Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Інститут фізико-технічних та комп'ютерних наук

Відділ комп'ютерних технологій

Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

ЗВІТ

про виконання лабораторної роботи №3

з дисципліни «Числові методи».

Тема: Інтерполювання функцій

Виконав студент Бужак А.В.

Курс III

Група 341

Викладач Філіпчук О.І.

Чернівці – 2018

Частина 1: *Побудова многочлена Лаґранжа.*

Мета: ознайомлення студентів з основними поняттями теорії інтерполювання; набуття студентами практичних навичок побудови полінома Лаґранжа, оцінки похибки наближення функції інтерполяційним многочленом (у тому числі - з використанням комп'ютера).

Варіант №4

$f(7) = ?$

x_i	6,3	6,5	6,9	7,1
$y_i = f(x_i)$	2	-2	-3	0

Інтерполяційний поліном Лаґранжа зручно зуписувати у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Представимо універсальний розв'зок *m-файлом* системи *MatLab*:

LagranzhPolinom.m

```
function result = LagranzhPolinom(xVec, yVec, x)

if (length(xVec) ~= length(yVec))
    disp('Error: Nesumisni rozmiry vektoriv.')
else
    n = length(xVec);
    sum = 0;

    for k = 1:n

        top = 1;
        if (k >= 2)
            for i = 1:k-1
                top = top * (x - xVec(i));
            end
        end
        if (k < n)
            for i = k+1:n
                top = top * (x - xVec(i));
            end
        end

        bottom = 1;
        if (k >= 2)
            for i = 1:k-1
                bottom = bottom * (xVec(k) - xVec(i));
            end
        end
        if (k < n)
            for i = k+1:n
                bottom = bottom * (xVec(k) - xVec(i));
            end
        end

        sum = sum + yVec(k) * top / bottom;

    end

    result = sum;
end
```

де $xVec \equiv$ вектор значень x_i; $yVec \equiv y_i = f(x_i)$; x – точка, в якій ми хочимо обчислити значення полінома Лаґранжа (це, в свою чергу, буде *result* функції).

Використаємо розроблений *m-файл*, щоб за вхідними даними отримати значення функції у вказаній точці:

```
Command Window
>> xVec = [6.3 6.5 6.9 7.1];
>> yVec = [2 -2 -3 0];
>> x = 7;
>> result = LagranzhPolinom(xVec, yVec, x)

result =

   -1.7917

>>
```

<u>Частина 2:</u> Інтерполяційна формула Ньютона. Інтерполювання сплайнами.

<u>Мета:</u> ознайомлення студентів з алгоритмом побудови першого та другого многочленів Ньютона, оцінкою похибки інтерполювання, алгоритмами сплайн-інтерполювання; набуття студентами практичних навичок побудови многочленів Ньютона, оцінки похибки наближення функції інтерполяційним многочленом та побудови лінійного і квадратичного інтерполяційних сплайнів (у тому числі - з використанням комп'ютера).

4. Бужак Андрій Васильович

☑ $f(1,5)=?$

☑ $f(7,5)=?$

x_i	0,234	2,034	3,834	5,634	7,434
$y_i = f(x_i)$	3,902	2,675	0,611	–3,256	–3,615

Поліном Ньютона

Для побудови многочленів Ньютона складемо таблицю скінченних різниць. Обчислимо:

- *Скінченні різниці першого порядку*

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = -1.227$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = -2.064$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = -3.867$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = -0.359$

- *Скінченні різниці другого порядку*

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0.837$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = -1.803$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 3.508$

- *Скінченні різниці третього порядку*

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -0.966$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 5.311$

- *Скінченні різниці четвертого порядку*

$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 6.277$

Скінченні різниці

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.234	3.902	-1.227	-0.837	-0.966	6.277 6.277
1	2.034	2.675	-2.064	-1.803	5.311	---
2	3.834	0.611	-3.867	3.508	---	---
3	5.634	-3.256	-0.359	---	---	---
4	7.434	-3.615	---	---	---	---
Σ				0.868	4.345	6.277
S			0.868	4.345	6.277	

