ПЛАН-КОНСПЕКТ ЛАБОРАТОРНОГО ЗАНЯТТЯ
з дисципліни «Математичні основи ІТ»

Викладач: студент групи 641м Бужак Андрій
Дата проведення: 30.09.2021
Група: 143(3)
Вид заняття: лабораторна робота
Тривалість пари: 80 хвилин
Тема: ***Матричні рівняння. СЛАР та їх застосування.***

Мета: *ознайомлення студентів із основними поняттями та алгоритмами розв'язування матричних рівнянь та СЛАР; набуття практичних навичок побудови математичних моделей задач; оволодіння методикою розв'язування вищевказаних задач з використанням прикладних пакетів MathCad та/або SMath Studio.*

ХІД ЗАНЯТТЯ

1. Актуалізація опорних знань, повідомлення теоретичного матеріалу (до 20 хв.).

Теоретичні відомості

Для розв'язування матричних рівнянь у *MathCad/SMath Studio* використовуються стандартні матричні операції знаходження оберненої матриці та множення матриць.

Нагадаємо алгоритм розв'язування матричних рівнянь (за умови, що відповідні обернені матриці існують):

Рівняння 1-го типу	***Рівняння 2-го типу***	***Рівняння 3-го типу***
$A\cdot X=B$	$X\cdot A=B$	$C\cdot X\cdot A=B$
$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$	$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$	$\left(C^{-1}\cdot C\right)\cdot X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)=C^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$
$X=A^{-1}\cdot B$	$X=B\cdot A^{-1}$	$X=C^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$

Для реалізації у *MathCad/SMath Studio* потрібно ввести відомі матриці (A, B для рівнянь 1-го та 2-го типів або A, B, C - для рівняння третього типу) та формулу, за якою знаходиться невідома матриця *X*. Наприклад, покажемо, як у *MathCad/SMath Studio* реалізується розв'язування матричного рівняння

$$\begin{pmatrix}4&3\\5&4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}.$$

Очевидно, це рівняння 3-го типу з

$$C=\begin{pmatrix}4&3\\5&4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}.$$

Тому невідома матриця *X* знаходиться за формулою $X=C^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$. Програмна реалізація у *MathCad/SMath Studio* наведена на рис. 1.1.

Якщо матриця, до якої потрібно знайти обернену, є виродженою, то розв'язок відповідного матричного рівняння не буде знайдено, натомість *MathCad/SMath Studio* видасть повідомлення про виявлену сингулярність, тобто операцію ділення на нуль (рис. 1.2)

Рис. 1.1. *Реалізація розв'язування матричного рівняння в MathCad/SMath Studio*

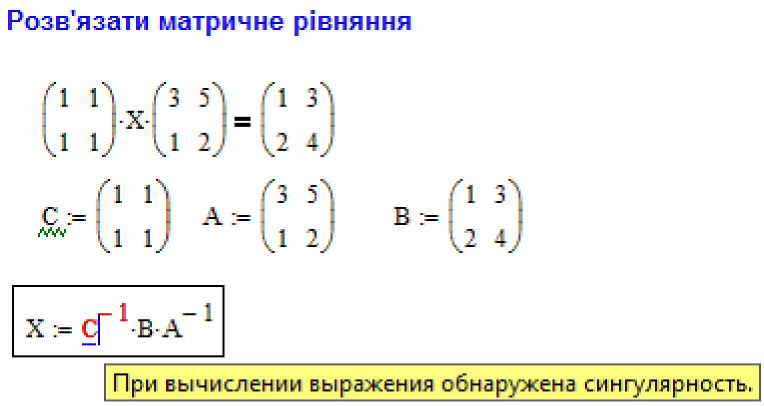


Рис. 1.2. *Випадок розв'язування матричного рівняння в MathCad/SMath Studio, коли одна із відомих матриць у лівій частині рівняння є виродженою*

У прикладі з рис. 1.2 матриця C є виродженою, тому обернена матриця C^{-1} до матриці C підсвічується червоним і *MathCad/SMath Studio* видає підказку про знайдену сингулярність.

Щодо розв'язування СЛАР, то у *MathCad* для цього є більше можливостей, ніж у *SMath Studio*. Однаково в обох пакетах реалізуються матричний метод та метод Крамера (їх реалізація можлива у випадку, коли кількість рівнянь m в системі дорівнює кількості невідомих n і головна матриця A системи $AX = B$ є невиродженою).

☑ ***Для розв'язування СЛАР*** $A \cdot X = B$ ***з квадратною невиродженою матрицею*** A ***матричним методом у MathCad/SMath Studio*** потрібно виконати наступний алгоритм:

1. Задати матриці A та B (головну матрицю системи та вектор-стовпчик правих частин).

