Лабораторна робота № 9.

Тема. Розв'язання задач двовимірної евклідової геометрії у системі **MATLAB**

Мета роботи: навчитись вирішувати завдання з планіметрії за допомогою команд системи **MATLAB**.

Теоретичний мінімум

Лінія на площині розглядається (задається) як множина точок, які мають деякі тільки їм характерні геометричні властивості [30]. Наприклад, коло радіусу R є множина всіх точок площини, видалених на відстань R від деякої фіксованої точки O (центру кола).

Введення на площині системи координат дозволяє визначати положення точки площини завданням двох чисел, які визначають її координати, а положення лінії на площині потребує завдання визначеного рівняння (тобто закономірності, що зв'язує координати точок лінії).

Рівнянням лінії (або кривої) на площині xOy називається таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x і y кожної точки лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить цій лінії. Змінні x і y в рівнянні лінії називаються *поточними координатами* точок лінії. Рівняння $F(x, y) = 0$ визначає змінну y як функцію від змінної x. Таким чином визначена функція називається *неявно заданою*.

Дослідження геометричних властивостей ліній здійснюється в результаті аналізу рівнянь ліній, що є звичайною процедурою для систем типу **MATLAB.**

Завдання про знаходження точок перетину двох ліній, які описуються рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, зводиться до відшукання точок, координати яких задовольняють рівнянням обох ліній, тобто зводиться до розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Якщо ця система не має дійсних розв'язків, то лінії не перетинаються.

Аналогічним чином вводиться поняття рівняння лінії в полярній системі координат. Рівняння $F(r, \varphi) = 0$ називається рівнянням даної лінії в полярній системі координат, якщо координати будь-якої точки, яка належить цій лінії, і лише вони, задовільняють цьому рівнянню.

Лінію на площині можна також задати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad (1)$$

де x і y – координати довільної точки $M(x, y)$, яка належить даній лінії, а параметр t визначає положення цієї точки $M(x, y)$ на площині. Такий спосіб завдання лінії називається *параметричним*, а вищевказана система рівнянь — *параметричними рівняннями лінії*.

Лінію на площині можна також визначити за допомогою радіуса-вектора $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, де t – скалярний змінний параметр, $\vec{i}, \vec{j}$ – базісні вектори. Кожному значенню t відповідає певний вектор площини. При зміні параметра t кінець вектора $\vec{r}$ описує деяку лінію. Векторному рівнянню лінії в системі координат Oxy відповідають два скалярні рівняння (1), тобто проекції на вісі координат векторного рівняння лінії.

Векторне рівняння і параметричні рівняння лінії мають механічний зміст. Якщо точка переміщується на площині, то вказані рівняння називаються *рівняннями руху*, а лінія – *траєкторією руху* точки, параметр t визначає час.

Отже, у аналітичній геометрії на площині виникають два основні завдання:

- за інформацією про геометричні властивості кривої здійснити опис кривої за допомогою рівняння;
- по заданому рівнянню кривої проаналізувати її геометричні властивості і відтворити її графік.

Будь-яка пряма лінія на площині може бути задана рівнянням першого порядку

$$Ax + By + C = 0,$$

причому сталі A, B не дорівнюють одночасно нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$. Це рівняння першого порядку називають *загальним рівнянням прямої*.

Рівняння

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k.

Рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

є рівнянням прямої, що проходить через задану точку у визначеному за допомогою кутового коефіцієнта напрямку.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

Рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ називається *рівнянням прямої* у відрізках, де точки $(a, 0)$ і $(0, b)$ є точками перетину прямої з вісями координат.

Якщо дві прямі $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ перетинають одна іншу, то гострий кут α між цими прямими визначатиметься за допомогою $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$. Дві прямі паралельні, якщо $k_1=k_2$. Дві прямі перпендикулярні, якщо $k_1=-1/k_2$.

Координати точки перетину двох прямих знаходяться шляхом розв'язання системи двох рівнянь, описують кожну пряму.

Пряма, що проходить через точку (x_1, y_1) і перпендикулярна до прямій $y=kx+b$ представляється рівнянням:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$$

Відстань d від точки з координатами (x_0, y_0) до прямої $Ax+By+C=0$ визначається по формулі:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Вправа 1. Використовування команди **fzero** для розв'язування задач аналітичної геометрії.

