

Лабораторна робота № 2.

Тема. Операції з числами у системі **MATLAB**. Елементарна математика. Підсистема **Symbolic Math**.

Мета роботи: освоїти роботу з простими функціями, ознайомитись з деякими можливостями та командами **Symbolic Math**.

Теоретичний мінімум

Математичний пакет **MATLAB** включає до себе низьку підсистем, які виконують різні функції. Пакети **MATLAB** є унікальними наборами процедур для розв'язання найрізноманітніших математичних задач.

Symbolic Math Toolbox – це адаптована до мови **MATLAB** версія системи комп'ютерної математики **Maple** фірми **Waterloo Maple, Inc.** Дана підсистема дозволяє використовувати принципи символної математики, на основі якої можна виконувати такі рутинні операції, як розкриття дужок, перетворення виразів, знаходження коренів рівнянь, похідних функцій та виразів невизначених інтегралів, тощо, і які комп'ютер здійснює самостійно у символному вигляді без практичного втручання в цей процес користувача.

Вправа 1. Знаходження значення функції при заданих значеннях аргументу. Особливості використання операторів.

Оскільки система **MATLAB** відноситься до матричних систем, передбачається внесення спеціальних коректив при визначенні операторів. У протилежному випадку це приводить до помилок при обчислюванні.

Розглянемо приклад:

```
x =  
    1    2    3    4    5  
>> cos(x)  
ans =  
    0.5403   -0.4161   -0.9900   -0.6536    0.2837
```

Обчислення масиву косинусів пройшло коректно. В той же час при обчисленні функції $\sin(x)/x$ маємо:

```
>> sin(x)/x  
ans =  
   -0.0862
```

Обчислювання масиву значень функції $\sin(x)/x$ дає несподіваний результат – замість масиву з п'ятьма елементами отримано одне значення. Причина в тому, що оператор «/» обчислює відношення двох матриць, векторів або багатовимірних масивів. Якщо вони однієї розмірності, то

результат буде сформований одним числом, що і було здійснене системою у даному випадку. Щоб дійсно отримати вектор значень $\sin(x)/x$, необхідно використати спеціальний оператор поелементного ділення масивів «./». В цьому разі буде отриманий шуканий масив чисел:

```
>> sin(x)./x
ans =
    0.8415    0.4546    0.0470   -0.1892   -0.1918
```

Наведений вище приклад має відношення і до таких операторів, як множення «.*» та зведення в ступінь «.^».

Розглянемо інший приклад. Обчислимо наведену вище функцію, але значенням змінної буде така сукупність: $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$:

```
>> x=0:5;
>> sin(x)./x
Warning: Divide by zero.
(Type "warning off MATLAB:divideByZero" to suppress this
warning.)
ans =
    NaN    0.8415    0.4546    0.0470   -0.1892   -0.1918
```

Зауважимо, що при $x = 0$ значення $\sin(x)/x$ дає переборну невизначеність виду $0/0=1$ (Увага: Ділення на нуль). Однак, як і всяка чисельна система, **MATLAB** класифікує спробу розглядання операції ділення на 0 як помилку, та виводить відповідне попередження. Але замість очікуваного чисельного значення виводиться символна константа **NaN**, що позначає невизначеність виду $0/0$ (зауважимо, що невизначеність не є звичайним числом, а символом).

Розглянемо приклади обчислювання функцій при заданому діапазоні значень змінної.

