Лабораторна робота №1

Тема: Наближене розв'язування нелінійних рівнянь
Частина 1: Відокремлення коренів

Мета: *ознайомлення студентів з основними поняттями та алгоритмами відокремлення коренів нелінійних рівнянь; набуття практичних навичок розв'язання таких задач з використанням комп'ютера (з допомогою пакету **MathCad**).*

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал [**1**, сс. 158-163], [**2**, сс. 10-15], [**3**].

2. З'ясувати структуру коренів нелінійного рівняння відповідно до свого варіанту та відокремити корені поєднанням трьох методів:

- ☑ ***аналітичним*** (встановити наявність дійсних коренів; з'ясувати кількість додатних та від'ємних дійсних коренів; встановити кільце, в якому знаходяться усі корені рівняння);
- ☑ ***табличним*** (уточнити інтервали ізоляції дійсних коренів);
- ☑ ***графічним*** (з використанням пакету *MathCad*).

Основні означення та твердження

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

де $f(x)$ - задана функція дійсного або комплексного аргументу, визначена і неперервна на деякій множині X. Ми розглядатимемо випадок ***нелінійних рівнянь***, тобто рівнянь вигляду (1), де $f(x)$ - нелінійна функція, яка, зокрема, може бути алгебричним многочленом.

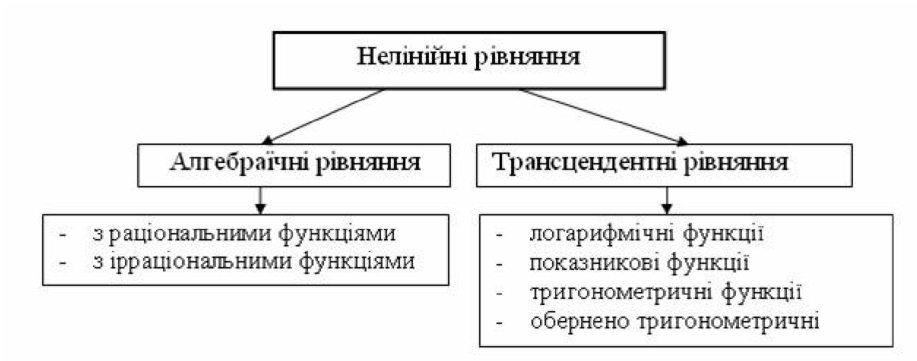


Рис. 1. *Класифікація нелінійних рівнянь*

<u>*Означення 1*</u>. Число x^*, при якому $f(x^*) = 0$ називається ***коренем*** або ***розв'язком*** рівняння (1).

<u>*Означення 2*</u>. Якщо $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) = 0, \ldots,$ $f^{(n-1)}(x^*) = 0$, а $f^{(n)}(x^*) = 0$, то кажуть, що x^* n***-кратним коренем*** рівняння (1).

Рівняння (1) може бути заміною $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ перетворене до вигляду

$$f_1(x) = f_2(x). \qquad \textbf{(2)}$$

Зрозуміло, що і навпаки, рівняння вигляду (2) можна звести до вигляду (1). Тому надалі розглядатимемо рівняння вигляду (1).

Графічно корені рівняння (1) – це точки перетину графіка $y = f(x)$ з віссю абсцис (рис. 2 а; при цьому x_1^*, x_2^*, x_3^* - прості корені, оскільки при переході через них графік не змінює напрям опуклості, x_4^*, x_5^* - кратні корені: x_4^* - непарної кратності, адже при переході через x_4^* функція змінює знак, а її графік змінює напрям опуклості, x_5^* - парної кратності, адже при переході через x_5^* функція не змінює свій знак і зберігає напрям опуклості). А корені рівняння (2) – це абсциси точок перетину графіків $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ (рис. 2 б).

