# Nachklausur zur Analysis **2018**

(Dozent: Hellmich)

---

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

---

**Aufgabe 1** (10 P)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge komplexer Zahlen. Geben Sie den Unterschied zwischen dem Begriff *Häufungspunkt* und dem Begriff *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Was besagt der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS? Geben Sie beide Versionen dieses Satzes wieder.

**Aufgabe 2** (8, 8, 8, 6 P)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

**i)** $\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{1+n^2}} - \dfrac{n^2}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **ii)** $\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**iii)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{9n^2+n}-3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **iv)** $\left(n^2\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe 3** (zusammen: 25 P)

**i)** Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion (20 P)

$$f(x) := e^{1-x} - e^{-2x}$$

durch. Zeigen Sie dafür

$$f'(x) = e^{-x}(2e^{-x} - e)\,, \qquad f''(x) = e^{-x}(e - 4e^{-x})\,.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die $f$ und die Tangente $t$ an $f$ im Punkt $[-1, 0]$ mit der $y$-Achse einschließen.

**ii)** Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

**Aufgabe 4** (5, 10 P)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

**i)** $$\int \left( \frac{4}{\sqrt[5]{x}} - \frac{2}{x^{1.5}} + \tanh(x) + \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$ **ii)** $$\int_0^{\ln(3)} e^{-2x} \sinh(x)\, dx$$

**Aufgabe 5** (10 P)

Gegeben ist die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \ln\left(1 + xe^{2x}\right), & x > 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $c$ so, daß sie stetig wird. Bestimmen Sie ihre waagrechte Asymptote.

**Aufgabe 6** (10 P)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{2k} z^{k+1}$$

# Lösungen

### Aufgabe 1 (10 P)

Für den Grenzwert $a$ einer Folge $(a_n)_{n\in bbN}$ müssen in jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a) := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |a-z| < \varepsilon \,\}$ von $a$ fast alle Folgenglieder liegen, d. h., es gibt nur endlich viele Folgenglieder außerhalb $U_\varepsilon(a)$. Für einen Häufungspunkt $a$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ müssen in jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder liegen, aber außerhalb können sich durchaus ebenfalls unendlich viele aufhalten. $+6$

Der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS:

1. Version: Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ hat wenigstens einen Häufungspunkt. $+2$

2. Version: Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ hat wenigstens eine konvergente Teilfolge. $+2$

### Aufgabe 2 (8, 8, 8, 6 P)

**i)**

$$\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{1+n^2}} - \frac{n^2}{1+n} = \frac{1}{\frac{1+n^2+2n}{n+n^3}} - \frac{n^2}{1+n} = \frac{n+n^3}{(1+n)^2} - \frac{n^2+n^3}{(1+n)^2} = \frac{n-n^2}{(1+n)^2}$$
$$= \frac{n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}-1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} -1, \qquad +6$$

denn $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Daher konvergiert der Zähler nach der Summenregel konvergenter Folgen gegen $-1$, der Nenner wegen der Produktregel gegen $1$ und wegen der Quotientenregel der Bruch gegen $-1$. $+2$ (8 P)

**ii)**

$$n^2 \ln\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(e) = 1, \qquad +4$$

denn laut Vorlesung konvergiert $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für $m\to\infty$ gegen $e$. $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der konvergenten Folge $\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ (die Indexfolge besteht aus allen Quadratzahlen) und hat daher denselben Grenzwert. Aufgrund der Stetigkeit der $\ln$-Funktion konvergiert $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)$ gegen $\ln(e) = 1$. $+4$ (8 P)

**iii)**

$$\frac{1}{\sqrt{9n^2+n}-3n} = \frac{\sqrt{9n^2+n}+3n}{\left(\sqrt{9n^2+n}+3n\right)\left(\sqrt{9n^2+n}-3n\right)} = \frac{\sqrt{9n^2+n}+3n}{9n^2+n-9n^2}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sqrt{9n^2+n}+3n\right) = \sqrt{9+\tfrac{1}{n}}+3 \xrightarrow{n\to\infty} 6, \qquad +6$$

denn $9+\frac{1}{n}$ konvergiert gegen $9$ und, wegen der Stetigkeit der Wurzel, $\sqrt{9+\frac{1}{n}}$ gegen $\sqrt{9} = 3$. $+2$
Die Summenregel für konvergente Folgen zeigt dann das Ergebnis. (8 P)

**iv)**

+3
$$n^2\sin^2\left(\tfrac{1}{n}\right)=\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2\xrightarrow{n\to\infty}1,$$

+3 denn laut Vorlesung gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. Daher gilt für jede verträgliche Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, insbesondere für $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$: $\frac{\sin(x_n)}{x_n}\xrightarrow{n\to\infty}1$. Mit Hilfe der Produktregel konvergenter Folgen erhält man das Ergebnis. (6 P)

