Лабораторна робота № 5.

Тема. Поліноми та алгоритми їх обчислення.

Мета роботи: ознайомитись з алгоритмами обчислення поліномів.

Теоретичний мінімум

У системі **MATLAB** існує набір команд для роботи з поліномами, який забезпечує реалізацію операцій множення, диференціювання, обчислювання коренів та інші над поліномами. Ряд команд дозволяє обробляти дрібно-раціональні вирази, чисельники та знаменники яких є поліномами. Застосовування поліномів обумовлено великими їх можливостями у представленні даних, а також їх простотою завдання і обчислювання.

Вправа 1. Команди обчислювання поліномів. Схема Горнера.

При однократному обчисленні значень полінома (многочлена) степеня n (n відносно невелике) послідовність виконання операцій не має особливого значення. Однак, для обчислення поліномів досить високого степеня при різних значеннях аргументу, послідовність виконання операцій є суттєвим чинником.

Попереднє обчислення усіх потрібних степенів аргументу x^2, x^3 зазвичай є невигідним, бо потребує досить великої кількості операцій: при обчисленні значень полінома n-го степеня для одержання степеневої функції до x^n потрібно виконати $n-1$ операцію множення. Окрім того, потрібні ще n множень на поліноміальні коефіцієнти. Загалом отримаємо $2n-1$ операцію множення та n операцій додавання.

Існують схеми обчислення поліномів, що потребують меншої кількості арифметичних операцій, наприклад, схема Горнера – n операцій множень і n операцій додавань.

Нехай даний поліном n-го степеня

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x \ + a_0 . \qquad (1)$$

Запишемо його у вигляді

$$P_n(x) = (((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots + a_1) \cdot x \ + a_0 . \qquad (2)$$

Обчислення значення полінома у формі (2) називають схемою Горнера. Для поліномів загального виду неможливо побудувати схему більш економну у сенсі кількості операцій.

Форми запису поліному можуть бути різними:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (3)$$

або

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1} . \qquad (4)$$

Форма (3) використовується у системі **MATLAB** в режимі за замовчуванням у випадку, коли величина n від'ємна, а форма (4) в режимі за замовчуванням – коли величина n додатна. Поліном задається та зберігається у вигляді вектора, компонентами якого являються коефіцієнти поліному $P = [a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ a_{n+1}]$ [33, с.111]. Число компонентів цього вектора повинно бути на одиницю більше величини степені поліному та нульові коефіцієнти також повинні бути представлені компонентами векторі.

Приклад 1. Задати поліном $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 7$.

Для виконання завдання треба в командну строку ввести таку команду:

```
>> p = [3 2 0 –1 0 7];
p =
        3  2  0  –1  0  7
```

Команди операцій з поліномами надані у таблиці 5.1, де введені наступні позначення: a, b, d, p, q – поліноми, r – вектор-стовпець коренів, S – масив точок, M – квадратна матриця.

Таблиця 5.1 – Команди операцій з поліномами

Команда	Зміст операції
poly(r)	Обчислювання характеристичного поліному
polyval(p,S)	Обчислювання значення полінома p у точках S
polyvalm(p,M)	Обчислювання значень полінома p для матричного аргументу M
polyder(p)	Диференціювання полінома p
polyder(a,b)	Диференціювання добутка поліномів a та b
[d,p]=polyder(b,a)	Диференціювання дробу з чисельником b і знаменником a
conv(a,b)	Множення поліномів a на b
[q,p]=deconv(a,b)	Ділення поліномів (одержання частки і залишка) a на b
[r,s,k]=residue(b,a)	Розкладання дробу з чисельником b та знаменником a на прості дроби (r – залишок, s – полюс, k – частка)
roots(p)	Знаходження коренів поліному p

Вправа 2. Операції множення і ділення поліному на поліном. Знаходження найбільшого загального подільника.

Для виконання операцій множення та ділення поліномів у системі **MATLAB** використовуються команди **conv** і **deconv**. Функція **conv** виповнює так звану згортку векторів – розбудову розвинутого вектора коефіцієнтів по заданим коефіцієнтам векторів коефіцієнтів поліномів-співмножників. А команда **deconv** робить зворотну згортку векторів – обчислює коефіцієнти поліномів, які являються часткою та залишком від ділення одного поліному на другий.

