Практична робота N 3

Тема: „Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності."

Основні теоретичні положення

1. Точкові статистичні оцінки та їх властивості.

Параметри генеральної сукупності $M(x) = \overline{X}_{\Gamma}$, D_{Γ}, σ_{Γ}, Mo, Me, r_{xy} є величинами сталими, але їх числове значення невідоме. Ці параметри оцінюються параметрами вибірки: $\overline{X}_B$, D_B, σ_B, Mo^*, Me^*, r_B, які дістають при обробці вибірки. Вони є величинами непередбачуваними, тобто випадковими. Схематично це можна показати так (рис. 1):

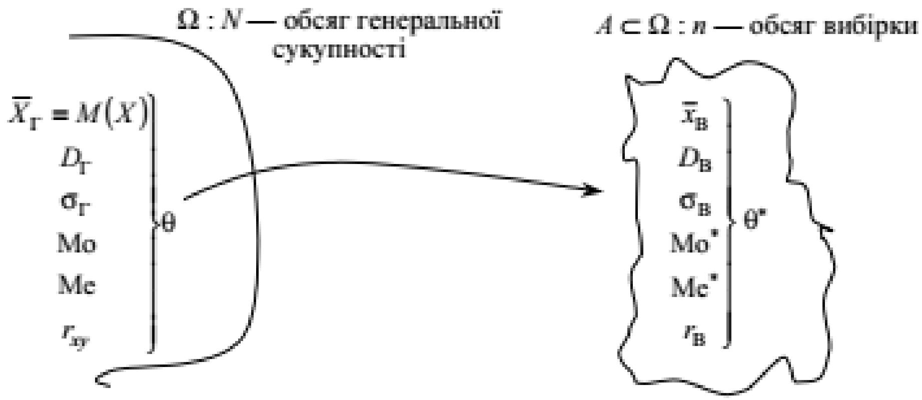

Рис. 1. *Параметри генеральної сукупності та їх точкові статистичні оцінки*

На рис. 1 через θ позначено оцінюваний параметр генеральної сукупності, а через θ^* — його статистичну оцінку, яку називають ще ***статистикою.*** При цьому $\theta = const$, а θ^* — випадкова величина, що має певний закон розподілу ймовірностей. Зауважимо, що до реалізації вибірки кожну її варіанту розглядають як випадкову величину, що має закон розподілу ймовірностей ознаки генеральної сукупності з відповідними числовими характеристиками:

$$M(x_i) = \overline{X}_{\Gamma} = M(x), \quad D(x_i) = D_{\Gamma}, \quad \sigma(x_i) = \sigma_{\Gamma}.$$

Статистична оцінка θ^*, яка визначається одним числом, точкою, називається ***точковою***. Для позначення терміну «точкова статистична оцінка» вживатимемо абревіатуру ТСО. Нехай θ^* є статистичною оцінкою невідомого параметра θ генеральної сукупності (теоретичного розподілу). Припустимо, що за вибіркою обсягу n знайдена оцінка θ_1^*. При інших вибірках того ж обсягу одержимо деякі інші оцінки θ_2^*, $\theta_3^*,\ldots,$ θ_k^*. Саме оцінку θ^* можна розглядати як випадкову величину, а числа θ_2^*, $\theta_3^*,\ldots,$ θ_k^* як її можливі значення. Точкова статистична оцінка повинна задовольняти певним умовам, які сформулюємо у вигляді означень. Якщо:

$$M(\theta^*) = \theta, \qquad (1)$$

то θ^* називається ***незміщеною;*** в противному разі, тобто коли

$$M(\theta^*) \neq \theta, \qquad (2)$$

то точкова статистична оцінка θ^* називається ***зміщеною*** відносно параметра генеральної сукупності θ.

Різниця

$$\theta^* - \theta = \delta \qquad \textbf{(3)}$$

називається ***зміщенням*** статистичної оцінки θ^*.

Точкова статистична оцінка називається ***ефективною***, коли при заданому обсязі вибірки вона має мінімальну дисперсію.

Точкова статистична оцінка називається ***ґрунтовною***, якщо у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = 1, \qquad \textbf{(4)}$$

Доведено, що:

- ☑ $\overline{X}_B$ (вибіркове середнє) є незміщеною, ефективною і ґрунтовною ТСО для генерального середнього $M(x) = \overline{X}_\Gamma$;
- ☑ $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B$ (виправлена дисперсія) є незміщеною, ефективною і ґрунтовною ТСО для дисперсії генеральної сукупності D_Γ;
- ☑ $S = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_B}$ (виправлене середньоквадратичне відхилення) є точковою <u>зміщеною</u> оцінкою СКВ генеральної сукупності σ_Γ (коефіцієнт зміщення $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$).

Зауваження 1: *Очевидно, що при достатньо великих обсягах вибірки (**n>30**) вибіркова дисперсія та виправлена вибіркова дисперсія різняться дуже мало, тому в практичних задачах виправлену вибіркову дисперсію та виправлене середньоквадратичне відхилення використовують лише при обсягах вибірок* $\mathbf{n \le 30}$.

