43 | 32 | 2 | 10 |
| 11 | 54 | 29 | 18 | 3 | 10 |
| 4 | 14 | 25 | 36 | 12 | 15 |
| 11 | 3 | 5 | 12 | 34 | 10 |
| 8 | 7 | 10 | 10 | 10 | |

6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 54 | 32 | 87 | 43 | 10 |
| 4 | 2 | 3 | 23 | 12 | 12 |
| 17 | 14 | 26 | 12 | 43 | 10 |
| 4 | 15 | 24 | 32 | 21 | 10 |
| 8 | 10 | 4 | 10 | 10 | |

7.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 19 | 1 | 5 | 18 |
| 8 | 27 | 30 | 7 | 7 | 23 |
| 10 | 20 | 19 | 26 | 20 | 17 |
| 18 | 28 | 25 | 7 | 22 | 22 |
| 21 | 21 | 9 | 9 | 20 | |

8.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 20 | 27 | 15 | 26 | 33 |
| 25 | 6 | 28 | 20 | 5 | 33 |
| 19 | 24 | 11 | 29 | 23 | 33 |
| 1 | 4 | 6 | 6 | 8 | 11 |
| 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | |

9.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 53 | 39 | 29 | 22 | 33 |
| 15 | 33 | 16 | 3 | 3 | 18 |
| 16 | 27 | 16 | 3 | 5 | 32 |
| 35 | 50 | 39 | 20 | 23 | 17 |
| 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | |

10.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 6 | 29 | 19 | 21 | 13 |
| 14 | 3 | 30 | 10 | 10 | 27 |
| 15 | 27 | 28 | 11 | 24 | 16 |
| 1 | 23 | 25 | 15 | 13 | 14 |
| 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | |

11.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 4 | 7 | 6 | 16 | 14 |
| 21 | 13 | 25 | 21 | 7 | 14 |
| 20 | 10 | 12 | 6 | 2 | 14 |
| 17 | 7 | 4 | 6 | 19 | 18 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | |

12.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 27 | 10 | 26 | 15 |
| 7 | 17 | 18 | 21 | 28 | 25 |
| 27 | 21 | 9 | 23 | 26 | 5 |
| 1 | 13 | 17 | 23 | 7 | 15 |
| 7 | 8 | 13 | 12 | 20 | |

13.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 5 | 27 | 29 | 23 | 18 |
| 17 | 7 | 16 | 19 | 2 | 14 |
| 20 | 12 | 15 | 29 | 5 | 16 |
| 14 | 24 | 18 | 7 | 13 | 12 |
| 8 | 11 | 11 | 9 | 21 | |

14.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 17 | 26 | 14 | 3 | 24 |
| 18 | 14 | 27 | 6 | 20 | 8 |
| 8 | 24 | 17 | 17 | 26 | 12 |
| 1 | 18 | 21 | 16 | 12 | 16 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 16 | |

15.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 9 | 14 | 17 | 9 | 17 |
| 4 | 21 | 27 | 8 | 29 | 17 |
| 22 | 30 | 4 | 1 | 24 | 16 |
| 10 | 22 | 8 | 5 | 27 | 10 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 24 | |

16.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 16 | 26 | 43 | 23 | 38 |
| 30 | 23 | 28 | 48 | 27 | 13 |
| 37 | 23 | 25 | 49 | 28 | 9 |
| 22 | 1 | 4 | 25 | 10 | 20 |
| 13 | 13 | 13 | 13 | 28 | |

17.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 14 | 28 | 1 | 14 |
| 16 | 7 | 30 | 8 | 29 | 14 |
| 1 | 21 | 22 | 19 | 12 | 12 |
| 8 | 25 | 28 | 5 | 19 | 16 |
| 11 | 11 | 11 | 8 | 15 | |

18.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 16 | 15 | 29 | 9 | 25 |
| 6 | 27 | 20 | 25 | 20 | 13 |
| 6 | 15 | 12 | 8 | 14 | 15 |
| 10 | 24 | 23 | 5 | 22 | 15 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | |

19.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 23 | 6 | 29 | 3 | 34 |
| 20 | 8 | 13 | 2 | 27 | 35 |
| 30 | 17 | 10 | 23 | 28 | 21 |
| 4 | 7 | 23 | 27 | 26 | 10 |
| 20 | 20 | 15 | 15 | 30 | |

20.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 25 | 11 | 22 | 12 | 23 |
| 9 | 15 | 4 | 26 | 12 | 25 |
| 13 | 22 | 15 | 12 | 27 | 12 |
| 6 | 19 | 8 | 11 | 8 | 30 |
| 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | |



21.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 9 | 29 | 6 | 13 | 17 |
| 23 | 13 | 3 | 28 | 7 | 17 |
| 4 | 3 | 11 | 6 | 9 | 17 |
| 3 | 10 | 11 | 10 | 28 | 17 |
| 13 | 13 | 13 | 13 | 16 | |

22.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 17 | 12 | 24 | 30 | 19 |
| 6 | 1 | 9 | 5 | 9 | 19 |
| 7 | 5 | 24 | 6 | 13 | 19 |
| 29 | 22 | 21 | 5 | 7 | 19 |
| 15 | 15 | 16 | 15 | 15 | |

23.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 18 | 14 | 3 | 16 | 24 |
| 29 | 15 | 27 | 16 | 17 | 7 |
| 21 | 2 | 29 | 2 | 22 | 16 |
| 5 | 13 | 1 | 5 | 17 | 13 |
| 11 | 16 | 11 | 11 | 11 | |

24.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 28 | 17 | 19 | 11 | 23 |
| 27 | 5 | 10 | 6 | 19 | 24 |
| 29 | 11 | 3 | 7 | 8 | 21 |
| 25 | 16 | 19 | 24 | 13 | 15 |
| 19 | 16 | 16 | 16 | 16 | |

25.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 7 | 19 | 18 | 27 | 15 |
| 1 | 21 | 8 | 20 | 12 | 19 |
| 5 | 17 | 14 | 23 | 21 | 15 |
| 7 | 4 | 29 | 18 | 22 | 11 |
| 12 | 18 | 10 | 10 | 10 | |

26.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 28 | 37 | 27 | 46 | 33 |
| 21 | 4 | 20 | 3 | 14 | 17 |
| 25 | 27 | 25 | 24 | 29 | 15 |
| 12 | 26 | 10 | 5 | 22 | 15 |
| 13 | 13 | 13 | 21 | 20 | |

27.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 4 | 8 | 11 | 5 | 15 |
| 10 | 19 | 26 | 1 | 27 | 16 |
| 16 | 7 | 4 | 29 | 23 | 15 |
| 9 | 10 | 24 | 25 | 17 | 16 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 12 | |

28.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 27 | 6 | 16 | 8 | 21 |
| 2 | 4 | 19 | 4 | 27 | 22 |
| 26 | 23 | 1 | 20 | 3 | 22 |
| 24 | 5 | 12 | 30 | 5 | 20 |
| 18 | 20 | 19 | 19 | 9 | |

29.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 27 | 5 | 18 | 19 | 24 |
| 17 | 20 | 1 | 24 | 3 | 21 |
| 11 | 7 | 28 | 23 | 9 | 21 |
| 8 | 26 | 19 | 2 | 24 | 24 |
| 19 | 25 | 20 | 13 | 13 | |

30.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 6 | 1 | 12 | 19 | 31 |
| 28 | 13 | 22 | 18 | 4 | 16 |
| 21 | 27 | 30 | 10 | 14 | 20 |
| 2 | 5 | 6 | 25 | 7 | 14 |
| 15 | 15 | 18 | 17 | 16 | |

***Додаткові запитання***

1. Опишіть метод мінімального елемента знаходження початкового плану перевезень.
2. Запишіть непрямі обмеження для незбалансованої ТЗ.
3. Як методом потенціалів можна розв’язати незбалансовану ТЗ?

## *Індивідуальне завдання 7. Транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО)*

***Мета:*** навчитися будувати початковий план перевезень та розв'язувати транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності.

***Теоретичні відомості.*** Форма запису ТЗО не дуже відрізняється від уже розглянутої ТЗБО (6.1-6.3): замість умови (6.3) розглядають умову

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \qquad (7.1)$$

де $r_{ij}$ – невід'ємні дійсні числа, які називають пропускними здатностями комунікацій, що з'єднують пункт постачання $A_i$ з пунктом споживання $B_j$. Умова (7.1) суттєво змінює властивості задачі (6.1), (6.2), (6.4), (7.1). Насамперед зауважимо, що ТЗО може не мати розв'язку. Дійсно, якщо для деякого $i$ має місце нерівність $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} < a_i$ або для деякого $j$ має місце нерівність $\sum_{i=1}^{m} r_{ij} < b_j$, то, очевидно, неможливо побудувати жодного плану перевезень, який задовольняв би умови (6.2) та (7.1). Потрібно також уточнити поняття базисного плану в ТЗО. Допустимий план $x = \{x_{ij}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ називається базисним планом ТЗО, якщо система векторів-комунікацій, які відповідають його ненульовим компонентам $x_{ij}$, лінійно незалежна. Відомо, що ранг матриці в умовах (6.2) дорівнює $n+m-1$, тому кількість ненульових компонент у базисному плані не перевищує $n+m-1$. Аналогічно ТЗБО, базисний план може бути виродженим або невиродженим. Надалі будемо розглядати ТЗО, в яких всі базисні плани невироджені.

Для *розв'язування ТЗО* розроблено метод, подібний до методу потенціалів. Як критерій якості використовують твердження: базисний план ТЗО $x = \{x_{ij}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ є її



розв'язком тоді й тільки тоді, коли існують потенціали пунктів постачання $u_i$, $i = \overline{1,m}$ та пунктів споживання $v_j$, $j = \overline{1,n}$, такі, що величини $\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$ задовольняють умови: $\Delta_{ij} = 0$ – для базисних змінних, $\Delta_{ij} \ge 0$ – для небазисних змінних, таких, що $x_{ij} = 0$, $\Delta_{ij} \le 0$ – для небазисних змінних, таких, що $x_{ij} = r_{ij}$.

Правила визначення потенціалів залишаються без зміни. Умови оптимальності можуть порушуватись двома способами:

- для вільної небазисної комунікації $(i_0, j_0)$ маємо $x_{i_0 j_0} = 0$, але $\Delta_{i_0 j_0} < 0$; (7.2)

- для насиченої небазисної комунікації $(i_0, j_0)$ маємо $x_{ij} = r_{ij}$, але $\Delta_{ij} > 0$. (7.3)

У випадку (7.2) будують замкнений цикл $(i_0, j_0)$-$(i_1, j_0)$-$(i_1, j_1)$-$(i_2, j_1)$-…-$(i_k, j_k)$-$(i_0, j_k)$-$(i_0, j_0)$ з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначають $I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\}$ і $I_- = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$ та знаходять

$$\theta_1 = \min_{(i,j)\in I_-} x_{ij}, \quad \theta_2 = \min_{(i,j)\in I_+} \{r_{ij} - x_{ij})\}, \quad \theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}. \qquad (7.4)$$

Відповідна $\theta$ змінна виводиться з базису, змінна з індексами $(i_0, j_0)$ вводиться в базис. Компоненти нового базисного плану $x'$ знаходять зі співвідношень

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij}, \textit{якщо}\, (i,j) \notin I_+ \cup I_-, \\ x'_{ij} &= x_{ij} + \theta, \textit{якщо}\, (i,j) \in I_+, \\ x'_{ij} &= x_{ij} - \theta, \textit{якщо}\, (i,j) \in I_-. \end{aligned} \qquad (7.5)$$

У випадку (7.3) будують замкнений цикл $(i_0, j_0)$-$(i_1, j_0)$-$(i_1, j_1)$-$(i_2, j_1)$-…-$(i_k, j_k)$-$(i_0, j_k)$-$(i_0, j_0)$ з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначають
$I_- = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\}$,
$I_+ = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$

та знаходять

$$\theta_1 = \min_{(i,j)\in I_-} x_{ij}\,, \quad \theta_2 = \min_{(i,j)\in I_+} \{r_{ij} - x_{ij})\}\,, \quad \theta = \min\,\{\theta_1, \theta_2\}\,. \quad (7.6)$$

Відповідна $\theta$ змінна виводиться з базису, змінна з індексами $(i_0, j_0)$ вводиться в базис. Компоненти нового базисного плану $x'$ знаходять зі співвідношень

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= x_{ij}\,, \textit{якщо}(i,j) \notin I_+ \bigcup I_-, \\ x'_{ij} &= x_{ij} + \theta, \textit{якщо}(i,j) \in I_+, \qquad (7.7) \\ x'_{ij} &= x_{ij} - \theta, \textit{якщо}(i,j) \in I_-. \end{aligned}$$

Очевидно, що в обох випадках $L(x') = L(x) - \theta\,|\,\Delta_{i_0 j_0}\,|$. Для нового базисного плану знову обчислюють потенціали та перевіряють критерій оптимальності і т.д. Зауважимо, що у виродженому випадку такий вибір $\theta$ може не приводити до нового базисного плану, наприклад при $\theta = 0$. У цьому випадку рекомендується змінити набір базисних змінних. Умови задачі та хід її розв'язування зручно записувати в таблицях. Розглянемо далі питання про побудову початкового базисного плану. Відзначимо, що умови (7.1) при використанні відомих методів (північно-західного кута чи мінімального елемента) можуть призвести до недопустимого плану – якась кількість запасів може виявитись невичерпаною, а деякі потреби – не задовольняються. Позначимо сумарну кількість невичерпаних запасів $\omega$. Зі збалансованості задачі маємо, що потрібно задовольнити $\omega$ потреб.

