Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Підлягає поверненню на кафедру

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Конспект лекцій

Чернівці

Чернівецький національний університет

2010

ББК 22.183.4
М 545
УДК 519.852

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

М 545 Методи оптимізації : конспект лекцій (у 3-х ч.) / укл. М.А. Руснак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. Ч. 1. – 56 с.

Видання містить конспект лекцій з дисципліни «Методи оптимізації». Перша частина відповідає змістовим модулям «Лінійне програмування» та «Теорія двоїстості в лінійному програмуванні» і розрахована на один семестр. Для студентів факультетів комп'ютерних наук та прикладної математики, які здобувають освіту в галузі знань „Системні науки та кібернетика".

ББК 22.183.4
УДК 519.852

Навчальне видання

Методи оптимізації

Конспект лекцій

Частина 1

Укладач Руснак Микола Андрійович

Відповідальний за випуск Сопронюк Ф. О.

Літературний редактор Колодій О.В.

Технічний редактор

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №891 від 08.04.2002 р.

Підписано до друку . Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. ....

Обл..-вид. арк..... Зам……..Тираж …. .

Друкарня Чернівецького національного університету

58012, Чернівці, вул.. Коцюбинського,2

© Чернівецький національний університет, 2010

1. Лінійне програмування (ЛП): Загальна задача ЛП (ЗЗЛП). Основні означення. Геометрична інтерпретація

Розглянемо кілька математичних моделей задач планування та управління, які зводяться до задач ЛП.

Задача А (про складання раціону). У розпорядженні фермера є n – різних кормів (сіно, силос, зерно, ...) кількість яких відома й постійна. Для ефективного відгодовування тварин необхідно забезпечити наявність в їх раціоні m – корисних речовин (жири, білки, вуглеводи, ...) у відомих кількостях. Нехай нам відомо вміст корисних речовин у кожному виді використовуваного корму та ціна одиниці кожного корму. Необхідно скласти раціон (вказати набір та кількість кормів) так, щоб кожна корисна речовина містилася в ньому в необхідній кількості й сумарна вартість раціону була мінімальною.

Введемо умовні позначення:

$a_{i,j}$ – кількість i-ї корисної речовини в одиниці j-го корму;

b_i – мінімальна потреба тварин у i-й корисній речовині;

c_j – вартість одиниці j-го корму;

x_j – кількість одиниць j-го корму, що використовується у раціоні.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Задача полягає у відшуканні такого набору чисел $x_j,\ j=\overline{1,n}$, для якого виконуються співвідношення (1-3).

Задача В (про оптимальний план). Підприємство може виробляти n- найменувань продукції, використовуючи для цього m-видів сировини, запаси яких відомі та сталі. Відомо також затрати кожного виду сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду, мінімальні та максимальні потреби в продукції

кожного найменування та прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції кожного виду. Необхідно скласти такий план виробництва, який максимізує прибуток підприємства.

Уведемо умовні позначення:

$a_{i,j}$ – затрати i-ї сировини на виробництво одиниці продукції j-го найменування;

b_i – запаси i-ї сировини;

d_j та D_j – мінімальні та максимальні потреби у продукції j-го найменування;

c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го найменування;

x_j – кількість одиниць продукції j-го найменування у плані.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (5)$$

$$d_j \le x_j \le D_j,\ j=\overline{1,n}. \qquad (6)$$

Задача полягає у відшуканні такого набору чисел $x_j,\ j=\overline{1,n}$, для якого виконуються співвідношення (4-6).

Відзначимо спільні риси задач (1-3) та (4-6):

- досліджується на екстремум (1,4) лінійна функція;
- обмеження (2,5) є лінійними нерівностями типу $\le, \ge, =$;
- обмеження (3,6) накладаються на кожне невідоме.

Такого роду задачі називають задачами лінійного програмування.

Наведемо тепер загальну форму запису задачі лінійного програмування (ЗЗЛП): знайти вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \in R^n$, який мінімізує (максимізує) лінійну функцію

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (7)$$

та задовольняє систему лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,k},\ k \le n. \tag{9}$$

Функцію $L(x)$ називають функцією мети або цільовою функцією. Співвідношення (8) називають основними обмеженнями, а (9) – прямими (природними) обмеженнями.

Означення 1. Допустимою множиною ЗЗЛП (7-9) назвемо сукупність векторів $x \in R^n$, які задовольняють умови (8,9). Вектор із допустимої множини назвемо допустимим вектором.

Означення 2. Допустимий вектор, на якому функція мети досягає свого мінімального (максимального) значення, назвемо розв'язком ЗЗЛП.

Наведемо тепер геометричну інтерпретацію ЗЗЛП (7-9) за умови $k = n$. Графічно на площині можна розв'язати ЗЗЛП із двома змінними та ЗЗЛП, що зводяться до задач із двома змінними.

У першому випадку потрібно побудувати на площині допустиму множину (врахувавши основні та природні обмеження ЗЗЛП) та лінію рівня цільової функції $L(x) = const$ при деякому фіксованому значенні $const$. Якщо допустима множина порожня, то ЗЗЛП не має розв'язку. Якщо допустима множина містить тільки один вектор (точку), то розв'язком ЗЗЛП буде саме цей вектор. Інакше, зсуваючи лінію рівня паралельно собі в напрямку градієнта функції $L(x)$ (в ЗЗЛП на максимум) або в напрямку антиградієнта (в ЗЗЛП на мінімум), знаходимо точку її останнього перетину з допустимою множиною. Якщо таку точку визначити неможливо, то ЗЗЛП немає розв'язку. Якщо таких точок кілька, то виберемо одну із них (кутову). Координати цієї точки будуть розв'язком системи відповідних рівнянь, що отримуються з обмежень ЗЗЛП. Значення цільової функції підраховуємо підстановкою цих координат у $L(x)$.

Другий випадок має місце, якщо основні обмеження ЗЗЛП задано у вигляді рівностей і ранг r матриці основних обмежень ЗЗЛП дорівнює $n-2$ (очевидно, що $m \ge n-2$). Тоді базисних

змінних в основних обмеженнях буде $n-2$, небазисних – 2. Виражаючи базисні змінні через небазисні та врахувавши природні обмеження, отримаємо систему нерівностей, які задають проекцію допустимої множини на площину небазисних змінних. Підставивши вирази для базисних змінних у цільову функцію, отримаємо ЗЗЛП із двома змінними.

<u>Приклад.</u> Розв'язати графічно ЗЗЛП

$$L(x) = 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 \to extr,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 20, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ extr \in \{\min, \max\}.$$

<u>Розв'язування.</u> В цьому випадку $n = 4,\ m = 2,\ r = 2$. Отже, задачу можна звести до задачі з двома змінними. За базисні змінні виберемо x_3 та x_4, небазисними будуть змінні x_1 і x_2. Визначимо

$$\begin{cases} x_3 = -6 - 2x_1 + 3x_2, \\ x_4 = 20 - 5x_1 - 4x_2 \end{cases}$$ та запишемо допоміжну задачу

$$\overline{L}(x) = 5x_1 + 4x_2 - 32 \to extr,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le -6, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Цю допоміжну задачу можна розв'язати графічно. Для допоміжної задачі на мінімум знаходимо $x_1^* = 0,\ x_2^* = 2,\ \overline{L}(x_1^*, x_2^*) = -24$. Відповідно, для вихідної задачі на мінімум одержуємо $x^* = (0,2,0,12),\ L(x^*) = -24$. Для допоміжної задачі на максимум $\overline{L}(x_1^*, x_2^*) = -12$, де (x_1^*, x_2^*) – довільна точка з відрізка $[B,C]$, $B = (\frac{36}{23}, \frac{70}{23})$, $C = (0,5)$. У параметричній формі рівняння цього відрізка має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{36}{23}\theta, \\ x_2 = \dfrac{70}{23}\theta + 5(1-\theta), \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Отже, для вихідної задачі на максимум маємо $L(x^*) = -12$. Це значення досягається у кожній точці вигляду $x^* = (\frac{36}{23}\theta, 5 - \frac{45}{23}\theta, 9 - \frac{207}{23}\theta, 0)^T$ при $0 \le \theta \le 1$.

2. Геометричні властивості допустимої множини ЗЛП

Геометрична інтерпретація ЗЗЛП, проведена на попередній лекції, дозволяє зробити такі висновки:

- допустима множина ЗЗЛП може бути порожньою, складатися з одного вектора, бути непорожньою й обмеженою або непорожньою й необмеженою;
- розв'язку ЗЗЛП може не існувати, він може бути єдиним або їх може бути багато;
- розв'язок ЗЗЛП, якщо він існує, знаходиться на границі допустимої множини.

Отже, визначальну роль у відшуканні розв'язку ЗЗЛП відіграє допустима множина та її властивості.

Означення 3. Нехай $x^1, x^2 \ldots x^r \in R^n$, $r \ge 2$. Опуклою лінійною оболонкою (ОЛО) точок $x^1, x^2 \ldots x^r$ назвемо множину точок $x \in R^n$, таких, що $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$, де $\alpha_i \in [0, \infty)$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$.

У випадку $r = 2$ ОЛО називають відрізком у просторі R^n і вживають позначення $[x^1, x^2]$.

Означення 4. Непорожню множину $M \subseteq R^n$ назвемо опуклою множиною, якщо вона разом із будь-якими своїми точками x^1 і x^2 містить відрізок $[x^1, x^2]$, тобто $\forall\, x^1, x^2 \in M \Rightarrow [x^1, x^2] \subseteq M$. Порожня множина та множина, яка складається з однієї точки, теж вважаються опуклими.

Означення 5. Півпростором простору R^n назвемо множину всіх точок із простору R^n таких, що $a^T x \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b$, де $a^T \in R^n$ і $b \in R^1$ – задані величини ($a \ne 0$). Гіперплощиною в просторі R^n назвемо множину всіх точок із простору R^n, таких, що $a^T x = b$, $a \ne 0$.

Лема 1. Перетин довільного числа опуклих множин є множина опукла.

Доведення. Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ – опуклі множини і $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ – їх перетин. Відкидаючи тривіальні випадки, вважаємо, що в множині M знайдуться хоча б дві точки x^1 та x^2. Тоді

$x^1, x^2 \in M \Rightarrow x^1, x^2 \in M_i, \forall i \Rightarrow [x^1, x^2] \in M_i \Rightarrow [x^1, x^2] \in M$,

тобто множина M – опукла. ●

Лема 2. Півпростір опукла множина.

Доведення. Розглянемо, наприклад, півпростір $a^T x \le b$, де $a^T \in R^n$ і $b \in R^1$ – задані величини. Нехай x^1 та x^2 деякі точки із цього півпростору. Покажемо, що відрізок $[x^1, x^2]$ належить півпростору. Дійсно,

$$\forall x \in [x^1, x^2] \Rightarrow \exists \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 : \, x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2.$$

Тоді

$$a^T x = \alpha_1 a^T x^1 + \alpha_2 a^T x^2 \le \alpha_1 b + \alpha_2 b = b,$$

що й потрібно було довести. ●

Лема 3. Гіперплощина опукла множина.

Доведення. Розглянемо гіперплощину $a^T x = b$ як перетин двох півпросторів $a^T x \le b$ та $a^T x \ge b$. Застосовуючи послідовно результати леми 2 та леми 1 отримуємо потрібне твердження. ●

Теорема 1. Допустима множина ЗЗЛП є опуклою множиною.