Приклад 1. Обчислити значення функції $y = e^{-2x} \sin x + \log 2x$ при $0.2 \leq x \leq 4$, $\Delta x = 0.5$ ю

Розв'яжемо задачу за допомогою наступних команд:

```
>> format long
>> x=0.2:0.2:4;
>> y=exp(-2*x).*sin(x)+log(2*x)
y =
Columns 1 through 4
-0.78311869690974   -0.04816661095642   0.35238860158033
0.61483532616061
Columns 5 through 8
0.80702789462431   0.96002141561858   1.08954467697576
1.20389563290425
Columns 9 through 12
```

```

1.30754298783413  1.40294872443208  1.49153072608432
1.57417480903071
Columns 13 through 16
1.65150242211403  1.72400533826702  1.79210927075520
1.85620099838305
Columns 17 through 20
1.91663799685337  1.97375064653913  2.02784204213370
2.07918766272596

```

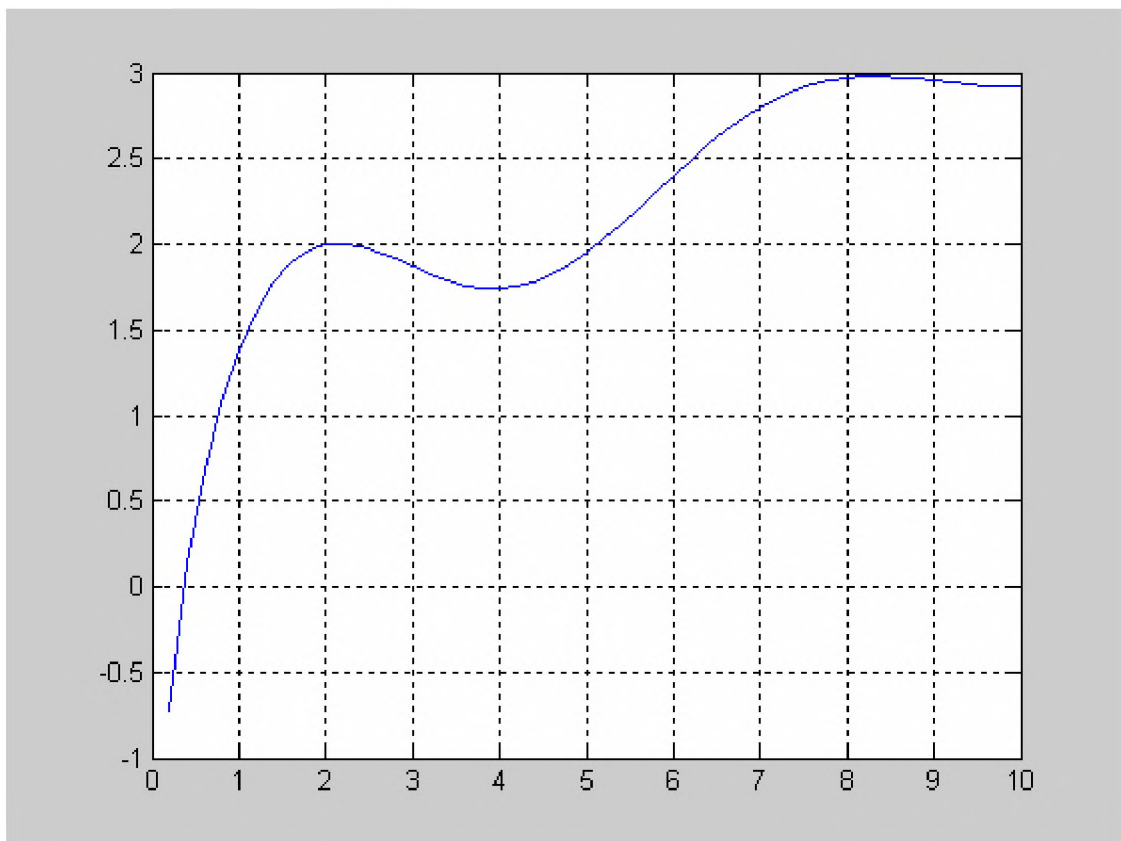
Зверніть увагу, що результати обчислювання надані у форматі **long**. Рекомендуємо виконати самостійно таке ж саме обчислювання у форматі **short**.

