Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Інститут фізико-технічних та комп’ютерних наук

Відділ комп’ютерних технологій

Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

ЗВІТ

про виконання лабораторної роботи №1

з дисципліни «Числові методи».

Тема: Наближене розв’язування нелінійних рівнянь

Виконав студент Бужак А.В.

Курс III

Група 341

Викладач Філіпчук О.І.

Чернівці – 2018

Хід роботи

<u>*Частина 1:*</u> *Відокремлення коренів*

Варіант №4

$$x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$$

У заданому рівнянні

$$n = 6, \qquad a_6 = 1,\ a_5 = 0,\ a_4 = 0,\ a_3 = 0,\ a_2 = -3,\ a_1 = 1,\ a_0 = -1.$$

Застосуємо спочатку <u>аналітичний метод</u>. Згідно з теоремою 2, оскільки n=6, дане рівняння має рівно 6 коренів.

Перевіримо умови теореми 5.

$$a_5^2 = 0 \quad = \quad 0 = a_6 * a_4, \quad a_4^2 = 0 \quad = \quad 0 = a_5 * a_3, \quad a_3^2 = 0 \quad = \quad 0 = a_4 * a_2,$$

$$a_2^2 = 9 \quad > \quad 0 = a_3 * a_1, \quad a_1^2 = 1 \quad < \quad 3 = a_2 * a_0$$

Умова (6) не виконується, отже корені можуть бути як дійсними так і пари комплексно спряжених.

Виконується умова (7), тому за наслідком теореми 5 рівняння (4) має принаймні одну пару комплексних коренів.

Кількість змін знаків коефіцієнтів многочлена $P_6(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ дорівнює 3, отже, за теоремою 4, кількість дійсних додатних коренів $S_1 = 3$ або $S_1 = 3 - 2 = 1$.

Число змін знаків коефіцієнтів многочлена $P_6(-x) = x^6 - 3x^2 - x - 1$ дорівнює 1, отже, за теоремою 4, кількість дійсних від'ємних коренів $S_2 = 1$.

Далі за формулою (5) знайдемо кільце, в якому містяться усі корені вихідного рівняння. Для цього знайдемо спочатку a і b :

$$a = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\} = \max\{|-1|, |1|, |-3|, |0|, |0|, |0|\} = 3,$$

$$b = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} = \max\{|1|, |-3|, |0|, |0|, |0|, |1|\} = 3.$$

Тоді корені рівняння містяться в кільці

$$\frac{|-1|}{|-1| + 3} \le |x| \le 1 + \frac{3}{|1|} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le |x| \le 4.$$