Доведення. Допустима множина ЗЗЛП утворюється перетином півпросторів і гіперплощин, що задаються співвідношеннями (8) та (9), а отже, згідно з лемами 1 – 3, є опуклою множиною. ●

Іноді допустиму множину ЗЗЛП називають опуклим багатогранником. Обмежений опуклий багатогранник називають опуклим багатокутником.

Теорема 2. Множина розв'язків ЗЗЛП є опуклою множиною.

Доведення. Відкидаючи тривіальні випадки, коли розв'язку ЗЗЛП не існує або він єдиний, розглянемо два розв'язки x^1 та x^2. Тоді, згідно з (7) та означенням 2, отримуємо $L(x^1)=L(x^2)=\ell^*$, де ℓ^* – стала. Для кожної точки відрізка $[x^1,x^2]$

$$\exists \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1+\alpha_2=1, x=\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2.$$

Тоді

$L(x)=L(\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2)=\alpha_1 L(x^1)+\alpha_2 L(x^2)=\alpha_1 \ell^*+\alpha_2 \ell^*=\ell^*$. •

Зауваження. Множина розв'язків ЗЗЛП не може бути скінченою множиною, якщо тільки вона не складається з однієї точки.

Теорема 3. Нехай $M \subset R^n$ – опукла замкнена множина і $x^0 \notin M$. Тоді існує гіперплощина $a^T x+b=0, a\ne 0$, така що $a^T x^0+b>0$ і $a^T y+b<0, \forall y \in M$.

Доведення. Оскільки множина M замкнена і $x^0 \notin M$, то $\exists x^* \in M$ така, що

$$\left\|x^0-x^*\right\|=\inf_{y\in M}\left\|x^0-y\right\|=d>0.$$

Розглянемо функцію $l(x)=(x^0-x^*)^T(x-x^*)$. Очевидно, що

$$l(x)=(x^0-x^*)^T(x-x^*)=\left\|x^0-x^*\right\|^2=d^2>0.$$

Доведемо, що $l(y)\le 0$ для $\forall y \in M$. Доведення проведемо від супротивного: нехай $\exists y \in M$ така, що $l(y)>0$. Візьмемо довільне число $\alpha \in [0,1]$ і побудуємо точку $x(\alpha)=\alpha y+(1-\alpha)x^*$. Множина M опукла, тому $x(\alpha)\in M$. Тоді

$$\left\|x^0-x(\alpha)\right\|^2=\left\|x^0-\alpha y-(1-\alpha)x^*\right\|^2=$$
$$\left\|(x^0-x^*)-\alpha(y-x^*)\right\|^2=\left\|x^0-x^*\right\|^2-$$
$$2\alpha(x^0-x^*)^T(y-x^*)+$$

$$+\alpha^2\left\|y-x^*\right\|^2=d^2+\alpha^2\left\|y-x^*\right\|^2-2\alpha l(y).$$

Оскільки, за припущенням, $l(y)>0$, то, взявши $0<\alpha<\dfrac{2l(y)}{\left\|y-x^*\right\|^2}$, отримаємо $\left\|x^0-x(\alpha)\right\|^2<d^2$, що суперечить вибору точки x^*. Отже, $l(y)\le 0$ для $\forall y \in M$. Побудуємо гіперплощину $l(x)-c=0$ де $0<c<d^2$. Тоді $l(x^0)-c=d^2-c>0$ і $l(y)-c\le -c<0$, тобто гіперплощина існує і $a=x^0-x^*$, $b=-c-(x^*)^T(x^0-x^*)$. •

Зауваження. Не складно перевірити, що гіперплощина $l(x)=0$ дотикається до множини M у точці x^*, тобто $l(x^*)=0$.

Означення 6. Гіперплощина $a^T x+b=0, a\ne 0$ називається опорною до множини M у точці $p\in M$, якщо $\forall x \in M$ виконуються умови $a^T x+b\le 0$ і $a^T p+b=0$.

Приклад. У доведенні теореми 3 гіперплощина $l(x)=0$ є опорною до множини M у точці x^*. Гіперплощина $l(x)-c=0$ відокремлює множину M від точки x^*.

Означення 7. Кутовою точкою або вершиною опуклого багатогранника D назвемо таку його точку x, для якої не існує інших точок $x^1, x^2 \in D$, $x^1\ne x^2$, таких, що $x=\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2$ при $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Лема 4. Опуклий багатокутник є опуклою лінійною оболонкою своїх вершин.

Доведення. Легко переконатися, що кожна точка x опуклого багатокутника D є опуклою лінійною комбінацією деяких його крайніх точок. Дійсно, нехай $s\in R^n$ – довільний вектор. Розглянемо пряму $l(x)=x+\lambda s$, де $-\infty<\lambda<\infty$. Оскільки D – обмежена опукла множина, то пряма $l(x)$ перетинає його границю в двох точках x^1 та x^2 (можливо, ці точки збігаються). Тоді точка x належить відрізку $[x^1,x^2]$ і, відповідно, є опуклою лінійною комбінацією граничних точок множини D. Залишилось довести, що кожна гранична точка є опуклою лінійною комбінацією деякої кількості своїх вершин. Для цього нагадаємо, що перетин гіперплощини $a^T x = b$, $a \neq 0$ з множиною $D \subseteq R^n$ має розмірність, не більшу ніж $n-1$. Далі доведення проведемо методом індукції. Очевидно, що при $n=1$ перетин являє собою множину розмірності 0 (точку) і твердження леми є тривіальним. Нехай для множин розмірності, меншої від n, твердження доведено. Доведемо його для множин розмірності n. Нехай $y \in D$ – довільна гранична точка множини D. Тоді, за теоремою 3, існує опорна гіперплощина $a^T x = a^T y$ до множини D у точці y і $a^T x \le a^T y$ для всіх $x \in D$. Перетин D_y множини D та цієї гіперплощини є множиною опуклою, обмеженою і непорожньою ($y \in D_y$), його розмірність менша за n. Отже, згідно з індуктивним припущенням, множина D_y є опуклою лінійною оболонкою своїх вершин. Крім того, кожна вершина z множини D_y є одночасно вершиною множини D. Дійсно, якщо це не так, то $z = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$ при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ і $x^1, x^2 \in D$, $x^1 \neq x^2$. Оскільки точка z належить гіперплощині $a^T x = a^T y$, то

$$0 = a^T (z - y) = \alpha_1 a^T (x^1 - y) + \alpha_2 a^T (x^2 - y).$$

Позаяк $x^1 - y \in D$ та $x^2 - y \in D$, то $a^T (x^1 - y) \le 0$ і $a^T (x^2 - y) \le 0$. Отже, $a^T (x^1 - y) = 0$ і $a^T (x^2 - y) = 0$, тобто $x^1 - y \in D_y$ та $x^2 - y \in D_y$. Звідси отримуємо, що $x^1, x^2 \in D_y$ і $x^1 = x^2$, що суперечить означенню вершини z. Ми довели, що кожна гранична точка множини D є опуклою лінійною комбінацією своїх вершин. •

Зауваження. Подібне твердження можна довести і для опуклих багатогранників [6].

Теорема 4. Якщо ЗЗЛП має розв'язок x^*, то існує вершина x^0 допустимої множини D, така, що $L(x^0) = L(x^*)$.

Доведення. Розглянемо, наприклад, задачу мінімізації $L(x) = c^T x \to \min, x \in D$ і нехай x^* – її розв'язок. Тоді $\forall x \in D$, маємо $c^T x^* \le c^T x$. Якщо x^* – вершина множини D, то $x^0 = x^*$ і теорему доведено.

Нехай x^* – не вершина множини D. За Лемою 4, її можна зобразити у вигляді опуклої лінійної комбінації деяких його вершин: якщо $x^1, x^2, \ldots, x^r$ – вершини множини D, то $x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$, де $\alpha_i \ge 0, i = \overline{1,r}$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Тоді

$$L(x^*) = c^T x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i c^T x^i \ge c^T x^0 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = c^T x^0 = L(x^0),$$

де $c^T x^0 = \min_{i=1,r} (c^T x^i)$. Таким чином, x^0 – вершина допустимої множини й виконуються нерівності $c^T x^* \le c^T x$, $\forall x \in D$ та $c^T x^* \ge c^T x^0$. Звідси отримуємо $c^T x^* = c^T x^0$. •

Зауваження. Якщо мінімальне (максимальне) значення цільової функції досягається в декількох точках множини D, то таке ж значення цільової функції буде в кожній точці опуклої лінійної оболонки цих точок.

З отриманих у цій лекції результатів зробимо висновок: щоб знайти розв'язок ЗЗЛП треба відшукати всі вершини допустимої множини та порівняти значення цільової функції у вершинах. Ті з вершин, в яких значення цільової функції мінімальне (максимальне), і будуть розв'язками ЗЗЛП.

Цей висновок можна було б взяти за основу для побудови алгоритму знаходження розв'язку ЗЗЛП. Однак:

– кількість вершин допустимої множини може бути досить великою;
– задача відшукання всіх вершин допустимої множини досить складна.

Звідси випливає необхідність більш глибокого дослідження властивостей ЗЗЛП.

3. Алгебраїчні властивості ЗЗЛП

Введемо, для зручності, нові способи запису ЗЗЛП, відомі під загальною назвою стандартної задачі лінійного програмування (СЗЛП): у координатній формі

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min , \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = \overline{1, m} , \qquad (11)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n} ; \qquad (12)$$

у матрично-векторній формі

$$L(x) = c^T x \to \min, \qquad (13)$$

$$Ax = b, \qquad (14)$$

$$x \ge 0, \qquad (15)$$

де $x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$

Зауважимо, що операції відношення в (14) та (15) визначені покомпонентно. Матрицю $A \in R^m \times R^n$ називають матрицею основних умов СЗЛП. Якщо розглядати матрицю A як сукупність із n векторів $A_j = (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{m,j})^T$, то умову (14) можна переписати в еквівалентному вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b . \qquad (16)$$

Задача (13), (16), (15) – це СЗЛП у векторній формі.

Аналогічно ЗЗЛП, у СЗЛП вирішальну роль для відшукання розв'язків відіграють структура та властивості допустимої множини. Нагадаємо властивості системи лінійних алгебраїчних рівнянь (14). Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається сумісною, якщо існує хоча б один її розв'язок, і несумісною – в протилежному випадку. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок і невизначеною – в протилежному випадку. Умови сумісності системи задаються у відомій теоремі Кронекера-Капеллі. Якщо ранг r сумісної системи рівнянь менший від кількості невідомих n, то система має нескінченно багато розв'язків. При цьому r невідомих (головних, базисних) лінійно виражаються через $n-r$ інших (вільних, небазисних) невідомих. Загальний розв'язок системи рівнянь є сумою будь-якого її частинного розв'язку й загального розв'язку відповідної однорідної системи. Загальний розв'язок однорідної системи є лінійною комбінацією векторів фундаментальної системи розв'язків однорідної системи з довільними дійсними коефіцієнтами.

