Лабораторна робота №3

Тема: Інтерполювання функцій.

Частина 2: Інтерполяційна формула Ньютона. Інтерполювання сплайнами.

Мета: *ознайомлення студентів з алгоритмом побудови першого та другого многочленів Ньютона, оцінкою похибки інтерполювання, алгоритмами сплайн-інтерполювання; набуття студентами практичних навичок побудови многочленів Ньютона, оцінки похибки наближення функції інтерполяційним многочленом та побудови лінійного і квадратичного інтерполяційних сплайнів (у тому числі - з використанням комп'ютера).*

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язання типових прикладів [**1**, сс. 233-237; сс. 264-266], [**2**, сс. 24-47; сс. 60-62; сс. 67-74], [**3**, сс. 78-89 (85-96 – у файлі); сс. 258-265 (265-271 - у файлі)].

2. За табличними даними побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона і з їх допомогою знайти значення функції у вказаних точках.

3. За цими ж вхідними даними побудувати інтерполяційні сплайни – лінійний та квадратичний; знайти значення функції у вказаних точках з допомогою побудованих сплайнів.

4. Зобразити в одній системі координат графіки (многочлена Ньютона та) обох сплайнів.

Література:

1. Шахно С.М. Практикум з чисельних методів : Навч. посібник / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 432 с.

2. Крилик Л. В. Обчислювальна математика. Інтерполяція та апроксимація табличних даних : навчальний посібник / Л. В. Крилик, І. В. Богач, М. О. Прокопова. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 111 с.

3. Численные методы на базе MathCad / С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – СПб. : Бхв – Петербург, 2005. – 464 с.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Байрамов Алі Мірзабей-огли

☑ $f(0,9)=?$

☑ $f(3,5)=?$

x_i	*0,235*	*1,035*	*1,835*	*2,635*	*3,435*
$y_i=f(x_i)$	*1,082*	*1,805*	*4,280*	*5,011*	*7,082*

2. Беленчук Олексій Ігорович

☑ $f(0,75)=?$

☑ $f(2,60)=?$

x_i	*0,452*	*0,967*	*1,482*	*1,997*	*2,512*
$y_i=f(x_i)$	*1,252*	*2,015*	*4,342*	*5,752*	*6,911*

3. Березний Ігор Васильович

☑ $f(0,5)=?$
☑ $f(4,5)=?$

x_i	0,134	1,384	2,634	3,884	5,134
$y_i = f(x_i)$	2,156	3,348	3,611	4,112	4,171

4. Бужак Андрій Васильович

☑ $f(1,5)=?$
☑ $f(7,5)=?$

x_i	0,234	2,034	3,834	5,634	7,434
$y_i = f(x_i)$	3,902	2,675	0,611	–3,256	–3,615

5. Бурле Павло Марчелович

☑ $f(0,5)=?$
☑ $f(5,0)=?$

x_i	0,132	0,957	2,482	4,007	5,532
$y_i = f(x_i)$	69,531	1,112	–1,672	–1,922	–1,925

6. Волощук Назарій Васильович

☑ $f(0,7)=?$
☑ $f(3,0)=?$

x_i	0,218	0,868	1,518	2,168	2,818
$y_i = f(x_i)$	0,511	0,982	2,411	3,115	4,561

7. Георгіян Євген Геннадійович

☑ $f(0,8)=?$
☑ $f(2,5)=?$

x_i	0,324	0,969	1,614	2,259	2,904
$y_i = f(x_i)$	–2,052	–1,597	–0,231	2,808	8,011

8. Григорчук В\`ячеслав Валерійович

☑ $f(0,3)=?$
☑ $f(3,7)=?$

x_i	0,282	0,932	1,582	2,232	2,882
$y_i = f(x_i)$	6,324	–0,405	–1,114	–1,315	–1,469

9. Денис Денис Русланович

☑ $f(0,25)=?$
☑ $f(2,00)=?$

x_i	0,015	0,565	1,115	1,665	2,215
$y_i=f(x_i)$	–2,417	–3,819	–0,642	0,848	2,815

10. Другчук Роман Олександрович

☑ $f(0,25)=?$
☑ $f(2,85)=?$

x_i	0,248	0,923	1,598	2,273	2,948
$y_i=f(x_i)$	–3,642	0,802	0,841	0,513	0,328

11. Дубець Василь Русланович

☑ $f(1)=?$
☑ $f(5)=?$

x_i	0,238	1,388	2,538	3,688	4,838
$y_i=f(x_i)$	0,092	0,672	2,385	3,108	2,938

12. Дуплава Олександр Ігорович

☑ $f(0,6)=?$
☑ $f(2,7)=?$

x_i	0,234	0,959	1,684	2,409	3,134
$y_i=f(x_i)$	0,511	0,982	2,411	3,115	4,184

13. Жупник Евеліна Михайлівна

☑ $f(0)=?$
☑ $f(3)=?$

x_i	-0,345	0,405	1,155	1,905	2,655
$y_i=f(x_i)$	–1,221	–0,525	2,314	5,106	9,818

14. Івасюта Павло Сергійович

☑ $f(0,1)=?$
☑ $f(2,5)=?$

x_i	0,231	0,881	1,531	2,181	2,831
$y_i=f(x_i)$	–2,748	–3,225	–3,898	–5,908	–6,506