Розв'язати задану СЛАР матричним методом:

$$x1 + 2x2 + 3x3 = 7$$
$$x1 - 3x2 + 2x3 = 5$$
$$x1 + x2 + x3 = 3$$

Дана СЛАР еквівалентна матричному рівнянню *AX=B*, де

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1. *Реалізація матричного методу розв'язування СЛАР в MathCad/SMath Studio: введення матриць*

2. Побудувати обернену матрицю A^{-1} (можна не виводити її окремо).

3. Знайти вектор-стовпчик невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Тоді:

$$X := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

тобто $x1 = 1, x2 = 0, x3 = 2$

Рис. 2.2. *Реалізація матричного методу розв'язування СЛАР в MathCad/SMath Studio: знаходження розв'язку СЛАР*

4. Зробити перевірку (підставити знайдені числові значення x_1, $x_2, \ldots, x_n$ у кожне рівняння заданої СЛАР і переконатись, що отримуються тотожності або обчислити добуток матриць AX і порівняти його з матрицею B):

Перевірка: $x1 := 1 \quad x2 := 0 \quad x3 := 2$

$$x1 + 2x2 + 3x3 = 7$$
$$x1 - 3x2 + 2x3 = 5$$
$$x1 + x2 + x3 = 3$$

або

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3. *Реалізація матричного методу розв'язування СЛАР в MathCad/SMath Studio: перевірка*

☑ ***Для розв'язування СЛАР*** $A \cdot X = B$ ***з квадратною невиродженою матрицею*** A ***методом Крамера в SMath Studio/ MathCad*** потрібно:

1. Задати матриці A та B, що є відповідно головною матрицею заданої системи рівнянь та матрицею-стовпчиком правих частин.

Програмну реалізацію проілюструємо на прикладі СЛАР

$$\begin{cases} 5x + 6y + 2z + 5t = 5, \\ 4x + 3y + z + 5t = 1, \\ 2x - 2y + 5z + 3t = 6, \\ 4x + 3y + z + t = 1. \end{cases}$$

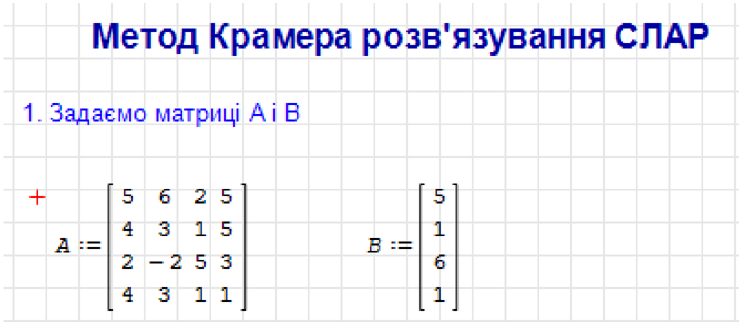


Рис. 3.1. *Реалізація методу Крамера в SMath Studio/MathCad: введення початкових даних*

2. Обчислити визначники: головний визначник системи Δ та допоміжні визначники Δ_1, $\Delta_2, ..., \Delta_n$. Для обчислення допоміжних визначників можна скористатись функцією ***augment*** (*A*; *B*; *C*), яка формує масив (матрицю), шляхом приписування справа до матриці *A* послідовно матриць *B* та *C*, тобто формує матрицю, яка склеює матриці *A*, *B*, *C* у заданому порядку. При цьому матриці *A*, *B*, *C* повинні мати однакову кількість рядків.

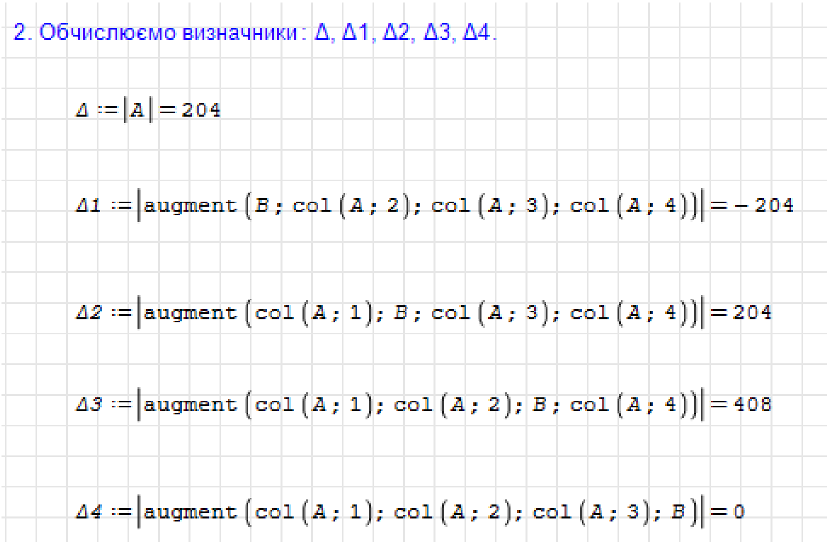


Рис. 3.2. *Реалізація методу Крамера в SMath Studio/MathCad: обчислення визначників*

3. Обчислити елементи вектор-стовпчика $X=(x_1,x_2,...,x_n)^{\mathrm{T}}$ за формулами Крамера: $x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j\in\overline{1,n})$.