Для СЗЛП випадок несумісної системи (14) є тривіальним – задача розв'язку не має. Якщо система (14) визначена, то допустима множина містить тільки одну точку й відшукання розв'язку в цьому випадку теж доволі просте. Найбільш цікавим для досліджень є випадок невизначеної системи (14). В цьому випадку допустима множина містить нескінчену кількість точок і задача мінімізації набуває змісту. Надалі вважатимемо, що система лінійних рівнянь (14) (і відповідно (11) та (16)) задовольняє умові

$$rang(A) = rang(\overline{A}) \le m < n , \qquad (R)$$

де $\overline{A} = (A \vdots b)$ – розширена матриця системи (14).

Відмітимо основні відмінності СЗЛП від ЗЗЛП :

- задача полягає у відшуканні мінімуму лінійної функції $L(x)$;
- основні обмеження задано у вигляді рівностей;
- природні обмеження накладено на всі невідомі.

Наведемо сукупність правил, які дозволяють звести кожну ЗЗЛП до СЗЛП:

1. Задачу пошуку максимуму цільової функції $L(x)$ замінюємо задачею пошуку мінімуму функції $-L(x)$.
2. Обмеження, записані у вигляді нерівностей, зводимо до рівностей шляхом додавання (віднімання) до їх лівих частин додаткових невід'ємних змінних.

3. Якщо для деякої змінної x_i не вказано обмеження на знак, то робимо заміну змінних $x_i = x_i^+ - x_i^-$, де $x_i^+ \ge 0$ та $x_i^- \ge 0$.

У побудованої в такий спосіб СЗЛП може зрости кількість невідомих n, але умова (R) не порушиться.

Означення 8. Допустимий вектор $x \in D$ називається базисним вектором задачі (13–15), якщо відповідні його ненульовим компонентам стовпці матриці A є лінійно-незалежними.

Зауважимо, що внаслідок умови (R) кількість ненульових компонент базисного вектора не перевищує m. Базисний вектор називають невиродженим, якщо кількість його ненульових компонент дорівнює m, і виродженим в інших випадках. Базисом базисного вектора називається впорядкований набір вектор-стовпців матриці A, що відповідають його ненульовим компонентам.

Приклад. Нехай обмеження СЗЛП мають вигляд

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

Легко переконатися, що умова (R) виконується, а матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x^1 = (0,2,0,1)^T$ – невироджений базисний вектор із базисом $\{A_2, A_4\}$. Вектор $x^2 = (0.5,1,0,0.5)^T$ – допустимий вектор, але небазисний (кількість ненульових компонент більша двох). Вектор $x^3 = (0,3.5,-0.5,0)^T$ – недопустимий і, очевидно, небазисний.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що ненульові компоненти допустимого вектора згруповані та вирівняні по лівому краю його представлення $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$, $r \le m$.

Теорема 5. Нехай допустима множина D СЗЛП непорожня. Вектор $x \in D$ буде вершиною допустимої множини D тоді і тільки тоді, коли x – базисний вектор СЗЛП.

Доведення. Необхідність. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$ вершина допустимої множини. Оскільки $x \in D$, то, згідно з (16), маємо $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$. Покажемо, що x – базисний вектор, тобто система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно незалежна і $r \le m$. Доведення проведемо від супротивного. Нехай система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно залежна або $r > m$. Це означає, що існує нетривіальний розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ однорідної системи $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = 0$. За допомогою цього розв'язку побудуємо вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)^T \in R^n$, виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і розглянемо два вектори, $x^1 = x + \varepsilon\alpha$ та $x^2 = x - \varepsilon\alpha$. Вибором ε (наприклад, $0 < \varepsilon < \min\limits_{j:\alpha_j \ne 0} \frac{x_j}{|\alpha_j|}$) зробимо компоненти цих векторів невід'ємними $x^1 \ge 0$, $x^2 \ge 0$. Оскільки $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^1 A_j = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j = b \text{ і } \sum_{j=1}^{n} x_j^2 A_j = b,$$

тобто це допустимі вектори $x^1 \in D$ і $x^2 \in D$. Очевидна рівність $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ суперечить тому, що x – вершина допустимої множини. Отже, зроблене припущення хибне і, за означенням, x є базисним вектором.

Достатність. Нехай x – базисний вектор СЗЛП. Покажемо, що x – вершина допустимої множини. З означення базисного вектора маємо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^T$, система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно незалежна і $r \le m$. Крім того, x –

допустимий вектор, тому $\sum_{j=1}^{r} x_j A_j = b$. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що x – не вершина множини D. Тоді
$\exists x^1, x^2 \in D, x^1 \neq x^2 : x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
Звідси робимо висновок про структуру цих векторів

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_r^1, 0, \ldots, 0)^T \text{ та } x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_r^2, 0, \ldots, 0)^T.$$

Ці вектори допустимі, тому $\sum_{j=1}^{r} x_j^1 A_j = b$ та $\sum_{j=1}^{r} x_j^2 A_j = b$.
Віднімаючи від першого співвідношення друге отримуємо $\sum_{j=1}^{r} (x_j^1 - x_j^2) A_j = 0$. Оскільки $x^1 \neq x^2$, то ця рівність може виконуватись тільки в тому випадку, коли система векторів $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ лінійно залежна, що суперечить означенню базисного вектора.
Отже, x – вершина множини D. •

Доведена теорема дозволяє стверджувати: якщо СЗЛП має розв'язок x^*, то знайдеться базисний вектор СЗЛП $x^0 \in D$ такий, що $L(x^*) = L(x^0)$. Інакше кажучи, серед розв'язків СЗЛП є базисний вектор. Тепер можна запропонувати такий алгоритм відшукання розв'язку СЗЛП: починаючи з деякого базисного вектора перейти до іншого базисного вектора, такого, на якому значення цільової функції менше від попереднього. Однак при цьому виникає кілька запитань, кожне з яких вимагає додаткових досліджень:

– як знайти хоча б один (початковий) базисний вектор;
– як здійснити перехід до іншого базисного вектора;
– чи можна забезпечити зменшення значення цільової функції при цьому переході;
– доки слід продовжувати пошуки нових базисних векторів.

4. Канонічна форма задачі лінійного програмування

Розпочнемо з прикладу, що дозволить намітити відповіді на поставлені в минулій лекції запитання.
Приклад 1. Розглянемо СЗЛП

$$L(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 \to \min,$$
$$x_1 + x_4 + x_5 = 2,$$
$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$$
$$x_3 - x_4 - 3x_5 = 2,$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5},$$

та спробуємо знайти її розв'язок.
Розв'язування. Очевидно, що $rangA = rang\overline{A} = 3 < 5$ та до базису найліпше взяти змінні x_1, x_2, x_3, оскільки складена з відповідних векторів A_j матриця одинична, а отже, невироджена. Змінні x_4, x_5 – небазисні. Виразимо з основних обмежень базисні змінні через небазисні

$$x_1 = 2 - x_4 - x_5,$$
$$x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5,$$
$$x_3 = 2 + x_4 + 3x_5.$$

Підставимо отримані вирази в цільову функцію та побудуємо базисний вектор x^1 при $x_4 = 0, x_5 = 0$. Отримаємо $L(x) = 3 - x_4 + x_5$, $x^1 = (2,7,2,0,0)^T$ та $L(x^1) = 3$. Спробуємо зменшити значення цільової функції, збільшуючи значення небазисних змінних. Очевидно, що збільшення змінної x_5 призведе до зростання значення $L(x)$, а збільшення змінної x_4 – до його зменшення. Доки можна збільшувати змінну x_4? Врахувавши природні обмеження задачі при $x_5 = 0$, отримуємо систему умов: $x_4 \leq 2, x_4 \leq 3\frac{1}{2}$. Отже, максимальне значення $x_4 = 2$. Обчислимо компоненти нового вектора $x^2 = (0,3,4,2,0)^T$, при цьому $L(x^2)=1$. Легко переконатися, що x^2– базисний вектор із базисом x_2, x_3, x_4. Будемо говорити, що змінну x_1 вивели з базису, а змінну x_2 ввели до базису. Виразимо базисні змінні через небазисні та підставимо отримані вирази в цільову функцію

$x_4 = 2 - x_1 - x_5$, $x_2 = 3 + 2x_1 - x_5$, $x_3 = 4 - x_1 + 2x_5$, $L(x) = 1 + x_1 + 2x_5$. Оскільки коефіцієнти при небазисних змінних у цільовій функції додатні, зменшити її значення збільшенням значень цих змінних неможливо. Отже, можна припустити, що розв'язок задачі $x^* = (0,3,4,2,0)^T$ і $L(x^*) = 1$. (Це стає очевидним, якщо розв'язати цю задачу графічним методом.)

Аналіз етапів розв'язування цього прикладу підказує кілька корисних ідей:

1. Бажано розв'язувати задачу, в якій легко знайти початковий базисний вектор – базисним змінним відповідає одинична матриця.
2. Перехід до нового базисного вектора можливий шляхом зміни базисних змінних.
3. Якщо коефіцієнти при небазисних змінних у цільовій функції невід'ємні, зменшити значення цільової функції неможливо.

Припустимо надалі, що нам відомий який-небудь базисний вектор у СЗЛП (13-15). При виконанні умови $rang A = m$, із векторів, що утворюють базис базисного вектора, можна скласти базисну матрицю B розмірністю $(m \times m)$, причому $\det B \neq 0$. Вважатимемо, що матриця B складена з перших m стовпчиків матриці A. Змінні $x_1, x_2, \cdots, x_m$ називатимемо базисними, а змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ – небазисними. Помножимо обмеження (14) на матрицю B^{-1} зліва й одержимо еквівалентні обмеження

$$[E \mid \alpha]\ x = \beta\ , \qquad (17)$$

де E – одинична матриця розмірності $(m \times m)$, α – матриця розмірності $(m \times (n-m))$, $\beta = B^{-1}b$ – вектор розмірності m.

Якщо при цьому елементи вектора $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)^T$ невід'ємні, тобто

$$\beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}\ , \qquad (18)$$

то задачу (13), (17), (15),(18) називають канонічною задачею лінійного програмування (КЗЛП). Зауважимо, що КЗЛП можна записувати у координатній, векторній або матричній формах. Отже, якщо відомий деякий базисний вектор задачі (13-15), то можна знайти базисну матрицю B й здійснити перехід від СЗЛП до КЗЛП (13,17,15,18). Якщо ж ні, то процес знаходження базисної матриці зводиться до перебору всіх можливих комбінацій вектор-стовпців матриці A. Кількість цих комбінацій не перевищує C_n^m. Якщо після перебору всіх варіантів потрібної матриці не знайдено, то канонічної ЗЛП не існує, тобто ЗЛП має порожню допустиму множину.

Дослідимо тепер процедуру переходу від одного базисного вектора до іншого, причому особливу увагу звернемо на необхідність зменшення значення цільової функції.