15. *Качуровський Станіслав Тарасович*

☑ $f(2,8)=?$
☑ $f(8,0)=?$

x_i	2,119	3,844	5,569	7,294	9,019
$y_i=f(x_i)$	0,605	0,718	0,105	2,157	3,431

16. *Клим Дмитро Іванович*

☑ $f(0,3)=?$
☑ $f(2,6)=?$

x_i	0,079	0,754	1,429	2,104	2,779
$y_i=f(x_i)$	–4,308	–0,739	1,697	4,208	6,203

17. *Козуб Микола Миколайович*

☑ $f(0,4)=?$
☑ $f(2,4)=?$

x_i	0,135	0,835	1,535	2,235	2,935
$y_i=f(x_i)$	2,382	–0,212	–1,305	–3,184	–4,365

18. *Копадзе Олександра Сергіївна*

☑ $f(0,3)=?$
☑ $f(3,0)=?$

x_i	-0,135	0,715	1,565	2,415	3,265
$y_i=f(x_i)$	–2,132	–2,113	–1,613	–0,842	1,204

19. *Костюк Віталій Іванович*

☑ $f(1,0)=?$
☑ $f(4,0)=?$

x_i	0,351	1,176	2,001	2,826	3,651
$y_i=f(x_i)$	0,605	0,218	0,205	1,157	5,092

20. *Кушнірик Яна Олександрівна*

☑ $f(0,2)=?$
☑ $f(3,0)=?$

x_i	0,184	0,859	1,534	2,209	2,884
$y_i=f(x_i)$	–1,687	–2,542	–5,082	–7,042	–8,538

21. *Луник Марія Михайлівна*

☑ $f(0,7)=?$
☑ $f(3,0)=?$

x_i	0,083	0,783	1,483	2,183	2,883
$y_i=f(x_i)$	–2,132	–2,013	–1,613	–0,842	2,973

22. *Максименко Михайло Сергійович*

☑ $f(1)=?$

☑ $f(3)=?$

x_i	0,119	1,069	2,019	2,969	3,919
$y_i = f(x_i)$	–0,572	–2,015	–3,342	–6,752	–6,742

23. *Мінтянський Андрій Петрович*

☑ $f(0{,}9)=?$

☑ $f(2{,}1)=?$

x_i	0,357	0,932	1,507	2,082	2,657
$y_i = f(x_i)$	0,548	1,012	1,159	0,694	–0,503

24. *Паращук Олексій Іванович*

☑ $f(0{,}5)=?$

☑ $f(3{,}2)=?$

x_i	0,092	0,842	1,592	2,342	3,092
$y_i = f(x_i)$	3,161	1,357	–0,158	–0,129	–4,438

25. *Сарай Богдан Васильович*

☑ $f(0{,}8)=?$

☑ $f(3{,}0)=?$

x_i	0,172	0,992	1,812	2,632	3,452
$y_i = f(x_i)$	–7,057	–5,703	–0,132	1,423	2,832

26. *Фецюк Денис Мирославович*

☑ $f(0{,}7)=?$

☑ $f(2{,}7)=?$

x_i	0,259	0,909	1,559	2,209	2,859
$y_i = f(x_i)$	0,018	–1,259	–1,748	–0,532	0,911

27. *Хмелєвська Анастасія Олександрівна*

☑ $f(0{,}5)=?$

☑ $f(3{,}0)=?$

x_i	0,284	0,734	1,184	1,634	2,084
$y_i = f(x_i)$	–3,856	–3,953	–5,112	–7,632	–8,011

28. *Чайковський Станіслав Валерійович*

☑ $f(1{,}0)=?$

☑ $f(2{,}5)=?$

x_i	0,847	1,372	1,897	2,422	2,947
$y_i = f(x_i)$	–1,104	1,042	0,029	–0,344	–0,449

Приклад 1.

☑ $f(-1)=?$

☑ $f(2,0)=?$

x_i	*-1,25*	*-0,5*	*0,25*	*1*	*1,75*
$y_i = f(x_i)$	*0,25*	*1,225*	*1,15*	*2,35*	*3,15*

2. За табличними даними побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона і з їх допомогою знайти значення функції у вказаних точках.

3. За цими ж вхідними даними побудувати інтерполяційні сплайни – лінійний та квадратичний; знайти значення функції у вказаних точках з допомогою побудованих сплайнів.

4. Зобразити в одній системі координат графіки многочлена Ньютона та обох сплайнів.

►*Розв'язання.* **2.** *За табличними даними побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона і з їх допомогою знайти значення функції у вказаних точках.*

Для побудови многочленів Ньютона складемо таблицю скінченних різниць. Обчислимо:

☑ *Скінченні різниці першого порядку*

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 1,225 - 0,25 = 0,975,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1,15 - 1,225 = -0,075,$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 2,35 - 1,15 = 1,2,\ \Delta y_3 = y_4 - y_3 = 3,15 - 2,35 = 0,8$$

☑ *Скінченні різниці другого порядку*

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0,075 - 0,975 = -1,05,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 1,2 - (-0,075) = 1,275,$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 0,8 - 1,2 = -0,4$$

☑ *Скінченні різниці третього порядку*

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 1,275 - (-1,05) = 2,325,$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = -0,4 - (1,275) = -1,675$$

☑ *Скінченні різниці четвертого порядку*

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = -1,675 - 2,325 = -4$$

Таблиця 1

Скінченні різниці

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	-1,25	**0,250**	**0,975**	**-1,050**	**2,325**	**-4,000** **-4,000**
1	-0,50	1,225	-0,075	1,275	**-1,675**	---
2	0,25	1,150	1,200	**-0,400**	---	---
3	1,00	2,350	**0,800**	---	---	---
4	1,75	**3,150**	---	---	---	---
Σ			---	**-0,175**	**0,650**	**-4,000**
S			**-0,175**	**0,650**	**-4,000**	---

