Aufgabenblatt 14

Kettenbruch

i) Ein *Kettenbruch*, wie etwa

$$\Phi \coloneqq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}},$$

ist der Grenzwert der Folge $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei Φ_n durch

$$\left.\Phi_n \coloneqq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1}}}}\quad\right\} n \text{ mal}$$

definiert ist. Von der Konvergenz wollen wir fürs Erste mal ausgehen. Wir interessieren uns für den Wert der Zahl Φ. Dafür kann man eine Eigenart dieses Kettenbruchs verwenden, nämlich daß er im Bruch ein weiteres Mal auftaucht. Ersetzt man ihn dort durch seinen (gesuchten) Wert Φ, so ergibt sich eine einfache quadratische Gleichung für Φ. Welche? Wie lautet ihre Lösung?

Können Sie diese Idee auf den Kettenbruch

$$\Psi \coloneqq 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

übertragen? Was ist Ψ also?

ii) Wie entstehen Kettenbrüche? Führen wir das an $\pi = 3.141592653589793\ldots$ vor:

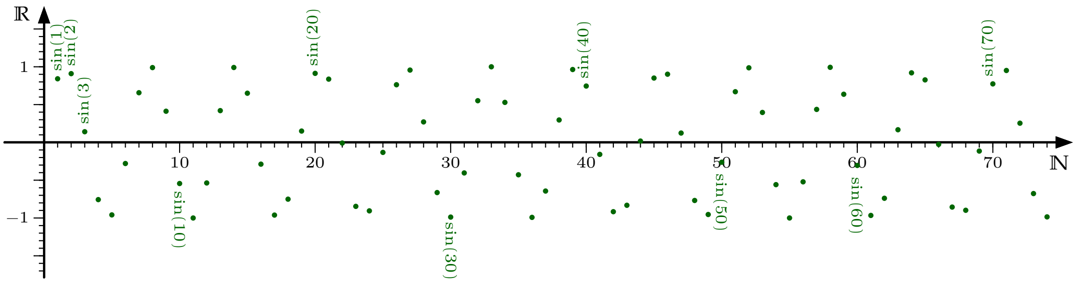
$$\begin{aligned}\pi = 3 + 0.141592653589793\ldots &= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.141592653589793\ldots}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7.062513305931052\ldots} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{? + \ldots}} = \ldots\end{aligned}$$

Verstanden wie es geht? Berechnen Sie die nächsten beiden Stufen der Kettenbruchentwicklung von π. Bricht man die Entwicklung ab, so erhält man eine rationale Zahl, die eine gute (in einem gewissen Sinne sogar die beste) Näherung für π ergibt. Berechnen Sie die rationale Zahl (als Bruch dargestellt) der zweiten dritten und vierten Näherung, indem Sie die Kettenbruchentwicklung nach dem zweiten, dritten bzw. vierten Schritt abbrechen. Auf diese Weise erhalten Sie die klassischen Näherungen für π durch Brüche, die schon lange vor unserer Zeit bekannt waren. Wie lauten Sie?

iii) Beim Bau eines mechanischen Modells des Sonnensystems stieß Christiaan Huygens (1682) auf das Problem, daß das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von Erde und Jupiter durch $\frac{77708431}{2640858}$ gegeben ist. Wollte er das exakt auf sein Modell übertragen, so hätte er Zahnräder mit 77708431 und 2640858 Zähnen herstellen müssen, was natürlich undurchführbar war. Die Aufgabe bestand also darin, eine gute Näherung dieses Verhältnisses durch eine rationale Zahl mit möglichst kleinem Nenner zu finden. Machen Sie einen Vorschlag mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung und geben Sie den prozentualen Fehler an.

Cauchy-Kriterium

1) Die Folge $\left(\sin(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt kein erkennbares Verhalten, das auf Konvergenz hindeutet:



Wir könnten also die Vermutung haben, daß sie *nicht* konvergiert. Zeigen Sie das entlang folgender Arbeitsschritte:

i) Nehmen Sie an, die Folge wäre doch konvergent: $x := \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$.

Wenden Sie den Sinus-Additionssatz $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ auf $\sin(n+1)$ an, um zu zeigen, daß dann auch $\cos(n)$ konvergiert (gegen was konvergiert $\sin(n+1)$?).

ii) Folgern Sie mit Hilfe der Rechenregeln konvergenter Folgen, daß auch die komplexe Folge $e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$ konvergieren müßte.

iii) Wenden Sie schließlich das Cauchy-Kriterium auf $\left(e^{in}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an, (mit $n \geqslant n_\varepsilon$ und mit $m = n+1$) um einen Widerspruch zu erhalten.

