ПЛАН-КОНСПЕКТ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
з дисципліни «Математичні основи ІТ»

Викладач: студент групи 641м Бужак Андрій
Дата проведення: 05.10.2021
Група: 143(1)
Вид заняття: практичне заняття
Тривалість пари: 80 хвилин
Тема: ***Добутки векторів.***

Мета: *ознайомлення студентів із означеннями та основними властивостями добутків векторів та їх застосування; набуття компетенцій розв'язування типових задач із даної тематики.*

ХІД ЗАНЯТТЯ

1. Актуалізація опорних знань (до 10 хв.).

Скалярний добуток векторів. Проєкція вектора на вектор.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$.

Скалярний добуток позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$. Отже, згідно з визначенням,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha.$$

Якщо вектори задані координатами $\vec{a}=(a_1;a_2;...;a_n)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;...;b_n)$, то їхній скалярний добуток виражається так:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n.$$

Для довільних ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та довільного дійсного числа λ справджуються такі властивості.

Алгебраїчні

1А. *Комутативність*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2А. *Дистрибутивність*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

3А. *Винесення числового множника*

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

4А. *Властивість скалярного квадрата*

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$$

Геометричні

1Г. *Геометричний зміст скалярного добутку*

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\vec{b}\cdot\vec{a}_0.$$

2Г. *Критерій ортогональності: два ненульові вектори ортогональні тоді й тільки тоді, коли* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, *то кут між векторами гострий; якщо* $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, *то кут між векторами тупий, причому* $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Число $|\vec{b}|\cos\alpha$ називають ***проекцією вектора*** $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ та позначають $np_{\vec{a}}\vec{b}$. Тобто

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cos\alpha\ .$$

Векторний добуток векторів.

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається ***правою*** (***лівою***), якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, здійснюється проти обертання стрілки (за стрілкою) годинника (рис. 1.1, 1.2).

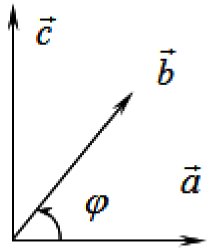

Рис. 1.1.*Права трійка*

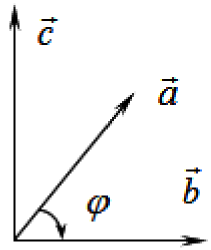

Рис. 1.2. *Ліва трійка*

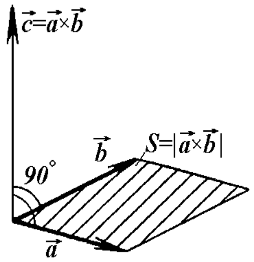

Рис. 1.3. *Векторний добуток векторів $\vec{a}$* ***і*** *$\vec{b}$*

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *вектор* $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ (рис. 1.3), що задовольняє три умови:

- ☑ вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$;
- ☑ вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку;
- ☑ довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\ .$$

Властивості векторного добутку векторів

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та довільного дійсного числа λ справджуються наступні властивості.

Алгебраїчні

1А. *Антикомутативність*
$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}\ .$$

2А. *Дистрибутивність*
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}\ .$$

3А. *Винесення лінійного множника*
$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})\ .$$

4А. *Властивість векторного квадрата*
$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}.$$

Геометричні

1Г. *Необхідною й достатньою умовою колінеарності двох ненульових векторів є рівність нулеві їхнього векторного добутку*: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$.

2Г. *Площа паралелограма, побудованого на неколінеарних векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$: $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

3Г. *Площа трикутника, побудованого на неколінеарних векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$:
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Векторний добуток в ортонормованому базисі

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторний добуток векторів

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}.$$

Наслідок. *Вектори $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$ і $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто:*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \ \Leftrightarrow\ \vec{a}\,||\,\vec{b}.$$

Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком трьох векторів називається *число* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості мішаного добутку

1А. *У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна поміняти місцями:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

2А. *Циклічна перестановка*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a} = -\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}.$$

Геометричні властивості мішаного добутку

1Г. *Об'єм паралелепіпеда*: мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, і зі знаком мінус, якщо трійка ліва (рис. 2.1):

$$\vec{a}\times\vec{b} = \pm V\ ,$$

тобто

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

2Г. *Об'єм піраміди*: на трьох некомпланарних векторах можна побудувати чотирикутну піраміду (рис. 2.2), об'єм якої обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

або трикутну (рис. 2.3), об'єм якої можна знайти з допомогою мішаного добутку так:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

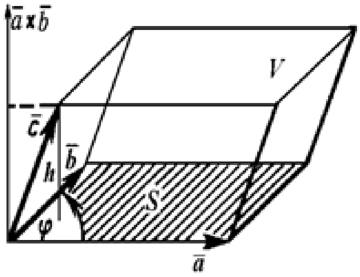

Рис. 2.1. *Паралелепіпед, побудований на 3-х некомпланарних векторах*

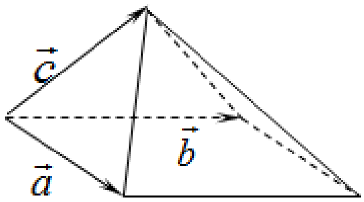

Рис. 2.2. *Чотирикутна піраміда, побудована на 3-х некомпланарних векторах*

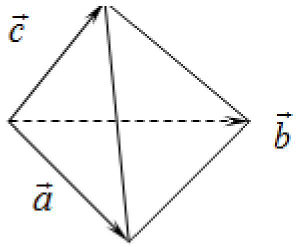

Рис. 2.3. *Трикутна піраміда, побудована на 3-х некомпланарних векторах*

3Г. *Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ компланарні.}$$

4Г. *Орієнтація трійки векторів* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ **:** якщо