тут число -4,000 записано двічі, щоб можна було виділити його різними кольорами

Контроль правильності заповнення таблиці:

число Σ для кожного стовпця обчислюється як сума усіх елементів стовпця,

а число S - як різниця останнього та першого елементів стовпця;

якщо таблиця заповнена правильно, то Σ наступного стовпця дорівнює S попереднього (у таблиці виділено кольоровими заливками: зеленою, жовтою та блакитною відповідно),

тобто

$$\Sigma_2=\sum_{i=0}^{2}\Delta^2 y_i=\Delta y_3-\Delta y_0=S_1,\ \Sigma_3=\sum_{i=0}^{1}\Delta^3 y_i=\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_0=S_2,$$

$$\Sigma_4=\Delta^4 y_0=\Delta^3 y_1-\Delta^3 y_0=S_3.$$

☑ ***Обчислимо*** $f(-1)$. Оскільки $x_0=-1,25<-1<-0,5=x_1$ (тобто $x=-1\in(x_0,x_1)$), то слід записати перший інтерполяційний многочлен Ньютона

$$N_n^1(t)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Маємо:

$$x_0=-1,25,\ x_n=x_4=1,75,\ h=x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=0,75.$$

Покладемо

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-(-1,25)}{0,75}=\frac{x+1,25}{0,75}$$

і запишемо перший інтерполяційний многочлен Ньютона з $n=4$, адже у нас обчислені скінченні різниці до $\Delta^4 y_0$. Очевидно, що коефіцієнтами $\Delta^i y_0$ $(i=0,1,2,3,4)$ цього многочлена будуть числа з першого рядка таблиці скінченних різниць (виділені червоним кольором):

$$N_4^1(t)=\underbrace{0,25}_{y_0}+\frac{t}{1!}\underbrace{(0,975)}_{\Delta y_0}+\frac{t(t-1)}{2!}\underbrace{(-1,05)}_{\Delta^2 y_0}+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\underbrace{(2,325)}_{\Delta^3 y_0}+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_0}=$$

$$=0,25+0,975t-0,525t(t-1)+0,3875t(t-1)(t-2)-\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)(t-3),\ t=\frac{x+1,25}{0,75}$$

При $x=-1$ значення $t=\frac{x+1,25}{0,75}=\{x=-1\}=\frac{-1+1,25}{0,75}=\frac{0,25}{0,75}=\frac{1}{3}$. Тоді

$$f(-1)\approx N_4^1\left(\frac{1}{3}\right)=0,25+0,975\cdot\frac{1}{3}-0,525\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)+0,3875\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=0,25+0,975\cdot\frac{1}{3}+0,525\cdot\frac{2}{9}+0,3875\cdot\frac{10}{27}+\frac{1}{6}\cdot\frac{80}{81}=$$

$$=0,25+\frac{0,975}{3}+\frac{1,05}{9}+\frac{3,875}{27}+\frac{40}{243}\approx 0,2500+0,3250+0,1167+0,1435+0,1646\approx 0,9998$$

Таким чином, $f(-1)\approx N_4^1\left(\frac{1}{3}\right)\approx 0,9998$.

☑ ***Обчислимо*** $f(2)$. Оскільки $2>1,75=x_4$, то це задача екстраполяції. Через те, що точка екстраполювання близька до правого кінця відрізка, який містить усі задані вузли, то слід записати другий інтерполяційний многочлен Ньютона

$$N_n^2(t)=y_n+\frac{t}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}+\ldots+\frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

де $n=4$, а $t=\frac{x-x_n}{h}=\frac{x-x_4}{h}=\frac{x-1,75}{0,75}$. Очевидно, що коефіцієнтами $\Delta^i y_{n-i}$ ($i=0,1,2,3,4$) цього многочлена будуть останні елементи кожного стовпця таблиці скінченних різниць (виділені синім кольором). Маємо:

$$N_4^2(t)=y_4+\frac{t}{1!}\Delta y_3+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1+\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0=$$

$$=\underbrace{3,15}_{y_4}+\frac{t}{1!}\underbrace{(0,8)}_{\Delta y_3}+\frac{t(t+1)}{2!}\underbrace{(-0,4)}_{\Delta^2 y_2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\underbrace{(-1,675)}_{\Delta^3 y_1}+\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_0}=$$

$$=3,15+0,8t-0,2t(t+1)-0,279t(t+1)(t+2)-\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)(t+3)$$

При $x=2$ значення $t=\frac{x-1,75}{0,75}=\{x=2\}=\frac{2-1,75}{0,75}=\frac{0,25}{0,75}=\frac{1}{3}$. Тоді

$$f(2)\approx N_4^2\left(\frac{1}{3}\right)=3,15+0,8\cdot\frac{1}{3}-0,2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-0,279\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}=$$

$$=3,15+\frac{0,8}{3}-\frac{0,4}{9}-\frac{2,79}{27}-\frac{80}{6\cdot 81}\approx 3,15+0,2667-0,0444-0,1033-0,1646=3,1043$$

Таким чином, $f(2)\approx N_4^2\left(\frac{1}{3}\right)\approx 3,1043$.

