Aufgabenblatt 10

Inverse Matrix und Determinante

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A (kontrollieren Sie ihr Ergebnis) und die Determinanten von C und D.

$$A := \begin{bmatrix} 2\,i & i & i \\ 1 & 2\,i & i \\ 2 & 2\,i & i \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 2 & 3\,i & i+4 & 1 \\ 1 & i & -2\,i & -i \\ 0 & -i & 2\,i & 1 \\ i & 3 & 9\,i & 0 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} i & 0 & 1 & 2 & 2\,i \\ 3 & 2 & 0 & 0 & i \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 3\,i \end{bmatrix}.$$

Sie können die Inverse von A natürlich mit Hilfe des erweiterten GAUSS-Verfahrens berechnen, allerdings wird das bei einer komplexen Matrix schnell recht mühsam. Für den Spezialfall einer 3×3-Matrix gibt es dafür eine Alternative. Dafür bestimmt man aus den *Zeilen*vektoren $\mathbf{a}_1 = [2\,i, i, i]$, $\mathbf{a}_2 = [1, 2\,i, i]$ und $\mathbf{a}_3 = [2, 2\,i, i]$ von A die drei Kreuzprodukte $\mathbf{a}_2^t \times \mathbf{a}_3^t$, $\mathbf{a}_3^t \times \mathbf{a}_1^t$ und $\mathbf{a}_1^t \times \mathbf{a}_2^t$ (das sind jetzt *Spalten*vektoren). Dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[\mathbf{a}_2^t \times \mathbf{a}_3^t,\, \mathbf{a}_3^t \times \mathbf{a}_1^t,\, \mathbf{a}_1^t \times \mathbf{a}_2^t \right].$$

Da man die Kreuzprodukte schon bestimmt hat, kann man $\det(A)$ einfach über $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1^t \times \mathbf{a}_2^t$ berechnen.

Drehmatrix

Zeigen Sie mit Hilfe der Skizze, daß sich eine Drehung um den Winkel φ, mit einer Drehachse, die durch den normierten Richtungsvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist, durch die Drehmatrix $D_{\mathbf{n}}(\varphi)$ beschreiben läßt:

$$D_{\mathbf{n}}(\varphi) = P_{\mathbf{n}} + (\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}}) \cos(\varphi) + R_{\mathbf{n}} \sin(\varphi)\,.$$

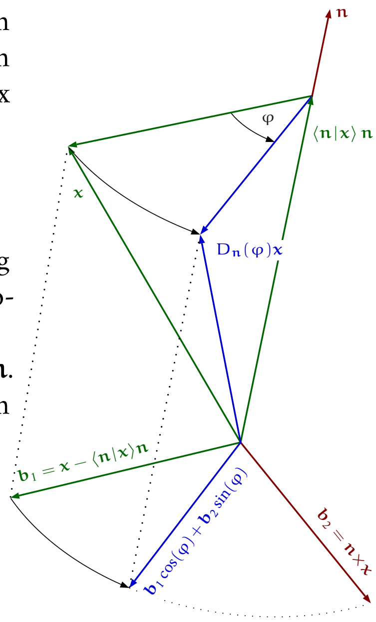
Dabei ist $P_{\mathbf{n}}$ die eindimensionale Projektion auf die Richtung $\mathbf{n}$, also $P_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \langle \mathbf{n} | \mathbf{x} \rangle \mathbf{n}$, und $R_{\mathbf{n}}$ die Matrix, die zum Kreuzprodukt mit $\mathbf{n}$ gehört: $R_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \mathbf{n} \times \mathbf{x}$.

1. Zeigen Sie $\|\mathbf{b}_1\| = \|\mathbf{b}_2\|$, $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{n}$. Folgern Sie daraus, daß $\mathbf{b}_1 \cos(\varphi) + \mathbf{b}_2 \sin(\varphi)$ der um den Winkel φ in Richtung $\mathbf{b}_2$ gedrehte Vektor $\mathbf{b}_1$ ist.

2. Entnehmen Sie der Skizze

$$D_{\mathbf{n}}(\varphi)\mathbf{x} = P_{\mathbf{n}}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \cos(\varphi) + \mathbf{b}_2 \sin(\varphi)$$

und folgern Sie daraus die Behauptung.



Drehung

Drehen Sie den Vektor $\mathbf{x} := \frac{1}{14}[5+9\sqrt{3}, -4+4\sqrt{3}, 29-\sqrt{3}]^t$ um den Vektor $\mathbf{n} := \frac{1}{7}[2, -3, 6]^t$ gegen den Uhrzeigersinn um $\frac{\pi}{3}$. Bestimmen Sie zur Kontrolle die Länge von $\mathbf{x}'$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektorbasis $\mathcal{B} := \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \}$ der Matrix

$$F := \begin{bmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse, indem Sie B^*FB für $B := [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ berechnen.

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms kann geraten werden.

Quadrik

Untersuchen Sie die folgende Quadrik:

$$\mathcal{Q}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 180\,x^2 - 84\,xy + 145\,y^2 - \sqrt{13}\,(84x + 334y) + 1261 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie auch die Brennpunkte.

(Für die, die das schon gelernt haben.)