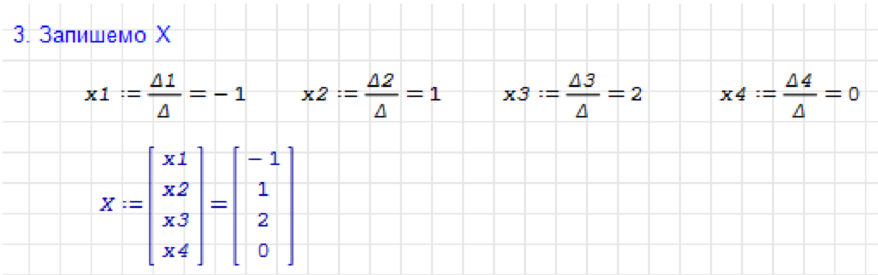


Рис. 3.3. *Реалізація методу Крамера в SMath Studio/MathCad: Знаходження розв'язку СЛАР за формулами Крамера*

4. Зробити перевірку.

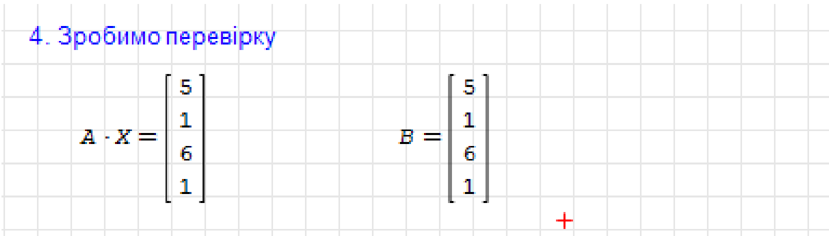


Рис. 3.4. *Реалізація методу Крамера в SMath Studio/MathCad: перевірка*

Зауваження 1. У *MathCad*, на відміну від *SMath Studio*, при використанні функції ***augment(A,B,C, …)*** матриці, які підлягають "склеюванню" у функції ***augment***, перелічуються через кому. Крім того, стовпці матриці у *MathCad* та *SMath Studio* виводяться по-різному. Так, наприклад:

Пакет	*Реалізація обчислення першого допоміжного визначника у методі Крамера*
MathCad	$\Delta 1 := \left\lvert \mathrm{augment}\left(B, A^{\langle 2\rangle}, A^{\langle 3\rangle}\right)\right\rvert$ $n=3$
SMath Studio	$\Delta 1 := \left\lvert \mathrm{augment}\left(B;\ \mathrm{col}(A;2);\ \mathrm{col}(A;3);\ \mathrm{col}(A;4)\right)\right\rvert$ $n=4$

Зауваження 2. У *MathCad*, на відміну від *SMath Studio*, є вбудовані функції для розв'язування СЛАР: це блок ***Given…Find()*** та функція ***lsolve(A, b)***. Розглянемо їх застосування на прикладі знаходження розв'язку СЛАР з попереднього прикладу (з алгоритму методу Крамера).

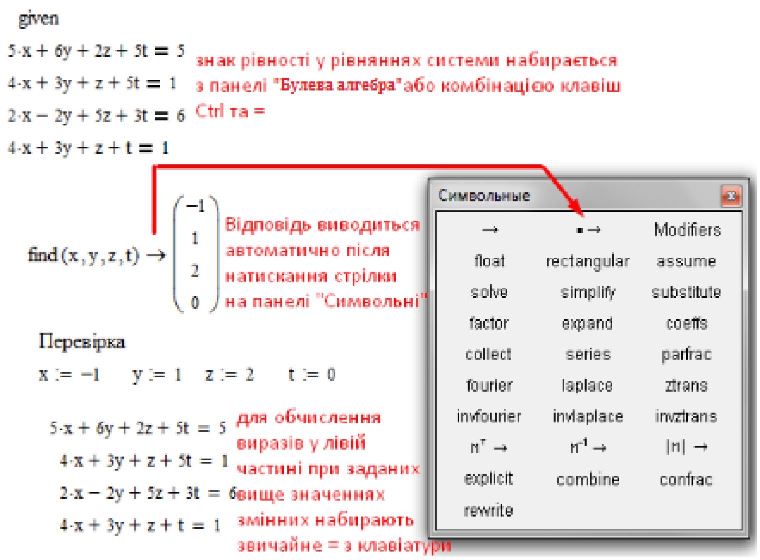


Рис. 4. *Розв'язання СЛАР у MathCad з допомогою блоку Given…Find*

Вхідними параметрами для функції ***lsolve(A,b)*** є головна матриця A заданої СЛАР та вектор-стовпчик b правих частин системи.

