

Лабораторна робота №4

Тема: Чисельне диференціювання та інтегрування функцій.

Частина 1: Чисельне інтегрування функцій.

Мета: ознайомлення студентів з методами чисельного інтегрування функцій, оцінкою похибки при чисельному інтегруванні; набуття студентами практичних навичок обчислення визначених інтегралів за формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона, апіорної та апостеріорної оцінки похибки методів інтегрування (у тому числі - з використанням комп'ютера).

Завдання:

Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язання типових прикладів
[1, сс. 140-145], [2, сс. 129-139].

1. Користуючись правилом Рунге, обчислити заданий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$:

- a) за формулою прямокутників з точністю до 10^{-2} ;
- b) за формулою трапецій з точністю до 10^{-3} ;
- c) за формулою Сімпсона з точністю до 10^{-4} .

2. Оцінити апіорні похибки обчислень для (кожного) хоча б одного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.

Література:

1. Копченкова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченкова, И.А. Марон. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972. – 208 с.
2. Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие для техникумов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова – М. : Высш. школа, 1990. – 208 с



Задаті для самостійного розв'язання

1. Користуючись правилом Рунге, обчислити заданий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$:

- a) за формулою прямокутників з точністю до 10^{-2} ;
- b) за формулою трапецій з точністю до 10^{-3} ;
- c) за формулою Сімпсона з точністю до 10^{-4} .

2. Оцінити апіорні похибки обчислень (кожного) хоча б одного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.

1. Байрамов Алі Мірзабей-огли	$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
2. Беленчук Олексій Ігорович	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x - 1} dx$
3. Березний Ігор Васильович	$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$
4. Бужак Андрій Васильович	$\int_1^2 (1 + x)^2 \ln^2 x dx$
5. Бурле Павло Марчелович	$\int_0^1 \frac{x}{1 + x} dx$
6. Волощук Назарій Васильович	$\int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x} dx$
7. Георгіян Євген Геннадійович	$\int_2^4 (1 + x) \ln x dx$
8. Тригорчук В'ячеслав Валерійович	$\int_0^2 (x^2 + x - \sqrt{x}) dx$
9. Денис Денис Русланович	$\int_1^{1,5} \frac{x^2}{1 + x} dx$
10. Дручук Роман Олександрович	$\int_3^4 \frac{x}{\ln^2 x} dx$
11. Дубець Василь Русланович	$\int_1^2 (1 + x)^2 \ln x dx$
12. Дуплава Олександр Ігорович	$\int_2^{2,5} \frac{x + 2}{x^2 - x + 1} dx$
13. Жупник Євеліна Михайлівна	$\int_1^{2,5} \frac{e^x}{(1 + x)^2} dx$
14. Івасюта Павло Сергійович	$\int_2^3 x^2 \ln x dx$
15. Качуровський Станіслав Парасович	$\int_2^4 \frac{x^3 + x}{(x + 2)^2} dx$
16. Клим Дмитро Іванович	$\int_1^2 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$
17. Козуб Микола Миколайович	$\int_0^{1,5} \frac{x}{(x + 1)^3} dx$
18. Копадзе Олександра Сергіївна	$\int_2^4 \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2} dx$
19. Костюк Віталій Іванович	$\int_1^3 \frac{e^{2x}}{1 + x} dx$
20. Кушнірик Яна Олександрівна	$\int_3^4 \frac{e^x}{x^2} dx$

21. Луник Марія Михайлівна	$\int_2^{2.5} \sqrt{x} \ln^2 x dx$
22. Максименко Михайло Сергійович	$\int_2^{2.5} \frac{x^3}{(1+x)^2} dx$
23. Мінтянський Андрій Петрович	$\int_{0.5}^2 \frac{x}{x+1} dx$
24. Паращук Олексій Іванович	$\int_{1.5}^{2.5} \sqrt{1+x} \ln^2 x dx$
25. Сарай Богдан Васильович	$\int_1^{2.5} \frac{x}{x^2+1} dx$
26. Фецюк Денис Мирославович	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-1} dx$
27. Хмелєвська Анастасія Олександрівна	$\int_1^{1.5} \frac{e^x}{1+x^2} dx$
28. Чайковський Станіслав Валерійович	$\int_0^1 \frac{x+1}{x+2} dx$



Теоретичні відомості та розв'язання типових прикладів

1. Постановка задачі чисельного інтегрування
2. Метод прямокутників
3. Метод трапецій
4. Метод Сімпсона
5. Правило Рунге практичної оцінки похибки

1. Постановка задачі чисельного інтегрування

Далеко не всі інтеграли можна обчислити за відомою з математичного аналізу формулі Ньютона-Лейбніца:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

де $F(x)$ - первісна функції $f(x)$. Наприклад, в елементарних функціях не виражається інтеграл $\int_a^b e^{-x^2} dx$.