2. *Закони розподілу ймовірностей для вибіркового середнього, виправленої дисперсії та виправленого СКВ. Інтервальні оцінки параметрів генеральної сукупності.*

Таблиця 1

№	*Оцінка*	*Закон розподілу*
1	$\overline{X}_B$ (вибіркове середнє)	$N\left(a, \dfrac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}\right)$, де $a = M(x) = \overline{X}_\Gamma$
2	S^2 (виправлена дисперсія)	$\chi^2(n-1)\dfrac{\sigma^2}{n-1}$, де $\sigma^2 = D_\Gamma$, $\chi^2(n-1)$ - розподіл «хі-квадрат» з $k = n-1$ ступенями вільності
3	S (виправлене СКВ)	$\chi(n-1)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$, де $\sigma^2 = D_\Gamma$, $\chi(n-1)$ - хі-розподіл з $k = n-1$ ступенями вільності
4	$\dfrac{\overline{X}_B - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$t(n-1)$ - розподіл Стьюдента з $k = n-1$ ступенями вільності

Точкові статистичні оцінки θ^* є випадковими величинами. Якщо обсяг вибірки досить великий, то точкові оцінки (наближена заміна θ на θ^*) задовольняють практичні потреби точності. Якщо ж обсяг вибірки малий, то точкові оцінки (наближена заміна θ на θ^*) можуть давати значні похибки, тому питання точності оцінювання у цьому випадку дуже важливе. У цьому разі застосовують ***інтервальні*** статистичні оцінки. Статистична оцінка, що визначається двома числами - кінцями інтервалів, називається ***інтервальною***. Різниця $\left|\theta^* - \theta\right|$ між статистичною оцінкою θ^* та її оцінюваним параметром θ, взята за абсолютним значенням, називається ***точністю оцінки***.

Оскільки θ^* є випадковою величиною, то нерівність

$$\left|\theta^* - \theta\right| < \delta \qquad \textbf{(5)}$$

справджуватиметься з певною ймовірністю. Імовірність γ, з якою справджується нерівність (5), називають ***надійністю*** або ***довірчою ймовірністю***, тобто

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma \qquad \textbf{(6)}$$

(або $P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) \geq \gamma$).

Рівність (6) можна записати так***:***

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma \qquad \textbf{(7)}$$

Інтервал

$$\left(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right), \qquad \textbf{(8)}$$

що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності із заданою надійністю γ***,*** називають ***довірчим інтервалом.***

Для побудови довірчих інтервалів потрібно знати закони розподілів відповідних оцінок. Їх систематизовано у таблиці 1.

1.1.1. Побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_Г$ при відомому значенні $\sigma_Г$ із заданою надійністю γ.

Оскільки точкова оцінка $\theta^* = \overline{X}_В$ параметра $\theta = a = \overline{X}_Г$ має нормальний закон розподілу $N\left(a, \frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}\right)$, то величина $\dfrac{\overline{x}_В - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}}$ має нормований нормальний закон розподілу $N(0,1)$. Тоді, позначивши $x = \dfrac{\delta}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}}$, рівність (6) можна записати у вигляді

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(\left|\overline{x}_В - a\right| < \delta\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(\frac{\left|\overline{x}_В - a\right|}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}} < \frac{\delta}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}}\right) = \gamma \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{\left|\overline{x}_В - a\right|}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}} < x\right) = \gamma. \qquad \textbf{(9)}$$

Згідно з формулою нормованого нормального закону

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta),$$

тому з останньої нерівності (9) маємо

$$P\left(\frac{\left|\bar{x}_B - a\right|}{\frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}} < x\right) = 2\Phi(x) = \gamma,$$

отже, x знаходиться з рівності

$$2\Phi(x) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(x) = \frac{\gamma}{2}, \qquad \textbf{(10)}$$

де значення функції Лапласа $\Phi(x)$ затабульовані у додатку ***(Жлуктенко,*** додаток ***2, с.319-321)***.

Перетворюючи (9) (множимо на $\frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$ і розкриваємо модуль), остаточно знаходимо довірчий інтервал для $a = \bar{X}_\Gamma$ (рис. 2)

$$P\left(\bar{x}_B - \frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \qquad \textbf{(11)}$$

де x знаходиться з (10). Це означає, що з імовірністю γ середня $a = \bar{X}_\Gamma$ генеральної сукупності попадає в інтервал

$$\bar{x}_B - \frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(12)}$$

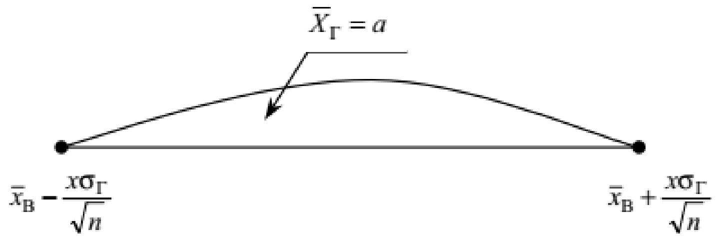

Рис. 2. *Довірчий інтервал для* $a = \bar{X}_\Gamma$

При цьому величину

$$\varepsilon = \frac{x\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(13)}$$

називають ***точністю оцінки*** або ***похибкою вибірки***.

Із класичних оцінок, в яких точність оцінки визначається граничною похибкою (13), можна зробити наступні висновки:

- ☑ *при зростанні обсягу вибірки* ***n*** *гранична похибка* ε *зменшується, тому точність оцінки збільшується (оскільки звужується довірчий інтервал);*
- ☑ *збільшення надійності* $\gamma = 2\Phi(x)$ *оцінки призводить до зростання* x *(оскільки* $\Phi(x)$ *- зростаюча функція), а внаслідок цього, і до збільшення похибки* ε. *Іншими словами: збільшення надійності класичної оцінки призводить до зменшення її точності.*

2.1.2. Побудова довірчого інтервалу для $\bar{X}_\Gamma$ при невідомому значенні σ_Γ із заданою надійністю γ.

