Лабораторна робота №2

Тема: Точне та наближене розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Частина 2: Наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: *ознайомлення студентів з основними поняттями та наближеними методами розв'язування СЛАР; набуття практичних навичок розв'язання таких задач (у тому числі - з використанням комп'ютера).*

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал [**1**, сс. 49-59]+даний файл.

2. Попередньо звівши задану СЛАР до нормального вигляду, знайти наближене значення її розв'язку наближеними методами з точністю до $\varepsilon = 0,001$:

- ☑ ***методом простої ітерації (Якобі)***;
- ☑ ***методом Зейделя***

Теоретичні відомості та розв'язання типових прикладів

Розглянемо деякі наближені методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Ці методи дають розв'язок у вигляді границі послідовності деяких векторів. Такі вектори будують шляхом виконання одноманітного процесу, який називають ***процесом ітерацій***.

Важливою особливістю ітераційних методів є їхні ***самоуточнення і простота реалізації на комп'ютерах***. Ітераційний метод для початку обчислень потребує задання одного або декількох початкових наближень. Умови і швидкість збіжності кожного ітераційного процесу суттєво залежать від властивостей матриці системи і вибору початкових наближень.

Загальна схема ітераційних процесів полягає у побудові для системи

$$Ax = b \qquad \textbf{(1)}$$

з квадратною невиродженою матрицею n-го порядку A послідовності наближень

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(b - Ax^{(k-1)}), \qquad \textbf{(2)}$$

де $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ - деяка послідовність матриць; $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ - початкове наближення. Вибір різних матриць $H^{(k)}$ приводить до різних ітераційних методів.

Ітераційні процеси (2) мають ту властивість, що для кожного з них точний розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ системи (1) є нерухомою точкою. Це означає наступне: якщо за початкове наближення $x^{(0)}$ взяти x^*, то всі наступні наближення теж дорівнюватимуть x^*.

Навпаки, якщо довільний ітераційний процес, для якого x^* є нерухомою точкою, реалізується за формулою

$$x^{(k)} = C^{(k)}x^{(k-1)} + d^{(k)}, \ k = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

де $C^{(k)}$ - послідовність матриць; $d^{(k)}$ - послідовність векторів, то його можна записати у вигляді (2).

Найпростіші ітераційні методи - ***стаціонарні ітераційні процеси***, у яких матриці $H^{(k)}$ не залежать від номера кроку k. При $H^{(k)} = E$ отримуємо класичний процес послідовних наближень. Вибір матриці H для стаціонарного процесу і $H^{(k)}$ для нестаціонарного можна виконати багатьма різними способами.

2.1. *Метод простих ітерацій (метод Якобі).*

Застосування методу Гаусса для розв'язування системи лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих досить громіздке. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнти системи не завжди можна розмістити в оперативній пам'яті ЕОМ. Тоді застосувати для її розв'язування метод Гаусса взагалі не можна. У цих випадках розв'язують систему ітераційними методами.

Розглянемо ***метод простої ітерації***. Оскільки метод простих ітерацій є стаціонарним, то систему рівнянь (1) згідно з формулою (3), перетворимо до вигляду

$$x = Cx + d\,, \tag{4}$$

який називається ***нормальним виглядом*** системи.

Розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^{\mathrm{T}}$ системи (4) (а значить, і системи (1)) знаходимо як (покоординатну) границю послідовності

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d\,,\ k = 1,2,... \tag{5}$$

тобто

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}\ .$$

Рівності (5) у координатній формі записуються наступним чином

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i\,,\ (i \in \overline{1,n}\,; k = 1,2,...), \tag{6}$$

тобто у вигляді системи

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{12}x_2^{(k-1)} + c_{13}x_3^{(k-1)} + ... + c_{1n}x_n^{(k-1)} + d_1 \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k-1)} + c_{23}x_3^{(k-1)} + ... + c_{2n}x_n^{(k-1)} + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k-1)} + c_{n2}x_2^{(k-1)} + ... + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + d_n \end{cases},\ k = 1,2,... \tag{7}$$

Теорема 2.1.1 (критерій збіжності МПІ). *Для збіжності методу простих ітерацій з довільним початковим вектором* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ *необхідно і досить, щоб усі власні числа матриці C (із системи* (4)*) були за модулем менші від 1, тобто всі корені характеристичного рівняння*

$$\det(C - \lambda E) = 0 \tag{8}$$

були за модулем менші від одиниці.

Оскільки знаходження коренів рівняння (8) є непростою проблемою, то на практиці часто використовують достатню умову збіжності методу простих ітерацій. Для цього для квадратної матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ вводять поняття ***норми матриці***, яка задається одним з трьох способів:

- ☑ $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - максимум сум модулів елементів рядків;
- ☑ $\|A\|_2 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ - максимум сум модулів елементів стовпців;

☑ $\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ - корінь квадратний з суми квадратів модулів усіх елементів матриці.

Теорема 2.1.2 (достатня ознака збіжності МПІ). *Нехай хоча б для одного* $i = 1, 2, 3$ *виконується нерівність*

$$\|C\|_i \le q < 1. \qquad \textbf{(9)}$$

Тоді

☑ *система (4) (а значить, і система* (1)*) має єдиний розв'язок* $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^{\mathrm{T}}$;

☑ *при довільному виборі вектора початкового наближення* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ *ітераційний процес* (5) *збігається до розв'язку* x^* *зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником* $q = \|C\|_i$, *тобто*

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}$$

і має місце наступна оцінка абсолютної похибки k *-го наближення*

$$\Delta = \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|, \quad (k = 1, 2, ...) \qquad \textbf{(10)}$$

Метод простої ітерації слід закінчити, якщо стане справедливою нерівність

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon, \quad (k = 1, 2, ...) \qquad \textbf{(11)}$$

де ε — наперед задана точність наближень. При $q \le \frac{1}{2}$ умову (11) можна замінити на

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon, \quad (k = 1, 2, ...). \qquad \textbf{(12)}$$

Метод Якобі зведення системи до нормального вигляду

Припустимо, що усі діагональні елементи матриці A вихідної системи відмінні від нуля

$$a_{ii} \ne 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

(або рівняння системи можна переставити так, щоб остання умова виконувалась).