Для побудови графіка многочлена Ньютона маємо повернутись від змінної t до змінної x, наприклад, у першому многочлені. Маємо:

$$N_4^1(t)=0,25+0,975t-0,525(t^2-t)+\frac{2,325}{6}(t^3-3t^2+2t)-\frac{1}{6}(t^4-6t^3+11t^2-6t)=\ldots=$$

$$=-\frac{1}{6}t^4+\frac{111}{80}t^3-\frac{169}{48}t^2+\frac{131}{40}t+\frac{1}{4}.$$

Підставляючи в останній вираз $t=\frac{x+1,25}{0,75}=\frac{4}{3}(x+1,25)$, маємо

$$N_4^1(x)=-\frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^4(x+1,25)^4+\frac{111}{80}\left(\frac{4}{3}\right)^3(x+1,25)^3-\frac{169}{48}\left(\frac{4}{3}\right)^2(x+1,25)^2+\frac{131}{40}\left(\frac{4}{3}\right)(x+1,25)+\frac{1}{4}=$$

$$=-\frac{128}{243}(x+1,25)^4+\frac{148}{45}(x+1,25)^3-\frac{169}{27}(x+1,25)^2+\frac{131}{30}(x+1,25)+\frac{1}{4}.$$

Далі можна перетворення не продовжувати, адже такого вигляду досить для побудови графіка.

3. *За цими ж вхідними даними побудувати інтерполяційні сплайни – лінійний та квадратичний; знайти значення функції у вказаних точках з допомогою побудованих сплайнів.*

☑ ***Побудуємо лінійний сплайн***

$$S_1(x)=\begin{cases} a_1x+b_1,\ x\in[-1,25;-0,5],\\ a_2x+b_2,\ x\in[-0,5;0,25],\\ a_3x+b_3,\ x\in[0,25;1],\\ a_4x+b_4,\ x\in[1;1,75],\end{cases}$$

тобто з’єднаємо вузли інтерполювання відрізками прямих, отримавши кусково-лінійну функцію.

Невідомі коефіцієнти знайдемо з умов інтерполяції:

$$S_1(x_0)=y_0,\ S_1(x_1)=y_1,\ S_1(x_2)=y_2,\ S_1(x_3)=y_3,\ S_1(x_4)=y_4.$$

Умова $S_1(x_0)=y_0$ рівносильна тому, що $S_1(x_0)=a_1x_0+b_1=y_0$, тобто

$$-1,25a_1+b_1=0,25$$

Далі, умова $S_1(x_1)=y_1$ перепишеться $a_1x_1+b_1=y_1$ і $a_2x_1+b_2=y_1$, адже, у точці x_1 відрізки прямих мають з'єднатись, тобто

$$-0,5a_1+b_1=1,225 \text{ і } -0,5a_2+b_2=1,225;$$

аналогічно, умова $S_1(x_2)=y_2$ перепишеться $a_2x_2+b_2=y_2$ і $a_3x_2+b_2=y_2$, тобто

$$0,25a_2+b_2=1,15 \text{ і } 0,25a_3+b_3=1,15;$$

умова $S_1(x_3)=y_3$ перепишеться $a_3x_3+b_3=y_3$ і $a_4x_3+b_4=y_3$, тобто

$$a_3+b_3=2,35 \text{ і } a_4+b_4=2,35;$$

умова $S_1(x_4)=y_4$ перепишеться $a_4x_4+b_4=y_4$, тобто

$$1,75a_4+b_4=3,15.$$

Таким чином, отримується система

$$\begin{cases}\begin{cases}-1,25a_1+b_1=0,25,\\-0,5a_1+b_1=1,225,\end{cases}\\ \begin{cases}-0,5a_2+b_2=1,225,\\0,25a_2+b_2=1,15,\end{cases}\\ \begin{cases}0,25a_3+b_3=1,15,\\a_3+b_3=2,35,\end{cases}\\ \begin{cases}a_4+b_4=2,35,\\1,75a_4+b_4=3,15.\end{cases}\end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$\begin{cases}a_1=1,3\\b_1=1,875\end{cases},\ \begin{cases}a_2=-0,1\\b_2=1,175\end{cases},\ \begin{cases}a_3=1,6\\b_3=0,75\end{cases},\ \begin{cases}a_4=\dfrac{16}{15}\\b_4=\dfrac{77}{60}\end{cases}$$

Тоді лінійний сплайн задається формулою

$$S_1(x)=\begin{cases}1,3x+1,875,\ x\in[-1,25;-0,5],\\-0,1x+1,175,\ x\in[-0,5;0,25],\\1,6x+0,75,\ x\in[0,25;1],\\\dfrac{16}{15}x+\dfrac{77}{60},\ x\in[1;1,75].\end{cases}$$

Знайдемо значення функції у заданих точках з допомогою побудованого лінійного сплайна:

$$f(-1)\approx S_1(-1)=\left(1,3x+1,875\right)\Big|_{x=-1}=1,3(-1)+1,875=0,575,$$

$$f(2)\approx S_1(2)=\left(\frac{16}{15}x+\frac{77}{60}\right)\Bigg|_{x=2}=\frac{16}{15}\cdot 2+\frac{77}{60}\approx 3,42.$$

☑ ***Побудуємо квадратичний сплайн $S_2(x)$.***

Геометрично побудова квадратичного сплайна означає, що ми з'єднуємо вузли інтерполювання фрагментами парабол.

Тут є два підходи: простіший – якщо $n = 2m$, то сплайн можна будувати, використовуючи m вузлів (через один) і не враховуючи гладкість сплайна (рівність перших похідних у некрайніх вузлах) та складніший – використовуючи усі вузли, але при цьому враховуючи гладкість рівність перших похідних у вузлах інтерполювання.