2) Dieselbe Idee, anderer Kontext:

Wenn es möglich ist, den Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ zu bilden, anschaulich also die unendlich vielen Zahlen b_k zu einer endlichen Zahl zusammenzuzählen, dann ist zu erwarten, daß diese ausreichend schnell klein werden müssen: Die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sollte daher zumindest eine Nullfolge sein.

Zeigen Sie also, daß für eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Summanden eine Nullfolge ist.
Wenden Sie dafür das CAUCHY-Kriterium auf die Summenfolge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wieder mit $n \geqslant n_\varepsilon$ und $m = n + 1$.

Hinweis: Wir verwenden die trigonometrischen Funktionen wie $x \mapsto \sin(x)$ immer mit dem *Bogenmaß*. Es gilt also $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, während $\sin(90) \approx 0.894$.

Euler-Folge

Zeigen Sie, daß $f_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wächst. Gehen Sie dabei wie im letzten Aufgabenblatt vor, indem Sie $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ mit Hilfe der BERNOULLI-Ungleichung abschätzen.

Zenons Paradoxon

Achill und die Schildkröte veranstalten einen Wettlauf. Da Achill als schnellster Läufer Griechenlands in der Schildkröte keinen Gegner zu fürchten hat, wird dieser ein Vorsprung von einem Stadion gewährt. ZENON argumentiert nun folgendermaßen: In der Zeit, die Achill für das erste Stadion benötigt, rückt die Schildkröte einen Bruchteil des Stadions vor. Hat Achill auch diesen Bruchteil zurückgelegt, ist die Schildkröte den Bruchteil des Bruchteils eines Stadions vorangekommen. Jedesmal wenn Achill diesen zusehends kleiner werdenden Streckenabschnitt bewältigt hat, ist die Schildkröte einen Bruchteil dieses Abschnitts vorangekommen und kann daher einen, wenn auch winzigen, Vorsprung behaupten. Diese Überlegung läßt sich ohne Ende fortsetzen. Daher kann Achill die Schildkröte niemals einholen – entgegen der Erfahrung, daß er sie mit schöner Regelmäßigkeit bei jedem Lauf ein- und überholt.

Gehen Sie von den vereinfachenden Annahmen aus, daß Achill das Stadion in 10 Sekunden zurücklegt, was nur der göttergleiche Läufer zu vollbringen vermag, entspricht doch einem Stadion eine Strecke von etwa 165 Metern (machen Sie aber während Ihrer Überlegungen von dieser Zahl möglichst *keinen* Gebrauch, sondern rechnen Sie in der Einheit *Stadion*). Die Schildkröte möge sich zehnmal langsamer als Achill bewegen (was immer noch eine Rennschildkröte verlangt).

i) Bestimmen Sie mit einem Weg-Zeit-Diagramm die Zeit, zu der Achill und die Schildkröte gleichauf liegen und den Ort, an dem das geschieht.

ii) Verwenden Sie die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$, um ZENONS Paradoxon aufzulösen. Addieren Sie also die unendlich vielen Streckenabschnitte, die Achill und die Schildkröte zurückzulegen haben und bilden Sie damit die geometrischen Reihen $x_A(n)$ und $x_S(n)$, die die Positionen von Achill und der Schildkröte nach dem n-ten Gedankenschritt angeben ($n = 0, 1, \ldots$, also $x_A(0) = 0$, $x_A(1) = 1$, $x_A(2) = 1 + \frac{1}{10}, \ldots$, $x_S(0) = 1$, $x_S(1) = 1 + \frac{1}{10}$ usw.). Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} x_A(n)$ mit dem Ort aus i) übereinstimmt.

Verwenden Sie dieselbe Technik für die Zeitabschnitte, die Achill und die Schildkröte jeweils für die einzelnen Strecken benötigen. Zeigen Sie, daß die Addition all dieser Zeiten den Zeitpunkt aus i) ergibt.

Rechenaufgabe

Berechnen Sie die folgenden Brüche soweit, bis keine Wurzeln mehr im Nenner auftreten:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}, \quad \frac{5}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}.$$

Für die letzten Brüche sollten Sie zunächst die Beziehung $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ nachrechnen (das ist das Substitut für das dritte Binom bei dritten Potenzen) und mit geeigneter Wahl von a und b verwenden, um den Wurzelausdruck aus dem Nenner zu entfernen.