Лабораторна робота №4

Тема: *Чисельне диференціювання та інтегрування функцій.*

Частина 1: *Чисельне диференціювання функцій.*

Мета: *ознайомлення студентів з методами чисельного диференціювання функцій, оцінкою похибки при чисельному диференціюванні; набуття студентами практичних навичок обчислення похідних першого та другого порядку чисельними методами та оцінки похибки цих методів (у тому числі - з використанням комп'ютера).*

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал та розв'язання типових прикладів [**1**, сс. 127-130], [**2**, сс. 124-127], [**3**, сс. 217-236]+цей файл.

2. Знайти наближене значення перших та других похідних таблично заданих функцій, використовуючи:

2.1. формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона;

2.2. формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційного многочлену Стірлінґа;

2.3. простіші формули для оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох вузлах.

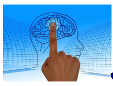
3. Порівняти отримані результати.

Література:

1. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972. – 208 с.

2. Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие для техникумов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова – М. : Высш. школа, 1990. – 208 с

3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1 / И.С. Березин, Н.П.Жидков – М. : Наука. – 1966. – 632с.



Задачі для самостійного розв'язання

1. Байрамов Алі Мірзабей-огли

x_i	*0,235*	*1,035*	*1,835*	*2,635*	*3,435*
$y_i = f(x_i)$	*1,082*	*1,805*	*4,280*	*5,011*	*7,082*

2.1. а) $f'(1)$**,** $f''(1)$; **б)** $f'(3{,}435)$**,** $f''(3{,}435)$**;**

2.2. $f'(1{,}835)$**,** $f''(1{,}835)$;

2.3. а) $f'(1{,}835)$**,** $f''(1{,}835)$**; б)** $f'(1{,}035)$**,** $f''(1{,}035)$.

2. Беленчук Олексій Ігорович

x_i	0,452	0,967	1,482	1,997	2,512
$y_i = f(x_i)$	1,252	2,015	4,342	5,752	6,911

2.1. а) $f'(0,5)$, $f''(0,5)$; **б)** $f'(2,512)$, $f''(2,512)$;

2.2. $f'(1,482)$, $f''(1,482)$;

2.3. а) $f'(1,482)$, $f''(1,482)$; **б)** $f'(0,967)$, $f''(0,967)$.

3. Березний Ігор Васильович

x_i	0,134	1,384	2,634	3,884	5,134
$y_i = f(x_i)$	2,156	3,348	3,611	4,112	4,171

2.1. а) $f'(4)$, $f''(4)$; **б)** $f'(0,134)$, $f''(0,134)$;

2.2. $f'(2,634)$, $f''(2,634)$;

2.3. а) $f'(2,634)$, $f''(2,634)$; **б)** $f'(3,884)$, $f''(3,884)$.

4. Бужак Андрій Васильович

x_i	0,234	2,034	3,834	5,634	7,434
$y_i = f(x_i)$	3,902	2,675	0,611	–3,256	–3,615

2.1. а) $f'(1)$, $f''(1)$; **б)** $f'(7,434)$, $f''(7,434)$;

2.2. $f'(3,834)$, $f''(3,834)$;

2.3. а) $f'(3,834)$, $f''(3,834)$; **б)** $f'(2,034)$, $f''(2,034)$.

5. Бурле Павло Марчелович

x_i	0,132	0,957	2,482	4,007	5,532
$y_i = f(x_i)$	69,531	1,112	–1,672	–1,922	–1,925

2.1. а) $f'(5)$, $f''(5)$; **б)** $f'(0,132)$, $f''(0,132)$;

2.2. $f'(2,482)$, $f''(2,482)$;

2.3. а) $f'(2,482)$, $f''(2,482)$; **б)** $f'(0,957)$, $f''(0,957)$.

6. Волощук Назарій Васильович

x_i	0,218	0,868	1,518	2,168	2,818
$y_i = f(x_i)$	0,511	0,982	2,411	3,115	4,561

2.1. а) $f'(0,7)$, $f''(0,7)$; **б)** $f'(2,818)$, $f''(2,818)$;

2.2. $f'(1,518)$, $f''(1,518)$;

2.3. а) $f'(1,518)$, $f''(1,518)$; **б)** $f'(0,868)$, $f''(0,868)$.

7. Георгіян Євген Геннадійович

x_i	0,324	0,969	1,614	2,259	2,904
$y_i = f(x_i)$	–2,052	–1,597	–0,231	2,808	8,011

2.1. а) $f'(2,5)$, $f''(2,5)$; **б)** $f'(0,324)$, $f''(0,324)$;

2.2. $f'(1,614)$, $f''(1,614)$;

2.3. а) $f'(1,614)$, $f''(1,614)$; **б)** $f'(0,969)$, $f''(0,969)$.

8. Григорчук В`ячеслав Валерійович

x_i	0,282	0,932	1,582	2,232	2,882
$y_i = f(x_i)$	6,324	–0,405	–1,114	–1,315	–1,469

2.1. а) $f'(2,5)$, $f''(2,5)$; **б)** $f'(0,282)$, $f''(0,282)$;

2.2. $f'(1,582)$, $f''(1,582)$;

2.3. а) $f'(1,582)$, $f''(1,582)$; **б)** $f'(2,232)$, $f''(2,232)$.

9. Денис Денис Русланович

x_i	0,015	0,565	1,115	1,665	2,215
$y_i = f(x_i)$	–2,417	–3,819	–0,642	0,848	2,815

2.1. а) $f'(0,4)$, $f''(0,4)$; **б)** $f'(2,215)$, $f''(2,215)$;

2.2. $f'(1,115)$, $f''(1,115)$;

2.3. а) $f'(1,115)$, $f''(1,115)$; **б)** $f'(0,565)$, $f''(0,565)$.

10.Ficzuk Роман Олександрович

x_i	0,248	0,923	1,598	2,273	2,948
$y_i = f(x_i)$	–3,642	0,802	0,841	0,513	0,328

2.1. а) $f'(0,248)$, $f''(0,248)$; **б)** $f'(2,8)$, $f''(2,8)$;

2.2. $f'(1,598)$, $f''(1,598)$;

2.3. а) $f'(1,598)$, $f''(1,598)$; **б)** $f'(2,273)$, $f''(2,273)$.

11. Дубець Василь Русланович

x_i	0,238	1,388	2,538	3,688	4,838
$y_i = f(x_i)$	0,092	0,672	2,385	3,108	2,938

2.1. а) $f'(1)$, $f''(1)$; **б)** $f'(4,838)$, $f''(4,838)$;

2.2. $f'(2,538)$, $f''(2,538)$;

2.3. а) $f'(2,538)$, $f''(2,538)$; **б)** $f'(1,388)$, $f''(1,388)$.