Розв'яжемо перше рівняння системи (1) відносно x_1, друге - відносно x_2 і т.д. Отримуємо систему у вигляді (4):

$$\begin{cases} x_1 = c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + ... + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{n,n-1}x_{n-1} + d_n \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

де

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \ne j \\ 0, \quad i = j \end{cases}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad \textbf{(14)}$$

Метод, що ґрунтується на такому зведенні вихідної СЛАР до вигляду (4) (чи, те саме, що (13)), називають ***методом Якобі***. Далі, задавши нульове наближення, за рекурентними співвідношеннями (5) можемо виконувати ітераційний процес.

Неважко переконатись, що сформульована вище ***достатня умова збіжності МПІ для методу Якобі рівносильна умові діагонального переважання матриці*** A вихідної системи, тобто умові

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(15)}$$

(або $|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, ..., n.$).

Рівності (15) означають, що модуль діагонального елемента кожного рядка строго більший від суми модулів інших елементів даного рядка.

Зауваження: *умови теореми 2.1.2 (чи рівносильна умова діагонального переважання матриці вихідної системи) є лише достатніми для збіжності МПІ, тобто в разі їх невиконання про збіжність ітераційного процесу наперед нічого сказати неможна: процес може як збігатись до розв'язку системи, так і збігатись до деякого іншого вектора чи розбігатись взагалі.*

Таким чином, приходимо до такого ***алгоритму МПІ для СЛАР***.

1. *Перевірити, чи матриця* A *вихідної системи має діагональне переважання (тобто, чи виконуються умови (15)). Якщо – так, то перейти до п. 2, інакше – звести початкову систему до вигляду з матрицею з діагональним переважанням.*

2. *Перейти до системи вигляду (13), користуючись перетвореннями (14),*

3. *Взяти деяке початкове наближення* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ *(за* $x^{(0)}$ *зазвичай беруть один з векторів* $x^{(0)} = (0, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$, $x^{(0)} = (1, 1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$, $x^{(0)} = (b_1, b_2, ..., b_n)^{\mathrm{T}}$ *).*

4. *Виконати крок ітерації згідно з формулами (3) (у координатній формі – за формулами (7)), отримавши вектор* $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d$ $(k = 1, 2, ...)$

5. *Перевірити умову виходу з ітераційного процесу (11) (чи (12) при* $q \leq \frac{1}{2}$*). В разі виконання умови – ітераційний процес завершується, інакше – повертаємось до п.4.*

6. *Виконати перевірку знайденого наближеного значення розв'язку, підставивши його у задану (чи перетворену до вигляду з діагональним переважанням) СЛАР.*

2.2. *Метод Зейделя.*

Метод Зейделя є різновидом методу простої ітерації і відрізняється від методу простих ітерацій лише тим, що під час обчислення k-го наближення i-ої компоненти x_i; враховують уже визначене раніше $(k-1)$-ше наближення компонент x_1, x_2, …, x_{i-1}, тобто обчислення виконують за формулами

$$x_i^{(k)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)}, \; (k = 1, 2, ...; \; c_{ii} = 0, \; i = \overline{1, n}) \qquad \textbf{(16)}$$

або в матричному вигляді

$$x^{(k)} = Bx^{(k)} + Dx^{(k-1)} + d \;\; (k = 1, 2, ...), \qquad \textbf{(17)}$$

де B - нижньотрикутна матриця, а D - верхньотрикутна матриця

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & & 0 & 0 \\ & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ 0 & 0 & & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ 0 & 0 & & c_{3,n-1} & c_{3,n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

утворені з матриці C.

Рівність (17) можна переписати у вигляді

$$x^{(k)}=(E-B)^{-1}Dx^{(k-1)}+(E-B)^{-1}d \qquad \textbf{(18)}$$

У координатній формі ітераційний процес методу Зейделя виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=d_1+\sum\limits_{j=1}^{n}c_{1j}x_j^{(k-1)} \\ x_2^{(k)}=d_2+c_{21}x_1^{(k)}+\sum\limits_{j=2}^{n}c_{2j}x_j^{(k-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i^{(k)}=d_i+\sum\limits_{j=1}^{i-1}c_{ij}x_j^{(k)}+\sum\limits_{j=i}^{n}c_{ij}x_j^{(k-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)}=d_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}c_{nj}x_j^{(k)}+c_{nn}x_n^{(k-1)} \end{cases} \quad (k=1,2,\dots;\ c_{ii}=0,\ i=\overline{1,n}) \qquad \textbf{(19)}$$

З рівності (18) випливає, що ітераційний процес Зейделя збігається, якщо виконується умова $|\lambda_i|<1$, де λ_i $(i\in\overline{1,n})$ - власні числа матриці $(E-B)^{-1}D$. Ці власні числа визначають із рівняння

$$\det\left((E-B)^{-1}D-\lambda E\right)=0.$$

Теорема 2.2.1 (критерій збіжності методу Зейделя). *Для збіжності методу Зейделя з довільним початковим вектором $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ необхідно і достатньо, щоб усі власні числа матриці $(E-B)^{-1}D$ були за модулем менші від 1, тобто всі корені характеристичного рівняння*

$$\det\left((E-B)^{-1}D-\lambda E\right)=0 \qquad \textbf{(20)}$$

були за модулем менші від одиниці

Зазвичай метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простої ітерації, але, взагалі кажучи, він призводить до більш громіздких обчислень. Процес Зейделя може збігатися навіть в тому випадку, якщо розбігається процес ітерації. Однак це буває не завжди. Можливі випадки, коли процес Зейделя збігається повільніше за МПІ. Більш того, можуть бути випадки, коли МПІ збігається, а процес Зейделя розбігається.

Зауваження: *За умови діагонального переважання метод Зейделя збігається швидше за метод Якобі.*

Зауваження: *Збіжний ітераційний процес має важливу властивість* ***самовиправлення****, тобто окрема помилка в обчислення не відіб'ється на кінцевому результаті, адже помилкове наближення можна розглядати як новий початковий вектор.*

Приклад 1. Знайти наближений розв'язок СЛАР

$$\begin{cases} 21x_1 + x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 + 23x_2 + 3x_3 = 52, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$

а) методом простої ітерації (Якобі);

б) методом Зейделя.