Розглянемо КЗЛП у координатній формі

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} &x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,k}x_k + \ldots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1, \\ &\cdots \\ &x_l + \alpha_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{l,k}x_k + \ldots + \alpha_{l,n}x_n = \beta_l, \\ &\cdots \\ &x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{m,k}x_k + \ldots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m, \end{aligned} \qquad (20)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \qquad (21)$$

Припустимо, що всі базисні вектори цієї задачі невироджені. Тут змінні $x_1, x_2, \cdots, x_l, \ldots, x_m$ – базисні, а змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_k, \ldots, x_n$ – небазисні. Початковий базисний вектор $x = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$. Перехід до нового базисного вектора полягає у виведенні з числа базисних змінних змінної x_l та введенні до базису змінної x_k. Для цього скористаємося методом Жордано–Гаусса. Від кожного рівняння системи (20), крім l-того, віднімемо l-те рівняння помножене на $\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}$ (очевидно, при цьому $\alpha_{l,k} \neq 0$), а l-те рівняння поділимо на $\alpha_{l,k}$. Отримаємо систему

$$\begin{aligned}
&x_1 + \alpha'_{1,l}x_l + \alpha'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha'_{1,k}x_k + \ldots + \alpha'_{1,n}x_n = \beta'_1,\\
&\ldots\\
&\alpha'_{l,l}x_l + \alpha'_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha'_{l,k}x_k + \ldots + \alpha'_{l,n}x_n = \beta'_l,\\
&\ldots\\
&\alpha'_{m,l}x_l + x_m + \alpha'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m,k}x_k + \ldots + \alpha'_{m,n}x_n = \beta'_m,
\end{aligned} \tag{22}$$

коефіцієнти якої знаходимо за формулами

$$\alpha'_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{l,k}}, \ \ при \ \ i = l, \\ \alpha_{i,j} - \alpha_{l,j}\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, при\, i \neq l, \end{cases} \tag{23}$$

$$\beta'_i = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{l,k}}, \ \ \ при \ \ i = l, \\ \beta_i - \beta_l\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}}, \ \ при \ i \neq l. \end{cases} \tag{24}$$

Розглянемо детальніше стовпчик із номером k у системі (22). Безпосередньо підраховуємо $\alpha'_{i,k} = \begin{cases} 1, \ при \ i = l, \\ 0, \ при \ i \neq l, \end{cases}$ тобто змінна з номером k стала базисною.

Перевіримо, чи побудований за співвідношеннями (24) вектор буде базисним вектором КЗЛП. Згідно з означенням, цей вектор має бути допустимим і система векторів, які відповідають його ненульовим компонентам, має бути лінійно незалежною.

Оскільки, $\beta_i > 0,\ i = \overline{1,m}$ (вектор x – не вироджений) і $\alpha_{l,k} \neq 0$ (за припущенням), то з $\beta'_l = \frac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} > 0$ випливає, що $\alpha_{l,k} > 0$. Тобто, щоб змінну x_k можна було ввести до базису, в стовпчику k мають бути додатні числа. Якщо таке число одне, то номер l (змінної, яка виводиться з базису) заданий однозначно. Якщо ж таких чисел кілька, то номер l слід вибирати з умови $\frac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} = \min\limits_{i:\alpha_{i,k}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i,k}}$.

Позначимо $\theta_k = \frac{\beta_l}{\alpha_{l,k}}$, де номери l та k вибрано за описаними правилами, $\theta_k > 0$. Тоді співвідношення (24) задають новий вектор

$$x' = (\beta_1 - \theta_k\alpha_{1,k}, \ldots, \beta_{l-1} - \theta_k\alpha_{l-1,k}, 0, \beta_{l+1} - \theta_k\alpha_{l+1,k}, \ldots, \beta_m - \theta_k\alpha_{m,k}, \ldots,$$
$$, 0, \theta_k, 0, \ldots, 0)^T.$$

Цей вектор задовольняє (22), отже є допустимим. Додатних компонент у цьому векторі рівно m, їм (за перетворенням) відповідає система з m одиничних векторів, які є лінійно незалежними. Отже, x' – базисний вектор КЗЛП. З'ясуємо тепер, чи можна зменшити значення цільової функції на новому базисному векторі. На початковому базисному векторі $x = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$, $\quad L(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j\beta_j$. На новому базисному векторі x', врахувавши, що $\beta'_l = \beta_l - \theta_k\alpha_{l,k} = 0$, маємо

$$L(x') = \sum_{j=1}^{n} c_j x'_j = \sum_{j=1}^{m} c_j\beta'_j + c_k\theta_k = \sum_{j=1}^{m} c_j(\beta_j - \theta_k\alpha_{j,k}) + c_k\theta_k =$$
$$\sum_{j=1}^{m} c_j\beta_j + \theta_k(c_k - \sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_{j,k}) = L(x) + \theta_k\Delta_k,$$

де введено позначення

$$\Delta_k = c_k - z_k,\; z_k = \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{j,k}. \qquad (25)$$

Величину Δ_k називають відносною оцінкою змінної x_k .

Зауваження. Для знаходження відносних оцінок змінних у загальному випадку (коли змінні не згруповані спочатку), використовують співвідношення (25) при $z_k = c_{баз}^T \alpha_k$, де $c_{баз}$ – вектор, складений із коефіцієнтів при базисних змінних у цільовій функції, α_k – вектор умов, що відповідає змінній x_k. Очевидно, що для кожної базисної змінної x_i маємо $\Delta_i = 0$.

Отже, на новому базисному векторі $L(x^{'}) = L(x) + \theta_k \Delta_k$ і $\theta_k > 0$. Для зменшення значення слід вибирати номер k (змінної, яка вводиться до базису) так, щоб $\Delta_k < 0$. Якщо така відносна оцінка єдина, то вибір однозначний. В противному випадку рекомендують знаходити мінімальну відносну оцінку.

Визначимо тепер умови закінчення процесу зміни базисних векторів.

Лема 5. Якщо з цільової функції виключити базисні змінні, то коефіцієнти при небазисних змінних збігаються з їх відносними оцінками, а вільний член є значенням цільової функції на цьому базисному векторі.

Доведення. Розглянемо КЗЛП (19 – 21) та виразимо з основних обмежень базисні змінні через небазисні $x_i = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j,\; i = \overline{1,m}$. Підставимо отримані значення в цільову функцію:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i (\beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}) x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}) x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j .$$

Аналізуючи цей вираз отримуємо твердження леми. ●

Теорема 6. Нехай x^* базисний вектор КЗЛП (19 – 21). Якщо $\Delta_j \geq 0,\; j = \overline{1,n},$ то x^* – розв'язок цієї задачі.

Доведення. Згідно із припущеннями, базисний вектор має структуру $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)^T$. Позначимо вектор-стовпчики матриці $\left[E \,|\, \alpha \right]$ в (17) символами $\alpha_j,\, j = \overline{1,n}$. Перші m цих векторів є лінійно незалежними та утворюють базис вектора x^*. Із (25) та умови теореми отримуємо, що $c_j \geq z_j,\, j = \overline{1,n}$. Нехай $y \in D$ – довільний вектор, відмінний від вектора x^*. Якщо такого вектора не існує, то x^* – розв'язок КЗЛП. Покажемо, що $c^T y \geq c^T x^*$. Дійсно, легко отримати нерівність

$$c^T y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \geq \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j . \qquad (26)$$

Доведемо, що $x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. Оскільки, вектор $y \in D$, то $\left[E \,|\, \alpha \right] y = \beta$, або у векторній формі $\sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \beta$. Цю рівність можна розглядати як розклад вектора β по системі векторів $\alpha_j,\, j = \overline{1,n}$. Розкладемо тепер кожен із векторів α_j по системі лінійно незалежних векторів $\alpha_i, i = \overline{1,m}$. Отримаємо $\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \alpha_i,\, j = \overline{1,n}$. Проведемо очевидні перетворення $\beta = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. З іншого боку, вектор $x^* \in D$ і в силу його структури маємо у векторній формі $\beta = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \alpha_i$. Оскільки, розклад вектора β по системі лінійно незалежних векторів $\alpha_i, i = \overline{1,m}$ єдиний, отримуємо

$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} y_j$. Повертаючись до нерівності (26) з урахуванням доведеного маємо $\forall\ y \in D$ виконується нерівність $c^T y \geq c^T x^*$ •

Залишилося розглянути випадок, коли серед відносних оцінок небазисних змінних є від'ємні (тобто, існує змінна, яку потрібно ввести до базису), але у відповідному стовпчику матриці основних обмежень немає додатного числа (неможливо вибрати змінну, яку потрібно вивести з базису).

Теорема 7. Якщо для якого-небудь базисного вектора x КЗЛП існує хоча б одна від'ємна відносна оцінка $\Delta_k < 0$, а вектор-стовпчик α_k не має додатних компонент, то цільова функція КЗЛП необмежена знизу на допустимій множині.

Доведення. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ – такий базисний вектор, для якого $\exists k : \Delta_k < 0$ *та* $\alpha_{i,k} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$. Візьмемо число $\delta > 0$ та побудуємо вектор

$$y = (x_1 - \delta\alpha_{1,k}, x_2 - \delta\alpha_{2,k}, \ldots, x_m - \delta\alpha_{m,k}, 0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)^T,$$

де δ знаходиться на місці з номером k. Очевидно, що природні умови виконуються. Перевіримо виконання основних умов у векторній формі

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \alpha_i + \delta\alpha_k = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \delta\alpha_{i,k})\alpha_i + \delta\alpha_k = \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i -$$

$$-\delta \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k}\alpha_i + \delta\alpha_k = \beta,$$

оскільки $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k}\alpha_i = \alpha_k$. Отже, $y \in D$. На цьому векторі цільова функція набуває значення

$$L(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i + \delta c_k = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i - \delta\alpha_{i,k}) + \delta c_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i +$$

$$+\delta(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,k}) = L(x) + \delta\Delta_k.$$

За умовою теореми $\Delta_k < 0$, тому при $\delta \to \infty$ маємо $L(y) \to -\infty$, що і потрібно було довести. •

5. Симплекс-метод розв'язування КЗЛП

Отримані в попередніх лекціях результати дозволяють описати алгоритм відшукання розв'язку КЗЛП, відомий під назвою симплекс-методу. Нагадаємо зроблені припущення: розглядаємо КЗЛП

$$L(x) = c^T x \to \min,$$
$$[E \mid \alpha]\ x = \beta,$$
$$x \geq 0,\ \beta > 0,$$

основні обмеження якої задовольняють умові (R) і всі базисні вектори задачі не вироджені.

1. Виписуємо початковий базисний вектор
$$x = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T. \qquad (27)$$
2. Обчислюємо відносні оцінки всіх небазисних змінних
$$\Delta_j = c_j - z_j,\ \ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,j}. \qquad (28)$$
3. Аналізуємо відносні оцінки небазисних змінних:
   a) Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то базисний вектор x – розв'язок КЗЛП;
   b) Якщо $\exists k : \Delta_k < 0$ *та* $\alpha_{i,k} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$, то цільова функція КЗЛП необмежена знизу на допустимій множині;
   c) Вибираємо номери k та l за правилами:
   $$k : \Delta_k = \min_{j:\Delta_j < 0} \Delta_j, \qquad (29)$$
   $$l : \theta_k = \frac{\beta_l}{\alpha_{l,k}} = \min_{i:\alpha_{i,k} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i,k}}, \qquad (30)$$
   виводимо з базису змінну x_l і вводимо в базис змінну x_k.