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} > 0 - \textit{трійка векторів } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \textit{ права;}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} < 0 - \textit{трійка векторів } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \textit{ ліва.}$$

Мішаний добуток в ортонормованому базисі

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мішаний добуток векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ дорівнює визначнику

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів через їхні координати записується так:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

2. Розв'язування задач (65 хв.)

<u>Задача 1.</u> *Знайти кут між вектором* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ *і віссю абсцис, якщо* $A(-2;3)$, $B(0;8)$, $C(5;3)$ *і* $D(10;5)$.

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{AB}=(0-(-2);8-3)=(2;5),\ \overrightarrow{CD}=(10-5;5-3)=(5;2),$$

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overline{(2;5)}+\overline{(5;2)}=\overline{(7;7)}.$$

Знайдемо довжину вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{2\cdot 49}=7\sqrt{2}.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{7}{7\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{7}{7\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тому $\alpha=\beta=45^0$.

<u>Відповідь</u>: вектор $\vec{a}$ утворює з віссю Ox кут $\alpha=45^0$.

<u>Задача 2.</u> *Обчислити* $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, *якщо* $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{2}$; $\left|\vec{b}\right|=4$; $(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})=135^\circ$.

<u>Розв'язання</u>. За властивостями скалярного добутку

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}-\vec{b}\vec{a}+\vec{b}^2=$$

$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+4^2=$$

$$=8-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\underbrace{\cos 135^0}_{=-\cos 45^0}+16=24-16\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=40.$$

<u>Відповідь</u>: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=40$.

<u>Задача 3.</u> *Знайти значення* α *і* β, *при яких вектори* $\vec{a}=(3;-1;\alpha)$ *і* $\vec{b}=(2;\beta;1)$ *є взаємно перпендикулярними, якщо* $|\vec{b}|=3$.

<u>Розв'язання</u>. Умова $\vec{a}\perp\vec{b}$ в координатах заданих векторів набуває вигляду

$$3\cdot 2+(-1)\cdot\beta+\alpha\cdot 1=0$$

А умова $|\vec{b}|=3$: $\sqrt{2^2+\beta^2+1^2}=3$

Знайдемо β: $\beta^2+5=9$, $\beta^2=4$, $\beta=\pm 2$

З умови ортогональності маємо: $\alpha=\beta-6$

Отже, $\alpha=-8$ при $\beta=-2$ і $\alpha=-4$ при $\beta=2$

<u>Відповідь</u>: $\alpha=-8$ при $\beta=-2$ і $\alpha=-4$ при $\beta=2$.

<u>Задача 4.</u> *Дано вектори* $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. *Знайти кут* φ *між векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{c}$ *та обчислити* $\text{пр}_{\vec{c}}\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

<u>Розв'язання</u>.

Запишемо формулу для обчислення косинуса кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}$$

а) $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, отже, $\vec{a} = (-4;2;2)$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{k}$, отже, $\vec{b} = (2;0;10)$;
$\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, отже, $\vec{c} = (2;-1;1)$

Обчислимо скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ та довжини векторів:

$\vec{a} \cdot \vec{c} = -4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -8$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-8}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \ \left(\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

б) Проекція вектора на вектор знаходиться за формулою

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}_0$$

За умовою треба обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)$. Отже,

$$np_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b}) = \frac{\vec{c} \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{c}|}.$$

Для використання формули треба знайти вектор $3\vec{a} - 2\vec{b}$:

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\overrightarrow{(-4;2;2)} - 2\overrightarrow{(2;0;10)} = \overrightarrow{(-12;6;2)} - \overrightarrow{(4;0;20)} = \overrightarrow{(-16;6;-18)}$$

Знайдемо скалярний добуток

$$\vec{c} \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 2 \cdot (-16) + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-18) = -56.$$

Підставимо всі дані у формулу та знайдемо проекцію:

$$np_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b}) = \frac{\vec{c} \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{c}|} = \frac{-56}{\sqrt{6}} = -\frac{28\sqrt{6}}{3}$$

<u>Відповідь</u>: **а)** $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$; **б)** $np_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b}) = -\frac{28\sqrt{6}}{3}$.

<u>Задача 5.</u> *Вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні. Обчислити* $\left|\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)\right|$, *якщо* $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

Розв'язання.