►*Розв'язання.* Матриця даної системи, очевидно, задовольняє умовам діагонального переважання

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 1 & 1 \\ 3 & 23 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a_{11}| = 21 > 1 + 1 = |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| = 23 > 3 + 3 = |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| = 4 > |-1| + |-1| = |a_{31}| + |a_{32}| \end{matrix}$$

Таким чином, достатня умова збіжності виконується і для методу простої ітерації (МПІ), і для методу Зейделя (МЗ), причому МЗ збігатиметься до розв'язку швидше, ніж МПІ.

Зведемо дану систему до нормального вигляду (4). Для цього розв'яжемо перше рівняння відносно x_1, друге – відносно x_2, третє – відносно x_3. Отримуємо систему

$$\begin{cases} x_1 = \frac{24}{21} - \frac{1}{21}x_2 - \frac{1}{21}x_3, \\ x_2 = \frac{52}{23} - \frac{3}{23}x_1 - \frac{3}{23}x_3, \\ x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2, \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

нормального вигляду (4)

$$x = d + Cx,$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 24/21 \\ 52/23 \\ 1/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}143 \\ 2{,}261 \\ 0{,}250 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1/21 & -1/21 \\ -3/23 & 0 & -3/23 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -0{,}048 & -0{,}048 \\ -0{,}130 & 0 & -0{,}130 \\ 0{,}250 & 0{,}250 & 0 \end{pmatrix}.$$

У десятковому записі дробів беремо три знаки після коми, адже у запису $\varepsilon = 0{,}01$ маємо два знаки після коми, тому для проміжних обчислень беремо один «запасний» знак після коми.

Знайдемо норми матриці C:

☑ $\|C\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$ *- максимум сум модулів елементів рядків*

Позначимо: $c_i = \sum\limits_{j=1}^{3} |c_{ij}|$, $i = 1, 2, 3$ (сума модулів елементів i-го рядка).

Знаходимо:

$$c_1 = \sum_{j=1}^{3} |c_{1j}| = 0 + \left|-\frac{1}{21}\right| + \left|-\frac{1}{21}\right| = \frac{2}{21},$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^{3} |c_{2j}| = \left|-\frac{3}{23}\right| + 0 + \left|-\frac{3}{23}\right| = \frac{6}{23},$$

$$c_3 = \sum_{j=1}^{3} |c_{3j}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\|C\|_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right| = \max\{c_1, c_2, c_3\} = \max\left\{\frac{2}{21}, \frac{6}{23}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} < 1.$$

☑ $\|C\|_2 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right|$ *- максимум сум модулів елементів стовпців*

Позначимо: $c^j = \sum_{i=1}^{3}\left|c_{ij}\right|,\ j = 1,2,3$ (сума модулів елементів j-го стовпця).

Знаходимо:

$$c^1 = \sum_{i=1}^{3}\left|c_{i1}\right| = 0 + \left|-\frac{3}{23}\right| + \frac{1}{4} = \frac{35}{92},$$

$$c^2 = \sum_{i=1}^{3}\left|c_{i2}\right| = \left|-\frac{1}{21}\right| + 0 + \frac{1}{4} = \frac{25}{84},$$

$$c^3 = \sum_{i=1}^{3}\left|c_{i3}\right| = \left|-\frac{1}{21}\right| + \left|-\frac{3}{23}\right| + 0 = \frac{86}{483}.$$

Тоді

$$\|C\|_2 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right| = \max\{c^1, c^2, c^3\} = \max\left\{\frac{35}{92}, \frac{25}{84}, \frac{86}{483}\right\} = \frac{35}{92} < 1.$$

☑ $\|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|^2}$ *- корінь квадратний з суми квадратів модулів усіх елементів матриці.*

Якщо піднести до квадрату кожен елемент матриці C, то отримуємо матрицю з елементами

$$\begin{pmatrix} 0^2 & (-1/21)^2 & (-1/21)^2 \\ (-3/23)^2 & 0^2 & (-3/23)^2 \\ (1/4)^2 & (1/4)^2 & 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/441 & 1/441 \\ 9/529 & 0 & 9/529 \\ 1/16 & 1/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер для обчислення норми $\|C\|_3$ усі елементи отриманої матриці треба додати та добути корінь квадратний з результату:

$$\|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{441} + \frac{1}{441} + \frac{9}{529} + 0 + \frac{9}{529} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0} = \sqrt{\frac{79}{483}} < 1$$

Як бачимо, кожна з норм матриці C строго менша від одиниці. За теоремою 2.1.2 (достатньою умовою збіжності МПІ) досить, щоб хоч одна з норм була меншою від одиниці. Тому, якщо перша з обчислених норм, наприклад, $\|C\|_1$, строго менша від одиниці, то дві інші норми можна не обчислювати.

Нехай, наприклад, ми зупинились на обчисленні норми $\|C\|_1$. Тоді

$$q = \|C\|_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right| = \max\{c_1, c_2, c_3\} = \max\left\{\frac{2}{21}, \frac{6}{23}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Умова (11) зупинки ітераційного процесу

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

у випадку $q \le \frac{1}{2}$ заміняється на умову (12)

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon .$$

Позначимо через

$$e_i = x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}, \quad i = \overline{1, n}$$

відхилення між i-ми координатами двох сусідніх ітераційних наближень $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., \underline{\underline{x_i^{(k)}}}, ..., x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ та $x^{(k-1)} = (x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., \underline{\underline{x_i^{(k-1)}}}, ..., x_n^{(k-1)})^{\mathrm{T}}$. У нашому випадку

$$q = \|C\|_1 = \frac{1}{2},$$

отже, умовою завершення ітераційного процесу і для МПІ, і для МЗ буде умова (12), яку можна записати так

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| = \max_{1 \le i \le n} |e_i| \le \varepsilon \tag{22}$$

а) Метод простої ітерації. Попередньо ми вже звели систему до нормального вигляду – це система (21)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{24}{21} - \frac{1}{21} x_2 - \frac{1}{21} x_3, \\ x_2 = \frac{52}{23} - \frac{3}{23} x_1 - \frac{3}{23} x_3, \\ x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2, \end{cases}$$

Нульова ітерація. В якості початкового наближення візьмемо нульовий вектор $x^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Оскільки попереднього наближення на цьому кроці немає, то і відхилень e_i $(i = 1,2,3)$ на цьому етапі немає.

