Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Інститут фізико-технічних та комп'ютерних наук

Відділ комп'ютерних технологій

Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

ЗВІТ

про виконання лабораторної роботи №2

з дисципліни «Числові методи».

Тема: Точне та наближене розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав студент Бужак А.В.

Курс III

Група 341

Викладач Філіпчук О.І.

Чернівці – 2018

Хід роботи

<u>*Частина 1:*</u> *Прямі (точні) методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

Варіант №4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

а) Метод Крамера. Обчислимо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0.$$

Головний визначник системи відмінний від нуля, тому за теоремою Крамера дана СЛАР має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера. Обчислимо ще три допоміжні визначники Δ_j $(j = 1,2,3,4)$, замінюючи кожен раз -й стовпець стовпчиком правих частин вихідної системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -306, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -153, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -153.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 1.$$

б) Метод Гаусса.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$AX := \mathrm{augment}(A, B) \qquad AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AG := \mathrm{rref}(AX) \qquad AG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{submatrix}(AG, 0, 3, 4, 4) \qquad x^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Матричний метод (метод оберненої матриці).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

г) Метод LU-розкладу.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$m1 := \mathrm{submatrix}(A,0,0,0,0) = (1) \qquad \Delta 1 := |m1| = 1$$

$$m2 := \mathrm{submatrix}(A,0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta 2 := |m2| = -4$$

$$m3 := \mathrm{submatrix}(A,0,2,0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta 3 := |m3| = 27$$