Звідси випливає, що від'ємні корені рівняння задовольняють нерівність

$$-4 \le x_i^- \le -\tfrac{1}{4},$$

а додатні – нерівність

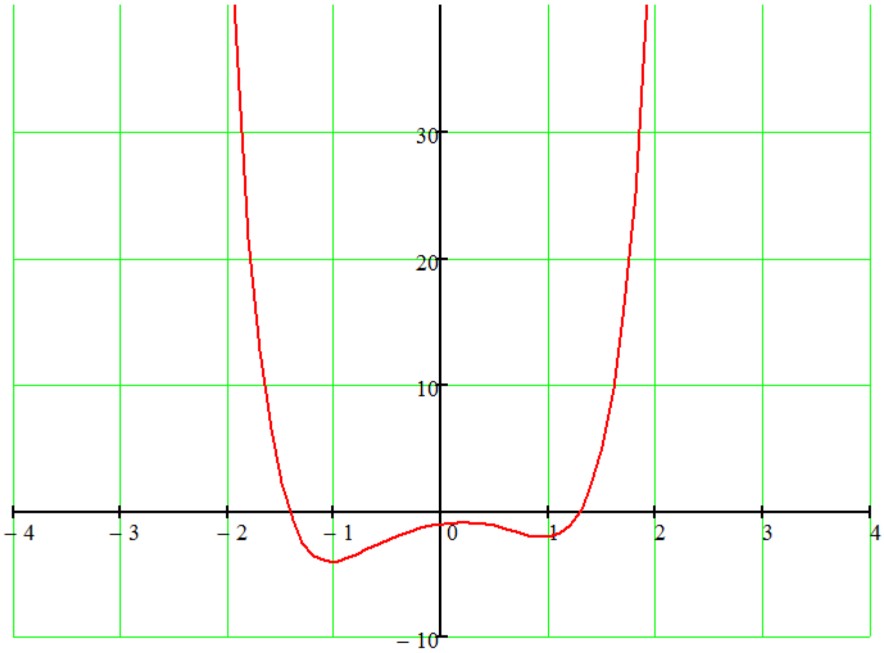
$$\frac{1}{4} \le x_i^+ \le 4.$$

Далі застосуємо <u>табличний метод</u> для відокремлення дійсних коренів. Для цього затабулюємо ліву частину рівняння $P_6(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ на відрізку [-4,4] з кроком $h_1 = 1$.

x_i	-4	-3	**-2**	**-1**	0	**1**	**2**	3	4
$f(x_i)$	4043	698	49	-4	-1	-2	53	704	4051
знак $f(x_i)$	+	+	+	-	-	-	+	+	+
			інтервал ізоляції			*інтервал ізоляції*			

Поєднуючи інформацію, отриману з допомогою аналітичного та табличного способів, доходимо висновку, що за межами відрізку [-4,4] дійсних коренів немає; один від'ємний корінь знаходиться на проміжку (-2;-1), а додатний корінь – на проміжку (1;2).

Перевірку кількості дійсних коренів можна виконати <u>графічним методом</u>.



Графік функції $y = x^6 - 3x^2 + x - 1$

Від'ємний корінь x_1^- на проміжку (-2;-1) та додатний корінь x_2^+ на проміжку (1;2) є простими однократними коренями, адже при переході через ці корені многочлен змінює знак а напрям опуклості графіка не змінюється. Разом з тим, графік многочлена $y = x^6 - 3x^2 + x - 1$ перетинає вісь абсцис двічі (кожна точка перетину відповідає відокремленому простому кореню), а коренів має бути рівно 6. Це означає, що решта 4 корені x_3 та x_4, x_5 та x_6 – дві пари комплексно спряжених коренів.

<u>**Висновок:**</u> використовуючи поєднання трьох методів, ми отримали повну характеристику коренів даного рівняння: рівняння має 6 коренів, з них 2 дійсні прості – від'ємний $x_1^- \in (-2; -1)$ та додатний $x_2^+ \in (1; 2)$, і дві пари комплексно спряжених коренів x_3 та x_4, x_5 та x_6 з кільця $\frac{1}{4} \le |x_{3,4,5,6}| \le 4$.

Частина 2: *Уточнення коренів*

На етапі відокремлення коренів даного рівняння з'ясувалось, що дійсні корені даного алгебраїчного рівняння знаходяться на відрізках [-2;-1] та [1;2]. Уточнимо корінь з відрізка [1;2].

1) ***Метод дихотомії (половинного ділення).*** Оцінимо мінімальну кількість ітерацій, необхідну для досягнення заданої точності.

$$n > log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} - 1.$$

Маємо:

$$n > log_2 \frac{2-1}{\frac{1}{1000}} - 1 = log_2 1000 - 1 \approx 9.$$

Реалізуємо метод дихотомії. За початковий відрізок беремо

$$[a_0; b_0] = [1; 2].$$

Тоді початковим наближенням шуканого кореня рівняння буде середина початкового відрізка (відрізка ізоляції кореня):