**Aufgabe 3** (zusammen: 25 P)

**i)** (20 P)

+2
$$f(x)=e^{1-x}-e^{-2x}=e^{-x}(e-e^{-x})\,,\qquad f'(x)=-e^{1-x}+2e^{-2x}=e^{-x}(2e^{-x}-e)\,,$$
$$f''(x)=e^{1-x}-4e^{-2x}=e^{-x}(e-4e^{-x}).$$

+1 Der Definitionsbereich von $f$ ist $\mathbb{R}$. Für $x\to\infty$ hat $f$ die $x$-Achse als waagrechte Asymptote.

NULLSTELLEN $f(x)=0$ führt auf $e^{-x}=e$, also auf $x=-1$, da $e^{-x}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.
+2 Die einzige Nullstelle ist $N:=[-1,0]$.

EXTREMSTELLEN: $f'(\tilde{x})=0$ führt auf $e^{-\tilde{x}}=\frac{e}{2}$, also $\tilde{x}=-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=-\ln(e)+\ln(2)=\ln(2)-$
+4 $1\approx-0.306853$. Der Funktionswert ist $f(\tilde{x})=e^{-\tilde{x}}(e-e^{-\tilde{x}})=\frac{e}{2}(e-\frac{e}{2})=\frac{1}{4}e^2\approx 1.84726$.
Zur Identifikation berechnen wir $f''(\tilde{x})=\frac{e}{2}(e-\frac{4e}{2})=-\frac{e^2}{2}<0$. Das bedeutet, daß bei $\tilde{x}$ der Hochpunkt $H:=\left[\ln(2)-1,\frac{1}{4}e^2\right]$ liegt.

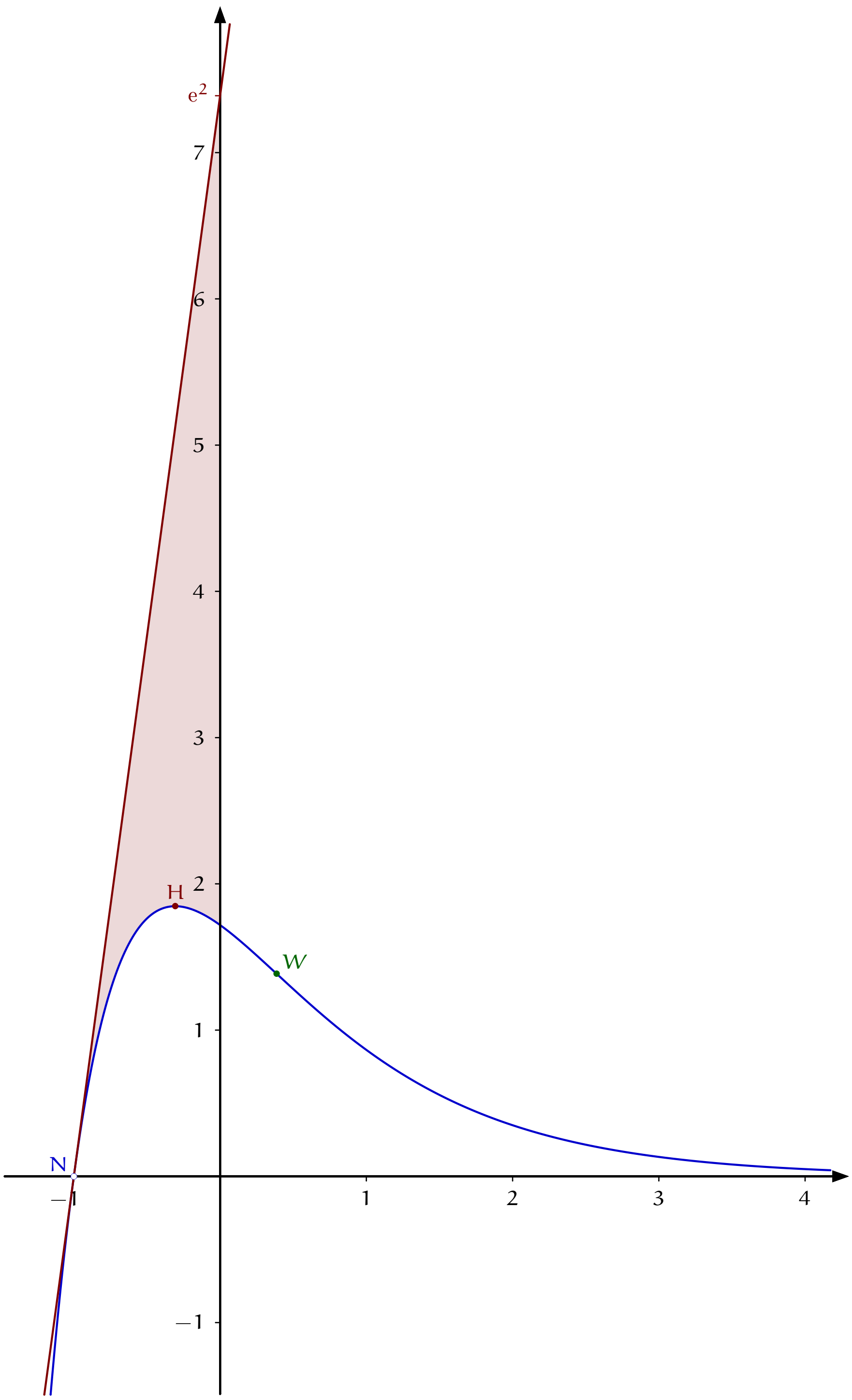
WENDEPUNKTE: $f''(\hat{x})=0$ führt auf $e^{-\hat{x}}=\frac{e}{4}$, also, wie oben, auf $\hat{x}=\ln(4)-1\approx 0.38629$. $f(\hat{x})=\frac{e}{4}(e-\frac{e}{4})=\frac{3}{16}e^2\approx 1.38545$. Da wir nur einen Kandidaten für den Wendepunkt haben,
+4 können wir beim Test mit der Vorzeichenmethode für $f''$ großzügig sein: $f''(0)=e-4<0$ und $f''(2)=e^{-2}(e-\frac{4}{e^2})>e^{-2}(e-1)>0$, denn $2<e$, also $4<e^2$ und daher $-\frac{4}{e^2}>-1$. Das zeigt den nötigen Vorzeichenwechsel, der sicherstellt, daß $W:=\left[\ln(4)-1,\frac{3}{16}e^2\right]$ ein Wendepunkt ist.