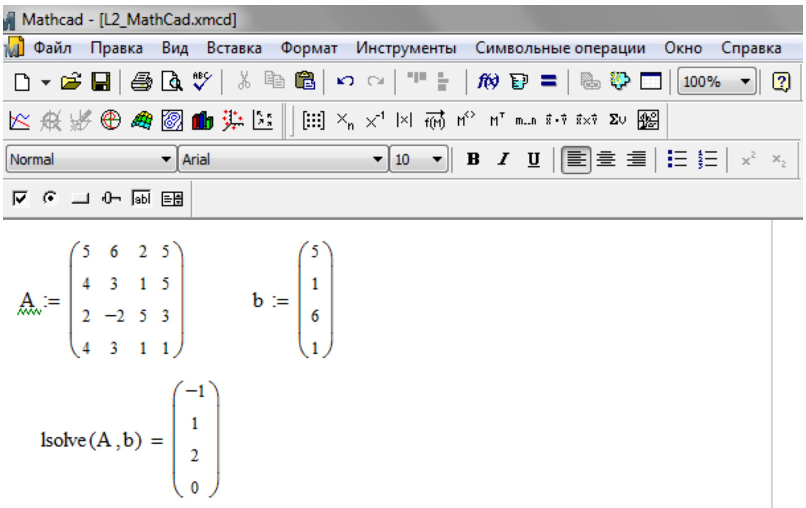


Рис. 5. *Розв'язання СЛАР у MathCad з допомогою функції lsolve*

Обидві розглянуті функції повертають розв'язок СЛАР у вигляді вектор-стовпчика $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

☑ ***Для дослідження СЛАР за теоремою Кронеккера-Капеллі у MathCad/SMath Studio*** потрібно:

1. Задати матриці A та $Ar = \overline{A}$, що є відповідно головною матрицею заданої системи рівнянь та матрицею-стовпчиком правих частин.
2. Знайти ранг матриці A та розширеної матриці $Ar = \overline{A}$.
3. Порівняти знайдені ранги і зробити висновок:

☑ якщо $rg(A) \neq rg(\overline{A})$ – система несумісна;

☑ якщо $rg(A) = rg(\overline{A}) = r$ – система сумісна, причому:

  ☑ при $r = n$ (ранг дорівнює кількості невідомих) система має *єдиний* розв’язок;

  ☑ при $r < n$ система має *безліч розв’язків*. Базисні змінні, коефіцієнти при яких увійшли в базисний мінор, виражаються лінійно через небазисні (*вільні*) змінні. Такий запис називається *загальним розв’язком системи*.