Користуючись алгебраїчними властивостями векторного добутку, маємо:

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=\{вл.2A\}=\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{a}+\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times(-3\vec{b})=\{вл.1A\}=$$

$$=-\vec{a}\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)+3\vec{b}\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=\begin{Bmatrix}вл.2A,\\ вл.3A\end{Bmatrix}=-2\underbrace{\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)}_{=\vec{0}}-\vec{a}\times\vec{b}+6\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+3\underbrace{\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)}_{=\vec{0}}=$$

$$=\{вл.1A\}=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\vec{a}\times\vec{b}=-7\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

Тоді $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|=\left|-7\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=7\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin 90^0=7\cdot3\cdot4\cdot1=84$.

<u>Відповідь:</u> $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|=84$.

<u>Задача 6.</u> *Обчислити площу і висоту трикутника, побудованого на векторах* $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.

Розв'язання. З геометричних властивостей векторного добутку

$$S_{трикутн.}=\frac{1}{2}S_{парал.}=\frac{1}{2}|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|.$$

За умовою

$$\begin{matrix}\vec{a}=(0;2;1),\\ \vec{b}=(1;0;2)\end{matrix}.$$

Знаходимо $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(4;1;-2)$

Тоді $S=\frac{1}{2}|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|=\frac{1}{2}|\,\overrightarrow{(4;1;-2)}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$ $(од^2)$

З іншого боку, $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}|\,\vec{a}\,|\,h$. Звідси $h=\frac{2S}{|\,\vec{a}\,|}$.

Знаходимо: $|\,\vec{a}\,|=|\,\overrightarrow{(0;2;1)}\,|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$

Тоді $h=\frac{2S}{|\,\vec{a}\,|}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{21}{5}}\,(од)$

<u>Відповідь:</u> $S=\frac{\sqrt{21}}{2}$ $(од^2)$; $h=\sqrt{\frac{21}{5}}$ $(од)$.

<u>Задача 7.</u> *Дано вектори*

$$\vec{a}=(3;4;0),\ \vec{b}=(0;-3;1)\ \ \vec{c}=(0;2;5).$$

З'ясувати, чи є ці вектори компланарними. Якщо ні, то вказати орієнтацію трійки $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ *та знайти об'єм і висоту чотирикутної піраміди, побудованої на цих векторах.*

Розв'язання. Умовою компланарності трьох векторів є рівність нулеві їхнього мішаного добутку. Якщо відомі координати векторів, то мішаний добуток - це визначник, складений з координат цих векторів (координати є рядками або стовпцями). Маємо: $\vec{a}=(3;4;0)$ $\vec{b}=(0;-3;1)$ $\vec{c}=(0;2;5)$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}3&4&0\\0&-3&1\\0&2&5\end{vmatrix}=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&1\\2&5\end{vmatrix}=3\cdot(-17)=-51\neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток відмінний від нуля, то вектори не компланарні.
Для визначення орієнтації трійки $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}$ знаходимо мішаний добуток

$$\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}3&4&0\\0&2&5\\0&-3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&4&0\\0&-3&1\\0&2&5\end{vmatrix}=-(-51)=51>0.$$

Висновок: $\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)>0$, отже, трійка $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$ - права.

Об'єм чотирикутної піраміди знаходимо за формулою $V=\frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

Маємо:

$$V=\frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{3}|-51|=17\,(од^3)$$

З іншого боку, $V=\frac{1}{3}S_{осн}h$, звідки $h=\frac{3V}{S_{осн}}$.

В основі піраміди лежить паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Його площа обчислюється за формулою

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Знаходимо $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&4&0\\0&-3&1\end{vmatrix}=4\vec{i}+0-9\vec{k}-0-0-3\vec{j}=4\vec{i}-3\vec{j}-9\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{осн}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|4\vec{i}-3\vec{j}-9\vec{k}|=\sqrt{4^2+(-3)^2+(-9)^2}=\sqrt{106}\,(од^2).$$

Отже,

$$h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot 17}{\sqrt{106}}=\frac{51}{\sqrt{106}}\,(од).$$

Відповідь: вектори не компланарні; трійка $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$ - права;

$$V=17\,(од^3),\ h=\frac{51}{\sqrt{106}}\,(од).$$

<u>Задача 8.</u> *Довести, що чотири точки A(1;2;–1), B(0;1;5), C(–1;2;1), D(2;1;3) лежать в одній площині.*
<u>Розв'язання</u>. Утворимо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \big(0-1; 1-2; 5-(-1)\big) = (-1;-1;6),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \big(-1-1; 2-2; 1-(-1)\big) = (-2;0;2),$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \big(2-1; 1-2; 3-(-1)\big) = (1;-1;4).$$

Чотири точки лежать в одній площині, якщо утворені вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні, тобто їхній мішаний добуток дорівнює нулеві. Обчислимо:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0+12-2-0-2-8 = 12-12 = 0.$$

Таким чином, вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарні, а значить, усі точки цих векторів лежать в одній площині, зокрема *A(1;2;–1), B(0;1;5), C(–1;2;1), D(2;1;3)* лежать в одній площині.

3. Підведення підсумків заняття, оголошення домашнього завдання (до 5-7 хв.)

Д/з: пряма на площині, зб. задач Дубовик В.П., Юрик І.І. с. 38-41, №№112, 119, 135(1), 153; с. 42-44, №№ 164, 166, 174; с. 45-48, №№ 190(1), 191(1), 208.