$$\Delta 4 := |A| = -153$$

Розв'язок у системі MatLab

```
>> A = [1 1 2 3;3 -1 -1 -2;2 3 -1 -1;1 2 3 -1];
>> B = [8;2;5;6];
>> [L,U] = lu(A); X = U \ (L \ B)

X =

    2.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

Усі головні мінори відмінні від нуля, тому для такої матриці можливий LU-розклад.

Подамо матрицю вихідної системи у вигляді добутку $A = LU$, де

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$ - нижньотрикутна матриця з одиницями на головній діагоналі

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$ - верхньотрикутна матриця.

Знайдемо елементи матриць L та U з рівності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Виконаємо множення матриць у правій частині останньої рівності і отримаємо:

$$A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}*u_{11} & l_{21}*u_{12}+u_{22} & l_{21}*u_{13}+u_{23} & l_{21}*u_{14}+u_{24} \\ l_{31}*u_{11} & l_{31}*u_{12}+l_{32}*u_{22} & l_{31}*u_{13}+l_{32}*u_{23}+u_{33} & l_{31}*u_{14}+l_{32}*u_{24}+u_{34} \\ l_{41}*u_{11} & l_{41}*u_{12}+l_{42}*u_{22} & l_{41}*u_{13}+l_{42}*u_{23}+l_{43}*u_{33} & l_{41}*u_{14}+l_{42}*u_{24}+l_{43}*u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}=LU$$

$$\begin{cases} u_{11}=1 \\ u_{12}=1 \\ u_{13}=2 \\ u_{14}=3 \\ l_{21}*u_{11}=3 \\ l_{21}*u_{12}+u_{22}=-1 \\ l_{21}*u_{13}+u_{23}=-1 \\ l_{21}*u_{14}+u_{24}=-2 \\ l_{31}*u_{11}=2 \\ l_{31}*u_{12}+l_{32}*u_{22}=3 \\ l_{31}*u_{13}+l_{32}*u_{23}+u_{33}=-1 \\ l_{31}*u_{14}+l_{32}*u_{24}+u_{34}=-1 \\ l_{41}*u_{11}=1 \\ l_{41}*u_{12}+l_{42}*u_{22}=2 \\ l_{41}*u_{13}+l_{42}*u_{23}+l_{43}*u_{33}=3 \\ l_{41}*u_{14}+l_{42}*u_{24}+l_{43}*u_{34}+u_{44}=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{11}=1 \\ u_{12}=1 \\ u_{13}=2 \\ u_{14}=3 \\ l_{21}=3 \\ u_{22}=-4 \\ u_{23}=-7 \\ u_{24}=-11 \\ l_{31}=2 \\ l_{32}=-0{,}25 \\ u_{33}=-6{,}75 \\ u_{34}=-9{,}75 \\ l_{41}=1 \\ l_{42}=-0{,}25 \\ l_{43}=0{,}11 \\ u_{44}=-5{,}67 \end{cases}$$

Матриці L та U будуть мати вигляд:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6{,}75 & -9{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & -5{,}67 \end{pmatrix}$$

Маємо $LUx = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6{,}75 & -9{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & -5{,}67 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Позначивши $Ux = y$, отримаємо $Ly = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Звідси,

$$\begin{cases} y_1 = 8 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ 2y_1 - 0,25y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 - 0,25y_2 + 0,11y_3 + y_4 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = -22 \\ y_3 = -16,5 \\ y_4 = -5,67 \end{cases}$$

повернемось до системи Ux = y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6,75 & -9,75 \\ 0 & 0 & 0 & -5,67 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -22 \\ -16,5 \\ -5,67 \end{pmatrix}$$

Виконавши множення матриць у останній рівності, приходимо до східчастої системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -22 \\ -6,75x_3 - 9,75x_4 = -16,5 \\ -5,67x_4 = -5,67 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Відповідно до всіх методів, отримали розв’язок вихідної системи $x^* = (2, 1, 1, 1)$.

Частина 2: ***Наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь***

Теоретичні відомості та розв'язання типових прикладів

Розглянемо деякі наближені методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Ці методи дають розв'язок у вигляді границі послідовності деяких векторів. Такі вектори будують шляхом виконання одноманітного процесу, який називають ***процесом ітерацій***.

Важливою особливістю ітераційних методів є їхні ***самоуточнення і простота реалізації на комп'ютерах***. Ітераційний метод для початку обчислень потребує задання одного або декількох початкових наближень. Умови і швидкість збіжності кожного ітераційного процесу суттєво залежать від властивостей матриці системи і вибору початкових наближень.

Загальна схема ітераційних процесів полягає у побудові для системи

$$Ax = b \qquad \textbf{(1)}$$

з квадратною невиродженою матрицею n-го порядку A послідовності наближень

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(b - Ax^{(k-1)}), \qquad \textbf{(2)}$$

де $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ - деяка послідовність матриць; $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ - початкове наближення. Вибір різних матриць $H^{(k)}$ приводить до різних ітераційних методів.

