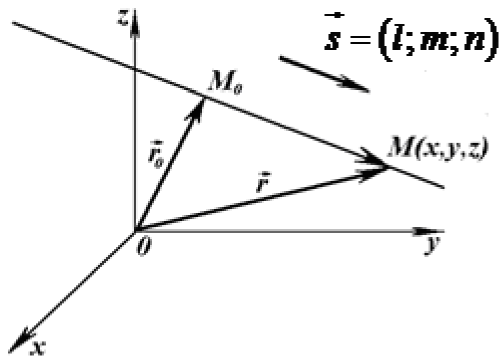
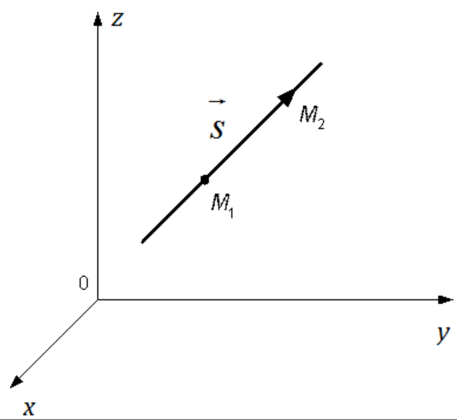
ПЛАН-КОНСПЕКТ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
з дисципліни «Математичні основи ІТ»

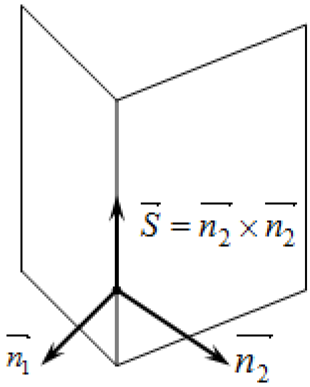
Викладач: студент групи 641м Бужак Андрій
Дата проведення: 21.10.2021
Група: 143(1)
Вид заняття: практичне заняття
Тривалість пари: 80 хвилин
Тема: ***Пряма у просторі.***

Мета: *ознайомлення студентів із основними типами рівнянь прямих у просторі, особливостями їх написання та застосування, визначення кутів між прямими та між прямою і площиною у просторі; формування компетенцій розв'язування типових задач із даної тематики.*

ХІД ЗАНЯТТЯ

1. Актуалізація опорних знань, нагадування теоретичного матеріалу (5 хв.).

Пряма у просторі		
№	*Рівняння*	*Малюнок*
1	*Пряма, що проходить через задану точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно до даного вектора* $\vec{s}=(l;m;n)$ $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ ***канонічне рівняння***	
2	***Параметричні рівняння*** $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+nt, \end{cases}$ $\vec{s}=(l;m;n)$ *- напрямний вектор* $l^2+m^2+n^2>0$	
3	*Пряма, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}.$ $\vec{s}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$	

4	***Загальне рівняння прямої*** *(перетин двох площин)* $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$	

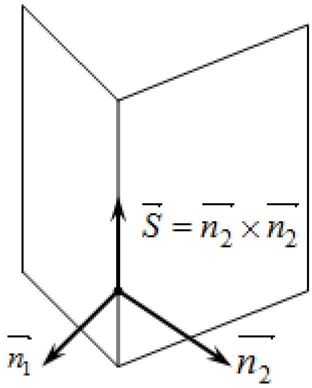
Взаємне розміщення прямих та прямої і площини у просторі

Спосіб задання / *Назва правила чи формули*	***Прямі задані канонічними рівняннями*** $p_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\vec{s}_1=(l_1;m_1;n_1)$ $p_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, $\vec{s}_2=(l_2;m_2;n_2)$	***Пряма задана канонічним рівнянням, площина - загальним*** $p: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $\vec{s}=(l;m;n)$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ $\overrightarrow{N}=(A;B;C)$
Кут φ між площинами/ прямими/ прямою та площиною	Кут між напрямними векторами цих прямих, тобто $\varphi=(\widehat{p_1,p_2})=(\widehat{\vec{s}_1,\vec{s}_2})$	Кут між прямою p та її проекцією на площину π.
Тригонометрична функція кута	$\cos\varphi=$ $=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$	$\sin\varphi=$ $=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$
Умова паралельності	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	$Al+Bm+Cn=0$
Умова перпендикулярності	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

2. Розв'язування задач (70 хв.)