$$x^* \approx x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5.$$

Точність наближення на даному кроці

$$b_0 - a_0 = 2 - 1 = 1 > \varepsilon = 0.001,$$

отже, продовжуємо ітераційний процес. Точка x_0 ділить початковий відрізок на дві рівні частини. Для визначення наступного відрізка наближення з'ясуємо знаки функції $f(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ у точках $x = 1,\ x = 1.5,\ x = 2$:

$$f(1) = 1 - 3 + 1 - 1 = -2 < 0,\ f(1.5) = 5.140625 > 0,\ f(2) = 53 > 0.$$

Як бачимо, на кінцях відрізка [1.5;2] функція набуває значень одного знаку, а на кінцях відрізка [1;1.5] – значень різних знаків, тобто

$$f(1)f(1.5) < 0,$$

отже, наступним відрізком наближення буде

$$[a_1; b_1] = [1; 1.5].$$

Тоді наступним наближенням шуканого кореня рівняння буде середина відрізка $[a_1; b_1] = [1; 1.5]$:

$$x^* \approx x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 1{,}5}{2} = 1{,}25.$$

Точність наближення на даному кроці

$$b_1 - a_1 = 1.5 - 1 = 0.5 > \varepsilon = 0.001,$$

отже, продовжуємо ітераційний процес. Точка x_1 ділить відрізок $[a_1; b_1]$ на дві рівні частини. Для визначення наступного відрізка наближення з'ясуємо знаки функції $f(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ в точках $x = a_1 = 1,\ x = x_1 = 1.25,\ x = b_1 = 1.5$:

$$f(1) = -2 < 0,\ f(1.25) = -0.622802734375 < 0,\ f(1.5) = 5.140625 > 0.$$

Як бачимо, на кінцях відрізка [1;1.25] функція набуває значень одного знаку, а на кінцях відрізка [1.25;1.5] – значень різних знаків, тобто

$$f(1.25)f(1.5) < 0,$$

отже, наступним відрізком наближення буде

$$[a_2; b_2] = [1.25; 1.5] \text{ і т.д.}$$

Результати обчислень наведено у таблиці:

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$	*Висновок*
0	1	2	1.5	-2	53	5.140625	1	$> \varepsilon$
1	1	1.5	1.25	-2	5.140625	-0.6228	0.5	$> \varepsilon$
2	1.25	1.5	1.375	-0.6228	5.140625	1.461094	0.25	$> \varepsilon$
3	1.25	1.375	1.3125	-0.6228	1.461094	0.25659	0.125	$> \varepsilon$
4	1.25	1.3125	1.28125	-0.6228	0.25659	-0.21968	0.0625	$> \varepsilon$
5	1.28125	1.3125	1.296875	-0.2197	0.2566	0.0088	0.03125	$> \varepsilon$
6	1.28125	1.296875	1.2890625	-0.2197	0.0088	-0.1078	0.015625	$> \varepsilon$
7	1.2890625	1.296875	1.29296875	-0.1078	0.0088	-0.0501	0.0078125	$> \varepsilon$
8	1.29296875	1.296875	1.294921875	-0.0501	0.0088	-0.0208	0.0039063	$> \varepsilon$
9	1.294921875	1.296875	1.295898438	-0.0208	0.0088	-0.00601	0.0019531	$> \varepsilon$
10	1.295898438	1.296875	**1.296386719**	-0.006	0.0088	0.0014	**0.0009766**	$\boldsymbol{< \varepsilon}$

Очевидно, задана точність досягається <u>на одинадцятій ітерації</u> – на відрізку $[a_{10}; b_{10}] = [1.295898438; 1.296875]$ маємо

$$b_{10} - a_{10} = 0.0009766 < \varepsilon = 0.001,$$

а значить, шуканим наближенням буде середина відрізка $[a_{10}; b_{10}] = [1.295898438; 1.296875]$:

$$x^* \approx x_{10} = \frac{a_{10} + b_{10}}{2} \approx 1{,}296386719.$$

2) ***Метод хорд.*** Визначимо нерухомий кінець хорд з умови

$$f(x_0) * f''(x_0) > 0,$$

де $x_0 = a = 1$ або $x_0 = b = 2$. Знайдемо похідні

$$f'(x) = (x^6 - 3x^2 + x - 1)' = 6x^5 - 6x + 1,\ f''(x) = (f'(x))' = (6x^5 - 6x + 1)' = 30x^4 - 6.$$