число Σ для кожного стовпця обчислюється як сума усіх елементів стовпця, а число S - як різниця останнього та першого елементів стовпця;

Обчислимо f(1,5). Оскільки $x_0 = 0.234 < 1.5 < 2.034 = x_1$(тобто $x = 1.5\ \epsilon(x_{0,}x_1)$),

то слід записати перший інтерполяційний многочлен Ньютона

$$N_n^1(t) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Маємо: $x_0 = 0.234,\quad x_n = x_4 = 7.434,\quad h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = 1.8$

Покладемо $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.234}{1.8}$

і запишемо перший інтерполяційний многочлен Ньютона з $n = 4$ *, адже у нас обчислені скінченні різниці до* $\Delta^4 y_0$*. Очевидно, що коефіцієнтами* $\Delta^i y_0$ *(*$i = 0,1,2,3,4$*) цього многочлена будуть числа з першого рядка таблиці скінченних різниць*

$$N_4^1(t) = 3.902 + \frac{t}{1!}(-1.227) + \frac{t(t-1)}{2!}(-0.837) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}(-0.966) + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}(6.277)$$
$$= 3.902 - 1.227t - 0.4185t(t-1) - 0.161t(t-1)(t-2) + 0.2615t(t-1)(t-2)(t-3)$$

При $x = 1{,}5$ значення $t = 0{,}7033$. Тоді: $f(1.5) \approx N_4^1(0.7033) = 2.9203$

Обчислимо f(7,5). Оскільки $7.5 > 7.434 = x_4$,То це задача екстраполяції. Через те, що точка екстраполювання близька до правого кінця відрізка, який містить усі задані вузли, то слід записати другий інтерполяційний многочлен Ньютона

$$N_n^2(t) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

де $n = 4$, а $t = \frac{x_n - x}{h} = \frac{7.434 - x}{1.8}$

Очевидно, що коефіцієнтами $\Delta^i y_0$ *(*$i = 0,1,2,3,4$*) цього многочлена будуть останні елементи кожного стовпця таблиці скінчених різниць.*

Маємо:

$$N_4^2(t) = -3.615 - 0.359t + 1.754t(t+1) + 0.8852t(t+1)(t+2) + 0.2615t(t+1)(t+2)(t+3)$$

При $x = 7.5$ *значення* $t = \frac{x_n - x}{h} = \frac{7.434 - 7.5}{1.8} = -0.0367$

Тоді $f(7.5) \approx N_4^2(-0.0367) = -3.7791$

Побудуємо лінійний сплайн

$$S_1(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, x\epsilon[0.234; 2.034] \\ a_2x + b_2, x\epsilon[2.034; 3.834] \\ a_3x + b_3, x\epsilon[3.834; 5.634] \\ a_4x + b_4, x\epsilon[5.634; 7.434] \end{cases}$$

тобто з'єднаємо вузли інтерполювання відрізками прямих, отримавши кусково-лінійну функцію.

Невідомі коефіцієнти знайдемо з умов інтерполяції

$S_1(x_0) = y_0, S_1(x_1) = y_1, S_1(x_2) = y_2, S_1(x_3) = y_3, S_1(x_4) = y_4$

Таким чином, отримується система:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0.234a_1 + b_1 = 3.902 \\ 2.034a_1 + b_1 = 2.675 \end{cases} \\ \begin{cases} 2.034a_2 + b_2 = 2.675 \\ 3.834a_2 + b_2 = 0.611 \end{cases} \\ \begin{cases} 3.834a_3 + b_3 = 0.611 \\ 5.634a_3 + b_3 = -3.256 \end{cases} \\ \begin{cases} 5.634a_4 + b_4 = -3.256 \\ 7.434a_4 + b_4 = -3.615 \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$\begin{cases} a_1 = -0.6817 \\ b_1 = 4.0615 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = -1.1467 \\ b_2 = 5.0073 \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = -2.1483 \\ b_3 = 8.8477 \end{cases}$ $\begin{cases} a_4 = -0.1994 \\ b_4 = -2.1323 \end{cases}$