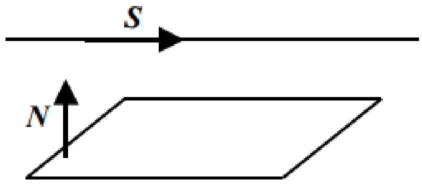
<u>Задача 1.</u> *З'ясувати взаємне розміщення прямої, заданої своїм загальним рівнянням* $(p): \begin{cases} 3x+5y+z-4=0, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ *та площини* $(\pi): x-y=0$ *. Якщо вони перетинаються - знайти кут між ними.*

<u>Розв'язання</u>. ***1)*** Для з'ясування питання про взаємне розміщення прямої та площини, нам треба знати напрямний вектор прямої $\vec{s}=(l;m;n)$ та вектор нормалі $\overrightarrow{N}=(A;B;C)$ площини. Пряма (p) задана загальним рівнянням (як перетин двох площин), а значить, за її напрямний вектор можна взяти векторний добуток векторів нормалей площин, перетином яких утворена ця пряма.



$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}=2(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}).$$

Таким чином, в якості напрямного вектора прямої (p) можна брати $\vec{s}=(4;-2;-2)$ (або $\vec{s_1}=(2;-1;-1)$). Вектор нормалі площини $(\pi): x-y=0$ має вигляд $\vec{n}=(1;-1;0)$.



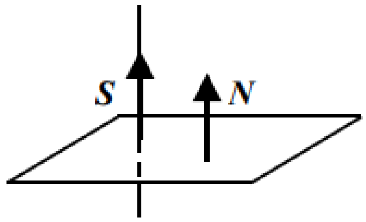
Пряма і площина паралельні, якщо

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Перевіряємо: $1\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-2)=6\neq 0$,
отже, пряма і площина не паралельні.

Пряма і площина перпендикулярні, якщо

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$



Перевіряємо: $\frac{1}{4}\neq\frac{-1}{-2}\neq\frac{0}{-2}$,
отже, пряма і площина не перпендикулярні (і не паралельні), а значить, перетинаються під деким кутом φ, причому

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{|1\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{24}}=\frac{6}{\sqrt{48}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси робимо висновок, що $\varphi=60^0$.

Відповідь: *пряма та площина перетинаються під кутом* $\varphi=60^0$

Задача 2. *Знайти кут між прямою* $(p_1):\begin{cases}x=-3+5t,\\ y=2-3t,\\ z=1\end{cases}$ *та прямою* (p_2), *яка проходить через точки* $M(3;2;-1)$ *та* $N(4;-1;2)$.

Розв'язання. Кут φ між прямими у просторі - це кут між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1}=(l_1;m_1;n_1)$ та $\vec{s_2}=(l_2;m_2;n_2)$, а значить,

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження напрямних векторів даних прямих.

Напрямний вектор прямої (p_1), очевидно, має вигляд $\overrightarrow{s_1} = (5;-3;0)$, а для знаходження напрямного вектора прямої (p_2) складемо її рівняння, врахувавши, що пряма проходить через 2 точки $M(3;2;-1)$ та $N(4;-1;2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Підставляючи координати точок, маємо:

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z-(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$$

Легко бачити, що напрямний вектор даної прямої має вигляд $\overrightarrow{s_2} = (1;-3;3)$.

Підставимо координати знайдених векторів $\overrightarrow{s_1} = (5;-3;0)$ та $\overrightarrow{s_2} = (1;-3;3)$ у формулу (1) та знайдемо косинус кута між цими прямими:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{5\cdot 1 + (-3)\cdot(-3) + 0\cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{34}\sqrt{19}}.$$

Відповідь: $\cos\varphi = \dfrac{14}{\sqrt{34}\sqrt{19}}$

Задача 3. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;0)$:*

а) *паралельно до прямої* $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+1}{-3}$;

б) *паралельно осі* Oz;

в) *перпендикулярно до площини* $3x - z + 5 = 0$.