Ітераційні процеси (2) мають ту властивість, що для кожного з них точний розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ системи (1) є нерухомою точкою. Це означає наступне: якщо за початкове наближення $x^{(0)}$ взяти x^*, то всі наступні наближення теж дорівнюватимуть x^*.

Навпаки, якщо довільний ітераційний процес, для якого x^* є нерухомою точкою, реалізується за формулою

$$x^{(k)} = C^{(k)}x^{(k-1)} + d^{(k)}, \; k = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

де $C^{(k)}$ - послідовність матриць; $d^{(k)}$ - послідовність векторів, то його можна записати у вигляді (2).

Найпростіші ітераційні методи - ***стаціонарні ітераційні процеси***, у яких матриці $H^{(k)}$ не залежать від номера кроку k. При $H^{(k)} = E$ отримуємо класичний процес послідовних наближень. Вибір матриці H для стаціонарного процесу і $H^{(k)}$ для нестаціонарного можна виконати багатьма різними способами.

2.1. *Метод простих ітерацій (метод Якобі).*

Застосування методу Гаусса для розв'язування системи лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих досить громіздке. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнти системи не завжди можна розмістити в оперативній пам'яті ЕОМ. Тоді застосувати для її розв'язування метод Гаусса взагалі не можна. У цих випадках розв'язують систему ітераційними методами.

Розглянемо ***метод простої ітерації***. Оскільки метод простих ітерацій є стаціонарним, то систему рівнянь (1) згідно з формулою (3), перетворимо до вигляду

$$x = Cx + d\,, \tag{4}$$

який називається ***нормальним виглядом*** системи.

Розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^{\mathrm{T}}$ системи (4) (а значить, і системи (1)) знаходимо як (покоординатну) границю послідовності

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d\,,\ k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

тобто

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}\ .$$

Рівності (5) у координатній формі записуються наступним чином

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i\,,\ (i \in \overline{1,n}\,; k = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

тобто у вигляді системи

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{12}x_2^{(k-1)} + c_{13}x_3^{(k-1)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k-1)} + d_1 \\ x_2^{(k)} = c_{21}x_1^{(k-1)} + c_{23}x_3^{(k-1)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k-1)} + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = c_{n1}x_1^{(k-1)} + c_{n2}x_2^{(k-1)} + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)} + d_n \end{cases},\ k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Теорема 2.1.1 (критерій збіжності МПІ). *Для збіжності методу простих ітерацій з довільним початковим вектором $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ необхідно і досить, щоб усі власні числа матриці C (із системи (4)) були за модулем менші від 1, тобто всі корені характеристичного рівняння*

$$\det(C - \lambda E) = 0 \tag{8}$$

були за модулем менші від одиниці.

Оскільки знаходження коренів рівняння (8) є непростою проблемою, то на практиці часто використовують достатню умову збіжності методу простих ітерацій. Для цього для квадратної матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ вводять поняття ***норми матриці***, яка задається одним з трьох способів:

- ☑ $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - максимум сум модулів елементів рядків;
- ☑ $\|A\|_2 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ - максимум сум модулів елементів стовпців;

☑ $\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ - корінь квадратний з суми квадратів модулів усіх елементів матриці.

Теорема 2.1.2 (достатня ознака збіжності МП). *Нехай хоча б для одного* $i = 1, 2, 3$ *виконується нерівність*

$$\|C\|_i \le q < 1\,. \qquad \textbf{(9)}$$

Тоді

- ☑ *система (4) (а значить, і система* (1)*) має єдиний розв'язок* $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^{\mathrm{T}}$;
- ☑ *при довільному виборі вектора початкового наближення* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ *ітераційний процес* (5) *збігається до розв'язку* x^* *зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником* $q = \|C\|_i$, *тобто*

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}$$

і має місце наступна оцінка абсолютної похибки k *-го наближення*

$$\Delta = \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|, \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad \textbf{(10)}$$

Метод простої ітерації слід закінчити, якщо стане справедливою нерівність

