Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Інститут фізико-технічних та комп'ютерних наук

Відділ комп'ютерних технологій

Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

ЗВІТ

про виконання лабораторної роботи №2

з дисципліни «Числові методи».

<u>Тема</u>: Точне та наближене розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав студент Бужак А.В.

Курс III

Група 341

Викладач Філіпчук О.І.

Чернівці – 2018

Хід роботи

<u>*Частина 1:*</u> *Прямі (точні) методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

Варіант №4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

а) Метод Крамера. Обчислимо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0.$$

Головний визначник системи відмінний від нуля, тому за теоремою Крамера дана СЛАР має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера. Обчислимо ще три допоміжні визначники Δ_j $(j = 1,2,3,4)$, замінюючи кожен раз -й стовпець стовпчиком правих частин вихідної системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -306, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -153, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -153.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 1.$$

б) Метод Гаусса.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$AX := \text{augment}(A, B) \qquad AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AG := \text{rref}(AX) \qquad AG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x := \text{submatrix}(AG, 0, 3, 4, 4) \qquad x^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Матричний метод (метод оберненої матриці).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

г) Метод LU-розкладу.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$m1 := \text{submatrix}(A,0,0,0,0) = (1) \qquad \Delta 1 := |m1| = 1$$

$$m2 := \text{submatrix}(A,0,1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta 2 := |m2| = -4$$

$$m3 := \text{submatrix}(A,0,2,0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Delta 3 := |m3| = 27$$