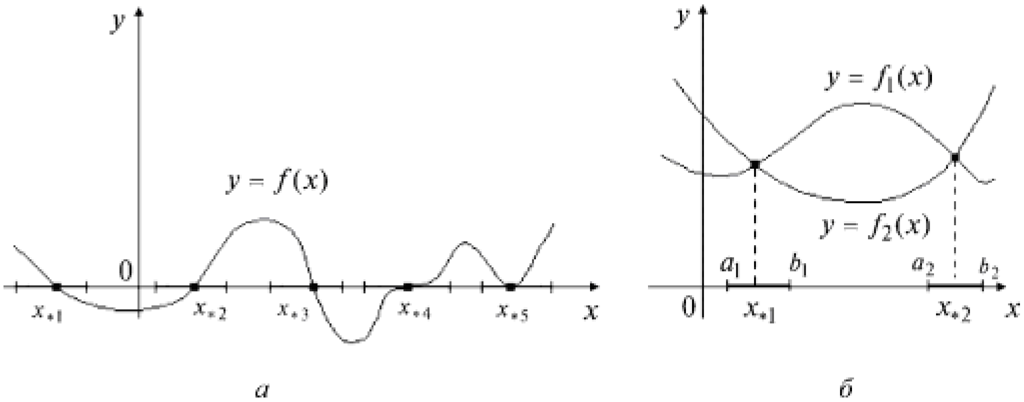


Рис. 2. *Графічна інтерпретація коренів нелінійних рівнянь*

Якщо функція $f(x)$ у лівій частині рівняння (1) є многочленом n-го степеня

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0, \quad (3)$$

тобто (1) є алгебраїчним рівнянням вигляду

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0, \quad (4)$$

Відповідно до класичного результату Галуа алгебраїчне рівняння (4) при $n > 5$ не має розв'язку в замкненому (формульному) вигляді. Тому корені алгебраїчних ($n > 2$) та трансцендентних рівнянь зазвичай визначаються наближено із заданою точністю.

Обчислювальні алгоритми ***наближених методів*** складаються з таких етапів:

I) відокремлення коренів;

II) уточнення наближених коренів.

Означення 3. ***Відокремлення коренів рівняння*** або ***визначення відрізків ізоляції коренів*** – це відшукання достатньо малих відрізків $[a_i, b_i]$, що належать області визначення рівняння, у кожному з яких є один і тільки один простий або кратний корінь $x_i^* \in [a_i, b_i]$ рівняння $f(x) = 0$.

Власне, на етапі відокремлення коренів відбувається грубе наближене знаходження коренів вихідного рівняння.

Означення 4. ***Уточнення кореня*** – це обчислення кореня із заданою точністю, якщо відоме деяке початкове його наближення в інтервалі ізоляції.

Грубе значення кожного кореня, знайдене на кроці відокремлення (ізоляції), уточнюється до заданої точності одним з чисельних методів, в яких реалізуються послідовні наближення.

Відокремлення дійсних коренів нелінійного рівняння ґрунтується на класичній теоремі аналізу.

Теорема 1 (Больцано-Коші). *Нехай $f(x)$ - неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, що набуває значень різних знаків на кінцях вказаного відрізка (тобто $f(a)f(b) < 0$). Тоді* *всередині інтервалу* (a,b) *міститься принаймні один корінь рівняння* $f(x)=0$, *тобто існує таке* $x^* \in (a,b)$, *що* $f(x^*)=0$.

Більше того, корінь x^* *буде єдиним на* (a,b), *якщо функція* $f(x)$ *є монотонною на даному інтервалі, тобто* $f'(x)>0$ *(або* $f'(x)<0$*) для всіх* $a<x<b$.

Для відокремлення коренів нелінійних рівнянь є три способи:
- ☑ табличний (табуляція функцій);
- ☑ графічний;
- ☑ аналітичний.

Крім того, ці способи можна комбінувати.