12. Дуплава Олександр Ігорович

x_i	0,234	0,959	1,684	2,409	3,134
$y_i = f(x_i)$	0,511	0,982	2,411	3,115	4,184

2.1. а) $f'(0,7)$, $f''(0,7)$; **б)** $f'(3)$, $f''(3)$;

2.2. $f'(1,684)$, $f''(1,684)$;

2.3. а) $f'(1,684)$, $f''(1,684)$; **б)** $f'(2,409)$, $f''(2,409)$.

13. Жупник Евеліна Михайлівна

x_i	-0,345	0,405	1,155	1,905	2,655
$y_i = f(x_i)$	–1,221	–0,525	2,314	5,106	9,818

2.1. а) $f'(0,2)$, $f''(0,2)$; **б)** $f'(2,655)$, $f''(2,655)$;

2.2. $f'(1,155)$, $f''(1,155)$;

2.3. а) $f'(1,155)$, $f''(1,155)$; **б)** $f'(0,405)$, $f''(0,405)$.

14. Івасюта Павло Сергійович

x_i	0,231	0,881	1,531	2,181	2,831
$y_i = f(x_i)$	–2,748	–3,225	–3,898	–5,908	–6,506

2.1. а) $f'(0{,}231)$, $f''(0{,}231)$; **б)** $f'(2{,}2)$, $f''(2{,}2)$;

2.2. $f'(1{,}531)$, $f''(1{,}531)$;

2.3. а) $f'(1{,}531)$, $f''(1{,}531)$; **б)** $f'(2{,}181)$, $f''(2{,}181)$.

15. Качуровський Станіслав Тарасович

x_i	2,119	3,844	5,569	7,294	9,019
$y_i = f(x_i)$	0,605	0,718	0,105	2,157	3,431

2.1. а) $f'(3)$, $f''(3)$; **б)** $f'(9{,}019)$, $f''(9{,}019)$;

2.2. $f'(5{,}569)$, $f''(5{,}569)$;

2.3. а) $f'(5{,}569)$, $f''(5{,}569)$; **б)** $f'(3{,}844)$, $f''(3{,}844)$.

16. Клим Дмитро Іванович

x_i	0,079	0,754	1,429	2,104	2,779
$y_i = f(x_i)$	–4,308	–0,739	1,697	4,208	6,203

2.1. а) $f'(0{,}079)$, $f''(0{,}079)$; **б)** $f'(2{,}3)$, $f''(2{,}3)$;

2.2. $f'(1{,}429)$, $f''(1{,}429)$;

2.3. а) $f'(1{,}429)$, $f''(1{,}429)$; **б)** $f'(2{,}104)$, $f''(2{,}104)$.

17. Козуб Микола Миколайович

x_i	0,135	0,835	1,535	2,235	2,935
$y_i = f(x_i)$	2,382	–0,212	–1,305	–3,184	–4,365

2.1. а) $f'(0{,}3)$, $f''(0{,}3)$; **б)** $f'(2{,}935)$, $f''(2{,}935)$;

2.2. $f'(1{,}535)$, $f''(1{,}535)$;

2.3. а) $f'(1{,}535)$, $f''(1{,}535)$; **б)** $f'(0{,}835)$, $f''(0{,}835)$.

18. Копадзе Олександра Сергіївна

x_i	-0,135	0,715	1,565	2,415	3,265
$y_i = f(x_i)$	–2,132	–2,113	–1,613	–0,842	1,204

2.1. а) $f'(-0{,}135)$, $f''(-0{,}135)$; **б)** $f'(3{,}1)$, $f''(3{,}1)$;

2.2. $f'(1{,}565)$, $f''(1{,}565)$;

2.3. а) $f'(1{,}565)$, $f''(1{,}565)$; **б)** $f'(2{,}415)$, $f''(2{,}415)$.

19. Костюк Віталій Іванович

x_i	0,351	1,176	2,001	2,826	3,651
$y_i = f(x_i)$	0,605	0,218	0,205	1,157	5,092

2.1. а) $f'(1{,}1)$, $f''(1{,}1)$; **б)** $f'(3{,}651)$, $f''(3{,}651)$;

2.2. $f'(2{,}001)$, $f''(2{,}001)$;

2.3. а) $f'(2{,}001)$, $f''(2{,}001)$; **б)** $f'(1{,}176)$, $f''(1{,}176)$.

20. Кушнірик Яна Олександрівна

x_i	*0,184*	*0,859*	*1,534*	*2,209*	*2,884*
$y_i = f(x_i)$	*–1,687*	*–2,542*	*–5,082*	*–7,042*	*–8,538*

2.1. а) $f'(0{,}184)$, $f''(0{,}184)$; **б)** $f'(2{,}5)$, $f''(2{,}5)$;

2.2. $f'(1{,}534)$, $f''(1{,}534)$;

2.3. а) $f'(1{,}534)$, $f''(1{,}534)$; **б)** $f'(2{,}209)$, $f''(2{,}209)$.

21. Луник Марія Михайлівна

x_i	*0,083*	*0,783*	*1,483*	*2,183*	*2,883*
$y_i = f(x_i)$	*–2,132*	*–2,013*	*–1,613*	*–0,842*	*2,973*

2.1. а) $f'(0{,}6)$, $f''(0{,}6)$; **б)** $f'(2{,}883)$, $f''(2{,}883)$;

2.2. $f'(1{,}483)$, $f''(1{,}483)$;

2.3. а) $f'(1{,}483)$, $f''(1{,}483)$; **б)** $f'(0{,}783)$, $f''(0{,}783)$.

22. Максименко Михайло Сергійович

x_i	*0,119*	*1,069*	*2,019*	*2,969*	*3,919*
$y_i = f(x_i)$	*–0,572*	*–2,015*	*–3,342*	*–6,752*	*–6,742*

2.1. а) $f'(0{,}119)$, $f''(0{,}119)$; **б)** $f'(3)$, $f''(3)$;

2.2. $f'(2{,}019)$, $f''(2{,}019)$;

2.3. а) $f'(2{,}019)$, $f''(2{,}019)$; **б)** $f'(2{,}969)$, $f''(2{,}969)$.

23. Мінтянський Андрій Петрович

x_i	*0,357*	*0,932*	*1,507*	*2,082*	*2,657*
$y_i = f(x_i)$	*0,548*	*1,012*	*1,159*	*0,694*	*–0,503*

2.1. а) $f'(0{,}5)$, $f''(0{,}5)$; **б)** $f'(2{,}657)$, $f''(2{,}657)$;

2.2. $f'(1{,}507)$, $f''(1{,}507)$;

2.3. а) $f'(1{,}507)$, $f''(1{,}507)$; **б)** $f'(0{,}932)$, $f''(0{,}932)$.