Подальші ітерації виконуємо за формулами (6) чи (7) – ті самі формули (6), лише записані у координатній формі. У нашому випадку вони набудуть вигляду

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{24}{21} - \frac{1}{21} x_2^{(k-1)} - \frac{1}{21} x_3^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = \frac{52}{23} - \frac{3}{23} x_1^{(k-1)} - \frac{3}{23} x_3^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, ... \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_1^{(k-1)} + \frac{1}{4} x_2^{(k-1)}, \end{cases} \tag{23}$$

Записавши звичайні дроби у вигляді десяткових (з трьома знаками після коми), систему (23) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1,143 - 0,048 x_2^{(k-1)} - 0,048 x_3^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = 2,261 - 0,130 x_1^{(k-1)} - 0,130 x_3^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, ... \\ x_3^{(k)} = 0,250 + 0,250 x_1^{(k-1)} + 0,250 x_2^{(k-1)}, \end{cases} \tag{24}$$

Перша ітерація. Вектор першого наближення $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^{\mathrm{T}}$ отримуємо, підставивши $k = 1$ і $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ у систему (24). Маємо:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}143 - 0{,}048x_2^{(0)} - 0{,}048x_3^{(0)} = 1{,}143 - 0{,}048 \cdot 0 - 0{,}048 \cdot 0 = 1{,}143, \\ x_2^{(1)} = 2{,}261 - 0{,}130x_1^{(0)} - 0{,}130x_3^{(0)} = 2{,}261 - 0{,}130 \cdot 0 - 0{,}130 \cdot 0 = 2{,}261, \\ x_3^{(1)} = 0{,}250 + 0{,}250x_1^{(0)} + 0{,}250x_2^{(0)} = 0{,}250 + 0{,}250 \cdot 0 + 0{,}250 \cdot 0 = 0{,}250. \end{cases}$$

Отже, $x^{(1)} = (1{,}143; 2{,}261; 0{,}250)^{\mathrm{T}}$. Обчислимо відхилення

$$e_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)},\ i = 1,2,3.$$

$$e_1 = x_1^{(1)} - x_1^{(0)} = 1{,}143 - 0 = 1{,}143,$$

$$e_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(0)} = 2{,}261 - 0 = 2{,}261,$$

$$e_3 = x_3^{(1)} - x_3^{(0)} = 0{,}250 - 0 = 0{,}250.$$

Перевіримо, чи не виконується на цьому кроці умова зупинки ітераційного процесу (22):

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| = \max_{1 \le i \le n} |e_i| = \max\{1{,}143; 2{,}261; 0{,}250\} = 2{,}261 > \varepsilon = 0{,}01.$$

Умова (22), очевидно, не виконується. Продовжуємо далі.

<u>Друга ітерація</u>. Вектор другого наближення $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^{\mathrm{T}}$ отримуємо, підставивши $k = 2$ і компоненти вектора $x^{(1)} = (1{,}143; 2{,}261; 0{,}250)^{\mathrm{T}}$ у систему (24)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}143 - 0{,}048x_2^{(1)} - 0{,}048x_3^{(1)}, \\ x_2^{(2)} = 2{,}261 - 0{,}130x_1^{(1)} - 0{,}130x_3^{(1)}, \\ x_3^{(2)} = 0{,}250 + 0{,}250x_1^{(1)} + 0{,}250x_2^{(1)}. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}143 - 0{,}048 \cdot 2{,}261 - 0{,}048 \cdot 0{,}250 = 1{,}023, \\ x_2^{(2)} = 2{,}261 - 0{,}130 \cdot 1{,}143 - 0{,}130 \cdot 0{,}250 = 2{,}079, \\ x_3^{(2)} = 0{,}250 + 0{,}250 \cdot 1{,}143 + 0{,}250 \cdot 2{,}261 = 1{,}101. \end{cases}$$

Отже, $x^{(2)} = (1{,}023; 2{,}079; 1{,}101)^{\mathrm{T}}$. Обчислимо відхилення

$$e_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)},\ i = 1,2,3.$$

$$e_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = 1{,}023 - 1{,}143 = -0{,}120,$$

$$e_2 = x_2^{(2)} - x_2^{(1)} = 2{,}079 - 2{,}261 = -0{,}182,$$

$$e_3 = x_3^{(2)} - x_3^{(1)} = 1{,}101 - 0{,}250 = 0{,}851.$$

Перевіримо, чи не виконується на цьому кроці умова зупинки ітераційного процесу (22):

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right| = \max_{1 \le i \le n} |e_i| = \max\{|-0{,}120|; |-0{,}182|; 0{,}851\} = 0{,}851 > \varepsilon = 0{,}01.$$

Умова (22), очевидно, не виконується. Продовжуємо далі.

<u>Третя ітерація</u>. Вектор третього наближення $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^{\mathrm{T}}$ отримуємо, підставивши $k = 3$ і компоненти вектора $x^{(2)} = (1{,}023; 2{,}079; 1{,}101)^{\mathrm{T}}$ у систему (24)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1{,}143 - 0{,}048x_2^{(2)} - 0{,}048x_3^{(2)}, \\ x_2^{(3)} = 2{,}261 - 0{,}130x_1^{(2)} - 0{,}130x_3^{(2)}, \\ x_3^{(3)} = 0{,}250 + 0{,}250x_1^{(2)} + 0{,}250x_2^{(2)} \end{cases}$$

і т.д. поки не виконається умова зупинки ітераційного процесу (22).

Для зручності заносимо результати обчислень у таблицю:

Таблиця 1

№ ітерації, k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$e_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}$	$e_1 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}$	$e_3 = x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}$	$\max\|e_i\|$ ($i=1,2,3$)
0	0	0	0	---	---	---	---
1	1,143	2,261	0,250	1,143	2,261	0,250	2,261 > **ε**
2	1,023	2,079	1,101	-0,120	-0,182	0,851	0,851 > **ε**
3	0,991	1,984	1,026	-0,032	-0,095	-0,075	0,095 > **ε**
4	1,000	1,998	0,994	0,008	0,014	-0,032	0,032 > **ε**
5	**1,000**	**2,001**	**0,999**	0,001	0,003	0,006	**0,006 < ε**

Таким чином, умова зупинки ітераційного процесу (22) виконується при $k=5$, тобто задана точність наближення досягається за $k+1=5+1=6$ кроків. При цьому наближене значення розв'язку системи знаходиться за формулою $x^* \approx x^{(k)}$, тобто у нашому прикладі $x_1 \approx x_1^{(5)} = 1,000$, $x_2 \approx x_2^{(5)} = 2,001$, $x_3 \approx x_3^{(5)} = 0,999$.