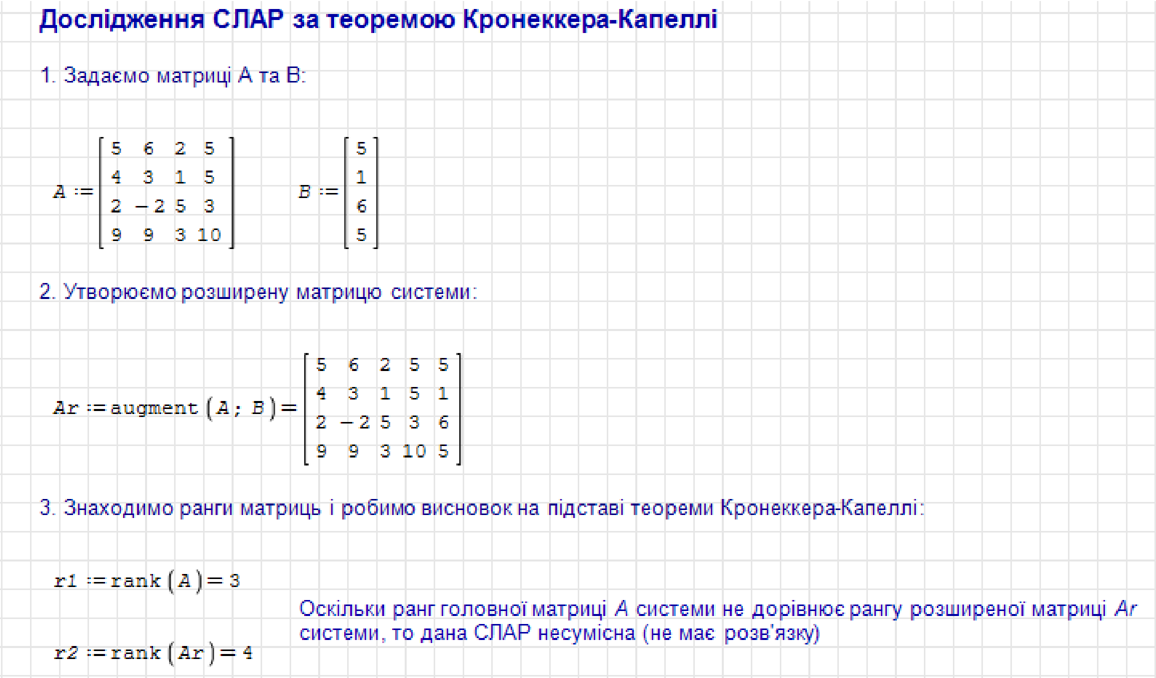


Рис. 6. *Приклад дослідження СЛАР на сумісність за допомогою теореми Кронеккера- Капеллі в SMath Studio/MathCad*

Зауваження 3. У *MathCad* СЛАР $AX=B$ (з довільним співвідношенням між кількістю m рівнянь та невідомих n у системі) можна розв’язати методом Гаусса, використовуючи вбудовану функцію ***rref(M)***, яка зводить матрицю $M=(A|B)$ до діагонального вигляду, тобто реалізує прямий та зворотній ходи метода Гаусса. У *SMath Studio* ця функція не реалізована.

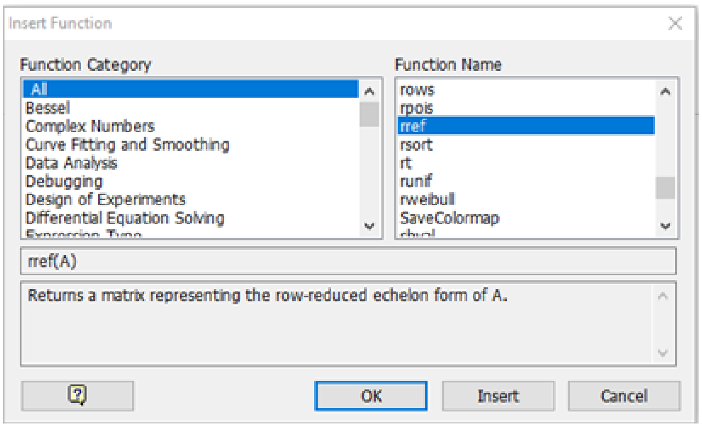


Рис. 7. *Вбудована функція rref(M) у MathCad, яка зводить матрицю M до діагонального вигляду*

Наведемо приклад розв’язування СЛАР методом Гаусса *в MathCad.*

Розв'язування СЛАР методом Гаусса

1. Задаємо A та B

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

2. Досліджуємо на сумісність за теоремою Кронеккера-Капеллі

$ORIGIN := 1$

$$AR := \text{augment}(A,B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розширена матриця

$n := 3$

$\text{rank}(A) \rightarrow 3 \qquad \text{rank}(AR) \rightarrow 3$

Оскільки ранг основні матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то за теоремою Кронеккера-Капеллі СЛАР має єдиний розв'язок

3. Знайдемо розв'язок методом Гаусса

Розв'язок СЛАР

$$G := \text{rref}(AR) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Розширена матриця системи після проведення елементарних перетворень

$$X := G^{\langle 4 \rangle} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Перевірка

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 8. *Розв'язування СЛАР методом Гаусса в MathCad*

Діагональній матриці G з рис. 8 відповідає СЛАР $\begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 12, \\ x_3 = -3 \end{cases}$, тобто справді у такому випадку останній стовпець розширеної матриці дає нам вектор-стовпець розв'язків заданої СЛАР.