Для малих вибірок для оцінювання $a = \bar{X}_\Gamma$ при невідомому значенні σ_Γ неможливо скористатися нормальним законом розподілу**.** Тому для побудови довірчого інтервалу застосовується випадкова величина

$$t=\frac{\bar{x}_B-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

що має розподіл Стьюдента з $k=n-1$ ступенями вільності. Тоді (6) набирає вигляду

$$P\left(\frac{\left|\bar{x}_B-a\right|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}<t_\gamma\right)=P\left(\bar{x}_B-\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma,$$

отже, в разі невідомого σ_Γ середнє генеральної сукупності $a=\overline{X}_\Gamma$ з імовірністю γ знаходиться в інтервалі

$$\bar{x}_B-\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}, \tag{14}$$

де $t_\gamma=t_\gamma(n-1)$ обчислюємо за заданою надійністю γ і числом ступенів свободи $\boldsymbol{k=n}$-1 за таблицею ***(Жлуктенко,*** додаток ***3, с.322-323)***

Зауваження 2: формули (12) та (14) використовуються для побудови довірчих інтервалів для $a=\overline{X}_\Gamma$ у випадку, коли кількісна ознака X генеральної сукупності нормально розподілена (або у випадку невеликого обсягу вибірки). Якщо ж закон розподілу генеральної сукупності невідомий (і $n>30$), то відповідні довірчі інтервали можна побудувати з допомогою нерівності Чебишева, щоправда, інтервали, отримані з допомогою нерівності Чебишева, дають досить грубу оцінку і виявляються надто широкими для практичного застосування.

Зауваження 3: при великому обсягу вибірки ($n>30$) на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей (теореми Ляпунова) розподіл Стьюдента близький до нормального закону. Тоді для точнішої побудови довірчого інтервалу за формулою (14) *значення* t_γ *береться не з додатку 3, а знаходиться з додатку 2 (таблиці значень функції Лапласа) з умови* $\Phi(t_\gamma)=\gamma/2$.

2.1.3. Побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_\Gamma$ із заданою надійністю γ з допомогою нерівності Чебишева.

У разі, коли відсутня інформація про закон розподілу ознаки генеральної сукупності X, оцінювання ймовірності події $\left|\bar{x}_B-a\right|<\delta$, де $a=\overline{X}_\Gamma$, та побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_\Gamma$ із заданою надійністю γ виконуються з використанням нерівності Чебишева за умови, що відоме значення σ_Γ, а саме:

$$P\left(\left|\bar{x}_B-a\right|<\delta\right)\ge 1-\frac{\sigma_\Gamma^2}{n\delta^2}=\gamma. \tag{15}$$

З рівності $1-\dfrac{\sigma_\Gamma^2}{n\delta^2}=\gamma$ визначаємо значення додатного параметра $\delta=\dfrac{\sigma_\Gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}}$.

Тоді, підставляючи знайдене значення δ у (15) та розкриваючи модуль, отримуємо, що з імовірністю γ генеральне середнє $a=\overline{X}_\Gamma$ знаходиться в інтервалі

$$\bar{x}_B - \frac{\sigma_\Gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}} < a < \bar{x}_B + \frac{\sigma_\Gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}}. \qquad \mathbf{(16)}$$

Коли значення σ_Γ невідоме, застосовуємо виправлену дисперсію S^2, і довірчий інтервал набирає такого вигляду:

$$\bar{x}_B - \frac{S^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}} < a < \bar{x}_B + \frac{S^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}}. \qquad \mathbf{(17)}$$

2.2. Побудова довірчих інтервалів для D_Γ, σ_Γ із заданою надійністю γ.

У разі, коли ознака X має нормальний закон розподілу, для побудови довірчого інтервалу із заданою надійністю γ для D_Γ застосовуємо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_\Gamma^2} S^2,$$

що має розподіл χ^2 з $k = n-1$ ступенями вільності.

Оскільки випадкові події

$$A\left(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2\right) \text{ і } B\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{1}{\chi^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right)$$

є рівно ймовірними ($P(A) = P(B)$), то

$$P\left(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2\right) = P\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{1}{\chi^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right) = \gamma.$$

Підставивши в рівність $P\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{1}{\chi^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right) = \gamma$ значення $\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_\Gamma^2} S^2$, маємо

$$P\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{\sigma_\Gamma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right) = \gamma,$$

звідки, помноживши на $(n-1)S^2$, дістаємо

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < \sigma_\Gamma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right) = \gamma.$$

Таким чином, з імовірністю γ дисперсія генеральної сукупності $D_\Gamma = \sigma_\Gamma^2$ знаходиться в інтервалі

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < \sigma_\Gamma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}, \qquad \mathbf{(18)}$$

де значення χ_1^2, χ_2^2 знаходимо за таблицею ***(Жлуктенко,** додаток **4, с.324-325)*** згідно з рівностями***:***

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbf{(19)}$$

$$P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}. \qquad \mathbf{(20)}$$

Параметр α для (19), (20) знаходиться з рівності $\alpha = 1 - \gamma$.

Тоді довірчий інтервал для σ_Γ з надійністю γ отримується з (18) (добуванням кореня з усіх частин нерівності) і буде таким:

$$\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2} < \sigma_\Gamma < \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}. \qquad \textbf{(21)}$$

Разом з тим, довірчий інтервал для σ_Γ з надійністю γ може бути обчислений з допомогою хі-розподілу за формулою

$$S(1-q(\gamma;n)) < \sigma_\Gamma < S(1+q(\gamma;n)), \qquad \textbf{(22)}$$

де $q(\gamma;n)$ знаходиться за таблицею ***(Жлуктенко,*** додаток ***5, с.326)***.