FLÄCHENINHALT: Die Tangente $t$ durch die Nullstelle $N$ hat die Gleichung $t(x)=f'(-1)(x+$
+3 $1)=e^2(x+1)$. Sie schneidet die $y$-Achse im Punkt $[0,e^2]$ und schließt daher mit den Koordinatenachsen eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{e^2}{2}$ ein. Die Fläche unter der Kurve hat den Inhalt

$$\int_{-1}^{0}(e^{1-x}-e^{-2x})\,dx=\left[\tfrac{1}{2}e^{-2x}-e^{1-x}\right]_{-1}^{0}=\tfrac{1}{2}-e-\left(\tfrac{e^2}{2}-e^2\right)=\tfrac{1}{2}-e+\tfrac{1}{2}e^2.$$

+4 Die Fläche, die $f$, die $y$-Achse und die Tangente einschließen, hat also den Flächeninhalt $\frac{e^2}{2}-\left(\frac{1}{2}-e+\frac{1}{2}e^2\right)=e-\frac{1}{2}\approx 2.218$.

**ii)** (5 P)



### Aufgabe 4

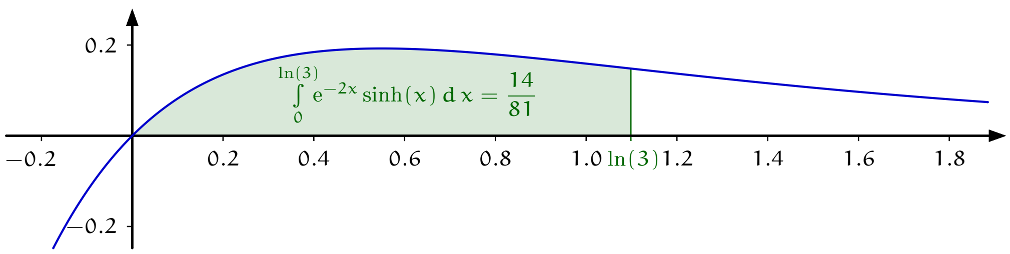
(5, 10 P)

**i)**
$$\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}}-\frac{2}{x^{1.5}}+\tanh(x)+\frac{1}{\sqrt{9-9x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$=\int\left(4x^{-\frac{1}{5}}-2x^{-\frac{3}{2}}+\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}+\tfrac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$=5\sqrt[5]{x^4}+\frac{4}{\sqrt{x}}+\ln(\cosh(x))+\tfrac{1}{3}\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}.$$

