ПЛАН-КОНСПЕКТ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
з дисципліни «Математичні основи ІТ»

Викладач: студент групи 641м Бужак Андрій
Дата проведення: 14.09.2021
Група: 143(1)
Вид заняття: практичне заняття
Тривалість пари: 80 хвилин
Тема: ***Розв'язування СЛАР: матричний метод та метод Крамера***.

Мета: вивчення основних понять теорії лінійних алгебраїчних рівнянь; засвоєння практичних аспектів матричного методу та методу Крамера розв'язування СЛАР.

ХІД ЗАНЯТТЯ

1. Актуалізація опорних знань (до 10 хв.).

Розглядаються СЛАР вигляду $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$ у яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X = X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Алгоритм матричного методу

1. *Виписати головну матрицю A заданої СЛАР та переконатись, що вона невироджена ($|A| = \det A \neq 0$).*
2. *Знайти обернену матрицю* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$
3. *Знайти розв'язок СЛАР, користуючись формулою* $X = A^{-1}B$

Метод Крамера

Визначником (***головним визначником***) системи лінійних рівнянь називається визначник, складений із коефіцієнтів цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(1)}$$

Допоміжні визначники Δ_j утворюються з головного визначника Δ системи заміною стовпця коефіцієнтів при невідомій змінній x_j $\left(j = \overline{1,n} \right)$ стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Розв’язування СЛАР за методом Крамера ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема (Крамера). *Нехай* Δ *– головний визначник системи,* Δ_j ($j = \overline{1,n}$) *– допоміжні визначники, обчислені за формулами* (2). *Тоді:*

1) *якщо* $\Delta \neq 0$*, то система має єдиний розв’язок, що визначається формулами Крамера:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ (j = \overline{1,n}); \qquad \textbf{(3)}$$

2) *якщо* $\Delta = 0$*, а хоча б один із визначників* $\Delta_j \neq 0$*, то система несумісна;*

3) *якщо* $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$*, то система або несумісна, або невизначена.*

2. Розв’язування прикладів (до 65 хв.)

Приклад 1. Розв’язати матричним методом СЛАР $\begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 6x - 8y = 9. \end{cases}$

<u>*Розв’язання.*</u> **1.** Виписуємо головну матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24 - (-24) = 0$$

Матриця A вироджена, отже, не існує A^{-1}, а значить, матричний метод до даної СЛАР незастосовний.

Проаналізуємо дану систему:

☑ ліва частина другого рівняння системи дорівнює подвоєній лівій частині першого рівняння ($6x-8y=2(3x-4y)$);

☑ ***АЛЕ*** якщо помножити на 2 перше рівняння системи, то дістанемо рівність $6x-8y=-12$, яка не може виконуватись одночасно з другим рівнянням системи $6x-8y=9$. Отже, дана система ***несумісна*** (не має розв'язку).

<u>Відповідь:</u> *Система несумісна.*

Приклад 2. Розв'язати матричним методом СЛАР

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=-3, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

<u>*Розв'язання.*</u> **1.** Дана система може бути записана у вигляді $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A невироджена, адже $\det(A)=1\neq 0$.

2. Будуємо обернену матрицю: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Знаходимо розв'язок СЛАР:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+1\cdot(-3)-1\cdot 1 \\ -4\cdot 5-5\cdot(-3)+7\cdot 1 \\ -2\cdot 5-3\cdot(-3)+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким чином,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ тобто } \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$

Приклад 3. Розв'язати методом Крамера СЛАР

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=-3, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

відмінний від нуля, отже, система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера. Обчислимо допоміжні визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Тоді за формулами Крамера (3) знаходимо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \ x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \ x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Приклад 4. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Головний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, отже, система або несумісна, або невизначена. Шукаємо Δ_i $(i = 1,2,3)$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Таким чином, $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, отже, система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 5. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Третє рівняння системи, очевидно, дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулеві: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Однак перше рівняння несумісне з другим (бо ліва частина другого дорівнює подвоєній лівій частині першого, значить, права частина другого рівняння мала би дорівнювати подвоєній правій частині першого рівняння, тобто $2 \cdot 5 = 10$. Але ж права частина другого рівняння дорівнює 3, а не 10). Система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 6. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Третє рівняння системи, як і у попередньому прикладі, дорівнює сумі першого та другого рівнянь, отже, усі визначники третього порядку дорівнюють нулеві: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Тоді ранг матриці системи дорівнює 2. Мінор $M_2 = M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ приймемо за базисний. У нього ввійшли 1-й та 2-й стовпці матриці системи, яким відповідають змінні x_1, x_2. Отже, x_1, x_2 — базисні змінні, а x_3 — вільна змінна. Надамо вільній змінній довільного числового значення: $x_3 = C$, $C \in \mathbb{R}$, і виразимо базисні змінні через вільну змінну x_3. Для цього перепишемо вихідну систему, заміняючи в ній x_3 на C. Крім того, оскільки у базисний мінор увійшли лише 1-й та 2-й рядки матриці системи, яким відповідають перше та друге рівняння системи, то ми залишимо в системі лише два перші (лінійно незалежні) рівняння. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + C = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4C = 2. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - C, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 + 4C. \end{cases}$$

Отримали систему з двох рівнянь із двома невідомими, яку можна розв'язати, наприклад, за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

отже, розв'язок єдиний. Знаходимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 - C & 1 \\ 2 + 4C & 3 \end{vmatrix} = 7 - 7C, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 - C \\ 2 & 2 + 4C \end{vmatrix} = 6C - 4, \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 7 - 7C, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 6C - 4, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 7C, \\ x_2 = 6C - 4, \\ x_3 = C, \end{cases}$$

– загальний розв’язок системи, де C – довільна стала.

Надаючи параметру C конкретного числового значення, отримуємо безліч числових (частинних) розв’язків системи.

3. Підведення підсумків заняття, оголошення домашнього завдання (до 5-7 хв.)

Д/з: метод Гаусса, зб. задач Дубовик В.П., Юрик І.І. с.20, №189, с.18, №№ 155, 163, 173