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon\,, \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad \textbf{(11)}$$

де ε — наперед задана точність наближень. При $q \le \frac{1}{2}$ умову (11) можна замінити на

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon\,, \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad \textbf{(12)}$$

Метод Якобі зведення системи до нормального вигляду

Припустимо, що усі діагональні елементи матриці A вихідної системи відмінні від нуля

$$a_{ii} \ne 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(або рівняння системи можна переставити так, щоб остання умова виконувалась).

Розв'яжемо перше рівняння системи (1) відносно x_1, друге - відносно x_2 і т.д. Отримуємо систему у вигляді (4):

$$\begin{cases} x_1 = c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1} + d_n \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

де

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}},\ i \ne j \\ 0, \quad\ i = j \end{cases}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \textbf{(14)}$$

Метод, що ґрунтується на такому зведенні вихідної СЛАР до вигляду (4) (чи, те саме, що (13)), називають ***методом Якобі***. Далі, задавши нульове наближення, за рекурентними співвідношеннями (5) можемо виконувати ітераційний процес.

Неважко переконатись, що сформульована вище ***достатня умова збіжності МПІ для методу Якобі рівносильна умові діагонального переважання матриці*** A вихідної системи, тобто умові

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(15)}$$

(або $|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, ..., n.$).

Рівності (15) означають, що модуль діагонального елемента кожного рядка строго більший від суми модулів інших елементів даного рядка.

Зауваження: *умови теореми 2.1.2 (чи рівносильна умова діагонального переважання матриці вихідної системи) є лише достатніми для збіжності МПІ, тобто в разі їх невиконання про збіжність ітераційного процесу наперед нічого сказати неможна: процес може як збігатись до розв'язку системи, так і збігатись до деякого іншого вектора чи розбігатись взагалі.*

Таким чином, приходимо до такого ***алгоритму МПІ для СЛАР***.

1. Перевірити, чи матриця A вихідної системи має діагональне переважання (тобто, чи виконуються умови (15)). Якщо – так, то перейти до п. 2, інакше – звести початкову систему до вигляду з матрицею з діагональним переважанням.

2. Перейти до системи вигляду (13), користуючись перетвореннями (14),

3. Взяти деяке початкове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ (за $x^{(0)}$ зазвичай беруть один з векторів $x^{(0)} = (0, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$, $x^{(0)} = (1, 1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$, $x^{(0)} = (b_1, b_2, ..., b_n)^{\mathrm{T}}$).

4. Виконати крок ітерації згідно з формулами (3) (у координатній формі – за формулами (7)), отримавши вектор $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d$ ($k = 1, 2, \dots$)

5. Перевірити умову виходу з ітераційного процесу (11) (чи (12) при $q \le \frac{1}{2}$). В разі виконання умови – ітераційний процес завершується, інакше – повертаємось до п.4.

6. Виконати перевірку знайденого наближеного значення розв'язку, підставивши його у задану (чи перетворену до вигляду з діагональним переважанням) СЛАР.

2.2. *Метод Зейделя.*

Метод Зейделя є різновидом методу простої ітерації і відрізняється від методу простих ітерацій лише тим, що під час обчислення k-го наближення i-ої компоненти x_i; враховують уже визначене раніше $(k-1)$-ше наближення компонент x_1, $x_2, \dots$, x_{i-1}, тобто обчислення виконують за формулами

$$x_i^{(k)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)}, \ (k = 1, 2, \dots; \ c_{ii} = 0, \ i = \overline{1, n}) \qquad \textbf{(16)}$$

або в матричному вигляді

$$x^{(k)} = Bx^{(k)} + Dx^{(k-1)} + d \ \ (k = 1, 2, \dots), \qquad \textbf{(17)}$$

де B - нижньотрикутна матриця, а D - верхньотрикутна матриця

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & & 0 & 0\\ c_{21} & 0 & & 0 & 0\\ c_{31} & c_{32} & & 0 & 0\\ & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{n,n-1} & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0 & c_{12} & & c_{1,n-1} & c_{1,n}\\ 0 & 0 & & c_{2,n-1} & c_{2,n}\\ 0 & 0 & & c_{3,n-1} & c_{3,n}\\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0\end{pmatrix},$$

утворені з матриці C.

Рівність (17) можна переписати у вигляді

$$x^{(k)}=(E-B)^{-1}Dx^{(k-1)}+(E-B)^{-1}d \qquad \textbf{(18)}$$