Для випадку, коли СЛАР невизначена (має безліч розв'язків) реалізація методу Гаусса виглядатиме так:

Дослідити СЛАР на сумісність та знайти її розв'язок (якщо він існує) методом Гаусса:

$$x1 + x2 - 7x3 - 2x4 = -1$$
$$-x1 + 2x2 - 5x3 - 7x4 = -5$$
$$2x1 + x2 - 10x3 - x4 = 0$$
$$-3x1 + 2x2 + x3 - 9x4 = -7$$

Виписуємо головну матрицю системи та вектор-стовпчик правих частин

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 \\ -1 & 2 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & -10 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$ *головна матриця системи*

$$B := \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$ *вектор-стовпчик правих частин*

Утворюємо розширену матрицю системи

$$Ar := \text{augment}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$ *розширена матриця системи*

Знаходимо ранги головної та розширеної матриць

$$r1 := \text{rank}(A) = 2 \qquad r2 := \text{rank}(Ar) = 2$$

<u>Висновок</u>: *оскільки ранги головної та розширеної матриць СЛАР рівні між собою (r1=r2=r=2), то дана СЛАР має розв'язок. Але при цьому 2=r<n=4 (ранг менший від кількості змінних у СЛАР), отже, дана СЛАР невизначена, тобто має безліч розв'язків.*

Рис. 9.1. *Розв'язування СЛАР методом Гаусса в MathCad: висновок про розв'язність*

На першому етапі знайдено ранги головної та розширеної матриць СЛАР, зроблено їх порівняння та висновок про сумісність системи і кількість розв'язків. Оскільки СЛАР невизначена, то маємо визначити базисні змінні (їх у нашому прикладі буде $r=2$) та вільні змінні ($n-r=4-2=2$) і записати загальний розв'язок, виражаючи базисні змінні через вільні:

Зведемо розширену матрицю до діагонального вигляду і визначимо базисні змінні

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \; x_2 \\ Ad := \text{rref}(Ar) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Розширена матриця заданої СЛАР після зведення до діагонального вигляду (матричної реалізації прямого та зворотнього ходів методу Гаусса).

$$M2 := \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$ - базисний мінор (відмінний від нуля мінор, порядок якого співпадає з рангом матриці)

Отже, **x1, x2 - базисні змінні**
x3, x4 - вільні змінні

Тоді загальний розв'язок даної СЛАР має вигляд (виражаємо базисні змінні через небазисні):

$$x1 = 1 + 3x3 - x4$$
$$x2 = -2 + 4x3 + 3x4$$ x3, x4 - довільні дійсні числа

Рис. 9.2. *Розв'язування СЛАР методом Гаусса в MathCad: зведення розширеної матриці до діагонального вигляду*

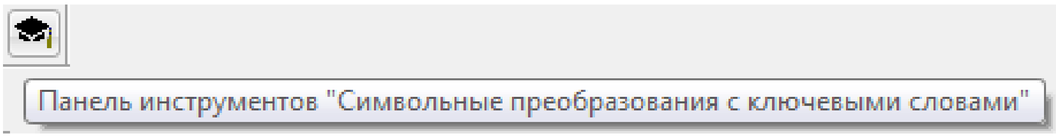
Загальний розв'язок у такому випадку можна записати також із використанням функції ***solve***.

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B \text{ solve}, x_1, x_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot x_3 - x_4 + 1 & 4\cdot x_3 + 3\cdot x_4 - 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 9.3. *Розв'язування СЛАР методом Гаусса в MathCad: побудова загального розв'язку СЛАР*

У відповіді ми отримали вектор, де на першому місці знаходиться символьне значення змінної x_1, а на другому - змінної x_2, тобто $x_1 = 3x_3 - x_4 + 1$, а $x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2$, де x_3, x_4 - довільні сталі.

Функція ***solve*** знаходиться на панелі інструментів *"Символьні перетворення з ключовими словами"* (рис. 10).



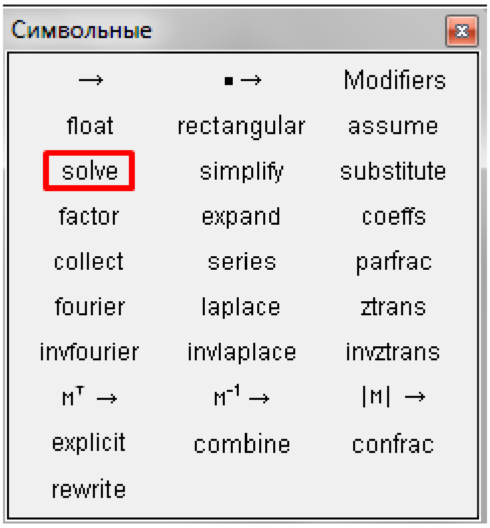


Рис. 10. *Вбудована функція solve у MathCad*

Після виклику цієї функції у лівий місцезаповнювач (зліва від ***solve***) вписується нерівність або рівняння (знак "дорівнює" у рівнянні ставиться з допомогою логічного (потовщеного) знака рівності з панелі *"Булева алгебра"* або з допомогою клавіш Ctrl та =), а після ***solve*** через кому вказується змінна/змінні, відносно яких потрібно розв'язати задану нерівність/рівняння.

