Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2: Funktionen mehrerer Variablen und Stetigkeit

- ***Motivation:***
  - Die Vorlesung Mathematik I hat sich nur mit Funktionen einer Variable befasst.
  - Jedoch verlangt eine realistische Beschreibung mehrerer Phänomene die Betrachtung einer großen Zahl an Variablen. So wird z. B. der Ertrag einer Firma im Allgemeinen von mehreren Faktoren abhängen und ist somit eine Funktion von mehreren Variablen.
  - Für Funktionen mehrerer Variablen besteht das meiste, was Informatiker wissen müssen, aus relativ einfachen Erweiterungen der in den Mathematik I Kapiteln für Funktionen einer Variablen dargestellten Eigenschaften.
  - In diesem Kapitel werden wir häufig nur Funktionen mit zwei Variablen behandeln; Die Verallgemeinerung auf mehr Variablen ist schnell ableitbar.

- ***Definition:***

  Eine reellwertige Funktion von mehreren Variablen ist eine Abbildung

$$f\colon D \subseteq R^n \longrightarrow R; \quad (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

  von einer Teilmenge D des R^n in die reellen Zahlen. Oft wird für die Variablen die abkürzende Vektornotation

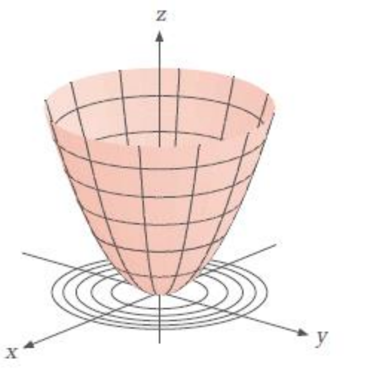
$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

  verwendet, und man schreibt dann kurz $f(x)$ statt $f(x_1, \dots, x_n)$.

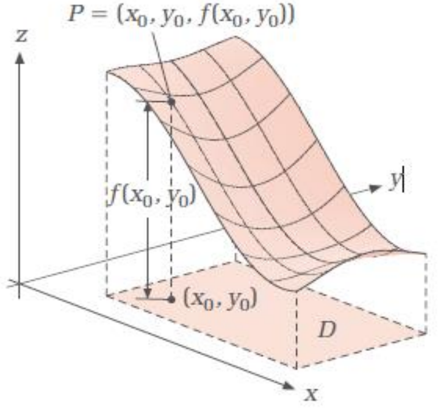
- Bei der Untersuchung von Funktionen einer Variable wurde dargestellt, wie nützlich es war, die Funktion durch ihren Graphen in einem Koordinatensystem in der Ebene darzustellen.
- Eine Funktion von zwei Variablen lässt sich durch eine Fläche im (dreidimensionalen) Raum visualisieren.
- Bei mehr als zwei Variablen ist die Visualisierung unmöglich/schwer darstellbar.
- ***Beispiele:***
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$ ergibt ein *Paraboloid*
  - Die *Cobb-Douglas-Funktion* $F(K, L) = AK^aL^b$ mit $a + b < 1$ und $A > 0$ wird sehr oft für die Modellierung der Produktion verwendet (K=Kapital, L=Arbeit).
  - Eine Untersuchung über die Nachfrage nach Milch ergab den folgenden Zusammenhang zwischen

dem Milchkonsum MK, den Preis vom Milch P und das Einkommen E:

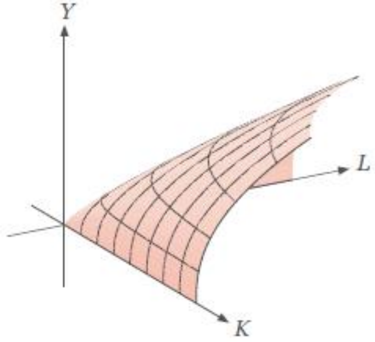
$$MK = f(P, E) = \frac{E^{2,08}}{P^{1,5}}$$



Der Graph von $z = x^2 + y^2$



: Graph von $z = f(x, y)$



Graph einer Cobb–Douglas–Produktionsfunktion

- ***Definition:***

Sei $f\colon\ D \subseteq R^n \;\longrightarrow\; R; \quad (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion von n Variablen. Der Punkt $y_0 \in \mathbb{R}$ heit Grenzwert von f an der Stelle $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $x_k \;\longrightarrow\; x_0$ auch $f(x_k) \;\longrightarrow\; y_0$ gilt.