Для зручності аналізу, а також для показу можливостей системи **MATLAB**, можна побудувати графік обчислюваної функції за допомогою елементарної команди побудови графіків **plot** (детальніше графічні можливості **MATLAB** будуть наведені у лабораторній роботі № 3). В даному прикладі розширимо діапазон значень аргументу x при обчислюванні функції:

```

>> x=0.2:0.2:10;
>> y=exp(-0.2*x).*sin(x)+log(2*x);
>> plot(x,y);grid on

```



Мал. 2.1 – Графік функції $y = e^{-2x} \sin x + \log 2x$ в полі графічного вікна

Вправа 2. Правила використання комплексних чисел. Елементарні операції з комплексними числами та функціями комплексного аргументу.

В системі **MATLAB** дозволяється виконувати обчислення з комплексними числами [33, с.37]. Нагадаємо, що такі числа містять дійсну й мниму частини: $z = x + i \cdot y = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$. Мнима частина має множник i або j , який називається мнимою одиницею ($i = \sqrt{-1}$):

```
>>b=5*(2.2+3.9i)+0.8  
b =  
11.8000 +19.5000i
```

Якщо коефіцієнтом при мній одиниці не є число, то при вводі такого комплексного числа необхідно користуватись знаком множення. Наприклад, замість виразу $a + ib$ треба вводити $a + i * b$, щоб програма не видала повідомлення про помилку.

Найпростіші операції з комплексними числами: операція додавання «+», операція віднімання «-», операція множення «*», операція ділення зліва направо «/», операція ділення справа наліво «\», операція піднесення до степеня «^». Ці операції здійснюються за допомогою арифметичних знаків, що наводяться у дужках, наприклад:

```
>> format long;  
>> x=2+3i;  
>> y=-2+5i;  
>> disp(x+y)  
0 +8.000000000000000e+000i  
>> disp(x-y)  
4.000000000000000e+000 -2.000000000000000e+000i  
>> disp(x/y)  
3.793103448275862e-001 -5.517241379310345e-001i  
>> disp(x*y)  
-1.900000000000000e+001 +4.000000000000000e+000i  
>> disp(x\y)  
8.461538461538463e-001 +1.230769230769231e+000i  
>> disp(x^y)  
-1.482729564776616e-004 -5.450608337156012e-004i
```

У даному фрагменті використовується функція **disp** (від слова «дисплей»), що дозволяє виводити в командне вікно результати обчислень або будь-який текст. При цьому результат обчислень (число) виводиться без вказівки імені змінної чи імені **ans**, яким звичайно повинен присвоюватись результат.

При використанні комплексних аргументів є можливість обчислити всі елементарні математичні функції, що задаються в системі **MATLAB**. Наприклад:

```
>> x=2+3i; y=-1+5i;
>> disp (sqrt(x))
1.674149228035540e+000 +8.959774761298381e-001i
>> disp (sin(x))
9.154499146911430e+000 -4.168906959966565e+000i
>> disp (exp(y))
1.043534862696817e-001 -3.527685262888061e-001i
>> disp (abs(y))
5.099019513592785e+000
```

У системі **MATLAB** існують кілька додаткових функцій, розрахованих лише на комплексний аргумент. За допомогою наведених вище команд можна виконати наступні операції:

```
>> x=2+3i; y=-1+5i;
>> disp (real(y))
-1
>> disp (imag(x))
3
>> disp (angle(x))
9.827937232473291e-001
>> disp (conj(y))
-1.000000000000000e+000 -5.000000000000000e+000i
```

Звернемо увагу на існування спеціальної функції **cplxpair(V)**. Дана функція здійснює сортування заданого вектора (**V**) з комплексними елементами таким чином, що комплексно-спряжні пари цих елементів розташовуються у вихідному векторі у порядку зростання їх дійсних частин. При цьому елемент з від'ємною уявною частиною завжди розташовується першим.

Вправа 3. Підсистема **Symbolic Math Toolbox**. Команди та функції символічних об'єктів.

