Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Інститут фізико-технічних та комп’ютерних наук

Відділ комп’ютерних технологій

Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

**ЗВІТ**

**про виконання лабораторної роботи №1**

**з дисципліни «Числові методи».**

**Тема: Наближене розв’язування нелінійних рівнянь**

|  |  |
| --- | --- |
| Виконав студент | Бужак А.В. |
| Курс ІII |  |
| Група 341 |  |
| Викладач | Філіпчук О.І. |

Чернівці – 2018

**Хід роботи**

*Частина 1: Відокремлення коренів*

*Варіант №4*

У заданому рівнянні

Застосуємо спочатку аналітичний метод. Згідно з теоремою 2, оскільки n=6, дане рівняннямає рівно 6 коренів.

Перевіримо умови теореми 5.

Умова (6) не виконується, отже корені можуть бути як дійсними так і пари комплексно спряжених.

Виконується умова (7), тому за наслідком теореми 5 рівняння (4) має принаймніодну пару комплексних коренів.

Кількість змін знаків коефіцієнтів многочлена дорівнює 3, отже, за теоремою 4, кількість дійсних додатних коренів або .

Число змін знаків коефіцієнтів многочлена дорівнює 1, отже, за теоремою 4, кількість дійсних від'ємних коренів .

Далі за формулою (5) знайдемо кільце, в якому містяться усі корені вихідного рівняння. Для цього знайдемо спочатку *a* і *b* :