Вказати точку, симетричну до точки $M(1;2;0)$ відносно площини $3x - z + 5 = 0$.

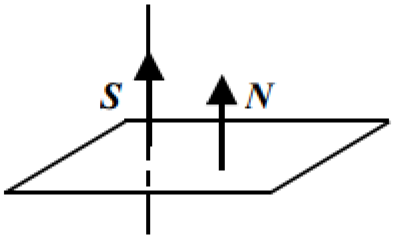
Розв'язання. ***а)*** Оскільки шукана пряма паралельна до прямої $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+1}{-3}$, то їхні напрямні вектори колінеарні, зокрема, за напрямний вектор шуканої прямої можна взяти напрямний вектор $\vec{s} = (2;0;-3)$ заданої прямої. Тоді записуємо рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (2;0;-3)$ (канонічне рівняння):

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-3}.$$

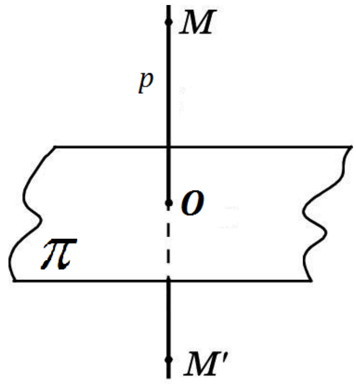
б) Шукана пряма паралельна до осі Oz, а значить, орт $\vec{k} = (0;0;1)$ осі Oz паралельний до цієї прямої, а отже, може бути взятий за її напрямний вектор. Таким чином, записуємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-0}{1}.$$

в) Шукана пряма (p) перпендикулярна до площини (π) $3x-z+5=0$.



Тому вектор нормалі $\vec{n}=(3;0;-1)$ можна взяти за напрямний вектор шуканої прямої. Отже, пряма (p) проходить через точку $M(1;2;0)$ паралельно до вектора $\vec{s}=(3;0;-1)$: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-0}{-1}$.



Знайдемо точку $M'(x_{M'};y_{M'};z_{M'})$, симетричну до точки M відносно площини (π). За означенням точки M та M' симетричні відносно площини (π), якщо дана площина проходить через середину відрізка MM' та перпендикулярна до даного відрізка. Виходячи з цього, для побудови точки, симетричної до даної точки відносно заданої площини, слід виконати наступні дії:

1) провести через точку M пряму (p), перпендикулярну до площини (π);

2) знайти точку O, в якій пряма (p) перетинає площину (π) (проєкцію точки M на площину (π));

3) знайти точку M' з умови, що точка O - середина відрізка MM'

$$x_O=\frac{x_M+x_{M'}}{2},\ y_O=\frac{y_M+y_{M'}}{2},\ z_O=\frac{z_M+z_{M'}}{2},$$

тобто знайти координати кінця відрізка, коли відомі координати його початку та середини

$$x_{M'}=2x_O-x_M,\ y_{M'}=2y_O-y_M,\ z_{M'}=2z_O-z_M.$$

Пряма (p), що проходить через точку M перпендикулярно до площини (π) у нас вже побудована. Це пряма

$$(p):\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-0}{-1}.$$

Знайдемо точку, в якій (p) перетинає площину (π). Для цього зручно звести рівняння прямої до параметричного вигляду:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-0}{-1}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1+3t,\\ y=2,\\ z=-t\end{cases}$$

та розв'яжемо систему

$$\begin{cases}\begin{cases}x=1+3t,\\ y=2,\\ z=-t,\end{cases}\\ 3x-z+5=0.\end{cases}$$