Wir schreiben dafür

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

- ***Beispiel:*** Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to (0,2)} \frac{x_2 \sin(x_1)}{x_1}$$

Lösung:

Wenn $x \longrightarrow (0; 2)$, dann konvergiert $x_1 \longrightarrow 0$ und $x_2 \;\longrightarrow\; 2$.

Wegen $\lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{\sin(x_1)}{x_1} = 1$ und $\lim\limits_{x_2 \to 2} x_2 = 2$ folgt

$$\lim_{x \to (0,2)} \frac{x_2 \sin(x_1)}{x_1} = 1 \cdot 2 = 2.$$

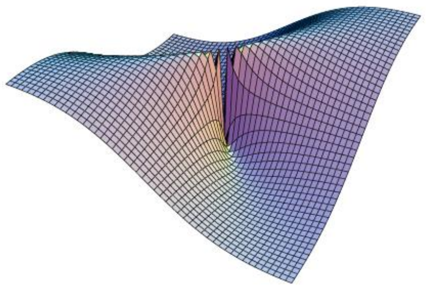
In den meisten Fällen wird der Grenzwert gleich dem Funktionswert sein. In diesem Fall heißt die Funktion stetig (analog wie bei Funktionen einer Variable):

- ***Definition:*** Eine Funktion $f\colon\ D \subseteq R^n \longrightarrow R; \quad x \longrightarrow f(x)$ heißt **stetig an der Stelle** $x_0 \in D$ falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Gilt das für jedes $x_0 \in D$, so sagen wir, dass die Funktion $\boldsymbol{f}$ **stetig ist**.

- ***Satz:***
  - Sind $f\colon D \subseteq R^n \longrightarrow R$ und g: $D \subseteq R^n \longrightarrow R$ stetig an der Stelle x_0,
  so sind auch Summe $f(x) + g(x)$, Produkt $f(x)g(x)$ und Quotient $f(x)/g(x)$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig bei x_0.
  - Sind $f\colon D \subseteq R^n \longrightarrow R$ und g: $C \subseteq R \longrightarrow R$ stetig an der Stelle $x_0 \in D$ bzw. $\mathrm{y}_0 = f(x_0) \in C$
  dann ist auch die Verkettung $\mathrm{g} \circ f$ stetig bei x_0.



Graph der Funktion $f(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

- ***Beispiel:***

  Auf welchem Definitionsbereich ist $f(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ stetig?

  Lösung: Die Funktionen $x_1 x_2$ und $x_1^2 + x_2^2$ sind stetig als Summe und Produkt von stetigen Funktionen.

  Somit ist $f(x)$ stetig f�ur alle x, für die der Ausdruck $\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ Sinn macht. Das sind alle x für die der Nenner nicht verschwindet,

  also alle $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$

Analog wie zuvor definieren wir Grenzwert und Stetigkeit nun auch für vektorwertige Funktionen, d.h. Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

- ***Definition:***

  Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Der Punkt $y_0 \in \mathbb{R}^m$ heißt **Grenzwert** von f an der Stelle $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $x_n \longrightarrow x_0$ auch $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ gilt.

  Wir schreiben dafür

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

  Die Funktion f heit stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

  Gilt das für jedes $x_0 \in D$, so sagen wir, dass die Funktion $\boldsymbol{f}$ **stetig ist**.

- ***Satz:***

  Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn jede Komponente $f_1, \dots, f_m$ stetig bei x_0 ist.