Але навіть у тих випадках, коли вдається виразити первісну $F(x)$ функції $f(x)$ через елементарні функції, вона може виявитися дуже складною для обчислень. Крім того, точне значення інтеграла за формулою (1) не можна отримати, якщо функція $f(x)$ задається таблицею. У цих випадках звертаються до методів чисельного інтегрування. До них, зокрема, відносяться метод прямокутників, метод трапецій і метод Сімпсона.

Суть чисельного інтегрування полягає в тому, що підінтегральну функцію $f(x)$ замінюють на іншу, наближену функцію так, щоб, по-перше, вона була близька до $f(x)$ і, по-друге, інтеграл від неї легко обчислювався. Наприклад, можна замінити підінтегральну функцію інтерполяційним многочленом. Також широко використовують т.зв. **квадратурні формули**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (2)$$

де x_i ($i = \overline{0, n}$) - деякі точки на відрізку $[a; b]$, які називають **вузлами** квадратурної формули;

A_i - числові коефіцієнти, які називають **вагами** квадратурної формули;

n - натуральне число.

2. Метод прямокутників

Метод прямокутників ґрунтується на використанні геометричної інтерпретації інтеграла. Будемо інтерпретувати інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ як площу криволінійної трапеції, обмеженою графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$ ($b > a$) (рис. 1)

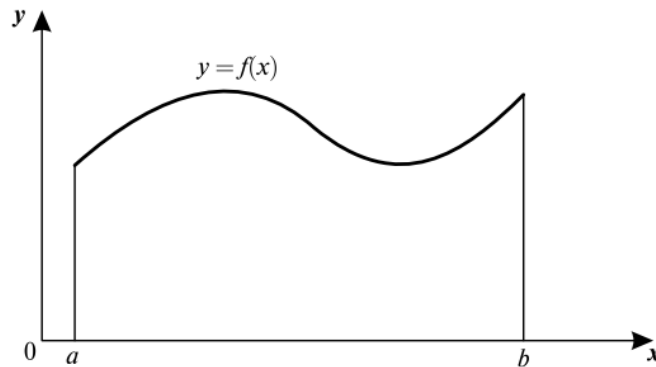


Рис.1. Графічна ілюстрація геометричної інтерпретації інтеграла

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин довжини h , тобто $h = \frac{b-a}{n}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

і

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Далі через точки розбиття проведемо прямі, паралельні осі Oy . При цьому отримаємо розбиття початкової криволінійної трапеції на n частин (рис. 2).

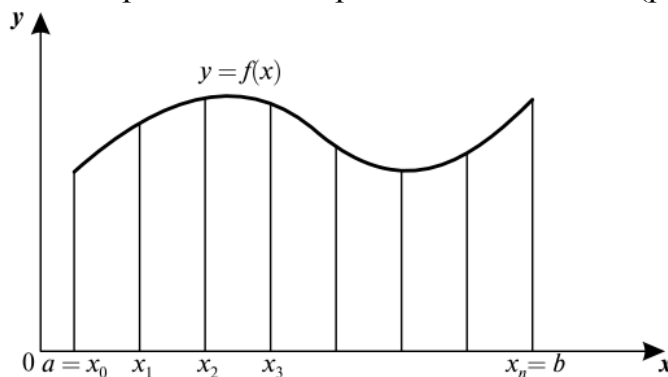


Рис.2. Графічна ілюстрація розбиття криволінійної трапеції

Замінімо наближено площу криволінійної трапеції площею східчастої фігури, зображеної на рис. 3.

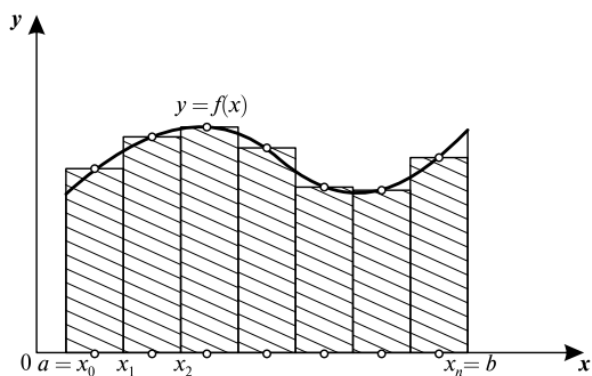


Рис.3. Графічна ілюстрація методу прямокутників

Ця фігура складається з n прямокутників. Основу i -го прямокутника утворює відрізок $[x_i; x_{i+1}]$ довжини h , а висота i -го прямокутника дорівнює значенню функції в середині відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, тобто $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ (рис. 4).

