Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Підлягає поверненню на кафедру

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Конспект лекцій
Частина 2

Чернівці
Чернівецький національний університет
2011

УДК 519.852
ББК 22.183.4
М 545

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

М 545 **Методи** оптимізації : консп. лекцій. – У 3-х ч. / укл. М.А. Руснак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. – Ч. 2-га. – 56 с.

Видання містить конспект лекцій з дисципліни «Методи оптимізації». Друга частина відповідає змістовому модулю «Спеціальні ЗЛП та методи їх розв'язування».

Для студентів факультетів комп'ютерних наук та прикладної математики, які здобувають освіту в галузі знань „Системні науки та кібернетика”.

ББК 22.183.4
УДК 519.852

1. Транспортна та її двоїста задачі

Розглянуті раніше методи розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП) універсальні. Однак існує цілий ряд ЗЛП, для яких унаслідок їх специфіки застосування загальних методів спрощується. Одною з таких задач є транспортна задача. Прийнято поділяти такі задачі на два класи - транспортні задачі без обмежень на пропускні здатності комунікацій (ТЗБО) і транспортні задачі з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО).

Розпочнемо з вивчення ТЗБО: у кожному з пунктів виробництва $P_i, i = \overline{1, m}$ $(m > 1)$ виробляється a_i одиниць однорідної продукції, а у кожному з пунктів споживання $Q_j, j = \overline{1, n}$ $(n > 1)$ споживається b_j одиниць цієї продукції. Пункти виробництва $P_i, i = \overline{1, m}$ зв’язані транспортними комунікаціями P_iQ_j з пунктами споживання $Q_j, j = \overline{1, n}$. Для кожної комунікації P_iQ_j задано величину $c_{i,j}$ – вартість перевезення одиниці продукції з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j. Задача полягає у побудові такого плану перевезень, який би максимально завантажував можливості виробників, максимально задовольняв потреби споживачів і мав при цьому мінімальну вартість перевезень.

Якщо через $x_{i,j}$ позначити кількість одиниць продукції, що планується до перевезення з пункту виробництва P_i у пункт споживання Q_j, то математичну модель ТЗБО можна записати у вигляді:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min , \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i , \ i = \overline{1, m} , \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad j = \overline{1,n} \ , \tag{3}$$

$$x_{i,j} \geq 0 \ , \ x_{i,j} - цілі \ , \ i = \overline{1,m} \, , \ j = \overline{1,n} \, . \tag{4}$$

Розв’язати задачу (1) – (4) означає знайти такий план перевезень $\{x_{i,j}\}$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, який задовольняє умови (2) – (4) і має мінімальну вартість.

Будемо вважати, що $a_i > 0,$ $b_j > 0$, $c_{i,j} \geq 0,$ $i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n}$, а одиниці виміру в задачі (1) – (4) узгоджені.

Припустимо також, що задача (1) – (4) збалансована, тобто виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d \ , \tag{5}$$

де d – деяке число. Якщо умова (5) не виконується, задача (1) – (4) називається незбалансованою.

Відмовимося тимчасово від цілочислових вимог у природних умовах (4) та введемо такі позначення:

$x = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})^T$ - вектор (план) перевезень;

$b = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)^T$ - вектор виробництва-споживання;

$A_{i,j} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ - вектор комунікації $P_i Q_j$ (його розмірність дорівнює $m+n$, перша 1 стоїть на i - му місці, друга - на $m+j$ - му);

$c = (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,n}, \ldots, c_{m,1}, \ldots, c_{m,n})^T$ - вектор транспортних витрат;

$A = \{A_{1,1} \mid \ldots \mid A_{1,n} \mid A_{2,1} \mid \ldots \mid A_{2,n} \mid \ldots \mid A_{m,1} \mid \ldots \mid A_{m,n}\}$ - матриця умов.

Тоді ТЗБО (1) – (4) набуде вигляду

$$L(x) = c^T x \to \min \, , \quad Ax = b \, , \ x \geq 0 \, . \tag{6}$$

Це – СЗЛП, її можна розв’язати симплекс-методом. Однак матриця A має велику розмірність – ($(m+n)\times(m*n)$), що робить використання СМ незручним навіть при невеликих m і n. Окрім того, елементами матриці A є лише нулі та одиниці, причому нулів - більшість, що дозволяє спростити розв’язування.

Дослідимо спочатку властивості ТЗБО (1) – (4) або, що те саме, СЗЛП (6).

Властивість 1. Збалансована ТЗБО завжди має розв’язок (можливо, не єдиний).

Доведення. Треба показати, що допустима множина СЗЛП (6) непорожня й обмежена. Побудуємо вектор x із чисел $x_{i,j}=\dfrac{a_i b_j}{d}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, де d – відоме число з (5). За припущенням, $a_i>0$, , $b_j>0$, тому $x\geq 0$. Перевіримо, наприклад, виконання умов (2). Маємо

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i b_j}{d}=\frac{a_i}{d}\sum_{j=1}^{n} b_j=a_i\ ,\ i=\overline{1,m}.$$

Аналогічно перевіряємо виконання умов (3). Тому побудований вектор x – допустимий, а допустима множина (6) – непорожня. Далі зауважимо, що $0\leq x_{i,j}\leq a_i$, для всіх $i=\overline{1,m}$ і $0\leq x_{i,j}\leq b_j$, для всіх $j=\overline{1,n}$. Візьмемо $h=\max\limits_{i,j}(a_i,b_j)$ і отримаємо $0\leq x_{i,j}\leq h$ для всіх $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Звідси і випливає обмеженість допустимої множини СЗЛП (6). •

Властивість 2. Ранг матриці A в (6) дорівнює $m+n-1$.

Доведення. Легко побачити, що, при зроблених припущеннях, виконується нерівність $m+n\leq m*n$, а тому $rangA\leq m+n$. Оскільки вектор, отриманий як сума перших m рядків матриці, дорівнює вектору, отриманому як сума останніх n рядків, то $rangA<m+n$. Побудуємо підматрицю матриці A так $\{A_{1,n}\,|\,A_{2,n}\,|\ldots|\,A_{m,n}\,|\,A_{1,1}\,|\,A_{1,2}\,|\ldots|\,A_{1,n-1}\}$. Розмірність цієї

підматриці – $((m+n)\times(m+n-1))$. Якщо викреслити з неї $m+n$-й рядок, то отримаємо мінор розміру $m+n-1$ із ненульовим визначником. •

Властивість 3. Якщо у збалансованій ТЗБО числа a_i, $i=\overline{1,m}$ та b_j, $j=\overline{1,n}$ цілі, то серед розв'язків знайдеться цілочисловий.

Доведення наразі відкладемо – його отримаємо як наслідок із методу відшукання розв'язку ТЗБО.

Зауважимо, що властивість 3 виправдовує відмову від цілочислових вимог у (4).

При розв'язуванні транспортних задач, як і при розв'язуванні СЗЛП, вирішальну роль відіграє множина допустимих векторів (планів) і множина базисних векторів (планів). Унаслідок властивостей СЗЛП і твердження 2, можна сказати, що *невироджений базисний план* має рівно $m+n-1$ додатну компоненту (перевезення), яким відповідає система лінійно незалежних векторів $A_{i,j}$ (комунікацій P_iQ_j). У *виродженого базисного плану* їх менше.

Запишемо двоїсту задачу до (6)

$$W(u)=b^T u\to\max,\ u^T A\le c^T, \tag{7}$$

де u – вектор двоїстих змінних, $u\in R^{m+n}$. Оскільки обмежень на знак у двоїстих змінних немає, визначимо їх так: $u=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_m,v_1,v_2,\ldots,v_n)$. За побудовою, група двоїстих змінних $\{-u_i\}$, $i=\overline{1,m}$ відповідає обмеженням (2), а група двоїстих змінних $\{v_j\}$, $j=\overline{1,n}$ – обмеженням (3). Тому першу групу називають *потенціалами пунктів виробництва*, другу – *потенціалами пунктів споживання*.

У координатній формі задача (7) має вигляд

$$W(u)=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j-\sum_{i=1}^{m} a_i u_i\to\max,$$

$$v_j-u_i\le c_{i,j},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Пара задач (6) і (8) утворює несиметричну пару двоїстих задач. За другою теоремою двоїстості, для того, щоб допустимий (у тому числі і базисний) план x був розв’язком задачі (1) – (4), необхідно і досить існування допустимого для задачі (8) вектора u, такого, що

$$\begin{cases} v_j - u_i = c_{i,j}, \text{ якщо } x_{i,j} > 0, \\ v_j - u_i \le c_{i,j}, \text{ якщо } x_{i,j} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Умови (9) іноді називають *критерієм оптимальності базисного плану* задачі (1) – (4).

2. Побудова базисного плану та його інтерпретація

Початкові дані ТЗБО та результати проміжних обчислень, пов’язаних з її розв’язанням, зручно заносити до транспортної таблиці

	Q_1	$\dots$	Q_n	Запаси
P_1				a_1
P_2				a_2
$\dots$		c_{ij} x_{ij}		$\dots$
P_m				a_m
Потреби	b_1	$\dots$	b_n	d

Транспортні витрати $c_{i,j}$ записуються у верхньому правому куті відповідної клітинки транспортної таблиці. Як правило, компоненти $x_{i,j}$ вектора перевезень заносяться до транспортної таблиці лише тоді, коли $x_{i,j} > 0$. У цьому випадку відповідна клітинка транспортної таблиці називається заповненою, інакше – вільною. Надалі будемо розглядати тільки невироджені ТЗБО – задачі, в яких усі базисні плани невироджені. Зауважимо, що у транспортних таблицях таких задач буде рівно $m+n-1$ заповнена клітинка. Клітинку, яка знаходиться на перетині рядка P_i і стовпчика Q_j, будемо позначати (i, j).

Унаслідок специфіки ТЗБО, пошук початкового базисного плану значно спрощується у порівнянні з пошуком базисного вектора СЗЛП. Розглянемо два найбільш уживаних методи.

Метод північно-західного кута

Вибирається клітинка (1,1) транспортної таблиці (її північно-західний кут) і завантажується максимально можливим перевезенням. При цьому можливі такі випадки:

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = a_1,$$

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = b_1,$$

$$x_{1,1} = \min((a_1, b_1) = a_1 = b_1.$$

У першому випадку з подальшого розгляду виключається перший рядок транспортної таблиці і $b_1 = b_1 - x_{1,1}$. У другому випадку виключається перший стовпець і $a_1 = a_1 - x_{1,1}$. У третьому випадку з подальшого розгляду виключаються як перший стовпець, так і перший рядок. У зменшеній у такий спосіб транспортній таблиці знаходиться її верхня ліва клітинка (північно-західний кут), завантажується максимально можливим чином і т. д.

Зрозуміло, що побудований таким способом план перевезень є допустимим планом ТЗБО, причому його елементи - цілі числа. Крім того, можна довести, що цей план є базисним. Зауважимо, що при побудові початкового базисного розв’язку за методом північно-західного кута зовсім не враховуються вартості перевезень $c_{i,j}$. Тому, як правило, такий план далекий від оптимального.

Метод мінімального елемента

Ідея методу полягає у тому, щоб максимально завантажити перевезеннями комунікації з мінімальною вартістю перевезень. Фактично ж цей метод відрізняється від методу північно-західного кута лише тим, що на кожному кроці побудови початкового базисного розв'язку для завантаження вибирається клітинка з мінімальним значенням $c_{i,j}$.