Перевіримо виконання умови

$$f(x_0) * f''(x_0) > 0$$

у точці $x_0 = a = 1$

$$f(1) * f''(1) = (1^6 - 3 * 1^2 + 1 - 1)(30 * 1^4 - 6) = -48 < 0 \text{ – не виконується;}$$

у точці $x_0 = b = 2$

$$f(2) * f''(2) = (2^6 - 3 * 2^2 + 2 - 1)(30 * 2^4 - 6) = 25122 > 0 \text{ – виконується,}$$

отже, нерухомим кінцем методу хорд у даному випадку буде точка $x_0 = b = 2$. Ця ж точка буде початковим наближенням шуканого кореня. Наступне наближення розраховуємо за формулою

$$x_1 = b - f(b) * \frac{b - a}{f(b) - f(a)},$$

а подальші – за ітераційними формулами

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) * \frac{x_{n-1} - x_0}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}, n \geq 2.$$

Маємо:

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	*Висновок*
0	2	53	---	$> \varepsilon$
1	1,036364	-1,94678	0,963636	$> \varepsilon$
2	1,070505551	-1,862451104	0,034141915	$> \varepsilon$
3	1,1020597	-1,74998964	0,031554149	$> \varepsilon$
4	1,130760824	-1,614722764	0,028701124	$> \varepsilon$
5	1,156460493	-1,463611969	0,025699669	$> \varepsilon$
6	1,179129105	-1,304285424	0,022668613	$> \varepsilon$
7	1,198844859	-1,144062838	0,019715754	$> \varepsilon$
8	1,21577325	-0,989187678	0,01692839	$> \varepsilon$
9	1,23014182	-0,84438259	0,01436857	$> \varepsilon$
10	1,242214664	-0,712732332	0,012072844	$> \varepsilon$
11	1,252269973	-0,595819413	0,010055309	$> \varepsilon$
12	1,260582414	-0,494006914	0,008312441	$> \varepsilon$
13	1,267410793	-0,406771657	0,00682838	$> \varepsilon$
14	1,272990545	-0,333019601	0,005579752	$> \varepsilon$
15	1,277530104	-0,271346866	0,004539559	$> \varepsilon$
16	1,28121013	-0,220234657	0,003680026	$> \varepsilon$
17	1,284184609	-0,178181806	0,002974478	$> \varepsilon$
18	1,28658306	-0,14378603	0,002398451	$> \varepsilon$
19	1,288513284	-0,115786855	0,001930224	$> \varepsilon$

20	1,29006425	-0,093082097	0,001550967	$> \varepsilon$
21	1,2913089	-0,074727457	0,00124465	$> \varepsilon$
22	**1,292306714**	-0,059926286	**0,000997814**	$< \boldsymbol{\varepsilon}$

Ітераційний процес завершено і наближене значення кореня

$$x^* \approx x_{22} \approx 1{,}292306714$$

із заданою точністю досягнуте за 23 ітерації.