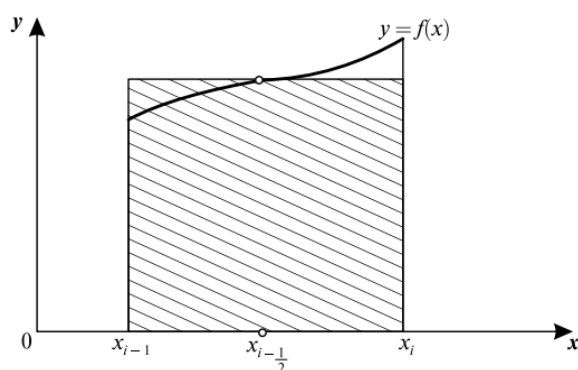


Рис.4. Графічна ілюстрація одного сегмента методу середніх прямокутників

Таким чином, площа i -го прямокутника дорівнює

$$S_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot h.$$

А значить, площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ усіх утворених прямокутників

$$S_{кр.м.} \approx \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Тоді отримаємо квадратурну формулу середніх прямокутників:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{np} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad (3)$$

Формулу (3) називають також формулою середніх прямокутників. Іноді використовують формули:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{np}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad (4)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{np}^n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (5)$$

які називають відповідно **квадратурними формулами лівих** і **правих прямокутників**. Очевидно, (4) і (5) – квадратурні формули вигляду (2) з $A_i = h = \frac{b-a}{n}$ для кожного $i = \overline{0, n-1}$ або $i = \overline{1, n}$.

Геометричні ілюстрації цих формул наведені на рис. 5 і 6.

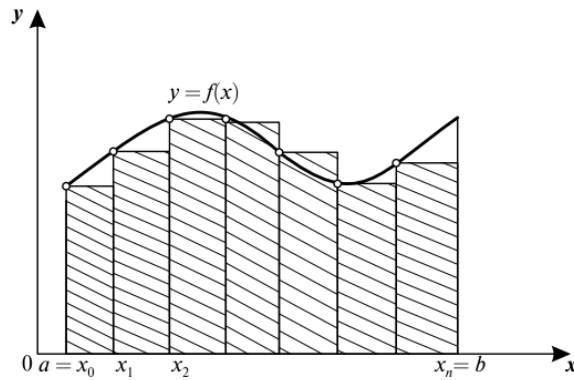


Рис.5. Графічна ілюстрація методу лівих прямокутників

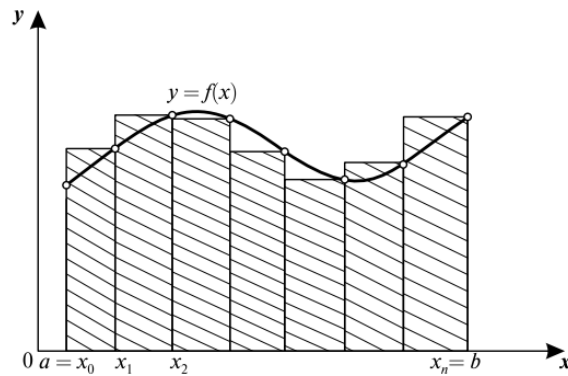


Рис.6. Графічна ілюстрація методу правих прямокутників

Для апіорної оцінки похибки формули прямокутників користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 1 (апіорна оцінка похибки методу прямокутників). Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$. Тоді для формули прямокутників справедлива наступна оцінка похибки:

$$\Delta = |I - I_{np}| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2, \quad (6)$$

де $M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|$.

3. Метод трапецій

Метод трапецій так само, як і метод прямокутників, спирається на геометричний зміст інтеграла. Замінімо графік функції $y = f(x)$ (рис. 1) ламаною лінією (рис. 7), отриманою в такий спосіб: з точок $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ розбиття відрізка $[a; b]$ проведемо прямі, паралельні осі ординат до їх перетину з кривою $y = f(x)$; утворені точки перетину прямих з графіком з'єднаємо прямолінійними відрізками.