Розраховуємо коефіцієнти $\alpha'_{i,j}$ та β'_i за формулами

$$\alpha'_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{l,k}},\ при\ \ i=l,\\ \alpha_{i,j}-\alpha_{l,j}\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}},при\, i\neq l,\end{cases} \tag{31}$$

$$\beta'_i=\begin{cases}\dfrac{\beta_i}{\alpha_{l,k}},\ \ при\ \ i=l,\\ \beta_i-\beta_l\dfrac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{l,k}},\ при\ i\neq l\end{cases} \tag{32}$$

та виписуємо новий базисний вектор

$$x'=(\beta_1-\theta_k\alpha_{1,k},\dots,\beta_{l-1}-\theta_k\alpha_{l-1,k},0,\beta_{l+1}-\theta_k\alpha_{l+1,k},\dots,$$
$$\beta_m-\theta_k\alpha_{m,k},\dots,,0,\theta_k,0,\dots,0)^T.$$

При цьому значення цільової функції зменшиться так:

$$L(x')=L(x)+\theta_k\Delta_k\,. \tag{33}$$

Відновлюємо попередні позначення та переходимо до п. 2.•

Зауваження. Скінченна кількість вершин множини D [6] разом із вказаним (30) способом вибору θ_k забезпечує скінченність симплекс-методу: за певну кількість кроків або знайдемо розв'язок КЗЛП, або встановимо необмеженість знизу цільової функції на множині D.

Хід розв'язування зручно записувати в симплекс-таблицях такої структури:

$x_{баз}$	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	β_i	θ_l
x_1	1	0	…	0	α_{1m+1}	…	$\alpha_{1\,n}$	β_1	θ_1
x_2	0	1	…	0	α_{2m+1}	…	$\alpha_{2\,n}$	β_2	θ_2
…	…	…		…	…		…	…	…
x_m	0	0	…	1	α_{mm+1}	…	$\alpha_{m\,n}$	β_m	θ_m
Δ_j	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n		

Елемент $\alpha_{l,k}$ називають провідним елементом симплекс-таблиці й виділяють рамкою.

Приклад 1. Розв'язати ЗЗЛП

$$L(x)=7x_1+x_2\to\min \tag{34}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\ -x_1+6x_2\ge 8,\\ 5x_1+3x_2\le 27,\end{cases} \tag{35}$$

$$x_2\ge 0. \tag{36}$$

Розв'язування. На x_1 не накладено умови невід'ємності, тому зробимо заміну $x_1=x_3-x_4$, де $x_3\ge 0, x_4\ge 0$. Уведемо в розгляд невід'ємні змінні x_5,x_6,x_7 так, щоб у (35) всі нерівності перетворилися в рівності. Одержимо СЗЛП

$$x_2+7x_3-7x_4\to\min,$$

$$\begin{cases}x_2+2x_3-2x_4+x_5=10,\\ 6x_2-x_3+x_4-x_6=8,\\ 3x_2+5x_3-5x_4+x_7=27,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{2,7}.$$

Оскільки $rang(A)=rang(\overline{A})=3$, то базисних змінних повинно бути також 3. Змінні x_3,x_4,x_5 не можна вибрати за базисні, бо матриця $B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&1&0\\5&-5&0\end{pmatrix}$ вироджена. Змінні x_3,x_6,x_7 також не можна вибрати за базисні, незважаючи на те, що матриця $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$ невироджена, оскільки вектор $\beta=B^{-1}b=(5,-13,2)^T$ містить від'ємну компоненту. Якщо ж за базисні взяти змінні x_2, x_5, x_6, то легко переконатися, що $\det(B)=3,\ B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 46\end{pmatrix}$. Перейдемо від СЗЛП до КЗЛП і виразимо в цільовій функції базисні змінні через небазисні

$$9+\frac{16}{3}x_3-\frac{16}{3}x_4-\frac{1}{3}x_7\to\min,$$

$$\begin{cases} x_2+\frac{5}{3}x_3-\frac{5}{3}x_4+\frac{1}{3}x_7=9,\\ \frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4+x_5=1,\\ 11x_3-11x_4+x_6=46,\end{cases} \tag{37}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{2,7}.$$

Знайдемо відносні оцінки небазисних змінних $\Delta_3=\frac{16}{3}, \Delta_4=-\frac{16}{3}, \Delta_7=-\frac{1}{3}$, зауваживши, що від'ємній відносній оцінці Δ_4 відповідає стовпчик із від'ємними елементами в матриці α. За алгоритмом симплекс-методу це означає, що цільова функція ЗЗЛП необмежена знизу на допустимій множині.

Приклад 2. Розв'язати ЗЗЛП

$$L(x)=7x_1+x_2\to\max,$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\ -x_1+6x_2\ge 8,\\ 5x_1+3x_2\le 27,\end{cases}$$

$$x_2\ge 0.$$

Використавши результати попереднього прикладу, перейдемо від задачі максимізації до задачі мінімізації функції $-7x_1-x_2$ і запишемо КЗЛП (37) з цільовою функцією

$$-9-\frac{16}{3}x_3+\frac{16}{3}x_4+\frac{1}{3}x_7\to\min,$$

Серед відносних оцінок є від'ємна (Δ_3), тому змінну x_3 потрібно ввести до базису.

Будуємо симплекс-таблицю

$x_{баз}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_2	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{27}{5}$
x_5	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	1	3
x_6	0	11	-11	0	1	0	46	$\frac{46}{11}$
Δ_j	0	$-\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$		

Оскільки, $\min\limits_i \theta_i=3$, то вивести з базису потрібно змінну $x_5\,(l=2)$.

$x_{баз}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_2	1	0	0	-5	0	$\frac{1}{3}$	4	
x_3	0	1	-1	3	0	0	3	
x_6	0	0	0	$-\frac{11}{3}$	1	0	$\frac{127}{3}$	
Δ_j	0	0	0	$\frac{16}{9}$	0	$\frac{1}{3}$		

Усі відносні оцінки невід'ємні. Отже, розв'язком КЗЛП є вектор $(x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x_6^*,x_7^*)^T=(4,3,0,0,\frac{127}{3},0)^T$. Враховуючи заміну, будуємо розв'язок ЗЗЛП: $x_1^*=x_3^*-x_4^*=3,\ x_2^*=4$, причому $L(x_1^*,x_2^*)=25$.

6. Проблема „зациклення" симплекс-методу

Спробуємо відмовитися від припущення, що всі базисні вектори КЗЛП не вироджені, тобто розглянемо задачу

$$L(x)=c^Tx\to\min,$$

$$[E\,|\,\alpha]\ x=\beta,$$

$$x\ge 0,\ \beta\ge 0.$$

Оскільки деякі з чисел β_i можуть бути нулями, то при обчисленні чисел β'_i за формулою (32) деякі з них можуть стати нулями. Тоді, зі співвідношення (30) випливає, що число θ_k може стати нулем, а отже, згідно з (33), значення цільової функції на новому базисному векторі не зміниться. Крім того, із (30) випливає також $\beta' = \beta$, хоча набори базисних векторів будуть різними. Можна продовжувати виконання алгоритму, сподіваючись, що на черговому кроці значення цільової функції зменшиться. Але в такому випадку можливе таке ускладнення: обчисливши кілька векторів $\beta^0, \beta^1, \dots, \beta^q$, які є однаковими і відрізняються тільки вибором базису, на наступній ітерації можемо отримати як новий базисний вектор початковий вектор β^0 із початковим набором базисних векторів. У цьому випадку кажуть, що алгоритм симплекс-методу зациклився: хоча розв'язок задачі існує і вектор x, побудований з елементів вектора β, не її розв'язок, алгоритм симплекс-методу обчислює той самий вектор, перебираючи до нескінченності той самий набір базисних векторів. Незважаючи на те, що ймовірність виникнення зациклення мала, розроблено кілька модифікацій алгоритму, які дозволяють гарантовано його уникнути [6, с.178]. Перша з цих модифікацій базується на збуренні вектора β малим параметром ε, наступному розв'язуванні збуреної задачі та граничному переході $\varepsilon \to 0$ в розв'язку. Другий із відомих методів базується на понятті лексикографічної упорядкованості в просторі R^n. Для практичного використання можна рекомендувати таку процедуру: при виявленні зациклення симплекс-методу слід перервати виконання алгоритму, в основних обмеженнях поміняти місцями будь-які два обмеження й розпочати виконання алгоритму спочатку.

Проілюструємо ці міркування прикладом, запропонованим у [Vasek Chavtal. Linear Programming. W. H.Freeman and Company, New York/San Francisco, 1983]. Оскільки, явище зациклювання досить рідкісне, розв'яжемо задачу повністю:

$$L(x) = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \to \max,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 \le 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 \le 0,$$
$$x_1 \le 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Зведемо цю задачу до СЗЛП, яка одночасно буде і КЗЛП. Після відомих перетворень отримаємо задачу

$$L(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_7 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Застосуємо до цієї задачі симплекс-метод. Домовимося вводити в базис змінну з найменшим $\Delta_j < 0$, якщо більше ніж одна змінна може бути виведена з базису, будемо виводити змінну з найменшим індексом. Перейдемо до задачі на мінімум та виберемо за базисні змінні x_5, x_6, x_7. Початковий базисний вектор $x = (0,0,0,0,0,0,1)^T$. Зауважимо, що цей базисний вектор вироджений. Побудуємо симплекс-таблицю

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

З базису виводиться змінна x_5, вводиться змінна x_1.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0	--
x_6	0	$\boxed{4}$	2	-8	1	1	0	0	0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	1	$\frac{1}{11}$
Δ_j	0	-53	-41	204	20	0	0		

З базису виводиться змінна x_6, вводиться змінна x_2.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
x_7	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{53}{4}$	1	1	--
Δ_j	0	0	$-\frac{57}{4}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0		

З базису виводиться змінна x_1, вводиться змінна x_3.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_3	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	--
x_2	-1	1	0	$\boxed{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	29	0	0	-18	-15	93	0		

З базису виводиться змінна x_2, вводиться змінна x_4.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_3	-2	4	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	20	9	0	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{141}{2}$	0		

З базису виводиться змінна x_3, вводиться змінна x_5.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0	0	--
x_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	--
Δ_j	-22	93	21	0	0	-24	0		

З базису виводиться змінна x_4, вводиться змінна x_6. Наступна таблиця збігається з початковою:

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

Для уникнення зациклення поміняємо місцями, наприклад, перші два обмеження та зведемо задачу до КЗЛП. Отримаємо задачу

$$L(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 1\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 + 9x_4 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_7 = 1,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Застосуємо симплекс-метод:

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_5	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	0	1	0	0	0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Δ_j	-10	57	9	24	0	0	0		

З базису виводиться змінна x_5, вводиться змінна x_1.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	-3	-1	2	2	0	0	0	--
x_6	0	-4	-2	8	-1	1	0	0	--
x_7	0	3	$\boxed{1}$	-2	-2	0	1	1	1
Δ_j	0	27	-1	44	20	0	0		

З базису виводиться змінна x_7, вводиться змінна x_3.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	θ_l
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1	--
x_6	0	2	0	4	-5	1	2	2	--
x_3	0	3	1	-2	-2	0	1	1	--
Δ_j	0	30	0	42	18	0	1		

Усі відносні оцінки невід'ємні. Розв'язком задачі є вектор $x^* = (1,0,1,0)^T$ і $L(x^*) = 1$.

