Лабораторна робота №4

Тема: Чисельне диференціювання та інтегрування функцій.

Частина 2: Чисельне інтегрування функцій.

Мета: *ознайомлення студентів з методами чисельного інтегрування функцій, оцінкою похибки при чисельному інтегруванні; набуття студентами практичних навичок обчислення визначених інтегралів за формулами прямокутників, трапецій, Сіпмсона, апріорної та апостеріорної оцінки похибки методів інтегрування (у тому числі - з використанням комп'ютера).*

Завдання:

Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язання типових прикладів [**1**, сс. 140-145], [**2**, сс. 129-139].

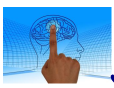
1. Користуючись правилом Рунге, обчислити заданий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$:

a) за формулою прямокутників з точністю до 10^{-2};
b) за формулою трапецій з точністю до 10^{-3};
c) за формулою Сімпсона з точністю до 10^{-4}.

2. Оцінити апріорні похибки обчислень для кожного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.

Література:

1. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972. – 208 с.
2. Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие для техникумов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова – М. : Высш. школа, 1990. – 208 с



Задачі для самостійного розв'язання

1. *Користуючись правилом Рунге, обчислити заданий інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *:*

a) *за формулою прямокутників з точністю до* 10^{-2}*;*
b) *за формулою трапецій з точністю до* 10^{-3}*;*
c) *за формулою Сімпсона з точністю до* 10^{-4}*.*

2. *Оцінити апріорні похибки обчислень кожного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.*

1. Байрамов Алі Мірзабей-огли	$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
2. Беленчук Олексій Ігорович	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-1} dx$
3. Березний Ігор Васильович	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$
4. Бужак Андрій Васильович	$\int_1^2 (1+x)^2 \ln^2 x dx$
5. Бурле Павло Марчелович	$\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$
6. Волощук Назарій Васильович	$\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x} dx$
7. Георгіян Євген Геннадійович	$\int_2^4 (1+x)\ln x dx$
8. Григорчук В`ячеслав Валерійович	$\int_0^2 \left(x^2+x-\sqrt{x}\right) dx$
9. Денис Денис Русланович	$\int_1^{1,5} \frac{x^2}{1+x} dx$
10. Дручук Роман Олександрович	$\int_3^4 \frac{x}{\ln^2 x} dx$
11. Дубець Василь Русланович	$\int_1^2 (1+x)^2 \ln x dx$
12. Дуплава Олександр Ігорович	$\int_2^{2,5} \frac{x+2}{x^2-x+1} dx$
13. Жупник Евеліна Михайлівна	$\int_1^{2,5} \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$
14. Івасюта Павло Сергійович	$\int_2^3 x^2 \ln x dx$
15. Качуровський Станіслав Тарасович	$\int_2^4 \frac{x^3+x}{(x+2)^2} dx$
16. Клим Дмитро Іванович	$\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$
17 Козуб Микола Миколайович	$\int_0^{1,5} \frac{x}{(x+1)^3} dx$
18. Копадзе Олександра Сергіївна	$\int_2^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2} dx$
19. Костюк Віталій Іванович	$\int_1^3 \frac{e^{2x}}{1+x} dx$
20. Кушнірик Яна Олександрівна	$\int_3^4 \frac{e^x}{x^2} dx$

21. *Луник Марія Михайлівна*	$\int_{2}^{2,5} \sqrt{x} \ln^2 x dx$
22. *Максименко Михайло Сергійович*	$\int_{2}^{2,5} \frac{x^3}{(1+x)^2} dx$
23. *Мінтянський Андрій Петрович*	$\int_{0,5}^{2} \frac{x}{x+1} dx$
24. *Паращук Олексій Іванович*	$\int_{1,5}^{2,5} \sqrt{1+x} \ln^2 x dx$
25. *Сарай Богдан Васильович*	$\int_{1}^{2,5} \frac{x}{x^2+1} dx$
26. *Фецюк Денис Мирославович*	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-1} dx$
27. *Хмелєвська Анастасія Олександрівна*	$\int_{1}^{1,5} \frac{e^x}{1+x^2} dx$
28. *Чайковський Станіслав Валерійович*	$\int_{0}^{1} \frac{x+1}{x+2} dx$

Теоретичні відомості та розв'язання типових прикладів

1. Постановка задачі чисельного інтегрування
2. Метод прямокутників
3. Метод трапецій
4. Метод Сімпсона
5. Правило Рунге практичної оцінки похибки

1. Постановка задачі чисельного інтегрування

Далеко не всі інтеграли можна обчислити за відомою з математичного аналізу формулі Ньютона-Лейбніца:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(1)}$$

де $F(x)$ - первісна функції $f(x)$. Наприклад, в елементарних функціях не виражається інтеграл $\int_a^b e^{-x^2} dx$.