Насамкінець, покажемо, як можна розв'язувати прикладні задачі, математичною моделлю яких є СЛАР, використовуючи *MathCad/SMath Studio*.

3. Скласти математичну модель задачі. Розв'язати її будь-яким способом.

З деякого листового матеріалу потрібно викроїти 170 заготовок типу А, 170 заготовок типу Б і 80 заготовок типу В. При цьому застосовують три способи розкрою. Кількість заготовок, які можна отримати з кожного листа при кожному способі розкрою, зазначена в таблиці.

Тип розкрою	Кількість отримуваних заготовок за способами розкрою		
	I	II	III
А	4	2	3
Б	1	5	2
В	3	1	1

x_1 – кількість листів матеріалу, які розкроюють першим способом;

x_2 – кількість листів матеріалу, які розкроюють другим способом;

x_3 – кількість листів матеріалу, які розкроюють третім способом.

Кількість заготовок типу *А*: $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170,$

Кількість заготовок типу *Б*: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170,$

Кількість заготовок типу *В*: $3x_1 + x_2 + x_3 = 80.$

1. Запишемо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 170, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 170, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{cases}$$

2.Розв'яжемо систему матричним методом:

Задаємо матриці A i B

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 170 \\ 170 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B$$

Побудуємо обернену матрицю до матриці A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,15 & -0,05 & 0,55 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,7 & -0,1 & -0,9 \end{bmatrix}$$

Обчислимо X

$$X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x1 := X_{1\,1} = 10$ $\quad x2 := X_{2\,1} = 20$ $\quad x3 := X_{3\,1} = 30$

Рис. 11. *Розв'язання прикладної задачі, що зводиться до СЛАР, у SMath Studio/ MathCad*

2. Повідомлення завдань для самостійного розв'язування, виконання студентами цих завдань із консультацією викладача (55 хв.)

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №2):

1. Розв'язати матричні рівняння (матриці A і B задано у табл. 1):

а) $XA = B$.

☑ Завдання оцінюється в ***0,5*** *бала.*

б) $AXB = E$ (непарні варіанти), $BXA = E$ (парні варіанти);

E - одинична матриця відповідного порядку.

☑ Завдання оцінюється в ***0,5*** *бала.*

Таблиця 1

№	*Матриці*	№	*Матриці*
1	$A=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\8&-7&-6\\-3&4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\3&-5&4\\1&2&1\end{pmatrix}$	11	$A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}3&5&-6\\2&4&3\\-3&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&8&-5\\-3&-1&0\\4&5&-3\end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&6&0\\2&4&-6\\1&-2&3\end{pmatrix}$	13	$A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-6&1&11\\9&2&5\\0&3&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&7\\1&-3&2\end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix}5&4&1\\-3&7&1\\2&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&3&0\\3&-2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&7&1\end{pmatrix}$	15	$A=\begin{pmatrix}6&3&0\\-4&7&1\\1&1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&-2\\3&0&5\\-2&2&4\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&5&6\\-2&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&7\\2&0&3\\-1&7&1\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$	17	$A=\begin{pmatrix}8&1&4\\4&-3&2\\0&3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&-3\\2&2&7\\5&1&4\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\1&9&2\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&3&5\\-1&7&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&0&3\\-3&5&3\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}$	19	$A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&0&5\\-3&4&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&1&-2\\3&-3&2\\6&0&5\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix}3&5&6\\-1&1&3\\7&4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\4&1&0\\3&-2&7\end{pmatrix}$

2. Задано СЛАР (див. табл. 2).

2.1. Знайти ранги матриць A та $\overline{A}=\left(A\,|\,B\right)$ (розширена матриця системи). Зробити висновок про розв'язність СЛАР (дослідити СЛАР на сумісність, використовуючи теорему Кронеккера-Капеллі).

☑ Завдання оцінюється в ***0,5*** *бала*.

