Лабораторна робота № 6.

Тема. Числові та степеневі ряди. Межа числової послідовності.

Мета роботи: дослідження рядів та обчислювання сум рядів.

Теоретичний мінімум

Нагадаємо, що вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

називають числовим рядом, коли елементи u_n ряду є числами [24]. Елементи u_n послідовності $\{u_n\}$ називаються також членами ряду.

У випадку, коли члени ряду (1) представляють собою функції, то ряд називається функціональним рядом.

Звичайно, визначити суму нескінченного числа доданків виразу (1) часто неможливо, але можна обчислити суму перших n членів ряду. Ця сума $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ називається n-ою частковою сумою.

Вправа 1. Елементарні команди дослідження числових послідовностей.

У системі **MATLAB** існують спеціальні команди, які виконують найпростіши операції з масивами:

- **sum(x)** – здійснює обчислення суми елементів масиву **x** або, якщо це вектор-стовпець, суми елементів кожного стовпця;
- **prod(x)** – здійснює обчислення добутку єлементів масиву **x** або, якщо це вектор-стовпець, добутків елементів кожного стовпця;
- **sort(x)** – впорядковує елементи масиву **x** по зростанню або, якщо це вектор-стовпець, впорядковує елементи кожного стовпця;
- **max(x)** – знаходить найбільший елемент масиву **x** або, якщо це вектор-стовпець, найбільший елемент стовпця (структура команди може мати вигляд **[m,k]=max(a)**, де другий вихідний параметр **к** містить номер максимального елементу вектора **a**);
- **min(x)** – знаходить найменьший елемент масиву **x** або, якщо це вектор-стовпець, найменьший елемент стовпця (структура команди може мати вигляд **[m,k]=min(a),** де другий вихідний параметр **к** задає номер мінімального елементу **m** вектора **a**);
- **mean(x)** – знаходить арифметичне середнє масиву **x** або, якщо це вектор-стовпець, арифметичне середнє елементів стовпця

Приклад 1. Розглянемо квадратну матрицю, сума елементів стовпців та елементів рядків якої дорівнює одному числу (така матриця носить назву магічної і формується за допомогою команди **magic(n), n** – порядок матриці).

Сформуємо квадратну матрицю M і застосуємо деякі з виписаних вище команд:

```
>> M=magic(3)
M =
    8    1    6
    3    5    7
    4    9    2
>> sum(M)
ans =
   15   15   15
>> sort(M)
ans =
    3    1    2
    4    5    6
    8    9    7
>> prod(M)
ans =
   96   45   84
>> max(M)
ans =
    8    9    7
```

Сформуємо з стовпців вихідної матриці M вектор-стовпець і застосуємо деякі з виписаних вище команд:

```
>> M=M(:); % не придушуйте результат та подивитесь, що сталося.
>> disp(sum(M))
   45
>> disp(sort(M));
>> disp(prod(M))
     362880
>> disp(max(M))
    9
>> disp(min(M))
    1
>> disp(mean(M))
    5
```

Вправа 2. Обчислення сум рядів та встановлення границі ряду.

У системі **MATLAB** існує команда для знаходження границі, яка міститься у підпакеті **Simbolic Math** [25]:

- **limit(F,x,a) –** знаходить границю у символьному вигляді, де **x (**загальний член ряду**)** прямує до a;

- **limit(F,a)** — команда, яка знаходить значення границі, де **x** прямує до **a**;
- **limit(F)** — команда, яка знаходить значення границі, де за замовчуванням **a** = 0 – кінцева точка границі;
- **limit(F,x,a,'right')** або **limit(F,x,a,'left')** — команда, яка знаходить границю у символьному вигляді, де **x** прямує до а, а границі обчислюються у визначеному напрямку (**right** або **left**).

Приклад 1. Визначити часткову суму S ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n}$ при $n=10$:

```
>> n=1:.1:10;
>> sum(2.^n.*(n+1)./n)
ans =
  1.7116e+004
```

Приклад 2. Визначити часткову суму S ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Часткову суму вихідного ряду можна знайти за формулою суми геометричної прогресії: $S(n)=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$. Побудуємо графік часткових сум ряду:

```
>> ezplot((1/2)*((1–(1/2)^n)/(1–1/2)));grid on
```

Знайдемо границю ряду:

```
>> limit((1/2)*((1–(1/2)^n)/(1–1/2)),inf)
ans =
1
```

Вправа 3. Дослідження ряда на збіжність.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називають збіжним, якщо існує кінцева границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум ряду. Саму границю при цьому називають сумою ряду і позначають $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$. Якщо границя часткових сум не існує або нескінчена, то ряд розбігається. Різниця $S-S_n=R_n$ називається залишком ряду. Очевидно, що для ряду, що збігається $\lim_{n\to\infty}R_n=0$. Це означає, що суму ряду, який збігається, можна обчислити з будь-якою точністю, замінюючи її частковою сумою відповідного порядку. Для ряду, що розбігається, це не має місця. Тому збіжність або розбіжність конкретного ряду є основним питанням для дослідження.