24. Паращук Олексій Іванович

x_i	*0,092*	*0,842*	*1,592*	*2,342*	*3,092*
$y_i = f(x_i)$	*3,161*	*1,357*	*–0,158*	*–0,129*	*–4,438*

2.1. а) $f'(0{,}092)$, $f''(0{,}092)$; **б)** $f'(2{,}7)$, $f''(2{,}7)$;

2.2. $f'(1{,}592)$, $f''(1{,}592)$;

2.3. а) $f'(1{,}592)$, $f''(1{,}592)$; **б)** $f'(2{,}342)$, $f''(2{,}342)$.

25. Сарай Богдан Васильович

x_i	*0,172*	*0,992*	*1,812*	*2,632*	*3,452*
$y_i = f(x_i)$	*–7,057*	*–5,703*	*–0,132*	*1,423*	*2,832*

2.1. а) $f'(0{,}8)$, $f''(0{,}8)$; **б)** $f'(3{,}452)$, $f''(3{,}452)$;

2.2. $f'(1{,}812)$, $f''(1{,}812)$;

2.3. а) $f'(1{,}812)$, $f''(1{,}812)$; **б)** $f'(0{,}992)$, $f''(0{,}992)$.

26. Феціюк Денис Мирославович

x_i	0,259	0,909	1,559	2,209	2,859
$y_i = f(x_i)$	0,018	–1,259	–1,748	–0,532	0,911

2.1. а) $f'(0,259)$, $f''(0,259)$; **б)** $f'(2,5)$, $f''(2,5)$;

2.2. $f'(1,559)$, $f''(1,559)$;

2.3. а) $f'(1,559)$, $f''(1,559)$; **б)** $f'(2,209)$, $f''(2,209)$.

27. Хмелєвська Анастасія Олександрівна

x_i	0,284	0,734	1,184	1,634	2,084
$y_i = f(x_i)$	–3,856	–3,953	–5,112	–7,632	–8,011

2.1. а) $f'(0,7)$, $f''(0,7)$; **б)** $f'(2,084)$, $f''(2,084)$;

2.2. $f'(1,184)$, $f''(1,184)$;

2.3. а) $f'(1,184)$, $f''(1,184)$; **б)** $f'(0,734)$, $f''(0,734)$.

28. Чайковський Станіслав Валерійович

x_i	0,847	1,372	1,897	2,422	2,947
$y_i = f(x_i)$	–1,104	1,042	0,029	–0,344	–0,449

2.1. а) $f'(2,5)$, $f''(2,5)$; **б)** $f'(0,847)$, $f''(0,847)$;

2.2. $f'(1,897)$, $f''(1,897)$;

2.3. а) $f'(1,897)$, $f''(1,897)$; **б)** $f'(1,372)$, $f''(1,372)$.

Розв'язання типових прикладів

Приклад 1.

2. *Знайти наближене значення перших та других похідних таблично заданих функцій, використовуючи:*

2.1. *формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона;*

2.2. *формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційного многочлену Стірлінга;*

2.3. *простіші формули для оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох вузлах.*

3. *Порівняти отримані результати.*

x_i	-1,25	-0,5	0,25	1	1,75
$y_i = f(x_i)$	0,25	1,225	1,15	2,35	3,15

2.1. а) $f'(-1)$, $f''(-1)$; **б)** $f'(1,5)$, $f''(1,5)$; **в)** $f'(-1,25)$, $f''(-1,25)$;

2.2. $f'(0,25)$, $f''(0,25)$;

2.3. а) $f'(0,25)$, $f''(0,25)$; **б)** $f'(1)$, $f''(1)$; **в)** $f'(-0,5)$, $f''(-0,5)$.

►*Розв'язання.* Очевидно, що задана система рівновіддалених вузлів з $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 0,75$ ($i = 0,1,2,3,4$).

☑ **2.1. а)** *Знайдемо* $f'(-1)$, $f''(-1)$, *використовуючи формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона.*

Оскільки точка $x=-1\in[-1,25;-0,5]=[x_0;x_1]$ знаходиться на початку відрізка інтерполяції і не співпадає з жодним з вузлів x_0, x_1, то маємо скористатись формулами (7), (8) (отриманими в результаті диференціювання першого ІМН).

Складемо таблицю скінченних різниць

i	x_i	$y_i=f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	-1,25	0,250	**0,975**	**-1,050**	**2,325**	**-4,000**
1	-0,50	1,225	-0,075	1,275	-1,675	---
2	0,25	1,150	1,200	-0,400	---	---
3	1,00	2,350	0,800	---	---	---
4	1,75	3,150	---	---	---	---
Σ			**---**	**-0,175**	**0,650**	**-4,000**
S			**-0,175**	**0,650**	**-4,000**	**---**

Для знаходження наближеного значення першої похідної користуємось формулою (7)

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\Delta^2 y_0\frac{2t-1}{2!}+\Delta^3 y_0\frac{3t^2-6t+2}{3!}+\Delta^4 y_0\frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}+\ldots\right),$$

в яку маємо підставити $x=-1$, $h=0,75$, $t=\dfrac{x-x_0}{h}=\dfrac{-1-(-1,25)}{0,75}=\dfrac{0,25}{0,75}=\dfrac{1}{3}$ та різниці, виділені червоним кольором у таблиці скінченних різниць. Маємо:

$$f'(-1)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\Delta^2 y_0\frac{2t-1}{2!}+\Delta^3 y_0\frac{3t^2-6t+2}{3!}+\Delta^4 y_0\frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\right)\Bigg|_{\substack{h=0,75\\ t=\frac{1}{3}}}\approx$$

$$\approx\frac{1}{0,75}\left(\Delta y_0+\Delta^2 y_0\frac{2\cdot\frac{1}{3}-1}{2!}+\Delta^3 y_0\frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-\cancel{6\cdot\frac{1}{3}}+\cancel{2}}{3!}+\Delta^4 y_0\frac{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+22\cdot\frac{1}{3}-6}{4!}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\underbrace{0,975}_{\Delta y_0}+\underbrace{(-1,05)}_{\Delta^2 y_0}\frac{-\frac{1}{3}}{2!}+\underbrace{2,325}_{\Delta^3 y_0}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{3!}+\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_0}\frac{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+22\cdot\frac{1}{3}-6}{4!}\right)=\ldots\approx 1,820782\approx 1,821.$$

Відповідь заокруглюємо до трьох знаків після коми відповідно до найбільшої кількості знаків після коми у вхідних даних, де найбільшу кількість знаків – 3 має число $y_1=f(x_1)=1,225$.