$$\Delta 4 := |A| = -153$$

Розв'язок у системі MatLab

```
>> A = [1 1 2 3;3 -1 -1 -2;2 3 -1 -1;1 2 3 -1];
>> B = [8;2;5;6];
>> [L,U] = lu(A); X = U \ (L \ B)

X =

    2.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

Усі головні мінори відмінні від нуля, тому для такої матриці можливий LU-розклад.

Подамо матрицю вихідної системи у вигляді добутку $A = LU$, де

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$ - нижньотрикутна матриця з одиницями на головній діагоналі

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$ - верхньотрикутна матриця.

Знайдемо елементи матриць L та U з рівності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Виконаємо множення матриць у правій частині останньої рівності і отримаємо:

$$A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}*u_{11} & l_{21}*u_{12}+u_{22} & l_{21}*u_{13}+u_{23} & l_{21}*u_{14}+u_{24} \\ l_{31}*u_{11} & l_{31}*u_{12}+l_{32}*u_{22} & l_{31}*u_{13}+l_{32}*u_{23}+u_{33} & l_{31}*u_{14}+l_{32}*u_{24}+u_{34} \\ l_{41}*u_{11} & l_{41}*u_{12}+l_{42}*u_{22} & l_{41}*u_{13}+l_{42}*u_{23}+l_{43}*u_{33} & l_{41}*u_{14}+l_{42}*u_{24}+l_{43}*u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}=LU$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_{11}=1 \\ u_{12}=1 \\ u_{13}=2 \\ u_{14}=3 \\ l_{21}*u_{11}=3 \\ l_{21}*u_{12}+u_{22}=-1 \\ l_{21}*u_{13}+u_{23}=-1 \\ l_{21}*u_{14}+u_{24}=-2 \\ l_{31}*u_{11}=2 \\ l_{31}*u_{12}+l_{32}*u_{22}=3 \\ l_{31}*u_{13}+l_{32}*u_{23}+u_{33}=-1 \\ l_{31}*u_{14}+l_{32}*u_{24}+u_{34}=-1 \\ l_{41}*u_{11}=1 \\ l_{41}*u_{12}+l_{42}*u_{22}=2 \\ l_{41}*u_{13}+l_{42}*u_{23}+l_{43}*u_{33}=3 \\ l_{41}*u_{14}+l_{42}*u_{24}+l_{43}*u_{34}+u_{44}=-1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} u_{11}=1 \\ u_{12}=1 \\ u_{13}=2 \\ u_{14}=3 \\ l_{21}=3 \\ u_{22}=-4 \\ u_{23}=-7 \\ u_{24}=-11 \\ l_{31}=2 \\ l_{32}=-0{,}25 \\ u_{33}=-6{,}75 \\ u_{34}=-9{,}75 \\ l_{41}=1 \\ l_{42}=-0{,}25 \\ l_{43}=0{,}11 \\ u_{44}=-5{,}67 \end{array}\right.$$

Матриці L та U будуть мати вигляд:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6{,}75 & -9{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & -5{,}67 \end{pmatrix}$$

Маємо $LUx = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6{,}75 & -9{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & -5{,}67 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Позначивши $Ux = y$, отримаємо $Ly = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 1 & -0{,}25 & 0{,}11 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Звідси,

$$\begin{cases} y_1 = 8 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ 2y_1 - 0,25y_2 + y_3 = 5 \\ y_1 - 0,25y_2 + 0,11y_3 + y_4 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = -22 \\ y_3 = -16,5 \\ y_4 = -5,67 \end{cases}$$

повернемось до системи Ux = y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -6,75 & -9,75 \\ 0 & 0 & 0 & -5,67 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -22 \\ -16,5 \\ -5,67 \end{pmatrix}$$

Виконавши множення матриць у останній рівності, приходимо до східчастої системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -22 \\ -6,75x_3 - 9,75x_4 = -16,5 \\ -5,67x_4 = -5,67 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Відповідно до всіх методів, отримали розв'язок вихідної системи $x^* = (2, 1, 1, 1)$.

<u>Частина 2:</u> Наближені методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

[Теоретичні відомості та розв’язання типових прикладів]

Хід роботи

Попередньо звівши задану СЛАР до нормального вигляду, знайдемо наближене значення її розв'язку наближеними методами з точністю до ε = 0,001:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Зведемо вихідну СЛАР до нормального (ітераційного) вигляду методом множення на матрицю $(A - \varepsilon)^{-1}$.

Матриця вихідної системи, очевидно, не задовольняє умовам діагонального переважання, адже

$|a_{11}| = 1 < 1+2+3 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|$
$|a_{22}| = 1 < 3+1+2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|$
$|a_{33}| = 1 < 2+3+1 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}|$
$|a_{44}| = 1 < 1+2+3 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}|$

Матриця A є невиродженою, тому що визначник відмінний від 0, det(A) = -153.

Візьмемо ε = 0,001 і побудуємо матрицю $(A - \varepsilon)^{-1}$. Матриця $A - \varepsilon$ має вигляд

$$A - \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{999}{1000} & \frac{999}{1000} & \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} \\ \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{2001}{1000} \\ \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} & -\frac{1001}{1000} \\ \frac{999}{1000} & \frac{1999}{1000} & \frac{2999}{1000} & -\frac{1001}{1000} \end{pmatrix}$$

Тоді $(A - \varepsilon)^{-1}$ матиме вигляд:

$$(A - \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix}$$

Помножимо матрицю А та В на знайдену матрицю $(A-\varepsilon)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50985}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} \\ \frac{15017132}{153060616197} & \frac{50967}{50962} & \frac{5}{50962} & \frac{5}{50962} \\ \frac{7}{50962} & \frac{7}{50962} & \frac{50969}{50962} & \frac{7}{50962} \\ \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{116451134672}{116444279901} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{27011}{152886} & \frac{38975}{152886} & \frac{6005}{152886} & -\frac{997}{50962} \\ -\frac{997}{50962} & -\frac{8993}{50962} & \frac{12991}{50962} & \frac{1999}{50962} \\ \frac{6005}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{26977}{152886} & \frac{12991}{50962} \\ \frac{38975}{152886} & -\frac{5995}{152886} & \frac{2999}{152886} & -\frac{8993}{50962} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{102039}{50962} \\ \frac{50987}{50962} \\ \frac{50997}{50962} \\ \frac{50977}{50962} \end{pmatrix}$$