На першому кроці вибираємо клітинку (l,k) транспортної таблиці, в якій значення $c_{l,k}$ – найменше (якщо таких клітинок кілька, то вибираємо одну з них). Завантажуємо максимально можливим перевезенням обрану клітинку. При цьому можливі такі випадки: $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = a_l$, $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = b_k$, $x_{l,k} = \min((a_l, b_k) = a_l = b_k$. У першому випадку з подальшого розгляду виключається l-й рядок транспортної таблиці і $b_k = b_k - x_{l,k}$. У другому випадку виключається k-й стовпець і $a_l = a_l - x_{l,k}$. У третьому випадку з подальшого розгляду виключаються як l-й рядок, так і k-й стовпці. У зменшеній таким способом транспортній таблиці знаходиться клітинка з найменшим $c_{l,k}$, завантажується максимально можливим чином і т. д. Можна довести, що побудований за методом мінімального елемента план є базисним планом ТЗБО, причому його елементи - цілі числа.

Наведемо далі без доведень кілька важливих для подальшого тверджень та означень [6].

Означення 1. Набір різних комунікацій $P_{i1}Q_{j1}$, $P_{i2}Q_{j1}$, $P_{i2}Q_{j2}$, …, $P_{is}Q_{js-1}$, $P_{is}Q_{js}$ будемо називати *маршрутом,* що з'єднує пункти P_{i1} і Q_{js}.

Означення 2. Маршрут, до якого додано комунікацію $P_{i1}Q_{js}$, будемо називати замкненим маршрутом або *циклом*.

Означення 3. Комунікацію P_iQ_j будемо називати *основною* комунікацією допустимого плану x ТЗБО, якщо $x_{i,j} > 0$.

Твердження 1. Допустимий план ТЗБО буде базисним тоді і тільки тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.

Твердження 2. Система векторів $\{A_{i,j}\}$ задачі (6) лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли з відповідних комунікацій неможливо утворити цикл.

Твердження 3. ТЗБО буде невиродженою тоді і тільки тоді, коли для довільних наборів індексів $i1, i2, \ldots, it$, $t < m$ та $j1, j2, \ldots, js$, $s < n$ виконується нерівність $\sum_{l=1}^{t} a_{il} \neq \sum_{k=1}^{s} b_{jk}$.

<u>Приклад.</u> Меблева фірма має на трьох складах запас столів у кількостях 15, 25, 20. Фірма отримала замовлення від п'яти магазинів на постачання столів у кількостях 20, 12, 5, 8, 15. Вартість перевезення одного ліжка зі складу до магазину задана таблицею

1	3	3	4	2
4	1	2	3	3
5	8	1	4	3

Потрібно побудувати плани перевезень за методами північно-західного кута і мінімального елемента, дослідити їх та порівняти сумарні вартості перевезень.

<u>Розв'язування.</u>

Приймаючи склади за виробників і магазини за споживачів, побудуємо транспортну таблицю

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1	3	3	4	2	15
P_2	4	1	2	3	3	25
P_3	5	8	1	4	3	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d = 60$

Задача збалансована. Побудуємо початковий план методом північно-західного кута:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1 15	3	3	4	2	15
P_2	4 5	1 12	2 5	3 3	3	25
P_3	5	8	1	4 5	3 15	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d=60$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}, \ L(x^1) = 131,$$

та методом мінімального елемента:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Запаси
P_1	1 15	3	3	4	2	15
P_2	4	1 12	2	3 8	3 5	25
P_3	5 5	8	1 5	4	3 10	20
Потреби	20	12	5	8	15	$d=60$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 8 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \ L(x^2) = 126.$$

Крім того, зауважимо, що базисний план x^1 має $m+n-1=3+5-1=7$ ненульових компонент, тому це невироджений базисний план. Базисний план x^2 теж є невиродженим базисним планом. Чи можна стверджувати, що розглянута ТЗБО – невироджена? Ні, оскільки $a_1+a_3=b_1+b_5$ і твердження 3 указує на виродженість цієї задачі. Це підтверджує вироджений план

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 5 & 8 & 0 \\ 20 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Метод потенціалів

Нагадаємо, що ми розглядаємо невироджені ТЗБО, уміємо побудувати початковий базисний план перевезень і знаємо критерій оптимальності базисного плану (9). Хочемо навчитися переходити від одного базисного плану до іншого так, щоб значення цільової функції зменшувалося. Цей перехід і є змістом методу потенціалів розв'язування ТЗБО.

Нехай x – деякий (початковий) базисний план ТЗБО.

Означення 4. Клітинку (i, j) транспортної таблиці називатимемо базисною, якщо $x_{i,j} > 0$, решта клітинок - небазисні.

Означення 5. Величину $\Delta_{i,j} = c_{i,j} - (v_j - u_i)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ називатимемо відносною оцінкою змінної (клітинки) $x_{i,j}$.

Відповідно до двоїстого критерію оптимальності, базисний план x буде розв'язком ТЗБО тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення: $\Delta_{i,j} = 0$ для базисних клітинок і $\Delta_{i,j} \geq 0$ для небазисних клітинок.

Для знаходження $m+n$ потенціалів маємо $m+n-1$ рівняння вигляду $v_j - u_i = c_{i,j}$ для тих i та j, для яких $x_{i,j} > 0$. Припустимо, що $u_1 = 0$, тоді інші потенціали знайдемо з відповідних рівнянь. Базисний план буде розв'язком ТЗБО, якщо виконуються умови (2.9), інакше – план перевезень можна поліпшити.

Перехід до нового базисного плану здійснимо за правилами:

- визначимо пару індексів (i_0, j_0) таку, що $x_{i_0,j_0} = 0$, але

$\Delta_{i_0,j_0} < 0$. Якщо таких пар кілька, виберемо одну з найменшим Δ_{i_0,j_0}. Змінну x_{i_0,j_0} введемо до базису;

- будуємо замкнений цикл (i_0, j_0)-(i_1, j_0)-(i_1, j_1)-(i_2, j_1)-…-(i_k, j_k)-(i_0, j_k)-(i_0, j_0) з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним;
- позначимо $I_+ = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\}$ і $I_- = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$ та знайдемо $\theta = \min\limits_{(i,j)\in I_-} x_{i,j}$. Відповідна θ змінна виводиться з базису;
- компоненти нового базисного плану x' знайдемо зі співвідношень

$$
\begin{aligned}
x'_{i,j} &= x_{i,j}, \text{ якщо} (i,j) \notin I_+ \cup I_-,\\
x'_{i,j} &= x_{i,j} + \theta, \text{ якщо} (i,j) \in I_+, \qquad (10)\\
x'_{i,j} &= x_{i,j} - \theta, \text{ якщо} (i,j) \in I_-.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що при цьому кількість базисних змінних не зміниться і на новому базисному плані $L(x') = L(x) + \theta\Delta_{i_0,j_0}$. Унаслідок визначення θ і вибору Δ_{i_0,j_0} значення цільової функції зменшиться.

Зауваження 1. Оскільки $L(x') < L(x)$ на кожному кроці і $L(x)$ - обмежена знизу, то за *скінченну кількість кроків* розв'язок буде знайдено.

Зауваження 2. Унаслідок визначення θ та правил побудови плану x', робимо висновок, що компоненти плану - цілі числа. Цим завершується доведення властивості 3.

Відмовимося від припущення, що ТЗБО – невироджена. Тоді можуть існувати вироджені базисні плани й безпосереднє застосування методу потенціалів ускладнюється. Рекомендується побудувати та розв'язати "збурену" задачу, побудовану за правилами:

- запаси кожного постачальника збільшуємо на величину $\varepsilon > 0$, вважаючи її досить малою;

- потреби одного зі споживачів, як правило n-го, збільшуємо на величину $m\varepsilon$. Збалансованість задачі при цьому не порушується;
- розв'язуємо "збурену" задачу методом потенціалів і вважаємо у розв'язку $\varepsilon = 0$. Отриманий план є розв'язком ТЗБО.

Відмовимося від припущення що ТЗБО - збалансована. Тоді умова (5) може набути вигляду $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ або $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. У першому випадку задовольнити потреби всіх споживачів неможливо, але розподілити існуючі запаси так, щоб план перевезень мав мінімальну вартість, можна. Для цього введемо до розгляду додаткового виробника P_{m+1} із можливістю виробництва $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ одиниць продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з цього пункту виробництва до кожного з пунктів споживання вважатимемо такою, що дорівнює нулю. Побудована задача збалансована і її можна розв'язати методом потенціалів. Викреслимо зі знайденого розв'язку стрічку $(m+1)$ і отримаємо "розв'язок" початкової задачі. Значення $x_{m+1,j} > 0$ вказують величину незадоволених потреб у пункті споживання Q_j.

Цілком аналогічні міркування можливі й у другому випадку – розподілити всі запаси неможливо, але задовольнити потреби споживачів так, щоб план перевезень мав мінімальну вартість, можна. Для цього введемо до розгляду додаткового споживача Q_{n+1} із потребами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць продукції. Вартість перевезення одиниці продукції до цього пункту споживання з кожного пункту виробництва вважатимемо такою, що дорівнює нулю. Побудована задача збалансована і її можна розв'язати методом потенціалів. Викреслимо зі знайденого розв’язку стовпчик $(n+1)$ і отримаємо ”розв’язок” початкової задачі. Значення $x_{i,n+1} > 0$ вказують величину невивезених запасів у пункті виробництва P_i.

Такий підхід до незбалансованих ТЗБО можливий, якщо нам все одно, який із споживачів недоотримає продукції, або у якого виробника залишиться невивезена продукція. Якщо ж це не так, слід увести поняття ”штрафу” за недопоставлену (невивезену) продукцію. Розглянемо, наприклад, випадок $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто запасів продукції недостатньо для задоволення потреб усіх споживачів. Нехай втрати, до яких призводить недоотримання одиниці продукції в пункті споживання Q_j, оцінюються в r_j одиниць (у тих же одиницях, що й $c_{i,j}$). Тоді задачу слід переформулювати так:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} r_j y_j \to \min,$$

де y_j – об’єм незабезпеченого споживання в Q_j при деякому реалізованому плані x, тобто $y_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$. Обмеження задачі набудуть вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} + y_j = b_j \quad j = \overline{1,n} \ ,$$

$$x_{i,j} \ge 0 \ , \ y_j \ge 0 \, , \ i = \overline{1,m} \, , \ j = \overline{1,n} \, .$$

Для того, щоб звести цю задачу до збалансованої ТЗБО, введемо додаткового виробника P_{m+1} із можливістю виробництва $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ одиниць продукції, вважатимемо, що $c_{m+1,j} = r_j$, $x_{m+1,j} = y_j$, $j = \overline{1,n}$. Проведемо перетворення $x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$, $j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}$$

та врахуємо їх у задачі. Отримаємо ТЗБО

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1, m+1} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{i,j} = b_j \quad j = \overline{1,n} \ ,$$

$$x_{i,j} \ge 0 \ , \ i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1,n} ,$$

яку вже можна розв’язати.

Аналогічні міркування можливі й у другому випадку.

4. Транспортні задачі з обмеженнями

Обмежимося розглядом збалансованих транспортних задач з обмеженнями на пропускні здатності комунікацій (ТЗО). Математична модель ТЗО має вигляд

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min , \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \ , \ i = \overline{1,m} \ , \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad j = \overline{1,n} \ , \tag{13}$$

$$0 \le x_{i,j} \le r_{i,j} \ , \ x_{i,j} - \textit{цілі} \ , \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d \ . \tag{15}$$

Як і раніше, будемо вважати, що $a_i > 0,\quad b_j > 0$, $c_{i,j} \ge 0,\ r_{i,j} \ge 0$, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, а одиниці виміру в задачі (11) – (14) узгоджені.