Для знаходження наближеного значення другої похідної у точці $x=-1$, маємо підставити, як і у випадку першої похідної, $x=-1$, $h=0,75$, $t=\dfrac{1}{3}$ та скінченні різниці, виділені червоним кольором у таблиці скінченних різниць, у формулу (8):

$$f''(-1)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0(t-1)+\Delta^4 y_0\frac{6t^2-18t+11}{12}+\ldots\right)\Bigg|_{\substack{h=0,75\\ t=\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{16}{9}\left(\underbrace{-1,05}_{\Delta^2 y_0}+\underbrace{2,325}_{\Delta^3 y_0}\underbrace{\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{t-1}+\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_0}\frac{6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-18\cdot\frac{1}{3}+11}{12}\right)=\ldots\approx -7,98025\approx -7,980.$$

Відповідь: $f'(-1)\approx 1,821$, $f''(-1)\approx\approx -7,980$.

☑ **2.1. б)** *Знайдемо* $f'(1,5)$, $f''(1,5)$, *використовуючи формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона*

Оскільки точка $x=1,5\in[1;1,75]=[x_{n-1};x_n]$ ($n=3$) знаходиться в кінці відрізка інтерполяції і не співпадає з жодним з вузлів x_{n-1}, x_n, то маємо скористатись формулами (9), (10) (отриманими в результаті диференціювання другого ІМН). Для використання цих формул нам потрібні скінченні різниці, виділені у відповідній таблиці синім кольором:

i	x_i	$y_i=f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	-1,25	0,250	0,975	-1,050	2,325	**-4,000**
1	-0,50	1,225	-0,075	1,275	**-1,675**	---
2	0,25	1,150	1,200	**-0,400**	---	---
3	1,00	2,350	**0,800**	---	---	---
4	1,75	3,150	---	---	---	---
Σ			**---**	**-0,175**	**0,650**	**-4,000**
S			**-0,175**	**0,650**	**-4,000**	**---**

Для знаходження наближеного значення $f'(1,5)$ користуємось формулою (9), в яку маємо підставити $x=1,5$, $h=0,75$, $t=\dfrac{x_n-x}{h}=\dfrac{x_4-x}{h}=\dfrac{1,75-1,5}{0,75}=\dfrac{0,25}{0,75}=\dfrac{1}{3}$ та скінченні різниці, виділені синім кольором у таблиці скінченних різниць:

$$f'(1,5)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1}+\Delta^2 y_{n-2}\frac{2t+1}{2!}+\Delta^3 y_{n-3}\frac{3t^2+6t+2}{3!}+\Delta^4 y_{n-4}\frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!}\right)\Bigg|_{\substack{h=0,75\\ t=\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{0,75}\left(\underbrace{0,8}_{\Delta y_{n-1}}+\underbrace{(-0,4)}_{\Delta^2 y_{n-2}}\frac{2\cdot\frac{1}{3}+1}{2!}+\underbrace{(-1,675)}_{\Delta^3 y_{n-3}}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\cdot\frac{1}{3}+2}{3!}+\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_{n-4}}\frac{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+22\cdot\frac{1}{3}+6}{4!}\right)=$$

$$=-\frac{1768}{399}\approx-4,4310777\approx-4,431.$$

Аналогічно

$$f''(1,5)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2}+\Delta^3 y_{n-3}(t+1)+\Delta^4 y_{n-4}\frac{6t^2+18t+11}{12}\right)\Bigg|_{\substack{h=0,75\\ t=\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{0,75^2}\left(\underbrace{-0,4}_{\Delta^2 y_{n-2}}+\underbrace{(-1,675)}_{\Delta^3 y_{n-3}}\left(\frac{1}{3}+1\right)+\underbrace{(-4)}_{\Delta^4 y_{n-4}}\frac{6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+18\cdot\frac{1}{3}+11}{12}\right)=-\frac{6136}{405}\approx-15,1506173\approx-15,151.$$

Відповідь: $f'(1,5)\approx-4,431$, $f''(1,5)\approx-15,151$.

☑ **2.1. в)** *Знайдемо* $f'(-1,25)$, $f''(-1,25)$, *використовуючи формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона*

Оскільки точка $x=-1,25=x_0$ (співпадає з лівим кінцем відрізка інтерполювання), то для знаходження $f'(-1,25)$, $f''(-1,25)$ маємо скористатись формулами (11), (13) з $n=4$.

У формулу (11) підставимо $x_0=-1,25$, $h=0,75$ і скінченні різниці першого рядка таблиці скінченних різниць (у таблиці п. 2.1 а) виділені червоним кольором)

$$f'(-1,25)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right)\Bigg|_{h=0,75}=\frac{1}{0,75}\left(0,975-\frac{1}{2}(-1,05)+\frac{1}{3}(2,325)-\frac{1}{4}(-4)\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{39}{40}+\frac{21}{40}+\frac{31}{40}+1\right)=\frac{131}{30}\approx 4,3666667\approx 4,367$$

Аналогічно наближене значення другої похідної знаходимо, покладаючи $x_0=-1,25$, $h=0,75$ у формулі (13) і використовуючи скінченні різниці першого рядка таблиці скінченних різниць (у таблиці п. 2.1 а) виділені червоним кольором). Маємо:

$$f''(-1,25)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0+\ldots\right)\Bigg|_{h=0,75}=\frac{1}{0,75^2}\left(-1,05-2,325+\frac{11}{12}(-4)\right)=$$

$$=-\frac{338}{27}\approx-12,5185185\approx-12,519\,.$$

<u>Відповідь</u>: $f'(-1,25)\approx 4,367$, $f''(-1,25)\approx-12,519$.

☑ **2.2.** *Знайдемо* $f'(0,25)$, $f''(0,25)$, *використовуючи формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційного многочлену Стірлінґа*

Для використання формул, що базуються на інтерполяційному многочлені Стірлінґа, таблицю скінченних різниць слід переписати у діагональному вигляді,

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_{-2}	y_{-2}				
		$\Delta y_{-2}=y_{-1}-y_{-2}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}=\Delta y_{-1}-\Delta y_{-2}$		
		$\Delta y_{-1}=y_0-y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2}=\Delta^2 y_{-1}-\Delta^2 y_{-2}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}=\Delta y_0-\Delta y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}=\Delta^3 y_{-1}-\Delta^3 y_{-2}$
		$\Delta y_0=y_1-y_0$		$\Delta^3 y_{-1}=\Delta^2 y_0-\Delta^2 y_{-1}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$		
		$\Delta y_1=y_2-y_1$			
x_2	y_2				

вважаючи серединну точку x_2 за x_0 і присвоюючи точкам, що знаходяться у таблиці вище за неї, від'ємні індекси, а нижчим від неї точкам – додатні (див. п. 2.3 з теоретичного матеріалу).