Зауваження. Практика розв'язування ЗЛП показує високу ефективність симплекс-методу. Так, для знаходження розв'язку задачі з m обмеженнями та n невідомими, як правило, достатньо m ітерацій. Кількість елементарних арифметичних операцій при цьому не перевищує числа $n^2 m$. Однак теоретичні дослідження доводять, що складність цього алгоритму є експоненціальною. Тому тривають пошуки більш швидких алгоритмів.

7. Пошук початкового базисного вектора

Алгоритм симплекс-методу дозволяє знайти розв'язок КЗЛП або встановити необмеженість знизу цільової функції на допустимій множині. Однак перехід від СЗЛП до КЗЛП вимагає використання хоча б одного базисного вектора. Щоб знайти початковий базисний вектор, потрібно вибрати базисні змінні, скласти базисну матрицю, знайти обернену та помножити її на вектор правих частин основних обмежень. Якщо отриманий вектор має невід'ємні координати, то базисний вектор знайдено. В противному випадку процедуру повторюють із новим набором базисних змінних. Складність цього підходу та невизначеність кінцевого результату стимулює подальші дослідження.

Розглянемо ЗЗЛП (7–9) при $k = n$. Припустимо, що $b_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}$ – при необхідності цього можна досягти множенням відповідного обмеження на -1 . Розіб'ємо основні обмеження (8) на три групи (зберігаючи в кожній із них звичні позначення): до першої віднесемо всі обмеження типу $\le$, до другої – типу $\ge$, до третьої – типу =. Спробуємо звести до канонічного вигляду кожну групу обмежень окремо.

1. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax \le b, x \ge 0, b \ge 0$.

Перехід до канонічної форми очевидний – додамо до кожного обмеження невід'ємну змінну $y_i, i = \overline{1,m}$. Отримаємо обмеження $Ax + Iy = b,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ b \ge 0$, де $I(m \times m)$– одинична матриця. Візьмемо за базисні змінні $y_i, i = \overline{1,m}$. Тоді базисний вектор має розмірність $n + m$ і структуру $(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots b_m)^T$.

2. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax \ge b, x \ge 0, b \ge 0$.

Віднімемо від кожного обмеження невід'ємну змінну $y_i, i = \overline{1,m}$. Отримаємо обмеження $Ax - Iy = b,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ b \ge 0$, де $I(m \times m)$– одинична матриця. Знайдемо індекс k, такий, що $b_k = \max\limits_{i=\overline{1,m}} b_i$. Віднімемо від k-го рівняння i-те ($i \ne k$) і замінимо різницею i-те рівняння. Кожне таке рівняння (їх є $m-1$) має структуру

$$(a_{k,1}-a_{i,1})x_1+\ldots+(a_{k,n}-a_{i,n})x_n-y_k+y_i=b_k-b_i.$$

Оскільки праві частини цих рівнянь невід'ємні, вибір базисних змінних очевидний – це змінні $y_i, i=\overline{1,m}, i\neq k$. Рівняння з номером k віднесемо до третьої групи обмежень.

3. Обмеження в цій групі мають структуру $Ax=b, x\geq 0, b\geq 0$,

можливо, сюди входить одне обмеження з другої групи.

Розглянемо допоміжну задачу

$$L_S(x,y)=\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$Ax+Iy=b, \qquad (38)$$
$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ b\geq 0.$$

Очевидно, що це КЗЛП, причому цільова функція обмежена знизу на допустимій множині. Застосовуючи до (38) симплекс-метод, знайдемо її розв'язок (x^S, y^S). З вигляду цільової функції $L_S(x,y)$ робимо висновок, що на розв'язку може мати місце один із двох випадків: $L_S(x^S,y^S)=0$ або $L_S(x^S,y^S)>0$.

У першому випадку, враховуючи умову $y\geq 0$, отримуємо $y_i=0, i=\overline{1,m}$. Тому розв'язок задачі (38) має структуру $(x_1^S, x_2^S, \ldots, x_n^S, 0, \ldots, 0)^T$, причому $x^S{}_i \geq 0, i=\overline{1,n}$. Оскільки виконується умова (R), то серед чисел x_i^S є не більше m додатних, причому їм відповідає система лінійно незалежних вектор-стовпчиків матриці A. Звідси робимо висновок: вектор x^S є вершиною багатогранника, заданого обмеженнями $Ax=b,\ x\geq 0,\ b\geq 0$.

У другому випадку хоча б одне з чисел $y_k>0$. Розглянемо довільний вектор $x\in\{x: Ax=b,\ x\geq 0,\ b\geq 0\}$ та вектор y складений із m нулів. Тоді нескладно перевірити, що вектор (x,y) допустимий для задачі (38) і $L_S(x,y)=0$, що неможливо.

Звідси робимо висновок: множина $\{x: Ax=b,\ x\geq 0,\ b\geq 0\}$ – порожня.

Отже, кожну з трьох груп обмежень (7–9) ми звели до канонічної форми. На цих перетвореннях побудовано метод відшукання початкового базисного вектора СЗЛП (нагадаємо, що кожну ЗЗЛП можна звести до СЗЛП) – метод штучної бази.

Розглянемо СЗЛП

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$
$$Ax=b, \qquad (39)$$
$$x\geq 0, b\geq 0.$$

Нехай у матриці A є лише $0\leq k<m$ різних стовпців одиничної матриці. Припустимо, що вони відповідають змінним $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Введемо в розгляд штучні змінні $y_1, y_2, \cdots, y_{m-k}$, такі, що $y_j\geq 0, j=\overline{1,m-k}$. Матрицю A доповнимо $m-k$ одиничними стовпцями так, щоб результуюча матриця містила повний набір стовпців одиничної матриці порядку m. Позначимо нову матрицю $\overline{A}$. Розглянемо допоміжну задачу

$$\sum_{j=1}^{m-k} y_j \to \min,$$
$$\overline{A}\,\overline{x}=b,$$
$$\overline{x}\geq 0, b\geq 0.$$

Тут $\overline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k})^T \in R^{n+m-k}$.

За побудовою це КЗЛП із базисними змінними $\{x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_{m-k}\}$ і її можна розв'язати симплекс-методом. Оскільки цільова функція задачі обмежена знизу, то нехай $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{m-k}^*)^T$ – знайдений розв'язок. Якщо серед штучних змінних є додатні, то допустима множина початкової задачі порожня. Якщо ж усі штучні змінні нульові, то $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ є початковим базисним вектором для задачі (38). Далі обчислення проводять за загальною схемою симплекс-методу.

Приклад. Знайти базисний вектор СЗЛП

$$4x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв’язування. Одиничний вектор $(0,0,1)^T$ відповідає лише одній змінній x_4. Вводимо штучні змінні $y_1 \ge 0$ та $y_2 \ge 0$ і будуємо нову задачу

$$y_1 + y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + y_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4},\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Застосувавши симплекс-метод, одержимо розв’язок цієї задачі $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, y_1^*, y_2^*)^T = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1, 0, 0)^T$. Отже, за початковий базисний вектор вихідної задачі можна взяти $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1)^T$ і при цьому базисними будуть змінні x_1, x_2, x_4.

8. М-метод пошуку базисного вектора

Метод штучної бази дозволяє на першому етапі знайти початковий базисний вектор СЗЛП або показати, що допустима множина задачі порожня. На другому етапі, для знаходження розв’язку задачі, потрібно перейти до КЗЛП та знову застосувати симплекс-метод. Виникає питання, чи не можна сумістити ці етапи розв’язування початкової задачі.

Розглянемо СЗЛП

$$L(x) = c^T x \to \min,$$
$$Ax = b, \qquad (40)$$
$$x \ge 0, b \ge 0.$$

Для спрощення припустимо, що штучні змінні вводяться в кожне з основних обмежень задачі (40). Візьмемо досить велике додатне число M, яке вважатимемо більшим за всі числа, з якими воно буде порівнюватися в ході обчислень. Побудуємо M-задачу в канонічній формі

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\overline{A}\, x_M = b,$$
$$x_M \ge 0, b \ge 0,$$

де матриця $\overline{A} = (A \vdots I_m)$ та вектор $x_M = (x^T \vdots y^T)$ мають такі самі властивості, що й у методі штучної бази.

При розв’язуванні M - задачі симплекс-методом можливі випадки:

1. M-задача має розв’язок $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$, причому $y_i^* = 0,\ i = \overline{1,m}$;
2. M-задача має розв’язок $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$, причому серед чисел y_i^* є хоча б одне додатне;
3. Цільова функція M-задачі не обмежена знизу на допустимій множині M-задачі.

У першому випадку розв’язком задачі (40) буде вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$. Дійсно, якщо $y_i^* = 0,\ i = \overline{1,m}$, то $Ax^* + Iy^* = Ax^* = b$, тобто x^* – допустимий вектор (40). Нехай x – довільний допустимий вектор задачі (40). Тоді вектор $x_M = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)^T$ допустимий для M-задачі. З нерівності $c^T x^* = c_M^T x_M^* \le c_M^T x_M \le c^T x$, де $c_M = (c_1, c_2, \ldots, c_n, M, \ldots, M)^T$, випливає потрібне твердження.

У другому випадку $c_M^T x_M^* = c^T x^* + M\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ і $\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$.
Припустимо від супротивного, що допустима множина задачі (40) не порожня і нехай x довільний допустимий вектор задачі (40). Побудуємо вектор $x_M = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)^T$, очевидно, що він допустимий для M-задачі і $c_M^T x_M = c^T x$. Тоді повинна виконуватися нерівність $c^T x^* + M\sum_{i=1}^{m} y_i^* = c_M^T x_M^* \le c_M^T x_M = c^T x$, що неможливо внаслідок визначення числа M. Отже, допустима множина задачі (40) порожня.

У третьому випадку можна довести, що цільова функція задачі (40) не обмежена знизу на допустимій множині, якщо вона не порожня [3, с. 88].

Зауваження. Якщо допустима множина задачі (40) порожня, то, можливо, цільова функція M-задачі не обмежена знизу на допустимій множині M-задачі.

Розглянемо, наприклад, задачу

$$-x_1 - x_2 \to \min,$$
$$-x_1 = 1,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

та побудуємо M-задачу

$$-x_1 - x_2 + My \to \min,$$
$$-x_1 + y = 1,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y \ge 0.$$

Очевидно, що допустима множина початкової задачі порожня а допустима множина M-задачі містить підмножину векторів, які допускають представлення $x_M = (0, \varepsilon, 1)^T, \forall \varepsilon > 0$. Обчислимо значення цільової функції M-задачі на таких векторах і отримаємо $L(x_M) = -\varepsilon + M \to -\infty$ при $\varepsilon \to \infty$.

<u>Приклад</u>. Розв'язати задачу

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

<u>Розв'язування.</u> Побудуємо M-задачу

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + M(y_1 + y_2) \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Базисними тут є змінні y_1 та y_2. Виразимо базисні змінні через небазисні й підставимо значення в цільову функцію. Групуючи доданки, отримаємо

$$(-3M - 3)x_1 + 2x_2 + (-2M - 1)x_3 - 4x_4 + 3M \to \min.$$

Застосуємо до M-задачі симплекс-метод.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β_i	θ_l
y_1	1	1	1	1	1	0	2	2
y_2	$\boxed{2}$	-1	1	-1	0	1	1	$\frac{1}{2}$
Δ_j	$-3M-3$	2	$-2M-1$	-4	0	0		

На цій ітерації змінна y_1 виводиться з базису, змінна x_1 вводиться в базис. Після кількох ітерацій, одержимо останню симплекс-таблицю

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	β_i	θ_l
x_4	0			1			1	
x_1	1			0			1	
Δ_j	0	6	$\frac{14}{6}$	0	$M + \frac{11}{3}$	$M - \frac{1}{3}$		

Усі відносні оцінки невід'ємні, отже, вектор $(1,0,0,1,0,0)^T$ є розв'язком M-задачі, а вектор $(1,0,0,1)^T$ відповідно – розв'язком початкової задачі.

