Aufgabenblatt 16

Funktionen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich, falls er nicht angegeben ist und finden Sie alle Asymptoten, sofern welche vorhanden sind.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} & , x \neq 0, \\ a & , x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \sqrt{x^2+x} - x,$$

$$h(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0, \\ b & , x = 0, \end{cases} \qquad k(x) := \frac{1-\cos(x)}{1+\sin(x)}.$$

Hinweise: Eine der Asymptoten von g, nämlich die für $x \to -\infty$, hat die Gleichung $-2x - \frac{1}{2}$. Sie dürfen ungeprüft die Stetigkeit der $\exp$-Funktion $\exp(x) =: e^x$ voraussetzen und ihren Kurvenverlauf gemäß der Skizze (s. u.). Die unbekannten Konstanten a und b sollen Sie so bestimmen, daß die Funktionen möglichst stetig werden.

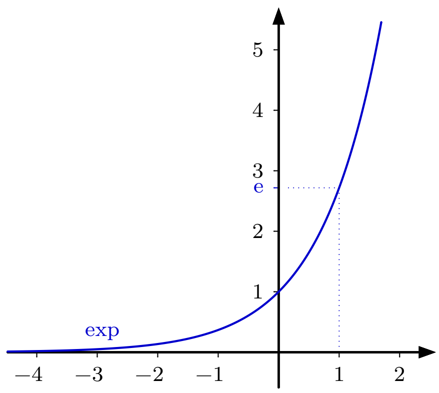
Stetig oder nicht stetig?

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit. Welche Stelle könnte von besonderem Interesse sein? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Asymptoten und fertigen Sie eine sorgfältige Skizze an.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)} & , x \neq 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases}$$

Verfahren Sie ebenso mit der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+\exp\left(\frac{x}{|1-x|}\right)} & , x \neq 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases}$$



Hinweis: Hier geht es um das qualitative Verständnis der Funktionen. Sie müssen keine Untersuchung auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte durchführen, wenn Sie es vermeiden können.
Natürlich geht es bei der Stetigkeit nur um die Stelle $x = 1$. Untersuchen Sie das Verhalten der beiden Funktionen, wenn x von links gegen 1 strebt, dafür hat sich die Schreibweise $x \to 1^-$ eingebürgert, und wenn x von rechts gegen 1 strebt, also $x \to 1^+$.
Sie müssen also untersuchen, ob $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ gilt, entsprechend für g.

Kurvendiskussion

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{72}\left(3\,x^5 - 50\,x^3 + 135\,x + 216\right)$$

durch. f hat zwei Nullstellen, wobei es sich bei einer von beiden um eine doppelte handelt (die daher automatisch ein lokales Maximum oder Minimum von f bedeutet). Eine läßt sich raten, die andere läßt sich nach zweimaliger Polynomdivision als Lösung einer kubischen Gleichung mit Hilfe der Cardanischen Formeln finden (in der Nähe von -4). Fügen Sie eine sorgfältige Skizze an.

Diese Aufgabe ist dafür gedacht, daß Sie schon einmal die Reste Ihres Schulwissens über den Ablauf einer Kurvendiskussion aktivieren (bevor wir sie nächste Woche systematisch behandeln).

Fertigkeiten, an die Sie sich dabei erinnern sollten:

i) *Wie rät man systematisch Nullstellen von f? Hat das etwas mit den Teilern von 216 zu tun?*

ii) *Wie verringert man den Grad von f, wenn man eine Nullstelle gefunden hat? Möglicherweise durch Polynomdivision? Wie ging die noch mal genau?*

iii) *Versuchen Sie sich davon abzuhalten, den Vorfaktor $\frac{1}{72}$ in die Klammer hineinzumultiplizieren. Machen Sie das nur, wenn Sie Freude an unübersichtlichen Rechnungen haben.*

Nullstellen

Bestimmen sie für die Funktion

$$p(x) := x^7 - 5.3\,x^6 + 10.3\,x^5 - 11.066\,x^4 + 10.22\,x^3 - 6.2896\,x^2 + 0.92\,x - 0.5236$$

mit dem Intervallteilungsverfahren eine Nullstelle im Intervall $[1.2, 2.25]$. Fertigen Sie eine Skizze an und tragen Sie die Näherungspunkte ein. Was fällt Ihnen auf?

Bemerkung: Es handelt sich um das Verfahren, das im Beweis des Zwischenwertsatzes zum Nachweis einer Nullstelle verwendet wurde.

Zwischenwertsatz

Für $a < b$ sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß es dann eine Stelle $x \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f(x) = x$ geben muß. Machen Sie sich die Situation an einer Skizze klar.

Wenn Ihnen das zu abstrakt vorkommt, stellen Sie sich ein quadratisches Spielfeld $[a, b] \times [a, b]$ vor. Sie stehen irgendwo an der linken Begrenzung und wollen das Feld überqueren, um an die rechte Begrenzung zu gelangen.

Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - x$ und bestimmen Sie ihre Werte an den Randpunkten – was fällt dabei auf?