Нагадаемо рівняння деяких кривих на площини, що вивчалися в курсі вищої математики (дивись таблицю 9.1).

Таблиця 9.1 – Основні криві на площині

№ п/п	Назва	Канонічне рівняння
1	Коло	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, де точка (x_0,y_0) визначає координати центру, R –радіус кола.
2	Парабола	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)^2$, де точка (x_0,y_0) визначає координати вершини параболи
3	Еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a і b – сталі, що визначають довжину піввісей.
4	Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a і b – сталі, що визначають довжину піввісей.

Як вже відомо з попередніх лабораторних робіт для розв'язку рівнянь або систем рівнянь в системі **MATLAB** використовуються команди **fzero** і **fsolve**.

Приклад 1. Розглянемо коло з радіусом $r=2$, рівняння якого $x^2+y^2=4$. Треба знайти значення x, коли $y=1$, якщо заздалегідь відомо, що розв'язок знаходиться поблизу точки, абсциса якої $x=2$.

Зауважимо, якщо функція має складний вигляд, то має сенс створити окремий **m**-файл (файл-функцію):

```
function a=fun2(x,y)
a=x^2+y^2−4;
```

Для розв'язування задачі використаємо команду **fzero**. В цьому випадку формат виклику команди **fzero** буде наступним:

```
x0=fzero(@fun2,2,optimset,1)
x0 =
1.7321,
```

де **@fun2** – виклик файл-функції під назвою **fun2** з поточного (активного) каталога **MATLAB**; 2 – початкове значення аргументу x; 1 – значення аргументу y, який входить у процедуру **fzero** як додатковий параметр.

Іншими словами, даний варіант виклику команди **fzero** означає наступне: при заданому значенні x знайти значення y таке, що буде виконуватись умова: $x^2+y^2=4$.

Приклад 2. Треба знайти найменшу відстань від точки $C(3,1)$ до параболи $y=x^2-x$ у випадку, коли $x \in [1, 2]$.

Задамо координати шуканої точки та опишемо криву (параболу):

```
>> x=1:.001:2;
>> y=x.^2–x;
>> c=[3 1];
```

Тепер обчислюємо мінімальну відстань від точки до кривої:

```
>> s=min(sqrt((c(1) – x).^2+(c(2) – y).^2))
s =
   1.2780
```

Вправа 2. Визначення точок перетину за допомогою команди **fsolve**.

Виконання вправи зводиться до розв'язку системи рівнянь, які описують вихідні криві. В загальному випадку ці рівняння є нелінійними.

Нагадаємо, що для розв'язання систем нелінійних рівнянь в системі **MATLAB** використовується команда **fsolve**.

Приклад 1. Знайти точки перетину кола і прямої: $x^2+y^2=4, 3x+y-1=0$.

Необхідно скласти **m**-функцію для цієї системи рівнянь:

```
function f=myfyn2(x)
f(1)=x(1)^2+x(2)^2–4^2;
f(2)=3*x(1)+x(2)–1;
```

Викликаємо процедуру команди **fsolve** з наступними параметрами для пошуку кординати першої точки перетину:

```
x=fsolve(@myf1,[–1 4],optimset('Display','off'))
x =
–0.9610 3.8829
```

та визначаємо координати другої точки перетину:

```
x=fsolve(@myf1,[1 –4],optimset('Display','off'))
x =
1.5610 –3.6829
```

Недоліки команди **fsolve** проявляються в тому, що неможливо отримати всі розв'язки системи рівнянь відразу, а бажано попередньо знайти наближене місцезнаходження точок перетину. Іншими словами, варіант розв'язання залежить від координат початкової точки для ітераційного процесу.

Задача пошуку точок перетину можна розв'язувати за допомогою команд побудови графіків функцій, що описують вихідні криві.

Приклад 2. Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 = 6$ та еліпсу $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

Складаємо **m**-файл:

```
function f=toch2(x)
f(1)=((x(1)–2)^2)/16+((x(2)–2)^2)/25–1;
f(2)=x(1)^2+x(2)^2–6;
```

Побудуємо графікі вихідних функцій за допомогою команди **ezplot** з підсистеми **Simbolic Math**:

```
>> ezplot('x^2+y^2=6');
axis equal;grid on;hold on;
>> ezplot('((x–2)^2)/16+((y–2)^2)/25=1');
```

Визначаємо точки перетину:

```
>> x=fsolve(@toch2,[–2 2],optimset('Display','off'))
x =
  –1.9756    1.4482
>> x=fsolve(@toch2,[0 –1],optimset('Display','off'))
x =
  0.1665   –2.4438
```

Приклад 3. Знайти точки перетину двох кривих: $y = e^x - 2$ та $x^2 + y^2 = 16$.