9. Двоїсті задачі лінійного програмування

Ми навчилися розв'язувати ЗЗЛП в яких кількість невідомих і ранг матриці основних обмежень зв'язані співвідношенням

$$rang(A) = rang(\overline{A}) \le m < n . \qquad \text{(R)}$$

Що ж робити, коли ця умова не виконується? Відповідь на це питання і дає теорія двоїстості – метод дослідження і розв'язування ЗЗЛП, який ґрунтується на побудові за чітко визначеними правилами іншої (двоїстої) задачі, її наступному розв'язуванні й побудові за знайденим розв'язком розв'язку початкової задачі.

Визначимо правила побудови двоїстої задачі. Спочатку розглянемо СЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax = b, \\ &x \ge 0. \end{aligned} \qquad (41)$$

Проведемо перетворення:

$$Ax = b \Rightarrow b - Ax = 0 \Rightarrow \forall u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T \in R^m : c^T x = c^T x +$$
$$+ u^T (b - Ax) = c^T x + u^T b - u^T Ax = (c^T - u^T A)x + u^T b .$$

Виберемо $u \in R^m$ так, щоб $c^T - u^T A \ge 0$. Тоді виконується нерівність $c^T x \ge u^T b$, при умові $A^T u \le c$. Побудуємо задачу

$$\begin{aligned} &W(u) = b^T u \to \max, \\ &A^T u \le c. \end{aligned} \qquad (42)$$

Задачу (42) будемо називати несиметричною двоїстою задачею до задачі (41), пару задач (41)–(42) – несиметричною парою двоїстих задач. Термін "несиметрична" вживається тому, що в одній задачі є природні обмеження, а в другій немає.

Лема 6. Для довільних допустимих векторів x та u задач (41)–(42) відповідно виконується нерівність $c^T x \ge b^T u$. Якщо для деяких допустимих векторів x^* та u^* виконується рівність $c^T x^* = b^T u^*$, то ці вектори є розв'язками задач (41)–(42) відповідно.

Доведення. Виконання нерівності $c^T x \ge b^T u$ для довільних допустимих векторів x та u задач (41)–(42) відповідно, безпосередньо випливає з побудови несиметричної двоїстої задачі. Доведемо другу частину леми. Нехай для деяких допустимих векторів x^* та u^* виконується рівність $c^T x^* = b^T u^*$, але:

– x^* не є розв'язком (41) $\Rightarrow \exists x \in D_L : c^T x < c^T x^* = b^T u$, що суперечить першій частині леми;

– u^* не є розв'язком (42) $\Rightarrow \exists u \in D_W : b^T u > b^T u^* = c^T x^*$, що суперечить першій частині леми;

– x^* не є розв'язком (41) і u^* не є розв'язком (42) $\Rightarrow \exists x \in D_L$ і $\exists u \in D_W : b^T u > b^T u^* = c^T x^* > c^T x$, що суперечить першій частині леми. •

Розглянемо тепер ЗЗЛП (7–9) та запишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax \ge b, \\ &x \ge 0. \end{aligned} \qquad (43)$$

Зведемо її до стандартної задачі

$$\begin{aligned} &L(\overline{x}) = \overline{c}^T \overline{x} \to \min, \\ &(A \vdots - I_m)\overline{x} = b, \\ &\overline{x} \ge 0, \end{aligned}$$

де I_m – одинична матриця, $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)^T \in R^{n+m}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T \in R^{n+m}$ та запишемо двоїсту

$$\begin{aligned} &W(u) = b^T u \to \max, \\ &u^T (A \vdots - I_m) \le \overline{c}^T, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &W(u) = b^T u \to \max, \\ &u^T A \le c^T, \\ &-u^T I_m \le 0^T, \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &W(u) = b^T u \to \max, \\ &A^T u \le c, \\ &u \ge 0. \end{aligned} \qquad (44)$$

Задачу (44) будемо називати симетричною двоїстою задачею до задачі (43), пару задач (43)–(44) – симетричною парою двоїстих задач.
Зауваження. Унаслідок побудови задачі (44), твердження Леми 6 виконуються для симетричної пари двоїстих задач (43) – (44).
Зауваження. Іноді одну з пари двоїстих задач називають прямою задачею, а іншу – двоїстою (спряженою) задачею. Легко впевнитись, що двоїста до двоїстої задачі збігається з прямою задачею.

Підкреслимо характерні особливості пари двоїстих задач:

1. Кількість змінних (розмірність вектора u) у двоїстій задачі дорівнює кількості основних обмежень у прямій задачі і навпаки.
2. Вектор, складений із правих частин основних обмежень прямої задачі, є вектором коефіцієнтів цільової функції в двоїстій задачі і навпаки.
3. Матриця, складена з коефіцієнтів основних обмежень двоїстої задачі, є транспонованою до матриці складеної з коефіцієнтів основних обмежень прямої задачі і навпаки.
4. Якщо основне обмеження однієї задачі виконується як рівність, то відповідна йому (за номером) змінна іншої задачі не має природного обмеження (обмеження на знак).

Приклад. Побудувати двоїсту задачу до заданої ЗЗЛП

$$\begin{aligned} &L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min, \\ &x_1 + x_2 - 4x_3 \le 4, \\ &x_1 - x_2 = 2, \\ &x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язування. Основних обмежень два, тому двоїстих змінних теж повинно бути дві – u_1 та u_2, змінних у прямій задачі три, тому обмежень у двоїстій задачі повинно бути три. Зведемо пряму задачу до виду (43) та запишемо двоїсту до неї у формі (44)

$$\begin{aligned} &L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min, \\ &-x_1 - x_2 + 4x_3 \ge -4, \\ &x_1 - x_2 = 2, \\ &x_1 \ge 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &W(u) = -4u_1 + 2u_2 \to \max, \\ &-u_1 + u_2 \le 1, \\ &-u_1 - u_2 \le -2, \\ &4u_1 \le 3, \\ &u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Використаємо тепер четверту особливість пари двоїстих задач і отримаємо відповідь

$$\begin{aligned} &W(u) = -4u_1 + 2u_2 \to \max, \\ &-u_1 + u_2 \le 1, \\ &-u_1 - u_2 = -2, \\ &4u_1 = 3, \\ &u_1 \ge 0. \end{aligned}$$

Повертаючись до мети цієї лекції, зауважимо, що, якщо умова (R) не виконується в одній із задач двоїстої пари, то вона обов'язково виконується в іншій задачі. Тобто одну (пряму чи двоїсту) із задач можна розв'язати симплекс-методом. З'ясуємо тепер, як, знаючи розв'язок однієї задачі, знайти розв'язок іншої.

10. Теореми двоїстості

Зараз ми сформулюємо та доведемо кілька надзвичайно важливих теорем, які мають застосування в різних розділах математичного програмування і не тільки.

Розпочнемо з ***першої теореми двоїстості***.

Теорема 8. *а)* якщо одна із задач двоїстої пари має розв'язок, то інша задача теж має розв'язок, причому значення цільових функцій на цих розв'язках збігаються;

б) якщо одна із задач двоїстої пари має необмежену на допустимій множині цільову функцію, то допустима множина іншої задачі порожня.

Доведення. Не зменшуючи загальності, проведемо доведення для несиметричної пари двоїстих задач (41) – (42) і нехай умова (R) виконується для задачі (41).

Доведемо твердження *а*. Нехай задача (41) має розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ і базисними є змінні $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. З відповідних їм вектор-стовпчиків умов $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ побудуємо базисну матрицю B та обчислимо її обернену B^{-1}. Перейдемо від задачі (41) до КЗЛП, використавши матрицю B^{-1}. Отримаємо

$$L(x) = c^T x \to \min,$$
$$\alpha x = \beta,$$
$$x \ge 0,\ \beta \ge 0,$$

де $\alpha = B^{-1} A$ і $\beta = B^{-1} b$.

При зроблених припущеннях розв'язок задачі x^* має структуру $x^* = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)^T$. З алгоритму симплекс-методу випливає, що всі відносні оцінки змінних повинні бути невід'ємними, тобто $\Delta_k \ge 0,\ k = \overline{1,n}.$ З означення відносних оцінок маємо

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,k} = c_k - c_{баз}^T \alpha_k \ge 0.$$

Враховуючи, що $c_{баз} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ і $\alpha_k = B^{-1} A_k$, запишемо останню нерівність у векторній формі $c^T - c_{баз}^T B^{-1} A \ge 0$.
Виберемо

$$(u^*)^T = c_{баз}^T B^{-1}, \qquad (45)$$

тоді $c^T - (u^*)^T A \ge 0$ або $A^T u^* \le c$. Тобто вектор, заданий (45), є допустимим вектором задачі (42). Підрахуємо значення цільової функції задачі (42) на цьому векторі

$$b^T u^* = (u^*)^T b = c_{баз}^T B^{-1} b = c_{баз}^T \beta = c^T x^*.$$

Згідно з лемою 6, це означає, що задача (42) має розв'язок u^*, заданий формулою (45).
Доведемо твердження *б.* Нехай цільова функція задачі (41) необмежена знизу на допустимій множині D_L. Припустимо від супротивного, що допустима множина D_W задачі (42) не порожня.

Візьмемо деякий фіксований вектор $u \in D_W$. Тоді величина $b^T u$ скінченна. З іншого боку, згідно з лемою 6, має виконуватись нерівність $b^T u \le c^T x$ для всіх допустимих векторів, що неможливо. Отже, допустима множина D_W задачі (42) порожня. •

Зауваження. Якщо допустима множина однієї з пари двоїстих задач порожня, то і інша задача може мати порожню допустиму множину. Підтвердимо це нижченаведеною парою двоїстих задач:

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 \to \min,\\ &-x_1 + x_2 = -1,\\ &x_1 - x_2 = -1,\\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{aligned} \quad \text{і} \quad \begin{aligned} &-u_1 - u_2 \to \max,\\ &-u_1 + u_2 \le -2,\\ &u_1 - u_2 \le 1. \end{aligned}$$

Зауваження. Перша теорема двоїстості дає відповідь на питання існування розв'язків пари двоїстих задач, але зовсім не вказує шляхів їх відшукання. Для цього використовують ***другу теорему двоїстості***, яку ще називають ***двоїстим критерієм оптимальності***.

