Лабораторна робота №2

Тема: Точне та наближене розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Частина 1: Прямі (точні) методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: *ознайомлення студентів з основними поняттями та точними методами розв'язування СЛАР; набуття практичних навичок розв'язання таких задач (у тому числі - з використанням комп'ютера).*

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал
[**1**, сс. 24-33], [**4**, сс. 34-39; 239-242], [**2**, сс. 40-41], [**3**].

2. Розв'язати задану СЛАР точними методами:

☑ ***методом Крамера***;
☑ ***методом Гаусса з вибором головного елемента у стовпці***;
☑ ***матричним методом*** (обернену матрицю знайти методом Гаусса);
☑ ***методом LU-розкладу***

Зразок розв'язання типового прикладу

Приклад 1. *Розв'язати СЛАР*

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}.$$

☑ *методом Крамера*;
☑ *методом Гаусса з вибором головного елемента у стовпці*;
☑ *матричним методом* (обернену матрицю знайти методом Гаусса);
☑ *методом LU-розкладу*

►*Розв'язання.*

а) Метод Крамера. Обчислимо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 5 + 0 + 1 - 0 + 6 = 2 \neq 0 .$$

Головний визначник системи відмінний від нуля, тому за теоремою Крамера дана СЛАР має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера. Обчислимо ще три допоміжні визначники Δ_j ($j = 1,2,3$), замінюючи кожен раз j-й стовпець стовпчиком правих частин вихідної системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 5 + 0 - 12 - 0 - 6 = 2 , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 + 1 - 0 + 15 = 4 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 - 25 - 2 + 5 - 0 + 24 = 2\,.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2\,,\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1.$$

***б) Метод Гаусса з вибором головного елемента у стовпці*.**

<u>Ідея методу:</u> *звести систему до східчастого вигляду шляхом послідовного виключення невідомих. При цьому на кожному кроці методу рівняння системи (рядки розширеної матриці) попередньо переставляються таким чином, щоб «діагональний» коефіцієнт (коефіцієнт, обидва індекси якого є однаковими) був найбільшим за модулем серед нижчих від нього коефіцієнтів біля відповідної змінної (відповідного стовпця розширеної матриці), тобто, щоб виконувалась нерівність*

$$\left|a_{jj}\right| \ge \left|a_{ij}\right| \text{ при } i \ge j\,.$$

Для спрощення запису будемо виконувати дії над розширеною матрицею системи.

<u>Крок 1.</u> Виписуємо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 12 \end{array}\right).$$

Позначимо через $a_{ij}^{(k)}$ елемент, що розміщений на k-му кроці методу на перетині i-го рядка та j-го стовпця матриці $\overline{A}$. Проглядаємо елементи першого стовпця і переставляємо рядки матриці $\overline{A}$ так, щоб у лівому верхньому куті опинився найбільший за модулем елемент першого стовпця:

$$|\,a_{11}^{(0)}\,| = 0 < |\,a_{21}^{(0)}\,| = |\,a_{31}^{(0)}\,| = 1\,.$$

Найбільшими за модулем у першому стовпці є елементи $a_{21}^{(0)}$ та $a_{31}^{(0)}$, отже, будь-який з цих рядків (другий чи третій) слід поміняти місцями з першим рядком. Поміняємо місцями перший рядок з другим і виконаємо крок методу Гаусса з головним елементом $a_{11}^{(0)} = -1$: усі елементи першого рядка ділимо на головний елемент, усі елементи головного стовпця нижче головної діагоналі замінюємо нулями, а усі решту елементів перераховуємо за правилом прямокутників. Маємо:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} [\mathbf{-1}] & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 3 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Перерахунок елементів за правилом прямокутників:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{12}^{(0)} \cdot a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 2 - \frac{1 \cdot 0}{-1} = 2\,,\quad a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - \frac{a_{13}^{(0)} \cdot a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 1 - \frac{0 \cdot 0}{-1} = 1\,;$$

$$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{b_1^{(0)} \cdot a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 5 - \frac{1 \cdot 0}{-1} = 5\,;$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - \frac{a_{12}^{(0)} \cdot a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 5 - \frac{1 \cdot (-1)}{-1} = 4\,;\; a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - \frac{a_{13}^{(0)} \cdot a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 3 - \frac{0 \cdot (-1)}{-1} = 3\,;$$

$$b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - \frac{b_1^{(0)} \cdot a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 12 - \frac{1 \cdot (-1)}{-1} = 11\,.$$