**ii)**
$$\int e^{-2x}\sinh(x)\,dx=e^{-2x}\cosh(x)+2\int e^{-2x}\cosh(x)\,dx$$
$$=e^{-2x}\cosh(x)+2e^{-2x}\sinh(x)+4\int e^{-2x}\sinh(x)\,dx \qquad \Rightarrow$$
$$\int e^{-2x}\sinh(x)\,dx=-\tfrac{1}{3}\big(\cosh(x)+2\sinh(x)\big)e^{-2x}=\tfrac{1}{6}\big(e^{-3x}-3e^{-x}\big) \qquad \Rightarrow$$
$$\int_0^{\ln(3)}e^{-2x}\sinh(x)\,dx=\tfrac{1}{6}\big(e^{-3\ln(3)}-3e^{-\ln(3)}\big)-\tfrac{1}{6}(1-3)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{e^{\ln(27)}}-\frac{3}{e^{\ln(3)}}+2\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{27}-1+2\right)=\frac{14}{81}\approx 0.173.$$

Wenn man allerdings $\sinh(x)=\frac{1}{2}\big(e^{x}-e^{-x}\big)$ weiß, wird die Sache deutlich einfacher:

$$\int_0^{\ln(3)}e^{-2x}\sinh(x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{\ln(3)}\big(e^{-x}-e^{-3x}\big)\,dx=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{3}e^{-3x}-e^{-x}\Big]_0^{\ln(3)}=\frac{14}{81}.$$




### Aufgabe 5

(10 P)

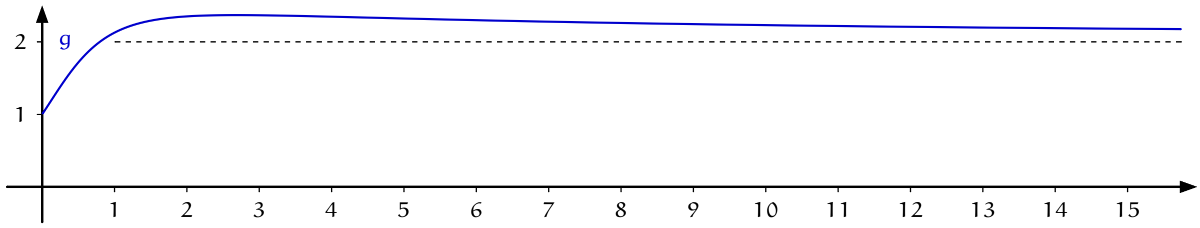
Für $x\longrightarrow 0^+$ bzw. $x\longrightarrow\infty$ strebt $\frac{1}{x}\ln\big(1+xe^{x}\big)$ gegen einen unbestimmten Ausdruck des Typs »$\frac{0}{0}$« bzw. »$\frac{\infty}{\infty}$«. Daher versuchen wir die Regeln von DE L'HOSPITAL:

+3
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\big(1+xe^{2x}\big)}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1+xe^{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}(1+2x)}{1+xe^{2x}}=1.$$

+3
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\big(1+xe^{2x}\big)}{x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1+xe^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{xe^{2x}}+1}=2.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert $e^{2x}(1+2x)$ für $x \to 0^+$ gegen $e^0 = 1$. Der Zähler konvergiert daher gegen $1$ und der Nenner mit derselben Begründung ebenfalls, so daß sich der erste Grenzwert aus den Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt. $+2$
Für $c = 1$ wird die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig.

Zum zweiten Grenzwert: $xe^{2x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$. Daher konvergiert der Zähler gegen $2$ und der Nenner gegen $1$. Der Grenzwert folgt wieder aus den Rechenregeln konvergenter Folgen. $g$ hat demnach die waagrechte Asymptote $a_1(x) := 2$. $+2$




**Aufgabe 6** (10 P)

Wir verwenden das Quotientenkriterium, um den Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{2k} z^{k+1}$ zu bestimmen:

$$\frac{\binom{3(k+1)}{2(k+1)}}{\binom{3k}{2k}} = \frac{(3(k+1))!(2k)!k!}{(2(k+1))!(k+1)!(3k)!} = \frac{3(k+1)(3k+2)(3k+1)(3k)!(2k)!}{2(k+1)(2k+1)(2k)!(k+1)(3k)!} \quad +6$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(3k+2)(3k+1)}{(2k+1)(k+1)} = \frac{3}{2}\frac{(3+\frac{2}{k})(3+\frac{1}{k})}{(2+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{k})} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{27}{4},$$

denn nach den Rechenregeln konvergenter Folgen strebt der Zähler gegen $3^3$ und der Nenner gegen $2^2$, so daß der Bruch nach der Quotientenregel den Grenzwert $\frac{27}{4}$ hat. Der Konvergenzradius ist daher $+1$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\binom{3(k+1)}{2(k+1)}}{\binom{3k}{2k}}} = \frac{4}{27}. \quad +3$$