  Beweis: Aufgabe

- ***Beispiel:***

Auf welchem Definitionsbereich ist

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

stetig?

Lösung:

Wir untersuchen jede Komponente einzeln:

- Als Summe zweier stetiger Funktionen ist $f1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ stetig.
- Als Verkettung von $x_1 x_2$ (=stetig) mit $\cos(x)$ (=stetig) ist auch $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 x_2)$ stetig.

Also ist jede der beiden Komponenten $f_1(x_1;\ x_2)$ und $f_2(x_1;\ x_2)$ stetig, und somit auch $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3: Differentialrechnung

3. Differentialrechnung

3.1 Definitionen

Für eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, haben wir die Ableitung definiert, indem wir die Funktion durch eine Gerade, die Tangente, approximiert haben. In zwei Dimensionen sprechen wir von einer Tangentialebene.

- ***Definition***

Unter der **partiellen Ableitung**

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

der Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_j , während man die

restlichen Variablen als Konstante aufgefasst werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = g_j'(x_{0,j}) \qquad\qquad g_j(x_j) = f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j-1}, x_j, x_{0,j-1}, \dots, x_{0,n})$$

Beispiel

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ an der Stelle (1,0)

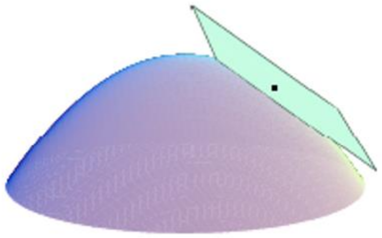
Lösung:

Wir differenzieren einfach nach jeder Variablen und behandeln dabei die andere wie eine Konstante:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2$$

dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,0) = -2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,0) = 0$$



Tangentialebene der Funktion $f(\mathbf{x}) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ an der Stelle $\mathbf{x}_0 = (1,0)$.

- ***Definition:***

  Die Matrix der partiellen Ableitungen (falls diese existieren) der Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  heißt ***Jacobi-Matrix***.

- ***Definition:***

  Ist die Jacobi-Matrix stetig in ganz D (d.h., ist jede Komponente stetig), so nennt man f ***stetig differenzierbar***.

  Die Menge aller solchen Funktionen wird mit $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet.

- ***Beispiel:***

  Berechnen Sie die Jacobi-Matrix

  a) der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$.

  Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar?

  b) der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 x_2 \\ x_2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

  Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar?

- ***Satz:***
  Ist f differenzierbar bei x_0, so ist f dort auch stetig.

- ***Bemerkung:***

  Das Gegenteil ist nicht immer richtig.

  Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$ ist stetig in $(0,0)$, aber nicht differenzierbar an dieser Stelle.

- ***Satz:***

  Existiert die Jacobi-Matrix $\frac{\partial f}{\partial x}$ einer Funktion f in der Näher von x_0 und ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig an der Stelle x_0 (d.h., ist jede Komponente stetig), so ist f differenzierbar an der Stelle x_0

  Beispiel:

  - Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ist differenzierbar an der Stelle $(0,0)$.
  - Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$ ist nicht differenzierbar an der Stelle $(0,0)$.

- ***Satz***

  Sind die Funktionen $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar an der Stelle x_0, dann sind auch

  - die Summe $f + g$
  - das Produkt $f \cdot g$
  - der Quotient f/g falls $g(x_0) \neq 0$

  auch an der Stelle x_0 differenzierbar;

  Und es gilt

  - $\frac{\partial(g+f)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0),$
  - $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x}(x_0) = f(x_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) + g(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0),$
  - $\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}(x_0) = \left[g(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)\right] / \left[g(x_0)^2\right]$

- ***Satz:***

Sind $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: E \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar an der Stelle x_0 bzw. $y_0 = f(x_0) \in E$, dann ist auch die Verkettung $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle x_0 und die Ableitung ist das Produkt der Jacobi-Matrizen