Табличний спосіб (табуляція функції)

Для знаходження проміжків ізоляції коренів рівняння (1) будують таблицю значень функції $y=f(x)$ на достатньо великому проміжку $[a,b]$ області визначення з великим кроком h_1. Далі з'ясовується, на якому підпроміжку $[a_2,b_2]$ функція $f(x)$ змінює знак. Знову табулюємо її на цьому проміжку з довільним кроком $h_2<h_1$. На практиці достатньо мати проміжок у межах одиниць, наприклад, [-3,2].

На підставі теореми Больцано-Коші можна записати такий ***алгоритм знаходження проміжку*** $[a,b]$.

1. Знайти область визначення функції $f(x)$ з лівої частини рівняння (1).

2. Знайти китичні точки функції $f(x)$ (тобто обчислити похідну $f'(x)$ і знайти точки, в яких похідна не існує або перетворюється в нуль).

3. Записати інтервали монотонності.

4. Дослідити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.

5. Визначити проміжки ізоляції коренів.

6. Звузити ці проміжки, протабулювавши функцію.

Графічний спосіб

Якщо функція $f(x)$ у лівій частині нелінійного рівняння (2) має нескладний вигляд, то знаходяться точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю абсцис. Якщо це важко зробити, то, зобразивши ліву частину рівняння (1) у вигляді $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, перепишемо його у вигляді (2):

$$f_1(x)=f_2(x),$$

де $f_1(x)$, $f_2(x)$ - достатньо прості функції, графіки (ескізи графіків) яких легко побудувати. Абсциси точок перетину графіків $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ дадуть наближене значення розв'язку рівняння (1).

Аналітичний спосіб

При відокремленні коренів алгебраїчних рівнянь (4) користуються наступними твердженнями.

Теорема 2 (основна теорема алгебри). *Кожен многочлен* n*-го степеня має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути дійсні різні корені, кратні корені та пари комплексно спряжених коренів.*

Наслідок 2.1. *Алгебраїчне рівняння непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.*

<u>Теорема 3 (про локалізацію коренів многочлена)</u>. *Корені многочлена (3) з дійсними чи комплексними коефіцієнтами містяться у кільці*

$$\frac{|a_0|}{|a_0|+b} \le |x| \le 1+\frac{a}{|a_n|}, \qquad \textbf{(5)}$$

де $a_0 \cdot a_n \ne 0$,

$$a = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\},$$
$$b = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}.$$

<u>Теорема 4 (Декарта; про кількість дійсних коренів алгебраїчних рівнянь)</u>. *Кількість S_1 додатних коренів (з врахуванням їхніх кратностей) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_n, a_{n-1}, …, a_0 (нульові коефіцієнти не враховуються) многочлена $P_n(x)$ або є меншою від цього числа на деяке парне число.*

Кількість S_2 від'ємних коренів (з врахуванням їхніх кратностей) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_n, a_{n-1}, …, a_0 (нульові коефіцієнти не враховуються) многочлена $P_n(-x)$ або є меншою від цього числа на деяке парне число.

<u>Теорема 5 (Гюа; необхідна умова дійсності усіх коренів алгебраїчних рівнянь)</u>. *Якщо усі корені алгебраїчного рівняння (4) дійсні, то квадрат кожного не крайнього коефіцієнта є більшим від добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, тобто*

$$a_k^2 > a_{k-1} \cdot a_{k+1}, \qquad \textbf{(6)}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1$$

<u>Наслідок</u>. *Якщо при деякому $k = 1, 2, \ldots, n-1$ виконується нерівність*

$$a_k^2 \le a_{k-1} \cdot a_{k+1}, \qquad \textbf{(7)}$$

то рівняння (4) має принаймні одну пару комплексних коренів.

Зразок розв'язання типового прикладу

<u>Приклад 1.</u> *З'ясувати структуру та відокремити корені рівняння*

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 = 0.$$

►*<u>Розв'язання.</u>* У заданому рівнянні

$$n=5,\ a_5=1,\ a_4=2,\ a_3=-5,\ a_2=8,\ a_1=-7,\ a_0=-3.$$

Застосуємо спочатку *<u>аналітичний метод</u>*. Згідно з теоремою 2, оскільки $n=5$, дане рівняння має рівно 5 коренів. Крім того, за наслідком 2.1, рівняння має принаймні один дійсний корінь (оскільки степінь непарний).