Тоді лінійний сплайн задається формулою

$$S_1(x) = \begin{cases} -0.6817x + 4.0615, x\epsilon[0.234; 2.034] \\ -1.1467x + 5.0073, x\epsilon[2.034; 3.834] \\ -2.1483x + 8.8477, x\epsilon[3.834; 5.634] \\ -0.1994x - 2.1323, x\epsilon[5.634; 7.434] \end{cases}$$

Знайдемо значення функції у заданих точках з допомогою побудованого лінійного сплайна:

$$f(1) \approx S_1(1.5) = (-0.6817x + 4.0615)|_{x=1.5} = -0.6817 * 1.5 + 4.0615 = 3.0389$$

$$f(4) \approx S_1(7.5) = (-0.1994x - 2.1323)|_{x=7.5} = -0.1994 * 7.5 - 2.1323 = -3.6278$$

Побудуємо квадратичний сплайн $S_2(x)$

$$S_2(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, x\epsilon[x_0; x_2] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, x\epsilon[x_2; x_4] \end{cases}$$

Коефіцієнти квадратичних тричленів будемо шукати з умов інтерполяції

$S_2(x_0) = y_0, \quad S_2(x_1) = y_1, \quad S_2(x_2) = y_2, \quad S_2(x_3) = y_3, \quad S_2(x_4) = y_4$

враховуючи те, що у некрайніх вузлах параболи з'єднуються між собою. Ці умови дають нам таку СЛАР

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1{x_0}^2 + b_1x_0 + c_1 = y_0 \\ a_1{x_1}^2 + b_1x_1 + c_1 = y_1 \\ a_1{x_2}^2 + b_1x_2 + c_1 = y_2 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2{x_2}^2 + b_2x_2 + c_2 = y_2 \\ a_2{x_3}^2 + b_2x_3 + c_2 = y_3 \\ a_2{x_4}^2 + b_2x_4 + c_2 = y_4 \end{cases} \end{cases}$$

Підставляючи вхідні дані, маємо:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1(0.234)^2 + b_1(0.234) + c_1 = 3.902 \\ a_1(2.034)^2 + b_1(2.034) + c_1 = 2.675 \\ a_1(3.834)^2 + b_1(3.834) + c_1 = 0.611 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2(3.834)^2 + b_2(3.834) + c_2 = 0.611 \\ a_2(5.634)^2 + b_2(5.634) + c_2 = -3.256 \\ a_2(7.434)^2 + b_2(7.434) + c_2 = -3.615 \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, вирішувачем *solve* із системи *MatLab*, знаходимо коефіцієнти

$a_1 = -0.1292$, $b_1 = -0.3887$, $c_1 = 4$, $a_2 = 0.5414$, $b_2 = -7.2739$, $c_2 = 20.5415$

Тоді квадратичний сплайн, побудований через один вузол має такий аналітичний вигляд:

$$S_2(x) = \begin{cases} -0.1292x^2 - 0.3887x + 4.0000, & x \epsilon [0.234; 3.834] \\ 0.5114x^2 - 7.2739x + 20.5415, & x \epsilon [3.834; 7.434] \end{cases}$$

Знайдемо значення функції у заданих точках з допомогою даного сплайна:

$$f(1.5) \approx S_2(1.5) = -0.1292 * 2.25 - 0.3887 * 1.5 + 4 = 3.1262$$

$$f(7.5) \approx S_2(7.5) = 0.5114 * 56.25 - 7.2739 * 7.5 + 20.5415 = -5.2465$$

<u>Зобразимо в одній системі координат графіки многочлена Ньютона та побудованих інтерполяційних сплайнів</u>