Для нашого прикладу діагональна таблиця скінченних різниць виглядає так

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-1,250	0,250				
		0,975			
-0,500	1,225		-1,050		
		-0,075		**2,325**	
0,250	1,150		**1,275**		**-4,000**
		1,200		**-1,675**	
1,000	2,350		-0,400		
		0,800			
1,750	3,150				

Червоним кольором виділено різниці, які використовуються у формулі (16)

$$y_0' = f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots\right)$$

для знаходження наближеного значення першої похідної, а синім – різниці для знаходження наближеного значення другої похідної за формулою (17)

$$y_0'' = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-4} + \ldots\right)$$

Оскільки нас у прикладі скінченні різниці до четвертого порядку включно, то кожна з вищенаведених формул міститиме лише по 2 доданки у дужках. Маємо:

$$y_0' = f'(x_0) \approx \frac{1}{0,75}\left(\frac{-0,075+1,2}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2,325-1,675}{2}\right) = \frac{61}{90} \approx 0,6777778 \approx 0,678$$

і

$$y_0'' = f''(x_0) \approx \frac{1}{0,75^2}\left(1,275 - \frac{1}{12}\cdot(-4)\right) = \frac{16}{9}\left(1,275+\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9}\cdot\frac{193}{120} \approx 2,859.$$

Відповідь: $f'(0,25) \approx 0,678$, $f''(0,25) \approx 2,859$.

☑ **2.3.** У цьому пункті для обчислень використовуємо формули з п. 2.1 теоретичного матеріалу (таблиці 1 для оцінок перших похідних та формул після таблиці 2 – для других).

а) *Знайдемо* $f'(0,25)$, $f''(0,25)$, *використовуючи простіші формули для оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох вузлах*

Точка $x = 0,25$ - середня з п’яти вузлових точок, отже, першу похідну у цій точці можна наблизити, використовуючи симетричну формулу з блоку «5 точок» таблиці 1

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h},$$

покладаючи $i = 0$. Тоді нумерація точок при підстановці у формулу буде така:

x_i	x_{-2}=-1,25	x_{-1}=-0,5	x_0=0,25	x_1=1	x_2=1,75
$y_i = f(x_i)$	y_{-2}=0,25	y_{-1}=1,225	y_0=1,15	y_1=2,35	y_2=3,15

Маємо:

$$f'(0,25) \approx \left.\frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}\right|_{\substack{i=0\\h=0,75}} = \frac{-\overbrace{f(x_2)}^{y_2} + 8\overbrace{f(x_1)}^{y_1} - 8\overbrace{f(x_{-1})}^{y_{-1}} + \overbrace{f(x_{-2})}^{y_{-2}}}{12\cdot 0,75} =$$

$$= \frac{-3,15 + 8\cdot 2,35 - 8\cdot 1,225 + 0,25}{12\cdot 0,75} = \frac{6,1}{9} \approx 0,6777778 \approx 0,678.$$

Альтернативним варіантом є обчислення за формулами, наведеними після таблиці 1 та 2, де нумерація точок не змінюється:

$$y_2' = f'(x_2) = \frac{1}{12h}\left(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4\right) + \underbrace{\frac{h^4}{30}f^{(V)}(\xi)}_{O(h^4)} \approx \frac{1}{12h}\left(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4\right),$$

$$y_2'' = f''(x_2) = \frac{-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4}{24h^2} + \underbrace{\frac{h^4}{90}f^{(VI)}(\xi)}_{O(h^4)} \approx \frac{1}{24h^2}\left(-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4\right)$$

тобто обчислення проводяться відносно початкової таблиці

x_i	x_0=-1,25	x_1=-0,5	x_2=0,25	x_3=1	x_4=1,75
$y_i=f(x_i)$	y_0=0,25	y_1=1,225	y_2=1,15	y_3=2,35	y_4=3,15

Підставляючи відповідні значення у кожну з формул, отримуємо

$$f'(0,25)=y_2'=f'(x_2)\approx\frac{1}{12h}\left(y_0-8y_1+8y_3-y_4\right)=\frac{1}{12\cdot 0,75}\left(0,25-8\cdot 1,225+8\cdot 2,35-3,15\right)\approx 0,678.$$

Для другої похідної маємо оцінку

$$f''(0,25)=y_2''=f''(x_2)\approx\frac{1}{24\cdot 0,75^2}\left(-2\cdot 0,25+32\cdot 1,225-60\cdot 1,15+32\cdot 2,35-2\cdot 3,15\right)=\frac{38,6}{13,5}\approx 2,859.$$

Відповідь: $f'(0,25)\approx 0,678$, $f''(0,25)\approx 2,859$.

☑ **2.3. б)** *Знайдемо* $f'(1)$, $f''(1)$, *використовуючи простіші формули для оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох вузлах*

Оскільки нам треба знайти похідну у точці $x=1$, яка є передостанньою у таблиці, то ми маємо прийняти її за початкову точку x_0

x_i	x_{-3}=-1,25	x_{-2}=-0,5	x_{-1}=0,25	x_0=1	x_1=1,75
$y_i=f(x_i)$	y_{-3}=0,25	y_{-2}=1,225	y_{-1}=1,15	y_0=2,35	y_1=3,15

і скористатись несиметричною формулою (диференціювання назад)

$$f'(x_i)\approx\frac{-f(x_{i-3})+6f(x_{i-2})-18f(x_{i-1})+10f(x_i)+3f(x_{i+1})}{12h}$$

блоку «5 точок» з таблиці 1. Підставляючи відповідні числові значення, знаходимо:

$$f'(1)=f'(x_i)\approx\left.\frac{-f(x_{i-3})+6f(x_{i-2})-18f(x_{i-1})+10f(x_i)+3f(x_{i+1})}{12h}\right|_{\substack{i=0\\h=0,75}}=$$

$$=\frac{-f(x_{-3})+6f(x_{-2})-18f(x_{-1})+10f(x_0)+3f(x_1)}{12\cdot 0,75}=\frac{-0,25+6\cdot 1,225-18\cdot 1,15+10\cdot 2,35+3\cdot 3,15}{12\cdot 0,75}=$$

Як і раніше, альтернативою є звичайна (початкова) нумерація точок

x_i	x_0=-1,25	x_1=-0,5	x_2=0,25	x_3=1	x_4=1,75
$y_i=f(x_i)$	y_0=0,25	y_1=1,225	y_2=1,15	y_3=2,35	y_4=3,15