Побудуємо *допоміжну (розширену) задачу* для знаходження початкового базисного плану. Введемо до розгляду додатковий пункт постачання $A_{m+1}$ із запасами $\omega$ та додатковий пункт споживання $B_{n+1}$ із потребами $\omega$. При цьому вважаємо, що

$$r_{m+1,j} = r_{i,n+1} = \infty\,,\ i = \overline{1, m+1},\ j = \overline{1, n+1},\ c_{m+1,j} = c_{i,n+1} = M\,,$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\,,\ c_{m+1,n+1} = 0\,. \qquad (7.8)$$

Тут $M > 0$ – досить велике число, більше за всі числа, з якими воно порівнюється в процесі розв'язування задачі. Застосуємо для розв'язування допоміжної задачі метод



потенціалів. Нехай $x^* = \{x^*_{ij}\}$, $i = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, n+1}$ – знайдений розв'язок. У випадку $x_{m+1,n+1} < \omega$ ТЗО не має допустимих планів. У випадку $x_{m+1,n+1} = \omega$ початковий базисний план ТЗО будується так: $x = \{x^*_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ і знову застосовуємо метод потенціалів. Зауважимо, що рівність $x_{m+1,n+1} = \omega$ можна використовувати як критерій закінчення розв'язування допоміжної задачі.

<u>Приклад.</u> Пункти постачання $A_1, A_2, A_3$ мають запаси в 60, 30, 30 одиниць товару відповідно. Пункти $B_1, B_2, B_3, B_4$ мають потреби в товарі в кількості 40, 20, 40, 20 одиниць відповідно. Затрати на перевезення одиниці товару задано матрицею $C$, обмеження на пропускні здатності комунікацій – матрицею $R$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 20 \\ 20 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Необхідно побудувати план перевезень так, щоб максимально задовольнити потреби споживачів та мінімізувати затрати на перевезення товару.

<u>Розв'язування.</u> Співвідношення (6.4) виконується, отже, задача збалансована. Запишемо початкові дані в таблицю, враховуючи зміни в структурі клітинки. Побудуємо початковий план перевезень за методом мінімального елемента.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1<br>30<br>30 | 4<br><br>10 | 2<br>20<br>20 | 5<br><br>10 | 60 |
| $A_2$ | 2<br><br>10 | 1<br>10<br>10 | 4<br><br>10 | 1<br>20<br>20 | 30 |
| $A_3$ | 3<br>10<br>20 | 2<br>10<br>10 | 1<br>10<br>10 | 3<br><br>10 | 30 |
| Потреби | 40 | 20 | 40 | 20 | 120 |

Легко побачити, що в пункті постачання $A_1$ залишилось не вивезено 10 одиниць товару, а в пункті споживання $B_3$ є потреби в кількості 10 одиниць. Отже, побудований план недопустимий. Будуємо розширену задачу, вводячи пункт постачання $A_4$ із запасами в 10 одиниць та пункт споживання з $B_5$ із потребами в 10 одиниць. Врахувавши співвідношення (7.8) та замінивши рядок “потреби” потенціалами пунктів споживання, а стовпець “запаси” – стовпцем потенціалів пунктів постачання, отримаємо таблицю

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1<br>30<br>30 | 4<br>0<br>10 | 2<br>20<br>20 | 5<br>0<br>10 | M<br>10<br>∞ | |
| $A_2$ | 2<br>0<br>10 | 1<br>10<br>10 | 4<br>0<br>10 | 1<br>20<br>20 | M<br>0<br>∞ | |
| $A_3$ | 3<br>10<br>20 | 2<br>10<br>10 | 1<br>10<br>10 | 3<br>0<br>10 | M<br>0<br>∞ | |
| $A_4$ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | 0<br>0<br>∞ | |
| $v_j$ | | | | | | |

Для зручності нульові перевезення будемо вказувати явно. В отриманій задачі $\omega = 10, m = 4, n = 5$. Лише три комунікації (1,5), (3,1), (4,3) задовольняють умову $0 < x_{ij} < r_{ij}$. Серед вільних і насичених комунікацій треба вибрати ще п’ять так, щоб обрані вісім комунікацій утворили базис (не утворювали замкненого циклу в таблиці). Цю умову задовольняють, наприклад, комунікації (1,4), (2,4), (3,2), (4,1), (4,5). Використовуючи таблицю та обраний базис, знаходимо потенціали $u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 2M - 3, u_4 = M$, $v_1 = M, v_2 = 2M - 1$, $v_3 = 2M, v_4 = 5, v_5 = M$ та будуємо матрицю з відносних оцінок



$$\Delta = \begin{pmatrix} 1-2M & 5-2M & 2-2M & 0 & 0 \\ 6-2M & 6-2M & 8-2M & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2M-5 & 2M-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2M-5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що умови оптимальності не задовольняють комунікації (1,2), (2,1), (2,3). Найвигідніше ввести в базис комунікацію (2,3), оскільки при цьому $\theta = 10$. Згідно з формулами (7.5), будуємо новий план перевезень та нову таблицю

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1<br>30<br>30 | 4<br>0<br>10 | 2<br>20<br>20 | 5<br>10<br>10 | M<br>0<br>∞ |
| $A_2$ | 2<br>0<br>10 | 1<br>10<br>10 | 4<br>10<br>10 | 1<br>10<br>20 | M<br>0<br>∞ |
| $A_3$ | 3<br>10<br>20 | 2<br>10<br>10 | 1<br>10<br>10 | 3<br>0<br>10 | M<br>0<br>∞ |
| $A_4$ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | M<br>0<br>∞ | 0<br>10<br>∞ |

Можна не перевіряти, чи є отриманий план перевезень розв’язком розширеної ТЗО. Важливо, що $x_{45} = \omega = 10$, $x_{15} = x_{25} = x_{35} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{44} = 0$. Якщо відкинути останній рядок та стовпчик у таблиці, отримаємо таблицю з допустимим планом перевезень для початкової ТЗО. Застосовуючи тепер описаний вище метод поліпшення плану, через кілька ітерацій знаходимо розв’язок $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, при цьому $L(X^*) = 230$.

***Література:*** [2, 4, 5].

***Завдання.*** Методом потенціалів знайти початковий план та розв’язати транспортну задача з обмеженнями на пропускні здатності.

***Варіанти завдань***

1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 10 | 2 | 5 | 10 | 50 |
| 11 | 5 | 4 | 11 | 3 | 20 |
| 9 | 8 | 12 | 1 | 18 | 30 |
| 1 | 4 | 9 | 17 | 18 | 40 |
| 15 | 30 | 65 | 20 | 10 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 35 | 14 | 10 | 5 |
| 8 | 4 | 20 | 12 | 18 |
| 10 | 7 | 32 | 20 | 14 |
| 8 | 4 | 16 | 20 | 17 |

2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 10 | 16 | 12 | 10 |
| 12 | 13 | 7 | 10 | 14 | 70 |
| 1 | 19 | 14 | 13 | 3 | 60 |
| 13 | 8 | 15 | 8 | 19 | 30 |
| 40 | 40 | 60 | 25 | 5 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 6 | 4 | 8 |
| 29 | 12 | 15 | 16 | 16 |
| 12 | 20 | 21 | 10 | 2 |
| 1 | 6 | 21 | 4 | 3 |

3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 20 | 7 | 25 | 10 |
| 8 | 12 | 6 | 12 | 5 | 48 |
| 3 | 1 | 12 | 2 | 19 | 27 |
| 6 | 3 | 3 | 1 | 18 | 46 |
| 17 | 33 | 38 | 21 | 22 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 16 | 5 | 11 |
| 20 | 19 | 17 | 3 | 6 |
| 10 | 14 | 30 | 18 | 7 |
| 18 | 16 | 11 | 13 | 17 |

4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 19 | 7 | 12 | 18 | 80 |
| 17 | 11 | 7 | 13 | 11 | 12 |
| 1 | 13 | 19 | 18 | 12 | 38 |
| 18 | 4 | 11 | 3 | 11 | 45 |
| 75 | 10 | 20 | 40 | 30 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 6 | 15 | 22 | 25 |
| 2 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| 20 | 1 | 3 | 15 | 8 |
| 40 | 5 | 6 | 2 | 10 |

5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 16 | 3 | 8 | 15 | 14 |
| 3 | 14 | 12 | 9 | 1 | 25 |
| 2 | 20 | 4 | 11 | 5 | 56 |
| 7 | 17 | 13 | 8 | 15 | 45 |
| 40 | 40 | 20 | 10 | 30 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 15 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 10 | 20 | 15 | 5 | 10 |
| 11 | 20 | 7 | 4 | 21 |



6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 12 | 3 | 9 | 10 | 15 |
| 4 | 16 | 1 | 11 | 10 | 17 |
| 19 | 10 | 18 | 20 | 19 | 23 |
| 12 | 4 | 11 | 18 | 19 | 75 |
| 30 | 27 | 16 | 33 | 24 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 5 | 4 | 10 |
| 7 | 5 | 5 | 10 | 4 |
| 12 | 7 | 6 | 4 | 3 |
| 10 | 17 | 15 | 35 | 20 |

7.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 12 | 7 | 1 | 30 |
| 16 | 4 | 9 | 19 | 10 | 70 |
| 20 | 17 | 11 | 1 | 12 | 50 |
| 13 | 14 | 15 | 7 | 8 | 20 |
| 35 | 30 | 35 | 45 | 25 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 4 | 15 | 8 | 10 |
| 20 | 21 | 23 | 16 | 15 |
| 5 | 10 | 8 | 25 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |

8.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 19 | 12 | 5 | 9 | 50 |
| 17 | 20 | 11 | 10 | 9 | 20 |
| 2 | 15 | 12 | 13 | 6 | 10 |
| 18 | 3 | 8 | 5 | 14 | 30 |
| 5 | 15 | 35 | 15 | 40 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 18 | 5 | 25 |
| 3 | 4 | 1 | 7 | 8 |
| 9 | 5 | 3 | 3 | 7 |
| 15 | 7 | 21 | 22 | 6 |

9.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 20 | 5 | 14 | 60 |
| 19 | 20 | 2 | 4 | 5 | 50 |
| 9 | 6 | 8 | 19 | 1 | 40 |
| 7 | 15 | 20 | 6 | 11 | 20 |
| 10 | 50 | 40 | 50 | 20 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 14 | 25 | 13 |
| 19 | 22 | 15 | 4 | 12 |
| 6 | 8 | 15 | 5 | 10 |
| 14 | 7 | 2 | 23 | 20 |