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

- ***Beispiel:***
  - *Seien* $f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2$ und $g(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$
    Berechnen Sie die Ableitung von $f + g, f \cdot g \;\; und \; f/g$
  - Berechnen Sie die Ableitung von $\sin\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ mit der Kettenregel

Definition:

Höhere partielle Ableitungen werden rekursiv definiert. Wenn wir zum Beispiel zuerst nach x_2 und dann nach x_1 ableiten, so schreiben wir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

Die Anzahl der einzelnen Ableitungen wird auch als Ordnung der Ableitung bezeichnet. In der obigen Formel handelt es sich also um eine Ableitung zweiter Ordnung.

Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar, falls auch die Ableitung wieder stetig differenzierbar ist, usw.

Beispiel:

Berechnen Sie die Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$.

Satz:

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist also vertauschbar.

Motivation:

In vielen Situationen sind die Extrema einer Funktion von mehreren Variablen gesucht (z. B. Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit von mehreren Parametern). Analog wie im Fall einer Variablen bildet die Ableitung den Schlüssel zu diesem Problem. Der folgende Abschnitt macht nur für reellwertige Funktionen Sinn, und nicht für vektorwertige. Denn Vektoren können ja nicht der Größe nach geordnet werden, daher kann man nicht von einem größten oder kleinsten Funktionswert sprechen.

Satz *(Notwendige Bedingung für lokale Extrema):*

An einem lokalen Minimum oder Maximum x_0 einer differenzierbaren Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ muss der Gradient verschwinden:

$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel:

Finden Sie die Nullstellen des Gradienten der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 - 1) + x_1^3$

Satz:

Eine Funktion $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ hat bei x_0 ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls der Gradient verschwindet, d.h.,

$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$$

und die Hesse-Matrix

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

positiv bzw. negativ definit ist

Bleibt am Ende nur noch die Frage, wie man erkennt, ob eine Matrix positiv bzw. negativ definit ist?

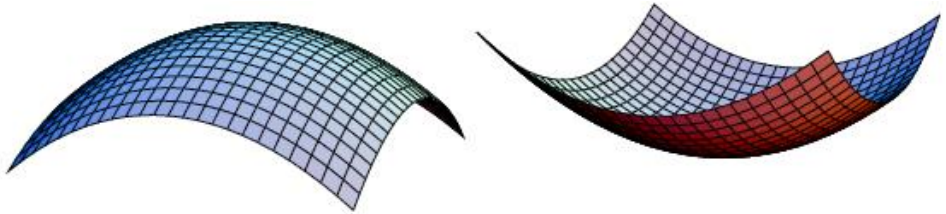
Satz:

Falls die Hesse-Matrix symmetrisch ist, dann sind die Eigenwerte auf jeden Fall reell und ist genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle Eigenwerte positiv (negativ) sind.

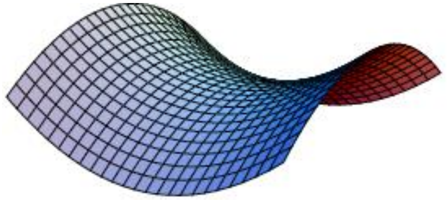
Wir haben also ein Maximum, wenn alle Eigenwerte negativ sind und ein Minimum, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Wir haben also ein Maximum, wenn alle Eigenwerte negativ sind und ein Minimum, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Falls es sowohl positive als auch negative Eigenwerte sind, dann ergibt sich ein ***Sattelpunkt.***



Maximum bzw. Minimum $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ der Funktion $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$ bzw. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$.



Sattelpunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ der Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

Dimension 2:

Satz:

Der Gradient von $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verschwinde bei x_0. Betrachten wir die Determinante der Hesse-Matrix:

- Ist $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\right) > 0$, so handelt es sich um:
  - ein Minimum, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) > 0$ und
  - ein Minimum, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) < 0$.
- Ist $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\right) < 0$, so handelt es sich um einen Sattelpunkt.
- Ist $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\right) = 0$, so ist keine Aussage möglich.