і використання формул

$$y_3'=f'(x_3)=\frac{1}{12h}\left(-y_0+6y_1-18y_2+10y_3+3y_4\right)+\underbrace{\frac{h^4}{20}f^{(V)}(\xi)}_{O(h^4)}\approx\frac{1}{12h}\left(-y_0+6y_1-18y_2+10y_3+3y_4\right),$$

$$y_3''=f''(x_3)=\frac{-2y_0+8y_1+12y_2-40y_3+22y_4}{24h^2}+\underbrace{\left(-\frac{h^3}{12}f^{(V)}(\xi_1)+\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2)\right)}_{O(h^4)}\approx$$

$$\approx\frac{1}{24h^2}\left(-2y_0+8y_1+12y_2-40y_3+22y_4\right).$$

Підставляючи числові значення, знаходимо наближене значення першої похідної

$$f'(1)=y_3'=f'(x_3)\approx\frac{1}{12h}\left(-y_0+6y_1-18y_2+10y_3+3y_4\right)=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 0,75}\left(-0,25+6\cdot 1,225-18\cdot 1,15+10\cdot 2,35+3\cdot 3,15\right)=\frac{19,35}{9}=2,15=2,150$$

та другої похідної:

$$f''(1)=y_3''=f''(x_3)\approx\frac{1}{24h^2}\left(-2y_0+8y_1+12y_2-40y_3+22y_4\right)=$$

$$=\frac{1}{24\cdot 0,75^2}\left(-2\cdot 0,25+8\cdot 1,225+12\cdot 1,15-40\cdot 2,35+22\cdot 3,15\right)=\frac{-1,6}{13,5}\approx -0,119.$$

Відповідь: $f'(1)\approx 2,150$, $f''(1)\approx -0,119$.

☑ **2.3. в)** *Знайдемо* $f'(-0,5)$, $f''(-0,5)$, *використовуючи простіші формули для оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох вузлах*

Використаємо початкову нумерацію точок

x_i	x_0=-1,25	x_1=-0,5	x_2=0,25	x_3=1	x_4=1,75
$y_i=f(x_i)$	y_0=0,25	y_1=1,225	y_2=1,15	y_3=2,35	y_4=3,15

та формули

$$y_1'=f'(x_1)=\frac{1}{12h}\left(-3y_0-10y_1+18y_2-6y_3+y_4\right)-\underbrace{\frac{h^4}{20}f^{(V)}(\xi)}_{O(h^4)}\approx\frac{1}{12h}\left(-3y_0-10y_1+18y_2-6y_3+y_4\right),$$

$$y_1''=f''(x_1)=\frac{22y_0-40y_1+12y_2+8y_3-2y_4}{24h^2}+\underbrace{\left(\frac{h^3}{12}f^{(V)}(\xi_1)-\frac{h^4}{60}f^{(VI)}(\xi_2)\right)}_{O(h^4)}\approx$$

$$\approx\frac{1}{24h^2}\left(22y_0-40y_1+12y_2+8y_3-2y_4\right).$$

Маємо:

$$f'(0,5)=y_1'=f'(x_1)\approx\frac{1}{12h}\left(-3y_0-10y_1+18y_2-6y_3+y_4\right)=$$

$$\frac{1}{12\cdot 0,75}\left(-3\cdot 0,25-10\cdot 1,225+18\cdot 1,15-6\cdot 2,35+3,15\right)=\frac{-3,25}{9}\approx -0,361$$

і

$$f''(-0,5)=y_1''=f''(x_1)\approx\frac{1}{24h^2}\left(22y_0-40y_1+12y_2+8y_3-2y_4\right)=$$

$$=\frac{1}{24\cdot 0,75^2}\left(22\cdot 0,25-40\cdot 1,225+12\cdot 1,15+8\cdot 2,35-2\cdot 3,15\right)=\frac{-17,2}{13,5}\approx -1,274.$$

Відповідь: $f'(-0,5)\approx -0,361$, $f''(-0,5)\approx -1,274$. ■

Теоретичні відомості

1. Постановка задачі чисельного диференціювання. Основні підходи до розв'язання цієї задачі.

<u>Постановка задачі:</u> нехай дано табличні значення деякої функції $y=f(x)$, визначеної і досить гладкої (існують похідні функції до порядку, зумовленого постановкою задачі) на відрізку $[a;b]$, зокрема, відомі її значення у точках $a\le x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n\le b$:

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Треба оцінити значення похідних функції $f(x)$ у точках відрізку $[a;b]$. При цьому можливі випадки:

- ☑ $x = x_i$ для деякого $i = \overline{0,n}$ (тобто точка, в якій обчислюється похідна, співпадає з одним з вузлів);
- ☑ $x \in (x_i; x_{i+1})$ для деякого $i = \overline{0,n-1}$ (точка знаходиться між деякими двома сусідніми вузлами).

Очевидні ідеї для розв'язання такої задачі:

- ☑ якщо відомий аналітичний вираз функції $f(x)$, але він є заскладним для диференціювання, то найточніший спосіб – розкласти функцію у ряд Тейлора в околі точки $\tilde{x}$, в якій треба обчислити похідну

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \frac{f'(\tilde{x})}{1!}(x-\tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x-\tilde{x})^2 + \ldots, \; x \in \left(\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x\right), \qquad \textbf{(1)}$$

а далі цей степеневий ряд диференціювати потрібну кількість разів;

- ☑ якщо для таблично заданої функції $f(x)$ побудовано сплайн (квадратичний чи кубічний), то похідні можна шукати, диференціюючи відповідний сплайн;
- ☑ якщо відомий деякий інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, тобто

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x,f); \; P_n(x_i) = y_i, \; i = \overline{0,n}, \qquad \textbf{(2)}$$

то природно вважати, що

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x,f), \qquad \textbf{(3)}$$

де k - порядок похідної. При цьому оцінка похибки

$$\Delta \le |R_n^{(k)}(x,f)| \qquad \textbf{(4)}$$

На перший погляд, наведено «ідеальні» схеми, але…

На початку 20-го сторіччя знаменитий французький математик Ж.Адамар (Hadamard) сформулював поняття коректних математичних задач – таких, що мають єдиний розв'язок і цей розв'язок є стійким щодо умов задачі. Некоректні задачі Адамар пропонував не розглядати, оскільки вони нібито не мають реального змісту. Ця заборона проіснувала до середини сторіччя, коли вимоги практики примусили розв'язувати численні некоректні задачі. В наступні десятиріччя була створена теорія розв'язування некоректних задач, яку назвали „теорія регуляризації". Основна ідея регуляризації полягає в заміні некоректної задачі такою коректною, розв'язок якої можна як завгодно точно наблизити до розв'язку некоректної задачі.