У координатній формі ітераційний процес методу Зейделя виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=d_1+\sum\limits_{j=1}^{n}c_{1j}x_j^{(k-1)}\\ x_2^{(k)}=d_2+c_{21}x_1^{(k)}+\sum\limits_{j=2}^{n}c_{2j}x_j^{(k-1)}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_i^{(k)}=d_i+\sum\limits_{j=1}^{i-1}c_{ij}x_j^{(k)}+\sum\limits_{j=i}^{n}c_{ij}x_j^{(k-1)}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n^{(k)}=d_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}c_{nj}x_j^{(k)}+c_{nn}x_n^{(k-1)}\end{cases}\quad (k=1,2,\dots;\ c_{ii}=0,\ i=\overline{1,n}) \qquad \textbf{(19)}$$

З рівності (18) випливає, що ітераційний процес Зейделя збігається, якщо виконується умова $|\lambda_i|<1$, де λ_i $(i\in\overline{1,n})$ - власні числа матриці $(E-B)^{-1}D$. Ці власні числа визначають із рівняння

$$\det\left((E-B)^{-1}D-\lambda E\right)=0.$$

Теорема 2.2.1 (критерій збіжності методу Зейделя). *Для збіжності методу Зейделя з довільним початковим вектором $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ необхідно і достатньо, щоб усі власні числа матриці $(E-B)^{-1}D$ були за модулем менші від 1, тобто всі корені характеристичного рівняння*

$$\det\left((E-B)^{-1}D-\lambda E\right)=0 \qquad \textbf{(20)}$$

були за модулем менші від одиниці

Зазвичай метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простої ітерації, але, взагалі кажучи, він призводить до більш громіздких обчислень. Процес Зейделя може збігатися навіть в тому випадку, якщо розбігається процес ітерації. Однак це буває не завжди. Можливі випадки, коли процес Зейделя збігається повільніше за МПІ. Більш того, можуть бути випадки, коли МПІ збігається, а процес Зейделя розбігається.

Зауваження: *За умови діагонального переважання метод Зейделя збігається швидше за метод Якобі.*

Зауваження: *Збіжний ітераційний процес має важливу властивість* ***самовиправлення****, тобто окрема помилка в обчислення не відіб'ється на кінцевому результаті, адже помилкове наближення можна розглядати як новий початковий вектор.*

Хід роботи

Попередньо звівши задану СЛАР до нормального вигляду, знайдемо наближене значення її розв'язку наближеними методами з точністю до ε = 0,001:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Зведемо вихідну СЛАР до нормального (ітераційного) вигляду методом множення на матрицю $(A - \varepsilon)^{-1}$.

Матриця вихідної системи, очевидно, не задовольняє умовам діагонального переважання, адже

$|a_{11}| = 1 < 1+2+3 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|$
$|a_{22}| = 1 < 3+1+2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|$
$|a_{33}| = 1 < 2+3+1 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|$
$|a_{44}| = 1 < 1+2+3 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|$

Матриця A є невиродженою, тому що визначник відмінний від 0, det(A) = -153.

Візьмемо ε = 0,001 і побудуємо матрицю $(A - \varepsilon)^{-1}$. Матриця $A - \varepsilon$ має вигляд

$$A - \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{999}{1000} & \frac{999}{1000} & \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} \\ \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{2001}{1000} \\ \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{1001}{1000} \\ \frac{999}{1000} & \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} \end{pmatrix}$$

Тоді $(A - \varepsilon)^{-1}$ матиме вигляд:

$$(A - \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix}$$

Помножимо матрицю A та B на знайдену матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50985}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} \\ \frac{15017132}{153060616197} & \frac{50967}{50962} & \frac{5}{50962} & \frac{5}{50962} \\ \frac{7}{50962} & \frac{7}{50962} & \frac{50969}{50962} & \frac{7}{50962} \\ \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{116451134672}{116444279901} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{102039}{50962} \\ \frac{50987}{50962} \\ \frac{50997}{50962} \\ \frac{50977}{50962} \end{pmatrix}$$

Отримуємо таку рівність:

$$\begin{pmatrix} \frac{50985}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} \\ \frac{15017132}{153060616197} & \frac{50967}{50962} & \frac{5}{50962} & \frac{5}{50962} \\ \frac{7}{50962} & \frac{7}{50962} & \frac{50969}{50962} & \frac{7}{50962} \\ \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{116451134672}{116444279901} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{102039}{50962} \\ \frac{50987}{50962} \\ \frac{50997}{50962} \\ \frac{50977}{50962} \end{pmatrix}$$