Твердження 4. Якщо числа a_i, b_j, $r_{i,j}$, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ - цілі й розв'язки задачі (11) – (15) існують, то серед них знайдеться цілочисловий розв'язок.

Доведення цього твердження наразі відкладемо (його отримаємо як наслідок методу відшукання розв'язку).

Зауважимо, що це твердження дає змогу відмовитися від вимоги цілочисельності в (14).

Відповідно до змін у постановці задачі, треба змінити поняття базисного плану.

Означення 6. Допустимий план $x = \{x_{i,j}\}$ ТЗО будемо називати базисним, якщо перевезенням $x_{i,j}$, таким, що $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$, відповідає система лінійно незалежних векторів комунікацій $A_{i,j}$. Якщо кількість таких перевезень дорівнює $m+n-1$, то базисний план називається невиродженим, якщо ж менша - виродженим.

Означення 7. Комунікацію $P_i Q_j$ будемо називати *основною* комунікацією допустимого плану x ТЗБО, якщо $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$.

Твердження 8. Допустимий план ТЗБО буде базисним тоді і тільки тоді, коли з його основних комунікацій неможливо утворити цикл.

Надалі будемо розглядати невироджені ТЗО, усі базисні плани яких невироджені. Можна довести, що як і для ТЗБО, розв'язок знаходиться направленим перебором базисних планів. Як критерій оптимальності можна використовувати аналог другої теореми двоїстості – базисний план ТЗО буде її розв'язком тоді і тільки тоді, коли знайдуться потенціали пунктів виробництва $-u_i$, $i = \overline{1,m}$ і пунктів споживання v_j, $j = \overline{1,n}$, такі, що відносні оцінки змінних $\Delta_{i,j} = c_{i,j} - (v_j - u_i)$,

$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ задовольняють умовам

$$\Delta_{i,j}=0,\ \textit{якщо}\ 0<x_{i,j}<r_{i,j},$$
$$\Delta_{i,j}\ge 0,\ \textit{якщо}\ x_{i,j}=0, \qquad (16)$$
$$\Delta_{i,j}\le 0,\ \textit{якщо}\ x_{i,j}=r_{i,j}.$$

Комунікації, в яких $x_{i,j}=0$ називають вільними, а комунікації, в яких $x_{i,j}=r_{i,j}$ називають насиченими.

Для розв’язування ТЗО розроблено метод, подібний до методу потенціалів. Правила визначення потенціалів залишаються без змін - слід розв’язати $m+n-1$ лінійне рівняння з $m+n$ невідомими. Умови оптимальності можуть порушуватися двома способами:

- для вільної небазисної комунікації (i_0, j_0) маємо $x_{i_0,j_0}=0$, але $\Delta_{i_0,j_0}<0$;
- для насиченої небазисної комунікації (i_0, j_0) маємо $x_{i_0,j_0}=r_{i_0,j_0}$, але $\Delta_{i_0,j_0}>0$.

У першому випадку будуємо замкнений цикл (i_0, j_0)-(i_1, j_0)-(i_1, j_1)-(i_2, j_1)-…-(i_k, j_k)-(i_0, j_k)-(i_0, j_0) з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначаємо

$$I_+=\{(i_0,j_0),(i_1,j_1),\cdots,(i_{k-1},j_{k-1}),(i_k,j_k)\},$$
$$I_-=\{(i_1,j_0),(i_2,j_1),\cdots,(i_k,j_{k-1}),(i_0,j_k)\}$$

та знаходимо

$$\theta_1=\min_{(i,j)\in I_-} x_{i,j},\quad \theta_2=\min_{(i,j)\in I_+}\{r_{i,j}-x_{i,j})\},\quad \theta=\min\{\theta_1,\theta_2\}. \qquad (17)$$

Відповідну θ змінну виводимо з базису, змінну з індексами (i_0, j_0) уводимо в базис. Компоненти нового базисного плану x' знаходимо зі співвідношень

$$x'_{i,j}=x_{i,j},\textit{якщо}(i,j)\notin I_+\bigcup I_-,$$
$$x'_{i,j}=x_{i,j}+\theta,\textit{якщо}(i,j)\in I_+, \qquad (18)$$
$$x'_{i,j}=x_{i,j}-\theta,\textit{якщо}(i,j)\in I_-.$$

У другому випадку будуємо замкнений цикл (i_0, j_0)-(i_1, j_0)-(i_1, j_1)-(i_2, j_1)-…-(i_k, j_k)-(i_0, j_k)-(i_0, j_0) з вершинами в клітинках, які відповідають базисним змінним, позначаємо

$$I_{-} = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \cdots, (i_{k-1}, j_{k-1}), (i_k, j_k)\},$$

$$I_{+} = \{(i_1, j_0), (i_2, j_1), \cdots, (i_k, j_{k-1}), (i_0, j_k)\}$$

та знаходимо

$$\theta_1 = \min_{(i,j)\in I_-} x_{i,j}\ ,\ \ \theta_2 = \min_{(i,j)\in I_+} \{r_{i,j} - x_{i,j})\},\ \ \theta = \min\ \{\theta_1, \theta_2\}. \qquad (19)$$

Відповідну θ змінну виводимо з базису, змінна з індексами (i_0, j_0) уводимо в базис. Компоненти нового базисного плану $x^{'}$ знаходимо зі співвідношень

$$\begin{aligned} x^{'}_{i,j} &= x_{i,j}, \mathit{якщо} (i, j) \notin I_{+} \cup I_{-}, \\ x^{'}_{i,j} &= x_{i,j} + \theta, \mathit{якщо} (i, j) \in I_{+}, \\ x^{'}_{i,j} &= x_{i,j} - \theta, \mathit{якщо} (i, j) \in I_{-}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Очевидно, що в обох випадках $L(x^{'}) = L(x) - \theta\,|\,\Delta_{i_0 j_0}\,|$.

Для нового базисного плану знову обчислюють потенціали та перевіряють критерій оптимальності і т.д. Зауважимо, що у виродженому випадку такий вибір θ може не приводити до нового базисного плану, наприклад при $\theta = 0$. У цьому випадку рекомендується змінити набір базисних змінних. Умови задачі та хід її розв'язування зручно записувати в таблицях.

Структура внутрішньої клітинки таблиці буде такою:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & c_{i,j} \\ & x_{i,j} & \\ r_{i,j} & & \end{array}}$$

Розглянемо далі питання про побудову початкового базисного плану.

Спочатку зауважимо, що ТЗО може взагалі не мати розв'язків. Наприклад, якщо при деякому i виконується нерівність $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} < a_i$, то з пункту виробництва P_i неможливо вивезти всю продукцію. Відзначимо далі, що умови (14) при використанні відомих методів (північно-західного кута чи мінімального елемента) можуть привести до недопустимого плану – якась кількість запасів може виявитись невичерпаною, а деякі потреби – не задовольняються.

Побудувати початковий базисний план ТЗО можна за допомогою такої двокрокової процедури.

1. Попередній етап

Знаходимо в транспортній таблиці клітинку (k,l) з найменшою вартістю перевезень $c_{k,l}$, якщо їх кілька – вибираємо будь-яку з них.

Покладемо $x_{k,l} = \min(a_k, b_l, r_{k,l})$. Маємо три можливості:

а) $x_{k,l} = a_k$. У такому випадку приймемо $x_{k,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq l$ та викреслимо з таблиці рядок із номером k.

б) $x_{k,l} = b_l$. У такому випадку приймемо $x_{i,l} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $i \neq k$ та викреслимо з таблиці стовпчик із номером l.

в) $x_{k,l} = r_{k,l}$. У такому випадку обчислимо $a_k = a_k - x_{k,l}$, $b_l = b_l - x_{k,l}$ та викреслимо з таблиці клітинку (k,l).

Ці дії повторюємо доти, поки не заповнимо всю транспортну таблицю.

Коли таблиця заповнена, то обов'язково виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le a_i \ , \ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \le b_j \ , \ 0 \le x_{i,j} \le r_{i,j} \, , \ i = \overline{1,m} \, , \ j = \overline{1,n} \, .$$

Уведемо допоміжні змінні

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \ , \ i = \overline{1,m} \ \text{та} \ x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ , \ j = \overline{1,n} \, .$$

Просумуємо допоміжні змінні за відповідними індексами і, врахувавши збалансованість задачі,отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \omega . \qquad (21)$$

Тут ω – сумарна кількість невичерпаних запасів (незадоволених потреб). Якщо $\omega = 0$, то побудований план допустимий для ТЗО. Якщо ж $\omega \neq 0$, то переходимо до етапу 2.

2. Побудова і розв'язування розширеної ТЗО

Уведемо до розгляду додатковий пункт постачання P_{m+1} із запасами ω та додатковий пункт споживання Q_{n+1} із потребами ω. При цьому вважаємо, що

$$r_{m+1,j} = r_{i,n+1} = \infty ,\ i = \overline{1, m+1},\ j = \overline{1, n+1},$$

$$c_{m+1,j} = c_{i,n+1} = M ,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} ,\ c_{m+1,n+1} = 0 . \qquad (22)$$

Тут $M > 0$ досить велике додатне число, більше за всі числа, з якими воно порівнюється в процесі розв'язування задачі. Застосуємо для розв'язування допоміжної задачі метод потенціалів. Нехай $x^* = \{x^*_{i,j}\}$, $i = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, n+1}$ - знайдений розв'язок. У випадку $x^*_{m+1,n+1} = \omega$ початковий базисний план ТЗО будується так: $x = \{x^*_{i,j}\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. У випадку $x^*_{m+1,n+1} < \omega$ початкова ТЗО не має допустимих планів. Зауважимо, що рівність $x_{m+1,n+1} = \omega$ можна використовувати як критерій закінчення розв'язування допоміжної задачі.

Щоб отримати розв'язок початкової ТЗО, викреслюємо з останньої таблиці $m+1$-й рядок та $n+1$-й стовпчик і знову застосовуємо метод потенціалів.

Зауваження 1. Повертаючись до доведення твердження 7, бачимо, що при зроблених припущеннях допустимий план, побудований за описаною вище процедурою, буде складатися з цілих чисел. Запропоновані для поліпшення плану формули (17) - (18) або (19) - (20) залишають його цілочисловим.

Зауваження 2. У випадку виродженої ТЗО можуть існувати вироджені базисні плани. Рекомендують, насамперед, до базисних змінних (клітинок) відносити ті, в яких $0 < x_{i,j} < r_{i,j}$. При необхідності, збільшувати кількість базисних змінних можна за рахунок вільних ($x_{i,j} = 0$) або насичених ($x_{i,j} = r_{i,j}$) клітинок, але так, щоб із відповідних базисним клітинкам комунікацій неможливо було б утворити цикл.

5. Задача про призначення

Задача про призначення (або задача про оптимальний розподіл механізмів на роботи) є важливим випадком раніше розглянутих ТЗБО, з одного боку, та однією з найпростіших задач цілочислового програмування – з іншого. Постановка задачі: нехай потрібно виконати n різних робіт і є n різних механізмів для їх виконання, причому кожен механізм може бути використаним для виконання кожної з робіт. Продуктивність роботи механізму залежить від тієї роботи, для виконання якої він призначений. Задача полягає в такому розподілі механізмів по роботах, при якому їх сумарна продуктивність буде максимальною. Позначимо величиною $c_{i,j}$ продуктивність i-го механізму при виконанні j-ї роботи. Сукупність цих величин утворює матрицю $C = \{c_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, яку назвемо матрицею продуктивності. Розглянемо матрицю $X = \{x_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ як один із можливих варіантів розподілу механізмів на роботи, де $x_{i,j} = 1$, якщо i-й механізм призначено на j-ту роботу, та $x_{i,j} = 0$ – в іншому випадку. В цих позначеннях математична модель задачі про призначення має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \max, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, \ \ j = \overline{1,n}, \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (25)$$

$$x_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \qquad 26)$$

Присутність умови (26) не дозволяє віднести цю задачу до класу ТЗБО або СЗЛП – це задачі з бульовими змінними. Однак, якщо (26) замінити умовою $x_{i,j} \geq 0, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$,то отримаємо ТЗБО, в якій $a_i = b_j = 1$. Оскільки ця ТЗБО завжди має цілочисловий розв'язок, то сумісне виконання умов (24) і (25) гарантує виконання умови (26). Отже, розв'язок задачі (23) - (26) існує.