Крок 2. Переходимо до другого стовпця. Для визначення головного елемента у цьому стовпці продивляємось другий та третій рядки другого стовпця отриманої на першому кроці матриці

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Обираємо там найбільший за модулем елемент і міняємо рядки матриці (перший рядок до уваги вже не беремо) так, щоб після цього на позиції $a_{22}^{(1)}$ стояв найбільший за модулем елемент. Оскільки $|a_{22}^{(1)}| = 2 < |a_{32}^{(1)}| = 4$, то слід поміняти місцями другий та третій рядки. Тоді після такої заміни $a_{22}^{(1)} = 4$ - головний елемент. Далі робимо крок методу Гаусса з головним елементом $a_{22}^{(1)} = 4$: перший рядок залишаємо без змін; усі елементи другого рядка ділимо на головний елемент; усі елементи другого стовпця, розташовані нижче від $a_{22}^{(1)} = 4$ замінюємо нулями, а решту елементів третього рядка (включно з розширенням) перераховуємо за правилом прямокутників:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \{e_2 \leftrightarrow e_3\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & [\mathbf{4}] & 3 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0,75 & 2,75 \\ 0 & 0 & -0,5 & -0,5 \end{array}\right)$$

Перерахунок елементів за правилом прямокутників:

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{23}^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1 - \frac{3 \cdot 2}{4} = -0,5\,; \; b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{b_2^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 5 - \frac{11 \cdot 2}{4} = -0,5\,.$$

Крок 3. У третьому стовпці маємо обрати найбільший за модулем елемент, не враховуючи при цьому елементів вже перетворених першого та другого рядків. Це $a_{33}^{(2)} = -0,5$. Оскільки у цьому стовпці вже немає елементів нижче від $a_{33}^{(2)} = -0,5$, то перетворення на цьому кроці полягає лише у діленні усіх елементів третього рядка на головний елемент $a_{33}^{(2)} = -0,5$:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0,75 & 2,75 \\ 0 & 0 & [\mathbf{-0,5}] & -0,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0,75 & 2,75 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

На цьому прямий хід методу Гаусса завершено. Починаємо зворотній хід. Для цього виписуємо систему, що відповідає отриманому східчастому вигляду

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ x_2 + 0,75x_3 = 2,75, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння x_1, з другого - x_2:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_2, \\ x_2 = 2,75 - 0,75x_3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Далі знаходимо з останнього рівняння x_3, з другого - x_2 (підставляючи знайдене значення x_3), з першого - x_1 (підставляючи вже знайдені значення x_3, x_2). Маємо:

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 2,75 - 0,75 \cdot 1 = 2, \\ x_1 = -1 + 2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

в) Матричний метод (метод оберненої матриці). Задану вихідну систему можна записати у матричному вигляді

$$Ax = b,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

За умови, що матриця A невироджена (тобто $\det(A) \neq 0$), розв'язок такого матричного рівняння можна знайти за формулою

$$x = A^{-1}b$$

Знайдемо обернену матрицю методом Гаусса. Для цього до матриці A справа допишемо одиничну. Отримується матриця $(A|E)$, яку далі треба елементарними перетвореннями рядків звести до вигляду, коли одинична матриця буде у перших трьох стовпцях зліва; при цьому справа утвориться матриця A^{-1}, тобто ми елементарними перетвореннями рядків за скінченну кількість кроків перейдемо від матриці $(A|E)$ до матриці $(E|A^{-1})$.