<u>Перший спосіб</u>. Оскільки вузлів інтерполювання задано $n+1=5$, то $n=2m=4$, отже, візьмемо вузли через один

$$S_2(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1,\ x\in[x_0,x_2],\\ a_2x^2+b_2x+c_2,\ x\in[x_2,x_4] \end{cases}$$

Коефіцієнти квадратичних тричленів будемо шукати з умов інтерполяції

$$S_2(x_0)=y_0,\ S_2(x_1)=y_1,\ S_2(x_2)=y_2,\ S_2(x_3)=y_3,\ S_2(x_4)=y_4,$$

враховуючи те, що у некрайніх вузлах параболи з'єднуються між собою. Ці умови дають нам таку СЛАР

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1x_0^2+b_1x_0+c_1=y_0,\\ a_1x_1^2+b_1x_1+c_1=y_1,\\ a_1x_2^2+b_1x_2+c_1=y_2, \end{cases}\\ \begin{cases} a_2x_2^2+b_2x_2+c_2=y_2,\\ a_2x_2^2+b_2x_3+c_2=y_3,\\ a_2x_4^2+b_2x_4+c_2=y_4. \end{cases} \end{cases}$$

Підставляючи вхідні дані, маємо:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1(-1,25)^2+b_1(-1,25)+c_1=0,25,\\ a_1(-0,5)^2+b_1(-0,5)+c_1=1,225,\\ a_1\cdot 0,25^2+b_1\cdot 0,25+c_1=1,15, \end{cases}\\ \begin{cases} a_2\cdot 0,25^2+b_2\cdot 0,25+c_2=1,15,\\ a_2\cdot 1^2+b_2\cdot 1+c_2=2,35,\\ a_2\cdot 1,75^2+b_2\cdot 1,75+c_2=3,15. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1,5625a_1-1,25b_1+c_1=0,25,\\ 0,25a_1-0,5b_1+c_1=1,225,\\ 0,0625a_1+0,25b_1+c_1=1,15, \end{cases}\\ \begin{cases} 0,0625a_2+0,25b_2+c_2=1,15,\\ a_2+b_2+c_2=2,35,\\ 3,0625a_2+1,75b_2+c_2=3,15. \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, одним з відомих методів, знаходимо коефіцієнти

$$a_1=-\frac{14}{15},\ b_1=-\frac{1}{3},\ c_1=\frac{31}{24};\ a_2=-\frac{16}{45},\ b_2=\frac{92}{45},\ c_2=\frac{119}{180}.$$

Тоді квадратичний сплайн, побудований через один вузол має такий аналітичний вигляд:

$$S_2(x)=\begin{cases} -\frac{14}{15}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{31}{24},\ x\in[-1,25;0,25],\\ -\frac{16}{45}x^2+\frac{92}{45}x+\frac{119}{180},\ x\in[0,25;1,75]. \end{cases}$$

Обчислимо з допомогою даного сплайна $f(-1)$, $f(2)$:

$$f(-1) \approx S_2(-1) = -\frac{14}{15}\cdot(-1)^2 - \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{31}{24} \approx 0,692 .$$

Обчислення $f(2)$ - це екстраполювання, адже, точка $x = 2 \notin [-1,25;1,75]$, тому ми припускаємо, що правіше від останнього вузла $x_4 = 1,75$ сплайн задається тією ж формулою, що й на останньому відрізку, тобто $S_2(x) = -\frac{16}{45}x^2 + \frac{92}{45}x + \frac{119}{180}$. Тоді

$$f(2) \approx S_2(2) = -\frac{16}{45}\cdot 2^2 + \frac{92}{45}\cdot 2 + \frac{119}{180} \approx 3,328 .$$