10.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 18 | 7 | 20 | 2 | 10 |
| 5 | 16 | 3 | 9 | 19 | 13 |
| 15 | 14 | 17 | 7 | 5 | 28 |
| 11 | 15 | 9 | 8 | 16 | 17 |
| 11 | 10 | 14 | 16 | 17 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 10 | 4 | 5 | 8 |
| 5 | 4 | 6 | 5 | 9 |
| 11 | 6 | 12 | 8 | 7 |
| 3 | 2 | 1 | 6 | 10 |

11.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 6 | 12 | 1 | 20 |
| 18 | 20 | 4 | 2 | 3 | 30 |
| 17 | 5 | 15 | 10 | 8 | 70 |
| 4 | 12 | 18 | 13 | 16 | 71 |
| 37 | 26 | 91 | 24 | 13 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 5 | 3 |
| 10 | 8 | 11 | 2 | 4 |
| 20 | 15 | 28 | 9 | 7 |
| 11 | 13 | 41 | 20 | 14 |

12.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 17 | 6 | 19 | 2 | 20 |
| 1 | 15 | 7 | 6 | 1 | 40 |
| 5 | 13 | 8 | 11 | 17 | 52 |
| 18 | 13 | 17 | 1 | 8 | 73 |
| 45 | 38 | 40 | 28 | 34 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| 20 | 3 | 20 | 4 | 2 |
| 24 | 13 | 7 | 11 | 8 |
| 9 | 21 | 16 | 13 | 25 |

13.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 20 | 7 | 17 | 8 | 29 |
| 18 | 4 | 14 | 9 | 7 | 39 |
| 17 | 15 | 16 | 12 | 20 | 28 |
| 25 | 13 | 66 | 15 | 25 | 24 |
| 30 | 30 | 10 | 20 | 30 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 20 | 7 | 3 |
| 12 | 8 | 16 | 15 | 4 |
| 3 | 5 | 17 | 4 | 20 |
| 1 | 3 | 1 | 4 | 27 |

14.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 13 | 14 | 9 | 62 |
| 11 | 20 | 18 | 19 | 17 | 26 |
| 10 | 30 | 15 | 25 | 5 | 27 |
| 9 | 16 | 15 | 11 | 17 | 65 |
| 30 | 50 | 13 | 70 | 17 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 25 | 10 | 20 | 2 |
| 4 | 7 | 6 | 10 | 15 |
| 10 | 2 | 8 | 3 | 15 |
| 10 | 30 | 15 | 25 | 5 |

15.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 17 | 13 | 11 | 71 |
| 5 | 2 | 3 | 16 | 1 | 69 |
| 5 | 9 | 7 | 14 | 18 | 58 |
| 4 | 11 | 2 | 14 | 15 | 32 |
| 50 | 30 | 25 | 80 | 45 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 11 | 10 | 25 | 10 |
| 4 | 19 | 20 | 20 | 17 |
| 15 | 13 | 10 | 20 | 25 |
| 10 | 11 | 2 | 20 | 12 |

16.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 1 | 3 | 5 | 2 | 33 |
| 4 | 7 | 20 | 19 | 13 | 44 |
| 8 | 18 | 3 | 11 | 12 | 24 |
| 15 | 17 | 16 | 11 | 10 | 55 |
| 20 | 36 | 50 | 40 | 10 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 13 | 12 | 7 | 7 |
| 12 | 10 | 14 | 10 | 4 |
| 6 | 19 | 10 | 1 | 3 |
| 10 | 8 | 22 | 24 | 5 |

17.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 18 | 7 | 2 | 53 |
| 9 | 4 | 15 | 20 | 8 | 45 |
| 19 | 17 | 12 | 8 | 16 | 38 |
| 4 | 3 | 20 | 2 | 11 | 15 |
| 21 | 30 | 75 | 10 | 15 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 26 | 23 | 8 | 9 |
| 6 | 18 | 30 | 5 | 5 |
| 4 | 2 | 25 | 3 | 10 |
| 5 | 4 | 11 | 2 | 1 |



18.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 8 | 7 | 8 | 26 |
| 8 | 1 | 6 | 9 | 5 | 38 |
| 20 | 8 | 15 | 14 | 19 | 39 |
| 12 | 6 | 10 | 10 | 12 | 75 |
| 3 | 46 | 25 | 49 | 55 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 10 | 15 | 20 | 18 |
| 17 | 8 | 15 | 18 | 13 |
| 11 | 23 | 18 | 30 | 16 |
| 9 | 10 | 11 | 24 | 32 |

19.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 18 | 12 | 8 | 12 | 11 |
| 17 | 2 | 18 | 13 | 7 | 19 |
| 4 | 3 | 1 | 6 | 12 | 35 |
| 12 | 16 | 8 | 14 | 15 | 75 |
| 55 | 45 | 18 | 12 | 10 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 7 | 3 | 2 |
| 20 | 4 | 10 | 30 | 4 |
| 8 | 15 | 2 | 41 | 22 |
| 32 | 12 | 10 | 3 | 23 |

20.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 10 | 5 | 19 | 15 |
| 1 | 10 | 16 | 15 | 7 | 40 |
| 13 | 17 | 20 | 16 | 9 | 14 |
| 16 | 10 | 5 | 6 | 16 | 76 |
| 55 | 30 | 11 | 30 | 19 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| 20 | 10 | 9 | 13 | 8 |
| 4 | 12 | 4 | 11 | 3 |
| 30 | 15 | 8 | 13 | 19 |

21.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 12 | 7 | 15 | 12 | 19 |
| 14 | 17 | 11 | 2 | 7 | 52 |
| 19 | 6 | 11 | 12 | 6 | 34 |
| 10 | 8 | 20 | 1 | 13 | 15 |
| 20 | 40 | 17 | 10 | 33 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 10 | 6 | 8 |
| 4 | 31 | 5 | 5 | 17 |
| 11 | 3 | 8 | 15 | 16 |
| 5 | 10 | 3 | 6 | 4 |

22.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 16 | 3 | 7 | 10 | 50 |
| 6 | 4 | 20 | 1 | 11 | 42 |
| 19 | 6 | 12 | 19 | 7 | 17 |
| 15 | 10 | 18 | 17 | 8 | 36 |
| 19 | 20 | 66 | 18 | 22 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 16 | 17 | 9 |
| 5 | 11 | 30 | 7 | 4 |
| 5 | 2 | 10 | 3 | 2 |
| 10 | 5 | 16 | 1 | 11 |

23.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 2 | 17 | 27 | 27 |
| 12 | 4 | 19 | 10 | 5 | 35 |
| 6 | 12 | 11 | 13 | 2 | 49 |
| 5 | 19 | 10 | 4 | 1 | 94 |
| 55 | 30 | 77 | 20 | 23 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 10 | 4 | 17 |
| 3 | 25 | 10 | 10 | 5 |
| 10 | 3 | 27 | 4 | 11 |
| 30 | 14 | 30 | 10 | 12 |

24.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 14 | 6 | 8 | 7 | 72 |
| 8 | 19 | 9 | 16 | 17 | 29 |
| 18 | 10 | 14 | 7 | 19 | 26 |
| 1 | 6 | 10 | 5 | 13 | 68 |
| 65 | 24 | 50 | 30 | 26 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 20 | 3 | 20 | 10 |
| 20 | 4 | 3 | 2 | 8 |
| 13 | 10 | 30 | 10 | 15 |
| 23 | 5 | 6 | 4 | 6 |

25.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 17 | 15 | 13 | 13 |
| 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 44 |
| 7 | 11 | 9 | 16 | 19 | 77 |
| 2 | 10 | 5 | 18 | 6 | 62 |
| 36 | 40 | 50 | 35 | 35 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 17 | 12 | 15 |
| 4 | 13 | 17 | 13 | 6 |
| 15 | 27 | 13 | 41 | 22 |
| 20 | 3 | 25 | 20 | 12 |

26.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 19 | 17 | 12 | 20 | 35 |
| 16 | 1 | 4 | 7 | 5 | 61 |
| 11 | 3 | 9 | 7 | 19 | 72 |
| 12 | 16 | 11 | 5 | 13 | 27 |
| 67 | 30 | 35 | 23 | 40 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 17 | 4 | 8 | 10 |
| 20 | 5 | 12 | 11 | 20 |
| 20 | 20 | 12 | 22 | 4 |
| 7 | 20 | 7 | 5 | 10 |

27.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 8 | 10 | 6 | 11 | 29 |
| 17 | 4 | 19 | 6 | 17 | 66 |
| 12 | 11 | 15 | 8 | 16 | 17 |
| 10 | 1 | 5 | 14 | 17 | 82 |
| 44 | 50 | 40 | 23 | 37 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 9 | 10 | 6 |
| 4 | 20 | 15 | 4 | 32 |
| 10 | 4 | 3 | 7 | 10 |
| 24 | 35 | 20 | 5 | 7 |

28.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 19 | 20 | 3 | 77 |
| 10 | 12 | 19 | 4 | 17 | 24 |
| 3 | 2 | 20 | 19 | 6 | 69 |
| 18 | 17 | 9 | 12 | 4 | 16 |
| 56 | 30 | 40 | 15 | 45 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 30 | 21 | 9 | 30 |
| 8 | 4 | 5 | 10 | 11 |
| 30 | 4 | 29 | 5 | 15 |
| 14 | 6 | 3 | 7 | 2 |

29.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 16 | 10 | 3 | 7 | 78 |
| 6 | 14 | 17 | 2 | 4 | 37 |
| 18 | 8 | 3 | 7 | 4 | 53 |
| 19 | 10 | 17 | 18 | 5 | 69 |
| 37 | 60 | 30 | 40 | 70 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 7 | 21 | 27 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 32 |
| 5 | 20 | 25 | 10 | 10 |
| 27 | 20 | 3 | 19 | 10 |



30.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 18 | 11 | 17 | 7 | 33 |
| 16 | 14 | 18 | 15 | 4 | 42 |
| 2 | 8 | 3 | 12 | 16 | 99 |
| 1 | 17 | 12 | 18 | 4 | 24 |
| 68 | 40 | 30 | 30 | 30 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 18 | 10 | 7 | 8 |
| 10 | 5 | 15 | 12 | 10 |
| 45 | 20 | 21 | 19 | 20 |
| 8 | 20 | 12 | 4 | 1 |

***Додаткові запитання***

1. Чи всяка ТЗО має допустимі плани?
2. Який допустимий план ТЗО називається базисним?
3. Які Ви знаєте методи побудови початкового плану ТЗО?
4. Сформулюйте критерій оптимальності базисного плану ТЗО?

## *Індивідуальне завдання 8. Розв'язування оптимізаційних задач на мережі*

***Мета:*** засвоїти алгоритм Мінті для знаходження найкоротшого шляху на мережі, алгоритм Форда-Фалкерсона для знаходження максимального потоку та мінімального перерізу на мережі.

***Теоретичні відомості.*** Розглянемо орієнтований граф $(I,U)$, де $I=\{1,2,...,n\}$ – множина вершин графа, $U=\{(i,j)\,|\,i\in I, j\in I, i\neq j\}$ – множина дуг (упорядкованих пар вершин) графа. Кожній вершині $i$ поставимо у відповідність дійсне число $d_i$, кожній дузі $(i,j)$ – два невід'ємних числа $c_{ij}$ та $r_{ij}$. Такий граф будемо називати мережею. Число $d_i$ будемо називати інтенсивністю вершини $i$. Якщо $d_i>0$, вершину назвемо джерелом, якщо $d_i<0$ – стоком, якщо $d_i=0$ – нейтральною. Відповідне дузі $(i,j)$ число $c_{ij}$ характеризує її з якісного боку (довжина дуги, вартість використання дуги), число $r_{ij}$ задає внутрішні обмеження дуги (пропускна здатність).

Мережа допускає потік $X=\{x_{ij},(i,j)\in U\}$, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = d_i\,,\ i\in I, \qquad (8.1)$$

$$0\le x_{ij}\le r_{ij}\,,\ (i,j)\in U\,. \qquad (8.2)$$

Зауважимо, що потік $X$ – це множина, елементами якої є значення $x_{ij}$ потоку на дугах. Співвідношення (8.1) називають умовами неперервності потоку або рівняннями збереження.

Нехай $C \subset I$. Позначимо $d(V) = \sum\limits_{i \in V} d_i$, $r(C) = \sum\limits_{i \in V,\, j \in U \setminus C} r_{ij}$.