Підставимо значення $x = 1 + 3t$, $y = 2$ та $z = -t$ у рівняння площини $3x - z + 5 = 0$ та знайдемо значення параметра t, що відповідає точці перетину:

$$3(1+3t) - (-t) + 5 = 0,\ 10t + 8 = 0,\ t = -0{,}8.$$

Знайдене значення $t = -0{,}8$ підставляємо у параметричні рівняння прямої (p) та знаходимо координати точки O, в якій пряма (p) перетинає площину (π):

$$\begin{cases} x_O = 1 + 3(-0{,}8) = -1{,}4; \\ y_O = 2; \\ z_O = -(-0{,}8) = 0{,}8. \end{cases}$$

Отже, $O(-1{,}4; 2; 0{,}8)$ - точка перетину (p) і (π) та середина відрізка MM', де $M(1; 2; 0)$.

Знаходимо координати точки M':

$$x_{M'} = 2x_O - x_M = 2(-1{,}4) - 1 = -1{,}8,\quad y_{M'} = 2y_O - y_M = 2 \cdot 2 - 2 = 2,$$
$$z_{M'} = 2z_O - z_M = 2 \cdot 0{,}8 - 0 = 1{,}6.$$

Таким чином, $M'(-1{,}8; 2; 1{,}6)$.

<u>Відповідь</u>:* *а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{-3}$ ***; б)*** $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{1}$ ***;***

в) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{-1}$; $M'(-1{,}8; 2; 1{,}6)$

<u>Зауваження.</u> *Якщо при підстановці виразів* $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ *з параметричного рівняння прямої* (p) *у загальне рівняння* $Ax + By + Cz + D = 0$ *площини* (π) *отримане лінійне рівняння не має розв'язку, це означає, що* $(p) \| (\pi)$, *а якщо має безліч розв'язків, то пряма* (p) *лежить у площині* (π).

<u>Задача 4.</u> *Знайти точку перетину прямих*

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 3t. \\ z = 1 - t \end{cases}$$

і кут між ними.

<u>Розв'язання</u>. Легко зрозуміти, що ці прямі не є паралельними, адже їхні напрямні вектори $\vec{s_1} = (1; -1; 3)$ та $\vec{s_2} = (2; -3; -1)$ не колінеарні. Тому дані прямі або перетинаються, або є мимобіжними. Одразу легко визначається косинус кута між прямими:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{1 \cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{154}}$$

Будемо вважати, що точці перетину у рівняннях першої прямої відповідає значення параметра $t = t_1$, а у рівняннях другої прямої – значення параметра $t = t_2$, тобто

$$\begin{cases} x_0 = 1 + t_1, \\ y_0 = 1 - t_1, \\ z_0 = 2 + 3t_1 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_0 = 3 + 2t_2, \\ y_0 = -2 - 3t_2, \\ z_0 = 1 - t_2 \end{cases}$$

Координати точки перетину прямих повинні задовольняти рівнянням обох прямих, отже

$$\begin{cases} 1 + t_1 = 3 + 2t_2, \\ 1 - t_1 = -2 - 3t_2, \\ 2 + 3t_1 = 1 - t_2 \end{cases}$$

Перетворюємо:

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 2, \\ t_1 - 3t_2 = 3, \\ 3t_1 + t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = -1 (\textit{відняли } 2-\textit{ге р}-\textit{ня від } 1-\textit{го}), \\ t_1 - 3t_2 = 3, \\ 3t_1 + t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = -1, \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

Тоді шукана точка має координати $\begin{cases} x_0 = 1 + 0, \\ y_0 = 1 - 0, \\ z_0 = 2 + 3 \cdot 0 \end{cases}$ тобто точка $M(1;1;2)$ є точкою перетину заданих прямих.

Відповідь: $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{154}}$ ***;*** $M(1;1;2)$ – точка перетину заданих прямих.

Зауваження. *Якщо отримана система трьох рівнянь з двома змінними не має розв'язку, це означає, що прямі не перетинаються.*

Задача 5. *Записати рівняння прямої, яка проходить через точку* $M(3;2;-1)$ *перпендикулярно до прямих* $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z}{-3}$ *та* $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Розв'язання.