,

Тоді корені рівняння містяться в кільці

Звідси випливає, що від'ємні корені рівняння задовольняють нерівність

,

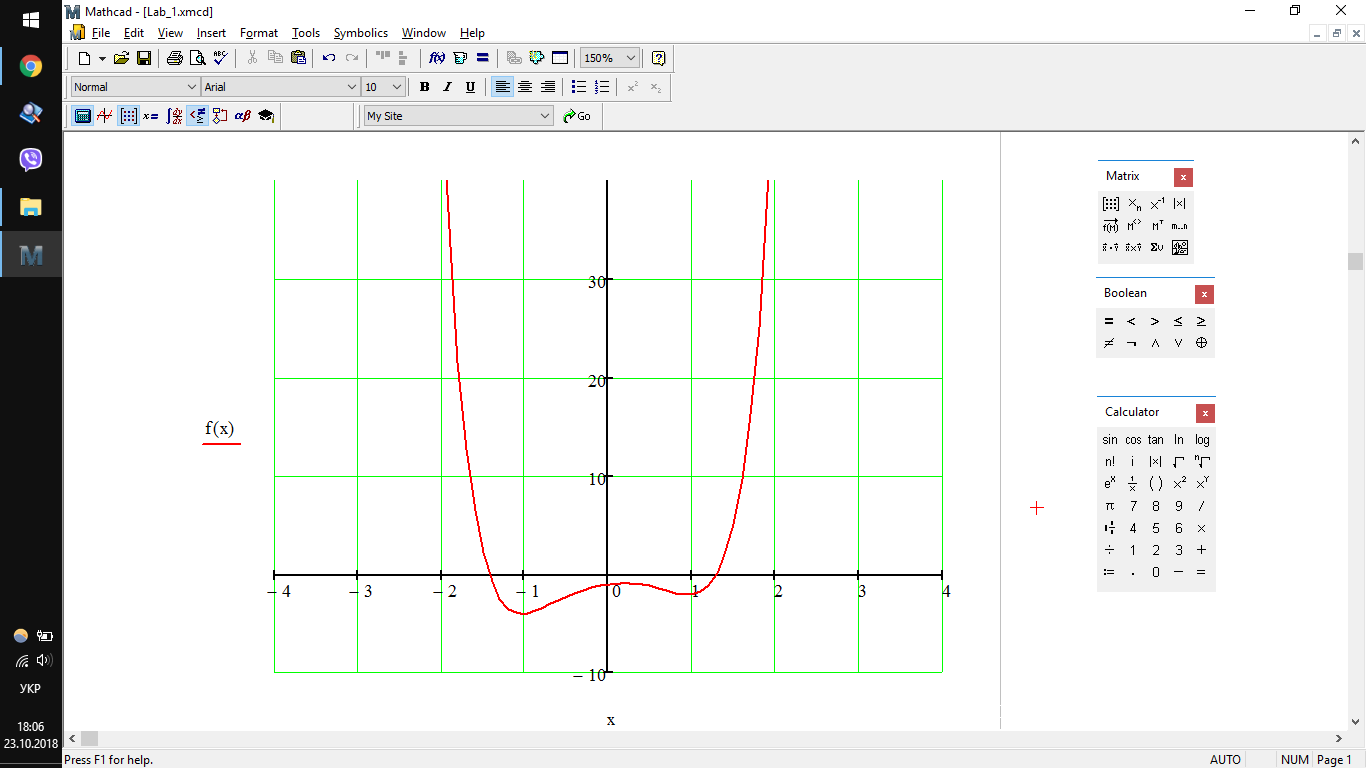
а додатні – нерівність

Далі застосуємо табличний метод для відокремлення дійсних коренів. Для цього затабулюємо ліву частину рівняння на відрізку [-4,4] з кроком .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -4 | -3 | **-2** | **-1** | 0 | **1** | **2** | 3 | 4 |
|  | 4043 | 698 | 49 | -4 | -1 | -2 | 53 | 704 | 4051 |
| знак | + | + | + | - | - | - | + | + | + |
|  |  |  | *інтервал ізоляції* | |  | *інтервал ізоляції* | |  |  |

Поєднуючи інформацію, отриману з допомогою аналітичного та табличного способів, доходимо висновку, що за межами відрізку [-4,4] дійсних коренів немає; один від’ємний корінь знаходиться на проміжку (-2;-1), а додатний корінь – на проміжку (1;2).

Перевірку кількості дійсних коренів можна виконати графічним методом.



*Графік функції*

Від’ємний корінь на проміжку (-2;-1) та додатний корінь на проміжку (1;2) є простими однократними коренями, адже при переході через ці корені многочлен змінює знак а напрям опуклості графіка не змінюється. Разом з тим, графік многочлена перетинає вісь абсцис двічі (кожна точка перетину відповідає відокремленому простому кореню), а коренів має бути рівно 6. Це означає, що решта 4 корені – дві пари комплексно спряжених коренів.

**Висновок:** використовуючи поєднання трьох методів, ми отримали повну характеристику коренів даного рівняння: рівняння має 6 коренів, з них 2 дійсні прості – від’ємний та додатний , і дві пари комплексно спряжених коренів з кільця .

*Частина 2:* *Уточнення коренів*

На етапі відокремлення коренів даного рівняння з’ясувалось, що дійсні корені даного алгебраїчного рівняння знаходяться на відрізках [-2;-1] та [1;2]. Уточнимо корінь з відрізка [1;2].

1. ***Метод дихотомії (половинного ділення).*** Оцінимо мінімальну кількість ітерацій, необхідну для досягнення заданої точності.

Маємо:

Реалізуємо метод дихотомії. За початковий відрізок беремо

Тоді початковим наближенням шуканого кореня рівняння буде середина початкового відрізка (відрізка ізоляції кореня):

Точність наближення на даному кроці

отже, продовжуємо ітераційний процес. Точка ділить початковий відрізок на дві рівні частини. Для визначення наступного відрізка наближення з’ясуємо знаки функції у точках :

*.*

Як бачимо, на кінцях відрізка [1.5;2] функція набуває значень одного знаку, а на кінцях відрізка [1;1.5] – значень різних знаків, тобто

,

отже, наступним відрізком наближення буде

.

Тоді наступним наближенням шуканого кореня рівняння буде середина відрізка :

Точність наближення на даному кроці

отже, продовжуємо ітераційний процес. Точка ділить відрізок на дві рівні частини. Для визначення наступного відрізка наближення з’ясуємо знаки функції в точках :

*.*

Як бачимо, на кінцях відрізка [1;1.25] функція набуває значень одного знаку, а на кінцях відрізка [1.25;1.5] – значень різних знаків, тобто

,

отже, наступним відрізком наближення буде

і т.д.