Підсистема **Symbolic Math Toolbox** – пакет прикладних програм, що дають системі **MATLAB** принципово нові можливості, — можливості розв'язку задач в символічному (аналітичному) вигляді, що включають реалізацію точної арифметики довільної розрядності. Пакет базується на застосуванні ядра символічної математики однієї з наймогутніших систем комп'ютерної алгебри — **Maple V R4**. **Symbolic Math** забезпечує виконання символічного диференціювання і інтегрування, обчислення сум і добутків, розкладання в ряди Тейлора і Маклорена, операції з поліномами, обчислення коренів поліномів, розв'язок в аналітичному виді нелінійних рівнянь, різні символічні перетворення, підстановки, тощо.

Пакет дозволяє готувати процедури з синтаксисом мови програмування системи **Maple V R4** і встановлювати їх в системі **MATLAB**. Але по

можливостях символної математики пакет сильно поступається спеціалізованим системам комп'ютерної алгебри, таким як нові версії **Maple** і **Mathematica**.

Для одержання переліку доступних в системі **MATLAB** команд системи символної математики **Maple** можна звернутися до довідкової системи та набрати назву команди у рядку вводу команди:

```
>> help symbolic
```

У процесі виконання команд **Symbolic Math Toolbox** результати надаються змінним **MATLAB** і можуть бути використані у інших режимах обчислювання, візуалізації і т.д. [20, с.453]. Для одержання довідки про математичні команди із символного пакету **Symbolic Math Toolbox** варто попереду імені команди записати префікс **sym**:

```
>> help sym/diff
```

DIFF Differentiate.

DIFF(S) differentiates a symbolic expression S with respect to its

free variable as determined by FINDSYM.

DIFF(S,'v') or DIFF(S,sym('v')) differentiates S with respect to v.

DIFF(S,n), for a positive integer n, differentiates S n times.

DIFF(S,'v',n) and DIFF(S,n,'v') are also acceptable.

Examples;

```
x = sym('x');
```

```
t = sym('t');
```

```
diff(sin(x^2)) is 2*cos(x^2)*x
```

```
diff(t^6,6) is 720.
```

See also INT, JACOBIAN, FINDSYM.

Існує інший варіант отримання довідки про команду з системи **Maple**, наприклад, у формі наступного запиту:

```
>> mhelp diff
```

Рекомендуємо виконати цей запис та ознайомитися з наданою інформацією.

Для роботи з командами ядра системи **Maple** у **MATLAB** визначено новий тип об'єкту **sym** – символний об'єкт (**symbolic object**). Для проведення аналітичних операцій інтегрування, диференціювання та інших потрібно, щоб відповідні аргументи функцій були попередньо оголошені. Група символних змінних може бути створена за допомогою описувача **syms**. Наприклад:

```
>> syms s1 s2
```

Для введення однієї символної змінної можна застосувати команду **sym**:

```
>> s3=sym('s3')
s3 =
s3
```

Нова символна змінна, яка виражається через попередньо задані змінні, може бути визначена наступним чином:

```
>> s4=(cos(s1)*s2+sqrt(5)*s3)
s4 =
cos(s1)*s2+5^(1/2)*s3
```

Для представлення аналітичного виразу в більш звичайній для розуміння формі використовується команда **pretty**:

```
>> pretty(s4)
              1/2
cos(s1) s2 + 5  s3
```

Виявити символні змінні у заданому виразі дозволяє команда **findsym**:

```
>> findsym(s4)
ans =
s1, s2, s3
```

Команда **sym** використовується також для введення абстрактної функції:

```
>> f=sym('f(x)')
f =
f(x)
```

Вправа 4. Аналітичні перетворення за допомогою команд підпакету **Symbolic Math Toolbox**.