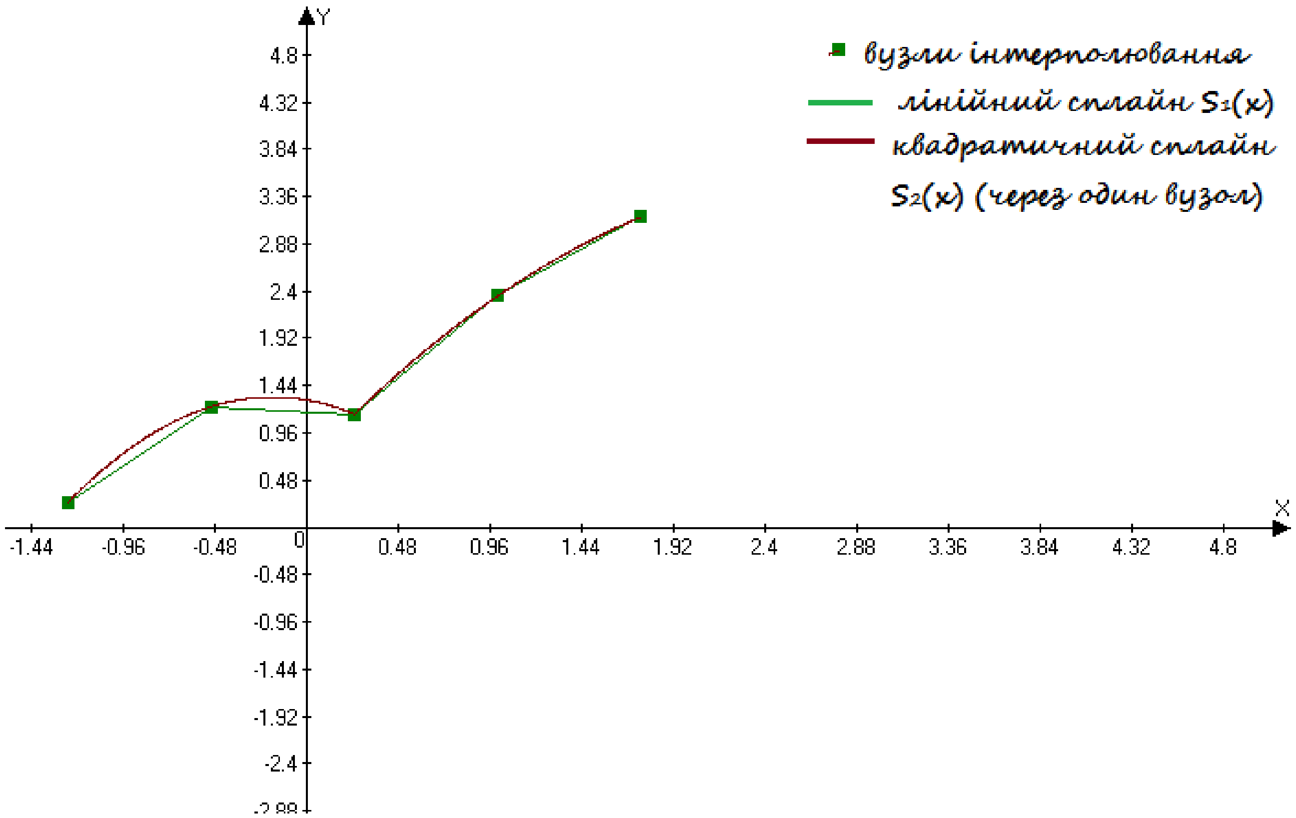

Рис. 1. *Лінійний сплайн та квадратичний сплайн, побудований через один вузол*

<u>Другий спосіб</u>. Використаємо усі вузли інтерполювання

$$S_2(x) = \begin{cases} S_{2,1} = a_1x^2 + b_1x + c_1,\ x \in [x_0, x_1], \\ S_{2,2} = a_2x^2 + b_2x + c_2,\ x \in [x_1, x_2], \\ S_{2,3} = a_3x^2 + b_3x + c_3,\ x \in [x_2, x_3], \\ S_{2,4} = a_4x^2 + b_4x + c_4,\ x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Потрібно знайти 12 невідомих коефіцієнтів квадратичних тричленів. Їх будемо шукати з:

☑ умов інтерполяції

$$S_2(x_0) = y_0,\ S_2(x_1) = y_1,\ S_2(x_2) = y_2,\ S_2(x_3) = y_3,\ S_2(x_4) = y_4,$$

які перепишуться у $2n = 2\cdot 4 = 8$ лінійних рівнянь

$$S_{2,1}(x_0) = y_0,\ S_{2,1}(x_1) = y_1, S_{2,2}(x_1) = y_1,\ S_{2,2}(x_2) = y_2,$$

$$S_{2,3}(x_2) = y_2,\ S_{2,3}(x_3) = y_3,\ S_{2,4}(x_3) = y_3,\ S_{2,4}(x_4) = y_4$$

☑ умови гладкості (рівність перших похідних у точках «склеювання» парабол - x_1, x_2, x_3) – три рівняння:

$$S'_{2,1}(x_1) = S'_{2,2}(x_1),\ S'_{2,2}(x_2) = S'_{2,3}(x_2),\ S'_{2,3}(x_3) = S'_{2,4}(x_3).$$

(таким чином, утворилося 11 рівнянь для знаходження 12 параметрів. В якості додаткового рівняння задають додаткову умову на одному з кінців відрізку інтерполювання).

☑ додаткової умови на вузлі x_0 інтерполювання, наприклад,

$$S'_2(x_0) = S'_{2,1}(x_0) = 0.$$

Таким чином, маємо 12 лінійних рівнянь для знаходження 12 невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2a_1x_0 + b_1 = 0 \qquad (\text{умова } S'_2(x_0) = S'_{2,1}(x_0) = 0) \\ a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = y_0 \ (\text{умова } S_{2,1}(x_0) = y_0) \\ a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = y_1 \ (\text{умова } S_{2,1}(x_1) = y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 = y_1 \ (\text{умова } S_{2,2}(x_1) = y_1) \\ a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = y_2 \ (\text{умова } S_{2,2}(x_2) = y_2) \\ 2a_2x_1 + b_2 = 2a_1x_1 + b_1 \ (\text{умова } S'_{2,2}(x_1) = S'_{2,1}(x_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x_2^2 + b_3x_2 + c_3 = y_2 \ (\text{умова } S_{2,3}(x_2) = y_2) \\ a_3x_3^2 + b_3x_3 + c_3 = y_3 \ (\text{умова } S_{2,3}(x_3) = y_3) \\ 2a_3x_2 + b_3 = 2a_2x_2 + b_2 \ (\text{умова } S'_{2,3}(x_2) = S'_{2,2}(x_2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4x_3^2 + b_4x_3 + c_4 = y_3 \ (\text{умова } S_{2,4}(x_3) = y_3) \\ a_4x_4^2 + b_4x_4 + c_4 = y_4 \ (\text{умова } S_{2,4}(x_4) = y_4) \\ 2a_4x_3 + b_4 = 2a_3x_3 + b_3 \ (\text{умова } S'_{2,4}(x_3) = S'_{2,3}(x_3)) \end{cases}$$