Очевидно, що оскільки в у вихідній матриці A елемент $a_{11} = 0$, то ніякими перетвореннями рядків ми його не перетворимо на 1. Тому у вихідній системі слід переставити місцями рівняння так, щоб у матриці нової системи на місці a_{11} був елемент, відмінний від нуля. Переставимо місцями у вихідній системі перше та друге рівняння. Отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

з матрицею $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ і $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Тоді матриця $(A|E)$ має вигляд $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Виконаємо елементарні перетворення над її рядками так, щоб зліва (до вертикальної риски) отрималась одинична матриця (через e_i позначаємо i-й рядок матриці):

$$(A|E) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \end{array}\right) \sim \{e_1 : (-1)\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \{e_3 + e_1\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \{e_3 - 2e_2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \{e_2 : 2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \{e_2 - 0{,}5e_3\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \{e_1 + e_2\} \sim \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} & \underbrace{\begin{matrix} -0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right) = (E|A^{-1}),$$

отже, шукана обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5\cdot 1 + 1,5\cdot 5 + (-0,5)\cdot 12 \\ 0,5\cdot 1 + 1,5\cdot 5 + (-0,5)\cdot 12 \\ -1\cdot 1 + (-2)\cdot 5 + 1\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

г) ***Метод LU-розкладу***.

<u>Ідея методу:</u> *подавши матрицю вихідної системи у вигляді добутку двох трикутних матриць, отримати розв'язок вихідної системи, розв'язавши послідовно дві системи східчастого вигляду.*

Подамо матрицю вихідної системи у вигляді добутку

$$A = LU,$$

де

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ - нижньотрикутна матриця з одиницями на головній діагоналі;

$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ - верхньотрикутна матриця.

Таке зображення можливе, якщо усі головні мінори матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля, тобто

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ \Delta_3 = \det(A) \neq 0.$$

У нашому випадку для матриці вихідної системи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

головні мінори

$$\Delta_1 = a_{11} = 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \ \Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Отже, для такої матриці A неможливий LU-розклад (бо $\Delta_1 = a_{11} = 0$). Але, очевидно, якщо у вихідній системі переставити місцями, наприклад, перші 2 рівняння, то отримується еквівалентна до вихідної система, для матриці якої LU-розклад можливий:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

Справді, тепер

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

і усі головні мінори

$$\Delta_1 = a_{11} = -1 \neq 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,,\ \Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

відмінні від нуля.

Знайдемо елементи матриць L та U з рівності

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Виконаємо множення матриць у правій частині останньої рівності:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} \cdot u_{11} & l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} & l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} \\ l_{31} \cdot u_{11} & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} \cdot u_{11} & l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} & l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} \\ l_{31} \cdot u_{11} & l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} & l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = LU\,.$$

Прирівнюючи матриці поелементно, дістаємо систему для знаходження елементів матриць L та U:

$$\begin{cases} u_{11} = -1 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 0 \\ l_{21} \cdot u_{11} = 0 \\ l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = 2 \\ l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = 1 \\ l_{31} \cdot u_{11} = -1 \\ l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = 5 \\ l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = 3 \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо

$$\begin{cases} u_{11} = -1 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 0 \\ l_{21} = 0 \\ u_{22} = 2 \\ u_{23} = 1 \\ l_{31} = 1 \\ l_{32} = 2 \\ u_{33} = 1 \end{cases}$$

Тепер

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Це дає нам можливість переписати матричний запис системи

$$Ax = b$$

у вигляді

$$LUx = b\,.$$

Далі введемо позначення

$$Ux = y$$

і розв’яжемо систему

$$Ly = b\,,$$

а далі зі знайденим y повернемось до системи $Ux = y$ і остаточно знайдемо розв’язок x вихідної системи.