Перевіримо умови теореми 5. Для цього порівняємо

$$a_4^2 \text{ і } a_5 \cdot a_3;\ a_3^2 \text{ і } a_4 \cdot a_2;\ a_2^2 \text{ і } a_3 \cdot a_1;\ a_1^2 \text{ і } a_2 \cdot a_0.$$

Маємо:

$$a_4^2 = 2^2 > 1\cdot(-5) = a_5 \cdot a_3,\ a_3^2 = (-5)^2 > 2\cdot 8 = a_4 \cdot a_2,$$
$$a_2^2 = 8^2 > -5\cdot 1 = a_3 \cdot a_1,\ a_1^2 = (-1)^2 > 8\cdot(-3) = a_2 \cdot a_0,$$

отже, виконуються умови (6), а значить, виконується необхідна умова того, що усі корені даного рівняння дійсні (за теоремою 5). Проте ця умова *<u>не є достатньою</u>*, тобто корені можуть бути як дійсними (принаймні один, адже $n=5$), так і пари комплексно спряжених (не більше двох пар).

Кількість змін знаків коефіцієнтів многочлена $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ дорівнює 3, отже, за теоремою 4, кількість додатних коренів $S_1 = 3$ або на деяке парне число менше від S_1. Зрозуміло, що оскільки кількість коренів не може бути від'ємною, то єдиним парним числом, на яке може бути меншою кількість додатних коренів – це 2. Таким чином, додатних коренів 3 або 3-2=1.

Запишемо многочлен $P_5(-x)$ і підрахуємо число змін знаків його коефіцієнтів:

$$P_5(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^4 - 5(-x)^3 + 8(-x)^2 - 7(-x) - 3 = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 .$$

Маємо 2 зміни знаків коефіцієнтів. Отже, за теоремою 4, кількість від'ємних коренів $S_2 = 2$ (або на деяке парне число менше від S_2). Аналогічно до попередніх міркувань, від'ємних коренів 2 або 2-2=0.

Далі за формулою (5) знайдемо кільце, в якому містяться усі корені вихідного рівняння. Для цього знайдемо спочатку a і b:

$$a = \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\} = \max\{|-3|, |-7|, 8, |-5|, 2\} = 8,$$

$$b = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\} = \max\{|-7|, 8, |-5|, 2, 1\} = 8 .$$

Тоді корені рівняння містяться в кільці

$$\frac{|-3|}{|-3|+8} \le |x| \le 1 + \frac{8}{1} \Leftrightarrow \frac{3}{11} \le |x| \le 9 .$$

Звідси випливає, що від'ємні корені рівняння задовольняють нерівність

$$-9 \le x_i^- \le -\frac{3}{11} ,$$

а додатні – нерівність

$$\frac{3}{11} \le x_i^+ \le 9 .$$

Далі застосуємо *табличний метод* для відокремлення (ізоляції) дійсних коренів. Для цього затабулюємо ліву частину рівняння $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ на відрізку $[-9,9]$ з кроком $h_1 = 1$.

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	**-4**	**-3**	-2	**-1**	**0**
$f(x_i)$	-41574	-21451	-9852	-3777	-1018	-39	144	83	18	-3
знак $f(x_i)$	-	-	-	-	-	**-**	+	+	+	**-**
						інтервал ізоляції			*інтервал ізоляції*	

x_i	**1**	**2**	3	4	5	6	7	8	9
$f(x_i)$	-4	39	318	1313	3912	9531	20234	38853	69108
знак $f(x_i)$	**-**	+	+	+	+	+	+	+	+
	інтервал ізоляції								

Поєднуючи інформацію, отриману з допомогою аналітичного та табличного способів, доходимо висновку, що за межами відрізку $[-9,9]$ дійсних коренів немає; 2 прості (однократні) від'ємні корені знаходяться на проміжках (-4;-3), (-1;0), а додатний корінь (непарної кратності) – на проміжку (1;2) (можливо – це один трикратний корінь).