Робота у системі **MATLAB** відрізняється від прийнятого у системі **Maple** стилю. Наприклад, треба визначити модуль комплексного виразу:

```
>> syms x y real; az=abs(x+i*y)
(x^2+y^2)^(1/2)
```

Надамо змінній **y** числове значення і застосуємо змінну **az**, яка містить змінну **y**:

```
az =
>> y=1;az
az =
(x^2+y^2)^(1/2)
```

Автоматичної підстановки значення змінної не відбулося. У системі **MATLAB** треба звернутися до спеціальної команди **subs**, щоб привласнити змінним, що приймають участь у виразі **az**, ті значення, які вони отримують в процесі розрахунків:

```
>> subs(az)
ans =
(x^2+1)^(1/2)
```

Команда **subs** має наступний формат:

```
>> subs(s,old,new),
```

де **s** – вираз, у якому здійснюється підстановка нових виразів (**new**) замість існуючих (**old**), де **new**, **old** – символьні змінні, рядки, визначені за допомогою квадратних дужок. Наприклад:

```
>> syms x y
>> z=x^2+y^2
z =
x^2+y^2
>> d=subs(z,[x,y],[cos(x),sin(x)])
d =
cos(x)^2+sin(x)^2
```

Автоматичного спрощення виразу не відбувається. Щоб реалізувати процес спрощення, використовуємо команду **simplify**:

```
>> simplify(d)
ans =
1
```

Крім потужної багатоцільової команди **simplify** у системі **MATLAB** заслуговує уваги команда **simple**, яка дає можливість переглянути результати застосування різних операцій.

Розглянемо результат дії команди **simple** у випадку елементарного підведення у квадрат змінної **d**:

```
>> simple(d^2)
simplify:
1
radsimp:
(cos(x)^2+sin(x)^2)^2
combine(trig):
1
factor:
(cos(x)^2+sin(x)^2)^2
expand:
cos(x)^4+2*cos(x)^2*sin(x)^2+sin(x)^4
combine:
1
convert(exp):
((1/2*exp(i*x)+1/2/exp(i*x))^2-1/4*(exp(i*x)-
1/exp(i*x))^2)^2
convert(sincos):
(cos(x)^2+sin(x)^2)^2
convert(tan):
```



```
((1-
tan(1/2*x)^2)^2/(1+tan(1/2*x)^2)^2+4*tan(1/2*x)^2/(1+tan(1/2
*x)^2)^2)^2
collect(x):
(cos(x)^2+sin(x)^2)^2
ans =
1
```

Наведемо назви команд для аналітичних операцій, які застосовуються у випадку перетворення виразів:

- **subs** – операція підстановки;
- **subexpr** – операція запису з підстановками та використанням проміжних величин;
- **simplify** – операція спрощення виразу;
- **simple** – операція спрощення виразу з перерахуванням варіантів;
- **expand** – операція розкриття дужок;
- **factor** – операція розкладання виразу на множники;
- **collect** – операція перетворення вираження в поліном з виділенням коефіцієнтів при степенях заданих змінних;
- **numden** – операція приведення до раціональної форми;

Практичні завдання лабораторної роботи № 2

Виконати наступні завдання

Завдання 1. Обчислити значення функції (див. варіанти у таб. 2.1) для визначених значень аргументу x : $-1 \leq x \leq 1$, $\Delta x = 0.1$. Результат визначити в різних форматах і проаналізувати інформацію про змінні за допомогою команди **whos**.

Таблиця 2.1 – Варіанти до завдання № 1

№ п/п	Функція $y(x)$
1.	$1/\sqrt{x^3 + 4x^2 - 6} + \cos x$
2.	$(x + 3)tgx^3 - \sqrt{x^3}$
3.	$3/\sqrt{3x^4 - 5x^3 + 1} + \sin 2x$
4.	$3 + 2\sqrt{x^2}(ctgx + 2)$
5.	$(x + 1)/\sqrt{(\cos x^2 + 1)}$
6.	$\ln(x^2 + 1)/\sqrt{\sin(x^3 - x^2)}$
7.	$(2x^2 + 3)\cos 2x / \lg x$

Закінчення таблиці 2.1

8.	$\sin 2x / (x^4 + x^3 - x^2)$
9.	$(x^3 + 3x^2 - 1) \operatorname{tg}(x - 0.1)$
10.	$\sqrt{3x} \cos x / (2x^2 + 3)$
11.	$(x + 1) / \sqrt{(\sin x^2 - 2)}$
12.	$\lg(x^2 + 1) / (x^3 - 1)$
13.	$1 + 2\sqrt{3x^2} (\cos 2x - 1)$
14.	$(x + 3)^2 \operatorname{tg} x^2 - \sqrt{x + 1}$

Завдання 2. Задати два комплексних числа z_1 і z_2 (варіанти чисел z_1 і z_2 див. у таблиці 2.2). Обчислити їх суму, добуток та частку. Виділити дійсну та мниму частини результатів операцій.