І, нарешті, заокруглимо отримані значення до двох знаків після коми (при проміжних наближених обчисленнях беремо на один знак після коми більше, ніж знаків після коми в запису числа ε, а наприкінці заокруглюємо до стількох знаків після коми, скільки їх є у запису числа ε):

$$\begin{cases} x_1 \approx 1,000 \approx 1,00, \\ x_2 \approx 2,001 \approx 2,00, \\ x_3 \approx 0,999 \approx 1,00. \end{cases}$$

б) Метод Зейделя. МЗ, як і МПІ, застосовується до систем нормального вигляду

$$x = d + Cx,$$

причому, умова завершення ітераційного процесу у МЗ така сама, як у МПІ. Отже, МЗ для даної системи ми розпочинаємо з її нормального вигляду (21)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{21} - \dfrac{1}{21}x_2 - \dfrac{1}{21}x_3, \\ x_2 = \dfrac{52}{23} - \dfrac{3}{23}x_1 - \dfrac{3}{23}x_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2, \end{cases}$$

який був отриманий раніше і, оскільки $q = \|C\|_1 = \dfrac{1}{2}$, то умова завершення ітераційного процесу у МЗ – це та сама умова (22)

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| = \max_{1\le i\le n} |e_i| \le \varepsilon .$$

<u>Нульова ітерація.</u> В якості початкового наближення візьмемо нульовий вектор $x^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Оскільки попереднього наближення на цьому кроці немає, то і відхилень e_i ($i=1,2,3$) на цьому етапі немає.

Подальші ітерації для знаходження компонент вектора $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ ($k=1,2,\ldots$) відбуваються за формулами (19), які для нашої системи набувають вигляду

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{24}{21} - \dfrac{1}{21} x_2^{(k-1)} - \dfrac{1}{21} x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{52}{23} - \dfrac{3}{23} x_1^{(k)} - \dfrac{3}{23} x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} x_1^{(k)} + \dfrac{1}{4} x_2^{(k)} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

тобто ми компоненту $x_1^{(k)}$ знаходимо, підставляючи у перше рівняння системи (21) замість x_2 та x_3 відповідно другу та третю компоненти $x_2^{(k-1)}$ та $x_3^{(k-1)}$ вектора $x^{(k-1)} = (x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)})$, знайденого при попередній ітерації. Для знаходження компоненти $x_2^{(k)}$ ми у друге рівняння системи (21) замість x_1 підставляємо вже знайдену на цьому ітераційному кроці компоненту $x_1^{(k)}$, а замість x_3 - останню компоненту $x_3^{(k-1)}$ вектора $x^{(k-1)} = (x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)})$. Для знаходження $x_3^{(k)}$ в останнє рівняння системи (21) замість x_2 та x_3 підставляємо $x_1^{(k)}$ та $x_2^{(k)}$, знайдені вже на цьому ітераційному кроці. Обчислення, як і у пункті а) будемо проводити у десяткових дробах. Тому для проміжних обчислень перетворюємо в останній системі звичайні дроби у десяткові, заокруглюючи їх, як і раніше, до трьох знаків після коми. Маємо:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1{,}143 - 0{,}048 x_2^{(k-1)} - 0{,}048 x_3^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = 2{,}261 - 0{,}130 x_1^{(k)} - 0{,}130 x_3^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \\ x_3^{(k)} = 0{,}250 + 0{,}250 x_1^{(k)} + 0{,}250 x_2^{(k)}, \end{cases} \qquad \mathbf{(25)}$$

Перша ітерація. Оскільки $x^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, то у перше рівняння системи (25) підставляємо $k = 1$ і $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. Знаходимо:

$$x_1^{(1)} = 1{,}143 - 0{,}048 x_2^{(0)} - 0{,}048 x_3^{(0)} = 1{,}143 - 0{,}048 \cdot 0 - 0{,}048 \cdot 0 = 1{,}143 .$$

Для знаходження $x_2^{(1)}$ у друге рівняння системи (25) підставляємо $k = 1$ та вже знайдене значення $x_1^{(1)} = 1{,}143$ і попереднє значення $x_3^{(0)} = 0$:

$$x_2^{(1)} = 2{,}261 - 0{,}130 x_1^{(1)} - 0{,}130 x_3^{(0)} = 2{,}261 - 0{,}130 \cdot 1{,}143 - 0{,}130 \cdot 0 = 2{,}112 .$$

Для з находження $x_3^{(1)}$ у третє рівняння системи (25) підставляємо $k = 1$ та вже знайдені значення $x_1^{(1)} = 1{,}143$, $x_2^{(1)} = 2{,}112$:

$$x_3^{(1)} = 0{,}250 + 0{,}250 x_1^{(1)} + 0{,}250 x_2^{(1)} = 0{,}250 + 0{,}250 \cdot 1{,}143 + 0{,}250 \cdot 2{,}112 = 1{,}064 .$$

Отримали вектор $x^{(1)} = (1{,}143; 2{,}112; 1{,}064)^{\mathrm{T}}$. Обчислимо відхилення

$$e_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}, \; i = 1, 2, 3 .$$

$$e_1 = x_1^{(1)} - x_1^{(0)} = 1{,}143 - 0 = 1{,}143 ,$$

$$e_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(0)} = 2{,}112 - 0 = 2{,}112 ,$$

$$e_3 = x_3^{(1)} - x_3^{(0)} = 1{,}064 - 0 = 1{,}064 .$$

Перевіримо, чи не виконується на цьому кроці умова зупинки ітераційного процесу (22):

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| = \max_{1 \le i \le n} \left| e_i \right| = \max \{1{,}143; 2{,}112; 1{,}064\} = 2{,}112 > \varepsilon = 0{,}01 .$$

Умова (22), очевидно, не виконується. Продовжуємо далі.