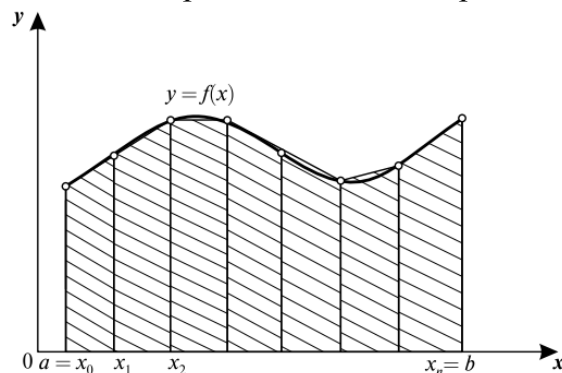


Рис.7. Графічна ілюстрація методу трапецій

Площу криволінійної трапеції наближено можна вважати рівній площі фігури, складеної з утворених n трапецій. Оскільки площа трапеції, побудованої на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ довжини $h = \frac{b-a}{n}$, дорівнює добутку півсуми основ $f(x_i)$ та $f(x_{i+1})$ на висоту h

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h,$$

то, користуючись цією формулою для $i = \overline{0, n-1}$, отримаємо

$$\begin{aligned} S_{кр.м.} &\approx \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \end{aligned}$$

тобто формулу

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{mp} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (7)$$

яку називають **квадратурною формулою трапецій**. Формула (7), очевидно, має вигляд

$$(2) \text{ з } A_0 = A_n = \frac{b-a}{2n} \text{ та } A_i = \frac{b-a}{n} \text{ при } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для оцінки похибки формули трапецій користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 2 (апріорна оцінка похибки методу трапецій). Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$. Тоді для формули трапецій справедлива наступна оцінка похибки:

$$\Delta = |I - I_{mp}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2, \quad (8)$$

$$\text{де } M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|.$$

4. Метод Сімпсона (парабол)

Ідея методу Сімпсона (парабол) полягає у заміні графіка функції $y = f(x)$ на кожному з відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 2, \dots, n-1$) розбиття вихідного відрізка $[a; b]$ параболою, проведеною через точки $(x_i; f(x_i))$, $(x'_i; f(x'_i))$, $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$, де x'_i - середина відрізка $[x_i; x_{i+1}]$. Ця параболою є інтерполяційним многочлен другого степеня $L_2(x)$ з вузлами x_i , x'_i , x_{i+1} . Неважко переконатися, що рівняння цієї параболі має вигляд:

$$y = L_2(x) = f(x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} (x - x'_i) + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x'_i) + f(x_i))}{\frac{h^2}{2}} (x - x'_i)^2,$$

$$\text{де } h = \frac{b-a}{n}.$$

Проінтегрувавши отриману функцію $L_2(x)$ на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$, отримаємо:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \frac{h}{6} (f(x_i) + 4f(x'_i) + f(x_{i+1}))$$

Просумувавши вирази I_i по $i = \overline{0, n-1}$, отримаємо **квадратурну формулу Сімпсона (або формулу парабол)**:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_c = \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (9)$$

Для оцінки похибки формули Сімпсона користуються наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 3 (априорна оцінка похибки методу Сімпсона). Нехай функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ неперервну похідну четвертого порядку $f^{(4)}(x)$. Тоді для формули Сімпсона (9) справедлива наступна оцінка похибки:

$$\Delta = |I - I_C| \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \frac{M_4}{90n^4} = \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4, \quad (10)$$

де $M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f^{(4)}(x)|$.

Зауважимо, що зазвичай для зручного застосування формули Сімпсона відрізок інтегрування $[a; b]$ ділять на парну кількість елементарних відрізків, тобто $n = 2m$. При цьому параболи можна проводити через вузли з парними індексами, а в якості точки x'_i брати «пропущений» вузол з відповідним непарним індексом. Тоді замість елементарного відрізка $[x_i; x_{i+1}]$ довжини h ми розглядатимемо відрізок $[x_{2i}; x_{2i+2}]$ ($i = \overline{0, m-1}$) довжини $2h$. Тоді формула Сімпсона набуде вигляду:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_C = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right) \quad (11)$$

а замість оцінки (10) буде справедлива наступна оцінка похибки:

$$\Delta = |I - I_C| \leq \frac{M_4(b-a)}{180} h^4 \quad (12)$$

5. Правило Рунге практичної оцінки похибки

Оцінки похибки за формулами (6), (8), (10) і (12) є априорними. Вони залежать від довжини елементарного відрізка h , і при досить малому h має справджується наближена рівність

$$I - I^h \approx Ch^k, \quad (13)$$

де I^h - наближене значення інтеграла, обчислене за однією з формул (3)-(5), (7), (9) чи (11), $C \neq 0$ і $k > 0$ - величини, які не залежать від h .