У цих позначеннях необхідні й достатні умови існування потоку на мережі такі:

1) $d(I) = 0$;

2) $d(C) \le r(C)$ для всіх $C \subset I$.

Вважатимемо надалі, що ці умови виконуються.

Основною оптимізаційною задачею на мережі є задача знаходження оптимального потоку: на заданій мережі $(I,U)$ знайти потік $X^* = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U\}$, на якому досягає мінімуму функція вартості

$$L(X) = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (8.3)$$

Прикладами таких задач можуть бути розглянуті раніше ТЗБО та ТЗО. Іншими важливими випадками задачі (8.1), (8.2), (8.3) є задача про найкоротший шлях та задача про максимальний потік і мінімальний переріз. Розглянемо ці задачі в припущенні, що мережа має одне джерело та один стік.

*1. Задача про найкоротший шлях*

Нехай $d_1 = 1$, $d_n = -1$, а решта вершин нейтральні. Умову (8.2) замінимо умовою $x_{ij} \in \{0,1\}$. Отримаємо задачу

$$L(X) = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (8.4)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(1,j) \in U} x_{1j} = 1, \\ \sum\limits_{j:(i,j) \in U} x_{ij} - \sum\limits_{k:(k,i) \in U} x_{ki} = 0,\ i = \overline{2, n-1}, \\ -\sum\limits_{k:(k,n) \in U} x_{kn} = -1, \end{cases} \qquad (8.5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ (i,j) \in U. \qquad (8.6)$$



Умови неперервності (8.5) забезпечують існування шляху від джерела до стоку, а умова (8.6) дає змогу знайти розв’язок задачі перебором не більше $2^{n-1}$ варіантів. Зауважимо, що задача (8.4) - (8.6) допускає різноманітні трактування. Зокрема, якщо $c_{ij}$ – це довжина дуги $(i,j)$, маємо задачу про найкоротший шлях від джерела до стоку. Якщо $c_{ij}$ – це показник затрат на проходження дуги $(i,j)$, маємо задачу про найефективніший шлях. Іноді, особливо в задачах календарного планування, величину $c_{ij}$ трактують як час переходу $t_{ij}$ від вершини $i$ до вершини $j$ – маємо задачу про визначення критичного часу.

Для розв’язування задачі (8.4) - (8.6) використовують метод Мінті. Цим методом можна знайти найкоротші шляхи від джерела до кожної з вершин мережі. Зазначимо, що до деяких нейтральних вершин шляху може і не існувати.

*Алгоритм методу Мінті*

1. Вершині 1 (джерелу) ставимо у відповідність позначку $h_1 = 0$.

2. Нехай на кроці $r$ маємо множину позначених вершин $I = \{i_1, i_2, ..., i_k, ...\}$ з позначками $(h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_k}, ...)$ відповідно та множину непозначених вершин мережі $J = \{..., i_l, ...\}$, таких, що $(i_k, i_l) \in U$, $i_k \in I$, $i_l \in J$, $I \cap J = \phi$. Для кожної такої дуги обчислюємо величину $h_{i_l} = h_{i_k} + c_{i_k i_l}$ і виділяємо ті дуги, для яких ця величина мінімальна. Із кількох дуг, які закінчуються в одній вершині, виділяємо одну (будь-яку). Вершині, в якій закінчується виділена дуга, приписуємо позначку $h_{i_l}$ та “розширюємо” цією вершиною множину $I$.

3. Процес, описаний у пункті 2, повторюємо доти, поки можна “розширювати” множину $I$.

4. Згідно з побудовою, від джерела до кожної з позначених вершин веде єдиний шлях, позначка вершини є його оптимальною довжиною. Якщо деяка вершина не позначена, шляху до неї від джерела не існує.

<u>Приклад 1.</u> На заданій мережі визначити найкоротші шляхи від вершини 1 (джерела) до всіх інших вершин.

| $(i,j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 3-7 | 3-8 | 4-5 | 4-9 | 4- | 5-6 | 6-9 | 7-8 | 8- | 9- | 10- | 10- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 10 | | | | 11 | 11 | 7 | 11 |
| $c_{ij}$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 6 | 2 | 5 | 3 | 3 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 6 |

<u>Розв'язування.</u> На першому кроці $I=\{1\}, h_1=0, J=\{2,3,4\}$. Обчислимо $h_1+c_{12}=2$, $h_1+c_{13}=3$, $h_1+c_{14}=2$. Мінімальне значення відповідає дугам (1,2) та (1,4), виділяємо ці дуги та приписуємо вершині 2 позначку $h_2=2$, а вершині 4 – позначку $h_4=2$.

На другому кроці $I=\{1,2,4\}, h_1=0, h_2=2, h_4=2, J=\{3,5,9,10\}$. Мінімальне значення відповідає дузі (1,3) – виділяємо цю дугу та приписуємо вершині 3 позначку $h_3=3$.

На третьому кроці $I=\{1,2,3,4\}, h_1=0, h_2=2, h_3=3, h_4=2, J=\{5,7,8,9,10\}$. Мінімальне значення відповідає дугам (2,5) та (4,5), які закінчуються в одній вершині. Виділяємо, наприклад, дугу (2,5) та приписуємо вершині 5 позначку $h_5=5$.

На четвертому кроці $I=\{1,2,3,4,5\}, h_1=0, h_2=2, h_3=3, h_4=2, h_5=5, J=\{6,7,8,9,10\}$. Мінімальне значення відповідає дугам (3,7) та (4,10). Виділяємо ці дуги та приписуємо вершині 7 позначку $h_7=5$, вершині 10 – $h_{10}=5$.

На п'ятому кроці $I=\{1,2,3,4,5,7,10\}, h_1=0, h_2=2, h_3=3, h_4=2, h_5=5, h_7=5, h_{10}=5, J=\{6,8,9,11\}$. Мінімальне значення відповідає дугам (4,9), (5,6) та (7,8). Виділяємо ці дуги та приписуємо вершинам позначки $h_6=h_8=h_9=7$.

На шостому кроці $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $h_1=0, h_2=2$, $h_3=3, h_4=2, h_5=5$, $h_6=7, h_7=5$, $h_8=7, h_9=7, h_{10}=5$ $J=\{11\}$. Мінімальне значення відповідає дузі (8,11). Виділяємо її та приписуємо вершині 11 позначку $h_{11}=9$.

Отримуємо $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ і $J=\emptyset$. Множину $I$ далі "розширювати" неможливо, алгоритм закінчено. До кожної з вершин мережі можна вказати найкоротший шлях від джерела.



Наприклад, до вершини 11 веде найкоротший шлях $1\to 3\to 7\to 8\to 11$ і його довжина дорівнює $h_{11}=9$.

Зауважимо, що застосування методу Мінті зручно супроводжувати відповідними рисунками.

*2. Задача про максимальний потік та мінімальний переріз*

Нехай $C\subset I$ – деяка множина вершин мережі, яка містить джерело та не містить витоку. Перерізом мережі, що відокремлює джерело від витоку, назвемо множину дуг $V(C)=\{(i,j): i\in C, j\notin C, (i,j)\in U\}$. Зауважимо, що переріз мережі однозначно задається множиною $C$. Пропускною здатністю перерізу $V(C)$ назвемо число $r(C)=\sum_{(i,j)\in V(C)} r_{ij}$. Задача про мінімальний переріз полягає в знаходженні такої множини $C^*$ і відповідного їй перерізу $V(C^*)$, що $r(C^*)=\min_C r(C)$. При цьому переріз $V(C^*)$ називають мінімальним перерізом, а число $r(C^*)$ – пропускною здатністю мінімального перерізу. З цією задачею тісно пов'язана задача знаходження такого максимального $d>0$, що мережа з інтенсивностями вершин $d_1=d$, $d_2=d_3=\cdots=d_{n-1}=0$, $d_n=-d$ і пропускними здатностями дуг $r_{ij}$ допускає потік. Тобто йдеться про визначення максимального $d>0$, для якого існують $x_{ij}$, $(i,j)\in U$, які задовольняють умови

$$\begin{cases} \sum_{(1,j)\in U} x_{1j}=d, \\ \sum_{(i,j)\in U} x_{ij}-\sum_{(k,i)\in U} x_{ki}=0, i=2,3,\cdots,n-1, \\ -\sum_{(i,n)\in U} x_{in}=-d, \end{cases}$$

$$0\le x_{ij}\le r_{ij}, (i,j)\in U.$$

Якщо $d^*$ – розв'язок цієї задачі, а $X^*=\{x_{ij}^*,(i,j)\in U\}$ – відповідний потік, то $X^*$ називають максимальним потоком у мережі, а число $d^*$ – величиною максимального потоку. Задачу знаходження величин $d^*$ і $X^*$ називають задачею про максимальний потік.

Відомо, що потік $X^*$ є максимальним потоком у мережі тоді й тільки тоді, коли виконується співвідношення $d^* = r(C^*)$. На основі цього співвідношення побудовано метод Форда–Фалкерсона, який дає можливість знайти мінімальний переріз мережі, максимальний потік та його величину. Кожній вершині мережі певним чином ставлять у відповідність позначку. Позначка вершини $i$ складається з пари чисел $(N_i, \theta_i)$ і має такий зміст: деяким шляхом, останньою дугою якого є дуга $(|N_i|, i)$, з джерела до $i$-ї вершини можна додатково перевезти $\theta_i > 0$ вантажу. Іншими словами, за заданим потоком $\{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ можна побудувати новий потік $\{x'_{ij}, (i,j) \in U\}$ такий, що $x'_{N_i j} = x_{N_i j} + \theta_i$.

*Алгоритм методу Форда–Фалкерсона*

На першому кроці задають деякий початковий допустимий потік, зазвичай $\{x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U\}$, величина якого $d^0 = 0$. Вершині 1 (джерелу) ставимо у відповідність мітку $(N_1 = 0, \theta_1 = \infty)$. Нехай на $r$-му кроці алгоритму маємо потік $\{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ та множину позначених вершин $I_r = \{1, \cdots, i_k, \cdots\}$ з мітками $(N_1, \theta_1)$, $(N_2, \theta_2)$, … , $(N_{i_k}, \theta_{i_k})$ відповідно. Нехай $I_{r1} = \{\cdots, i_l, \cdots\}$ – множина непозначених вершин, таких, що $(i_k, i_l) \in U$, $i_k \in I_r$, $i_l \notin I_r$, а $I_{r2} = \{\cdots, i_m, \cdots\}$ – множина непозначених вершин, таких, що $(i_m, i_k) \in U$, $i_m \notin I_r$, $i_k \in I_r$. Позначками $(N_{i_l}, \theta_{i_l})$, $N_{i_l} = i_k$, $\theta_{i_l} = \min\{\theta_{i_k}, r_{i_k i_l} - x_{i_k i_l}\}$ позначимо ті вершини із $I_{r1}$, для яких $r_{i_k i_l} - x_{i_k i_l} > 0$. Позначками $(N_{i_m}, \theta_{i_m})$, $N_{i_m} = -i_k$, $\theta_{i_m} = \min\{\theta_{i_k}, x_{i_m i_k}\}$ позначимо ті вершини із $I_{r2}$, для яких $x_{i_m i_k} > 0$. Доповнимо множину $I_r$ щойно позначеними вершинами. Отримаємо нову множину вершин $I_{r+1}$. Процес "розширення" цієї множини продовжуємо доти, поки це можливо. Нехай, $I^*$– множина позначених вершин, яку неможливо "розширити". Можливі випадки: 1) вершина $n$ (витік) не належить множині $I^*$; 2) вершина $n$ (витік) належить множині $I^*$. У першому випадку потік $\{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ максимальний, а переріз $V(I^*) = \{(i,j) : i \in I^*, j \notin I^*, (i,j) \in U\}$ мінімальний. Алгоритм закінчено. У другому випадку потік $\{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ можна поліпшити. Дійсно, за позначками вершин легко побудувати послідовність дуг (ланцюг), який з'єднує джерело та витік, позначимо його $L_{1n}$. Очевидно, що $L_{1n} \in U$. Побудуємо новий допустимий потік $\{x'_{ij}, (i,j) \in U\}$ за правилами:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, (i,j) \notin L_{1n}, (i,j) \in U, \\ x_{ij} + \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j > 0, \\ x_{ij} - \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що при цьому величина нового потоку $d' = d + \theta_n$. Забираємо всі позначки з вершин та переходимо до наступного $r+1$-го кроку.