Означення 8. Дві матриці C і D однакового розміру $(n \times n)$ будемо називати еквівалентними ($C \sim D$), якщо одна з них отримується з іншої шляхом додавання до елементів кожного рядка одного числа (можливо, для різних рядків ці числа теж різні) та шляхом додавання до елементів кожного стовпчика одного числа (можливо, для різних стовпчиків ці числа теж різні). Тобто

$$(C \sim D) \Leftrightarrow \exists e_i, f_j \in R^1 : d_{i,j} = c_{i,j} + e_i + f_j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

<u>Приклад.</u> Матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є еквівалентними. До рядків додаються числа $(0,0,1,-1)$, до стовпчиків – $(2,3,4,1)$.

Теорема 1. Множини розв'язків двох задач про призначення з еквівалентними матрицями збігаються.

Доведення. Нехай ($C \sim D$) і нехай $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, …, (n, j_n) - розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності C

(перший механізм на роботу j_1 і т.д.). Припустимо, від супротивного, що для задачі з матрицею D цей розподіл не буде розв'язком. Тоді повинен існувати інший розподіл $(1, j_1')$, $(2, j_2')$, …, (n, j_n') - розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності D. Оскільки маємо задачу відшукання максимуму цільової функції, то для задачі з матрицею D запишемо нерівність

$$d_{1,j_1'} + d_{2,j_2'} + \ldots + d_{n,j_n'} > d_{1,j_1} + d_{1,j_2} + \ldots + d_{n,j_n}.$$

Із означення 8 маємо $d_{i,j} = c_{i,j} + e_i + f_j$, тому

$$c_{1,j_1'} + e_1 + f_{j_1'} + c_{2,j_2'} + e_2 + f_{j_1'} + \ldots + c_{n,j_n'} + e_n + f_{j_n'} >$$
$$> c_{1,j_1} + e_1 + f_{j_1} + c_{1,j_2} + e_2 + f_{j_2} + \ldots + c_{n,j_n} + e_n + f_{j_n}.$$

Очевидно, що $\sum_{k=1}^{n} f_{j_k'} = \sum_{k=1}^{n} f_{j_k}$, оскільки це суми одних і тих же чисел, тільки, можливо, у різному порядку. Звідси отримуємо нерівність

$$c_{1,j_1'} + c_{2,j_2'} + \ldots + c_{n,j_n'} > c_{1,j_1} + c_{1,j_2} + \ldots + c_{n,j_n},$$

яка суперечить припущенню, що розподіл $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, …, (n, j_n) – розв'язок задачі про призначення з матрицею продуктивності C. •

Ця теорема дозволяє переходити в задачі про призначення від однієї матриці продуктивності до іншої, їй еквівалентної.

Перейдемо, спочатку, до еквівалентної задачі на мінімум із матрицею продуктивності D за допомогою *попередніх перетворень*

$$C = \{c_{i,j}\} \Rightarrow C' = \{c'_{i,j} = \max_i c_{i,j} - c_{i,j}\} \Rightarrow D = \{d_{i,j} = c'_{i,j} - \min_j c'_{i,j}\}.$$

У результаті отримаємо матрицю з невід'ємних елементів, у кожному рядку та в кожному стовпчику якої є хоча б один нуль. Початкова задача звелась до вибору в матриці D (або в еквівалентній їй матриці) n-нулів по одному в кожному рядку та кожному стовпчику.

Розглянемо один із можливих способів такого вибору, відомий як *угорський метод*.

Алгоритм.

1. Позначимо, наприклад *, який-небудь нуль у першому стовпчику матриці D, далі позначимо нуль у другому стовпчику так, щоб він не лежав у тому ж рядку, що й раніше позначений, потім у третьому і т.д., поки не розглянемо всі стовпчики.
2. Якщо кількість нулів із * дорівнює числу n, то алгоритм закінчено. У розв'язку на місці нулів із * стоять 1, решта елементів розв'язку - 0.
3. Якщо нулів із * менше n, то позначимо знаком + ті стовпчики матриці, в яких є нуль із *, ці стовпчики вважаємо зайнятими. В алгоритмі будуть з'являтися зайняті рядки. Елементи матриці, які знаходяться на перетині незайнятого рядка та незайнятого стовпчика, вважаємо незайнятими, всі інші – зайняті.
4. Якщо в матриці немає незайнятих нулів, то переходимо до п. 8.
5. Якщо незайняті нулі є, то вибираємо перший із них, проглядаючи почергово рядки матриці зліва направо. Позначимо його штрихом ('). Якщо в його рядку немає нуля із *, то переходимо до п. 7.
6. Якщо нуль із * є, то звільняємо (знімаємо знак +) стовпчик, в якому він знаходиться, та займаємо (позначимо знаком +) цей рядок. Переходимо до п.4.
7. Починаючи зі щойно позначеного штрихом нуля, будуємо ланцюжок із нулів: від нуля із штрихом по стовпчику до нуля із *, від нього по рядку до нуля із штрихом і т.д., доки це можливо. Колись (на якомусь нулі зі штрихом) ланцюжок обірветься. Знімаємо всі * в нулів із ланцюжка та змінюємо всі штрихи на * в ланцюжку. Новий набір нулів із * містить на один нуль із * більше, ніж попередній. Знімаємо всі позначки, крім *, та переходимо до п. 2.
8. Шукаємо мінімальний елемент серед незайнятих елементів матриці й віднімаємо його від елементів усіх

незайнятих рядків та додаємо до елементів усіх зайнятих стовпчиків. Отримуємо еквівалентну матрицю, в якій є незайняті нулі. Переходимо до п. 5.

Зауважимо, що цей алгоритм скінченний.

6. Оптимізаційні задачі на мережах

Розглянемо орієнтований граф (I,U), де $I=\{1,2,...,n\}$ – множина вершин графа, $U=\{(i,j)\,|\,i\in I,\,j\in I,i\neq j\}$ – множина дуг (упорядкованих пар вершин) графа. Кожній вершині i поставимо у відповідність дійсне число d_i, кожній дузі (i,j) – два невід'ємних числа $c_{i,j}$ та $r_{i,j}$. Такий граф будемо називати мережею. Число d_i називатимемо інтенсивністю вершини i. Якщо $d_i>0$, вершину назвемо джерелом, якщо $d_i<0$ - стоком, якщо $d_i=0$ – нейтральною. Відповідне дузі (i,j) число $c_{i,j}$ характеризує її з якісного боку (довжина дуги, вартість використання дуги), число $r_{i,j}$ задає внутрішні обмеження дуги (пропускна здатність).

Означення 9. Мережа *допускає* однорідний потік $x=\{x_{ij},(i,j)\in U\}$, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = d_i\,,\ i\in I, \tag{27}$$

$$0\le x_{i,j}\le r_{i,j}\,,\ (i,j)\in U\,. \tag{28}$$

Зауважимо, що потік x - це множина, елементами якої є значення $x_{i,j}$ потоку на дугах. Співвідношення (27) називають умовами неперервності потоку або рівняннями збереження.

Нехай $C\subset I$. Позначимо $d(C)=\sum_{i\in C} d_i$, $r(C)=\sum_{i\in C,\,j\in I\setminus C,(i,j)\in U} r_{i,j}$.

Означення 10. Множину дуг $U_C=\{(i,j)\in U: i\in C, j\in I\setminus C\}$ назвемо перерізом мережі, число $r(C)$ – пропускною здатністю перерізу.

Очевидно, що переріз можна задавати як за допомогою множини C, так і множиною U_C.

Теорема 2. Для того, щоб мережа допускала потік необхідно й досить виконання умов:

1) $d(I) = 0$;

2) $d(C) \le r(C)$ для всіх підмножин $C \subset I$.

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження. У позначеннях, які використовувалися при вивченні ТЗО, задамо

$$I = \{P_i\}_{i=\overline{1,m}} \bigcup \{Q_j\}_{j=\overline{1,n}},\ d_k = \begin{cases} a_k,\ k \in \{P_i\}_{i=\overline{1,m}}, \\ -b_k,\ k \in \{Q_j\}_{j=\overline{1,n}}, \end{cases},$$

$U = \{P_i Q_j\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ і збережемо за $c_{i,j}$ та $r_{i,j}$ звичний зміст (вартість перевезення одиниці продукції та обмеження на пропускну здатність комунікації). Тоді *перша* з умов теореми 2 – це не що інше, як умова збалансованості ТЗО, а *друга* – об'єднує основні обмеження ТЗО та необхідні й достатні умови існування допустимих планів перевезень.

Вважатимемо надалі, що умови теореми 2 виконуються. Тоді множина допустимих потоків D непорожня.

Основною *оптимізаційною задачею* на мережі є задача знаходження такого допустимого потоку на заданій мережі (I,U), на якому досягає мінімуму функція вартості

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min \qquad (29)$$

Розв'язок цієї задачі $x^* = \{x^*_{i,j},\ (i,j) \in U\}$ називатимемо *оптимальним потоком* на мережі.

Прикладами оптимізаційних задач на мережі можуть бути розглянуті раніше ТЗБО та ТЗО. Іншими важливими випадками задачі (29), (27), (28) є задача про *найкоротший шлях* та задача *про максимальний потік і мінімальний переріз*.

1. Задача про найкоротший шлях

Розглянемо цю задачу в припущенні, що мережа має одне джерело (вершина 1) та один стік (вершина n).

Нехай $d_1 = 1$, $d_n = -1$, а решта вершин нейтральні. Умову (28) замінимо умовою $x_{i,j} \in \{0,1\}$. Отримаємо задачу

$$L(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min , \qquad (30)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(1,j)\in U} x_{1,j} = 1, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = 0,\ i = \overline{2, n-1}, \\ -\sum\limits_{k:(k,n)\in U} x_{k,n} = -1, \end{cases} \qquad (31)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\},\ (i,j)\in U . \qquad (32)$$

Умови неперервності (31) забезпечують існування шляху від джерела до стоку, а умова (32) дає змогу знайти розв’язок задачі перебором не більше 2^{n-1} варіантів. Зауважимо, що задача (30) - (32) допускає різноманітні трактування. Зокрема, якщо $c_{i,j}$ – це довжина дуги (i,j), маємо задачу про найкоротший шлях від джерела до стоку. Якщо $c_{i,j}$ – це показник затрат на проходження дуги (i,j), маємо задачу про найефективніший шлях. Іноді, особливо в задачах календарного планування, величину $c_{i,j}$ трактують як час переходу $t_{i,j}$ від вершини i до вершини j, маємо задачу про визначення критичного часу.

Для розв’язування задачі про найкоротший шлях найчастіше використовують метод Мінті. Знайдений розв’язок (оптимальний потік) $x^* = \{x^*_{i,j},\ (i,j)\in U\}$ містить тільки 1 і 0. Дуги (i,j), яким відповідає $x^*_{i,j} = 1$, і утворюють найкоротший шлях. Цим методом можна знайти найкоротші шляхи від джерела до кожної з вершин мережі. Зазначимо, що до деяких нейтральних вершин шляху може й не існувати.