Зразок розв'язання типового варіанту

Задача. *У будинку відпочинку випадковим способом було відібрано* **20** *осіб і виміряно їх зріст* x_i. *Здобуті результати наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу*:

x_i, см	165,5—170,5	170,5—175,5	175,5—180,5	180,5—185,5
n_i	4	6	8	2

Завдання:

1) *Знайти незміщені ТСО параметрів* $\overline{X}_\Gamma$, D_Γ *генеральної сукупності;*

2) *Знайти інтервальні оцінки* $\overline{X}_\Gamma$ *з надійністю* $\gamma = 0,99$:

а) *вважаючи, що величина* σ_Γ *відома (за значення* σ_Γ *взяти величину* $\sigma_\Gamma = 1,2\sigma_B$*);*

б) *вважаючи, що величина* σ_Γ *невідома;*

в) *з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина* σ_Γ *відома (за значення* σ_Γ *взяти величину* $\sigma_\Gamma = 1,2\sigma_B$*);*

г) *з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина* σ_Γ *невідома.*

3) *Знайти інтервальні оцінки* D_Γ *та* σ_Γ *з надійністю* $\gamma = 0,99$;

4) *Знайти мінімальний обсяг вибірки, за якого з надійністю* $\gamma = 0,95$ *гранична похибка точкової оцінки* $\overline{X}_\Gamma$ *не перевищує* $m\cdot 10^{-2}$, *де* m *- порядковий номер студента у списку академгрупи.*

► **Розв'язання.**

1) *Знайти незміщені точкові статистичні оцінки параметрів* $\overline{X}_\Gamma$, D_Γ *генеральної сукупності.*

З теорії відомо, що незміщеною ТСО для $\overline{X}_\Gamma$ є вибіркове середнє $\overline{x}_B$, а незміщеною ТСО для D_Γ є виправлена дисперсія S^2.

Оскільки нам дано інтервальний розподіл, то треба перейти до дискретного, замінюючи інтервали їх серединами, а частоти залишаючи без змін. Крок вибірки

$$h = 170,5 - 165,5 = 5.$$

Середина першого інтервалу

$$x_1^* = \frac{165,5+170,5}{2} = 168.$$

Наступні середини отримуємо, додаючи $h = 5$ до середини попереднього інтервалу:

$$x_2^* = x_1^* + h = 168 + 5 = 173,$$

$$x_3^* = x_2^* + h = 173 + 5 = 178,$$
$$x_4^* = x_3^* + h = 178 + 5 = 183.$$

Переходимо до дискретного розподілу

x_i^*	168	173	178	183	Σ
n_i	4	6	8	2	20

Вибіркове середнє обчислимо за формулою

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_i^* n_i}{n} = \frac{x_1^* n_1 + x_2^* n_2 + \ldots + x_K^* n_K}{n}.$$

Маємо:

$$\overline{x}_B = \frac{168 \cdot 4 + 173 \cdot 6 + 178 \cdot 8 + 183 \cdot 2}{20} = \frac{3500}{20} = 175,$$

отже, незміщеною ТСО середнього генеральної сукупності є вибіркове середнє $\overline{x}_B = 175$ (*см*).

Для знаходження незміщеної ТСО дисперсії генеральної сукупності спочатку знайдемо вибіркову дисперсію, користуючись формулою

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_i^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_B\right)^2.$$

Маємо:

$$D_B = \frac{168^2 \cdot 4 + 173^2 \cdot 6 + 178^2 \cdot 8 + 183^2 \cdot 2}{20} - (175)^2 = \frac{612920}{20} - 30625 = 30646 - 30625 = 21$$

Незміщеною ТСО для $D_Г$ є виправлена дисперсія, що обчислюється за формулою

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Для нашого прикладу ($n = 20$):

$$S^2 = \frac{20}{19} \cdot 21 \approx 22{,}1.$$

***Відповідь:* незміщеною ТСО для $\overline{X}_Г$ є $\overline{x}_B = 175$ (см);**
незміщеною ТСО для $D_Г$ є виправлена дисперсія $S^2 = 22{,}1$.

2) *Знайти інтервальні оцінки $\overline{X}_Г$ з надійністю $\gamma = 0{,}99$:*

а) *вважаючи, що величина $\sigma_Г$ відома (за значення $\sigma_Г$ взяти величину $\sigma_Г = 1{,}2\sigma_B$);*

Нехай $\sigma_Г = 1{,}2\sigma_B = 1{,}2\sqrt{D_B} = 1{,}2\sqrt{21} \approx 5{,}5$. Оскільки дисперсія генеральної сукупності відома, то довірчий інтервал для генеральної середньої $\overline{X}_Г = a$ будуємо за формулою (12)

$$\overline{x}_B - \frac{x\sigma_Г}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{x\sigma_Г}{\sqrt{n}}.$$

Цей інтервал можна записати у вигляді

$$\overline{x}_B - \varepsilon < a < \overline{x}_B + \varepsilon, \qquad \textbf{(23)}$$

де $\varepsilon = \frac{x\sigma_Г}{\sqrt{n}}$, а x знаходиться з таблиці (***Жлуктенко,*** додаток ***2, с.319-321***) з умови (10)

$$2\Phi(x) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(x) = \frac{\gamma}{2}.$$

Оскільки за умовою $\gamma = 0{,}99$, то $\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0{,}99}{2} = 0{,}495$. Шукаємо x у додатку 2 (див рис. 3). Для цього у стовпці «$\Phi(x)$» знаходимо число, що є найближчим до $\dfrac{\gamma}{2}$ і навпроти нього зліва у стовпці «x» дістаємо шукане значення x.

Закінчення додатка 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,96	0,49846		
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,98	0,49856		
2,58	0,4951	2,78	0,4973	3,00	0,49865	$x > 5$	0,5

Рис. 3. *Визначення x за таблицею значень функції Лапласа (додаток 2)*

У нашому прикладі найближчим до 0,495 є 0,4951 (виділено синім на рис. 3), отже, $x = 2{,}58$. Обчислимо

$$\varepsilon = \frac{x\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}58 \cdot 5{,}5}{\sqrt{20}} = \frac{14{,}19}{4{,}47} \approx 3{,}17 .$$