Результати обчислень наведено у таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *Висновок* |
| 0 | 1 | 2 | 1.5 | -2 | 53 | 5.140625 | 1 |  |
| 1 | 1 | 1.5 | 1.25 | -2 | 5.140625 | -0.6228 | 0.5 |  |
| 2 | 1.25 | 1.5 | 1.375 | -0.6228 | 5.140625 | 1.461094 | 0.25 |  |
| 3 | 1.25 | 1.375 | 1.3125 | -0.6228 | 1.461094 | 0.25659 | 0.125 |  |
| 4 | 1.25 | 1.3125 | 1.28125 | -0.6228 | 0.25659 | -0.21968 | 0.0625 |  |
| 5 | 1.28125 | 1.3125 | 1.296875 | -0.2197 | 0.2566 | 0.0088 | 0.03125 |  |
| 6 | 1.28125 | 1.296875 | 1.2890625 | -0.2197 | 0.0088 | -0.1078 | 0.015625 |  |
| 7 | 1.2890625 | 1.296875 | 1.29296875 | -0.1078 | 0.0088 | -0.0501 | 0.0078125 |  |
| 8 | 1.29296875 | 1.296875 | 1.294921875 | -0.0501 | 0.0088 | -0.0208 | 0.0039063 |  |
| 9 | 1.294921875 | 1.296875 | 1.295898438 | -0.0208 | 0.0088 | -0.00601 | 0.0019531 |  |
| 10 | 1.295898438 | 1.296875 | **1.296386719** | -0.006 | 0.0088 | 0.0014 | **0.0009766** |  |

Очевидно, задана точність досягається на одинадцятій ітерації – на відрізку маємо

,

а значить, шуканим наближенням буде середина відрізка :

1. ***Метод хорд.*** Визначимо нерухомий кінець хорд з умови

*,*

де або . Знайдемо похідні

*.*

Перевіримо виконання умови

у точці

– не виконується;

у точці

– виконується,

отже, нерухомим кінцем методу хорд у даному випадку буде точка . Ця ж точка буде початковим наближенням шуканого кореня. Наступне наближення розраховуємо за формулою

а подальші – за ітераційними формулами

.

Маємо:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | *Висновок* |
| 0 | 2 | 53 | --- |  |
| 1 | 1,036364 | -1,94678 | 0,963636 |  |
| 2 | 1,070505551 | -1,862451104 | 0,034141915 |  |
| 3 | 1,1020597 | -1,74998964 | 0,031554149 |  |
| 4 | 1,130760824 | -1,614722764 | 0,028701124 |  |
| 5 | 1,156460493 | -1,463611969 | 0,025699669 |  |
| 6 | 1,179129105 | -1,304285424 | 0,022668613 |  |
| 7 | 1,198844859 | -1,144062838 | 0,019715754 |  |
| 8 | 1,21577325 | -0,989187678 | 0,01692839 |  |
| 9 | 1,23014182 | -0,84438259 | 0,01436857 |  |
| 10 | 1,242214664 | -0,712732332 | 0,012072844 |  |
| 11 | 1,252269973 | -0,595819413 | 0,010055309 |  |
| 12 | 1,260582414 | -0,494006914 | 0,008312441 |  |
| 13 | 1,267410793 | -0,406771657 | 0,00682838 |  |
| 14 | 1,272990545 | -0,333019601 | 0,005579752 |  |
| 15 | 1,277530104 | -0,271346866 | 0,004539559 |  |
| 16 | 1,28121013 | -0,220234657 | 0,003680026 |  |
| 17 | 1,284184609 | -0,178181806 | 0,002974478 |  |
| 18 | 1,28658306 | -0,14378603 | 0,002398451 |  |
| 19 | 1,288513284 | -0,115786855 | 0,001930224 |  |
| 20 | 1,29006425 | -0,093082097 | 0,001550967 |  |
| 21 | 1,2913089 | -0,074727457 | 0,00124465 |  |
| 22 | **1,292306714** | -0,059926286 | **0,000997814** |  |

Ітераційний процес завершено і наближене значення кореня

із заданою точністю досягнуте за 23 ітерації.

1. ***Метод Ньютона (дотичних).*** Нерухомим кінцем методу дотичних буде той самий, що й у методі хорд – . Разом з тим, – початкове наближення шуканого кореня рівняння. Подальші ітерації проводимо за формулами

*.*

Умова завершення ітераційного процесу

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | *Висновок* |
| 0 | 2 | 53 | 181 | --- |  |
| 1 | 1,70718232 | 16,71970823 | 77,76322066 | 0,29281768 |  |
| 2 | 1,492174402 | 4,851110432 | 36,43327741 | 0,215007919 |  |
| 3 | 1,359023865 | 1,118504688 | 20,66134372 | 0,133150536 |  |
| 4 | 1,304888727 | 0,133432017 | 15,87029079 | 0,054135138 |  |
| 5 | 1,296481067 | 0,002835875 | 15,19880876 | 0,00840766 |  |
| 6 | **1,296294482** | 1,37068E-06 | 15,18411803 | **0,000186585** |  |

Задана точність наближення досягнута за 7 ітерацій, наближене значення

.