Алгоритм методу Мінті

1. Вершині 1 (джерелу) ставимо у відповідність позначку $h_1 = 0$.

2. Нехай на кроці r маємо множину позначених вершин $I=\{i_1,i_2,...,i_k,...\}$ з позначками $(h_{i_1},h_{i_2},...,h_{i_k},...)$ відповідно та множину непозначених вершин мережі $J=\{...,i_l,...\}$, таких, що $(i_k,i_l)\in U,\ i_k\in I,\ i_l\in J,\ I\cap J=\phi$. Для кожної такої дуги обчислюємо величину $h_{i_l}=h_{i_k}+c_{i_k,i_l}$ і виділяємо ті дуги, для яких ця величина мінімальна. Із кількох дуг, які закінчуються в одній вершині, виділяємо *одну (будь-яку)*. Вершині, в якій закінчується виділена дуга, приписуємо позначку h_{i_l} та заносимо цю вершину до множини I (“розширюємо” цією вершиною множину I).

3. Процес, описаний у пункті 2, повторюємо доти, поки можна “розширювати” множину I .

Зауваження 1. Якщо по закінченні алгоритму деяка вершина залишилась непозначеною, то шляху від джерела до цієї вершини не існує.

Зауваження 2. Згідно з побудовою, від джерела до кожної з позначених вершин веде *єдиний* шлях і він буде найкоротшим, позначка вершини дорівнює довжині шляху.

Зауваження 3. Якщо в пункті 2 алгоритму виділяти *всі* дуги, для яких величина $h_{i_l}=h_{i_k}+c_{i_k,i_l}$ мінімальна, то по закінченні алгоритму отримаємо *всі* найкоротші шляхи.

Застосування методу Мінті зручно супроводжувати рисунками.

2. Задача про максимальний потік і мінімальний переріз

Нехай $C\subset I$ – деяка множина вершин мережі, яка містить джерело ($s\in C$) та не містить стоку ($t\notin C$). Далі будемо розглядати тільки перерізи мережі, що відокремлюють джерело від стоку – множину дуг $U_C=\{(i,j):i\in C, j\notin C,(i,j)\in U\}$. Відомо, що переріз мережі однозначно задається множиною C. Пропускна здатність перерізу U_C дорівнює числу $r(C)=\sum\limits_{(i,j)\in U_C} r_{i,j}$.

Задача про *мінімальний переріз,* що відокремлює джерело від стоку, полягає в знаходженні такої множини $C^* \subset I$ і відповідного їй перерізу U_{C^*}, що $r(C^*) = \min\limits_{U_C \subset U} r(C)$. При цьому переріз U_{C^*} називають мінімальним перерізом, що відокремлює джерело від стоку, а число $r(C^*)$ - пропускною здатністю цього мінімального перерізу.

З цією задачею тісно пов'язана задача знаходження такого максимального числа $d > 0$, що мережа з інтенсивністю вершин $d_s = d$, $d_t = -d$, $d_i = 0, i \in I, i \neq s, i \neq t$ і пропускними здатностями дуг r_{ij} допускає потік. Тобто йдеться про визначення максимального числа $d > 0$, для якого існує потік $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$, який задовольняє умови

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(s,j)\in U} x_{s,j} = d, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{k,i} = 0, i \in I, i \neq s, i \neq t, \\ -\sum\limits_{k:(k,t)\in U} x_{i,t} = -d, \end{cases} \qquad (33)$$

$$0 \le x_{i,j} \le r_{i,j}, (i, j) \in U .$$

Якщо d^* – розв'язок цієї задачі, а $x^* = \{x^*_{i,j}, (i, j) \in U\}$ - відповідний потік, то x^* називають *максимальним потоком* у мережі, а число d^* – *величиною* максимального потоку. Задачу знаходження d^* і x^* називають задачею про *максимальний потік*.

Зв'язок між цими задачами полягає в тому, що з *умови 2)* теореми 2 випливає нерівність $\max\limits_{C \subset I} d(C) \le \min\limits_{U_C \subset U} r(C)$, яка відповідає нерівності між значеннями цільових функцій пари двоїстих ЗЛП. Природно очікувати, що на розв'язках цих задач нерівність перетвориться в рівність. Оскільки

$\max\limits_{C \subset I} d(C) = d(C^*) = d^*$, бо множина допустимих потоків непорожня, то має виконуватись рівність $d^* = r(C^*)$. Підсумовує ці міркування наступна теорема.

Теорема 3 (Форда–Фалкерсона). У мережі з єдиним джерелом $s \in I$ і єдиним стоком $t \in I$ величина максимального потоку дорівнює пропускній здатності мінімального перерізу, що відділяє джерело від стоку.

Доведення. Нехай $x^* = \{x^*_{i,j}, (i, j) \in U\}$ – максимальний потік у мережі, а число d^* – величина максимального потоку. Нехай $U_C = \{(i, j) : i \in C, j \notin C, (i, j) \in U\}$ – довільний переріз мережі, що відокремлює джерело від стоку, $r(C)$ – його пропускна здатність. Необхідно довести існування такої множини $C^* \subset I$, $s \in C^*$, $t \notin C^*$ і відповідного їй перерізу U_{C^*}, що $r(C^*) = \min\limits_{U_C \subset U} r(C)$ і $d^* = r(C^*)$. Побудуємо множину C^* за такими правилами

$$s \in C^*,$$
$$\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{i,j} < r_{i,j}, \text{ то } j \in C^*, \tag{34}$$
$$\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x^*_{k,i} > 0, \text{ то } k \in C^*.$$

Зрозуміло, що за побудовою $t \notin C^*$. Дійсно, якщо припустити $t \in C^*$, то існуватиме шлях із s до t. Збільшуючи значення потоку на дугах із цього шляху, отримаємо більшу від d^* величину потоку, що неможливо.

Визначимо значення $r(C^*)$. Із (2.34) випливає, що

$$\text{якщо } i \in C^*, j \notin C^*, (i, j) \in U, \text{ то } x^*_{i,j} = r_{i,j},$$
$$\text{якщо } i \in C^*, k \notin C^*, (k, i) \in U, \text{ то } x^*_{k,i} = 0. \tag{35}$$

Із (33) маємо: $\forall i \in C^*, (i \neq t)$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x^*_{i,j} = d^*, \ i = s, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x^*_{k,i} = 0, \ i \neq s. \end{cases}$$

Підсумовуючи ці співвідношення за $i \in C^*$, отримаємо:

$$\sum_{(i,j):i\in C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum_{(k,i):i\in C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} = d^*.$$

Розглядаючи випадки $j,k \in C^*$ та $j,k \notin C^*$, розпишемо останню рівність

$$\sum_{(i,j):i\in C^*,j\in C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} + \sum_{(i,j):i\in C^*,j\notin C^*,(i,j)\in U} x^*_{i,j} - \sum_{(k,i):i\in C^*,k\in C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} - \sum_{(k,i):i\in C^* k\notin C^*,(k,i)\in U} x^*_{k,i} = d^*$$

Очевидно, що доданки перший і третій скорочуються. Із (35) отримуємо, що перший доданок дорівнює $r(C^*)$ а четвертий – 0. Тому $d^* = r(C^*)$. •

На основі співвідношення (34) побудовано *метод Форда–Фалкерсона*, який дає можливість знайти мінімальний переріз мережі, максимальний потік та його величину. Кожній вершині мережі ставлять у відповідність певну позначку. Позначка вершини i складається з пари чисел (N_i, θ_i) і має такий зміст: деяким шляхом, останньою дугою якого є дуга $(|N_i|, i)$, з джерела до i-ї вершини можна додатково перевезти $\theta_i > 0$ вантажу. Іншими словами, за заданим потоком $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ можна побудувати новий потік $\{x'_{i,j}, (i,j) \in U\}$ такий, що $x'_{N_i,j} = x_{N_i,j} + \theta_i$.

Алгоритм методу Форда–Фалкерсона

На першому кроці задають деякий початковий допустимий потік, зазвичай $\{x^0_{i,j} = 0, (i,j) \in U\}$, величина якого $d^0 = 0$. Вершині $s = 1$ (джерелу) ставимо у відповідність мітку $(N_1 = 0, \theta_1 = \infty)$. Нехай на r-му кроці алгоритму маємо потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ та множину позначених вершин

$I_r = \{1, \cdots, i_k, \cdots\}$ з мітками (N_1, θ_1), (N_2, θ_2), ... , (N_{i_k}, θ_{i_k}) відповідно. Нехай $I_{r1} = \{\cdots, i_l, \cdots\}$ - множина непозначених вершин, таких, що $(i_k, i_l) \in U$, $i_k \in I_r$, $i_l \notin I_r$, а $I_{r2} = \{\cdots, i_m, \cdots\}$ – множина непозначених вершин, таких, що $(i_m, i_k) \in U$, $i_m \notin I_r$, $i_k \in I_r$. Позначками (N_{i_l}, θ_{i_l}), $N_{i_l} = i_k$, $\theta_{i_l} = \min\{\theta_{i_k}, r_{i_k, i_l} - x_{i_k, i_l}\}$ позначимо ті вершини із I_{r1}, для яких $r_{i_k, i_l} - x_{i_k, i_l} > 0$. Позначками (N_{i_m}, θ_{i_m}), $N_{i_m} = -i_k$, $\theta_{i_m} = \min\{\theta_{i_k}, x_{i_m, i_k}\}$ позначимо ті вершини із I_{r2}, для яких $x_{i_m, i_k} > 0$. Доповнимо множину I_r щойно позначеними вершинами. Отримаємо нову множину вершин I_{r+1}. Процес "розширення" цієї множини продовжуємо доти, поки це можливо. Нехай, I^* – множина позначених вершин, яку неможливо "розширити". Можливі випадки:

1) вершина $t = n$ (витік) не належить множині I^*;

2) вершина $t = n$ (витік) належить множині I^*.

У першому випадку потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ максимальний, а переріз $C^* = I^*$, $U_{C^*} = \{(i,j) : i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U\}$ мінімальний. Алгоритм закінчено.

У другому випадку потік $\{x_{i,j}, (i,j) \in U\}$ можна поліпшити. Дійсно, за позначками вершин легко побудувати послідовність дуг (ланцюг), який з'єднує джерело та витік, позначимо його L_{1n}.

Побудуємо новий допустимий потік $\{x'_{i,j}, (i,j) \in U\}$ за правилами: $x'_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j}, (i,j) \notin L_{1n}, (i,j) \in U, \\ x_{i,j} + \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j > 0, \\ x_{i,j} - \theta_n, (i,j) \in L_{1n}, N_j < 0. \end{cases}$

Очевидно, що при цьому величина нового потоку $d' = d + \theta_n$. Забираємо всі позначки з вершин та переходимо до наступного $r+1$-го кроку.

Зауважимо, що при невеликій кількості вершин розв'язування задачі можна проводити з допомогою графічного зображення мережі (у вигляді орієнтованого графа).

7. Цілочислове та дискретне програмування

Деякі постановки задач, які містять цілочислові вимоги на змінні, розглядалися нами раніше - ТЗБО, ТЗО, задача про призначення, оптимізаційні задачі на мережах. При дослідженні цих задач нам удавалося застосувати такий прийом - ми відмовлялися від цілочислових вимог, у новій задачі доводили існування розв'язків та будували метод їх відшукання, показували, що при виконанні певних припущень серед розв'язків можна знайти цілочисловий. Але що робити, коли застосувати цей прийом з тих чи інших причин неможливо?