Неважко продемонструвати **некоректність диференціювання**. Нехай задана функція $u(x)=f(x)+\sin(\omega t)$, що складається з гладкої функції $f(x)$ та гармонічного доданка, який розглядаємо як похибку, відхилення функції $f(x)$. Похідна має вигляд: $du(x)/dx=df(x)/dx+\omega\cos(\omega t)$. Похибка похідної може бути як завгодно великою, якщо не обмежувати параметр ω, тоді як похибка функції $u(x)$ обмежена. Отже, похибки похідних можуть бути як завгодно великі при обмежених похибках початкових даних, тобто диференціювання є нестійким щодо змін початкових даних.

Некоректність диференціювання суттєво ускладнює числовий обрахунок похідних.

Найпростіші формули похідних для функції дискретного аргумента u_i, (i=1,…,n) такі:

$$\frac{du_i}{dx} \cong \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}); \quad \frac{du_i}{dx} \cong \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i); \quad \frac{du_i}{dx} \cong \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}); \qquad \textbf{(5)}$$

де $h=(x_i-x_{i-1})=(x_{i+1}-x_i)$ – крок за аргументом.

Здається на перший погляд, що зменшення h повинно зменшувати похибку наближених формул (5), аж поки похідна не стане точною при $h \to 0$. Але нехай дискретне значення функції має похибку: $\tilde{u}_i = u_i + \delta$. Тоді, за першою формулою (5), $\frac{du_i}{dx} \cong \frac{1}{h}(\tilde{u}_i - u_{i-1}) = \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{\delta}{h}$, тобто похибка похідної нескінченно зростає зі зменшенням h. Отже, крок числового диференціювання дискретної функції з похибками не можна необмежено зменшувати, а треба узгоджувати його з похибками значень функції. Вперше помітив це Ньютон. Загалом правильний вибір кроку числового диференціювання дискретної функції з похибками є непростою задачею.

Існує багато формул числового диференціювання, аналогічних до (5). Всі вони походять з формул інтерполюючих поліномів, подібно до того, як (5) походить з лінійної інтерполяції.

Універсальними засобами числового обрахунку похідних є сплайн-інтерполяція. Після побудови сплайна похідні знаходять аналітично, а застосування апроксимуючого сплайна дозволяє „згладжувати” похибки у вузлах. По суті, апроксимуючий сплайн регуляризує диференціювання дискретної функції з похибками.

2. *Формули для оцінки перших та других похідних*

Для простоти викладу вважатимемо, що задані вузли – рівновіддалені, тобто

$$x_{i+1} - x_i = h = const\,,\quad i = \overline{0,n}\,.$$

Зауваження: з ростом порядку похідної зазвичай різко падає точність чисельного диференціювання. Тому на практиці рідко застосовують формули чисельного диференціювання для похідних вище другого порядку.

2.1. *Найпростіші формули оцінки похідних за відомими значеннями функції у кількох (2-5) вузлах.*

Формули для оцінок перших похідних

Таблиця 1

Тип формули	*Формула*	*Порядок точ-ності*
2 точки		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
Несиметричні (диференціювання назад)	$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
3 точки		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Несиметричні (диференціювання назад)	$f'(x_i) \approx \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Симетричні	$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
4 точки		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f'(x_i) \approx \frac{-11f(x_i) + 18f(x_{i+1}) - 9f(x_{i+2}) + 2f(x_{i+3})}{6h}$	$O(h^3)$
	$f'(x_i) \approx \frac{-2f(x_{i-1}) - 3f(x_i) + 6f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{6h}$	$O(h^3)$

Несиметричні (диференціювання назад)	$f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i-2}) - 6f(x_{i-1}) + 3f(x_i) + 2f(x_{i+1})}{6h}$	$O(h^3)$
	$f'(x_i) \approx \dfrac{-2f(x_{i-3}) + 9f(x_{i-2}) - 18f(x_{i-1}) + 11f(x_i)}{6h}$	$O(h^3)$
5 точок		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f'(x_i) \approx \dfrac{-25f(x_i) + 48f(x_{i+1}) - 36f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+4})}{12h}$	$O(h^4)$
	$f'(x_i) \approx \dfrac{-3f(x_{i-1}) - 10f(x_i) + 18f(x_{i+1}) - 6f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})}{12h}$	$O(h^4)$
Несиметричні (диференціювання назад)	$f'(x_i) \approx \dfrac{-f(x_{i-3}) + 6f(x_{i-2}) - 18f(x_{i-1}) + 10f(x_i) + 3f(x_{i+1})}{12h}$	$O(h^4)$
	$f'(x_i) \approx \dfrac{3f(x_{i-4}) - 16f(x_{i-3}) + 36f(x_{i-2}) - 48f(x_{i-1}) + 25f(x_i)}{12h}$	$O(h^4)$
Симетричні	$f'(x_i) \approx \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$

Іноді формули з таблиці 1 записують у наступному вигляді.

$n = 2$ (три точки):

$$y'_0 = \frac{1}{2h}[-3y_0 + 4y_1 - y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h}[y_2 - y_0] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h}[y_0 - 4y_1 + 3y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

$n = 3$ (чотири точки):

$$y'_0 = \frac{1}{6h}[-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h}[-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3] + \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h}[y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3] + \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi).$$

$n = 4$ (п'ять точок):

$$y'_0 = \frac{1}{12h}[-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{12h}[-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4] - \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{12h}[y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4] + \frac{h^4}{30} f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_3 = \frac{1}{12h}[-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4] + \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y'_4 = \frac{1}{12h}[3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi).$$

Формули для оцінок других похідних

Таблиця 2

Тип формули	*Формула*	*Порядок точ-ності*
3 точки		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f''(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Несиметричні (диференціювання назад)	$f''(x_i) \approx \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h^2)$
Симетричні	$f''(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
4 точки		
Несиметричні (диференціювання вперед)	$f''(x_i) \approx \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i+1}) + 4f(x_{i+2}) - f(x_{i+3})}{h^2}$	$O(h^3)$
	$f''(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2},\ i=1$	$O(h^3)$
Несиметричні (диференціювання назад)	$f''(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2},\ i=2$	$O(h^3)$
	$f''(x_i) \approx \dfrac{-f(x_{i-3}) + 4f(x_{i-2}) - 5f(x_{i-1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^3)$

$n = 2$ (три точки):

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] - hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{(IV)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_2'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] + hf'''(\xi_1) - \frac{h^2}{6} f^{(IV)}(\xi_2).$$