Коли задані поліноми a і b порядку відповідно m і n, то їх добуток буде поліномом порядку $m+n$, елемент k-го порядку якого знаходиться за формулою:

$$c(k) = \sum_{j=\max(1,k+1-n)}^{\min(k,m)} a(j)b(k+1-j).$$

Команда **conv** має наступний синтаксис **v= conv(a,b),** де **v** – вектор коефіцієнтів поліному, отриманого у результаті добутку поліномів, заданих векторами **a** і **b**.

Приклад 1. Знайти добуток поліномів $P_1(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ і $P_2(x) = 2x^3 + 4x + 6$.

Спочатку формуємо вектори, які описують вихідні поліноми, а потім здійснюємо операцію множення:

```
>> a=[1 3 5 7 9]; b=[2 0 4 6]; v=conv(a,b)
v =
    2    6    14    32    56    58    78    54
```

Розглянемо команду ділення. Синтаксис команди: **[q,p]=deconv(a,b)**, де **q** – вектор коефіцієнтів поліному-результату (частка), **p** – вектор коефіцієнтів поліному-залишку.

Приклад 2. Розділити поліном $P_1(1) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ на поліном $P_2(x) = 2x^3 + 4x + 6$ з визначення частки та без визначення її.

Розподіл поліному на поліном виконуємо послідовністю команд:

```
>>a=[1 3 5 7 9];
>> b=[2 0 4 6];
>> [q,p]=deconv(a,b)
q =
   0.5000    1.5000
p =
    0    0    3   -2    0
```

Для обчислення тільки частки треба застосувати команду **deconv** у наступному вигляді: **q=deconv(a,b).** Для вихідної задачі:

```
>> a=[1 3 5 7 9];
>> b=[2 0 4 6];
>> q=deconv(a,b)
q =
   0.5000    1.5000
```

Вправа 3. Обчислення коренів та коефіцієнтів полінома при заданій змінній**.**

Визначити усі корні поліному можна за допомогою команди **roots**, що повертає вектор-стовпець, елементами якого є корені заданого поліному (у тому числі і комплексні корені).

Приклад 1. Визначити корені поліному $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 15x + 7$ та виконати зворотню операцію – знайти коефіцієнти поліному по його відомим кореням.

Застосуємо для цього наступний набір команд:

```
>> p=[3 2 –1 –15 7];
>> r=roots(p)
r =
  –1.2505 + 1.4296i
  –1.2505 – 1.4296i
   1.3581
   0.4762
```

Кількість коренів поліному повинна збігатися з порядком полінома. Визначення коренів поліному дозволяє відновити коефіцієнти так званого характеристичного поліному (тобто приведеного поліному, у якого коефіцієнт при найвищій степені дорівнює одиниці). З цією метою передбачено команда **poly**. Для нашого випадку:

```
>> p1=poly(r)
p1 =
    1.0000    0.6667   –0.3333   –5.0000    2.3333
```

Щоб одержати коефіцієнти вихідного заданого поліному, треба помножити отримане значення на коефіцієнт при найвищій степені поліному (у нашому прикладі він дорівнює 3):

```
>> p1*3
ans =
    3.0000    2.0000   –1.0000  –15.0000    7.0000
```

Вправа 4. Обчислення значення поліному при заданій величині.

Для знаходження значення поліному від заданого аргументу призначено команду **polyval**, яка має наступний синтаксис **y=polyval(p,s)**, де **p** – вектор коефіцієнтів поліному, **s** – задана величина аргументу.

Приклад 1.Обчислити значення поліному $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ при $x = 2$.

Знаходження значення поліному відбувається наступним чином:

```
>> p=[5 –7 3];
>> y=polyval(p,2)
y =
     9
```

Для обчислення значення поліному від заданого аргументу, що представляється у вигляді масиву даних, використовується команда **Y=polyval(p,S),** де **S** – одновимірний або двовимірний масив. Вказана команда знаходить значення поліному для кожного елементу масиву.

Приклад 2. Знайти значення поліному $P(X) = 5X^2 - 7X + 3$, де

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Процедура знаходження не відрізняється від звичайної процедури обчислення поліному від одного заданого аргументу – спочатку вводиться масив даних для обчислення поліному:

```
>> S=[ 1 2 3; 3 2 1; 1 3 2]
S =
   1    2    3
   3    2    1
   1    3    2
```

Потім знаходяться коефіцієнти поліному та використовується команда для обчислення значень поліному для кожного елемента вихідної матриці:

```
>> p=[5 –7 3];
>> y=polyval(p,S)
y =
   1    9   27
  27    9    1
   1   27    9
```

Вправа 5. Операції диференціювання та інтегрування поліномів.