- ***Beispiel:***

  Zeigen Sie, dass $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 36x_1 + 42x_2 - 158$ eine Maximumstelle hat.

  - Notwendige Bedingung: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 36 = 0$! und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_1 - 4x_2 + 42 = 0$!

    Daraus ergibt sich: $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (5, 8)$ könnte eine Extremstelle sein.
  - Hinreichende Bedingung: *:* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(5, 8) = -4 < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(5, 8) = -4 < 0$

- ***Motivation:***
  - Der vorherige Abschnitt behandelte Optimierungsprobleme mit zwei (bzw. mehreren) Variablen ohne Nebenbedingungen. In den Wirtschaftswissenschaften müssen die betrachteten Variablen jedoch oft eine oder mehrere Nebenbedingungen erfüllen.
  - Ein typisches Beispiel eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen betrifft einen Verbraucher, der vor der Wahl steht, wie viel er von seinem verfügbaren Einkommen m für ein Gut ausgibt, dessen Preis pro Einheit p ist, und welchen Betrag y er für den Kauf anderer Güter übrig lässt. Beim Kauf von x Einheiten des betreffenden Gutes ist seine Budgetbeschränkung $px + y = m$. Nehmen Sie an, dass die Präferenzen durch eine Nutzenfunktion $u(x, y)$ dargestellt werden. In mathematischen Termen steht der Verbraucher deshalb vor dem Problem (x, y) zu wählen, um $u(x, y)$ unter der Budgetbeschränkung $px + y = m$ zu maximieren.
- ***Definition:***

  Eine Optimierungsproblem lässt im Allgemeinen auf der folgenden Form darstellen:

$$\boxed{\max f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{oder} \quad \min f(x_1, \dots, x_n) \text{unter} \quad g(x_1, \dots, x_n) = c}$$

- ***Definition (Lagrange Funktion):***

  Aus der obigen Optimierungsproblem lässt die folgen sogenannte *Lagrange* Funktion ableiten

$$\boxed{L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, \dots, x_n) - c]}$$

  λ wird als ***Lagrange-Multiplikator*** genannt.

- ***Die Methode des Lagrange-Multiplikators:***

Um die einzig möglichen Lösungen des obigen Optimierungsproblems $\max f(x_1, \dots, x_n)$ oder $\min f(x_1, \dots, x_n)$ unter $g(x_1, \dots, x_n) = c$ zu finden, gehen wir wie folgt vor:

a) Wir schreiben die Lagrange-Funktion $L(x_1, \dots, x_n)$ wie in der obigen Gleichung auf;

b) Wir differenzieren L nach $x_1, \dots, x_n$ und λ und setzen Sie die partiellen Ableitungen gleich 0:

- $\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- ……
- $\frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x_1, \dots, x_n) - c = 0$

c) Wir lösen diese Gleichungen gleichzeitig für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ und λ. Die Lösungen $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ sind die Lösungskandidaten. Wenigstens eins davon löst das Problem, wenn es eine Lösung gibt.

- ***Beispiel:***

  Ein Unternehmen, das nur ein einziges Produkt herstellt, möchte 30 Einheiten so billig wie möglich produzieren. Unter Verwendung von K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit kann es $\sqrt{K} + L$ Einheiten herstellen. Die Kosten für Kapital und Arbeit seien 1 bzw. 20 Euro. Das Problem des Unternehmens ist dann:

$$min\, K + 20L \quad \text{unter} \quad \sqrt{K} + L = 30.$$

  a) $L(K, L) = K + 20L - \lambda[\sqrt{K} + L - 30]$

  b) $\frac{\partial L}{\partial K}(K, L) = 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{K}} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial L}(K, L) = 20 - \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(K, L) = \sqrt{K} + L - 30 = 0.$ → Lösung der drei Gleichungen

  c) Die einzige Lösung ist $(K, L, \lambda) = (100, 20, 20)$.