Шукана пряма перпендикулярна прямим з напрямними векторами $\overline{S_1} = (3;5;-2)$ та $\overline{S_2} = (4;1;3)$. Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overline{S_1}$ та $\overline{S_2}$:

$$\overline{S} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 17\bar{i} - 17\bar{j} - 17\bar{k}.$$

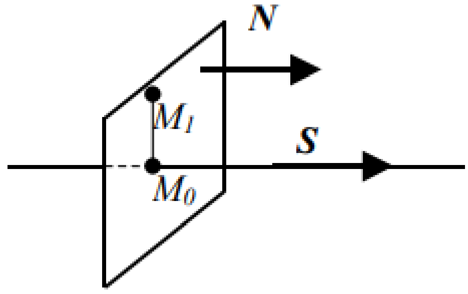
Тоді канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x-3}{17} = \frac{y-2}{-17} = \frac{z+1}{-17} \quad \text{або} \quad x - 3 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Відповідь: $x - 3 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$

<u>Задача 6.</u> *Визначити проєкцію точки* $M_1(1;2;-1)$ *на пряму* $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-4}$ *та знайти відстань від точки до прямої.*

<u>Розв'язання</u>.



Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно заданій прямій. Можна вважати, що нормаль $\overline{N}$ до площини дорівнює напрямному вектору прямої :

$$\overline{N}=\overline{S}=(-1;2;-4).$$

Запишемо рівняння шуканої площини:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0;$$

$$-1(x-1)+2(y-2)-4(z+1)=0;$$

$$-x+2y-4z-7=0;$$

$$x-2y+4z+7=0.$$

Параметричні рівняння заданої прямої мають вигляд $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=-4t \end{cases}$. З'ясуємо, при якому значенні параметра t пряма перетинає площину:

$$(2-t)-2(1+2t)+4(-4t)+7=0 \Rightarrow t=\frac{11}{21}.$$

Обчислимо координати точки перетину M_0:

$$\begin{cases} x_0=2-\dfrac{11}{21} \\ y_0=-1+2\cdot\dfrac{11}{21} \\ z_0=-4\cdot\dfrac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{31}{21};\frac{1}{21};-\frac{44}{21}\right).$$

Пряма M_0M_1 є перпендикулярною до заданої прямої, отже точка $M_0\left(\frac{31}{21};\frac{1}{21};-\frac{44}{21}\right)$ є шуканою проекцією точки M_1.

Відстань від точки M_1 до прямої – це відстань до проекції M_0 заданої точки на пряму, тобто

$$d(M_1)=M_1M_0=\sqrt{\left(\frac{31}{21}-1\right)^2+\left(\frac{1}{21}-2\right)^2+\left(-\frac{44}{21}-(-1)\right)^2}=\frac{\sqrt{2310}}{21}\text{(од.)}$$

3. Перевірка рівня засвоєння нових знань (групове міні-тестування з використанням онлайн-дошки).

Встановити відповідність

1	пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{0}=z$	**А**	перпендикулярна прямій $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-10}{-2}$
2	пряма $\begin{cases} x=3-10t, \\ y=-2, \\ z=-0,5+5t \end{cases}$	**Б**	паралельна прямій $\begin{cases} x=-2t, \\ y=1-t, \\ z=3+2t \end{cases}$
3	пряма $\frac{x-4}{6}=\frac{y-0,5}{0}=\frac{z+1,5}{-2}$	**В**	паралельна площині $x+5y-2z+7=0$
4	пряма $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{3}$	**Г**	перпендикулярна площині $-3x+z-2=0$
5	пряма $x=2y=-z$	**Д**	паралельна осі Oz

Ключ до тесту: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Д, 5-Б

3. Підведення підсумків заняття, оголошення домашнього завдання (до 5-7 хв.)

Д/з: пряма на площині, зб. задач Дубовик В.П., Юрик І.І. с. 69-74, №№ 201, 202, 224, 228, 236, 237.