Дана матриця задовольняє умови діагонального переважання. Якщо помножити рівняння на 50962, ми отримаємо систему:

$$\begin{cases} 50985x_1 + 23x_2 + 23x_3 + 23x_4 = 102039 \\ 5x_1 + 50967x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 50987 \\ 7x_1 + 7x_2 + 50969x_3 + 7x_4 = 50997 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 50965x_4 = 50977 \end{cases}$$

Далі розв'язуємо рівняння перетвореної системи відносно x і отримуємо систему у нормальному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 2.001 - 0.0004511x_2 - 0.0004511x_3 - 0.0004511x_4 \\ x_2 = 1.000 - 0.0000981x_1 - 0.0000981x_3 - 0.0000981x_4 \\ x_3 = 1.001 - 0.0001373x_1 - 0.0001373x_2 - 0.0001373x_4 \\ x_4 = 1.000 - 0.00005886x_1 - 0.00005886x_2 - 0.00005886x_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2.001 \\ 1.000 \\ 1.001 \\ 1.000 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -0.0004511 & -0.0004511 & -0.0004511 \\ -0.0000981 & 0 & -0.0000981 & -0.0000981 \\ -0.0001373 & -0.0001373 & 0 & -0.0001373 \\ -0.00005886 & -0.00005886 & -0.00005886 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо норми матриці С:

☑ $\|C\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|$ *- максимум сум модулів елементів рядків*

$$i := 0, 1 .. 3 \quad C1_i := \sum_{j=0}^{3} |C_{i,j}| \quad C1^T = \left(1.353 \times 10^{-3} \;\; 2.943 \times 10^{-4} \;\; 4.12 \times 10^{-4} \;\; 1.766 \times 10^{-4}\right)$$

$||C_1|| = 0.001353 < 1$

☑ $\|C\|_2 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|$ *- максимум сум модулів елементів стовпців*

$$i := 0, 1 .. 3 \quad C2_i := \sum_{j=0}^{3} |C_{j,i}| \quad C2^T = \left(2.943 \times 10^{-4} \;\; 6.473 \times 10^{-4} \;\; 6.081 \times 10^{-4} \;\; 6.866 \times 10^{-4}\right)$$

$||C_2|| = 0.0006866 < 1$

☑ $\|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2}$ *- корінь квадратний з суми квадратів модулів усіх елементів матриці.*

$||C_3|| = 0.0008405 < 1$

Нехай, наприклад ми зупинились на обчиленні норми $||C_1||$. Тоді

$q = ||C_1|| = 0.001353$

Умова зупинки ітераційного процесу:

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \max_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon$$

оскільки $q \le \frac{1}{2}$.

Метод простої ітерації (Якобі)

Нульова ітерація. В якості початкового наближення візьмемо нульовий вектор $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$. Оскільки попереднього наближення на цьому кроці немає, то і відхилень e_i ($i = 1,2,3,4$) на цьому етапі немає.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	e_1	e_2	e_3	e_4	$max\ \|e_i\|$
0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
1	2,001	1	1,001	1	2,001	1	1,001	1	2,001 > ε
2	1,99964	0,99960	1,00045	0,99976	-0,00135	-0,00039	-0,00055	-0,00024	0,00135 > ε
3	1,99964	0,99960	1,00045	0,99976	5,31E-07	2,1E-07	2,72E-07	1,35E-07	5,3E-07 < ε

заокруглимо отримані значення:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1.99964 \approx 2 \\ x_2 \approx 0.99960 \approx 1 \\ x_3 \approx 1.00045 \approx 1 \\ x_4 \approx 0.99976 \approx 1 \end{cases}$$

Метод Зейделя

МЗ, як і МПІ, застосовується до систем нормального вигляду $x = d + Cx$, причому, умова завершення ітераційного процесу у МЗ така сама, як у МПІ. Отже, МЗ для даної системи ми розпочинаємо з її нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2.001 - 0.0004511x_2 - 0.0004511x_3 - 0.0004511x_4 \\ x_2 = 1.000 - 0.0000981x_1 - 0.0000981x_3 - 0.0000981x_4 \\ x_3 = 1.001 - 0.0001373x_1 - 0.0001373x_2 - 0.0001373x_4 \\ x_4 = 1.000 - 0.00005886x_1 - 0.00005886x_2 - 0.00005886x_3 \end{cases}$$

який був отриманий раніше і, оскільки $q = ||C||_1 = 0.001353 \leq \frac{1}{2}$, то умова завершення ітераційного процесу у МЗ – це та сама умова

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon.$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	e_1	e_2	e_3	e_4	$max\ \lvert e_i \rvert$
0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
1	2,001	0,999804	1,000588	0,99976	2,001	0,999804	1,000588	0,999764	2,001 > ε
2	1,99964	0,999608	1,000451	0,99976	-0,00135	-0,0002	-0,00014	9,93E-08	0,00135 > ε
3	1,99964	0,999608	1,000451	0,99976	1,5E-07	1,34E-08	-3,6E-11	-9,6E-12	1,5E-07 < ε

заокруглимо отримані значення:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1.99964 \approx 2 \\ x_2 \approx 0.99961 \approx 1 \\ x_3 \approx 1.00045 \approx 1 \\ x_4 \approx 0.99976 \approx 1 \end{cases}$$

Порівняльна таблиця

№	*Метод*	x_1	x_2	x_3	x_4	*Кількість ітерацій*
1	Точні методи	2	1	1	1	---
2	МПІ	1.9997	0.9996	1.0005	0.9998	4
3	МЗ	1.9997	0.9996	1.0005	0.9998	4