Але навіть у тих випадках, коли вдається виразити первісну $F(x)$ функції $f(x)$ через елементарні функції, вона може виявитися дуже складною для обчислень. Крім того, точне значення інтеграла за формулою (1) не можна отримати, якщо функція $f(x)$ задається таблицею. У цих випадках звертаються до методів чисельного інтегрування. До них, зокрема, відносяться метод прямокутників, метод трапецій і метод Сімпсона.

Суть чисельного інтегрування полягає в тому, що підінтегральну функцію $f(x)$ замінюють на іншу, наближену функцію так, щоб, по-перше, вона була близька до $f(x)$ і, по-друге, інтеграл від неї легко обчислювався. Наприклад, можна замінити підінтегральну функцію інтерполяційним многочленом. Також широко використовують т.зв. ***квадратурні формули***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad \textbf{(2)}$$

де x_i $(i=\overline{0,n})$ - деякі точки на відрізку $[a;b]$, які називають ***вузлами*** квадратурної формули;

A_i - числові коефіцієнти, які називають ***вагами*** квадратурної формули;

n - натуральне число.

2. Метод прямокутників

Метод прямокутників ґрунтується на використанні геометричної інтерпретації інтеграла. Будемо інтерпретувати інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ як площу криволінійної трапеції, обмеженою графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$ $(b > a)$ (рис. 1)

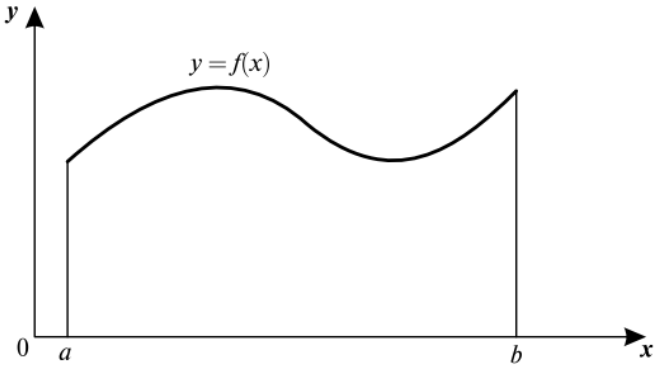


Рис.1. *Графічна ілюстрація геометричної інтерпретації інтеграла*

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин довжини h, тобто $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

і

$$x_{i+1} = x_i + h\ .$$

Далі через точки розбиття проведемо прямі, паралельні осі Oy. При цьому отримаємо розбиття початкової криволінійної трапеції на n частин (рис. 2).

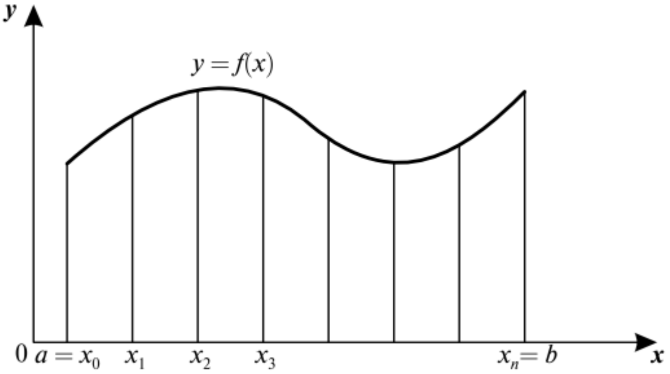


Рис.2. *Графічна ілюстрація розбиття криволінійної трапеції*

Замінимо наближено площу криволінійної трапеції площею східчастої фігури, зображеної на рис. 3.