Для знаходження похідної від заданого поліному існує команда **polyder** [33, с.113]. В залежності від того, який результат треба отримати, використовуємо декілька способів формування командного запиту:

- **q=polyder(p)**, де **p** – поліном, заданий вектором коефіцієнтів, команда **polyder** обчислює вектор **q**, елементи якого представляють собою коефіцієнти поліному-похідної від вихідного поліному **p**;
- **c=polyder(a,b)** – функція обчислює похідну від добутка двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, з коефіцієнтів яких сформовані вектори, відповідно, **a** і **b**;
- **[q,d]=polyder(a,b)** – функція обчислює похідну від відношення двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, з коефіцієнтів яких сформовані вектори, відповідно, **a** і **b;** результат видається у вигляді відношення векторів **q** і **d** (**q/d**), які містять коефіцієнти поліномів, що визначають результат операції.

Приклад 1. Знайти поліном-похідну від добутку двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, які задані векторами коефіцієнтів **a** і **b.**

Задача розв′язується за допомогою наступних операцій:

```
>> a=[3 4 2];
>> b=[1 6 2];
>> c=polyder(a,b)
c =
   12   66   64   20
```

Аналогічний результат можна отримати, якщо спочатку перемножити вектори коефіцієнтів поліномів за допомогою команди **conv** і знайти похідну від цього добутку:

```
>> p=conv(a,b)
p =
    3   22   32   20    4
>> c=polyder(p)
c =
   12   66   64   20
```

Для інтегрування поліномів використовується команда **polyint**, яка має такий синтаксис: **q=polyint(p,k),** де **k** – константа інтегрування (константа первісної), яка може бути вилучина (за замовчуванням вона дорівнює нулю), **p** – вектор, компоненти якого є коефіцієнти вихідного поліному.

Вправа 6. Ознайомитись з командою розкладання раціональної функції на елементарні дроби.

Раціональною називається функція, яку можна представити у вигляді відношення двох многочленів, тобто $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-ної степені, $Q_m(x)$ – многочлен m-тої степені. Таку функцію $f(x)$ ще називають раціональним дробом.

Команда **residue** здійснює розкладання раціональної функції **b(x)/a(x)** на елементарні дроби з виділенням цілої частини. Компоненти r_i, s_i векторів $\bar{r}$ та $\bar{s}$ визначають, що $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{r_i}{x-s_i}+k(x)=\dfrac{b(x)}{a(x)}$, де n – порядок найбільшого з поліномів.

Приклад 1. Розкласти на елементарні дроби дрібно-раціональну функцію

$$\frac{9a^5+8a^4+6a^3+5a^2+3a+2}{4a^4+3a^3+5a^2+3a+1}.$$

Розв’язання задачі виконуємо за допомогою наступної послідовності команд:

```
>> a=[9 8 6 5 3 2];
>> b=[4 3 5 3 1];
>> [r,s,k]=residue(a,b)
r =
  –0.0567 + 0.1845i
  –0.0736 – 0.1727i
  –0.0725 – 0.0051i
  –0.0448 – 0.0073i
s =
  –0.0000 + 1.0000i
  –0.0000 – 1.0000i
  –0.3750 + 0.3307i
  –0.3750 – 0.3307i
k =
    2.2500    0.3125.
```

Таким чином, розкладання на елементарні дроби для даного приклада буде мати вигляд:

$$\frac{9a^5+8a^4+6a^3+5a^2+3a+2}{4a^4+3a^3+5a^2+3a+1}=\frac{0.0567+0.1845\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}+\frac{-0.0736-0.1727\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}+$$
$$+\frac{-0.0725-0.0051\mathrm{i}}{a+0.3750-0.3307\mathrm{i}}+\frac{-0.0448-0.0073\mathrm{i}}{a+0.3750+0.3307\mathrm{i}}+2.25a+0.3125$$

Приклад 2. Розкласти дрібно-раціональну функцію $\frac{a-3}{a^3-a+2}$.