Приклад 2. Методом Форда–Фалкерсона побудувати максимальний потік на мережі та визначити її мінімальний переріз. Мережа задається таблицею:

| $(i,j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Розв'язування. Вершину $i$ з позначками $N_i$ та $\theta_i$ будемо позначати $i(N_i, \theta_i)$.

Як початковий потік розглянемо нульовий потік

| $(i,j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{ij}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Позначимо вершини мережі згідно з алгоритмом: 1(0, $\infty$), 2(1,3), 3(1,4), 4(1,5), 5(2,2), 6(2,1), 7(2,1), 8(5,2). Вершина 8 (витік) позначена, $\theta_8 = 2$, $L_{1,8} = \{(1,2),(2,5),(5,8)\}$. Будуємо новий потік.

| $(i,j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{ij}$ | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Величина потоку дорівнює 2. Позначимо вершини мережі: 1(0, $\infty$), 2(1,1), 3(1,4), 4(1,5), 5(4,2), 6(2,1), 7(3,2), 8(5,2). Вершина 8 (витік) позначена, $\theta_8 = 2$, $L_{1,8} = \{(1,4),(4,5),(5,8)\}$. Будуємо новий потік.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{ij}$ | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 0 | 0 |

Через декілька ітерацій, отримаємо потік

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{ij}$ | 3 | 4 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 | 3 |

Величина потоку дорівнює 9. Позначимо вершини мережі: $1(0,\infty)$, 4(1,3), 3(6,2). Інші вершини мережі позначити неможливо. Отже, $I^* = \{1,3,4,6\}$. Витік не належить множині $I^*$. Отриманий потік є максимальним. Будуємо мінімальний переріз $r(I^*) = \{(1,2),(3,7),(4,5),(6,8)\}$. Його пропускна здатність $r^* = 9$ і збігається з величиною максимального потоку. Зауважимо, що при невеликій кількості вершин розв'язування задачі можна проводити з допомогою графічного зображення мережі (у вигляді орієнтованого графа).

***Література:*** [1, 2, 3, 4]

***Завдання..***

1. Методом Мінті знайти найкоротші шляхи до кожної з вершин мережі з початком у вершині 1.

2. Методом Форда-Фалкерсона знайти максимальний потік та мінімальний переріз на мережі.

***Варіанти завдань***

1.

| $(i, j$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-5 | 4-6 | 5-7 | 6-7 | 6-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 10 | 8 | 7 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 10 | 20 | 3 | 6 | 8 |

2.

| $(i, j$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 3-4 | 3-5 | 3-6 | 4-6 | 4-8 | 5-6 | 5-7 | 6-8 | 7-2 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 2 | 6 | 7 | 3 | 4 | 8 | 9 | 10 | 4 | 6 | 2 | 5 | 12 |

3.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-3 | 3-4 | 3-5 | 4-5 | 3-6 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 5-6 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 2 | 6 | 7 | 3 | 4 | 8 | 9 | 10 | 4 | 6 | 2 | 5 | 8 |



4.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 6-7 | 6-8 | 7-4 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 5 | 4 | 2 | 7 | 9 | 8 | 3 | 8 | 1 | 5 | 8 | 4 | 15 |

5.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 4 | 3 | 9 | 7 | 6 | 3 | 8 | 14 | 6 | 4 | 7 | 5 | 5 |

6.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-5 | 2-4 | 2-7 | 3-4 | 3-6 | 4-7 | 5-6 | 5-8 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 6 | 7 | 8 | 10 | 7 | 4 | 5 | 3 | 9 | 15 | 6 | 11 | 4 |

7.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 3-5 | 4-6 | 5-7 | 6-7 | 6-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 6 | 6 | 5 | 3 | 3 | 3 | 4 | 2 | 7 | 12 | 2 | 1 | 5 |

8.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-5 | 2-3 | 2-4 | 3-4 | 3-8 | 4-5 | 4-6 | 5-6 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 4 | 18 | 7 | 11 | 5 | 37 | 9 | 3 | 8 | 6 | 14 | 10 | 5 |

9.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-4 | 2-3 | 2-6 | 3-6 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 5-8 | 6-7 | 7-8 | 7-2 | 5-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 7 | 10 | 5 | 13 | 9 | 6 | 8 | 20 | 4 | 20 | 17 | 8 | 6 |

10.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 3-5 | 3-6 | 4-6 | 4-8 | 5-6 | 5-7 | 5-8 | 6-7 | 7-8 | 7-4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 4 | 5 | 8 | 11 | 6 | 7 | 5 |

11.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 3-5 | 2-7 | 4-6 | 5-7 | 6-7 | 6-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 9 | 7 | 6 | 2 | 8 | 4 | 6 | 1 | 7 | 2 | 8 | 5 | 4 |

12.

| Дуга | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-7 | 7-8 | 6-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 10 | 4 | 2 | 8 | 5 | 7 | 6 | 3 | 4 | 11 | 5 | 8 | 7 |

13.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-6 | 3-5 | 3-6 | 4-6 | 4-8 | 5-6 | 5-7 | 6-7 | 7-8 | 6-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 13 | 16 | 18 | 20 | 19 | 21 | 10 | 23 | 8 | 13 | 11 | 18 | 15 |

14.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 10 | 8 | 4 | 14 | 18 | 12 | 6 | 16 | 2 | 10 | 16 | 8 | 4 |

15.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-6 | 3-4 | 3-7 | 4-5 | 5-6 | 5-7 | 5-8 | 6-8 | 7-8 | 7-4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 7 | 5 | 3 | 12 | 6 | 11 | 8 | 10 | 4 | 12 | 7 | 9 | 6 |

16.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-6 | 3-5 | 3-6 | 4-7 | 4-8 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 7-3 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 6 | 9 | 11 | 13 | 12 | 14 | 3 | 16 | 2 | 6 | 4 | 11 | 5 |

17.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 8 | 6 | 11 | 14 | 12 | 6 | 5 | 12 | 8 | 7 | 10 | 14 | 11 |

18.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-3 | 3-4 | 3-5 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 5-6 | 6-7 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 7 | 11 | 12 | 8 | 13 | 14 | 15 | 9 | 11 | 7 | 10 | 8 | 12 |

19.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-4 | 2-3 | 3-4 | 2-6 | 3-7 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 5-8 | 6-7 | 6-8 | 7-8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 3 | 6 | 2 | 4 | 8 | 5 | 7 | 6 | 4 | 9 | 11 | 8 | 5 |



20.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-5 | 2-3 | 2-7 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 5-6 | 5-8 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 6 | 12 | 4 | 5 | 8 | 7 | 6 | 11 | 6 |

21.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-7 | 3-4 | 3-6 | 4-5 | 4-6 | 5-7 | 5-8 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 7 | 9 | 4 | 6 | 2 | 5 | 8 | 7 | 4 |

22.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-5 | 2-6 | 3-4 | 3-6 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 7 | 8 | 5 | 3 | 4 | 2 | 6 | 8 | 7 | 2 | 5 | 8 | 9 |

23.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 3-6 | 3-7 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 5-7 | 6-7 | 6-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 2 | 3 | 5 | 4 | 7 | 9 | 8 | 5 | 4 | 6 | 7 | 11 | 5 |

24.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-5 | 2-3 | 2-5 | 2-6 | 3-4 | 4-6 | 4-7 | 4-8 | 5-8 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 11 | 10 | 15 | 14 | 12 | 19 | 18 | 17 | 10 | 22 | 13 | 16 | 10 |

25.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-5 | 5-7 | 5-6 | 7-8 | 3-7 | 6-8 | 4-7 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 4 | 8 | 7 | 9 | 6 | 3 | 4 | 5 | 8 | 7 | 2 | 6 | 8 |

26.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 2-7 | 4-6 | 5-7 | 6-7 | 6-3 | 3-7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 4 | 8 | 9 | 7 | 5 | 8 | 6 | 4 | 7 | 9 | 5 | 3 | 7 |

27.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 10 | 15 | 17 | 18 | 14 | 12 | 15 | 16 | 19 | 17 | 14 | 10 | 12 |

28.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-5 | 2-3 | 2-4 | 3-4 | 3-8 | 4-5 | 4-6 | 5-6 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 4 | 11 | 18 | 8 | 7 | 9 | 6 | 5 | 3 | 4 | 11 | 10 | 5 |

29.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-5 | 3-4 | 4-5 | 4-6 | 4-8 | 5-7 | 6-7 | 6-8 | 7-8 | 7-3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 12 | 14 | 13 | 10 | 14 | 11 | 21 | 10 |

30.

| $(i, j)$ | 1-2 | 1-3 | 2-4 | 2-6 | 3-4 | 3-7 | 4-5 | 4-7 | 5-6 | 5-7 | 6-8 | 7-8 | 7-2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_{ij}$ | 7 | 5 | 3 | 9 | 4 | 6 | 2 | 8 | 4 | 7 | 5 | 9 | 6 |

***Додаткові запитання***

1. Дайте визначення потоку на мережі.
2. Сформулюйте умови, при яких мережа допускає потік.
3. Наведіть приклад мережі, яка не допускає жодного потоку.
4. За заданим мінімальним перерізом мережі знайдіть відповідний максимальний потік.

## Індивідуальне завдання 9. Цілочислове програмування: угорський алгоритм

***Мета:*** навчитися розв'язувати задачу про призначення.

***Теоретичні відомості.*** Задача про призначення (або задача про оптимальний розподіл механізмів на роботи) є важливим випадком раніше розглянутих ТЗБО, з одного боку, та однією з найпростіших задач цілочислового програмування (т.зв. задачі з бульовими змінними) – з іншого. Постановка задачі: нехай потрібно виконати $n$ різних робіт і є $n$ різних механізмів для їх виконання, причому кожен механізм може бути використаним для виконання кожної з робіт. Продуктивність роботи механізму залежить від тієї роботи, на виконання якої він призначений. Задача полягає в такому розподілі механізмів по роботах, при якому їх сумарна продуктивність буде максимальною. Позначимо величиною $c_{i,j}$ продуктивність $i$- механізму при виконанні $j$- роботи. Сукупність цих величин утворює матрицю



$C = \{c_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, яку назвемо матрицею продуктивності. Розглянемо матрицю $X = \{x_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ як один із можливих варіантів розподілу механізмів на роботи, де $x_{i,j} = 1$, якщо $i$- механізм призначено на $j$- роботу, та $x_{i,j} = 0$ – в іншому випадку. В цих позначеннях математична модель задачі про призначення має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \max, \tag{9.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{9.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9.3}$$

$$x_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}. \tag{9.4}$$

Очевидно, що задача (9.1-9.4) не є ТЗБО за рахунок умови (9.4). Однак, якщо її замінити умовою

$$x_{i,j} \ge 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\ , \tag{9.5}$$

то можна легко показати, що множини розв'язків обох задач збігаються.

Угорський метод розв'язування задачі (9.1)-(9.4) використовує поняття еквівалентних матриць та їх властивості. Дві матриці $C = \{c_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ і $D = \{d_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ назвемо еквівалентними, якщо одна з них отримується з іншої додаванням до елементів кожного рядка одного й того ж числа (можливо, для різних рядків ці числа різні) та додаванням до елементів кожного стовпчика одного й того ж числа (можливо, для різних стовпчиків ці числа різні), тобто $d_{i,j} = c_{i,j} + e_i + f_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$ Має місце теорема: множини розв'язків двох задач про призначення з еквівалентними матрицями продуктивностей збігаються. Ця теорема дозволяє переходити в задачі про призначення від однієї матриці продуктивності до іншої, їй еквівалентної.

