Klausur zur Linearen Algebra 2021 / 22

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel:	Taschenrechner ohne grafikfähiges Display.
Zeit:	120 Min.
Gesamtpunktzahl:	100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen 40 P)

1. Zeigen Sie:

i. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $5 \mid n^{10} - n^2$. (5 P)

ii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. (7 P)

iii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \frac{1}{3}\,(n+1)^3$. (8 P)

2. Bestimmen Sie die Polarform der Zahl $w := \left(7 - 4\,i - \dfrac{2\,i - 4}{1 - \dfrac{3 + 2\,i}{2 + i}}\right) \cdot \dfrac{2\,i}{i + 2}$. (5 P)

3. Es sei $n := p\,q$, $\varphi := (p-1)(q-1)$, mit $p := 23$ und $q := 41$. Außerdem sei $e := 411$. (15 P)
Geben Sie den zugehörigen öffentlichen Schlüssel an.
Bestimmen Sie den privaten Schlüssel.

Hinweis: Aufgabe 1.i. läßt sich ohne Induktion lösen. Bei Aufgabe 1.iii. ist es keine schlechte Idee, sich die Aussage für $n + 1$ erst einmal ausführlich aufzuschreiben.

Aufgabe 2 (zusammen 35 P)

1. Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{b}_3 := \frac{1}{2}[\sqrt{3}, 1, 0]^t$ und $x := [0, 2, 3]^t$.

Bestimmen Sie die Ebene E, die orthogonal zu $\mathbf{b}_3$ ist und x enthält.
Geben Sie ihren Abstand vom Ursprung an.

Ergänzen Sie den Vektor $\mathbf{b}_3$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, so daß $\mathbf{b}_2$ in der x_2x_3-Ebene liegt. Überprüfen Sie ihr Ergebnis.

Stellen Sie den Vektor x in dieser Basis dar. (20 P)

2. Drehen Sie den Vektor x um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Achse mit der Richtung $\mathbf{b}_3$.

Kontrollieren Sie, daß x und der gedrehte Vektor x' dieselbe Länge haben. (10 P)

3. Bei der Drehung von x zu x' wandert x auf einem Kegel, dessen Spitze sich im Ursprung befindet. Berechnen Sie dessen Öffnungswinkel.

Zeigen Sie: $x' \in E$. (5 P)

Aufgabe 3 (15 P)

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ ist durch folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 16 & 11 \\ -2 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 9 & -4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\ker A$, eine Basis von $\ker A$ und $\dim \operatorname{im} A$.

Aufgabe 4 (10 P)

Berechnen Sie die Determinante der $5{\times}5$-Matrix

$$D := \begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 3-3\mathrm{i} & 0 \\ 5\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 4 & \mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Lösungen

Aufgabe 1 (5 + 7 + 8 + 5 + 15 P = 40 P)

1.i. Die Behauptung läßt sich am besten direkt zeigen: Nach dem kleinen Satz von FERMAT gilt $n^5 =_5 n$ und daher $n^{10} - n^2 = (n^5)^2 - n^2 =_5 n^2 - n^2 = 0$, denn $5 \in \mathbb{P}$. Das ist äquivalent zu $5 \mid n^{10} - n^2$. (5 P)

1.ii. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$, die offensichtlich wahr ist. +1

$n \to n+1$: Mit der Induktionsvoraussetzung $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (IV) folgt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geqslant 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)}$$ +6

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Das zeigt die Aussage für $n+1$. (7 P)

1.iii. Zu zeigen ist $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \frac{1}{3}(n+1)^3$. (IV) Der Induktionsanfang ist die wahre Aussage $\frac{8}{3} \geqslant 1 = \sum\limits_{k=1}^{1} k^2$. +1

$n \to n+1$: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \leqslant \frac{1}{3}(n+2)^3 = \frac{1}{3}\big(n^3 + 6n^2 + 12n + 8\big)$ ist aus der IV abzuleiten:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{\leqslant} \frac{1}{3}(n+1)^3 + (n+1)^2 = \frac{1}{3}\big((n+1)^3 + 3(n+1)^2\big)$$

$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3) = \frac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 9n + 4) \leqslant \frac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$ +7

$$= \frac{1}{3}(n+2)^3.$$

Das beweist die Aussage für $n+1$. (8 P)

2.