Перелік команд, що розв′язує приклад:

```
>> q =[1 – 3];
>> p =[1 0 – 1 2];
>> [r,s,k]=residue(q,p)
r =
  – 0.7607
   0.3803 + 0.4289i
   0.3803 – 0.4289i
s =
  -1.5214
   0.7607 + 0.8579i
   0.7607 – 0.8579i
k =
     []
```

Зверніть увагу, **k=[ ]** означає, що у розкладанні відсутня ціла частина, тобто порядок чисельника дорівнює одиниці, а порядок знаменника – трьом.

Практичні завдання лабораторної роботи № 5.

Виконати наступні завдання (варіанти завдань надані у відповідних таблицях):

Завдання 1. Ввести два полінома $P1$ й $P2$ (див. табл. 5.2).
Завдання 2. Знайти добуток P поліномів $P1$ й $P2$.
Завдання 3. Знайти частку і залишок від ділення P на $P1$.
Завдання 4. Обчислити корені поліному $P2$.
Завдання 5. Знайти похідну поліному $P1$.
Завдання 6. Утворити поліном $P3$ за його заданими трьома кореням (дивиться таблицю 5.3) та побудувати графік поліному $P3$.
Завдання 7. Задати поліном $P(x)=x^3-3.55x^2+5.1x-3.1$ та знайти графічно його єдиний дійсний корінь.

Таблиця 5.2 – Варіанти до завдань №№1-5

№ п/п	Поліном $P1$	Поліном $P2$
1	$x^3-12x+11=0$	$x^4-2x^3-3x^2+2=0$
2	$4x^3-21x^2+18x+20=0$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-7x^2+24x+1=0$
3	$x^3-3x^2+3x+2=0$	$x^4-8x^3+22x^2-24x+12=0$
4	$x^3-x^2-14x+24=0$	$x^4+8x^3+16x^2=0$
5	$x^3-6x^2+11x-6=0$	$x^4-\frac{20}{3}x^3+8x^2=0$
6	$4x^3-21x^2+18x+20=0$	$x^4+3x^3-12x^2-5x+2=0$
7	$x^3+2x^2-x+11=0$	$x^4-8x^2+5x-11=0$
8	$2x^3-6x+23=0$	$3x^4-4x^3-18x^2+45x-14=0$
9	$7x^3-4x^2+3=0$	$x^4-4x^3-x^2+x-1=0$
10	$5x^3+3x^2-11x-8=0$	$x^4+2x^2-4x+12=0$
11	$x^3-7x^2+10=0$	$5x^4-8x^3+2x+7=0$
12	$9x^3+4x^2-22x=0$	$x^4+x^3+x^2-2x+11=0$
13	$10x^3-x^2-9=0$	$x^4-6x^3+7x^2-3x=0$
14	$11x^3+3x^2-2x+2=0$	$2x^4+9x^3+5x^2=0$
15	$3x^3+11x^2-x+7=0$	$8x^4-4x^3-x^2+5x-4=0$

Таблиця 5.3 – Варианти до завдання №7

№ п/п	Значення кореня $x1$	Значення кореня $x2$	Значення кореня $x3$
1	1	2	3
2	3	0	2
3	5	3	3
4	8	2	1
5	6	0	8
6	2	5	3
7	0	1	2
8	3	8	1
9	1	5	5
10	0	3	6
11	7	1	0
12	0	9	2
13	3	0	6
14	2	2	3
15	1	6	2

Рекомендуємо запам'ятати наступні оператори:

conv – комнада знаходження добутку (згортки) двох векторів:
deconv — команда, яка здійснює ділення (зворотньої згортки) двох векторів;
poly – команда побудови поліному згідно заданого вектору, компоненти якого є корені поліному;
polyder – команда, яка здійснює знаходження похідної від поліному;
polyval – команда обчислювання значення поліному;
roots – команда відшукування коренів поліному;
plot – команда, яка здійснює побудову графіку функції від однієї змінної.

Контрольні питання

1. Який об‘єкт у системі **MATLAB** називається поліномом?
2. Розкрийте форми представлення поліномів у системі **MATLAB**.
3. Яке повинне бути число компонентів вектора, щоб правильно задати коефіцієнти полінома?
4. Як у системі **MATLAB** здійснюється операція добутка та ділення поліномів?
5. За допомогою яких функцій можна знайти корені заданого поліному, значення поліному відповідно заданій звеличини аргументу?
6. Як організовані процедури диференціювання та інтегрування поліномів у системі **MATLAB**?
7. Які команди дозволяють отримати росклад дробно-раціональної функції у вигляді суми елементарних дробів?