Якщо зменшити крок h у два рази, то відповідно до (13) отримаємо:

$$I - I^{\frac{h}{2}} = C \left(\frac{h}{2} \right)^k \approx \frac{1}{2^k} (I - I^h) \quad (14)$$

Безпосереднє використання оцінок похибки, (6), (8), (10) і (12) незручно, оскільки при цьому потрібно обчислення похідних функції $y = f(x)$. У обчислювальній практиці використовують інші оцінки.

Відніmemo від (13) вираз (14):

$$I^{\frac{h}{2}} - I^h \approx \frac{1}{2^k} Ch^k (2^k - 1)$$

З огляду на (14), отримаємо наступну наближену рівність

$$I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{I^{\frac{h}{2}} - I^h}{2^k - 1} \quad (15)$$

Вираз (15) дає *апостеріорну* оцінку похибки. Для обчислення цієї оцінки користуються **правилом Рунге** дроблення кроку. Правило Рунге - це емпіричний спосіб оцінки похибки, заснований на порівнянні результатів обчислень, проведених з різними кроками h .

При використанні формул прямокутників і трапецій $k = 2$, для формули Сімпсона $k = 4$. Тому для цих формул наближена рівність (15) набирає вигляду:

$$I - I_{np} \approx \frac{1}{3} \left(I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h \right), \quad (16)$$

$$I - I_{mp} \approx \frac{1}{3} \left(I_{mp}^{\frac{h}{2}} - I_{mp}^h \right), \quad (17)$$

$$I - I_c \approx \frac{1}{15} \left(I_c^{\frac{h}{2}} - I_c^h \right) \quad (18)$$

За допомогою правила Рунге можна наближено обчислити інтеграл із заданою точністю. Потрібно почати з деякого значення кроку h і послідовно зменшувати це значення в два рази, кожен раз обчислюючи наближене значення I^h . Процедура припиняється, коли результати двох наступних обчислень будуть за абсолютною величиною відрізнятися менше, ніж на $(2^k - 1)\varepsilon$, тобто коли

$$\left| I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h \right| \leq 3\varepsilon, \quad (19)$$

$$\left| I_{mp}^{\frac{h}{2}} - I_{mp}^h \right| \leq 3\varepsilon, \quad (20)$$

$$\left| I_c^{\frac{h}{2}} - I_c^h \right| \leq 15\varepsilon, \quad (21)$$

де ε - задана точність.

Приклад. 1. Користуючись правилом Рунге, обчислити заданий інтеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$:

a) за формулою прямокутників з точністю до 10^{-2} ;

b) за формулою трапецій з точністю до 10^{-3} ;

c) за формулою Сімпсона з точністю до 10^{-4} .

2. Оцінити апіорні похибки обчислень (кожного) хоча б одного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.

► Розв'язання. 1. a) за формулою прямокутників з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$.

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b] = [0; 1]$ спочатку, наприклад, на $n_1 = 5$ рівних частин і скористаємось формулою (3) серединних прямокутників

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{np} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

Маємо: $h_1 = \frac{1-0}{5} = 0,2$; точки розбиття

$$a = x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + h_1 = 0,2, \quad x_2 = x_1 + h_1 = 0,4, \quad x_3 = x_2 + h_1 = 0,6, \quad x_4 = x_3 + h_1 = 0,8, \quad x_5 = b = 1.$$

Для застосування формули (3) нам потрібні середини відрізків розбиття і значення функції $f(x) = e^{-x^2}$ у цих середніх точках. Для спрощення обчислення проводимо у таблицях. Оскільки $\varepsilon = 10^{-2}$, то обчислення проводимо з трьома знаками після коми.

Таблиця 1.1

i	x_i	$x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0,1	-0,01	0,990
1	0,2	0,3	-0,09	0,914
2	0,4	0,5	-0,25	0,779
3	0,6	0,7	-0,49	0,613
4	0,8	0,9	-0,81	0,445
5	1	---	---	---
Сума				3,740

Маємо:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{np}^h = h_1 \sum_{i=0}^4 f(x'_i) = 0,2(0,990 + 0,914 + 0,779 + 0,613 + 0,4445) = 0,2 \cdot 3,740 = 0,748.$$

Згідно з правилом Рунге, збільшимо кількість відрізків поділу удвічі, тобто тепер $n_2 = 2n_1 = 2 \cdot 5 = 10$ і $h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Далі обчислимо наближене значення інтеграла

$I_{np}^{\frac{h}{2}}$ за формулою (3).