Таблиця 2.2 – Варіанти до завдання № 2

№ п/п	z_1	z_2
1	$2 + 3i$	$3 + 2i$
2	$1 - i$	$5 - 4i$
3	$3 + 2i$	$3 + 2i$
4	$4 - 2i$	$9 - 6i$
5	$3 - 5i$	$3 + 6i$
6	$4 - i$	$6 - i$
7	$3 - 5i$	$3 + i$
8	$5 + i$	$5 - 4i$
9	$6 - 3i$	$3 + 8i$
10	$5 + 4i$	$8 - i$
11	$4 + 6i$	$1 - 7i$
12	$7 - i$	$2 + 6i$
13	$5 - 3i$	$3 - 7i$
14	$4 - 6i$	$9 - i$

Завдання 3. Знайти квадратний корінь із комплексного числа z_1 та визначити модуль результату.

Завдання 4. Обчислити натуральний логарифм комплексного числа z_2 .

Завдання 5. Задати символічні змінні x , y .

Завдання 6. Призначити символічній змінній z відповідний вираз (варіанти виразів надані у таблиці 2.3).

Таблиця 2.3 – Варіанти до завдання № 6

№ п/п	Вираз z
1	$x^3 - 2y^2$
2	$3x + y^4$
3	$2x + y^2$
4	$x^3 - y^3$
5	$x + y^2$
6	$x^2 - y$
7	$x^2 + y^2$
8	$x^2 - 3y$
9	$2x^2 - y$
10	$x + 2y^2$
11	$x^3 + y$
12	$x^2 - y^2$
13	$3x^2 - y^3$
14	$2x^3 + 3y^2$

Завдання 7. Знайти вираз z^2 та присвоїти результат символьній змінній az .
Потім у виразі az розкрити дужки та присвоїти результат $az1$.

Завдання 8. Вираз $az1$ розкласти на множники та привести результат до компактної форми.

Зразок виконання завдань №№ 5-9:

```
>> syms x y
>> z=x^2-3*y^3;
>> az=z^2
az =
(x^2-3*y^3)^2
>> az1=expand(az)
az1 =
x^4-6*x^2*y^3+9*y^6
>> factor(az1)
ans =
(x^2-3*y^3)^2
```

Зауважимо про необхідність запам'ятати назви команд, що здійснюють наступні операції:

abs – визначенні модулю числа;

i,j – мнима одиниця;

imag – знаходження мнимої частини комплексного виразу;

real – знаходження дійсної частини виразу;

log – знаходження натурального логарифму;

syms – операція оголошення символьних змінних;

subs – операція підстановки;

expand – операція розкриття дужок;

factor – операція розкладання комплексного виразу на множники;

numden— приведення виразу до раціональної компактної форми.

Методичні вказівки:

- для формування сітки в робочому вікні, де буде побудований графік функції, використовується команда **grid on**.

Контрольні питання

1. У якому вигляді зберігаються дані у системі **MATLAB**?
2. Поясніть різницю між операторами «.^» і «^».
3. Які символи у системі **MATLAB** зарезервовані для позначення мнимої одиниці?
4. Наведіть приклади функцій комплексного аргументу.
5. Для чого у **MATLAB** використовується підсистема **Symbolic Math**?
6. Опишіть деякі команди з підсистеми **Symbolic Math**, які дозволяють здійснювати перетворення аналітичних виразів.
7. Наведіть послідовність операцій для отримання довідки про команду **int** підсистеми **Symbolic Math** та системи **Maple**?