Друга ітерація. Вектор другого наближення $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^{\mathrm{T}}$ отримуємо з системи (25), де $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1,143 - 0,048x_2^{(1)} - 0,048x_3^{(1)}, \\ x_2^{(2)} = 2,261 - 0,130x_1^{(2)} - 0,130x_3^{(1)}, \\ x_3^{(2)} = 0,250 + 0,250x_1^{(2)} + 0,250x_2^{(2)}. \end{cases}$$

Послідовно знаходимо:

$$x_1^{(2)} = 1,143 - 0,048x_2^{(1)} - 0,048x_3^{(1)} = 1,143 - 0,048 \cdot 2,112 - 0,048 \cdot 1,064 = 0,992,$$

$$x_2^{(2)} = 2,261 - 0,130x_1^{(2)} - 0,130x_3^{(1)} = 2,261 - 0,130 \cdot 0,992 - 0,130 \cdot 1,064 = 1,993,$$

$$x_3^{(2)} = 0,250 + 0,250x_1^{(2)} + 0,250x_2^{(2)} = 0,250 + 0,250 \cdot 0,992 + 0,250 \cdot 1,993 = 0,996.$$

Отже, $x^{(2)} = (0,992;1,993;0,996)^{\mathrm{T}}$. Обчислимо відхилення

$$e_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)},\ i = 1,2,3.$$

$$e_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = 0,992 - 1,143 = -0,151,$$

$$e_2 = x_2^{(2)} - x_2^{(1)} = 1,993 - 2,112 = -0,119,$$

$$e_3 = x_3^{(2)} - x_3^{(1)} = 0,996 - 1,064 = -0,068.$$

Перевіримо, чи не виконується на цьому кроці умова зупинки ітераційного процесу (22):

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right| = \max_{1 \le i \le n} \left| e_i \right| = \max\{|-0,151|;|-0,119|;|-0,068|\} = 0,151 > \varepsilon = 0,01.$$

Умова (22), очевидно, не виконується. Продовжуємо далі поки не виконається умова зупинки ітераційного процесу (22).

Для зручності заносимо результати обчислень у таблицю:

Таблиця 2

№ ітерації, k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$e_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}$	$e_1 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}$	$e_3 = x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}$	$\max \lvert e_i \rvert$ $(i = 1,2,3)$
0	0	0	0	---	---	---	---
1	1,143	2,112	1,064	1,143	2,112	1,064	2,112 > **ε**
2	0,992	1,993	0,996	-0,151	-0,119	-0,068	0,151 > **ε**
3	**1,001**	**2,000**	**1,000**	0,009	0,008	0,004	**0,009 < ε**

Таким чином, умова зупинки ітераційного процесу (22) у МЗ виконується при $k = 3$, тобто задана точність наближення досягається за $k + 1 = 3 + 1 = 4$ кроки. При цьому наближене значення розв'язку системи знаходиться за формулою $x^* \approx x^{(k)}$, тобто у нашому прикладі $x_1 \approx x_1^{(3)} = 1,001$, $x_2 \approx x_2^{(3)} = 2,000$, $x_3 \approx x_3^{(3)} = 1,000$.

І, нарешті, заокруглимо отримані значення до двох знаків після коми (при проміжних наближених обчисленнях беремо на один знак після коми більше, ніж знаків після коми в запису числа ε, а наприкінці заокруглюємо до стількох знаків після коми, скільки їх є у запису числа ε):

$$\begin{cases} x_1 \approx 1,001 \approx 1,00, \\ x_2 \approx 2,000 \approx 2,00, \\ x_3 \approx 1,000 \approx 1,00. \end{cases}$$

Зробимо порівняльну таблицю:

№	*Метод*	x_1	x_2	x_3	*Кількість ітерацій*
1	Точні методи (ЛР№2, ч.1)	*1*	*2*	*1*	---
2	МПІ	*1.00*	*2.00*	*1.00*	*6*
3	МЗ	*1.00*	*2.00*	*1.00*	*4*

■

3. *Зведення СЛАР до ітераційного вигляду.*

3.1. *Утворення лінійних комбінацій рівнянь системи.*

Достатня умова збіжності МПІ накладає досить жорсткі умови на коефіцієнти вихідної лінійної системи (1)

$$Ax = b,$$

а саме, умови діагонального переважання. На практиці рідко зустрічаються системи, в матрицях яких це діагональне переважання вже наявне одразу. Тому постає задача звести вихідну СЛАР до вигляду, де матриця системи матиме діагональне переважання. Ця задача розв'язується за умови, що матриця A вихідної системи є невиродженою (тобто $\det(A) \neq 0$).

Спосіб ***утворення лінійних комбінацій*** полягає у наступному:

- ☑ *проглядаються усі рівняння системи і виділяються рівняння з* ***переважаючими*** *коефіцієнтами, тобто з коефіцієнтами, модулі яких більше суми модулів інших коефіцієнтів рівняння;*
- ☑ *кожне виділене рівняння виписують у такий рядок нової системи, щоб переважаючий коефіцієнт виявився діагональним (якщо таких рівнянь в системі немає, то одразу переходимо до наступного кроку);*
- ☑ *з виділених на першому кроці рівнянь та решти невикористаних рівнянь вихідної системи складають лінійно незалежні лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб рівняння у новій системі були розташовані так, щоб переважаючі коефіцієнти були діагональними і всі вільні рядки виявилися заповненими; при цьому потрібно подбати, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, яка утворює рівняння нової системи.*

Якщо вихідну СЛАР зведено до вигляду з матрицею, що задовольняє умову діагонального переважання, то така система зводиться до ітераційного вигляду (4)

$$x = Cx + d$$

шляхом розв'язання кожного рівняння системи відносно змінної, що має переважаючий коефіцієнт (перше рівняння розв'язується відносно x_1, друге – відносно x_2,…, останнє рівняння системи – відносно x_n).

Пояснимо наведений алгоритм на прикладі.

Приклад 2. *Зведи СЛАР*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

до нормального (ітераційного) вигляду (4) методом утворення лінійних комбінацій рівнянь системи.

►*Розв'язання.* Позначимо рівняння системи римськими цифрами

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1, & \text{(I)} \\ 2x_2 + x_3 = 5, & \text{(II)} \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 & \text{(III)} \end{cases}$$

для зручності запису лінійних комбінацій.