$n = 3$ (чотитри точки):

$$y_0'' = \frac{1}{6h^2}[12y_0 - 30y_1 + 24y_2 - 6y_3] + \frac{11}{12}h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{6h^2}[6y_0 - 12y_1 + 6y_2] - \frac{1}{12}h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_2'' = \frac{1}{6h^2}[6y_1 - 12y_2 + 6y_3] - \frac{1}{12}h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_3'' = \frac{1}{6h^2}[-6y_0 + 24y_1 - 30y_2 + 12y_3] + \frac{11}{12}h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{10} f^{(V)}(\xi_2).$$

$n = 4$ (п'ять точок):

$$y_0'' = \frac{1}{24h^2}[70y_0 - 208y_1 + 228y_2 - 112y_3 + 22y_4] - \frac{5}{6}h^3 f^{(V)}(\xi_1) + \frac{h^4}{15} f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{24h^2}[22y_0 - 40y_1 + 12y_2 + 8y_3 - 2y_4] + \frac{1}{12}h^3 f^{(V)}(\xi_1) - \frac{h^4}{60} f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_2'' = \frac{1}{24h^2}[-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4] + \frac{h^4}{90} f^{(VI)}(\xi_1);$$

$$y_3'' = \frac{1}{24h^2}[-2y_0 + 8y_1 + 12y_2 - 40y_3 + 22y_4] -$$
$$- \frac{1}{12}h^3 f^{(V)}(\xi_1) + \frac{h^4}{60} f^{(VI)}(\xi_2);$$
$$y_4'' = \frac{1}{24h^2}[22y_0 - 112y_1 + 228y_2 - 208y_3 + 70y_4] +$$
$$+ \frac{5}{6}h^3 f^{(V)}(\xi_1) - \frac{h^4}{15} f^{(VI)}(\xi_2).$$

Усі формули цього пункту отримуються при диференціюванні полінома Лаґранжа і подальших його перетвореннях.

2.2. Формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона.

Нагадаємо, що першим інтерполяційним многочленом Ньютона (для інтерполювання вперед) називається многочлен вигляду

$$N_n^1(t) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad \textbf{(6)}$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, а $\Delta^{k+1} y_0 = \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0$ - скінченні різниці ($k = \overline{0, n-1}$).

Враховуючи, що

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \text{ (адже } dx = \Delta x = h\text{)},$$

маємо

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{1}{h}.$$

Тоді, диференціюючи рівність (6), отримуємо

$$f'(x) \approx 0 + \Delta y_0 \frac{1}{h} + \Delta^2 y_0 \frac{2t-1}{2!}\cdot\frac{1}{h} + \Delta^3 y_0 \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\cdot\frac{1}{h} + \Delta^4 y_0 \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\cdot\frac{1}{h} + \ldots$$

і, винісши за дужки $\dfrac{1}{h}$, остаточно маємо:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \frac{2t-1}{2!} + \Delta^3 y_0 \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} + \Delta^4 y_0 \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!} + \ldots\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Формулу (7) застосовують, як і для випадку першої інтерполяційної формули Ньютона, коли $x \in [x_0; x_1]$.

Диференціюючи рівність (7) (і виносячи $\dfrac{1}{h}$ за дужки), отримуємо вираз для оцінки другої похідної

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) + \Delta^4 y_0 \frac{6t^2 - 18t + 11}{12} + \ldots\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Аналогічно, з другої інтерполяційної формули Ньютона, отримуємо:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} \frac{2t+1}{2!} + \Delta^3 y_{n-3} \frac{3t^2 + 6t + 2}{3!} + \Delta^4 y_{n-4} \frac{4t^3 + 18t^2 + 22t + 6}{4!} + \ldots\right), \qquad \textbf{(9)}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3}(t+1) + \Delta^4 y_{n-4} \frac{6t^2+18t+11}{12} + \ldots \right). \qquad \textbf{(10)}$$

Формули (9), (10) використовуються для $x \in [x_{n-1}; x_n]$, $t = \dfrac{x_n - x}{h}$.

Усі ці формули значно спрощуються, якщо шукати похідну у якомусь з вузлів інтерполювання x_i. Тоді ми цей вузол можемо прийняти за x_0, а значить,

$$t = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0.$$

Тоді формули (7) та (8) набудуть вигляду

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n y_0 \right), \qquad \textbf{(11)}$$

де

$$\Delta \le |R'_n(x_0, f)| \approx \left| \frac{(-1)^n}{h} \cdot \frac{\Delta^{n+1} y_0}{n+1} \right| \qquad \textbf{(12)}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots \right). \qquad \textbf{(13)}$$

Якщо вузол x_i, в якому слід обчислити похідні, ближчий до кінця таблиці, то його можна прийняти за x_n, а значить,

$$t = \frac{x_n - x_i}{h} = \frac{x_n - x_n}{h} = 0.$$

Тоді формули (9) та (10) набудуть вигляду

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots \right), \qquad \textbf{(14)}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots \right). \qquad \textbf{(15)}$$

2.3. Формули оцінки похідних, що записуються з допомогою інтерполяційного многочлену Стірлінґа.

Диференціюючи многочлен Стірлінґа для обчислення похідної у середній вузловій точці, маємо

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots \right) \qquad \textbf{(16)}$$

Тут x_0 - середня точка таблиці, яка містить непарну кількість вузлів, від'ємний індекс означає, що від даної точки слід відступати вліво (вгору).

x_i	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2
$y_i = f(x_i)$	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2

Для зручності таблицю скінченних різниць у цьому випадку заповнюють у вигляді піраміди (діагональна таблиця)

Таблиця 3

Діагональна таблиця скінченних різниць для центральної точки x_0

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_{-2}	y_{-2}				
		$\Delta y_{-2} = y_{-1} - y_{-2}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2} = \Delta y_{-1} - \Delta y_{-2}$		
		$\Delta y_{-1} = y_0 - y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2} = \Delta^2 y_{-1} - \Delta^2 y_{-2}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1} = \Delta y_0 - \Delta y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2} = \Delta^3 y_{-1} - \Delta^3 y_{-2}$
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		$\Delta^3 y_{-1} = \Delta^2 y_0 - \Delta^2 y_{-1}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$			
x_2	y_2				

Формула (16) більш зручна для обчислень і має вищу точність за формули (11), (14).

Взявши другу похідну від многочлена Стірлінґа у центральній точці x_0, отримуємо

$$y_0'' = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-4} + \ldots\right) \qquad \textbf{(17)}$$

Зауважимо, що скінченні різниці, що входять у формулу (16), позначені у таблиці 3 червоним кольором, а скінченні різниці, що входять у формулу (17) – синім.