Є можливість, що на інтервалі (2;9) знаходиться дійсний двократний корінь (якщо на проміжку (1;2) корінь однократний), при переході через який многочлен не змінює знак. Для уточнення цього факту слід використати засоби диференціального числення (знайти на інтервалі (2;9) точку x^* локального мінімуму многочлена $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$, причому таку, яка одночасно є точкою перетину його графіка з віссю абсцис, тобто $P_5(x^*) = 0$). Оскільки ця задача не є тривіальною, то перевірку кількості дійсних коренів можна виконати *графічним методом*.

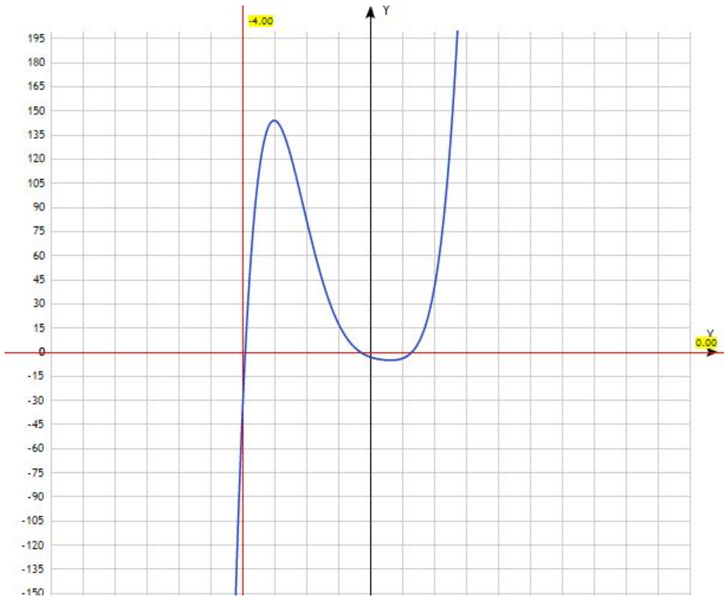
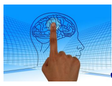


Рис. 3. *Графік функції* $y = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$

Додатний корінь x_3^+ на проміжку (1;2) є простим (однократним) або непарної кратності (не більше 3), адже при переході через цей корінь многочлен змінює знак (чого не спостерігається при переході через корені парної кратності). З графіка (рис. 3) видно, що при переході через x_3^+ не змінюється напрям опуклості графіка $y = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$, а це можливо лише у випадку, якщо x_3^+ - однократний корінь (корінь непарної кратності більше 1 обов'язково є точкою перегину відповідного графіка). Отже, ми вже відокремили 3 дійсні корені: 2 прості від'ємні корені $x_1^- \in (-4;-3)$, $x_2^- \in (-1;0)$ та один простий додатний корінь $x_3^+ \in (1;2)$. Разом з тим, графік многочлена $y = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ перетинає вісь абсцис тричі (кожна точка перетину відповідає відокремленому простому кореню), а коренів має бути рівно 5. Це означає, що решта 2 корені x_4, x_5 – комплексно спряжені.