Перейдемо, спочатку, до еквівалентної задачі на мінімум із матрицею продуктивності $D$ за допомогою попередніх перетворень

$$C=\{c_{i,j}\}\xrightarrow{(1)}C'=\{c'_{i,j}=\max_{i} c_{i,j}-c_{i,j}\}\xrightarrow{(2)}D=\{d_{i,j}=c'_{i,j}-\min_{j} c'_{i,j}\}$$

У результаті отримаємо матрицю з невід'ємних елементів, у кожному рядку та в кожному стовпчику якої є хоча б один нуль. Початкова задача звелась до вибору в матриці $D$ (або в еквівалентній їй матриці) $n$-нулів по одному в кожному рядку та кожному стовпчику.

*Алгоритм :*

1. Позначимо, наприклад *, який-небудь нуль у першому стовпчику матриці $D$, далі позначимо нуль у другому стовпчику так, щоб він не лежав у тому ж рядку, що й раніше позначений, потім у третьому і т.д., поки не розглянемо всі стовпчики.
2. Якщо кількість нулів із * дорівнює числу $n$, то алгоритм закінчено. У розв'язку на місці нулів із * стоять 1, решта елементів розв'язку – 0.
3. Якщо нулів із * менше $n$, то позначимо знаком + ті стовпчики матриці, в яких є нуль із *, ці стовпчики вважаємо зайнятими. В алгоритмі будуть з'являтися зайняті рядки. Елементи матриці, які знаходяться на перетині незайнятого рядка та незайнятого стовпчика, вважаємо незайнятими, всі інші – зайнятими.
4. Якщо незайнятих нулів немає, то переходимо до п. 8.
5. Якщо незайняті нулі є, то вибираємо перший із них, проглядаючи почергово рядки матриці зліва направо. Позначимо його штрихом ('). Якщо в його рядку немає нуля із *, то переходимо до п. 7.
6. Якщо нуль із * є, то звільняємо (знімаємо знак +) стовпчик, в якому він знаходиться, та займаємо (позначимо знаком +) цей рядок. Переходимо до п.4.
7. Починаючи зі щойно позначеного штрихом нуля будуємо ланцюжок із нулів: від нуля з штрихом по стовпчику до нуля з *, від нього по рядку до нуля з штрихом і т.д., поки це можливо. Колись (на якомусь нулі зі штрихом) ланцюжок обірветься. Знімаємо всі * в нулів із ланцюжка



та міняємо всі штрихи на * в ланцюжку. Новий набір нулів із * містить на один нуль із * більше, ніж попередній. Знімаємо всі позначки, крім *, та переходимо до п. 2.

8. Шукаємо мінімальний елемент серед незайнятих елементів матриці й віднімаємо його від елементів усіх незайнятих рядків та додаємо до елементів усіх зайнятих стовпчиків. Отримуємо матрицю, в якій є незайняті нулі. Переходимо до п. 5.

***Література:*** [1, 2].

***Завдання.*** Задано таблицю, елементами якої є продуктивність (парні номери варіантів) чи затрати часу (непарні номери варіантів) механізму $i$ на роботі $j$. Знайти оптимальний розподіл механізмів на роботи.

***Варіанти завдань***

1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 9 | 6 | 9 | 5 | 6 |
| 7 | 2 | 8 | 4 | 4 | 8 | 7 |
| 6 | 3 | 5 | 5 | 10 | 1 | 5 |
| 1 | 4 | 4 | 2 | 10 | 2 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 10 | 3 | 1 |
| 7 | 11 | 8 | 11 | 11 | 9 | 2 |
| 11 | 2 | 10 | 2 | 2 | 4 | 5 |

2.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 4 | 8 | 8 | 6 | 7 |
| 5 | 2 | 1 | 6 | 9 | 9 | 0 |
| 1 | 4 | 10 | 1 | 7 | 1 | 7 |
| 10 | 4 | 1 | 2 | 5 | 2 | 7 |
| 1 | 3 | 10 | 10 | 10 | 1 | 4 |
| 4 | 6 | 11 | 3 | 7 | 3 | 0 |
| 1 | 1 | 5 | 9 | 8 | 11 | 1 |

3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 10 | 5 | 9 | 11 | 8 | 11 |
| 6 | 8 | 11 | 8 | 18 | 18 | 20 |
| 7 | 13 | 10 | 3 | 4 | 14 | 18 |
| 9 | 5 | 6 | 21 | 12 | 17 | 22 |
| 5 | 4 | 11 | 6 | 13 | 14 | 11 |
| 17 | 7 | 12 | 13 | 19 | 17 | 5 |
| 13 | 0 | 8 | 8 | 10 | 12 | 17 |

4.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 6 | 10 | 13 | 8 | 9 |
| 10 | 6 | 7 | 11 | 8 | 12 | 11 |
| 11 | 5 | 8 | 12 | 4 | 18 | 4 |
| 12 | 6 | 9 | 8 | 5 | 8 | 5 |
| 9 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 11 | 8 | 7 | 4 | 7 | 2 | 3 |
| 6 | 5 | 8 | 11 | 4 | 5 | 9 |

5.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 9 | 10 | 7 | 12 | 8 |
| 9 | 7 | 11 | 6 | 8 | 11 | 10 |
| 8 | 10 | 7 | 8 | 10 | 7 | 4 |
| 5 | 6 | 10 | 5 | 6 | 11 | 2 |
| 4 | 9 | 8 | 9 | 4 | 1 | 2 |
| 5 | 6 | 10 | 11 | 10 | 12 | 5 |
| 4 | 11 | 5 | 4 | 5 | 12 | 3 |

6.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 9 | 5 | 6 | 14 | 6 |
| 8 | 12 | 4 | 13 | 16 | 15 | 16 |
| 2 | 15 | 8 | 10 | 17 | 7 | 9 |
| 14 | 8 | 9 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 5 | 4 | 11 | 10 | 12 | 6 |
| 10 | 9 | 11 | 5 | 6 | 12 | 8 |
| 7 | 13 | 8 | 12 | 8 | 11 | 10 |

7.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 10 | 8 | 11 | 7 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 5 | 6 | 10 | 18 | 4 |
| 8 | 11 | 9 | 2 | 16 | 3 | 6 |
| 5 | 2 | 5 | 14 | 3 | 10 | 5 |
| 8 | 7 | 6 | 7 | 13 | 8 | 14 |
| 15 | 18 | 5 | 9 | 12 | 6 | 10 |
| 7 | 15 | 5 | 9 | 2 | 6 | 10 |

8.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 5 | 6 | 10 | 2 | 7 |
| 9 | 5 | 7 | 2 | 4 | 8 | 4 |
| 1 | 10 | 5 | 6 | 12 | 9 | 6 |
| 2 | 4 | 7 | 13 | 10 | 8 | 5 |
| 12 | 3 | 11 | 9 | 12 | 10 | 10 |
| 5 | 13 | 8 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 7 | 6 | 4 | 12 | 5 | 6 | 7 |

9.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 4 | 6 | 7 | 8 | 11 | 5 |
| 13 | 5 | 12 | 13 | 5 | 6 | 8 |
| 10 | 13 | 14 | 13 | 17 | 4 | 2 |
| 6 | 5 | 6 | 5 | 4 | 15 | 3 |
| 12 | 13 | 1 | 13 | 12 | 7 | 1 |
| 11 | 21 | 1 | 21 | 1 | 21 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 4 | 10 | 9 |

10.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 4 | 5 | 12 | 3 | 6 | 14 |
| 7 | 1 | 9 | 4 | 11 | 2 | 10 |
| 12 | 4 | 7 | 6 | 1 | 8 | 7 |
| 8 | 9 | 9 | 7 | 10 | 3 | 5 |
| 7 | 1 | 1 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 1 | 41 | 1 |
| 15 | 3 | 3 | 13 | 5 | 6 | 7 |

11.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 1 | 4 | 5 | 17 | 2 |
| 21 | 5 | 6 | 7 | 21 | 5 | 6 |
| 1 | 15 | 1 | 4 | 5 | 15 | 2 |
| 14 | 2 | 3 | 13 | 6 | 7 | 14 |
| 21 | 17 | 6 | 7 | 5 | 17 | 2 |
| 14 | 2 | 5 | 10 | 7 | 6 | 10 |
| 3 | 10 | 4 | 12 | 12 | 20 | 4 |

12.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 14 | 12 | 2 | 5 | 5 |
| 1 | 2 | 6 | 7 | 6 | 7 | 5 |
| 12 | 12 | 13 | 12 | 3 | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 15 | 20 | 6 | 7 | 5 |
| 12 | 12 | 14 | 12 | 3 | 5 | 5 |
| 4 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 |
| 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 14 | 15 |



13.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 8 | 9 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 7 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 1 | 6 | 7 | 8 | 9 | 4 | 5 |
| 5 | 4 | 5 | 8 | 6 | 4 | 1 |
| 9 | 10 | 8 | 9 | 5 | 13 | 9 |
| 6 | 8 | 11 | 12 | 7 | 8 | 9 |
| 9 | 10 | 11 | 5 | 5 | 7 | 1 |

14.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 7 | 10 | 2 | 3 | 4 |
| 8 | 2 | 5 | 4 | 7 | 10 | 1 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 6 | 7 | 10 | 1 | 3 | 7 |
| 4 | 8 | 12 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 10 | 10 | 1 | 2 | 5 | 6 | 9 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 | 4 |

15.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 4 | 2 | 10 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 10 | 4 | 5 | 8 | 9 |
| 10 | 10 | 10 | 4 | 5 | 8 | 9 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 7 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 10 | 4 | 5 | 1 | 1 |
| 7 | 8 | 4 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| 9 | 10 | 5 | 8 | 11 | 4 | 3 |

16.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 10 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| 4 | 6 | 7 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 10 | 5 | 10 | 5 | 10 | 6 | 12 |
| 3 | 6 | 4 | 4 | 5 | 10 | 7 |
| 4 | 4 | 7 | 7 | 5 | 4 | 7 |
| 1 | 3 | 12 | 1 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 6 |

17.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| 11 | 2 | 4 | 7 | 10 | 7 | 9 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 4 | 2 | 8 |
| 11 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| 13 | 4 | 5 | 7 | 10 | 7 | 9 |
| 7 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 6 |
| 5 | 4 | 4 | 4 | 10 | 1 | 5 |

18.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 4 | 7 | 5 | 5 | 8 |
| 7 | 8 | 4 | 5 | 6 | 6 | 9 |
| 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 9 | 9 | 9 |
| 3 | 2 | 4 | 7 | 5 | 5 | 5 |
| 7 | 8 | 5 | 7 | 8 | 5 | 5 |
| 1 | 7 | 2 | 1 | 5 | 4 | 5 |

19.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 12 | 4 | 8 | 10 | 12 |
| 5 | 4 | 10 | 11 | 12 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 8 | 7 | 6 | 10 |
| 6 | 7 | 6 | 7 | 7 | 4 | 5 |
| 4 | 4 | 6 | 4 | 8 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 8 | 5 | 2 | 4 | 6 | 9 | 7 |

20.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 8 | 9 | 8 | 12 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 8 | 2 |
| 4 | 6 | 4 | 5 | 4 | 1 | 2 |
| 5 | 5 | 7 | 8 | 9 | 1 | 11 |
| 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 8 | 9 | 8 | 9 | 4 | 8 | 2 |

21.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 7 | 5 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 2 | 1 |
| 3 | 7 | 5 | 9 | 4 | 8 | 6 |
| 4 | 5 | 7 | 9 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 7 | 5 | 4 | 8 | 4 | 6 |
| 2 | 4 | 8 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 8 |

22.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 15 | 14 | 18 | 7 | 6 |
| 1 | 8 | 4 | 10 | 11 | 10 | 5 |
| 4 | 11 | 4 | 14 | 11 | 7 | 6 |
| 11 | 2 | 4 | 5 | 8 | 6 | 9 |
| 4 | 8 | 7 | 3 | 1 | 9 | 5 |
| 10 | 8 | 5 | 4 | 8 | 5 | 9 |
| 4 | 6 | 7 | 9 | 8 | 2 | 4 |

23.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 9 | 1 | 3 | 4 | 6 |
| 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| 3 | 7 | 9 | 1 | 4 | 6 | 8 |
| 7 | 3 | 9 | 4 | 8 | 6 | 4 |
| 4 | 9 | 7 | 6 | 2 | 7 | 9 |
| 5 | 6 | 4 | 7 | 9 | 7 | 8 |
| 6 | 8 | 7 | 9 | 7 | 8 | 7 |