Таблиця 1.2

i	x_i	$x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0,05	-0,0025	0,998
1	0,1	0,15	-0,0225	0,978
2	0,2	0,25	-0,0625	0,939
3	0,3	0,35	-0,1225	0,885
4	0,4	0,45	-0,2025	0,817
5	0,5	0,55	-0,3025	0,739
6	0,6	0,65	-0,4225	0,655
7	0,7	0,75	-0,5625	0,570
8	0,8	0,85	-0,7225	0,486
9	0,9	0,95	-0,9025	0,406
10	1	---	---	---
Сума				7,471

Маємо:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{np}^{\frac{h}{2}} = h_2 \sum_{i=0}^9 f(x'_i) = 0,1(0,998 + 0,978 + 0,939 + 0,885 + 0,817 + 0,739 + 0,655 + 0,570 + 0,486 + 0,406) = 0,1 \cdot 7,471 = 0,747$$

Оцінимо різницю $I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h$. Згідно з (19), якщо $\left| I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h \right| \leq 3\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2} = 0,03$, то обчислення припиняємо, інакше – продовжуємо. На цьому кроці:

$$\left| I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^h \right| = |0,747 - 0,748| = 0,001 < 0,003,$$

отже, процес поділу відрізка припиняється. Наближене значення інтеграла

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{np}^{\frac{h}{2}} = 0,747 \approx 0,75.$$

1. б) за формулою трапецій з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Як і у попередньому пункті, розіб'ємо відрізок інтегрування $[a;b] = [0;1]$ спочатку на $n_1 = 5$ рівних частин. Далі для обчислення першого наближення скористаємось формулою (7):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{mp} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Як і раніше, $h_1 = \frac{1-0}{5} = 0,2$; точки розбиття

$$a = x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + h_1 = 0,2, \quad x_2 = x_1 + h_1 = 0,4, \quad x_3 = x_2 + h_1 = 0,6, \quad x_4 = x_3 + h_1 = 0,8, \quad x_5 = b = 1.$$

Оскільки $\varepsilon = 0,001$, то обчислення проводимо як мінімум з одним запасним знаком, тобто принаймні з 4 знаками після коми.

Таблиця 2.1

i	x_i	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0	1,0000
1	0,2	-0,04	0,9608
2	0,4	-0,16	0,8521
3	0,6	-0,36	0,6977
4	0,8	-0,64	0,5273
5	1	-1	0,3679

Підставляючи розраховані у таблиці 3 значення у формулу трапецій, маємо:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{mp}^h = h_1 \left(\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + \sum_{i=1}^4 f(x_i) \right) =$$

$$= 0,2 \left(\frac{1,000 + 0,3679}{2} + 0,9608 + 0,8521 + 0,6977 + 0,5273 + 0,3679 \right) = 0,2 \cdot 3,7218 = 0,7444$$

Далі, згідно з правилом Рунге, збільшимо кількість відрізків поділу удвічі, тобто тепер $n_2 = 2n_1 = 2 \cdot 5 = 10$ і $h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Обчислимо наближене значення інтеграла

$I_{mp}^{\frac{h}{2}}$ за формулою (7).

Таблиця 2.2

i	x_i	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0	1,0000
1	0,1	-0,01	0,9900
2	0,2	-0,04	0,9608
3	0,3	-0,09	0,9139
4	0,4	-0,16	0,8521
5	0,5	-0,25	0,7788
6	0,6	-0,36	0,6977
7	0,7	-0,49	0,6126
8	0,8	-0,64	0,5273
9	0,9	-0,81	0,4449
10	1	-1	0,3679

Маємо:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{mp}^{\frac{h}{2}} = h_2 \left(\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} + \sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) =$$

$$= 0,1 \cdot \left(\frac{1,0000 + 0,3679}{2} + 0,9900 + 0,9608 + 0,9139 + 0,8521 + 0,7788 + 0,6977 + 0,6126 + 0,5273 + 0,4449 \right) =$$

$$= 0,1(0,6839 + 6,7782) = 0,1 \cdot 7,4621 \approx 0,7462.$$

Як і раніше, оцінимо різницю між даним наближенням та попереднім. Згідно з (20), поділ відрізка слід припинити, якщо

$$\left| I_{mp}^{\frac{h}{2}} - I_{mp}^h \right| \leq 3\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3} = 0,003.$$

Маємо:

$$\left| I_{mp}^{\frac{h}{2}} - I_{mp}^h \right| = |0,7462 - 0,7444| = 0,0018 < 0,003,$$