<u>Висновок:</u> використовуючи поєднання трьох методів, ми отримали повну характеристику коренів даного рівняння: рівняння має 5 коренів, з них 2 дійсні однократні від'ємні $x_1^- \in (-4;-3)$, $x_2^- \in (-1;0)$, один дійсний простий додатний $x_3^+ \in (1;2)$ і пара комплексно спряжених коренів x_4, x_5 з кільця $\frac{3}{11} \le |x_{4,5}| \le 9$. ◄



Задачі для самостійного розв'язання

З'ясувати структуру коренів нелінійного рівняння відповідно до свого варіанту та відокремити корені поєднанням трьох методів:

- ☑ ***аналітичним*** *(встановити наявність дійсних коренів; з'ясувати кількість додатних та від'ємних дійсних коренів; встановити кільце, в якому знаходяться корені рівняння);*
- ☑ ***табличним*** *(уточнити інтервали ізоляції дійсних коренів);*
- ☑ ***графічним*** *(з використанням пакету MathCad).*

№	Прізвище, ім'я, по батькові	Рівняння
	Група 341	
1.	*Байрамов Алі Мірзабей-огли*	$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x - 1 = 0$

№	Прізвище, ім'я, по батькові	Рівняння
2.	*Беленчук Олексій Ігорович*	$x^4+4x^3+4,8x^2+16x+1=0$
3.	*Березний Ігор Васильович*	$x^3+3x^2-24x+1=0$
4.	*Бужак Андрій Васильович*	$x^6-3x^2+x-1=0$
5.	*Бурле Павло Марчелович*	$x^3-x-1=0$
6.	*Волощук Назарій Васильович*	$x^3-3x^2+9x-10=0$
7.	*Георгіян Євген Геннадійович*	$x^3-8x+2=0$
8.	*Григорчук В`ячеслав Валерійович*	$x^3+2x-11=0$
9.	*Денис Денис Русланович*	$x^3+10x-9=0$
10.	*Стручук Роман Олександрович*	$x^5+3x^4-2x^3+x^2-x+1=0$
11.	*Дубець Василь Русланович*	$x^4+10x^3-1=0$
12.	*Дуплава Олександр Ігорович*	$x^3-4x^2+10x-10=0$
13.	*Жупник Евеліна Михайлівна*	$x^5-2x^4-7x^3-33x^2-30x-25=0$
14.	*Івасюта Павло Сергійович*	$8x^4-8x^2+32x+1=0$
15.	*Качуровський Станіслав Тарасович*	$5x^3+2x^2-15x-6=0$
16.	*Клим Дмитро Іванович*	$x^3-15x+10=0$
17.	*Козуб Микола Миколайович*	$x^3-3x^2-3=0$
18.	*Копадзе Олександра Сергіївна*	$2x^3-3x^2-12x+8=0$
19.	*Костюк Віталій Іванович*	$x^3-0,2x^2+0,5x+1,5=0$
20.	*Кушнірик Яна Олександрівна*	$x^4-2x^3+x-1,5=0$
21.	*Луник Марія Михайлівна*	$x^4-3x^3+8x^2-5=0$
22.	*Максименко Михайло Сергійович*	$x^3+0,4x^2+0,6x-1,6=0$
23.	*Мінтянський Андрій Петрович*	$x^3-2x^2+7x+3=0$
24.	*Паращук Олексій Іванович*	$x^6-x^2+0,5x-2=0$
25.	*Сарай Богдан Васильович*	$x^3+3x^2-1=0$
26.	*Фецюк Денис Мирославович*	$x^3-2x^2-4x+7=0$
27.	*Хмелєвська Анастасія Олександрівна*	$x^5-3x^2+1=0$
28.	*Чайковський Станіслав Валерійович*	$x^3-9x+3=0$
	Група 341-ск	
1.	*Вірстюк Ігор Олегович*	$x^3-2x^2+2x-1=0$
2.	*Дем'янчук Євгеній Миколайович*	$5x^3-20x+3=0$

Література:

1. Практикум з чисельних методів : Навч. посібник / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 432 с.
2. Чисельні методи розв'язання інженерних задач у пакеті *Mathcad* : курс лекцій та індивідуальні завдання / Л.В. Васильєва, О.А. Гончаров, В.А. Коновалов, Н.А. Соловйова. – Краматорськ : ДДМА, 2006. – 108 с.
3. Руководство пользователя *Mathcad* 15.0