24.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 7 | 3 | 4 | 6 | 8 |
| 4 | 8 | 6 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| 4 | 8 | 6 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| 5 | 8 | 2 | 4 | 6 | 9 | 7 |
| 4 | 8 | 6 | 6 | 5 | 4 | 7 |
| 8 | 6 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 |
| 8 | 7 | 9 | 4 | 8 | 7 | 5 |

25.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 7 | 5 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 8 | 7 | 9 | 5 |
| 9 | 5 | 8 | 4 | 7 | 6 | 8 |
| 4 | 9 | 7 | 6 | 5 | 8 | 6 |
| 3 | 4 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 |
| 3 | 6 | 8 | 7 | 4 | 9 | 5 |
| 4 | 6 | 7 | 9 | 8 | 5 | 4 |

26.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 8 | 7 | 9 | 2 |
| 2 | 6 | 4 | 7 | 9 | 8 | 7 |
| 3 | 6 | 5 | 8 | 9 | 4 | 7 |
| 6 | 4 | 8 | 5 | 7 | 9 | 5 |
| 2 | 6 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 5 | 7 | 4 | 4 | 5 | 7 |
| 2 | 6 | 8 | 4 | 3 | 9 | 7 |

27.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 4 | 6 | 1 | 3 | 8 |
| 2 | 4 | 6 | 5 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 6 | 7 | 8 | 5 |
| 6 | 2 | 3 | 8 | 4 | 9 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 9 | 8 | 7 | 5 |
| 4 | 8 | 6 | 5 | 7 | 9 | 8 |
| 6 | 8 | 5 | 4 | 7 | 9 | 5 |

28.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 5 | 4 | 7 | 9 | 6 |
| 3 | 6 | 9 | 8 | 7 | 5 | 4 |
| 1 | 5 | 9 | 3 | 5 | 7 | 4 |
| 2 | 5 | 8 | 9 | 6 | 3 | 7 |
| 6 | 3 | 9 | 8 | 7 | 4 | 6 |
| 1 | 5 | 9 | 7 | 5 | 3 | 4 |
| 6 | 9 | 7 | 4 | 5 | 8 | 5 |



29.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 7 | 5 | 8 | 4 | 6 |
| 2 | 8 | 4 | 6 | 9 | 7 | 8 |
| 4 | 9 | 7 | 6 | 5 | 8 | 5 |
| 6 | 8 | 7 | 9 | 4 | 6 | 8 |
| 6 | 8 | 4 | 7 | 9 | 5 | 8 |
| 6 | 8 | 7 | 2 | 9 | 4 | 6 |
| 3 | 7 | 5 | 9 | 4 | 6 | 8 |

30.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 7 | 9 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 6 | 4 | 8 | 9 | 6 | 5 |
| 3 | 3 | 9 | 8 | 6 | 7 | 4 |
| 5 | 8 | 7 | 6 | 4 | 8 | 4 |
| 4 | 4 | 8 | 6 | 7 | 9 | 5 |
| 5 | 7 | 9 | 6 | 4 | 8 | 2 |
| 4 | 6 | 8 | 7 | 5 | 8 | 8 |

***Додаткові запитання***

1. Чи може задача про призначення не мати розв’язків?
2. Скільки розв’язків може мати задача про призначення?
3. Обґрунтуйте твердження про еквівалентність множин розв’язків ТЗБО та задачі про призначення.
4. Наведіть приклад еквівалентних матриць.

## *Індивідуальне завдання 10. Цілочислове програмування: перший алгоритм Р. Гоморі.*

***Мета:*** навчитися розв’язувати задачі цілочислового програмування за допомогою першого алгоритму Р. Гоморі.

***Теоретичні відомості.*** Задача цілочислового лінійного програмування формулюється аналогічно ЗЗЛП, однак при цьому містить додаткову вимогу. Зміст цієї вимоги полягає в тому, що значення всіх (або частини) змінних – цілі числа. Перший алгоритм Р. Гоморі застосовується для розв’язання задач цілочислового програмування, в яких ця вимога дійсна для всіх змінних. Ідея першого алгоритму Р. Гоморі полягає ось у чому. За допомогою симплекс-методу знаходимо розв’язок задачі без урахування цієї вимоги. Якщо компоненти розв’язку цілі числа – алгоритм завершено. Якщо хоча б одна компонента розв’язку неціле число, то слід побудувати додаткове обмеження, приєднати його до обмежень попередньої задачі та розв’язати нову задачу. Процес побудови та приєднання додаткових обмежень продовжують доти, поки або не буде знайдено розв’язку, або не буде встановлено, що задача не має розв’язку в цілих числах.

Побудова додаткового обмеження. Нехай розв'язок ЗЗЛП $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)^T$ отримано в базисі $A_1$, $A_2$, …, $A_m$. Тоді остання симплекс-таблиця має вигляд

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | … | 0 | … | 0 | $x_{1,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{1,j}$ | $\cdots$ | $x_{1,n}$ | $x_1$ |
| 0 | 1 | … | 0 | … | 0 | $x_{2,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{2,j}$ | $\cdots$ | $x_{2,n}$ | $x_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | 1 | … | 0 | $x_{i,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{i,j}$ | $\cdots$ | $x_{i,n}$ | $x_i$ |
| 0 | 0 | … | 0 | … | 0 | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | … | 0 | … | 1 | $x_{m,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{m,j}$ | $\cdots$ | $x_{m,n}$ | $x_m$ |

Припустимо, що $x_i$ – неціле. Тоді деякі з $x_{i,j}$ також нецілі (у протилежному випадку задача не має цілочислового розв'язку). Позначимо $q_i = x_i - [x_i]$, $q_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}]$, $j = \overline{1,n}$. Очевидно, що введені в такий спосіб величини невід'ємні. Невід'ємна також різниця $q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in} - q_i \ge 0$. Перетворимо цю нерівність у рівність (віднімаючи від лівої частини невід'ємну змінну $x_{n+1}$), помножимо рівняння на –1, допишемо рядок до останньої симплекс-таблиці та, застосовуючи двоїстий симплекс-метод, знайдемо новий розв'язок. Якщо й він не буде цілочисловим, процес побудови додаткового обмеження повторюємо.

Зауважимо: якщо в розв'язку є кілька нецілих $x_j$, то додаткове обмеження складають для одного з них.

Приклад. Розглянемо задачу: знайти максимальне значення функції $L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3$

при заданих обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = \overline{1,3}, x_j$ - цілі числа.



Розв'язування. Незважаючи на останню умову, симплекс-методом знайдемо розв'язок $x^* = (9/5, 23/10, 7/10)^T$, при цьому кінцева симплекс-таблиця має вигляд

| $x_{баз}$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\beta_i$ | $\theta_l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $2/5$ | $-1/5$ | 0 | $9/5$ | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-1/10$ | $3/10$ | 0 | $23/10$ | |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-9/10$ | $-3/10$ | 1 | $7/10$ | |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | $1/5$ | $2/5$ | 1 | | |

Побудуємо додаткове обмеження, наприклад за змінною $x_3$. Обчислимо необхідні для цього сталі $q_3 = 7/10$, $q_{3,4} = 1/10$, $q_{3,5} = 7/10$, $q_{3,6} = 0$ та запишемо нерівність $1/10\, x_4 + 7/10\, x_5 - 7/10 \ge 0$, яку перетворимо в рівняння $-1/10\, x_4 - 7/10\, x_5 + x_7 = -7/10$.

Тепер уведемо в останню симплекс-таблицю отримане додаткове обмеження й проведемо одну ітерацію двоїстого симплекс-методу (провідний елемент виділено рамкою).

| $x_{баз}$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $2/5$ | $-1/5$ | 0 | 0 | $9/5$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-1/10$ | $3/10$ | 0 | 0 | $23/10$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-9/10$ | $-3/10$ | 1 | 0 | $7/10$ |
| $x_7$ | 0 | 0 | 0 | $-1/10$ | $\boxed{-7/10}$ | 0 | 1 | $-7/10$ |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | $1/5$ | $2/5$ | 1 | 0 | |

| $\Delta_j \diagup -\alpha_{i,j}$ | | | | 2 | $4/7$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | | | | | | 2 |
| $x_2$ | | | | | | | | 2 |
| $x_3$ | | | | | | | | 1 |
| $x_5$ | | | | | | | | 1 |
| $\Delta_j$ | 0 | 0 | 0 | $1/7$ | 0 | 1 | $4/7$ | |

Оскільки відносні оцінки змінних невід'ємні, а значення змінних – цілі числа, задачу розв'язано. Отже, $X^* = (2,2,1)^T$, при цьому $L(X^*) = 19$.

***Література:*** [2,с.215; 5,с.248]

***Завдання.*** За допомогою першого алгоритму Р.Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

***Варіанти завдань***

1. $L(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 81, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3.$

2. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

3. $L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3.$

4. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$



5. $L(x) = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

6. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

7. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

8. $L(x) = x_1 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4.$

9. $L(x) = x_1 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4,5.$

10. $L(x) = 2x_1 - 3x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = \overline{1,5}.$

11. $L(x) = x_1 - x_2 - x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4.$

12. $L(x) = x_1 + x_5 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = \overline{1,5}.$

13. $L(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2,3,4.$

14. $L(x) = -3x_1 + 16x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 - x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0, x_j - цілі, j = 1,2.$

15. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

16. $L(x) = x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

17. $L(x) = 5x_1 + 6x_3 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

18. $L(x) = 6x_2 + 6x_3 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

19. $L(x) = 2x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

20. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

21. $L(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

22. $L(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 4, \\ 5x_1 - x_3 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

23. $L(x) = 6x_1 + 4x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

24. $L(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$



25. $L(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3,4.$

26. $L(x) = 3x_1 + 3x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3,4.$

27. $L(x) = 3x_1 - x_3 \to \min,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 5, \\ 5x_1 - x_2 \le 11, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge -4, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

28. $L(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ 3x_1 - 2x_3 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 0, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2,3.$

29. $L(x) = 2x_1 - 2x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

30. $L(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 13x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + x_2 \ge 5, \end{cases}\quad x_j \ge 0, x_j - \text{цілі}, j = 1,2.$

***Додаткові запитання***

1. Як побудувати додаткове обмеження?
2. Чому додаткову змінну вводять у базис?
3. Наведіть приклад цілочислової задачі, яка не має розв’язку.
4. Якими будуть Ваші дії у випадку, коли після ітерації двоїстого СМ відносна оцінка змінної стане від’ємною?
5. Як боротися зі зростанням розмірності в алгоритмі Р. Гоморі?