3) ***Метод Ньютона (дотичних).*** Нерухомим кінцем методу дотичних буде той самий, що й у методі хорд – $x_0 = b = 2$. Разом з тим, $x_0 = b = 2$ – початкове наближення шуканого кореня рівняння. Подальші ітерації проводимо за формулами

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n \geq 1.$$

Умова завершення ітераційного процесу

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	*Висновок*
0	2	53	181	---	$> \varepsilon$
1	1,70718232	16,71970823	77,76322066	0,29281768	$> \varepsilon$
2	1,492174402	4,851110432	36,43327741	0,215007919	$> \varepsilon$
3	1,359023865	1,118504688	20,66134372	0,133150536	$> \varepsilon$
4	1,304888727	0,133432017	15,87029079	0,054135138	$> \varepsilon$
5	1,296481067	0,002835875	15,19880876	0,00840766	$> \varepsilon$
6	**1,296294482**	1,37068E-06	15,18411803	**0,000186585**	$< \boldsymbol{\varepsilon}$

Задана точність наближення досягнута за 7 ітерацій, наближене значення

$$x^* \approx x_6 \approx 1{,}296294482.$$

4) ***Комбінований метод.*** Нехай $\underline{x}_n$ – наближення кореня x^* з недостачею, а $\overline{x}_n$ – з надлишком. Тоді

$$a < \underline{x}_n \leq x^* \leq \overline{x}_n < b$$

для кожного номера $n = 0,1,2, \dots$.

Визначимо, котрий з методів дає значення з надлишком, а який – з недостачею. Для цього визначимо знак добутку $f'(x)f''(x)$ на відрізку [a; b] = [1; 2].

На відрізку [a; b] = [1; 2] функція $f(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ зростає (тобто $f'(x) > 0$ на [a; b] = [1; 2]) і опукла вниз (тобто $f''(x) > 0$ на [a; b] = [1; 2]), а значить,

$$f'(x)f''(x) > 0 \text{ на } [a;\ b] = [1;\ 2].$$

Це означає, що метод хорд дає наближене значення кореня з недостачею, а дотичних – з надлишком й ітерації проводяться з формулами

$$\underline{x}_0 = a = 1, \qquad \overline{x}_0 = b = 2,$$

$$\overline{x}_n = \overline{x}_{n-1} - \frac{f(\overline{x}_{n-1})}{f'(\overline{x}_{n-1})}, \qquad \underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} - f(\underline{x}_{n-1}) * \frac{\overline{x}_{n-1} - \underline{x}_{n-1}}{f(\overline{x}_{n-1}) - f(\underline{x}_{n-1})}, \qquad n \geq 1.$$

Наближене значення кореня

$$x^* \approx x_n = \frac{\underline{x}_n + \overline{x}_n}{2},$$

а умова завершення ітераційного процесу

$$|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < \varepsilon.$$

n	$\underline{x}_n$	$\overline{x}_n$	$x_n = \frac{\underline{x}_n + \overline{x}_n}{2}$	$f(\underline{x}_n)$	$f(\overline{x}_n)$	$f'(\overline{x}_n)$	$\lvert\overline{x}_n - \underline{x}_n\rvert$	*Висновок*
0	1	2	1,5	-2	53	181	1	$> \varepsilon$
1	1,036363636	1,70718232	1,371772978	-1,946780301	16,71970823	77,7632	0,670819	$> \varepsilon$
2	1,106325193	1,492174402	1,299249797	-1,731973982	4,851110432	36,4333	0,38585	$> \varepsilon$
3	1,207840038	1,359023865	1,283431951	-1,063828917	1,118504688	20,6613	0,151184	$> \varepsilon$
4	1,281538086	1,304888727	1,293213407	-0,215630653	0,133432017	15,8703	0,023351	$> \varepsilon$
5	1,295962757	1,296481067	**1,296221912**	-0,005031251	0,002835875	15,1988	**0,00051831**	$< \boldsymbol{\varepsilon}$

Задана точність наближення досягнута за 6 ітерацій.

$$x^* \approx x_5 = \frac{\underline{x}_5 + \overline{x}_5}{2} = 1{,}296221912\ .$$

5) ***Метод простої ітерації.*** Подамо вихідне рівняння $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$ вигляду $f(x) = 0$ у вигляді

$$x - \lambda f(x) = \varphi(x)$$

так, щоб виконувалась достатня умова збіжності методу простих ітерацій

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 .$$

Тут $\lambda = \frac{2}{m+M}$, де m та M відповідно мінімальне та максимальне значення $f'(x)$.