Тоді за (23) (де $\overline{x}_B = 175$, $\varepsilon = \dfrac{x\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}} = 3{,}17$) довірчий інтервал має вигляд:

$$175 - 3{,}17 < a < 175 + 3{,}17 \Leftrightarrow 171{,}83 < a < 178{,}17,$$

тобто

$$P(171{,}83 < a < 178{,}17) = 0{,}99 .$$

Це можна інтерпретувати наступним чином: *якщо буде зроблено достатньо велику кількість вибірок обсягу $n = 20$, то в 99% з них довірчі інтервали накриють $\overline{X}_{\Gamma} = a$ й лише у 1% випадків оцінюване математичне сподівання (генеральна середня $\overline{X}_{\Gamma} = a$) вийде за межі довірчих інтервалів.*

Відповідь: ***з імовірністю $\gamma = 0{,}99$ середнє генеральної сукупності $\overline{X}_{\Gamma} = a$ знаходиться в інтервалі $171{,}83 < a < 178{,}17$.***

б) *вважаючи, що величина σ_{Γ} невідома*;

У разі невідомого σ_{Γ} для обчислення довірчого інтервалу використовуємо формулу (14)

$$\overline{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

де, оскільки $n = 20 \le 30$, то $t_\gamma = t_\gamma(n-1)$ обчислюємо за заданою надійністю γ і числом ступенів свободи $\boldsymbol{k = n}$**-**1 за таблицею ***(Жлуктенко,*** додаток ***3, с.322)*** (див. зауваження 3). Цю формулу ми також можемо записати у вигляді (23)

$$\overline{x}_B - \varepsilon < a < \overline{x}_B + \varepsilon ,$$

де

$$\varepsilon = \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} .$$

Знайдемо $t_\gamma = t_\gamma(n-1)$. У нашому прикладі $t_\gamma = t_\gamma(n-1) = t_{0,99}(20-1) = t_{0,99}(19)$. У додатку 3 в лівому стовпці «$k = n-1$» знаходимо рядок «19», що відповідає нашому значенню ступенів вільності $k = n-1 = 20-1 = 19$, далі знаходимо стовпець «$p(t) = 0,99$» (передостанній в таблиці) на перетині рядка «19» і стовпця «$p(t) = 0,99$» знаходимо значення $t_\gamma(n-1) = t_{0,99}(19) = 2,861$ (див. рис. 4).

Закінчення додатка 3

$k = n-1$	$p(t)$											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,872	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,859	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792

Рис. 4. *Визначення $t_\gamma(n-1)$ за таблицею (додаток 3)*

Виправлене середньоквадратичне відхилення S знаходиться з допомогою виправленої дисперсії

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{22,1} \approx 4,7 .$$

Тоді

$$\varepsilon = \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{2,861 \cdot 4,7}{\sqrt{20}} = \frac{13,4467}{4,47} \approx 3,008 .$$

Знаходимо довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - \varepsilon < a < \bar{x}_B + \varepsilon .$$

Маємо:

$$175 - 3,008 < a < 175 + 3,008 \Leftrightarrow 171,992 < a < 178,008 .$$

Отже,

$$P(171,992 < a < 178,008) = 0,99 .$$

***Відповідь:** з імовірністю $\gamma = 0,99$ середнє генеральної сукупності $\overline{X}_Г = a$ знаходиться в інтервалі* $171,992 < a < 178,008$.

в) *з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина $\sigma_Г$ відома (за значення $\sigma_Г$ взяти величину $\sigma_Г = 1,2\sigma_B$);*

Для побудови довірчого інтервалу в цьому випадку скористаємось формулою (16)

$$\bar{x}_B - \frac{\sigma_Г^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}} < a < \bar{x}_B + \frac{\sigma_Г^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}} ,$$

покладаючи в ній $\bar{x}_B = 175$, $\sigma_Г = 1,2\sigma_B = 5,5$ (знайдено вище), $n = 20$, $\gamma = 0,99$:

$$175 - \frac{(5,5)^2}{\sqrt{(1-0,99) \cdot 20}} < a < 175 + \frac{(5,5)^2}{\sqrt{(1-0,99) \cdot 20}} ,$$

$$175 - \frac{30,25}{0,447} < a < 175 + \frac{30,25}{0,447} ,$$

$$175-67,67<a<175+67,67,$$
$$107,33<a<242,67.$$

Порівнюючи побудований з допомогою нерівності Чебишева інтервал $107,33<a<242,67$ з отриманим в аналогічній ситуації (відоме значення $\sigma_Г$) у пункті а) інтервалом $171,83<a<178,17$, бачимо справедливість зауваження 2: інтервал, отриманий з допомогою нерівності Чебишева виявляється значно ширшим та малоінформативним з точки зору практичного застосування.

Відповідь: ***з імовірністю*** $\gamma=0,99$ ***середнє генеральної сукупності*** $\overline{X}_Г=a$ ***знаходиться в інтервалі*** $107,33<a<242,67$.

г) *з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина* $\sigma_Г$ *невідома.*

У цій ситуації використовуємо формулу (17):

$$\overline{x}_B-\frac{S^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}}<a<\overline{x}_B+\frac{S^2}{\sqrt{(1-\gamma)n}},$$

покладаючи в ній $\overline{x}_B=175$, $S^2=22,1$, $n=20$, $\gamma=0,99$:

$$175-\frac{22,1}{\sqrt{(1-0,99)\cdot 20}}<a<175+\frac{22,1}{\sqrt{(1-0,99)\cdot 20}},$$
$$175-\frac{22,1}{0,447}<a<175+\frac{22,1}{0,447},$$
$$175-49,44<a<175+49,44,$$
$$125,56<a<224,44.$$

Цей інтервал можна порівняти з отриманим в аналогічній ситуації (невідоме $\sigma_Г$) інтервалом $171,992<a<178,008$ і знову дійти висновку, про те, що інтервал, побудований з допомогою нерівності Чебишева є ширшим та малоінформативним, він дає досить грубу оцінку невідомого параметра $\overline{X}_Г=a$.