Побудуємо графікі вихідних функцій. Графік кола відтворюється на основі використання рівняння кола у полярній системі координат:

```
>> t=0:2*pi/100:2*pi;
>> x=4.*cos(t);y=4.*sin(t);
>> plot(x,y); grid on
>> hold on
>> x1=–4:.01:4; y1=exp(x1)–2;
>> plot(x1,y1); axis([–5 5 –5 5])
```

Один з можливих підходів побудови функцій, які визначені у неявному вигляді, полягає в наступній процедурі:

```
>> h=.02; x=–4:h:4; [X,Y]=meshgrid(x); f=X.^2+Y.^2–16;
>> v=[0,0]; contour(x,x,f,v);
>> axis equal
>> hold on
>> Y1=exp(x)–2;
>> plot(x,Y1);
```

Рекомендуємо самостійно знайти точки перетину вихідних кривих згідно процедур вправи 1.

Вправа 3 Побудова перпендикуляру до плоскої лінії за допомогою команди **fminbnd**.

Задача вирішується за допомогою команди пошуку мінімального значення функції (**fmin** або **fminbnd**). Формат виклику процедури даних команд: **fminbnd(@Func1,x0,x1)**, де **Func1** – задана як файл-функція, **[x0;x1]** – діапазон пошуку локального мінімуму.

Розглянемо задачу: встановити перпендикуляр із заданої точки на замкнуту лінію. Цю задачу можна вирішити, склавши рівняння перпендикулярності відрізка, що належить перпендикуляру, і дотичної до кривої. Інший підхід до розв’язання цієї задачи може бути зв’язаний з знаходженням мінімальної величини відрізка, що сполучає задану точку і точку на лінії, але в цьому випадку треба переконатись, що відрізок є шуканим перпендикуляром.

Нехай нам задана точка $C(0,\,5)$ і еліпс $y = \sin t,\, x = 3\cos t$, вісі якого повернені на кут $\pi/6$ проти годинникової стрілки відносно координатних вісей. Центр еліпса перенесений в точку (2, 3).

Створимо **m**-файл **myfy1**.**m**, яка відтворює заданий еліпс:

```
function [a,b]=myfy1(t)
alfa=pi/6;
x=3*cos(t); y=sin(t);
```

```
a=cos(alfa)*x–sin(alfa)*y+2;
b=sin(alfa)*x+cos(alfa)*y+3;
```

Тепер можна побудувати графік еліпса:

```
t=0:2*pi/100:2*pi;[x,y]=myfy1(t);plot(x,y)
```

Підготуємо **m**-файл, який розглядатимемо як вхідний параметр команди **fminbnd**:

```
function s=myfy2(t)
[x,y]=myfy1(t);
c=[0 5];
s=sqrt((c(1) –x)^2+(c(2) –y)^2);
```

Застосуємо команду **fminbnd** і визначимо значення **tP**, яке відповідає умові існування перпендикуляра:

```
tP=fminbnd(@myfy2,0,2*pi)
tP =
1.7758
```

Повний програмний алгоритм побудови і візуалізації перпендикуляра наведений нижче:

```
>> tP=fminbnd(@myfy2,0,2*pi)
tP =
   1.7758
>> [x,y]=myfy1(tP)
x =
   0.9817
y =
   3.5426
>> line([0 x],[5 y]); hold on; t=0:2*pi/100:2*pi; [x,y]=myfy1(t);
>> plot(x,y); axis equal;grid
```

Зауважимо, що для розв’язування задачи побудови перпендикуляра був застосований неповний формат команди:

fminbnd(@FunName,Tbeg,Tfin,options,P1,P2,…).

Не слід забувати, що для виклику довідки про вхідні параметри команди **fminbnd** можна скористатися опцією **help** (тобто^ **help optimset**, **help fminbnd, help fmin**).

Вправа 4. Обчислення площі плоскої фігури.