Отримуємо

$$q = \frac{M-m}{M+m};$$

$$f'(x) = 6x^5 - 6x + 1;$$

$$f''(x) = 30x^4 - 6;$$

$$m = f'(1) = 1;$$

$$M = f'(2) = 192 - 12 + 1 = 181;$$

$$\lambda = \frac{2}{182} = \frac{1}{91};$$

$$q = \frac{90}{91};$$

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{91}(x^6 - 3x^2 + x - 1);$$

Умова завершення ітераційного процесу

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon .$$

Ітерації обчислюються за формулою

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1 ,$$

а x_0 – деяке початкове наближення (точка з відрізка [a; b]).

Нехай $x_0 = 1$. Тоді

n	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$	*Висновок*
0	1	---	$> \varepsilon$
1	1,021978022	0,021978022	$> \varepsilon$
2	1,043648459	0,021670437	$> \varepsilon$
3	1,064876708	0,02122825	$> \varepsilon$
4	1,085523757	0,020647049	$> \varepsilon$

5	1,105450825	0,019927068	$> \varepsilon$
6	1,124524718	0,019073893	$> \varepsilon$
7	1,142623506	0,018098788	$> \varepsilon$
8	1,159642037	0,017018532	$> \varepsilon$
9	1,175496743	0,015854705	$> \varepsilon$
10	1,190129208	0,014632465	$> \varepsilon$
11	1,203508131	0,013378923	$> \varepsilon$
12	1,215629482	0,012121351	$> \varepsilon$
13	1,226514903	0,010885422	$> \varepsilon$
14	1,236208637	0,009693734	$> \varepsilon$
15	1,244773396	0,008564759	$> \varepsilon$
16	1,252285692	0,007512296	$> \varepsilon$
17	1,258831091	0,006545399	$> \varepsilon$
18	1,264499813	0,005668721	$> \varepsilon$
19	1,269382925	0,004883113	$> \varepsilon$
20	1,273569306	0,004186381	$> \varepsilon$
21	1,277143379	0,003574073	$> \varepsilon$
22	1,280183597	0,003040217	$> \varepsilon$
23	1,282761549	0,002577952	$> \varepsilon$
24	1,284941592	0,002180043	$> \varepsilon$
25	1,286780857	0,001839266	$> \varepsilon$
26	1,288329538	0,001548681	$> \varepsilon$
27	1,289631346	0,001301808	$> \varepsilon$
28	1,290724071	0,001092726	$> \varepsilon$
29	**1,291640189**	**0,000916118**	$< \boldsymbol{\varepsilon}$

Таким чином, задана точність наближення досягнута на 30-ій ітерації і

$$x^* \approx x_{29} = 1{,}291640189.$$

Заповнимо зведену порівняльну таблицю:

№	*Метод*	*Отримане наближене значення кореня* $x^* \approx$	*Кількість ітерацій*
1	Дихотомії (половинного ділення)	1.296386719	11
2	Хорд	1,292306714	23
3	Ньютона (дотичних)	1,296294482	7
4	Комбінований	1,296221912	6
5	Простої ітерації	1,291640189	30

Виконаємо перевірку з використанням функції **polyroots** з пакету **MathCad**. Для цього створимо вектор-стовпець v коефіцієнтів функції $f(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$ (починаючи від a_0 і завершуючи a_6) і викличемо функцію **polyroots(** v **)**.

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -1.431 \\ -0.11 + 1.267i \\ -0.11 - 1.267i \\ 0.177 - 0.55i \\ 0.177 + 0.55i \\ 1.296 \end{pmatrix}$$

<u>Висновки:</u> найшвидше задану точність наближення досягнуто з допомогою комбінованого методу (6 ітерацій); найдовший процес – метод простої ітерації (30 ітерацій).