1. ***Комбінований метод.*** Нехай – наближення кореня з недостачею, а – з надлишком. Тоді

для кожного номера .

Визначимо, котрий з методів дає значення з надлишком, а який – з недостачею. Для цього визначимо знак добутку на відрізку [a; b] = [1; 2].

На відрізку [a; b] = [1; 2] функція зростає (тобто на [a; b] = [1; 2]) і опукла вниз (тобто на [a; b] = [1; 2]), а значить,

*.*

Це означає, що метод хорд дає наближене значення кореня з недостачею, а дотичних – з надлишком й ітерації проводяться з формулами

Наближене значення кореня

а умова завершення ітераційного процесу

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *Висновок* |
| 0 | 1 | 2 | 1,5 | -2 | 53 | 181 | 1 |  |
| 1 | 1,036363636 | 1,70718232 | 1,371772978 | -1,946780301 | 16,71970823 | 77,7632 | 0,670819 |  |
| 2 | 1,106325193 | 1,492174402 | 1,299249797 | -1,731973982 | 4,851110432 | 36,4333 | 0,38585 |  |
| 3 | 1,207840038 | 1,359023865 | 1,283431951 | -1,063828917 | 1,118504688 | 20,6613 | 0,151184 |  |
| 4 | 1,281538086 | 1,304888727 | 1,293213407 | -0,215630653 | 0,133432017 | 15,8703 | 0,023351 |  |
| 5 | 1,295962757 | 1,296481067 | **1,296221912** | -0,005031251 | 0,002835875 | 15,1988 | **0,00051831** |  |

Задана точність наближення досягнута за 6 ітерацій.

.

1. ***Метод простої ітерації.*** Подамо вихідне рівняння вигляду у вигляді

так, щоб виконувалась достатня умова збіжності методу простих ітерацій

.

Тут , де відповідно мінімальне та максимальне значення .

Отримуємо

Умова завершення ітераційного процесу

.

Ітерації обчислюються за формулою

,

а – деяке початкове наближення (точка з відрізка [a; b]).

Нехай . Тоді

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | *Висновок* |
| 0 | 1 | --- |  |
| 1 | 1,021978022 | 0,021978022 |  |
| 2 | 1,043648459 | 0,021670437 |  |
| 3 | 1,064876708 | 0,02122825 |  |
| 4 | 1,085523757 | 0,020647049 |  |
| 5 | 1,105450825 | 0,019927068 |  |
| 6 | 1,124524718 | 0,019073893 |  |
| 7 | 1,142623506 | 0,018098788 |  |
| 8 | 1,159642037 | 0,017018532 |  |
| 9 | 1,175496743 | 0,015854705 |  |
| 10 | 1,190129208 | 0,014632465 |  |
| 11 | 1,203508131 | 0,013378923 |  |
| 12 | 1,215629482 | 0,012121351 |  |
| 13 | 1,226514903 | 0,010885422 |  |
| 14 | 1,236208637 | 0,009693734 |  |
| 15 | 1,244773396 | 0,008564759 |  |
| 16 | 1,252285692 | 0,007512296 |  |
| 17 | 1,258831091 | 0,006545399 |  |
| 18 | 1,264499813 | 0,005668721 |  |
| 19 | 1,269382925 | 0,004883113 |  |
| 20 | 1,273569306 | 0,004186381 |  |
| 21 | 1,277143379 | 0,003574073 |  |
| 22 | 1,280183597 | 0,003040217 |  |
| 23 | 1,282761549 | 0,002577952 |  |
| 24 | 1,284941592 | 0,002180043 |  |
| 25 | 1,286780857 | 0,001839266 |  |
| 26 | 1,288329538 | 0,001548681 |  |
| 27 | 1,289631346 | 0,001301808 |  |
| 28 | 1,290724071 | 0,001092726 |  |
| 29 | **1,291640189** | **0,000916118** |  |