Площа криволінійної трапеції, що обмежена лініями $x = a$, $x = b(a < b)$, $y = f(x)$, де функція $f(x) > 0$, неперервна на інтервалі (a,b), обчислюється за допомогою поняття визначеного інтегралу [35]:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Відрізок (a,b) варто розділити на частини, у кожній з якіх знак величини функції $f(x)$ не змінюється. При цьому будемо дотримуватись наступного правила: площі, які знаходяться над віссю Ох, отримують знак плюс, а площі, які розташовані під віссю Ох, отримають знак мінус.

Площа фігури, що обмежена лініями $x=a, x=b, y=f_1(x), y=f_2(x)$, де $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $a \leq x \leq b$ обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Якщо рівняння неперервної лінії задано в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi),\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2$, то площа сектору визначається за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)d\varphi.$$

Якщо рівняння ліній дано в параметричній формі $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то площа фігури, що обмежена цією лінією та $x=a, x=b, y=0$, може бути обчислена за формулою:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt,$$

де величини границь інтегралу, t_1, t_2, визначаються з рівнянь

$$a=\varphi(t_1) \text{ та } b=\varphi(t_2).$$

Приклад 1. Визначити площу області, яка описується рівнянням $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ (рівняння еліпсу).

Побудуємо за допомогою команди **contour** графік вихідної функції, що описує заданий еліпс і потім визначимо площу, яка обмежена еліпсом. Для перевірки знайденого значення площі порівняємо її з відомим точним значенням площі еліпсу $S=\pi ab$:

```
>> h=.02; x=–2:h:2; [X,Y]=meshgrid(x);
>> f=(X.^2)./2+(Y.^2)./4–1;
>> v=[0,0]; contour(x,x,f,v), grid
```

Визначимо координати точок перетину графіка еліпса з вісями координат та знайдемо шукану площу елипсу за допомогою команди інтегрування **quad(fun,a,b)**, де **fun** – параметр, що визначає підінтегральну функцію, **a,b** – границі інтегрування:

```
>> p=quad('sqrt(4–2.*(x.^2))',–1.4,1.4)
p =
   4.4375
```

Отримана половина площі еліпса, що знаходиться вище вісі Ox. Тоді вся шукана площа визначається наступною командою:

```
>> S=2*p
S =
   8.8750
```

За допомогою формули для обчислювання площі, що обмежена кривою елипса, тобто: $S = \pi ab$, зробимо перевірку отриманого результату:

```
>> Sf=pi*2*sqrt(2)
Sf =
   8.8858
```

Зверніть увагу, що у системі **MATLAB** для обчислення площі багатокутника із відомими координатам існує спеціальна команда **polyarea([x1 x2 x3 x4…],[y1 y2 y3 y4…])**, де **[x1 x2 x3 x4…]**,**[y1 y2 y3 y4…]** – координати вершин багатокутника. Наприклад, знайдемо площу багатокутника з координатами вершин $(1,-1), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (5, 0)$:

```
>> disp(polyarea ([1 2 3 4 5],[–1 3 2 3 0]))
   9.5000
```

Приклад 2. Знайти площу фігури, що обмежена лініями: $y = -\frac{3}{2}x$ та $y = x^2 - x$, якщо відомо, що точки перетину цих ліній: $(0, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

З вихідних даних задачі визначаємо інтервал інтегрування: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Для знаходження площі фігури використовуємо команду **quad:**

```
>> quad('–15/6.*x– (x.^2–x)', –3/2,0)
ans =
   0.5625
```

Практичні завдання лабораторної роботи № 9

Виконати наступні завдання :

Завдання 1. За допомогою команди **fzero** розв’язати задачу: знайти координати вершин трикутника, сторони якого описані рівняннями (див. табл. 9.2).

Таблиця 9.2 – Варіанти до завдання № 1

№ п/п	Рівняння сторон трикутника
1	$(AB) 3x - y - 4 = 0,\quad (BC) 3x + 5y - 34 = 0,\quad (AC) 3x + 2y - 1 = 0$
2	$(AB) 2x + 4y + 1 = 0,\quad (AC) x - y + 2 = 0,\quad (BC) 3x + 4y - 12 = 0$
3	$(AB) x + y - 5 = 0,\quad (BC) 2x - y + 4 = 0,\quad (AC) 5x - 8y + 14 = 0$
4	$(AB) 2x + y - 5 = 0,\quad (BC) 2x - y + 4 = 0,\quad (AC) 5x - 8y + 14 = 0$