## *Індивідуальне завдання 11. Метод розгалужень та оцінок в задачі комівояжера*

***Мета:*** засвоїти комбінаторний підхід до розв’язування задач цілочислового програмування.

***Теоретичні відомості.*** Алгоритм методу розгалужень та оцінок вивчається студентами самостійно.

***Література:*** [2,с.262].

***Завдання.*** Методом розгалужень та оцінок розв’язати задачу.

***Варіанти завдань***

1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 31 | 15 | 19 | 8 | 55 |
| 19 | ∞ | 22 | 31 | 7 | 35 |
| 25 | 43 | ∞ | 53 | 57 | 16 |
| 5 | 50 | 49 | ∞ | 39 | 9 |
| 24 | 24 | 33 | 5 | ∞ | 14 |
| 34 | 26 | 6 | 3 | 36 | ∞ |

2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 19 | 25 | 11 | 2 | 35 |
| 37 | ∞ | 26 | 58 | 21 | 43 |
| 10 | 50 | ∞ | 39 | 22 | 3 |
| 38 | 39 | 24 | ∞ | 38 | 45 |
| 27 | 9 | 32 | 9 | ∞ | 2 |
| 33 | 48 | 60 | 53 | 1 | ∞ |

3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 39 | 45 | 2 | 51 | 33 |
| 30 | ∞ | 20 | 33 | 40 | 53 |
| 54 | 16 | ∞ | 55 | 22 | 56 |
| 19 | 36 | 25 | ∞ | 18 | 43 |
| 29 | 8 | 8 | 12 | ∞ | 25 |
| 16 | 47 | 31 | 14 | 8 | ∞ |

4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 41 | 27 | 54 | 46 | 5 |
| 42 | ∞ | 11 | 32 | 58 | 21 |
| 36 | 5 | ∞ | 33 | 22 | 33 |
| 46 | 24 | 59 | ∞ | 49 | 59 |
| 48 | 58 | 11 | 44 | ∞ | 47 |
| 26 | 50 | 35 | 19 | 27 | ∞ |

5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 6 | 56 | 35 | 48 | 29 |
| 34 | ∞ | 46 | 46 | 55 | 26 |
| 29 | 31 | ∞ | 32 | 13 | 42 |
| 26 | 34 | 12 | ∞ | 17 | 7 |
| 38 | 35 | 40 | 13 | ∞ | 47 |
| 60 | 25 | 59 | 36 | 31 | ∞ |

6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 22 | 26 | 56 | 38 | 60 |
| 34 | ∞ | 12 | 51 | 37 | 27 |
| 45 | 33 | ∞ | 44 | 47 | 37 |
| 39 | 7 | 16 | ∞ | 57 | 8 |
| 35 | 56 | 40 | 58 | ∞ | 27 |
| 9 | 20 | 36 | 31 | 18 | ∞ |

7.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 14 | 40 | 33 | 16 | 51 |
| 48 | ∞ | 34 | 4 | 11 | 24 |
| 57 | 35 | ∞ | 24 | 38 | 52 |
| 30 | 50 | 44 | ∞ | 9 | 31 |
| 18 | 42 | 24 | 31 | ∞ | 30 |
| 1 | 38 | 31 | 19 | 32 | ∞ |

8.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 56 | 48 | 39 | 3 | 40 |
| 47 | ∞ | 50 | 4 | 10 | 49 |
| 48 | 50 | ∞ | 42 | 19 | 16 |
| 24 | 44 | 47 | ∞ | 23 | 33 |
| 38 | 17 | 6 | 51 | ∞ | 26 |
| 29 | 59 | 55 | 34 | 18 | ∞ |



9.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 58 | 28 | 18 | 2 | 50 |
| 11 | ∞ | 18 | 47 | 14 | 49 |
| 49 | 3 | ∞ | 24 | 35 | 51 |
| 1 | 46 | 50 | ∞ | 45 | 15 |
| 54 | 40 | 14 | 12 | ∞ | 6 |
| 8 | 58 | 34 | 27 | 47 | ∞ |

10.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 14 | 17 | 25 | 54 | 37 |
| 57 | ∞ | 43 | 2 | 13 | 34 |
| 7 | 24 | ∞ | 8 | 9 | 7 |
| 13 | 28 | 30 | ∞ | 56 | 18 |
| 26 | 44 | 4 | 52 | ∞ | 52 |
| 18 | 5 | 49 | 14 | 12 | ∞ |

11.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 15 | 43 | 38 | 10 | 45 |
| 44 | ∞ | 18 | 6 | 49 | 40 |
| 41 | 42 | ∞ | 19 | 1 | 48 |
| 33 | 44 | 20 | ∞ | 20 | 21 |
| 40 | 17 | 16 | 26 | ∞ | 15 |
| 3 | 4 | 37 | 54 | 36 | ∞ |

12.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 58 | 56 | 13 | 21 | 54 |
| 21 | ∞ | 58 | 43 | 56 | 14 |
| 4 | 46 | ∞ | 38 | 7 | 22 |
| 4 | 46 | 38 | ∞ | 7 | 22 |
| 3 | 34 | 36 | 11 | ∞ | 17 |
| 59 | 47 | 40 | 60 | 13 | ∞ |

13.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 21 | 34 | 48 | 58 | 35 |
| 9 | ∞ | 14 | 30 | 4 | 12 |
| 6 | 7 | ∞ | 35 | 11 | 34 |
| 26 | 37 | 17 | ∞ | 36 | 52 |
| 59 | 15 | 7 | 32 | ∞ | 47 |
| 3 | 17 | 6 | 44 | 59 | ∞ |

14.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 23 | 38 | 44 | 18 | 32 |
| 51 | ∞ | 17 | 35 | 56 | 47 |
| 28 | 37 | ∞ | 24 | 16 | 21 |
| 26 | 49 | 60 | ∞ | 7 | 46 |
| 56 | 6 | 40 | 34 | ∞ | 31 |
| 33 | 20 | 50 | 51 | 30 | ∞ |

15.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 36 | 51 | 24 | 11 | 46 |
| 28 | ∞ | 17 | 46 | 10 | 20 |
| 7 | 41 | ∞ | 58 | 2 | 35 |
| 25 | 60 | 45 | ∞ | 55 | 59 |
| 48 | 20 | 33 | 26 | ∞ | 38 |
| 50 | 27 | 19 | 14 | 52 | ∞ |

16.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 16 | 15 | 32 | 53 | 55 |
| 27 | ∞ | 34 | 50 | 2 | 31 |
| 33 | 39 | ∞ | 42 | 36 | 39 |
| 45 | 22 | 59 | ∞ | 28 | 26 |
| 55 | 49 | 14 | 18 | ∞ | 12 |
| 28 | 14 | 8 | 48 | 35 | ∞ |

17.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 33 | 41 | 46 | 11 | 21 |
| 10 | ∞ | 26 | 28 | 39 | 43 |
| 1 | 57 | ∞ | 20 | 60 | 28 |
| 50 | 25 | 35 | ∞ | 42 | 7 |
| 43 | 44 | 51 | 19 | ∞ | 34 |
| 55 | 22 | 30 | 50 | 53 | ∞ |

18.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 60 | 39 | 40 | 24 | 34 |
| 3 | ∞ | 57 | 55 | 41 | 51 |
| 7 | 49 | ∞ | 46 | 7 | 4 |
| 57 | 47 | 22 | ∞ | 5 | 59 |
| 59 | 29 | 8 | 56 | ∞ | 6 |
| 21 | 55 | 26 | 45 | 60 | ∞ |

19.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 30 | 57 | 64 | 24 | 44 |
| 14 | ∞ | 9 | 14 | 30 | 17 |
| 32 | 21 | ∞ | 53 | 21 | 23 |
| 25 | 39 | 28 | ∞ | 48 | 21 |
| 42 | 5 | 29 | 56 | ∞ | 55 |
| 16 | 17 | 37 | 5 | 30 | ∞ |

20.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 14 | 32 | 53 | 8 | 44 |
| 53 | ∞ | 2 | 14 | 30 | 39 |
| 50 | 53 | ∞ | 52 | 2 | 17 |
| 1 | 58 | 54 | ∞ | 52 | 51 |
| 18 | 13 | 4 | 58 | ∞ | 15 |
| 39 | 48 | 46 | 9 | 2 | ∞ |

21.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 1 | 29 | 2 | 8 | 10 |
| 8 | ∞ | 31 | 57 | 20 | 44 |
| 12 | 55 | ∞ | 56 | 9 | 23 |
| 10 | 60 | 35 | ∞ | 4 | 43 |
| 17 | 52 | 41 | 52 | ∞ | 29 |
| 36 | 16 | 12 | 56 | 11 | ∞ |

22.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 10 | 26 | 44 | 21 | 17 |
| 14 | ∞ | 23 | 22 | 54 | 58 |
| 33 | 4 | ∞ | 5 | 49 | 57 |
| 42 | 55 | 29 | ∞ | 14 | 35 |
| 20 | 53 | 38 | 40 | ∞ | 33 |
| 52 | 17 | 45 | 41 | 50 | ∞ |

23.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 37 | 7 | 46 | 57 | 20 |
| 26 | ∞ | 34 | 10 | 42 | 16 |
| 42 | 1 | ∞ | 26 | 21 | 13 |
| 30 | 20 | 60 | ∞ | 50 | 10 |
| 43 | 47 | 28 | 38 | ∞ | 36 |
| 16 | 17 | 53 | 36 | 2 | ∞ |

24.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 44 | 6 | 49 | 28 | 53 |
| 40 | ∞ | 4 | 30 | 42 | 51 |
| 3 | 47 | ∞ | 55 | 20 | 24 |
| 1 | 26 | 30 | ∞ | 33 | 47 |
| 18 | 24 | 13 | 33 | ∞ | 46 |
| 56 | 25 | 11 | 22 | 40 | ∞ |

25.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 19 | 40 | 30 | 15 | 9 |
| 56 | ∞ | 14 | 57 | 12 | 8 |
| 42 | 4 | ∞ | 28 | 33 | 24 |
| 1 | 12 | 5 | ∞ | 21 | 16 |
| 21 | 16 | 38 | 52 | ∞ | 59 |
| 51 | 1 | 17 | 22 | 29 | ∞ |

26.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 20 | 53 | 31 | 40 | 45 |
| 19 | ∞ | 43 | 14 | 41 | 17 |
| 7 | 49 | ∞ | 26 | 23 | 20 |
| 1 | 26 | 2 | ∞ | 4 | 11 |
| 10 | 55 | 33 | 21 | ∞ | 21 |
| 47 | 11 | 34 | 22 | 27 | ∞ |

27.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 52 | 8 | 50 | 4 | 16 |
| 38 | ∞ | 39 | 51 | 13 | 44 |
| 55 | 51 | ∞ | 1 | 27 | 27 |
| 18 | 39 | 5 | ∞ | 28 | 21 |
| 4 | 3 | 44 | 17 | ∞ | 29 |
| 57 | 28 | 52 | 21 | 53 | ∞ |

28.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 34 | 39 | 3 | 1 | 11 |
| 56 | ∞ | 18 | 21 | 11 | 17 |
| 25 | 41 | ∞ | 27 | 13 | 7 |
| 42 | 30 | 14 | ∞ | 10 | 35 |
| 27 | 46 | 43 | 58 | ∞ | 5 |
| 43 | 55 | 51 | 33 | 29 | ∞ |



29.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 12 | 41 | 57 | 45 | 17 |
| 49 | ∞ | 48 | 42 | 40 | 53 |
| 22 | 5 | ∞ | 23 | 51 | 2 |
| 23 | 8 | 19 | ∞ | 46 | 26 |
| 49 | 44 | 3 | 22 | ∞ | 21 |
| 22 | 56 | 54 | 16 | 54 | ∞ |

30.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 16 | 2 | 11 | 10 | 11 |
| 3 | ∞ | 29 | 29 | 5 | 37 |
| 43 | 25 | ∞ | 31 | 35 | 36 |
| 50 | 40 | 9 | ∞ | 4 | 2 |
| 46 | 39 | 15 | 14 | ∞ | 59 |
| 52 | 37 | 45 | 27 | 60 | ∞ |

***Додаткові запитання***

1. Наведіть постановку задачі комівояжера і поясніть зміст уведених позначень.
2. Яким чином математична модель задачі враховує вимогу замкненості маршруту комівояжера?
3. Чи завжди задача комівояжера має розв’язок? Обґрунтуйте відповідь.
4. Яким чином математична модель задачі враховує вимоги відвідати кожне місто тільки один раз і повернутися до першого?
5. Які інші методи розв’язування задачі комівояжера Вам відомі?

## Список літератури

1.Попов Ю.Д. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1988. – 180 с.
2.Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – 7-е видання, перероблене та доповнене. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.
3.Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища шк., 1975. – 372 с.
4.Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986 .– 319 с.
5.Степанюк В.В. Методы математического программирования. – К.: Вища шк., 1977. – 272 с.
6. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 376 с.



## Вимоги до оформлення робіт

Індивідуальні завдання виконуються в окремому зошиті, який потрібно зберігати до складання іспиту. Допоміжні розрахунки можна проводити на чернетці. Всі розрахунки треба проводити точно (використовувати дроби). Розгорнуті відповіді на додаткові питання наводити після виконаної роботи.

На звороті титульної сторінки накреслити таблицю

| № завд. | 1 | 2 | 3 | . . . . . . | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Здано | | | | | | |
| Підпис | | | | | | |

Якщо завдання виконане правильно й теоретичний матеріал засвоєно в повному обсязі, викладач проставляє в таблиці дату зарахування роботи, кількість балів та свій підпис.

Студент повинен стежити за заповненням таблиці та надійно зберігати зошит.