Wiederholklausur II zur Analysis 2022

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display und ohne Computeralgebrasystem.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen: 20 P)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 144\,x^2 - 120xy + 25\,y^2 + 546x - 1326y + 507 = 0 \right\}.$$

Stellen Sie die Gleichung der Quadrik in der Form $\langle x \,|\, Ax \rangle + \langle \mathbf{b} \,|\, x \rangle + c = 0$ dar.

Eigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten $\lambda_1 := 0$ und $\lambda_2 := 169$ sind $[5, 12]^t$ bzw. $[-12, 5]^t$ *(das darf ungeprüft verwendet werden).*

Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q und berechnen Sie alle ihre Bestimmungsstücke. (12 P)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (8 P)

Aufgabe 2 (6 P, 7 P, 7 P, 5 P zusammen: 25 P)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

i) $$\left(\tan\left(\frac{4n^2\pi}{4n+4} - \frac{3n^2\pi}{3n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ii) $$\left(\left(e^{n+\sqrt{n^2-1}}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

iii) $$\left(\tfrac{1}{2n}\ln\left(4n^6 + 2e^{2n} + \arctan(n^2)e^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

iv) $$\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)

i) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die folgende Funktion durch (20 P)

$$f(x) \coloneqq \frac{4x^2}{(x-1)^2}.$$

Bestätigen Sie:

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x-1)^3}, \qquad f''(x) = 8\,\frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Finden Sie alle Tangenten von f, die den Punkt $P \coloneqq [1, 0]$ enthalten.
Kontrollergebnis: Eine Tangente hat die Gleichung $t(x) = -\frac{16}{27}(x-1)$.

ii) Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

Aufgabe 4 (6 P, 6 P, 8 P zusammen: 20 P)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{x^{1.5}} + x\sinh(x^2) + \frac{1}{\sqrt{5x^2-5}} + \tanh(2x) \right) dx$ **ii)** $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx$

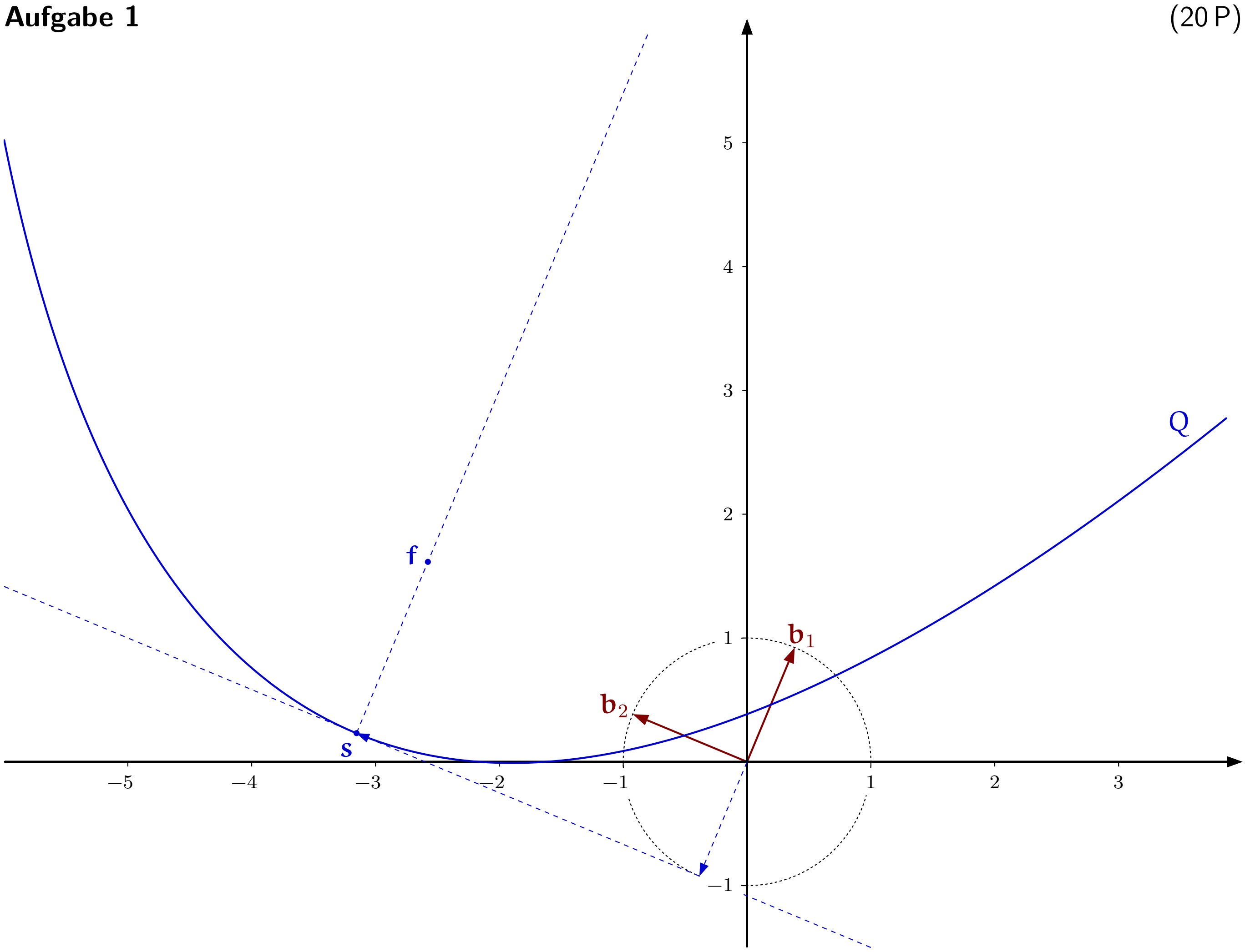
iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\frac{x}{3}} \cos(3x)\,dx$