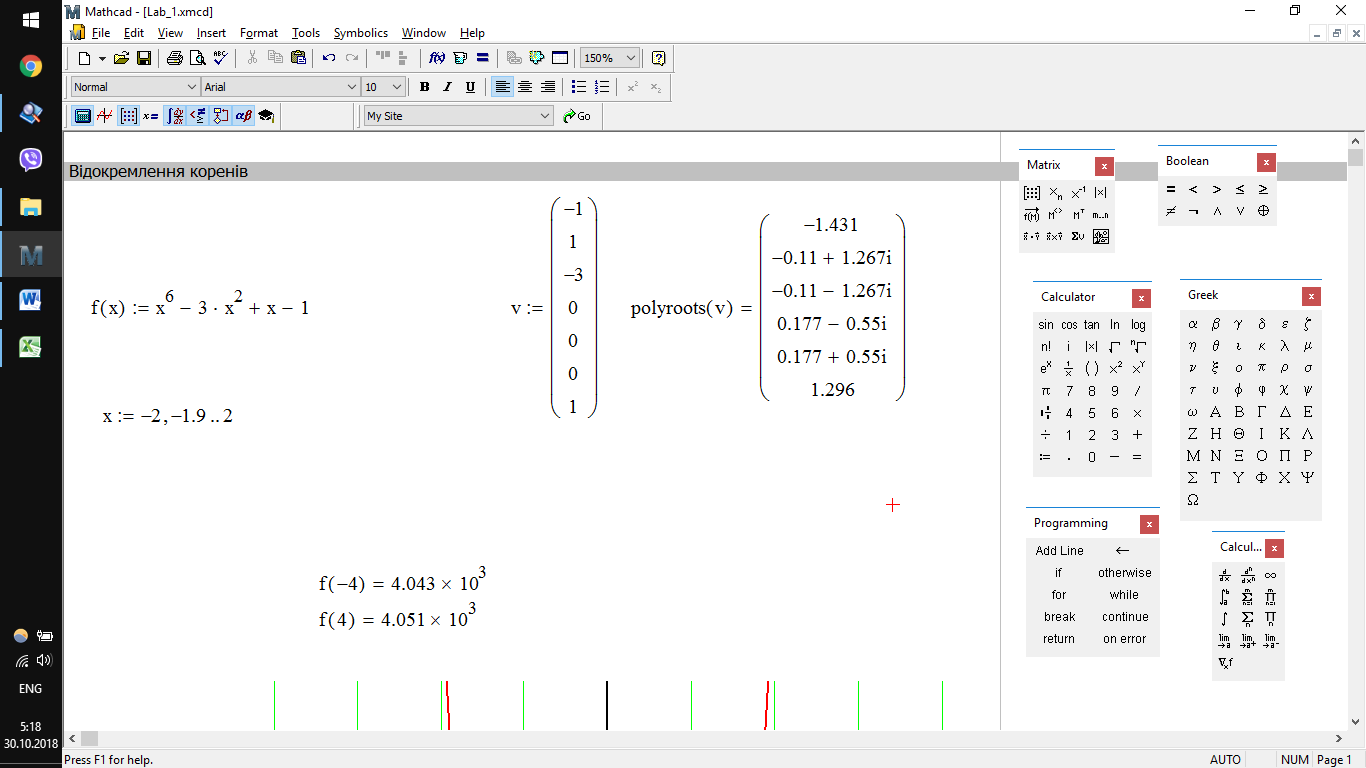
Таким чином, задана точність наближення досягнута на 30-ій ітерації і

*.*

Заповнимо зведену порівняльну таблицю:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№* | *Метод* | *Отримане наближене значення кореня* | *Кількість ітерацій* |
| 1 | Дихотомії  (половинного ділення) | 1.296386719 | 11 |
| 2 | Хорд | 1,292306714 | 23 |
| 3 | Ньютона (дотичних) | 1,296294482 | 7 |
| 4 | Комбінований | 1,296221912 | 6 |
| 5 | Простої ітерації | 1,291640189 | 30 |

Виконаємо перевірку з використанням функції **polyroots** з пакету **MathCad**. Для цього створимо вектор-стовпець *v* коефіцієнтів функції (починаючи від і завершуючи ) і викличемо функцію **polyroots(** *v* **)**.



***Висновки:*** найшвидше задану точність наближення досягнуто з допомогою комбінованого методу (6 ітерацій); найдовший процес – метод простої ітерації (30 ітерацій).