отже, подальший поділ не потрібен, задану точність досягнуто і

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_{mp}^{\frac{h}{2}} = 0,7462 \approx 0,746.$$

1. с) за формулою Сімпсона з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b] = [0; 1]$ на парну кількість рівних частин, наприклад, на $n_1 = 2m_1 = 6$ рівних частин. Тоді $h_1 = \frac{b-a}{2m_1} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$, $m_1 = 3$. Далі для обчислення першого наближення скористаємось формулою (11):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_C^h = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right).$$

Розрахунки проведемо з допомогою таблиці. Для зручності елементи, які входять у суму $4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1})$, позначимо жовтим кольором, а ті, що входять у суму $2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})$, - блакитним.

Таблиця 3.1

i	x_i	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0	1,00000
1	1/6	- 1/36	0,97260
2	1/3	- 1/9	0,89484
3	1/2	- 1/4	0,77880
4	2/3	- 4/9	0,64118
5	5/6	- 25/36	0,49935
6	1	-1	0,36788

При першому наближенні маємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_C^h = \frac{1/6}{3} \left(f(x_0) + f(x_6) + 4 \sum_{i=1}^3 f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^2 f(x_{2i}) \right) = \\ &= \frac{1}{18} (f(x_0) + f(x_6) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4))) = \\ &= \frac{1}{18} (1,00000 + 0,36788 + 4(0,97260 + 0,77880 + 0,49935) + 2(0,89484 + 0,64118)) = \\ &= \frac{1}{18} (1,36788 + 9,00303 + 3,07204) = \frac{13,44295}{18} = 0,746830. \end{aligned}$$

Далі діємо згідно з методом Рунге, збільшуючи щоразу кількість відрізків поділу вдвічі та порівнюючи на кожному кроці різницю між сусідніми наближеннями. Процес наближення слід завершити, якщо на певному кроці буде виконуватись умова (21)

$$\left| I_C^{\frac{h}{2}} - I_C^h \right| \leq 15\varepsilon.$$

Отже, на другому кроці $n_2 = 2n_1 = 2 \cdot 6 = 12 = 2m_2$, $m_2 = 6$, $h_2 = \frac{b-a}{2m_2} = \frac{1}{12}$.

Таблиця 3.2

i	x_i	$-(x'_i)^2$	$f(x'_i) = e^{-(x'_i)^2}$
0	0	0	1,00000
1	1/12	- 1/144	0,99308
2	1/6	- 1/36	0,97260
3	1/4	- 1/16	0,93941
4	1/3	- 1/9	0,89484
5	5/12	- 25/144	0,84062

6	1/2	- 1/4	0,77880
7	7/12	- 49/144	0,71157
8	2/3	- 4/9	0,64118
9	3/4	- 9/16	0,56978
10	5/6	- 25/36	0,49935
11	11/12	- 121/144	0,43159
12	1	-1	0,36788

При другому наближенні маємо:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_C^{\frac{h}{2}} = \frac{1/12}{3} \left(f(x_0) + f(x_{12}) + 4 \sum_{i=1}^6 f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^5 f(x_{2i}) \right) = \\
 &= \frac{1}{36} (f(x_0) + f(x_{12}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) + f(x_{11})) + \\
 &\quad + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10}))) = \dots = \\
 &= \frac{1}{36} (1,36788 + 17,94425 + 7,57355) = \frac{26,88568}{36} \approx 0,746825.
 \end{aligned}$$

Оцінимо

$$\left| I_C^{\frac{h}{2}} - I_C^h \right| = |0,746825 - 0,74683| = 0,000005 < 15\varepsilon = 0,0015,$$

отже, задана точність досягнута і

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_C^{\frac{h}{2}} = 0,746825 \approx 0,7468.$$

2. Оцінити апіорні похибки обчислень кожного методу при розбитті відрізка інтегрування на 5 рівних частин.

2. а) Оцінимо апіорну похибку обчислення заданого інтеграла за формулою серединних прямокутників при розбитті відрізка інтегрування на $n = 5$ рівних частин.

Апіорна оцінка методу прямокутників здійснюється за формулою (6)

$$\Delta = |I - I_{np}| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2,$$

де $M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$.

Знайдемо похідні

$$f'(x) = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} (-x^2)' = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = -2(x'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})') = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Найпростіше знайти $M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$, побудувавши графік $y = |f''(x)|$ і знайти цей максимум графічно.