Aufgabe 5 (10 P)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{\binom{2k}{k}} z^k$.

Lösungen

Aufgabe 1 (20 P)



+8

Da ein Eigenwert Null ist, handelt es sich bei Q um eine Parabel. Ihre Gleichung lautet

$$\left\langle \boldsymbol{x} \,\middle|\, \begin{bmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \right\rangle + 78 \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ -17 \end{bmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \right\rangle + 507 = 0,$$ +2

mit $\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Also ist $A := \begin{bmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} := 78 \begin{bmatrix} 7 \\ -17 \end{bmatrix}$ und $c := 507$.

$\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}, \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine ONB aus Eigenvektoren für die Matrix A zu den Eigenwerten 0 und 169. Daher ist $B := \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix und $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = B^* \boldsymbol{x}$. Es gilt

$$\mathbf{b}_{\mathcal{B}} := 6B^* \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -17 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -169 \\ -169 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad A_{\mathcal{B}} := B^* A B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 169 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ +2

Die transformierte Gleichung lautet also

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \,|\, A_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle + c \\ &= 169\,\tilde{y}^2 - 6 \cdot 169\,\tilde{x} - 6 \cdot 169\,\tilde{y} + 3 \cdot 169 \\ &= 169\big(\tilde{y}^2 - 6\,\tilde{y} + 9\big) - 6 \cdot 169\,\tilde{x} - 9 \cdot 169 + 3 \cdot 169 \\ &= 169\big[(\tilde{y} - 3)^2 - 6(\tilde{x} + 1)\big]. \end{aligned}$$ +6

Damit handelt es sich bei Q um eine Parabel mit Scheitel bei $\mathbf{s} := -\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -41 \\ 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3.154 \\ 0.231 \end{bmatrix}$ und +1

Symmetrieachse in Richtung $\mathbf{b}_1$. $p = 3$, d. h. der Brennpunkt ist bei $\mathbf{f} := \mathbf{s} + \frac{3}{2}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -67 \\ 42 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.577 \\ 1.615 \end{bmatrix}$. +1