Якщо ряд збігається, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 0$ (необхідна умова збіжності ряду). Зворотне, взагалі кажучи, невірно. Члени ряду можуть прагнути до нуля, але ряд при цьому може розбігатися.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд Лейбниця $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$:

Призначимо символьні змінні та знайдемо границю ряду:

```
>> sym n
>> limit((–1)^n/n,inf)
ans =
0
```

Висновок – ряд збігається. Будуємо графік часткових сум ряду:

```
>> n=.1:.1:10;
>> y=(–1).^n./n;
>> plot(n,y);grid on
```

Отримуємо попередження, що при обчисленні з'явились комплексні числа:

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
```

Збіжність вихідного ряду витікає з аналізу графіка часткових сум.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$:

```
>> limit((–1)^(n+1),inf)
ans =
–1 .. 1
```

Висновок – границі ряду не існує. Переконаємося в цьому, якщо здійснюємо аналіз графіка часткової суми:

```
>> n=0:.1:10;
>> y=(–1).^(n+1); plot(n,y)
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
```

Приклад 3. Знайти границю суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}$.

Оскільки існують межі кожного елементу виразі (загального члена ряду), можна застосовувати теореми про границі суми, добутку і частки, тобто визначити: $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}$. Кожна з границь нам вже відома, тому відповідь 2/3 очевидна. Обчислимо тепер шукану границю засобами системи **MATLAB**:

```
>> limit((2+1/x)/(3–1/x^2),inf)
ans =
2/3
```

Приклад 4. Знайти границю суми ряду $\dfrac{(n+2)^2-(n-3)^2}{n+1}$.

Спочатку необхідно спростити вираз (застосовуємо команду **expand**), а потім знайти границю:

```
>> expand((n+2)^2–(n–3)^2)/(n+1)
ans =
(10*n–5)/(n+1)
>> limit((10*n–5)/(n+1),inf)
ans =
10
```

Вправа 3. Ознаки збіжності ряду

Існують ознаки збіжності рядів, які дозволяють встановити факт розбіжності (збіжності) без обчислення границь часткових сум рядів.

Нагадаємо інтегральну ознаку збіжності ряду (ознаку Коші). Нехай члени ряду $U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$ додатні, незростаючі і такі, що $f(1)=U_1$; $f(2)=U_2,\ldots,f(n)=U_n,\ldots$, тоді має місце твердження:

1) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то ряд теж збіжний;

2) якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, то ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Розв′язування приклада відбувається застосуванням команди **int**:

```
>> int(1/n^2,1,inf)
ans =
1
```

Висновок – ряд збіжний

Розглянемо тепер ознаку Даламбера. Якщо в ряді з додатніми членами $U_1 + U_2 + ... + U_n + ...$ відношення U_{n+1} члену ряду до U_n має границю l, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ – розбігається. При $l = 1$ питання про збіжність залишається відкритим (інакше кажучи, в цьому випадку ознака Даламбера не працює) і для встановлення факту збіжності ряда треба проводити додаткові дослідження.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Випишемо n-ий і $(n+1)$-ий члени ряду: $U_n = \frac{n}{2^n}$; $U_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}$ за допомогою команди **limit**:

```
> limit((n+1)*2^n/(2^(n+1)*n),inf)
ans =
1/2
```

Висновок – ряд збігається

Нагадаємо радикальну ознаку Коши. Якщо для ряду з додатніми членами $U_1 + U_2 + ... + U_n + ...$ величина $\sqrt[n]{U_n}$ має скінченну границю l при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збіжний, при $l > 1$ розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n n}{4^n}$.

Застосовуємо команду **limit**:

```
>> limit(sqrt((log(n))^n)/4^n,inf)

ans =

inf
```

Висновок – ряд розбіжний.

Вправа 4. Дослідження знакозмінних рядів.

Якщо в послідовності $\{u_n\}$ нескінченно багато позитивних і негативних членів, то ряд називається знакозмінним. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, a_n > 0$ називається знакопереміжним. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається таким, що абсолютно збігається, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Якщо ряд з модулів розбігається, а сам ряд збігається, то його називають таким, що умовно збігається. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ починають з дослідження на збіжність ряду, що утворюється з модулів членів вихідного ряду тобто ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ при застосуванні методів для рядів з додатними членами. Якщо такий ряд збігається, то робиться висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається абсолютно. Якщо в знакопереміжному ряді $(U_n > 0)$ $U_1 - U_2 + \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \ldots$члени такі, що $\lim_{n\to\infty}|U_n| = 0$ та $|U_1| \geq |U_2| \geq \ldots \geq |U_n|$, то ряд збігається і сума його не перевищує першого члена.

Оцінка залишку ряду: $|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}$.Погрішність при обчисленні n-ої часткової суми ряду визначається оцінкою залишку ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$.

Ряд знакозмінний. Застосовуємо ознаку Лейбніца. Поперше переконаємось, що кожна $(n+1)$ сумма ряду меньш, ніж n-я сума ряду:

```
>> for n=1:5
s=sin(1/n)/n^2
end
s =
   0.8415
s =
   0.1199
s =
   0.0364
s =
```

```
    0.0155
s =
    0.0079
% Знайдемо границю модуля ряду:
>> limit(abs(sin(1/n)/n^2),inf)
ans =
0
```

Висновок – ряд збігається.

Вправа 5. Обчислення області збіжності степеневого ряду.

Степеневим рядом називається ряд виду $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ з областю збіжності $-R < x < R$ або $a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$ з областю збіжності $-R < x - x_0 < R$, де $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – коефіцієнти ряду [24]. Вони є сталими.

Область збіжності степеневого ряду визначається радіусом збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Приклад. Знайти радіус збіжності ряду $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{3^n}$:

Застосовуємо команду **limit**:

```
>> r=limit(abs(3^(n+1)/3^n),inf)
r =
3
```

Отже, область збіжності]–3, 3[. Переконаємось, чи належать кінцеві точки проміжку області збіжності. Покладемо $x = -3$ і підставимо в степеневий ряд умови. Отримуємо знакопереміжний числовий ряд

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{3^n} + \ldots$$

Дослідимо за ознакою Лейбница збіжність цього ряду:

```
>> limit(1/3^n,inf)
ans =
0
```

Отже, цей ряд збіжний і ліва границя проміжку належить області збіжності. Для перевірки на збіжність правої границі області підставимо в степеневий ряд замість x число 3: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$ Отримуємо знакосталий числовий ряд. Досліджуємо на збіжність цей ряд за допомогою ознаки Даламбера:

```
>> limit(3^n/3^(n+1),inf)
ans =
1/3 % < 1
```

Висновок – отримуємо $l<1$, значить, ряд збігається. Застосовуємо інтегральну ознаку збіжності:

```
>> int(1/3^n,1,inf)
ans =
1/3/log(3)
>> 1/3/log(3)
ans =
   0.3034
```

Висновок – ряд збігається

Практичні завдання лабораторної роботи № 6

Виконати наступні завдання :

Завдання 1. Дослідити ряди на збіжність на основі використання різних ознак збіжності (див. табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Варіанти до завдання №1

№ п/п	Умова збіжності		
	Необхідна ознака	Радикальна ознака	Інтегральна ознака
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+4}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln^2(n+2)+1)(n+2)}$.
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(\ln(n+3)+1)^2}$.
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n+3}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\ln^n n}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n-1)+3)^2}$.
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n+6}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln\sqrt{n+1}}$.

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)n}{n^2+2}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+4}\right)^{n^2}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[4]{2+\ln(n+1)}}.$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n-1}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}.$

Закінчення таблиці 6.1

7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{2n+3}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}.$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+7)n}{n+1}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{3^n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1)+4)^2}.$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n+2}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+n)^n}{3^n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n+3)^2}.$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{3n+1}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)arctg^2 n}.$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(n+5)}{(n+3)(2+5n)}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{3+8n}\right)^{n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n+6}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n+2)}.$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+11}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+7}\right)^{n}.$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{2+\ln n}}.$

Завдання 2. Знайти область збіжності знакозмінних рядів (див. табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – Варіанти до завдання №2

№ п/п	Ряд 1	Ряд 2	Ряд 3
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^4}(x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n+\sqrt{n}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^3}{n!}x^n$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+3)^n}{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{9^n}(x-2)^n$
4	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+4)^5}{n!}x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+5)n}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{3^n}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n}(x-1)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)^3}{n!}x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}$
6	$\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(x+1)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n+\ln n}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)^n}$

Закінчення таблиці 6.2

8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-4)^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{n!}(x+6)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$
11	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+1}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n(n-1)}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}x^n$
12	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^n}{n\sqrt{n}}(x+2)^n$
13	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{7^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x-3)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{2^{n-1}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

Контрольні питання

1. Що називається числовим рядом? Які команди у системі **MATLAB** відповідають за обчислення суми ряду?
2. Як визначити суму ряду за допомогою елементарних операторів цикла?
3. Який ряд називається збіжним (розбіжним)?
4. Як виконується необхідна умова збіжності ряду у системі **MATLAB**?
5. Сформулюйте ознаки порівняння та Даламбера. Як у системі **MATLAB** реалізувати дослідження ряду на основі використання цих ознак?
6. Сформулюйте інтегральну та радікальну ознаки Коші. Як у системі **MATLAB** забезпечити реалізацію дослідження ряду на основі використання цих ознак?
7. Що називається знакозмінним рядом?
8. Що називається знакопереміжним рядом?
9. Перерахуйте можливості обчислення границь у системі **MATLAB**.
10. Наведіть визначення абсолютно (умовно) збіжного знакозмінного ряду.
11. Що називається степеневим рядом? Як визначається область збіжності степеневого ряду?
12. Наведіть алгоритм дослідження збіжності на краях проміжку збіжності степеневого ряду за допомогою відповідних команд у сисетмі **MATLAB**.