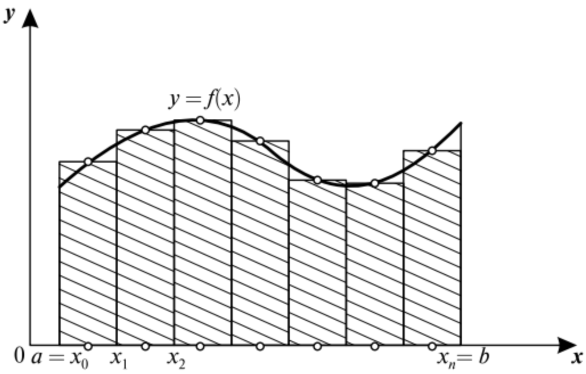


Рис.3. *Графічна ілюстрація методу прямокутників*

Ця фігура складається з n прямокутників. Основу i-го прямокутника утворює відрізок $[x_i; x_{i+1}]$ довжини h, а висота i-го прямокутника дорівнює значенню функції в середині відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, тобто $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ (рис. 4).

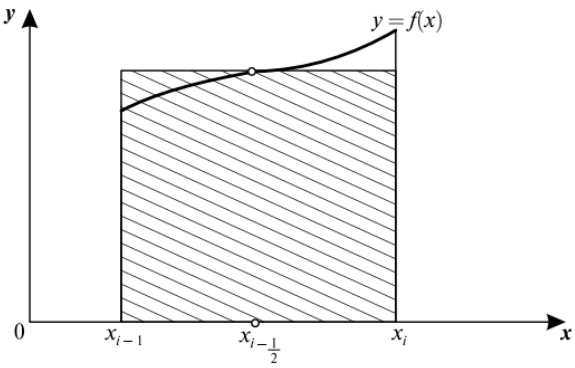


Рис.4. *Графічна ілюстрація одного сегмента методу середніх прямокутників*

Таким чином, площа i-го прямокутника дорівнює

$$S_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot h .$$

А значить, площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ усіх утворених прямокутників

$$S_{кр.т.} \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Тоді отримаємо квадратурну формулу середніх прямокутників:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_{пр} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Формулу (3) називають також формулою середніх прямокутників. Іноді використовують формули:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_{пр}^{л} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right), \qquad \textbf{(4)}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_{пр}^{п} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \qquad \textbf{(5)}$$

які називають відповідно ***квадратурними формулами лівих*** і ***правих прямокутників***. Очевидно, (4) і (5) – квадратурні формули вигляду (2) з $A_i = h = \frac{b-a}{n}$ для кожного $i = \overline{0, n-1}$ або $i = \overline{1, n}$.

Геометричні ілюстрації цих формул наведені на рис. 5 і 6.

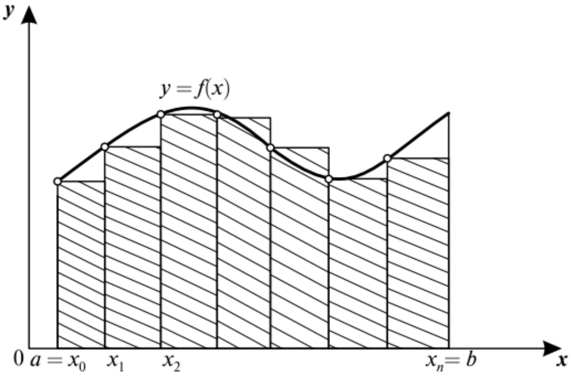


Рис.5. *Графічна ілюстрація методу лівих прямокутників*

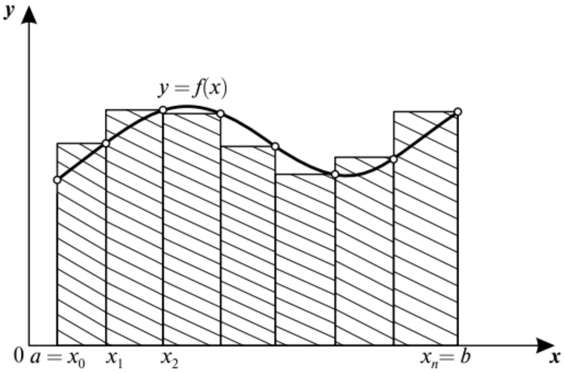


Рис.6. *Графічна ілюстрація методу правих прямокутників*

Для апріорної оцінки похибки формули прямокутників користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 1 (***апріорна оцінка похибки методу прямокутників***). *Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$. Тоді для формули прямокутників справедлива наступна оцінка похибки:*

$$\Delta = | I \text{ - } I_{np} | \le \frac{M_2 (b-a)}{24} h^2, \tag{6}$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} | f''(x) |$.