Проглядаємо рівняння системи і визначаємо, чи є рівняння з переважаючими коефіцієнтами, тобто з коефіцієнтами, модулі яких більше суми модулів інших коефіцієнтів рівняння. Очевидно, що такими рівняннями у даній системі є *II* та *III*, адже

$$2 > 0 + 1 \ \text{ і } \ 5 > |-1| + 3,$$

причому в обох цих рівняннях переважаючим є коефіцієнт біля змінної x_2. Це означає, що у новій системі на другому місці має або залишитись те рівняння, що було (*II*), або на місце рівняння *II* маємо поставити рівняння *III*. Зупинимось на другому варіанті і поставимо рівняння *III* на друге місце нової системи

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & (A) \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12, & (B) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (C) \end{cases}$$

Далі маємо заповнити позиції *(A)* та *(C)* нової системи, утворюючи лінійні комбінації рівнянь вихідної системи так, щоб переважав коефіцієнт біля змінної, номер якої співпадає з номером рівняння системи. При цьому ми обов'язково маємо використати хоча б в одній лінійній комбінації (а можна й у всіх) ще не використані рівняння *I* та *II* вихідної системи.

Утворимо комбінацію *III*-6*I*, тобто від третього рівняння вихідної системи віднімемо перше, помножене на 6:

$$\begin{array}{r} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\ - \quad 6(-x_1 + x_2) = 6 \cdot 1 \\ \hline 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{array}$$

Очевидно, що в отриманому рівнянні $5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$ переважаючим є коефіцієнт біля x_1 , оскільки

$$5 > |-1| + 3,$$

тому у новій системі його слід поставити на позицію *(A)*. Таким чином, приходимо до системи

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, & (A) \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12, & (B), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (C) \end{cases}$$

де перше та друге рівняння вже є такими, що забезпечать виконання умови діагонального переважання матриці системи. Залишається підібрати лінійну комбінацію, яку можна поставити на позицію *(C)*.

Розглянемо комбінацію -4*I*-11*II*+5*III*, тобто перше рівняння вихідної системи множимо на -4, друге – на -11, третє на 5 і додаємо усі отримані рівняння:

$$\begin{array}{r} -4(-x_1 + x_2) = -4 \cdot 1 \\ + \quad -11(2x_2 + x_3) = -11 \cdot 5 \\ 5(-x_1 + 5x_2 + 3x_3) = 5 \cdot 12 \\ \hline -x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{array}$$

В отриманому рівнянні $-x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$, очевидно, переважаючим є коефіцієнт біля змінної x_3, оскільки

$$4 > |-1| + |-1|,$$

тому це рівняння у перетвореній системі має знаходитись на позиції *(C)*.

Таким чином, утворенням лінійних комбінацій системи прийшли до еквівалентної системи

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, & (A) \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12, & (B) \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 & (C) \end{cases}$$

з матрицею

$$
\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{r}
|a_{11}|=5>|-1|+3=|a_{12}|+|a_{13}| \\
|a_{22}|=5>|-1|+3=|a_{21}|+|a_{23}| \\
|a_{33}|=4>|-1|+|-1|=|a_{31}|+|a_{32}|
\end{array}
$$

елементи якої, очевидно, задовольняють умовам діагонального переважання.

Далі розв'язуємо перше рівняння перетвореної системи відносно x_1, друге – відносно x_2, третє – відносно x_3 і отримуємо систему у нормальному (ітераційному) вигляді (4):

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{6}{5}+\dfrac{1}{5}x_2-\dfrac{3}{5}x_3, \\[2mm]
x_2=\dfrac{12}{5}+\dfrac{1}{5}x_1-\dfrac{3}{5}x_3, \\[2mm]
x_3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}x_1+\dfrac{1}{4}x_2,
\end{cases}
$$

де

$$
x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix} 6/5 \\ 12/5 \\ 1/4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 0 & -3/5 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacksquare
$$

3.2. *Множення на матрицю* $(A-\varepsilon)^{-1}$.

Якщо матриця A вихідної системи є невиродженою (тобто $\det(A)\neq 0$), але не задовольняє умову діагонального переважання, достатню для збіжності МПІ чи метода Зейделя, то досягнути виконання цієї умови можна, взявши деяке маленьке додатне число ε $(0<\varepsilon<1)$ і помноживши вихідну систему зліва на матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$, а значить, перейшовши від вихідної системи

$$
Ax=b
$$

до еквівалентної їй системи

$$
\underbrace{(A-\varepsilon)^{-1}A}_{\alpha}\,x=\underbrace{(A-\varepsilon)^{-1}b}_{\beta} \qquad \textbf{(26)}
$$

тобто

$$
\alpha x=\beta, \qquad \textbf{(27)}
$$

де матриця $\alpha=(A-\varepsilon)^{-1}A$ вже задовольняє умову діагонального переважання.

Після вказаної процедури у системі (27) перше рівняння розв'язується відносно x_1, друге – відносно $x_2,\ldots$, останнє рівняння системи – відносно x_n і отримується система вигляду (4)

$$
x=Cx+d,
$$

придатному для організації ітераційного процесу методу простої ітерації чи Зейделя.

Приклад 3. *Звести СЛАР*

$$
\begin{cases}
-x_1+x_2=1, \\
2x_2+x_3=5, \\
-x_1+5x_2+3x_3=12
\end{cases}
$$

до нормального (ітераційного) вигляду (4) методом множення на матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$.

►*Розв'язання.* Матриця вихідної системи, очевидно, не задовольняє умовам діагонального переважання, адже

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}|a_{11}|=1=1+0=|a_{12}|+|a_{13}|\\ |a_{22}|=2>0+1=|a_{21}|+|a_{23}|\\ |a_{33}|=3<|-1|+3=|a_{31}|+|a_{32}|\end{matrix}$$

Матричний запис системи має вигляд

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 12\end{pmatrix} \qquad \textbf{(28)}$$

Матриця A є невиродженою, оскільки

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Візьмемо $\varepsilon=0{,}1$ і побудуємо матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$. Матриця $A-\varepsilon$ має вигляд

$$A-\varepsilon=\begin{pmatrix}-1{,}1 & 0{,}9 & -0{,}1\\ -0{,}1 & 1{,}9 & 0{,}9\\ -1{,}1 & 4{,}9 & 2{,}9\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$(A-\varepsilon)^{-1}=\begin{pmatrix}-11/20 & 31/20 & -1/2\\ 7/20 & 33/20 & -1/2\\ -4/5 & -11/5 & 1\end{pmatrix}$$