Отримуємо таку рівність:

$$\begin{pmatrix} \frac{50985}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} & \frac{23}{50962} \\ \frac{15017132}{153060616197} & \frac{50967}{50962} & \frac{5}{50962} & \frac{5}{50962} \\ \frac{7}{50962} & \frac{7}{50962} & \frac{50969}{50962} & \frac{7}{50962} \\ \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{3}{50962} & \frac{116451134672}{116444279901} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{102039}{50962} \\ \frac{50987}{50962} \\ \frac{50997}{50962} \\ \frac{50977}{50962} \end{pmatrix}$$

Дана матриця задовольняє умови діагонального переважання. Якщо помножити рівняння на 50962, ми отримаємо систему:

$$\begin{cases} 50985x_1 + 23x_2 + 23x_3 + 23x_4 = 102039 \\ 5x_1 + 50967x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 50987 \\ 7x_1 + 7x_2 + 50969x_3 + 7x_4 = 50997 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 50965x_4 = 50977 \end{cases}$$

Далі розв'язуємо рівняння перетвореної системи відносно x і отримуємо систему у нормальному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 2.001 - 0.0004511x_2 - 0.0004511x_3 - 0.0004511x_4 \\ x_2 = 1.000 - 0.0000981x_1 - 0.0000981x_3 - 0.0000981x_4 \\ x_3 = 1.001 - 0.0001373x_1 - 0.0001373x_2 - 0.0001373x_4 \\ x_4 = 1.000 - 0.00005886x_1 - 0.00005886x_2 - 0.00005886x_3 \end{cases} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2.001 \\ 1.000 \\ 1.001 \\ 1.000 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -0.0004511 & -0.0004511 & -0.0004511 \\ -0.0000981 & 0 & -0.0000981 & -0.0000981 \\ -0.0001373 & -0.0001373 & 0 & -0.0001373 \\ -0.00005886 & -0.00005886 & -0.00005886 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайдемо норми матриці С:

☑ $\|C\|_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$ *- максимум сум модулів елементів рядків*

$$i := 0, 1 .. 3 \qquad C1_i := \sum_{j=0}^{3} |C_{i,j}| \qquad C1^T = \begin{pmatrix} 1.353 \times 10^{-3} & 2.943 \times 10^{-4} & 4.12 \times 10^{-4} & 1.766 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$||C_1|| = 0.001353 < 1$

☑ $\|C\|_2 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{ij}|$ *- максимум сум модулів елементів стовпців*

$$i := 0, 1 .. 3 \qquad C2_i := \sum_{j=0}^{3} |C_{j,i}| \qquad C2^T = \begin{pmatrix} 2.943 \times 10^{-4} & 6.473 \times 10^{-4} & 6.081 \times 10^{-4} & 6.866 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$||C_2|| = 0.0006866 < 1$

☑ $\|C\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2}$ *- корінь квадратний з суми квадратів модулів усіх елементів матриці.*

$||C_3|| = 0.0008405 < 1$

Нехай, наприклад ми зупинились на обчиленні норми $||C_1||$. Тоді

$q = ||C_1|| = 0.001353$

Умова зупинки ітераційного процесу:

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1\le i\le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon$$

оскільки $q \le \frac{1}{2}$.

Метод простої ітерації (Якобі)

Нульова ітерація. В якості початкового наближення візьмемо нульовий вектор $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$. Оскільки попереднього наближення на цьому кроці немає, то і відхилень e_i (i = 1,2,3,4) на цьому етапі немає.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	e_1	e_2	e_3	e_4	$max\ \lvert e_i \rvert$
0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
1	2,001	1	1,001	1	2,001	1	1,001	1	2,001 > ε
2	1,99964	0,99960	1,00045	0,99976	-0,00135	-0,00039	-0,00055	-0,00024	0,00135 > ε
3	1,99964	0,99960	1,00045	0,99976	5,31E-07	2,1E-07	2,72E-07	1,35E-07	5,3E-07 < ε

заокруглимо отримані значення:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1.99964 \approx 2 \\ x_2 \approx 0.99960 \approx 1 \\ x_3 \approx 1.00045 \approx 1 \\ x_4 \approx 0.99976 \approx 1 \end{cases}$$

Метод Зейделя

МЗ, як і МПІ, застосовується до систем нормального вигляду $x = d + Cx$, причому, умова завершення ітераційного процесу у МЗ така сама, як у МПІ. Отже, МЗ для даної системи ми розпочинаємо з її нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2.001 - 0.0004511x_2 - 0.0004511x_3 - 0.0004511x_4 \\ x_2 = 1.000 - 0.0000981x_1 - 0.0000981x_3 - 0.0000981x_4 \\ x_3 = 1.001 - 0.0001373x_1 - 0.0001373x_2 - 0.0001373x_4 \\ x_4 = 1.000 - 0.00005886x_1 - 0.00005886x_2 - 0.00005886x_3 \end{cases}$$

який був отриманий раніше і, оскільки $q = ||C||_1 = 0.001353 \leq \frac{1}{2}$, то умова завершення ітераційного процесу у МЗ – це та сама умова

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon.$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	e_1	e_2	e_3	e_4	$max\ \lvert e_i \rvert$
0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
1	2,001	0,999804	1,000588	0,99976	2,001	0,999804	1,000588	0,999764	2,001 > ε
2	1,99964	0,999608	1,000451	0,99976	-0,00135	-0,0002	-0,00014	9,93E-08	0,00135 > ε
3	1,99964	0,999608	1,000451	0,99976	1,5E-07	1,34E-08	-3,6E-11	-9,6E-12	1,5E-07 < ε

заокруглимо отримані значення:

$$\begin{cases} x_1 \approx 1.99964 \approx 2 \\ x_2 \approx 0.99961 \approx 1 \\ x_3 \approx 1.00045 \approx 1 \\ x_4 \approx 0.99976 \approx 1 \end{cases}$$

Порівняльна таблиця

№	*Метод*	x_1	x_2	x_3	x_4	*Кількість ітерацій*
1	Точні методи	2	1	1	1	---
2	МПІ	1.9997	0.9996	1.0005	0.9998	4
3	МЗ	1.9997	0.9996	1.0005	0.9998	4