Далі розглянемо постановки задач цілочислового та дискретного програмування, опишемо та обґрунтуємо методи їх розв'язування в цілісному вигляді. При цьому будемо розрізняти:

- задачі комбінаторного типу, допустима множина яких має скінченну кількість точок;
- задачі цілочислового програмування, де змінні набувають цілочислові значення;
- задачі частково дискретного програмування, в яких лише частина змінних набуває дискретні значення.

Типовими задачами комбінаторного типу є задача про призначення і задача комівояжера. Першу з них нами досліджено, друга віднесена до самостійної роботи – студентам пропонується здійснити постановку задачі комівояжера і засвоїти метод оцінок та розгалужень для її розв'язування.

Задачею цілочислового лінійного програмування у стандартній формі назвемо задачу

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \ , \ i=\overline{1,m} , \tag{36}$$

$$x_j \ge 0, \ j=\overline{1,n} ,$$

$$x_j - \text{цілі}, \ j=\overline{1,k}, \ \ k \le n .$$

Якщо в останній умові (36) виконується $k=n$, то маємо повністю цілочислову задачу лінійного програмування (ПЦЗЛП), інакше – частково цілочислову задачу лінійного програмування (ЧЦЗЛП). Якщо ж замість неї розглянути умову

$$x_j \in X_j = \{0, x_{j,1}, \dots, x_{j,k_j}\} ,$$

де x_{j,k_j} - задані (не обов'язково цілі) відповідно упорядковані числа, $j=\overline{1,l}$, $l \le n$, числа k_j – скінченні, то отримаємо задачі повністю дискретного ($l=n$) та частково дискретного лінійного програмування (ПДЗЛП і ЧДЗЛП відповідно).

Одразу відмітимо, що ідея розв'язування ЗЛП із подальшим заокругленням розв'язку може приводити до недопустимих векторів і тому неконструктивна.

Приклад. Розглянемо ПЦЗЛП

$$L(x) = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max ,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 ,$$

$$4x_1 - 3x_2 \le 2 ,$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 ,$$

$$x_j - \text{цілі}, \ j = 1,2,3 \ .$$

Розв'язком ПЦЗЛП буде вектор $x^* = (2,2,5)^T$. Якщо розв'язати задачу без останньої вимоги, отримаємо розв'язок ЗЛП $x = (0.5,0,4.5)^T$, з якого ніякими способами заокруглення не отримати x^*.

В основі алгоритмів розв'язування таких задач лежать так звані методи відтину (відтинання). Зміст цих методів пояснимо на прикладі ПЦЗЛП.

Розглянемо задачу (36) та введемо позначення:

D - багатокутник;

$D^{Ц}$ - множина цілочислових векторів із D;

G - опукла лінійна оболонка $D^{Ц}$;

$G^{Ц}$ - цілочисловий багатокутник із G;

D^* - множина базисних векторів задачі (36).

Нехай тепер D – допустима множина задачі (36) без цілочислових вимог, таку задачу будемо називати (L, D)-задачею. Тоді власне задачу (36) будемо називати $(L, D^{Ц})$-задачею.

Теорема 4. Нехай у $(L, D^{Ц})$-задачі (36) множини D і $D^{Ц}$ – непорожні. Тоді:

1) $G = G^{Ц}$;
2) $G^{Ц} = D^{Ц}$;
3) $D^* \subseteq G^{Ц}$.

Наслідок. Множина розв’язків (L, G)-задачі збігається із множиною розв’язків $(L, D^{Ц})$-задачі.

Теорема 4 і наслідок до неї демонструють принципову можливість розв’язування $(L, D^{Ц})$-задачі шляхом розв’язування допоміжної (L, G)-задачі. Однак задача побудови опуклої лінійної оболонки цілочислових векторів із $D^{Ц}$ залишається складною для розв’язання. У 1954 році Дж. Данціг запропонував здійснювати побудову опуклої лінійної оболонки цілочислових векторів із $D^{Ц}$ поетапно, розв’язуючи на кожному етапі деякі допоміжні задачі. Р. Гоморі запропонував спосіб побудови додаткових обмежень для допоміжних задач і дослідив питання скінченності процесу.

Загальна схема алгоритмів Р. Гоморі така:

1) розв’язуємо (L, D)-задачу;

2) якщо (L,D)-задача немає розв'язку, то і $(L,D^{Ц})$-задача немає розв'язку;
3) якщо (L,D)-задача має цілочисловий розв'язок, то він буде розв'язком $(L,D^{Ц})$-задачі;
4) якщо (L,D)-задача має розв'язок і він не цілочисловий, то будуємо додаткове лінійне обмеження так, щоб воно «відтинало» частину допустимої множини D, разом зі знайденим розв'язком (L,D)-задачі, але не втрачало жодного вектора з множини $D^{Ц}$. Переходимо до 1).

Побудоване на етапі 4) обмеження називають *правильним відтином* - йому не задовольняє розв'язок (L,D)-задачі, але задовольняють усі вектори із $D^{Ц}$.

На основі загальної схеми розроблено:

– перший алгоритм Р. Гоморі - для розв'язування ПЦЗЛП;
– другий алгоритм Р. Гоморі - для розв'язування ЧЦЗЛП, у тому числі й ПЦЗЛП;
– алгоритм Дальтона–Ллевеліна - для розв'язування ЧДЗЛП, у тому числі й ПДЗЛП.

Зауважимо, що для опису цих алгоритмів достатньо вказати спосіб визначення правильного відтину.

Нехай розв'язується (L,D)-задача і на *останній ітерації* симплекс-методу основні обмеження набули вигляду

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i \,,\ i = \overline{1,m}\,,$$

і, як завжди, $[z]$ та $\{z\}$ – ціла та дробова частини числа.

Теорема 5. Нехай для ПЦЗЛП (2.36) розв'язок (L,D)-задачі має вигляд $\bar{x} = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$ та існує номер l такий, що β_l – дробове. Тоді обмеження

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{l,j}\} x_j \le 0 \qquad (37)$$

задає правильний відтин.

Доведення. Прямою підстановкою впевнимося, що знайдений розв'язок (L,D) - задачі не задовольняє (37). Покажемо, що кожен допустимий вектор ПЦЗЛП (36) задовольняє (37). Нехай $x=(x_1,\dots,x_n)^T \in D^Ц$. З основних обмежень на *останній ітерації* симплекс-методу отримуємо:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n}[\alpha_{i,j}]x_j - [\beta_i] = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{i,j}\}x_j \,,\ i=\overline{1,m}. \qquad (38)$$

Ліва частини отриманих виразів цілочислові, тому і їх праві частини – цілочислові. Припустимо, від супротивного, що $\exists l:\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{l,j}\}x_j > 0$. Оскільки, за визначенням $0 \le \{z\} < 1$ і $x \in D^Ц$, то $\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{l,j}\}x_j < 1$, а це суперечить тому, що праві частини (38) – цілочислові. •

Побудоване обмеження (37) перетворимо у рівність шляхом уведення до розгляду нової цілої змінної $x_{n+1} \ge 0$ так, що

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n}\{\alpha_{l,j}\}x_j = -\{\beta_l\}. \qquad (39)$$

Допишемо цю рівність до основних обмежень $(L, D^Ц)$-задачі і знову розв'яжемо (L, D)-задачу. Так продовжуємо доти, поки не буде знайдено розв'язок $(L, D^Ц)$-задачі або не буде встановлено її нерозв'язність. Очевидно, що при застосуванні першого алгоритму Р. Гоморі, розмірність задачі буде зростати. Гоморі запропонував метод обмеження зростання розмірності задачі величиною $(n+2)(m+1)$.

Перший алгоритм Р. Гоморі

1. Будуємо та розв'язуємо (L, D)-задачу. Нехай до базису розв'язку цієї задачі увійшли вектори $(A_{s_1}, A_{s_2},\dots, A_{s_m})$. Позначимо $N=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$ множину утворену з індексів

базисних змінних, M – множину утворену з індексів небазисних змінних. Якщо (L, D)-задача немає розв'язку, то і $(L, D^{Ц})$-задача розв'язку немає. Алгоритм закінчено.

Якщо числа $\beta_i, i \in N$ - цілі, то розв'язок (L, D)-задачі є одночасно розв'язком $(L, D^{Ц})$-задачі. Алгоритм закінчено.

Якщо серед чисел $\beta_i, i \in N$ є дробові, то фіксуємо номер l одного з них та переходимо до п. 2.

2. Нехай β_l – дробове. Будуємо правильний відтин – уведемо до розгляду нову змінну x_{n+1} за формулою

$$x_{n+1} - \sum_{j \in M} \{\alpha_{l,j}\} x_j = -\{\beta_l\}, \; x_{n+1} \ge 0, \; x_{n+1} \text{ - ціле.} \qquad (40)$$

3. Розширимо останню симплекс-таблицю за рахунок (40) і отримаємо нову (L, D)-задачу. Відновимо звичні позначення та переходимо до п. 1.

Зауваження. Оскільки розв'язок (L, D)-задачі – це вершина допустимої множини D, то з нього можна розпочинати розв'язок нової (L, D)-задачі. Оскільки в останній симплекс-таблиці відносні оцінки небазисних змінних невід'ємні, а $-\{\beta_l\} < 0$, то слід застосувати двоїстий симплекс-метод. При цьому нова змінна буде виведена з базису, а на її місце уведено іншу.

<u>Приклад.</u> Розв'язати ПЦЗЛП

$$L(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 11,$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13$$
$$x_j \ge 0, \; x_j \text{ — цілі, } \; j = \overline{1,3}.$$

<u>Розв'язування.</u>

Побудуємо (L, D)-задачу

$$L(x) = -4x_1 - 5x_2 - x_3 \to \min,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 11$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Це - КЗЛП, розв’яжемо її звичайним симплекс-методом.
Остання симплекс-таблиця буде такою

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	β_i
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	

Розв’язок (L, D)-задачі: $x = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\right)^T$.

Всі компоненти цього розв’язку дробові числа. Виберемо для побудови відтину змінну з номером $l = 3$ (довільно).
Проведемо необхідні підрахунки:

$$x_7 - \sum_{j \in \{4,5,6\}} \{\alpha_{3,j}\} x_j = -\{\beta_3\}, \{\beta_3\} = \left\{\frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10},$$

$$\{\alpha_{3,4}\} = \left\{-\frac{9}{10}\right\} = -\frac{9}{10} - (-1) = -\frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10},$$

$$\{\alpha_{3,5}\} = \left\{-\frac{3}{10}\right\} = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10}, \ \{\alpha_{3,6}\} = \{1\} = 0.$$

Побудуємо правильний відтин

$$-\frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5 + x_7 = -\frac{7}{10}, \ x_7 \geq 0, \ x_7 \text{ - ціле.}$$

Розширимо останню симплекс-таблицю за рахунок побудованого відтину

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	β_i
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	$\frac{7}{10}$
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\boxed{-\frac{7}{10}}$	0	1	$-\frac{7}{10}$
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	
$-\frac{\Delta_j}{\alpha_{ij}}$				2	$\frac{4}{7}$			

та застосуємо двоїстий симплекс-метод.

