Aufgabenblatt 8

Die Matrix zur linearen Abbildung

i) Finden Sie die Matrix, die zur folgenden linearen Abbildung gehört:

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 \\ 4x_2 + 4x_3 \\ 19x_1 - 8x_3 \end{bmatrix}.$$

Z. B. im $\mathbb{R}^2$: Zur linearen Abbildung $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 1x_2 \\ 0x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ gehört offensichtlich die Matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

ii) Ein interessanteres Beispiel: $\mathbf{a} := [a_1, a_2, a_3]^t \in \mathbb{R}^3$ sei ein gegebener Vektor.*) Dann ist die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\times\mathbf{x}$ linear. Bestimmen Sie die Matrix $R_{\mathbf{a}}$, für die $R_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$ gilt. D. h., bestimmen Sie aus den Koordinaten von $\mathbf{a}\times\mathbf{x}$, wie im ersten Teil der Aufgabe, die zugehörige Matrix $R_{\mathbf{a}}$.

iii) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix $D_\alpha = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$, die zur Drehung um den Winkel α im $\mathbb{R}^2$ gehört. Machen Sie sich dafür zunächst noch einmal klar, daß die Spaltenvektoren in D_α die Bilder $D_\alpha \boldsymbol{e}_1$ und $D_\alpha \boldsymbol{e}_2$ der kanonischen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ sind. Dann müssen Sie nur noch, am besten anhand einer Skizze, die Koordinaten der um α gedrehten Vektoren $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_1$ bestimmen.
Wie sieht die 3×3-Matrix $D_{3,\alpha}$ für eine Drehung um die x_3-Achse (x_1-Achse, x_2-Achse) aus?

iv) Zeigen Sie, daß für gegebene (nicht parallele) Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathcal{B} := \left\{\mathbf{a},\ \|\mathbf{a}\|^2\mathbf{b} - \langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle\mathbf{a},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}\right\}$$

ein Satz mathematisch positiv orientierter, paarweise orthogonaler Vektoren entsteht (eine positiv orientierte *Orthogonalbasis*).

Berechnen Sie diese Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ für die Vektoren $\mathbf{a} := [2, 2, 1]^t$ und $b := [1, 2, -2]^t$ und kontrollieren Sie ihr Ergebnis. Berechnen Sie aus $\mathcal{B}$ die zugehörige *Orthonormalbasis (ONB)* $\mathcal{C}$, indem Sie die Vektoren von $\mathcal{B}$ auf die Länge 1 normieren.
Stellen Sie in dieser Basis den Vektor $\mathbf{x} := [3, 5, 7]^t$ dar, d. h., finden sie den Koordinatenvektor $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}$ von $\mathbf{x}$ bzgl. der ONB $\mathcal{C}$.

Projektion

Sei $\mathbf{n} := [n_1, n_2, n_3]^t \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge 1. Dann wird die Projektion $P_{\mathbf{n}}$ auf die Ursprungsgerade $g := \{\, t \cdot \mathbf{n} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ mit dem Richtungsvektor $\mathbf{n}$ durch

$$P_{\mathbf{n}}\mathbf{x} := \langle\mathbf{n}|\mathbf{x}\rangle\,\mathbf{n}, \quad \text{f. a. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{+}$$

beschrieben. Machen Sie sich das anhand einer Skizze klar.

i) Zeigen Sie, daß $P_{\mathbf{n}}$ eine lineare Abbildung ist und finden Sie ihre Matrix, indem Sie die Bilder der kanonischen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ bestimmen.**)

ii) Zeigen Sie die Projektionseigenschaft $P_{\mathbf{n}}^2 = P_{\mathbf{n}}$ mit Hilfe von $(+)$.

iii) Die Projektion auf die Ursprungsebene E mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ wird durch $\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}}$ beschrieben. Machen Sie sich das an ihrer Skizze klar. ***)
Zeigen Sie die Projektionseigenschaft $(\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}})^2 = \mathbb{1} - P_{\mathbf{n}}$.

iv) Berechnen Sie $P_{\mathbf{n}}\boldsymbol{x}$ und $(\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}})\boldsymbol{x}$ für $\mathbf{n} := \frac{1}{7}[2, -3, 6]^t$ und $\boldsymbol{x} := [2, 2, 3]^t$ und berechnen Sie damit das Skalarprodukt $\langle P_{\mathbf{n}}\boldsymbol{x} | (\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}})\boldsymbol{x}\rangle$. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

*) $[a_1, a_2, a_3]^t := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. ***) $\mathbb{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{1}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, also $(\mathbb{1} - P_{\mathbf{n}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - P_{\mathbf{n}}\boldsymbol{x}$.

**) *Ein Blick ins Skript kann helfen, wenn Sie die Matrix für $P_{\mathbf{n}}$ nicht bestimmen können.*

Wurzeln

Berechnen Sie alle 8-ten Wurzeln von $z := 5 + 12\,i$. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

Kubische Gleichungen

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Cardanischen* Formeln die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{3\sqrt{3}}{50}\left(x^3 - 9x^2 + 2x + 48\right), \\ g(x) &:= \frac{1}{9}\left(x^3 - 27x + 54\right), \\ h(x) &:= \frac{2\sqrt{3}-1}{11}\left(x^3 + 3x^2 - 6x - 5\right), \\ k(x) &:= \frac{1}{29}\left(x^3 + 3x^2 + 12x + 13\right). \end{aligned}$$

Fertigen Sie eine Skizze der Funktionen an.