Підставляючи вхідні дані, маємо:

$$\begin{cases} 2a_1x_0 + b_1 = 0 \\ a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = y_0 \\ a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1(-1,25) + b_1 = 0 \\ a_1(-1,25)^2 + b_1(-1,25) + c_1 = 0,25 \\ a_1(-0,5)^2 + b_1(-0,5) + c_1 = 1,225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2,5a_1 + b_1 = 0 \\ 1,5625a_1 - 1,25b_1 + c_1 = 0,25 \\ 0,25a_1 - 0,5b_1 + c_1 = 1,225 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{26}{15},\ b_1 = \frac{13}{3},\ c_1 = \frac{71}{24}$$

$$\begin{cases} a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 = y_1 \\ a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = y_2 \\ 2a_2x_1 + b_2 = 2a_1x_1 + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2(-0,5)^2 + b_2(-0,5) + c_2 = 1,225 \\ a_2 \cdot 0,25^2 + b_2 \cdot 0,25 + c_2 = 1,15 \\ 2a_2(-0,5) + b_2 = 2a_1(-0,5) + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25a_2 - 0,5b_2 + c_2 = 1,225 \\ 0,0625a_2 + 0,25b_2 + c_2 = 1,15 \\ -a_2 + b_2 = -\frac{26}{15} + \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{10}{3},\ b_2 = \frac{11}{15},\ c_2 = \frac{91}{120}$$

$$\begin{cases} a_3x_2^2+b_3x_2+c_3=y_2\\ a_3x_3^2+b_3x_3+c_3=y_3\\ 2a_3x_2+b_3=2a_2x_2+b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3\cdot 0,25^2+b_3\cdot 0,25+c_3=1,15\\ a_3\cdot 1^2+b_3\cdot 1+c_3=2,35\\ 2a_3\cdot 0,25+b_3=2a_2\cdot 0,25+b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,0625a_3+0,25b_3+c_3=1,15\\ a_3+b_3+c_3=2,35\\ 0,5a_3+b_3=\dfrac{5}{3}+\dfrac{11}{15} \end{cases}$$

$$a_3=-\frac{16}{15},\ b_3=\frac{44}{15},\ c_3=\frac{29}{60}$$

$$\begin{cases} a_4x_3^2+b_4x_3+c_4=y_3\\ a_4x_4^2+b_4x_4+c_4=y_4\\ 2a_4x_3+b_4=2a_3x_3+b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4\cdot 1^2+b_4\cdot 1+c_4=2,35\\ a_4\cdot 1,75^2+b_4\cdot 1,75+c_4=3,15\\ 2a_4\cdot 1+b_4=2a_3\cdot 1+b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4+b_4+c_4=2,35\\ 3,0625a_4+1,75b_4+c_4=3,15\\ 2a_4+b_4=-\dfrac{32}{15}+\dfrac{44}{15} \end{cases}$$

$$a_4=\frac{112}{45},\ b_4=-\frac{52}{9},\ c_4=\frac{203}{36}.$$

Таким чином, квадратичний сплайн, побудований за усіма вузлами має таке аналітичне зображення:

$$S_2(x)=\begin{cases} S_{2,1}=\dfrac{26}{15}x^2+\dfrac{13}{3}x+\dfrac{71}{24},\ x\in[-1,25;-0,5],\\ S_{2,2}=\dfrac{10}{3}x^2+\dfrac{11}{15}x+\dfrac{91}{120},\ x\in[-0,5;0,25],\\ S_{2,3}=-\dfrac{16}{15}x^2+\dfrac{44}{15}x+\dfrac{29}{60},\ x\in[0,25;1],\\ S_{2,4}=\dfrac{112}{45}x^2-\dfrac{52}{9}x+\dfrac{203}{36},\ x\in[1;1,75]. \end{cases}$$