Отримаємо наступну й останню таблицю

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	β_i
x_1								2
x_2								2
x_3								1
x_5								1
Δ_j	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{4}{7}$	

Звідки маємо розв'язок (L, D)-задачі $x^* = (2, 2, 1)^T$. Усі компоненти цього розв'язку – цілі, а отже, нами знайдено розв'язок $(L, D^{Ц})$-задачі. •

Повернемося до розгляду ЧЦЗЛП (36) і нехай при розв'язуванні (L, D)-задачі на *останній ітерації* симплекс-методу основні обмеження набули вигляду

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i ,\ i = \overline{1,m} .$$

Теорема 6. Нехай для ЧЦЗЛП (36) розв'язок (L, D)-задачі має вигляд $\overline{x} = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$ та існує номер l такий, що $1 \le l \le k$ і β_l - дробове. Тоді обмеження

$$\{\beta_l\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\gamma_{l,j}\} x_j \le 0 , \qquad (41)$$

де

$$\gamma_{l,j} = \begin{cases} \{\alpha_{l,j}\}, & якщо\ j \le k, \{\alpha_{l,j}\} \le \{\beta_l\}, \\ \{\beta_l\}(1 - \{\alpha_{l,j}\})/(1 - \{\beta_l\}), & якщо\ j \le k, \{\alpha_{l,j}\} > \{\beta_l\}, \\ \alpha_{l,j}, & якщо\ j > k,\ \alpha_{l,j} > 0, \\ \{\beta_l\}(-\{\alpha_{l,j}\})/(1 - \{\beta_l\}), & якщо\ j > k,\ \alpha_{l,j} < 0, \end{cases}$$

задає правильний відтин.

Зауваження. Нерівність (41) перед використанням слід перетворити до такого вигляду

$$x_{n+1} - \sum_{j \in M} \{\gamma_{l,j}\} x_j = -\{\beta_l\} ,\ x_{n+1} \ge 0 . \qquad (42)$$

Познайомитися із методами розв'язування дискретних задач можна в підручнику Ю.П. Зайченко «Дослідження операцій».

8. Матричні ігри

Терміном *„гра"* будемо називати взаємодію декількох гравців за відомими й постійними правилами, які визначають вид даної гри, та відомих і постійних станів цієї взаємодії, які визначають величини платежів між гравцями. Для позначення можливої реалізації цих станів вживатимемо термін *„партія”*. Терміном *„хід”* будемо називати момент партії, коли гравці (один чи кілька) вибирають рішення з деякої множини рішень. Правила гри передбачають, що в кінці гри між гравцями відбуваються взаєморозрахунки. Якщо сума всіх платежів у партії дорівнює нулю, гру називають *грою із нульовою сумою*. Надалі розглядатимемо ігри, в яких беруть участь тільки два гравці, в кожного з яких є по одному ходу в партії, причому вибір ходів скінченний. Платежі гравців у таких іграх зручно задавати у вигляді матриці, звідси походить назва таких ігор - *матричні ігри двох гравців із нульовою сумою*.

Нехай у грі беруть участь два гравці – I_1 та I_2. Перший із них вибирає ціле число $i, i=\overline{1,m}$, другий – ціле число $j,\ j=\overline{1,n}$. Вибір гравцями цих чисел здійснюється незалежно та одночасно. При проведенні взаєморозрахунку перший гравець платить другому суму $c_{i,j}$, яку у випадку $c_{i,j} \geq 0$ будемо називати виграшем, а у випадку $c_{i,j} \leq 0$ відповідно програшем гравця I_2. Очевидно, що виграш гравця I_2 є водночас програшем гравця I_1 і навпаки. Матрицю $C=\{c_{i,j}\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, побудовану за такими правилами, будемо називати *платіжною матрицею гри з точки зору другого гравця*.

Приклад. Розглянемо гру: два гравці одночасно обирають та називають одну із сторін монети. Якщо обрано різні сторони монети - гравець I_1 платить гравцю I_2 одиницю виграшу, якщо обрано однакові сторони – гравець I_2 платить гравцю I_1 одиницю виграшу. Побудувати платіжні матриці гри з точки зору кожного гравця.

Розв’язування. За вказаних умов платіжна матриця гри з точки зору гравця I_2 має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а з точки зору гравця I_1 -

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Надалі будемо розглядати матричні ігри тільки з точки зору гравця I_2. Отже, партію в матричній грі можна уявляти як вибір рядка (гравцем I_1) та стовпчика (гравцем I_2) у платіжній матриці, перетин яких визначає величину платежу. Сукупність усіх партій у грі, як правило, нескінченна. Метою гравців є визначення своєї оптимальної стратегії (поведінки) для всієї гри, яка гарантувала б досягнення максимального виграшу або мінімального програшу кожного з них відповідно.

Вектор-стрічку $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ назвемо *змішаною стратегією* гравця I_1, вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $y_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ – *змішаною стратегією* гравця I_2. Компоненти цих векторів будемо трактувати як імовірності, з якими гравці впродовж гри обирають рядки чи стовпчики в платіжній матриці. Якщо протягом усієї гри гравець I_1 постійно обирає тільки один (k-й) рядок у платіжній матриці, то така стратегія $x = \{x_k = 1, x_i = 0, i \neq k\}$ називається *чистою стратегією* гравця I_1. Аналогічно вводиться поняття чистої стратегії гравця I_2. Розглянемо питання про *знаходження оптимальних чистих стратегій* у матричній грі. Якщо гравець I_2 при своєму ході вибере стовпчик з номером j, $1 \leq j \leq n$, то гравець I_1 (мінімізуючи свій програш) може обрати рядок із номером i так, щоб виграш гравця I_2 був $\min\limits_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$. Тому гравець I_2 при своєму ході *повинен* вибирати стовпчик із номером j, $1 \leq j \leq n$ так, щоб досягнути виграшу величиною

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \underline{v}. \tag{43}$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що гравець I_1 при своєму ході *повинен* вибирати рядок із номером $i,\ 1 \le i \le m$ так, щоб домогтися програшу величиною

$$\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \overline{v}. \tag{44}$$

Величина $\underline{v}$ називається нижньою ціною гри (або гарантованим виграшем другого гравця), величина $\overline{v}$ – верхня ціна гри (гарантований програш першого гравця). Якщо має місце рівність $\underline{v} = \overline{v} = v$ або рівність

$$\max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = v^*, \tag{45}$$

то говорять, що матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях, а величину v^* називають *ціною гри*. Номери i^* та j^*, на яких виконується (45), дозволяють побудувати *оптимальні чисті стратегії* гравців

$$x^* = \{x_{i^*} = 1,\ x_i = 0,\ i \ne i^*\},\ y^* = \{y_{j^*} = 1,\ y_j = 0,\ j \ne j^*\}. \tag{46}$$

Зауважимо, що не кожна матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях - наприклад, розглянута раніше гра з монетами.

Будемо говорити, що матриця C має сідлову точку (i^*, j^*) якщо виконується нерівність $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$ для всіх $i = \overline{1,m}$ і $j = \overline{1,n}$.

Теорема 7. Матрична гра двох гравців має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). При цьому ціна гри $v = c_{i^*,j^*}$, а оптимальні чисті стратегії визначаються формулами (46).

Доведення. Легко переконатися, що для будь-якої матриці C справедлива нерівність

$$\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} \ge \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}. \tag{47}$$

Покажемо, що існування сідлової точки матриці C необхідно і досить для перетворення нерівності (47) у рівність і при цьому

$$c_{i^*,j^*} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} = \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j} \qquad (48)$$

Необхідність. Нехай виконується (48), покажемо, що платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Виберемо індекси (i^*, j^*) із умов $\max_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j}$ та $\min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*} = \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{i,m}} c_{i,j}$. Згідно з (48), маємо $\max_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} = \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*}$. Врахувавши означення $\min$, отримаємо $\max_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, а з урахуванням означення $\max$ маємо $c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*}$, $j = \overline{1,n}$. Цілком аналогічно отримаємо нерівність $c_{i^*,j^*} \le c_{i,j^*}$, $i = \overline{1,m}$, що і вказує на існування сідлової точки.

Достатність. Нехай тепер платіжна матриця C має сідлову точку (i^*, j^*). Покажемо, що виконується (48). Дійсно, з означення сідловок точки легко отримати нерівність $\max_{j=\overline{1,n}} c_{i^*,j} \le c_{i^*,j^*} \le \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j^*}$, з якої випливає нерівність $\min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} c_{i,j} \le \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} c_{i,j}$, що, з урахуванням (47), і завершує доведення. ●

<u>Приклад.</u> Дослідити гру з платіжною матрицею $C = \begin{pmatrix} 50 & 27 & 64 \\ 50 & 5 & 90 \\ 18 & 9 & 12 \\ 25 & 95 & 20 \end{pmatrix}$ на існування розв’язку в чистих стратегіях.

<u>Розв’язування.</u> Безпосередніми підрахунками вияснимо, що умова (48) виконується при $i^* = 3$ і $j^* = 1$. За теоремою 7, гра має розв’язок у чистих стратегіях, $v^* = 18$, $x^* = (0,0,1,0)$, $y^* = (1,0,0)^T$.

Зауважимо, що відхилення від оптимальної чистої стратегії приводить до зменшення виграшу або до збільшення програшу гравця.

У загальному випадку, коли розв'язку в чистих стратегіях немає, його слід шукати у класі змішаних стратегій.

9. Оптимальні змішані стратегії

Розглянемо матричну гру двох гравців із платіжною матрицею C без сідлової точки. Очевидно, що гравцям не вигідно постійно обирати одну з чистих стратегій. Уведемо поняття *оптимальної* стратегії у класі змішаних стратегій. Нагадаємо, що вектор-стрічку $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $x_i \ge 0, i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ називаємо *змішаною стратегією* гравця I_1, вектор-стовпчик $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$, $y_j \ge 0, j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ - *змішаною стратегією* гравця I_2. Сукупність усіх можливих стратегій утворює клас змішаних стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 можна задати так

$$F(x,y) = xCy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \,. \qquad (49)$$

Як і у випадку чистих стратегій, гравець I_1 може забезпечити собі середній програш не більше

$$\min_x G(x) = \min_x [\max_y F(x,y)], \qquad (50)$$

а гравець I_2 може забезпечити собі середній виграш не менше

$$\max_y H(y) = \max_y [\min_x F(x,y)]. \qquad (51)$$

Співвідношення (50) і (51) – це задачі відшукання гарантованих змішаних стратегій гравцями I_1 та I_2. Якщо для деяких змішаних стратегій x^* та y^* виконується нерівність

$$F(x^*,y) \le F(x^*,y^*) \le F(x,y^*), \ \forall x, \forall y, \qquad (52)$$

то функція $F(x,y)$ має сідлову точку і, аналогічно теоремі 7, можна показати, що має місце рівність

$$F(x^*, y^*) = \min_x \max_y F(x,y) = \max_y \min_x F(x,y). \qquad (53)$$

Уведені в такий спосіб стратегії x^* та y^* будемо називати *оптимальними змішаними стратегіями*, а число $v^* = x^* C y^*$ – *ціною гри*.

Покажемо, що кожна матрична гра має розв'язок у класі змішаних стратегій або, що рівносильне, функція, задана (49), має сідлову точку в класі стратегій.

Теорема 8. Задачі (50) і (51) відшукання гарантованих стратегій гравців I_1 та I_2 еквівалентні парі двоїстих ЗЛП

$$x_{m+1} \longrightarrow \min, \qquad\qquad y_{n+1} \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1},\ j = \overline{1,n},\ (54) \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j \ge y_{n+1},\ i = \overline{1,m}, \qquad (55)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Доведення. Покажемо, наприклад, що (50) еквівалентно (54). Перепишемо (50) так:

$$G(x) = \max_y F(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \to \min_x,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Зауважимо далі, що задача

$$\max_y F(x,y) \to \min_x,\ (x,y) \in D$$

стає еквівалентною задачі

$$z \to \min,\ F(x,y) \le z,\ (x,y) \in D,$$

як тільки множина D – замкнена, а функція $F(x,y)$ – обмежена на D.