Aufgabe 2 (6 P, 7 P, 7 P, 5 P)

i) $$\tan\Big(\frac{4n^2\pi}{4n+4} - \frac{3n^2\pi}{3n+1}\Big) = \tan\Big(\frac{4n^2(3n+1) - 3n^2(4n+4)}{4(n+1)(3n+1)}\pi\Big) = \tan\Big(\frac{12n^3 + 4n^2 - 12n^3 - 12n^2}{4(n+1)(3n+1)}\pi\Big)$$
$$= \tan\Big(\frac{-2n^2\pi}{n^2(1+\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})}\Big) = \tan\Big(\frac{-2\pi}{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{1}{n})}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} \tan\Big(\frac{-2\pi}{3}\Big) = \sqrt{3},$$ +4

denn $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Daher konvergiert der Nenner im Bruch des letzten Ausdrucks nach der Summen- und Produktregel konvergenter Folgen gegen 3, und nach der Quotientenregel der Bruch gegen +1
$-\frac{2\pi}{3}$. Wegen der Stetigkeit der Tangens-Funktion, konvergiert die Folge gegen $\tan(-\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}$. (6 P) +1

ii) $$\Big(e^{n+\sqrt{n^2-1}}\Big)^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{2n}} = e^{\frac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{2n}} = e^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} e,$$ +5

denn wegen der Stetigkeit der Wurzel konvergieren $\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$ gegen 1 und, wegen der Summenregel kon- +1
vergenter Folgen das Argument der Exponentialfunktion gegen 1. Die Stetigkeit der e-Funktion zeigt dann +1
die Konvergenz gegen e. (7 P)

iii) $\frac{1}{2n}\ln\big(4n^6 + 2e^{2n} + \arctan(n^2)e^n\big) = \ln\big(\sqrt[2n]{4n^6 + 2e^{2n} + \arctan(n^2)e^n}\big)$

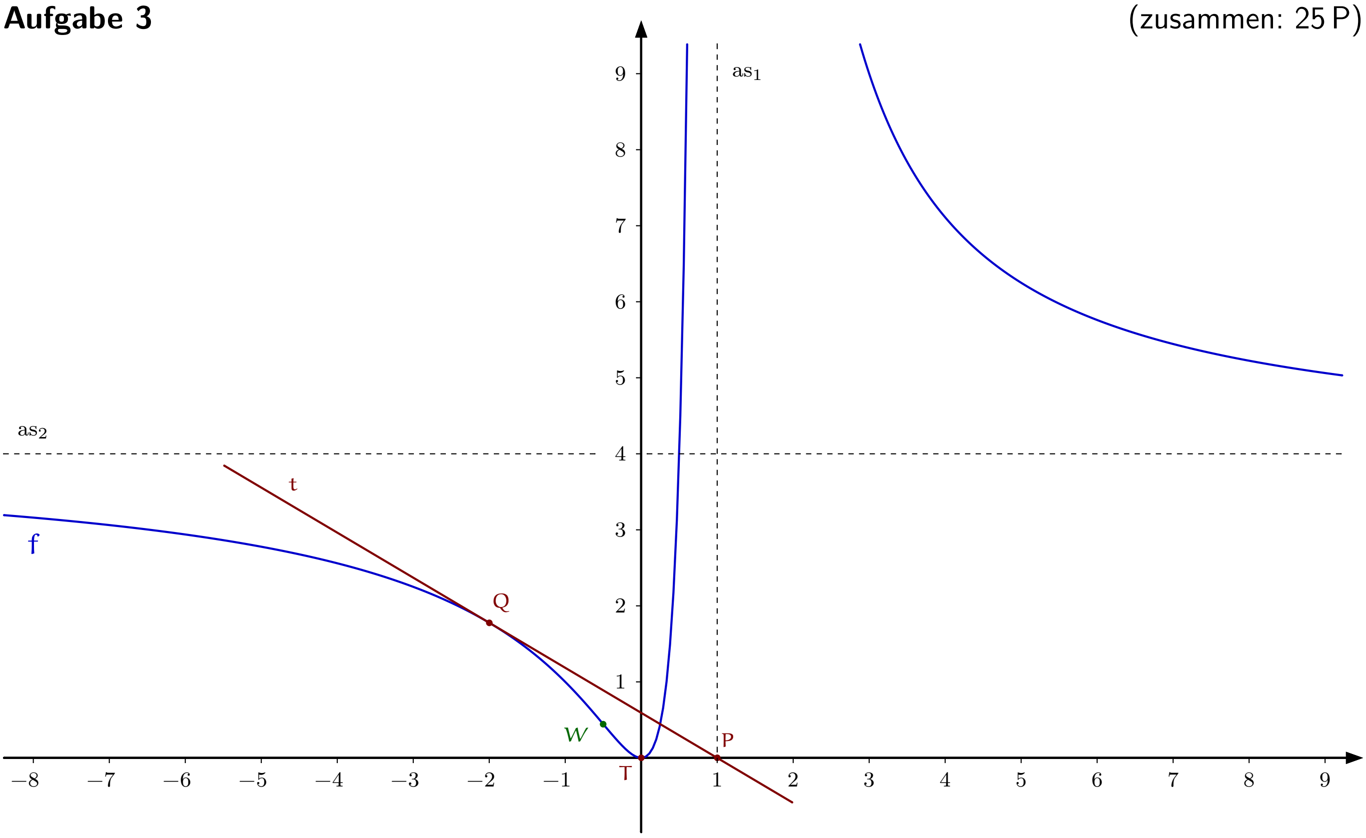
$$\sqrt[2n]{4n^6 + 2e^{2n} + \arctan(n^2)e^n} = \sqrt[2n]{e^{2n}\Big(\frac{4n^6}{e^{2n}} + 2 + \frac{\arctan(n^2)}{e^n}\Big)} = e\,\sqrt[2n]{\frac{4n^6}{e^{2n}} + 2 + \frac{\arctan(n^2)}{e^n}} \xrightarrow{n\to\infty} e,$$ +4