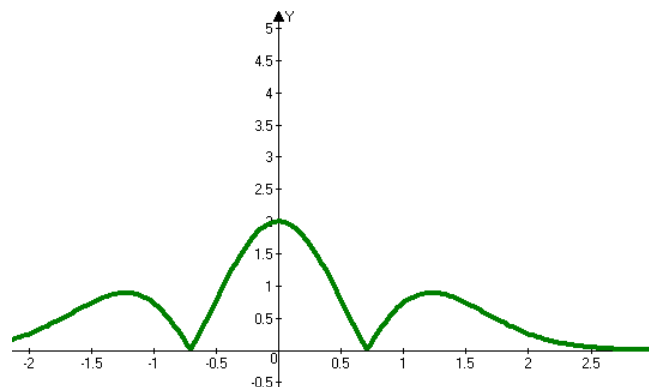


Рис.8. Графік $y = |f''(x)|$

З рис. 8 видно, що модуль другої похідної досягає найбільшого значення 2 (на усій області визначення) при $x = 0$, отже, і на відрізку $[0;1]$ найбільшим значенням також буде 2, тобто

$$M_2 = \max_{x \in [0;1]} |f''(x)| = 2.$$

При розбитті на $n = 5$ рівних частин відрізка $[0;1]$ крок

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2.$$

Знайдемо апріорну оцінку похибки:

$$\Delta = |I - I_{np}| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2 = \frac{2 \cdot (1-0)}{24} \cdot (0,2)^2 = \frac{0,04}{12} = \frac{1}{300} \approx 0,0033.$$

2. б) Оцінимо апріорну похибку обчислення заданого інтеграла за формулою трапецій при розбитті відрізка інтегрування на $n = 5$ рівних частин.

Апріорна оцінка методу трапецій здійснюється за формулою (8)

$$\Delta = |I - I_{mp}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2,$$

$$\text{де } M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|.$$

У попередньому пункті ми знайшли усі необхідні значення для оцінки похибки. Підставляємо:

$$\Delta = |I - I_{mp}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 = \frac{2 \cdot (1-0)}{12} (0,2)^2 = \frac{0,04}{6} = \frac{1}{150} \approx 0,00667.$$

2. с) Оцінимо апріорну похибку обчислення заданого інтеграла за формулою Сімпсона при розбитті відрізка інтегрування на $n = 5$ рівних частин.

Апріорна оцінка методу Сімпсона у випадку поділу відрізка інтегрування на непарну кількість елементарних відрізків здійснюється за формулою (10)

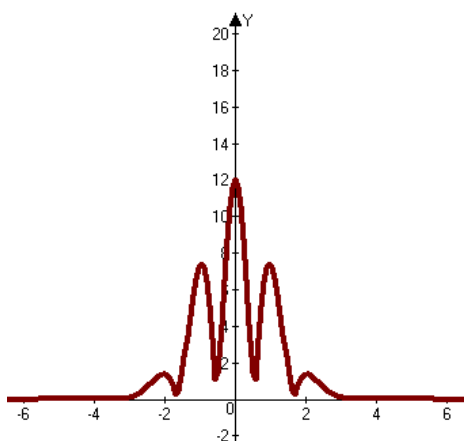
$$\Delta = |I - I_c| \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4,$$

$$\text{де } M_4 = \max_{x \in [a;b]} |f^{(4)}(x)|.$$

У пункті 2 а) ми вже знайшли другу похідну підінтегральної функції, а для оцінки похибки потрібно четверту похідну, тому продовжуємо диференціювання:

$$f'''(x) = (f'')' = -2(e^{-x^2}(1-2x^2))' = -2(e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x)) = -2e^{-x^2}(4x^3 - 6x);$$

$$f^{(4)}(x) = (f''')' = -2(e^{-x^2}(4x^3 - 6x))' = -2(e^{-x^2}(-2x)(4x^3 - 6x) + e^{-x^2}(12x^2 - 6)) = -2e^{-x^2}(-8x^4 + 24x^2 - 6)$$



Макимум модуля похідної знайдемо, як і вище, графічно.

Графік $y = |f^{(4)}(x)|$ зображено на рис. 9. Тому, очевидно, що

$$M_4 = \max_{x \in [0;1]} |f^{(4)}(x)| = 12, \text{ а значить, апріорна похибка методу}$$

Сімпсона при поділі відрізка інтегрування на 5 рівних частин оцінюється нерівністю

$$\Delta = |I - I_c| \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4 = \frac{12 \cdot (1-0)}{2880} (0,2)^4 \approx 0,0000067 \blacksquare$$

Рис.9. Графік $y = |f^{(4)}(x)|$