Теорема 9. Допустимий вектор x^* задачі (41) буде її розв'язком тоді і тільки тоді, коли існує вектор $u \in R^m$, такий, що

$$\begin{cases} u^T A_j = c_j,\ \text{для тих}\ j : x_j^* > 0,\\ u^T A_j \le c_j,\ \text{для тих}\ j : x_j^* = 0. \end{cases} \qquad (46)$$

Доведення. Необхідність. Нехай x^* розв'язок задачі (41), покажемо, що існує вектор $u \in R^m$, такий, що умови (46) виконуються. З твердження *а* теореми 8 випливає, що двоїста до задачі (41) задача (42) має розв'язок u^* і при цьому $c^T x^* = b^T u^*$. Тоді

$$0 = c^T x^* - b^T u^* = c^T x^* - b^T u^* + (b - Ax^*)^T u^* = c^T x^* - (Ax^*)^T u^* =$$
$$= c^T x^* - (u^*)^T A x^* = (c - A^T u^*)^T x^* = \sum_{j=1}^{n} (c_j - (u^*)^T A_j) x_j^*.$$

Згідно із припущенням та обмеженнями задачі (42) доданки в останній сумі невід'ємні. А оскільки їх сума нульова, то кожен із доданків рівний нулю. Звідси випливає, що умови (46) виконуються при $u = u^*$.

Достатність. Нехай x^* – допустимий вектор задачі (41) та існує вектор $u \in R^m$, такий, що умови (46) виконуються. Покажемо, що x^* – це розв'язок задачі (41). У векторній формі умови (46) можна записати у вигляді $c^T - u^T A \ge 0$ або $(c^T - u^T A)x^* = 0$. З нерівності випливає, що вектор u задовольняє обмеження задачі (42), а отже, є допустимим вектором цієї задачі. З рівності отримуємо $c^T x^* = u^T A x^* = u^T b$. Згідно з лемою 6, це означає, що вектори x^* та u є розв'язками задач (41) та (42) відповідно. ●

Наслідок 1. Для того, щоб допустимі вектори x^* та u пари двоїстих задач (41) та (42) відповідно були їх розв'язками, необхідно й досить виконання умов (46).

Наслідок 2. Якщо j-та компонента розв'язку однієї з пари двоїстих задач додатна, то відповідне (за номером) обмеження двоїстої задачі на її розв'язку перетворюється в рівність.

<u>Приклад</u>. Визначити, чи є вектор $x = (1,1,0)^T$ розв'язком задачі

$$L(x) = -x_1 - 8x_2 - 10x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

<u>Розв'язування</u>. Легко впевнитись, що заданий вектор допустимий. Припустимо, що він є розв'язком заданої задачі. Тоді, згідно з лемою 6, двоїста задача

$$W(u) = 2u_1 \to \max,$$
$$u_1 + u_2 \le -1,$$
$$u_1 - u_2 \le -8,$$
$$4u_1 + 2u_2 \le -10,$$

теж має розв'язок. Позначимо його $u^* = (u_1^*, u_2^*)^T$. Згідно з наслідком 2 до теореми 9, основні обмеження двоїстої задачі на її розв'язку мають вигляд

$$u_1^* + u_2^* = -1,$$
$$u_1^* - u_2^* = -8,$$
$$4u_1^* + 2u_2^* \le -10.$$

Розв'язком перших двох рівнянь є вектор $u^* = (-4.5, 3.5)^T$. Легко впевнитись, що цей вектор допустимий для двоїстої задачі і, крім того, $L(x) = W(u^*) = -9$.

Відмовимося тепер від зроблених припущень та розглянемо два вектори – $x = (1,1,0)^T$ і $u = (-4.5, 3.5)^T$. Ці вектори допустимимі для заданої та двоїстої до неї задач і, крім того, $L(x) = W(u) = -9$. Тоді, згідно з лемою 6, ці вектори є розв'язками відповідної пари двоїстих задач, а отже, вектор $x = (1,1,0)^T$ є розв'язком заданої задачі.

Використовуючи методи зведення ЗЗЛП до СЗЛП, можна довести відповідні теореми двоїстості для симетричної пари двоїстих задач (43)–(44). Наведемо [2,5] без доведення формулювання другої теореми двоїстості для задач (43)–(44).

Теорема 10. Для того, щоб допустимі вектори x та u пари двоїстих задач (43) та (44) відповідно були їх розв'язками, необхідно і досить виконання умов

$$\begin{cases} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i) u_i = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} u_i - c_j) x_j = 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (47)$$

11. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо метод розв'язування пари двоїстих задач, який своїм походженням завдячує теорії двоїстості. Наведемо, спочатку, деякі геометричні міркування. Розглянемо СЗЛП (41), але відмовимося від природних обмежень

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &Ax = b. \end{aligned} \tag{48}$$

Припустимо, що допустима множина цієї задачі обмежена й непорожня. Тоді розв'язок задачі (він існує!) буде вершиною (або гранню) багатокутника, що визначається основними обмеженнями. Відносні оцінки небазисних змінних цього розв'язку будуть невід'ємними. Якщо при цьому всі його координати також невід'ємні, то розв'язок задачі (48) є одночасно розв'язком задачі (41). Якщо ж серед них є від'ємні, то відповідна вершина не лежить у додатній частині простору. Для направленого переходу до іншої вершини можна використати симплекс-метод, однак при цьому слід зберігати відносні оцінки небазисних змінних невід'ємними. Цього можна досягнути переходом до двоїстої задачі. Очевидним є критерій завершення – попадання чергової вершини в додатну частину простору. Описані перетворення лежать в основі двоїстого симплекс–методу (ДСМ).

Наведемо обгрунтування ДСМ для пари двоїстих задач (41) – (42). В задачі (41) виберемо лінійно незалежні вектор-стовпчики умов $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, побудуємо базисну матрицю B та обчислимо обернену матрицю B^{-1}. Помножимо основні обмеження задачі (41) на B^{-1} зліва. Отримаємо

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &\alpha x = \beta, \\ &x \geq 0, \end{aligned} \tag{49}$$

де $\alpha = B^{-1}A$ і $\beta = B^{-1}b$. Підкреслимо, що в матрицю α входить одинична матриця розмірністю $(m \times m)$. Якщо при цьому $\beta \geq 0$, то одержана задача є КЗЛП, якщо ж серед них є від'ємні, то, звичайно, ні.

Означення 9. Задача (49) називається майже канонічною задачею лінійного програмування (МКЗЛП).

Означення 10. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ називається майже допустимим базисним вектором (МДБВ), якщо він задовольняє основні (але не обов'язково природні) обмеження задачі (49) і його ненульовим компонентам відповідають лінійно незалежні вектор-стовпчики матриці α .

Припустимо, що вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ є МДБВ задачі (49), причому $\Delta_j = 0,\ j = \overline{1,m}$ і $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{m+1,n}$. Врахувавши означення відносних оцінок, отримаємо у векторній формі $c^T - c_{баз}^T B^{-1} A \geq 0$, де $c_{баз} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$. Тобто вектор $u^T = c_{баз}^T B^{-1}$ є допустимим вектором двоїстої задачі (42).

Розглянемо МКЗЛП (49) у координатній формі

$$\begin{aligned} &L(x) = c^T x \to \min, \\ &x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{50}$$

Використовуючи результати леми 5, виключимо з цільової функції базисні змінні.

Отримаємо

$$\begin{aligned} &L(x) = \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \to \min, \\ &x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,\ i = \overline{1,m}, \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{51}$$

Помножимо основні обмеження (51) на -1 та запишемо двоїсту задачу

$$W(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \to \min,$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} u_i \le \Delta_j, \ j = \overline{m+1,n}, \qquad (52)$$

$$u_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Задачу (52) зведемо до канонічної форми шляхом додавання штучних невід'ємних змінних до лівих частин основних обмежень. Отримаємо

$$W(u) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \to \min,$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} u_i + u_j = \Delta_j, \ j = \overline{m+1,n}, \qquad (53)$$

$$u_i \ge 0, \ i = \overline{1,n},$$

КЗЛП, яку можна розв'язати звичайним СМ. Зауважимо, що при цьому величини $\Delta_j, \ j = \overline{1,n}$ залишаються невід'ємними, значення цільової функції зменшується (не зростає), а критерієм оптимальності є невід'ємність чисел $\beta_i, \ i = \overline{1,m}$.

Усе це дає можливість сформулювати алгоритм двоїстого симплекс–методу [5].

1. Зводимо початкову ЗЛП до МКЗЛП і знаходимо її МДБВ, для якого відносні оцінки небазисних змінних невід'ємні.
2. Якщо $\beta_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}$, то розв'язок знайдено. Алгоритм закінчено.
3. Якщо для деякого $i : \beta_i < 0$ та $\alpha_{i,j} \ge 0, \ j = \overline{1,n}$, то початкова ЗЛП розв'язку не має, її допустима множина порожня. Алгоритм закінчено.
4. Знаходимо провідний елемент зі співвідношень $\alpha_{l,k}$ $\beta_l = \min\limits_{i:\beta_i<0} \beta_i, \ \dfrac{\Delta_k}{-\alpha_{l,k}} = \min\limits_{j:-\alpha_{l,j}>0} \dfrac{\Delta_j}{-\alpha_{l,j}}$. Змінна x_l виводиться з базису, змінна x_k вводиться в базис.

5. Проводимо симплекс-перетворення таблиці з провідним елементом $\alpha_{l,k}$ та переходимо до пункту 2 алгоритму.

Приклад. Розв'язати ЗЛП та двоїсту до неї

$$L(x) = x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min,$$

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2,$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Розв'язування. Задана ЗЛП є МКЗЛП, початковий базис (A_1, A_2) , початковий МДБВ $\beta = (-2,1,0,0,0)^T$. Розрахунки в ДСМ зручно проводити в таблицях, які мало чим відрізняються від звичайних.

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_1	1	0	$\boxed{-1}$	1	-1	-2
x_2	0	1	-1	-1	1	1
Δ_j	0	0	1	1	2	
$\frac{\Delta_j}{-\alpha_{l,j}}$			1		2	

Наступна (і остання) таблиця матиме вигляд

$x_{баз}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_3						2
x_2						3
Δ_j	1	0				

Заповнювати її непотрібно, оскільки виконується критерій оптимальності. Підрахуємо тільки значення відносних оцінок, які відповідають початковому базису. Отже, розв'язком ЗЛП є вектор $x^* = (0,3,2,0,0)^T$ і $L(x^*) = 2$.

Запишемо двоїсту до заданої ЗЛП

$$W(u) = -2u_1 + u_2 \to \max,$$
$$u_1 \le 0,$$
$$u_2 \le 0,$$
$$-u_1 - u_2 \le 1,$$
$$u_1 - u_2 \le 1,$$
$$-u_1 + u_2 \le 2,$$

та розв'яжемо її. За теоремою двоїстості легко знаходимо $u^* = (-1,0)^T$ та $W(u^*) = 2$.

Зауважимо, що для несиметричної пари двоїстих задач компоненти розв'язку збігаються зі значеннями відносних оцінок змінних, які відповідають початковому базису, взятих із протилежним знаком; для симетричної пари двоїстих задач змінювати знак непотрібно.

Підкреслимо, наостанок, що застосування ДСМ особливо зручне для розв'язування ЗЛП зі зростаючою кількістю основних обмежень.

Список літератури

1.Попов Ю.Д. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1988. – 180 с.
2.Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – 7-е видання, перероблене та доповнене. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2006. – 816 с.
3.Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища шк., 1975. – 372 с.
4.Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986 .– 319 с.
5.Степанюк В.В. Методы математического программирования. – К.: Вища шк., 1977. – 272 с.
6. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 376 с.