Aufgabenblatt 12

Folgen

Untersuchen Sie

$$\left(\sqrt[2n]{n^{-n}+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\sqrt[n]{3\cdot 2^n+5n^3+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\sqrt[n]{(-4)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{\sqrt[n]{2^{n^2}-(-4)^n}}{2^n+1.5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Die fünfte Folge ist nicht konvergent. Zeigen Sie dafür $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geqslant 1.5$, wobei $b_n := \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$ ist, und ziehen Sie ihre Folgerungen aus dieser Ungleichung.

Fibonacci-Folge und goldener Schnitt

Die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv durch

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \qquad a_1 = a_2 = 1$$

definiert. Berechnen Sie a_1, a_2, … a_{10}, um ein Gefühl für diese Folge zu bekommen.

Φ und φ seien die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$. Überzeugen Sie sich von $\varphi = -\frac{1}{\Phi}$.

i) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\Phi^{n+1} = a_{n+1}\Phi + a_n,$$
$$\varphi^{n+1} = a_{n+1}\varphi + a_n.$$

Es ist vorteilhaft, wenn dabei $\Phi^2 = \Phi + 1$ und $\varphi^2 = \varphi + 1$ verwendet wird.

ii) Folgern Sie aus i) die Formel $\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \varphi^n\right).}$ (1)

(Sie erhalten diese Formel zunächst für $n+1$ statt für n.) Bestimmen Sie damit a_{20} und a_{21}. Vergleichen Sie das mit $\frac{\Phi^{20}}{\sqrt{5}}$ bzw. $\frac{\Phi^{21}}{\sqrt{5}}$.

iii) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\Phi^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Verwenden Sie dabei $\left|\frac{\varphi}{\Phi}\right| < 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.

iv) Folgern Sie aus iii): $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi.}$ (2)

v) Konvergiert auch die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und wenn ja, gegen was?

Die geometrische Reihe

Obwohl wir Reihen noch nicht behandelt haben, ist genug Wissen vorhanden, um eine der wichtigsten (und einfachsten) Reihen auf Konvergenz hin zu untersuchen.

Wir gehen von einer (komplexen) Zahl q mit der Eigenschaft $|q| < 1$ aus. Aus der Vorlesung wissen wir: $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Die *geometrische Reihe* ist die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} q^k$

Reihen sind also Folgen, die durch Summen gebildet werden. Wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann bedeutet das, daß die unendlich Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

gebildet werden kann. Das wollen wir in mehreren Schritten zeigen. Dabei ist es vorteilhaft, wenn Sie sich

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

vergegenwärtigen. In den folgenden Überlegungen geht es darum, eine Formel für S_n zu finden, auf die die Rechenregeln konvergenter Folgen angewendet werden können.

i) Berechnen Sie $S_n - qS_n$. Dabei sollten Sie feststellen, daß sich fast alle Summanden herausheben und ein sehr einfacher Ausdruck entsteht.

ii) Lösen Sie die erhaltene Gleichung nach S_n auf. Im Ergebnis ist nur noch q^{n+1} von n abhängig.

iii) Jetzt können Sie die Rechenregeln konvergenter Folgen anwenden, um damit erstens zu zeigen, daß die Folge (also die Summe) konvergiert und gleichzeitig den Grenzwert bestimmen. (Als Ergebnis Ihrer Überlegungen sollten Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ erhalten.)

Rechenaufgabe

Berechnen Sie

$$\left[\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right]^2 .$$

Um dabei die Doppelwurzeln in den Griff zu bekommen, rechnen Sie zunächst $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm 1)^2$ aus. Anschließend sollten Sie jede der beiden Summanden in der Klammer einzeln bestimmen können. Das Endergebnis ist einfach.