denn $\frac{4n^6}{e^{2n}}$ und $\frac{\arctan(n^2)}{e^n}$ sind Nullfolgen, $(0 < \arctan(n^2) < \frac{\pi}{2})$ so daß der Ausdruck unter dem letzten +1
Wurzelausdruck gegen 2 konvergiert. Nach einem Satz der Vorlesung konvergieren diese Wurzeln gegen +1
1, woraus das Ergebnis unmittelbar folgt. Aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus hat die Folge also den
Grenzwert $\ln(e) = 1$. (7 P) +1

Alternativ: $\frac{1}{2n}\ln\big(4n^6 + 2e^{2n} + \arctan(n^2)e^n\big) = \frac{1}{2n}\ln\big(e^{2n}\big(\frac{4n^6}{e^{2n}} + 2 + \frac{\arctan(n^2)}{e^n}\big)\big)$
$= 1 + \frac{1}{2n}\ln\big(\frac{4n^6}{e^{2n}} + 2 + \frac{\arctan(n^2)}{e^n}\big) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$

iv) $a_n := \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n^2}$ bestimmt eine Teilfolge der bekannten Folge $\Big(\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen e konvergiert +2
(die Auswahlfolge besteht aus den Quadratzahlen). Als Teilfolge ist sie ebenfalls konvergent, mit demselben +2
Grenzwert e. Da die ln-Funktion stetig ist, konvergiert die Folge $\ln(a_n)$ gegen $\ln(e) = 1$. (5 P) +1

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)



+5

$$f(x) = \frac{4x^2}{(x-1)^2}, \qquad f'(x) = 4\,\frac{2x(x-1)^2 - 2x^2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{8x}{(x-1)^3},$$ +2
$$f''(x) = -8\,\frac{(x-1)^3 - 3x(x-1)^2}{(x-1)^6} = -8\,\frac{x-1-3x}{(x-1)^4} = 8\,\frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die einzige Nullstelle liegt bei $[0, 0]$. Hier ist auch der einzige Kandidat für eine Extremstelle zu finden, denn $f'(x) = 0$ führt auf die einzige Lösung $x = 0$. Wegen $f''(0) = 8 > 0$ handelt es sich um ein lokales, da $f(x)$ außer in $x = 0$ überall positiv ist, sogar um ein globales Minimum von f: $T := [0, 0]$. +1 +2

WENDEPUNKTE: $f''(x) = 0$ hat die einzige Lösung $x = -\frac{1}{2}$, mit dem Funktionswert $f(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{9} \approx 0.44$. Identifikation durch VZW von f'': $f''(-1) = -\frac{8}{2^4} = -\frac{1}{2} < 0$ und $f''(0) = 8 > 0$ ist ein VZW von f'' an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$. Deshalb liegt hier ein Wendepunkt: $W := \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right]$. +3