Маємо:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}}_{b}$$

Позначивши

$$Ux = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

останню рівність можна переписати у вигляді

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}}_{b},$$

що еквівалентно східчастій системі

$$\begin{cases} y_1 \qquad\qquad\quad = 1, \\ \qquad\; y_2 \qquad\;\; = 5, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 12 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} y_1 = 1, \\ y_2 = 5, \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

Тоді рівність $Ux = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ набуває вигляду

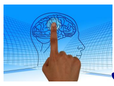
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y}.$$

Виконавши множення матриць у останній рівності, приходимо до східчастої системи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

звідки остаточно знаходимо розв’язок вихідної системи

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}. \blacktriangleleft$$



Задачі для самостійного розв’язання

Розв’язати задану СЛАР точними методами:

- ☑ ***методом Крамера***;
- ☑ ***методом Гаусса з вибором головного елемента у стовпці***;
- ☑ ***матричним методом*** (обернену матрицю знайти методом Гаусса)**;**
- ☑ ***методом LU-розкладу***

1. *Байрамов Алі Мірзабей-огли*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 19; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

2. *Беленчук Олексій Ігорович*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = 8; \\ 3x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

3. *Березний Ігор Васильович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. *Бужак Андрій Васильович*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

5. *Бурле Павло Марчелович*

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 16; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

6. *Волощук Назарій Васильович*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

7. *Георгіян Євген Геннадійович*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

8. *Григорчук В`ячеслав Валерійович*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

9. *Денис Денис Русланович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 12; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

10. *Дручук Роман Олександрович*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =22; \\ 3x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +x_4 & =26; \\ 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & +3x_4 & =22; \\ 7x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5x_4 & =26 \end{cases}$$

11. *Дубець Василь Русланович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =10; \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =8; \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & =8; \\ 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & =10 \end{cases}$$

12. *Дуплава Олександр Ігорович*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =5; \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -3x_4 & =-4; \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =9; \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & =4 \end{cases}$$

13. *Жупник Евеліна Михайлівна*

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0; \\ 2x_1 & -x_2 & & -3x_4 & =-7; \\ 3x_1 & & -x_3 & +x_4 & =8; \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +5x_4 & =21 \end{cases}$$

14. *Івасюта Павло Сергійович*

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & & -x_4 & =4; \\ x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & =-1; \\ & 3x_2 & -2x_3 & +4x_4 & =12; \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & =-2 \end{cases}$$

15. *Качуровський Станіслав Тарасович*

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =10; \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & =11; \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & =13 \end{cases}$$

16. *Клим Дмитро Іванович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 17 \end{cases}$$

17. *Козуб Микола Миколайович*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

18. *Копадзе Олександра Сергіївна*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18; \\ 3x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

19. *Костюк Віталій Іванович*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

20. *Кушнірик Яна Олександрівна*

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = -2; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

21. *Луник Марія Михайлівна*

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 13; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 11; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

22. *Максименко Михайло Сергійович*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

23. *Мінтянський Андрій Петрович*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -7; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

24. *Паращук Олексій Іванович*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

25. *Сарай Богдан Васильович*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

26. *Фецюк Денис Мирославович*

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = 7; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -7 \end{cases}$$

27. *Хмелєвська Анастасія Олександрівна*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 11; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 10 \end{cases}$$

28. *Чайковський Станіслав Валерійович*

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =5; \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & =5; \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & =13 \end{cases}$$

Література:

1. Практикум з чисельних методів : Навч. посібник / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 432 с.
2. Чисельні методи розв'язання інженерних задач у пакеті *Mathcad* : курс лекцій та індивідуальні завдання / Л.В. Васильєва, О.А. Гончаров, В.А. Коновалов, Н.А. Соловйова. – Краматорськ : ДДМА, 2006. – 108 с.
3. Руководство пользователя *Mathcad* 15.0
4. Численные методы на базе MathCad / С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – СПб. : Бхв – Петербург, 2005. – 464 с.