Закінчення таблиці 9.2

5	$(AB)3x-5y-1=0,\quad (BC)5x+y+12=0,\quad (AC)2x+5y-12=0$
6	$(AB)5x-y-6=0,\quad (BC)x-7y-8=0,\quad (AC)6x-8y+20=0$
7	$(AB)11x+2y-25=0,\ (BC)3x+5y+11=0,\quad (AC)8x-3y-29=0$
8	$(AB)2x-4y-6=0,\quad (BC)4x+4y=0,\quad (AC)2x+8y-18=0$
9	$(AB)x-7y-18=0,\quad (BC)10x-y+27=0,\ (AC)9x+6y-24=0$
10	$(AB)11x+2y-25=0,\ (BC)3x+5y+11=0,\quad (AC)8x-3y-29=0$
11	$(AB)2x-4y-6=0,\quad (BC)4x+4y=0,\quad (AC)2x+8y-18=0$
12	$(AB)x-7y-18=0,\quad (BC)10x-y+27=0,\quad (AC)9x+6y-24$
13	$(AB)3x-2y-8=0,\quad (BC)6x+4y-8=0,\quad (AC)3x+6y-24=0$
14	$(AB)7x-3y-13=0,\ (BC)x+4y+7=0,\quad (AC)6x-7y+11=0$

Завдання 2. За допомогою команди **fsolve** вирішити задачу: знайти точки перетину заданих плоских кривих (див. табл. 9.3).

Таблиця 9.3 – Варіанти до завдання № 2

№ п/п	Рівняння кривих
1	$(x-1)^2+(y-1)^2=4, y=2x$
2	$x^2+(y-5)^2=25, y=x^2$
3	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1, (x+4)^2+y^2=9$
4	$x^2/36+y^2/4=1, y=6x-3x^3$
5	$x^2/9+y^2/4=1,\ \ 4x-12y=0$
6	$y=\frac{1}{x}, x^2+y^2=9$
7	$(x+1)^2/25+(y-2)^2/9=1,\ y=x^2/6$
8	$y=\frac{1}{x},\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$
9	$(x+1)^2+y^2=16, y=\frac{1}{x-1}$
10	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{36}=1, y=\frac{x^2}{x-1}$
11	$x^2/25+(y+2)^2/16=1, y=3-x^2$
12	$y=x^2+3{,}5y+2x-3=0$
13	$x/2+y/4=1, y=3x^2-6x$
14	$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{25}=1, \frac{y}{2}-\frac{x}{4}=1$

Завдання 3. Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена заданими лініями (див. табл. 9.4)

Таблиця 9.4 – Варіанти до завдання № 3

№№	Рівняння ліній
1	$y = x^2/2,\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0$
2	$y - \sin x,\ [0\pi],\ y = 0$
3	$y = 4x - x^2,\ y = 0$
4	$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a = 3,\ b = 4$
5	$4y = 8x - x^2,\ 4y = x + 6$
6	$y = 3x^2 - 6x,\ x = 4,[0\ 4],\ y = 0$
7	$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ y = 0$
8	$y = -x^2,\ x + y + 2 = 0$
9	$y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$
10	$y = 2x - x^2,\ y = -x$
11	$xy = 3,\ x + y = 4$
12	$y = x^2,\ y = (x-1)^2$
13	$y = (x+2)^2,\ y = 4 - x$
14	$y = \dfrac{8}{4 + x^2},\ y = \dfrac{x^2}{4}$
15	$y = 1/(1 + x^2),\ y = x^2/2$

Методичні вказівки:

- в деяких випадках при обчисленні площі треба знайти точки перетину з віссю Ox, тобто вирішити рівняння $f(x) = 0$ за допомогою вже відомих (раніше введених) команд.

Контрольні питання

1. Як знайти точки перетину двох плоских кривих за допомогою команд системи **MATLAB**?
2. Як можна описати задану криву на площині? Який спосіб найзручніший для завдання інформації про криву в системі **MATLAB**?
3. Перекажить процедуру пощуку найменьшої відстані від точки до кривої у системи **MATLAB.**
4. За допомогою яких команд у системі **MATLAB** вирішується задача пошуку перпендикуляра до лінії?
5. Як обчислити площу фігури, що обмежена лініями**?**
6. Розкрийте зміст команди **polyarea([x1 x2 x3 x4…],[y1 y2 y3 y4…])**.