ASYMPTOTEN: An der Stelle $x = 1$ hat f einen Pol ohne Vorzeichenwechsel, denn $f(\frac{1}{2}) = 4 > 0$ und $f(2) = 16 > 0$. $\mathrm{as}_1 : x = 1$ ist also eine senkrechte Asymptote von f. Wegen $f(x) = \frac{4x^2}{x^2(1-\frac{1}{x})^2} = \frac{4}{(1-\frac{1}{x})^2} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 4$, +1
handelt es sich bei $\mathrm{as}_2(x) := 4$ um eine waagrechte Asymptote von f. +2

TANGENTEN: Die Tangente $t(x) = f(u) + f'(u)(x - u)$ soll den Punkt $P = [1, 0]$ enthalten:

$$0 = \frac{4u^2}{(u-1)^2} - \frac{8u}{(u-1)^3}(1-u) = \frac{4u^2}{(u-1)^2} + \frac{8u}{(u-1)^2} = \frac{4u(u+2)}{(u-1)^2}$$ +4

Die offensichtlichen Lösungen sind $u_1 = 0$ und $u_2 = -2$. Zur ersten gehört natürlich die x-Achse als waagrechte Tangente, mit dem Berührpunkt T. +1

Die zweite Tangente hat den Berührpunkt $Q := \left[-2, \frac{16}{9}\right] \approx [-2, 1.78]$ und die Gleichung

$$t(x) := \frac{16}{9} - \frac{16}{27}(x+2) = -\frac{16}{27}(x-1).$$ +2

Aufgabe 4 (6 P, 6 P, 8 P)

i)

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{1}{x^{1.5}}+x\sinh(x^2)+\frac{1}{\sqrt{5x^2-5}}+\tanh(2x)\right)dx$$
$$=\int\left((1+2x)^{-\frac{1}{2}}+x^{-1.5}+\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dx}\cosh(x^2)+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\tfrac{1}{2}\frac{2\sinh(2x)}{\cosh(2x)}\right)dx$$
$$=\sqrt{1+2x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\tfrac{1}{2}\cosh(x^2)+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}(x)+\tfrac{1}{2}\ln\big(\cosh(2x)\big).$$

ii)

$$\int\arctan(x)\,dx=x\arctan(x)-\tfrac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=x\arctan(x)-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

iii)

$$\int e^{\frac{x}{3}}\cos(3x)\,dx=3e^{\frac{x}{3}}\cos(3x)-9\int e^{\frac{x}{3}}\sin(3x)\,dx$$
$$=3e^{\frac{x}{3}}\cos(3x)+27e^{\frac{x}{3}}\sin(3x)-81\int e^{\frac{x}{3}}\cos(3x)\,dx \quad\Rightarrow \qquad +6$$
$$\int_0^\pi e^{\frac{x}{3}}\cos(3x)\,dx=\tfrac{3}{82}\Big[\big(\cos(3x)+9\sin(3x)\big)e^{\frac{x}{3}}\Big]_0^\pi=\tfrac{3}{82}\big(\cos(3\pi)\,e^{\frac{\pi}{3}}-1\big)=-\tfrac{3}{82}\big(e^{\frac{\pi}{3}}+1\big)\approx-0.14. \qquad +2$$

Aufgabe 5 (10 P)

Für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+1}{\binom{2k}{k}}z^k$ versuchen wir das Quotientenkriterium:

$$\frac{(k+1)^2+1}{k^2+1}\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{2k+2}{k+1}}=\frac{k^2\big((1+\frac{1}{k})^2+\frac{1}{k^2}\big)}{k^2\big(1+\frac{1}{k^2}\big)}\frac{(2k)!(k+1)!^2}{(2k+2)!k!^2}=\frac{(1+\frac{1}{k})^2+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2}}\frac{(2k)!(k+1)^2k!^2}{2(k+1)(2k+1)(2k)!k!^2} \qquad +7$$
$$=\frac{(1+\frac{1}{k})^2+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2}}\frac{k+1}{4k+2}=\frac{(1+\frac{1}{k})^2+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2}}\frac{1+\frac{1}{k}}{4+\frac{2}{k}}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{4},$$

denn nach den Rechenregeln konvergenter Folgen strebt der Zähler und der Nenner des ersten Bruchs gegen 1, der Zähler des zweiten ebenfalls gegen 1 und der Nenner gegen 4, so daß der Grenzwert aus der Quotienten- und der Produktregel folgt. Der Konvergenzradius ist $R=4$. $+1$ $+2$