3. Метод трапецій

Метод трапецій так само, як і метод прямокутників, спирається на геометричний зміст інтеграла. Замінимо графік функції $y = f(x)$ (рис. 1) ламаною лінією (рис. 7), отриманою в такий спосіб: з точок $a = x_0$, $x_1, \ldots,$ $x_n = b$ розбиття відрізку $[a;b]$ проведемо прямі, паралельні осі ординат до їх перетину з кривою $y = f(x)$; утворені точки перетину прямих з графіком з'єднаємо прямолінійними відрізками.

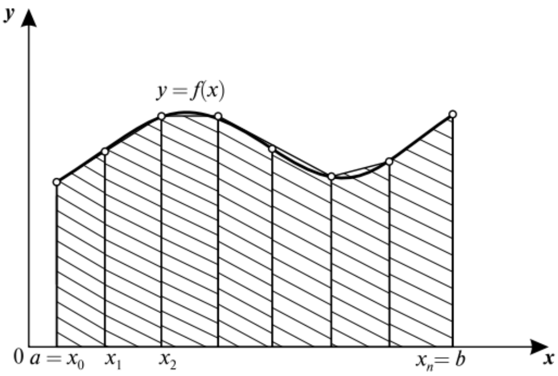


Рис.7. *Графічна ілюстрація методу трапецій*

Площу криволінійної трапеції наближено можна вважати рівній площі фігури, складеної з утворених n трапецій. Оскільки площа трапеції, побудованої на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ довжини $h = \dfrac{b-a}{n}$, дорівнює добутку півсуми основ $f(x_i)$ та $f(x_{i+1})$ на висоту h

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h,$$

то, користуючись цією формулою для $i = \overline{0, n-1}$, отримаємо

$$S_{кр.т.} \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

тобто формулу

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_{тр} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \qquad \textbf{(7)}$$

яку називають ***квадратурною формулою трапецій.*** Формула (7), очевидно, має вигляд (2) з $A_0 = A_n = \dfrac{b-a}{2n}$ та $A_i = \dfrac{b-a}{n}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Для оцінки похибки формули трапецій користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 2 (*апріорна оцінка похибки методу трапецій*). *Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$. Тоді для формули трапецій справедлива наступна оцінка похибки:*

$$\Delta = | I - I_{тр} | \le \frac{M_2 (b-a)}{12} h^2, \qquad \textbf{(8)}$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} | f''(x) |$.

4. Метод Сімпсона (парабол)

Ідея методу Сімпсона (парабол) полягає у заміні графіка функції $y = f(x)$ на кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 2, \ldots, n-1$) розбиття вихідного відрізка $[a;b]$ параболою, проведеною через точки $(x_i; f(x_i))$, $(x_i'; f(x_i'))$, $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$, де x_i' - середина відрізка $[x_i; x_{i+1}]$. Ця парабола є інтерполяційним многочлен другого степеня $L_2(x)$ з вузлами x_i, x_i', x_{i+1}. Неважко переконатися, що рівняння цієї параболи має вигляд:

$$y = L_2(x) = f(x_i') + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i') + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i') + f(x_i)}{\frac{h^2}{2}}(x - x_i')^2,$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Проинтегрувавши отриману функцію $L_2(x)$ на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$, отримаємо:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = \frac{h}{6}\big(f(x_i) + 4f(x_i') + f(x_{i+1}) \big)$$

Просумувавши вирази I_i по $i = \overline{0, n-1}$, отримаємо ***квадратурну формулу Сімпсона*** (або ***формулу парабол***):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_C = \frac{h}{6}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i') + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \qquad \textbf{(9)}$$

Для оцінки похибки формули Сімпсона користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 3 (*апріорна оцінка похибки методу Сімпсона*). *Нехай функція* $f(x)$ *має на відрізку* $[a;b]$ *неперервну похідну четвертого порядку* $f^{(4)}(x)$. *Тоді для формули Сімпсона* (9) *справедлива наступна оцінка похибки:*

$$\Delta = | I - I_C | \le \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \frac{M_4}{90n^4} = \frac{M_4 (b-a)}{2880} h^4, \qquad \textbf{(10)}$$

де $M_4 = \max\limits_{x \in [a;b]} | f^{(4)}(x) |$.