Таблиця 2

№	СЛАР	№	СЛАР
1	$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3+3x_4=9,\\3x_1-x_2+2x_4=4,\\-2x_1+x_2+4x_3+x_4=5,\\3x_1+x_2+2x_3-5x_4=6.\end{cases}$	11	$\begin{cases}3x_1+x_2+4x_3+4x_4=6,\\2x_1+4x_2+x_4=3,\\-x_1+3x_2+2x_3+2x_4=-2,\\x_1+4x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$
2	$\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3+x_4=1,\\5x_1+x_2+2x_3+2x_4=3,\\6x_1+2x_2+4x_3+x_4=0,\\3x_1-x_2+2x_3+2x_4=1.\end{cases}$	12	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7,\\2x_1+x_2+4x_3=0,\\3x_1+x_2+3x_3+2x_4=1,\\-x_1+2x_2+2x_3+x_4=6.\end{cases}$
3	$\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3+x_4=5,\\x_1+4x_2+2x_3-x_4=3,\\3x_1+4x_2+x_4=3,\\2x_1-x_2+3x_3+5x_4=5.\end{cases}$	13	$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3+4x_4=2,\\2x_1+4x_2-2x_3+3x_4=-2,\\-x_1+2x_2+3x_3+5x_4=9,\\2x_1+3x_2+x_3+3x_4=3.\end{cases}$
4	$\begin{cases}5x_1+2x_2+6x_3+x_4=0,\\4x_1+3x_2-4x_3=2,\\6x_1+x_2-3x_3+2x_4=-2,\\-x_1+2x_2+4x_3+4x_4=9.\end{cases}$	14	$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3+6x_4=6,\\-x_1+4x_2+3x_4=-5,\\2x_1-2x_2+x_3+5x_4=6,\\3x_1+x_2+2x_3+3x_4=6.\end{cases}$
5	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+5x_4=7,\\-2x_1+4x_2+3x_3-4x_4=12,\\3x_1+2x_2-x_3+6x_4=-3,\\4x_1-3x_2+2x_3+x_4=-3.\end{cases}$	15	$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3+2x_4=3,\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=5,\\x_1+2x_2+3x_3+2x_4=3,\\4x_1+2x_2+3x_3+x_4=1.\end{cases}$
6	$\begin{cases}-2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=4,\\x_1+5x_2+2x_3+6x_4=0,\\4x_1+3x_2+2x_3+2x_4=5,\\5x_1+5x_2+x_4=0.\end{cases}$	16	$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3+2x_4=6,\\x_1+5x_2+4x_3+3x_4=3,\\3x_1+6x_2+4x_3+5x_4=5,\\x_1+4x_2+2x_3+x_4=3.\end{cases}$
7	$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3+4x_4=11,\\4x_1+x_3-2x_4=-5,\\2x_1+4x_2+4x_3+x_4=2,\\3x_1+2x_2-x_3+3x_4=9.\end{cases}$	17	$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=4,\\x_1+2x_2-3x_3+x_4=0,\\3x_1+x_2-x_3-2x_4=9,\\2x_1+x_2-x_3-x_4=6.\end{cases}$
8	$\begin{cases}2x_1+5x_2-x_3-x_4=1,\\x_1-2x_2+x_3+2x_4=2,\\3x_1+2x_2-3x_3+x_4=0,\\x_1-3x_2+2x_3=3.\end{cases}$	18	$\begin{cases}7x_1+2x_2+x_3+x_4=3,\\5x_1-x_2+x_3-x_4=-1,\\x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\3x_1+3x_2+2x_3+x_4=4.\end{cases}$

9	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

2.2. Розв’язати СЛАР методом:
а) матричним
☑ Завдання оцінюється в ***0,5*** *бала*.
б) Крамера
☑ Завдання оцінюється в ***1*** *бал*.

3. Скласти математичну модель задачі відповідно до свого варіанту. Розв’язати її будь-яким способом.
☑ Завдання оцінюється в ***1*** *бал*.

Непарні варіанти: *Швацька фабрика протягом трьох днів випускала костюми, плащі та куртки, витративши на випуск продукції* $176+N$, $168+2N$ *та* $184+N$ *тис. грн у перший, другий та третій день відповідно (N - номер варіанту). Щоденний обсяг випуску продукції наведено у таблиці.*

День	*Обсяг випуску продукції (одиниць)*		
	Костюми, шт	*Плащі, шт*	*Куртки, шт*
Перший	**50**	**10**	**30**
Другий	**35**	**25**	**20**
Третій	**40**	**20**	**30**

Знайти собівартість одиниці продукції кожного виду.

Парні варіанти: *Завод спеціалізується на випуску трьох видів виробів* P_1, P_2, P_3, *використовуючи при цьому сировину трьох видів* S_1, S_2, S_3. *Витрати на сировину на 1 день складають* ***8N*** *ум.од. для* S_1, ***15*** *ум.од. для* S_2 *та* ***22N*** *ум.од. для* S_3 *(N - номер варіанту). Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного виду подано у таблиці.*

Вид сировини	*Обсяг випуску продукції (одиниць)*		
	P_1	P_2	P_3
S_1	***N***	**2*N***	---
S_2	---	**1**	**1**
S_3	**8*N***	---	**2*N***

Знайти щоденний обсяг випуску продукції кожного виду.

3. Підведення підсумків заняття, оголошення домашнього завдання (до 5 хв.)