Лабораторна робота №1

**Моделювання випадкових величин**

1. ***Моделювання дискретної випадкової величини***

Розглянемо випадкову величину Х, що набуває, наприклад, лише 3-х значень:  з ймовірностями .

Щоб змоделювати цю величину, розіб'ємо відрізок [0,1] на три частини:



довжиною відповідно, і згенеруємо рівномірно розподілену величину *Z*.

Знайдемо нову випадкову величину *Y*, поклавши



Отже, величина *Y* має той же розподіл, що й величина *X*, тобто може розглядатися як її стохастична копія.

Припустимо, що випадкова величина *Х* приймає довільне число дискретних значень з певними вірогідностями ,... . Розіб'ємо відрізок [0,1] на частини



довжиною , ... відповідно й згенеруємо рівномірно розподілену випадкову величину *Z*.

Визначимо нову величину *Y*, поклавши  якщо, якщо

.

Ця величина приймає дискретні значення . Оскільки подія  рівносильна події , його ймовірність дорівнює довжині проміжку , тобто .

Отже, ми можемо розглядати побудовану цим способом випадкову величину *Y* як реалізацію випадкової величини *Х*.

**Приклад 1.** Розглянемо випадкову величину *Х* , що має розподіл Пуассона з параметром . Як відомо,



Ймовірності  зручно обчислювати за рекурентною формулою:



з початковою умовою

.

Ця рекурентна формула дозволяє легко змоделювати пуассонову випадкову величину на ЕОМ



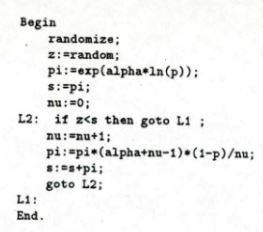
**Приклад 2**. Нехай тепер *Х* має від’ємно- біноміальний розподіл з параметрами *р* і , тобто



Ймовірності  зручно обчислювати за рекурентною формулою:



з початковою умовою 



**Приклад 3.** Випадкова величина *X* має геометричний розподіл з параметром *р*

.

В цьому випадку очевидна наступна рекурентна формула



з початковою умовою 

**Приклад 4**. Випадкова величина *X* має біноміальний розподіл з параметрами n і *р*



Ймовірності  зручно обчислювати за рекурентною формулою:



з початковою умовою 

1. ***Моделювання неперервних випадкових величин***

Нехай *F(x*) *–* неперервна функція, що монотонно зростає, розподілена так, що на проміжку 0 < *y* < 1 визначена обернена функція *.* Тоді випадкова величина , де *Z -* випадкова величина, монотонно розподілена на (0, 1), має розподіл *F*(*x*)*.*

Дійсно,

.

Обернена функція може бути точно підрахована для більшості неперервних розподілів, тобто відповідні випадкові величини часто моделюються простими операторами. Розглянемо декілька конкретних прикладів.

**Приклад 5**. Експоненціальний розподіл.

Функція розподілу експоненціальної випадкової величини задається формулою . Оберненою функцією є . Тому випадкова величина , де *Z* - рівномірно розподілена на (0, 1) має експоненціальний розподіл з параметром . Оскільки величина 1*-Z* також рівномірно розподілена на (0, 1), значення експоненціальної величини можна одержати за формулою .

**Приклад 6**.Розподіл Парето.

Функція розподілу випадкової величини, яка має розподіл Парето з параметрами  та , задається формулою

.

Оберненою функцією є:

.

Тому випадкова величина

,

де *Z –* випадкова величина, рівномірно розподілена на (0, 1), має розподілПарето з параметрами  та . Оскільки величина 1*-Z* такожрівномірно розподілена на (0, 1), можна використати більш просте перетворення:

.

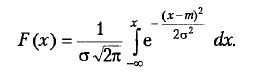
**Приклад 7**. Рівномірний розподіл на відрізку (*a,b*)

Для генерування значень випадкової величини цього типу досить згенерувати значення випадкової величини Z рівномірно розподілена на (0, 1) і використати наступне співвідношення



**Приклад 8**. Нормально розподілена величина Х з параметрами .

Неінтегровність функції нормального розподілу



не дозволяє використовувати наведений метод. Тому для генерації нормально розподілений випадкових величин застосовують спосіб заснований на центральній граничній теоремі. За ЦГТ, розподіл суми незалежних однаково розподілених випадкових величин прямує до нормального розподілу з параметрами 0 та 1. Сума незалежних рівномірно розподілених величин досить швидко збігається до нормального розподілу, і вже при n=12 похибка буде достатньо малою.

Отже, алгоритм одержання значень нормально розподіленої величини з параметрами  наступний:

1. Сформувати послідовність з n незалежних рівномірно розподілених на відрізку (0,1) величин  (i=1,..,n; n>11);
2. Обчислити значення величини

,

яка є хорошим наближенням величини розподіленої за нормальним законом з параметрами 0 і 1.

1. Щоб одержати випадкову величину розподілену нормально з параметрами  слід здійснити наступне лінійне перетворення



**Завдання до лабораторної роботи:**

1. Згенерувати по 20 значень випадкових величин кожного типу, описаних в прикладах 1-8. Обчислити вибіркові середні і вибіркові дисперсії.
2. Нехай маємо 10 договорів страхування життя, які враховують причину смертності. Обчислити ймовірність банкрутства страхового фонду при відомому капіталі.
3. Нехай щомісячна кількість пожеж серед застрахованих об’єктів описуються пуассоновим розподілом з середнім , а величина збитків при пожежі має експоненціальний розподіл з середнім 5000грн. Потрібно оцінити ймовірність банкрутства, якщо резервний фонд становить 105000грн.