Відповідь: ***з імовірністю*** $\gamma=0,99$ ***середнє генеральної сукупності*** $\overline{X}_Г=a$ ***знаходиться в інтервалі*** $125,56<a<224,44$.

3) *Знайти інтервальні оцінки* $D_Г$ *та* $\sigma_Г$ *з надійністю* $\gamma=0,99$*;*

Для побудови довірчого інтервалу параметра $D_Г$ скористаємось формулою (18):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}<\sigma_Г^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2},$$

де значення χ_1^2, χ_2^2 знаходимо за таблицею ***(Жлуктенко,*** додаток ***4, с.324-325)*** згідно з рівностями***:***

$$P(\chi^2>\chi_1^2)=1-\frac{\alpha}{2},\ P(\chi^2>\chi_2^2)=\frac{\alpha}{2}.$$

Параметр α знаходиться з рівності $\alpha=1-\gamma$. Маємо:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\gamma}{2}=\frac{1-0,99}{2}=0,005,\ 1-\frac{\alpha}{2}=1-0,005=0,995,$$

отже, нам слід знайти χ_1^2 з умови $P(\chi^2>\chi_1^2)=1-\frac{\alpha}{2}=0,995$. У першому стовпці «Число ступенів свободи k» додатку 4 знаходимо рядок, що відповідає значенню $k=n-1$ (у нашому випадку $k=20-1=19$) і стовпець зі значенням, найближчим до

$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995$ (у нашому випадку – це 0,99). На перетині обраних рядка та стовпця знаходимо значення χ_1^2 (у нас це $\chi_1^2 = 7,6$) (див. рис. 5.1).

Закінчення додатка 4

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_1^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,76	1,14	1,61	2,34	3,0	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,563	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8

Рис. 5.1. *Знаходження χ_1^2 (додаток 4)*

Додаток 4

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_1^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,6	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,3	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3

Рис. 5.2. *Знаходження χ_2^2 (додаток 4)*

Аналогічно знаходимо у додатку 4 величину χ_2^2 (див. рис 5.2): у першому стовпці «Число ступенів свободи k» додатку 4 знаходимо рядок, що відповідає значенню $k = n - 1$ (у нашому випадку $k = 20 - 1 = 19$) і стовпець зі значенням $\dfrac{\alpha}{2} = 0,005$; на перетині обраних рядка та стовпця знаходимо значення χ_2^2 (у нас це $\chi_2^2 = 38,5$). Підставляємо знайдені величини у формулу (18):

$$\frac{19 \cdot 22,1}{38,5} < \sigma_\Gamma^2 < \frac{19 \cdot 22,1}{7,6},$$

$$10,9 < \sigma_\Gamma^2 < 55,25.$$

Отже, довірчий інтервал для D_Γ з надійністю $\gamma = 0,99$ знайдено. Для побудови довірчого інтервалу для σ_Γ добудемо корінь квадратний з усіх частин останньої нерівності:

$$\sqrt{10,9} < \sqrt{\sigma_\Gamma^2} < \sqrt{55,25},$$

$$3,3 < \sigma_\Gamma < 7,43.$$

Відповідь: ***з імовірністю $\gamma = 0,99$ дисперсія генеральної сукупності $D_\Gamma = \sigma_\Gamma^2$ знаходиться в інтервалі $10,9 < \sigma_\Gamma^2 < 55,25$, а середньоквадратичне відхилення σ_Γ – в інтервалі $3,3 < \sigma_\Gamma < 7,43$.***

4) *Знайти мінімальний обсяг вибірки з відомою величиною $\sigma_\Gamma = 1,2\sigma_B$, за якого з надійністю $\gamma = 0,95$ гранична похибка точкової оцінки $\overline{X}_\Gamma$ не перевищує $m \cdot 10^{-1}$, де m - порядковий номер студента у списку академгрупи.*

Нехай $m = 17$. Тоді гранична похибка оцінки $\overline{X}_\Gamma$ має задовольняти нерівність $\varepsilon \le 17 \cdot 10^{-1} = 1,7$. Оскільки величина σ_Γ відома, то граничне значення похибки задається рівністю (13)

$$\varepsilon = \frac{x \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}},$$

отже, для знаходження мінімального обсягу вибірки ми маємо розв'язати нерівність

$$\varepsilon = \frac{x \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} \le 1{,}7 \qquad \textbf{(24)}$$

де, x знаходиться з рівності

$$2\Phi(x) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(x) = \frac{\gamma}{2},$$

а значення функції Лапласа $\Phi(x)$ затабульовані у додатку ***(Жлуктенко,** додаток **2, с.319-321)**.*

За умовою $\gamma = 0{,}95$, отже, $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ і

$$\Phi(x) = 0{,}475.$$

З додатку 2 знаходимо $x = 1{,}96$ (рис. 6):

Продовження додатка 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,04	0,3508	1,33	0,4082	1,62	0,4474	1,91	0,4719
1,05	0,3531	1,34	0,4099	1,63	0,4484	1,92	0,4726
1,06	0,3554	1,35	0,4115	1,64	0,4495	1,93	0,4732
1,07	0,3577	1,36	0,4131	1,65	0,4505	1,94	0,4738
1,08	0,3599	1,37	0,4147	1,66	0,4515-	1,95	0,4744
1,09	0,3621	1,38	0,4162	1,67	0,4525	1,96	0,4750
1,10	0,3643	1,39	0,4177	1,68	0,4535	1,97	0,4756
1,11	0,3665	1,40	0,4192	1,69	0,4545	1,98	0,4761

Рис. 6. *Знаходження x за додатком 2*

Величина σ_Γ відома за умовою ($\sigma_\Gamma = 1{,}2\sigma_B = 5{,}5$), значення $x = 1{,}96$ знайдено. Підставляємо ці значення у нерівність (24) та розв'язуємо її для знаходження n:

$$\frac{1{,}96 \cdot 5{,}5}{\sqrt{n}} \le 1{,}7 \;\Leftrightarrow\; \frac{10{,}78}{\sqrt{n}} \le 1{,}7 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{n} \ge \frac{10{,}78}{1{,}7} \;\Leftrightarrow\; n \ge \left(\frac{10{,}78}{1{,}7}\right)^2,$$

$$n \ge 40{,}2,$$

заокруглюємо до більшого цілого і отримуємо, що мінімальний обсяг вибірки, за якого з надійністю $\gamma = 0{,}95$ гранична похибка точкової оцінки $\overline{X}_\Gamma$ не перевищує $17 \cdot 10^{-1} = 1{,}7$ - це $n_{\min} = 41$.