Зауважимо, що зазвичай для зручного застосування формули Сімпсона відрізок інтегрування $[a;b]$ ділять на парну кількість елементарних відрізків, тобто $n = 2m$. При цьому параболи можна проводити через вузли з парними індексами, а в якості точки x_i' брати «пропущений» вузол з відповідним непарним індексом. Тоді замість елементарного відрізка $[x_i; x_{i+1}]$ довжини h ми розглядатимемо відрізок $[x_{2i}; x_{2i+2}]$ ($i = \overline{0, m-1}$) довжини $2h$. Тоді формула Сімпсона набуде вигляду:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_C = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right) \qquad \textbf{(11)}$$

а замість оцінки (10) буде справедлива наступна оцінка похибки:

$$\Delta = | I - I_C | \le \frac{M_4 (b-a)}{180} h^4 \qquad \textbf{(12)}$$

5. Правило Рунге практичної оцінки похибки

Оцінки похибки за формулами (6), (8), (10) і (12) є апріорними. Вони залежать від довжини елементарного відрізка h, і при досить малому h має справджується наближена рівність

$$I - I^h \approx Ch^k, \qquad \textbf{(13)}$$

де I^h - наближене значення інтеграла, обчислене за однією з формул (3)-(5), (7), (9) чи (11), $C \ne 0$ і $k > 0$ - величини, які не залежать від h.

Якщо зменшити крок h у два рази, то відповідно до (13) отримаємо:

$$I - I^{\frac{h}{2}} = C \left(\frac{h}{2} \right)^k \approx \frac{1}{2^k} (I - I^h) \qquad \textbf{(14)}$$

Безпосереднє використання оцінок похибки , (6), (8), (10) і (12) незручно, оскільки при цьому потрібно обчислення похідних функції $y = f(x)$. У обчислювальній практиці використовують інші оцінки.

Віднімемо від (13) вираз (14):

$$I^{\frac{h}{2}} - I^h \approx \frac{1}{2^k} Ch^k (2^k - 1)$$

З огляду на (14), отримаємо наступну наближену рівність

$$I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{I^{\frac{h}{2}} - I^h}{2^k - 1} \qquad \textbf{(15)}$$

Вираз (15) дає ***апостеріорну*** оцінку похибки. Для обчислення цієї оцінки користуються ***правилом Рунге*** дроблення кроку. Правило Рунге - це емпіричний спосіб оцінкі похибки, заснований на порівнянні результатів обчислень, проведених з різними кроками h.

При використанні формул прямокутників і трапецій $k = 2$, для формули Сімпсона $k = 4$. Тому для цих формул наближена рівність (15) набирає вигляду:

$$I - I_{np} \approx \frac{1}{3} \left(I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h \right), \qquad \textbf{(16)}$$

$$I - I_{тр} \approx \frac{1}{3}\left(I_{тр}^{\frac{h}{2}} - I_{тр}^{h} \right), \qquad \textbf{(17)}$$

$$I - I_{C} \approx \frac{1}{15}\left(I_{C}^{\frac{h}{2}} - I_{C}^{h} \right) \qquad \textbf{(18)}$$

За допомогою правила Рунге можна наближено обчислити інтеграл із заданою точністю. Потрібно почати з деякого значення кроку h і послідовно зменшувати це значення в два рази, кожен раз обчислюючи наближене значення I^{h_i}. Процедура припиняється, коли результати двох наступних обчислень будуть за абсолютною величиною відрізнятися менше, ніж на $(2^k - 1)\varepsilon$, тобто коли

$$\left| I_{пр}^{\frac{h}{2}} - I_{пр}^{h} \right| \le 3\varepsilon\ ,$$

$$\left| I_{тр}^{\frac{h}{2}} - I_{тр}^{h} \right| \le 3\varepsilon\ ,$$

$$\left| I_{C}^{\frac{h}{2}} - I_{C}^{h} \right| \le 15\varepsilon\ ,$$

де ε - задана точність.