Помножимо матричний вигляд (28) запису вихідної системи на знайдену матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$ зліва:

$$\begin{pmatrix}-11/20 & 31/20 & -1/2\\ 7/20 & 33/20 & -1/2\\ -4/5 & -11/5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/20 & 31/20 & -1/2\\ 7/20 & 33/20 & -1/2\\ -4/5 & -11/5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 12\end{pmatrix}.$$

Виконуючи множення матриць, отримуємо матричну рівність

$$\begin{pmatrix}21x_1/20+x_2/20+x_3/20\\ 3x_1/20+23x_2/20+3x_3/20\\ -x_1/5-x_2/5+4x_3/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/5\\ 13/5\\ 1/5\end{pmatrix},$$

що еквівалентна системі з матрицею, котра задовольняє умови діагонального переважання

$$\begin{cases}\dfrac{\mathbf{21}}{\mathbf{20}}x_1+\dfrac{1}{20}x_2+\dfrac{1}{20}x_3=\dfrac{6}{5}, & |a_{11}|=\dfrac{21}{20}>\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{20}=|a_{12}|+|a_{13}|\\ \dfrac{3}{20}x_1+\dfrac{\mathbf{23}}{\mathbf{20}}x_2+\dfrac{3}{20}x_3=\dfrac{13}{5}, & |a_{22}|=\dfrac{23}{20}>\dfrac{3}{20}+\dfrac{3}{20}=|a_{21}|+|a_{23}|\\ -\dfrac{1}{5}x_1-\dfrac{1}{5}x_2+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}x_3=\dfrac{1}{5} & |a_{33}|=\dfrac{4}{5}>\left|-\dfrac{1}{5}\right|+\left|-\dfrac{1}{5}\right|=|a_{31}|+|a_{32}|\end{cases}$$

Помноживши перші два рівняння системи на 20, а третє – на 5, отримаємо еквівалентну систему з цілими коефіцієнтами (діагональне переважання, очевидно, при цьому збережеться):

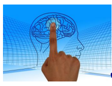
$$\begin{cases} \mathbf{21}x_1 + x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 + \mathbf{23}x_2 + 3x_3 = 52, \\ -x_1 - x_2 + \mathbf{4}x_3 = 1 \end{cases}$$

Далі розв'язуємо перше рівняння перетвореної системи відносно x_1, друге – відносно x_2, третє – відносно x_3 і отримуємо систему у нормальному (ітераційному) вигляді (4):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{21} - \dfrac{1}{21}x_2 - \dfrac{1}{21}x_3, \\ x_2 = \dfrac{52}{23} - \dfrac{3}{23}x_1 - \dfrac{3}{23}x_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2, \end{cases}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} 24/21 \\ 52/23 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & -1/21 & -1/21 \\ -3/23 & 0 & -3/23 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$



Задачі для самостійного розв'язання

Попередньо звівши задану СЛАР до нормального вигляду, знайти наближене значення її розв'язку наближеними методами з точністю до $\varepsilon = 0,001$:

☑ ***методом простої ітерації (Якобі)***;

☑ ***методом Зейделя***

1. *Байрамов Алі Мірзабей-огли*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 19; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

2. *Беленчук Олексій Ігорович*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = 8; \\ 3x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

3. *Березний Ігор Васильович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. *Бужак Андрій Васильович*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

5. *Бурле Павло Марчелович*

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 16; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

6. *Волощук Назарій Васильович*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

7. *Георгіян Євген Геннадійович*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

8. *Григорчук В`ячеслав Валерійович*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

9. *Денис Денис Русланович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

10. *Дручук Роман Олександрович*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =22; \\ 3x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +x_4 & =26; \\ 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & +3x_4 & =22; \\ 7x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5x_4 & =26 \end{cases}$$

11. *Дубець Василь Русланович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =10; \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =8; \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & =8; \\ 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & =10 \end{cases}$$

12. *Дуплава Олександр Ігорович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =5; \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -3x_4 & =-4; \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =9; \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & =4 \end{cases}$$

13. *Жупник Евеліна Михайлівна*

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0; \\ 2x_1 & -x_2 & & -3x_4 & =-7; \\ 3x_1 & & -x_3 & +x_4 & =8; \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +5x_4 & =21 \end{cases}$$

14. *Івасюта Павло Сергійович*

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & & -x_4 & =4; \\ x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & =-1; \\ & 3x_2 & -2x_3 & +4x_4 & =12; \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & =-2 \end{cases}$$

15. *Качуровський Станіслав Тарасович*

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =10; \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & =11; \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & =13 \end{cases}$$

16. *Клим Дмитро Іванович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & =7; \\ 3x_1 & -5x_2 & +3x_3 & =-1; \\ 2x_1 & +7x_2 & -x_3 & =17 \end{cases}$$

17. *Козуб Микола Миколайович*

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =2; \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =6; \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & =8 \end{cases}$$

18. *Копадзе Олександра Сергіївна*

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & =6; \\ 2x_1 & -x_2 & -6x_3 & =-18; \\ 3x_1 & -2x_2 & & =-1 \end{cases}$$

19. *Костюк Віталій Іванович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & =6; \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =9; \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & =3; \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & =4 \end{cases}$$

20. *Кушнірик Яна Олександрівна*

$$\begin{cases} 5x_1 & +3x_2 & -7x_3 & +3x_4 & =1; \\ x_1 & -2x_2 & & -3x_4 & =-2; \\ & x_2 & -3x_3 & +4x_4 & =1; \\ 4x_1 & +3x_2 & -5x_3 & & =-1 \end{cases}$$

21. *Луник Марія Михайлівна*

$$\begin{cases} 2x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =6; \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =13; \\ 3x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +x_4 & =11; \\ 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & +3x_4 & =9 \end{cases}$$

22. *Максименко Михайло Сергійович*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

23. *Мінтянський Андрій Петрович*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -7; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

24. *Паращук Олексій Іванович*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

25. *Сарай Богдан Васильович*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

26. *Фецюк Денис Мирославович*

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = 7; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -7 \end{cases}$$

27. *Хмелєвська Анастасія Олександрівна*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 11; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 10 \end{cases}$$

28. *Чайковський Станіслав Валерійович*

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5; \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & =5; \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & =13 \end{cases}$$

Література:

1. Практикум з чисельних методів : Навч. посібник / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 432 с.