Відповідь: ***вибірка обсягом більшим або рівним*** $n_{\min} = 41$ ***елементів гарантує, що з надійністю*** $\gamma = 0{,}95$ ***гранична похибка точкової оцінки*** $\overline{X}_\Gamma$ ***не перевищує*** $17 \cdot 10^{-1} = 1{,}7$ ***(тобто*** $\overline{X}_\Gamma = \overline{x}_B \pm 1{,}7$***).*** ■

Завдання для самостійного розв'язання

Задача. *За вхідні дані взяти інтервальний розподіл, побудований у практичній роботі №1.*

Завдання:

1) *Знайти незміщені точкові статистичні оцінки параметрів $\overline{X}_\Gamma$, D_Γ генеральної сукупності;*
2) *Знайти інтервальні оцінки $\overline{X}_\Gamma$ з надійністю $\gamma = 0{,}9$:*

а) вважаючи, що величина $\sigma_Г$ відома (за значення $\sigma_Г$ взяти величину $\sigma_Г = 1{,}1\sigma_В$);

б) вважаючи, що величина $\sigma_Г$ невідома;

в) з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина $\sigma_Г$ відома (за значення $\sigma_Г$ взяти величину $\sigma_Г = 1{,}1\sigma_В$);

г) з допомогою нерівності Чебишева, вважаючи, що величина $\sigma_Г$ невідома.

3) *Знайти інтервальні оцінки $D_Г$ та $\sigma_Г$ з надійністю $\gamma = 0{,}9$.*

4) *Знайти мінімальний обсяг вибірки з відомою величиною $\sigma_Г = 1{,}1\sigma_В$, за якого з надійністю $\gamma = 0{,}99$ гранична похибка точкової оцінки $\overline{X}_Г$ не перевищує $m \cdot 10^{-1}$, де m - порядковий номер студента у списку академгрупи.*

Зверніть увагу:

- ☑ *Параметри $\sigma_Г$ та γ в модельному прикладі, що розв'язаний вище, та в реальному завданні для самостійного розв'язання відрізняються, тобто Ваше завдання слід опрацьовувати творчо, а не механічно відтворювати ☺*
- ☑ *Для зручності вхідні дані першої практичної роботи та необхідні таблиці поміщено у цьому ж файлі.*

Варіант 1 (Байрамов Алі)

Наявні дані про число тонн вантажів, які перевозяться щотижня поромом деякого морського порту в період навігації:
398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582.

Варіант 2 (Беленчук Олексій)

Наявні дані про денну виручку супермаркету (у тисячах гривень): 221 233 180 215 235 260 201 234 211 237 200 254 245 207 243 251 210 245 250 223 223 265 255 239 195 250 245 227 231 256

Варіант 3 (Березний Ігор)

Число пасажирів компанії «МОТОР-СІЧ» одного з рейсів протягом місяця між Запоріжжям і Києвом склало:
128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129

Варіант 4 (Бужак Андірй)

Наявний розподіл абітурієнтів за числом балів, отриманих ними на тестуванні з математики:
200, 197, 122, 124, 175, 183, 135 176, 200, 161,152, 123, 151, 144, 189, 182, 167, 183, 191, 200, 124, 190, 200, 185, 174, 156, 200, 165, 163, 185

Варіант 5 (Бурле Павло)

З метою визначення продуктивності праці робітників цеху пораховано кількість деталей, виготовлених кожним робочим за зміну:

42 43 38 40 43 38 40 41 39 42 42 43 44 42 44 43 40
42 41 32 43 42 39 38 45 39 42 40 41 39

Варіант 6 (Василевич Павло)

Обстеження підприємств області щодо зростання виробітку на одного робітника (у % до попереднього року) дали результати:

80 100 91 102 103 115 122 118 119 120 104 82 107 111 102 112 115
116 114 115 106 92 109 117 99 98 118 108 107 112.

Варіант 7 (Волощук Назарій)

Фіксувались кращі результати стрибків у довжину легкоатлетів (см):

795 795 796 797 803 789 804 790 783 804 804 795 796
797 803 799 804 799 800 804 833 830 832 837 834 832
835 836 835 833.

Варіант 8 (Георгіян Євген)

Наведено вагу пацієнтів (в кг), які бажають пройти курс лікування, щоб знизити вагу:

103 90 95 101 106 79 98 91 87 120 93 88 111 82 84 86 81 95 79 83 105
77 61 74 90 82 93 88 67 95

Варіант 9 (Гончаров Олександр)

Наявний розподіл розмірів пар чоловічого взуття, що продані магазином протягом дня:

39, 41, 40, 42, 41, 40, 42, 44, 40, 43, 42, 41, 43, 39, 42, 41, 42, 39, 41,
37, 43, 41, 38, 43, 42, 41, 40, 41, 38, 44

Варіант 10 (Григорчук В'ячеслав)

Вимірювання продуктивності праці бригади шахтарів (в тонах вугілля за зміну) дали такі результати :

331 356 391 299 364 317 386 360 402 390 365 411 383 374 357 306
427 382 381 373 303 338 315 401 334 345 367 324 385 326

Варіант 11 (Денис Денис)

Вимірювання витрат бензину легкового автомобіля на 1000 км пробігу дали такі результати (л):

90 90 89 89 91 91 90 89 91 90 86 89 88 86 85 86 87
88 90 77 79 81 78 81 79 80 79 78 87 92.

