Aufgabenblatt 9

Inverse Matrix

Existiert die Inverse der linearen Abbildung, die durch die Matrix

$$A \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

definiert ist? Berechnen Sie sie gegebenenfalls und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Kern und Bild

Bestimmen Sie $\ker B$ für die lineare Abbildung

$$B \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & -11 & 1 & 19 & 5 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis für $\ker B$ an. Welche Dimension hat $\operatorname{im} B$?

Teilräume

V und W seien Vektorräume über $\mathbb{R}$ und X, Y seien Teilmengen von V oder W. Geben Sie in den folgenden Beispielen an, ob es sich bei X bzw. Y um einen Teilraum handelt. Begründen Sie Ihre Überlegungen.

i) $V \coloneqq \mathbb{R}^3$, $X \coloneqq \left\{ [x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 1 \right\}$,

$$Y \coloneqq \left\{ [x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 0 \wedge 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

ii) $V \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei der Vektorraum aller reellen Polynome.

$$X \coloneqq \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid p'(1) = 0 \}, Y \coloneqq \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid p'(1) = 1 \}.$$

iii) $V \coloneqq \mathbb{R}^4$, $X \coloneqq \left\{ [w, x, y, z]^t \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, |2w - x - 2y + z| > 0 \right\}$,

$$Y \coloneqq \left\{ [w, x, y, z]^t \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

iv) $\mathcal{A} : V \to W$ sei eine lineare Abbildung.

$$X \coloneqq \ker \mathcal{A} = \{ \mathbf{x} \in V \mid \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \}, Y \coloneqq \operatorname{im} \mathcal{A} = \{ \mathbf{y} \in W \mid \exists_{x \in V}\ \mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} \}.$$

Sie haben nur die Teilraumbedingung $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X(Y) \Rightarrow \forall_{s,t \in \mathbb{R}}\ s\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in X(Y)$ *nachzuprüfen.*

Drehung und Koordinatentransformation

Drehen Sie den Vektor $\mathbf{x} \coloneqq [2, 1, 8]^t$ um den Vektor $\mathbf{n} \sim [2, -3, 6]^t$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $\frac{\pi}{6}$. Gehen Sie dabei nach folgendem Schema vor:

i) Bilden Sie aus $\mathbf{n}$ und $\mathbf{b} \coloneqq [13, 12, 18]^t$ die Orthogonalbasis $\left\{ \mathbf{n}, \|\mathbf{n}\|^2\mathbf{b} - \langle \mathbf{n} | \mathbf{b} \rangle \mathbf{n}, \mathbf{n} \times \mathbf{b} \right\}$ und normieren Sie diese zu einer ONB $\mathcal{B} \coloneqq \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \}$.

ii) Berechnen Sie den gedrehten Vektor $\mathbf{x}'$ gemäß

$$\mathbf{x}' = \mathrm{B}\,\mathrm{D}_{1,\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{B}^t\,\mathbf{x}.$$

Kontrollieren Sie $\|\mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}\|$.

Berechnen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$. Erklären Sie das Ergebnis an einer Skizze.

iii) Führen Sie dieselbe Drehung mit Hilfe der Drehmatrix

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n},\alpha} = \mathrm{P}_{\mathbf{n}} + \cos(\alpha)(\mathbb{1} - \mathrm{P}_{\mathbf{n}}) + \sin(\alpha)\mathrm{R}_{\mathbf{n}}$$

durch ($\mathbf{n} = \frac{1}{7}[2, -3, 6]^t$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$).
Die Bestätigung dieser Formel verschieben wir auf das nächste Aufgabenblatt.

Formeln für das Kreuzprodukt

Erinnern Sie sich an die Projektion $\mathrm{P}_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \langle \mathbf{n}|\mathbf{x}\rangle\mathbf{n}$ auf die Richtung $\mathbf{n}$ ($\|\mathbf{n}\| = 1$) und machen Sie sich klar, daß folgendes gilt:

$$\mathrm{P}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\mathbf{n}^t = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie für die lineare Abbildung $\mathrm{R}_{\mathbf{d}}\mathbf{x} := \mathbf{d}\times\mathbf{x}$ das Ergebnis

$$\mathrm{R}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

aus dem letzten Aufgabenblatt und zeigen Sie damit

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^t - \mathbf{a}\mathbf{b}^t.$$

Nutzen Sie diese Beziehung, um mittels $\mathrm{R}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\,\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ die sog. Grassmann-Identität

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \langle \mathbf{a}|\mathbf{c}\rangle\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle\mathbf{a} \qquad (*)$$

zu zeigen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Damit können Sie Lagranges Identität

$$\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}|\mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle = \langle \mathbf{a}|\mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{b}|\mathbf{d}\rangle - \langle \mathbf{a}|\mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle = \det\begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}|\mathbf{c}\rangle & \langle \mathbf{a}|\mathbf{d}\rangle \\ \langle \mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle & \langle \mathbf{b}|\mathbf{d}\rangle \end{bmatrix}$$

gewinnen. Starten Sie dabei mit $\langle (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}|\mathbf{d}\rangle$ und verwenden Sie anschließend die Rechenregeln des Spatprodukts (also der Determinante), um $\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}|\mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle$ zu erhalten.

Schließlich können Sie noch

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\,\mathbf{b} - \det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\,\mathbf{a}$$

aus $(*)$ folgern.