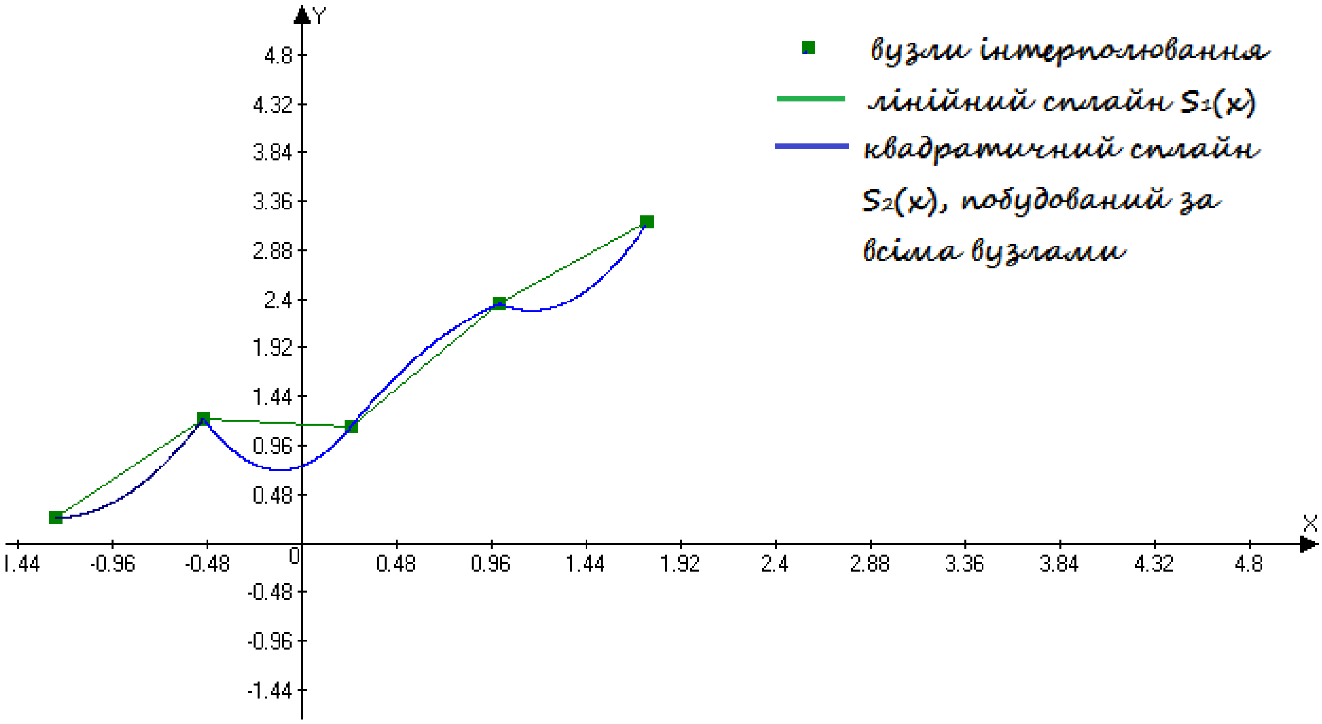

Рис. 2. *Лінійний сплайн та квадратичний сплайн, побудований за усіма вузлами*

Значення $f(-1)$ та $f(2)$ обчислимо з допомогою отриманого сплайна, міркуючи, як у першому способі:

$$f(-1) \approx S_2(-1) = S_{2,1}(-1) = \frac{26}{15}(-1)^2 + \frac{13}{3}(-1) + \frac{71}{24} \approx 0{,}358,$$

$$f(2) \approx S_2(2) = S_{2,4}(2) = \frac{112}{45} \cdot 2^2 - \frac{52}{9} \cdot 2 + \frac{203}{36} \approx 4{,}039.$$

4. *Зобразити в одній системі координат графіки многочлена Ньютона та побудованих інтерполяційних сплайнів.*

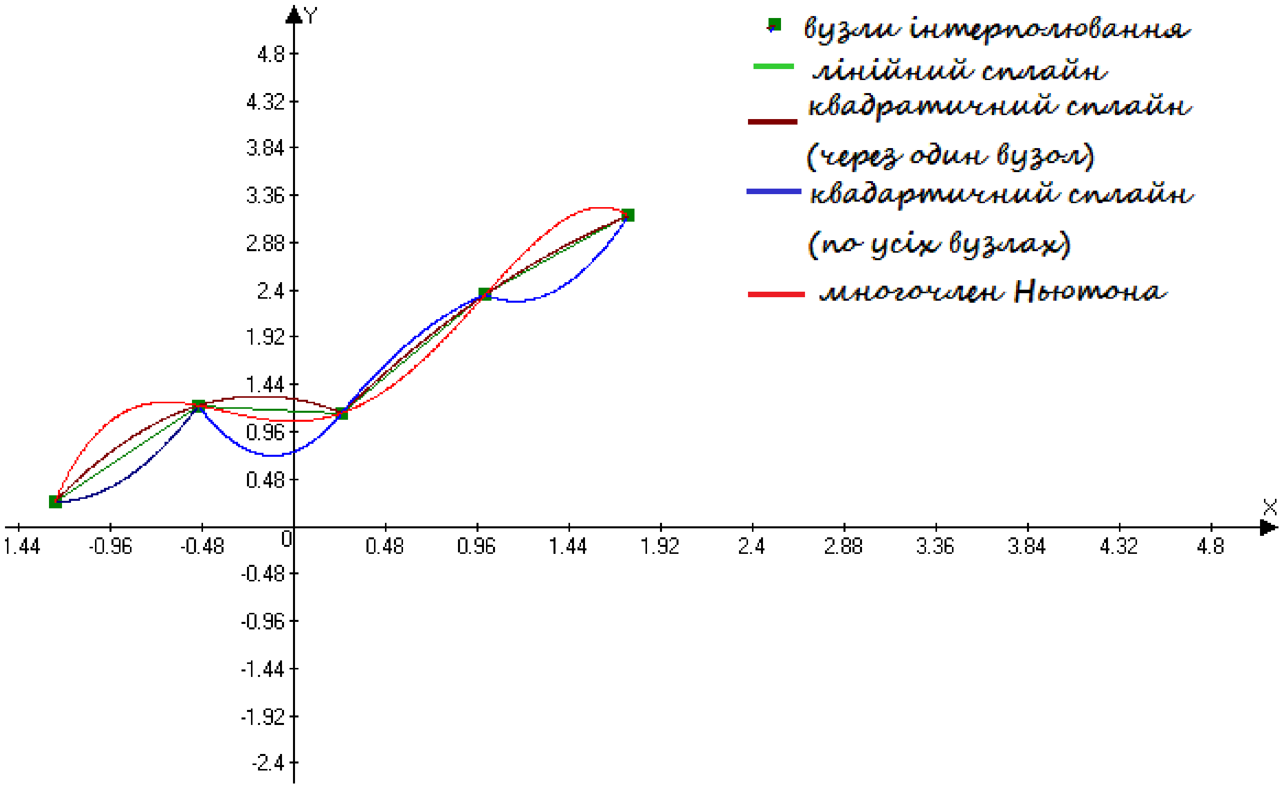

Рис. 3. *Усі сплайни та многочлен Ньютона* ■