Варіант 12 (Дісар Іван)

Вимірювання довжини заготовок після їх первісної обробки дали такі результати (в міліметрах):
1151 1158 1152 1155 1160 1151 1154 1156 1160 1151 1153 1155 1154 1158 1151 1158 1151 1154 1153 1157 1154 1154 1152 1154 1155 1152 1153 1158 1157 1155.

Варіант 13 (Дручук Роман)

Дослідження тривалості годин горіння електролампочок дали такі результати:
750 751 756 769 757 760 743 745 759 750 739 752 758 750 758 753 747 749 751 762 748 754 752 739 755 744 764 760 739 748.

Варіант 14 (Дубець Василь)

Маємо дані про місячній зарплаті робітників (в гривнях) одного з цехів:
3015 2870 2965 2935 2989 2750 2972 3190 3140 3244 3007 3019 2825 3027 2925 3070 2839 3085 3040 3133 3090 3190 3112 3015 3279 2970 2890 3032 2948 3045

Варіант 15 (Дуплава Олександр)

Через кожну годину вимірювалася напруга струму в електромережі. При цьому були отримані наступні значення (в вольтах):
227, 229, 215, 230, 232, 223, 220, 222, 218, 219, 222, 221, 227, 226, 226, 209, 211, 215, 218, 220, 216, 220, 220, 221, 225, 224, 212, 217, 219, 220.

Варіант 16 (Жупник Евеліна)

Маємо дані про денну виручку продовольчого магазину (грн.):
5023 4970 4985 4974 5048 4996 5016 4978 4918 5028 4676 4970 4985 4638 4720 4816 4935 4917 4918 5028 3718 3812 3716 3875 3788 3852 3794 3790 3802 3755

Додаток 2[*]

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)
0,00	0,0000	0,26	0,1026	0,52	0,1985	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,27	0,1064	0,53	0,2019	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,28	0,1103	0,54	0,2054	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,29	0,1141	0,55	0,2088	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,30	0,1179	0,56	0,2123	0,820	0,2939
0,05	0,0199	0,31	0,1217	0,57	0,2157	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,32	0,1255	0,58	0,2190	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,33	0,1293	0,59	0,2224	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,34	0,1331	0,60	0,2257	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,35	0,1368	0,61	0,2291	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,36	0,1406	0,62	0,2324	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,37	0,1443	0,63	0,2357	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,38	0,1480	0,64	0,2389	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,39	0,1617	0,65	0,2422	0,91	0,3186
0,14	0,8557	0,40	0,1564	0,66	0,2454	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,41	0,1691	0,67	0,2486	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,42	0,1628	0,68	0,2517	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,43	0,1664	0,69	0,2549	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,44	0,1700	0,70	0,2580	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,45	0,1736	0,71	0,2611	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,46	0,1772	0,72	0,2642	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,47	0,1808	0,73	0,2673	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,48	0,1844	0,74	0,2703	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,49	0,1879	0,75	0,2734	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,50	0,1915	0,76	0,2764	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,51	0,1950	0,77	0,2794	1,03	0,3485

[*] Додатки 2—8 стосуються вміщеного в цій частині курсу математичної статистики.

x	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)	*x*	*Φ*(*x*)
1,04	0,3508	1,33	0,4082	1,62	0,4474	1,91	0,4719
1,05	0,3531	1,34	0,4099	1,63	0,4484	1,92	0,4726
1,06	0,3554	1,35	0,4115	1,64	0,4495	1,93	0,4732
1,07	0,3577	1,36	0,4131	1,65	0,4505	1,94	0,4738
1,08	0,3599	1,37	0,4147	1,66	0,4515-	1,95	0,4744
1,09	0,3621	1,38	0,4162	1,67	0,4525	1,96	0,4750
1,10	0,3643	1,39	0,4177	1,68	0,4535	1,97	0,4756
1,11	0,3665	1,40	0,4192	1,69	0,4545	1,98	0,4761
1,12	0,3686	1,41	0,4207	1,70	0,4554	1,99	0,4767
1,13	0,3708	1,42	0,4222	1,71	0,4564	2,00	0,4772
1,14	0,3729	1,43	0,4236	1,72	0,4573	2,02	0,4783
1,15	0,3749	1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793
1,16	0,3770	1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803
1,17	0,3790	1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812
1,18	0,3810	1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821
1,19	0,3830	1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830
1,20	0,3849	1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838
1,21	0,3869	1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846
1,22	0,3883	1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854
1,23	0,3907	1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861
1,24	0,3925	1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868
1,25	0,3944	1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875
1,26	0,3962	1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881
1,27	0,3980	1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887
1,28	0,3997	1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893
1,29	0,4015	1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898
1,30	0,4032	1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904
1,31	0,4049	1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909
1,32	0,4066	1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913

Закінчення додатка 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,96	0,49846		
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,98	0,49856		
2,58	0,4951	2,78	0,4973	3,00	0,49865	$x > 5$	0,5

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t(j, k = n-1)$, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ РІВНІСТЬ $p(t) = 2\int_0^t f(x)dt = \gamma$

$k = n-1$	$p(t)$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,326	0,510	0,727	1,00	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	63,662
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	2,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,694	8,610
5	0,132	0,257	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,401	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,086	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073

Закінчення додатка 3

$k = n - 1$	$p(t)$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,872	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,859	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,857	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646

Додаток 4

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_1^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,6	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,3	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	38,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Закінчення додатка 4

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_2^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_2^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,76	1,14	1,61	2,34	3,0	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,563	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	10,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Додаток 5

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162