З урахуванням цього та в позначеннях $x_{m+1} = z$ отримаємо

$$x_{m+1} \to \min ,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \le x_{m+1} ,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \tag{56}$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0, j = \overline{1,n} .$$

Покажемо тепер, що множини допустимих векторів задач (54) і (56) збігаються. Дійсно, нехай вектор x задовольняє умовам задачі (56). Тоді цей же вектор x задовольняє умови задачі (54), наприклад, при $y = (1,0,\ldots,0)^T$. Навпаки, нехай вектор x задовольняє умови задачі (54). Візьмемо будь-який вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Помножимо нерівності $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i \le x_{m+1},\ j = \overline{1,n}$ на відповідні $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$ та підсумуємо добутки за індексом j. Отримаємо $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i y_j \le x_{m+1}$, що й завершує доведення. •

Зауваження. Задачі (54) і (55) є парою двоїстих ЗЛП.

Тепер можна сформулювати та довести *основну теорему матричних ігор*.

Теорема 9. Кожна матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Доведення. Покажемо, наприклад, що задача (54) завжди має розв'язок. Дійсно, допустима множина цієї задачі непорожня, оскільки при $x_{m+1} = \max_{j=\overline{1,n}} \left| c_{1,j} \right|$ вектор $x = (1,0,\ldots,0)$ є, очевидно, допустимим. З обмеженості зверху величин $\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i, \ j=\overline{1,n}$ у класі стратегій випливає обмеженість знизу величини x_{m+1}, яка задає цільову функцію, тому розв'язок (54) існує. Із першої теореми двоїстості випливає існування розв'язку задачі (55), а із теореми 8 – існування розв'язків задач (50) і (51). Позначимо ці розв'язки x^* та y^*. Тоді очевидна є рівність $F(x^*, y^*) = \min_x \max_y F(x,y) = \max_y \min_x F(x,y)$, а отже, й існування сідлової точки у функції $F(x,y)$.●

Зауваження. Якщо $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*, x_{m+1}^*)$ - розв'язок задачі (54), а $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*, y_{n+1}^*)$ - розв'язок задачі (55), то оптимальна змішана стратегія гравця I_1 - $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$, оптимальна змішана стратегія гравця I_2 - $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*)$, а ціна гри $v^* = x_{m+1}^* = y_{n+1}^*$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати матричну гру з платіжною матрицею $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язування.</u> Нехай вектори $x = (x_1, x_2)$ і $y = (y_1, y_2)^T$ належать класу стратегій. Тоді середній виграш гравця I_2 задається формулою $F(x,y) = xCy = y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)$. Задачі (50) і (51) мають вигляд

$$\max_y [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \min_x ,$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$\min_x [y_1(-x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)] \to \max_y ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Відповідні задачі (54) і (55) мають вигляд

$$\begin{array}{lcl} x_3 \to \min, & & y_3 \to \max, \\ -x_1 + x_2 \le x_3, & & -y_1 + y_2 \ge y_3, \\ x_1 - x_2 \le x_3, & \text{і} & y_1 - y_2 \ge y_3, \\ x_1 + x_2 = 1, & & y_1 + y_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 1, & & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{array}$$

Розв'язуючи їх M -методом, знаходимо:
$x^* = (0.5, 0.5)$, $y^* = (0.5, 0.5)^T$, $v^* = 0$.

10. Активні стратегії

У випадку існування оптимальних чистих стратегій результат відхилення від них для кожного із гравців очевидний, а у випадку змішаних стратегій це не так. Нехай $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_1, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)^T$ - оптимальна змішана стратегія гравця I_2. *Чисту стратегію* $x^k = \{x_k = 1, x_i = 0, i \ne k\}$ гравця I_1 назвемо *активною*, якщо $x_k^* > 0$. Аналогічно вводиться поняття активних стратегій гравця I_2.

Теорема 10. Якщо гравець I_2 дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії y^*, то його середній виграш $F(x, y^*)$ залишається незмінним і дорівнює ціні гри $v^* = F(x^*, y^*)$ незалежно від стратегії гравця I_1, якщо тільки гравець I_1 не виходить за рамки своїх активних стратегій (застосовує їх у чистому вигляді чи змішує в довільних пропорціях).

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що всі чисті стратегії гравця I_1 активні, тобто, $x_i^* > 0$, $i = \overline{1, m}$. Оскільки (x^*, y^*) - сідлова точка функції $F(x, y)$, то з (52) випливає $v^* = F(x^*, y^*) \le F(x, y^*)$, або $v^* = x^* C y^* \le x C y^*$ для всіх стратегій x. Візьмемо $x = x^i$, де x^i - i-та чиста стратегія і отримаємо

$$v^* \le \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* , \ i = \overline{1,m} . \qquad (57)$$

Покажемо, що в нерівності (57) насправді виконується рівність при кожному $i = \overline{1,m}$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай для деяких значень індексу i нерівність (57) виконується строго, таких значень індексів k штук і вони згруповані в такий спосіб, що

$$v^* < \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* , \ i = \overline{1,k} ,$$

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* , \ i = \overline{k+1,m} .$$

Помножимо кожне з цих відношень на відповідне $x_i^* > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо протиріччя

$$v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i^* < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i^* y_j^* = v^* .$$

Отже,

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^* , \ i = \overline{1,m} . \qquad (58)$$

Візьмемо тепер $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ - довільну змішану стратегію гравця I_1. Помножимо кожну з рівностей (58) на відповідне $x_i > 0$ та додамо отримані вирази. Отримаємо $v^* = \sum_{i=1}^{m} v^* x_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_i\, y_j^* = xCy^*$, що і завершує доведення.●

Зауваження. Подібне доведеному твердження виконується і для гравця I_1.

Ця теорема дозволяє в ряді випадків відшукати оптимальні змішані стратегії та знайти ціну гри.

<u>Приклад.</u> Нехай $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і наперед відомо, що всі стратегії гравців активні. Знайти розв'язок гри.

<u>Розв'язування.</u> Якщо p - це ймовірність, з якою гравець I_1 обирає перший рядок матриці C, його оптимальна змішана стратегія повинна мати вигляд $x^* = (p, 1-p)$ і при цьому $\sum_{i=1}^{2} c_{i,j} x_i^* = v^*,\ j = \overline{1,2}$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -p + (1-p) = v^* \\ p - (1-p) = v^* \end{cases}$, знаходимо $p = 0.5,\ v^* = 0$. Тобто оптимальною для гравця I_1 є стратегія $x^* = (0.5, 0.5)$. Цілком аналогічно з співвідношень $y^* = (q, 1-q)^T$ та $\sum_{j=1}^{2} c_{i,j} y_j^* = v^*, i = \overline{1,2}$ знаходимо оптимальну змішану стратегію гравця I_2 : $y^* = (0.5, 0.5)^T$ і $v^* = 0$.

Для знаходження активних стратегій використовують поняття домінуючих стовпців та підпорядкованих рядків у платіжній матриці. Назвемо стовпчик k *домінуючим* над стовпчиком l, якщо виконується нерівність $c_{i,k} \geq c_{i,l}, i = \overline{1,m}$, при цьому стовпчик l буде *підпорядкованим* стовпчику k. Аналогічні визначення введемо і для рядків платіжної матриці. Аналізуючи співвідношення (43) та (44), можна зробити висновок: якщо існує стовпчик l, підпорядкований стовпчику k, то відповідна йому l-та чиста стратегія гравця I_2 неактивна; якщо існує рядок k, домінуючий над рядком l, то відповідна йому k-та чиста стратегія гравця I_1 неактивна.

Використання цього твердження дозволяє в ряді випадків значно зменшити розмірність платіжної матриці за рахунок вилучення неактивних стратегій обох гравців.

Особливий інтерес викликають ігри з розміром платіжної матриці $2 \times n$ та $m \times 2$. Для них розроблено *графічний метод* розв'язування. Для гри будується її графічне зображення. У випадку гри $2 \times n$ виділяється верхня (44) границя виграшів та визначається точка з найменшою ординатою, а у випадку гри $m \times 2$ – нижня (43) границя виграшів та визначається точка з найбільшою ординатою. Знайдена ордината буде дорівнювати ціні гри, а пара прямих, перетин яких визначає знайдену точку, відповідає активними стратегіями відповідного гравця. Якщо в точці перетинається більше двох прямих, вибираємо тільки дві з них. Далі розв'язуємо гру 2×2 та знаходимо оптимальні змішані стратегії гравців.

Можна рекомендувати таку послідовність розв'язування матричної гри двох гравців:

1. Досліджуємо платіжну матрицю на наявність сідлової точки: якщо вона є - виписуємо оптимальні чисті стратегії та ціну гри.
2. Виділяємо активні стратегії гравців, використовуючи поняття домінування та підпорядкованості. Стовпчики та рядки матриці, що відповідають неактивним стратегіям, викреслюємо.
3. Якщо отримана після спрощення матриця має розмірність 2×2, $2 \times n$ або $m \times 2$, знаходимо розв'язок гри графічно.
4. В інших випадках зводимо гру до пари двоїстих ЗЛП і знаходимо її розв'язок.

Якщо розмір платіжної матриці після спрощення залишається великим, то застосування симплекс-методу вимагає значних обчислень. Для розв'язування матричних ігор у таких випадках розроблено наближені методи. Одним із таких методів є метод Брауна–Робінсон (див. книгу Ю.Д.Попова «Линейное и нелинейное программирование»).

Разом із початковою грою з платіжною матрицею C , розглянемо фіктивну гру, в якій гравці ходять почергово і використовують тільки чисті стратегії. Розпочинає гравець I_1 із довільної чистої стратегії i_1. Нехай проведено деяку кількість партій і після s-го ходу гравця I_1 побудовано вектор $x^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_m^s)$, де x_i^s – частота вибору i-ї чистої стратегії. Гравець I_2 буде вибирати свою чисту стратегію j_s так, щоб максимізувати свій виграш з умови $j_s \in \arg\max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{m} c_{i,j} x_i^s$.

Аналогічно, після s-го ходу гравця I_2 побудовано вектор $y^s = (y_1^s, y_2^s, \ldots, y_n^s)$, де y_j^s – частота вибору j-ї чистої стратегії. Гравець I_1 буде вибирати свою чисту стратегію i_s так, щоб мінімізувати свій програш із умови $i_s \in \arg\min_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_j^s$. Якщо гравці робитимуть ходи за описаними правилами, то

$$x^{s+1} = (\frac{s}{s+1})x^s + (\frac{1}{s+1})x^{i_s} \text{ і } y^{s+1} = (\frac{s}{s+1})y^s + (\frac{1}{s+1})y^{j_s},$$

де x^{i_s} та y^{j_s} – відповідні чисті стратегії гравців.

Теорема 11. В описаній ітераційній процедурі існують границі $\lim_{s\to\infty} x^s = x^*$, $\lim_{s\to\infty} y^s = y^*$, де x^* і y^* – оптимальні стратегії, і при цьому $\lim_{s\to\infty} \min_i Cy^s = \lim_{s\to\infty} \max_j x^s C = v^*$, де v^* – ціна гри.

Цю теорему приймемо без доведення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Попов Ю.Д. Линейное и нелинейное программирование / Ю.Д. Попов. – К. : Изд-во Киев. ун-та, 1988. – 180 с.

2.Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – 7-е видання, перероблене та доповнене / Ю.П.Зайченко. – К. : Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.

3.Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко. – К. : Вища шк., 1975. – 372 с.

4.Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986 . – 319 с.

Навчальне видання

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Конспект лекцій
У трьох частинах
Частина 2

Укладач ***Руснак Микола Андрійович***

Відповідальний за випуск ***Сопронюк Ф. О.***
Літературний редактор ***Колодій О.В.***
Технічний редактор ***Чораєва Г.К.***