$$w = \left(7 - 4\,i - \frac{2\,i - 4}{\frac{2+i}{2+i} - \frac{3+2\,i}{2+i}}\right) \cdot \frac{2\,i}{i+2} = \left(7 - 4\,i - \frac{(2\,i-4)(i+2)}{-1-i}\right) \cdot \frac{2\,i}{i+2}$$ +4

$$= \left(7 - 4\,i + \frac{-2 - 4\,i + 4\,i - 8}{1+i}\right) \cdot \frac{2\,i}{i+2} = \left(7 - 4\,i - \frac{10(1-i)}{2}\right) \cdot \frac{2\,i}{i+2} = (2+i) \cdot \frac{2\,i}{i+2} = 2\,i.$$

Die Polardarstellung ist daher $w = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$. (5 P) +1

3. Der öffentliche Schlüssel ist $S_o = [411, 943]$. +1

Wir verwenden den erweiterten euklidischen Algorithmus für $\varphi = 880$ und $e = 411$, um die Inverse d von $e \mod \varphi$ zu berechnen: +1

$$\begin{aligned} 880 &= 2 \cdot 411 + 58 & \qquad 58 &= 880 - 2 \cdot 411 \\ 411 &= 7 \cdot 58 + 5 & 5 &= 411 - 7 \cdot 58 \\ 58 &= 11 \cdot 5 + 3 & 3 &= 58 - 11 \cdot 5 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 & 2 &= 5 - 1 \cdot 3 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 & 1 &= 3 - 2. \end{aligned}$$ +5

Also gilt tatsächlich $\mathrm{ggT}(\varphi, e) = 1$. Um d zu bestimmen, berechnen wir für den größten gemeinsamen Teiler 1 die Darstellung nach EUKLID: $+1$

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 5 + 1 \cdot 3 &&= && 2 \cdot 3 - 5 \\
&= 2 \cdot 58 - 22 \cdot 5 - 5 &&= && 2 \cdot 58 - 23 \cdot 5 \\
&= 2 \cdot 58 - 23 \cdot 411 + 161 \cdot 58 &&= && 163 \cdot 58 - 23 \cdot 411 \\
&= 163 \cdot 880 - 326 \cdot 411 - 23 \cdot 411 &&= && 163 \cdot 880 - 349 \cdot 411.
\end{aligned}$$ $+5$

Es gilt daher $-349 \cdot 411 =_{880} 1$, so daß die Inverse durch $d = 880 - 349 = 531$ und der private Schlüssel durch $S_p = [531, 943]$ gegeben ist. (15 P) $+2$

Aufgabe 2 (20 + 10 + 5 P = 35 P)

1. Die Ebene mit Normalenvektor $\frac{1}{2}[\sqrt{3}, 1, 0]^t = \mathbf{b}_3$ hat die Ebenengleichung $\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = c$. Da sie $\boldsymbol{x} = [0, 2, 3]^t$ enthalten soll, muß $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{2}{2} = c$ gelten. Daher ist $E = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 \right\}$. $+3$

Ihr Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems ist demnach 1. $+2$

Die Ergänzung von $\mathbf{b}_3$ zu einer positiv orientierten ONB $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$: Da $\mathbf{b}_2$ in der x_2x_3-Ebene liegen soll, muß $\mathbf{b}_2 = [0, y_2, y_3]^t$ gelten. Aus $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_3$ folgt $0 = \langle \mathbf{b}_2 \,|\, \mathbf{b}_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + y_2 + 0 \cdot y_3$, also $y_2 = 0$. Daher können wir $\mathbf{b}_2 \coloneqq [0, 0, 1]^t$ wählen. $+3$

Jetzt ergibt $\mathbf{b}_1 \coloneqq \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3$ den letzten Basisvektor: $+2$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & - & 1 \\ \sqrt{3} & - & 0 \\ 0 & - & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1.$$ $+2$

Damit kennen wir $\mathcal{B}$ und die Transformationsmatrix B:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B \coloneqq \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$ $+2$

$$\det(B) = \frac{1}{2^3}\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} = \frac{1}{8}(0 + 0 + 6 - 0 + 2 - 0) = 1 > 0$$ $+2$

zeigt die positive Orientierung von $\mathcal{B}$. B^t ist die Transformationsmatrix für die Basisdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{x}_B \coloneqq B^t\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ $+2$

Die Darstellung von $\boldsymbol{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$ lautet folglich $\boldsymbol{x} = \sqrt{3}\,\mathbf{b}_1 + 3\,\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. (20 P) $+2$

2. Die Drehachse hat den Richtungsvektor $\mathbf{b}_3$. Den gedrehten Vektor $\mathbf{x}'$ erhalten wir jetzt wie folgt:

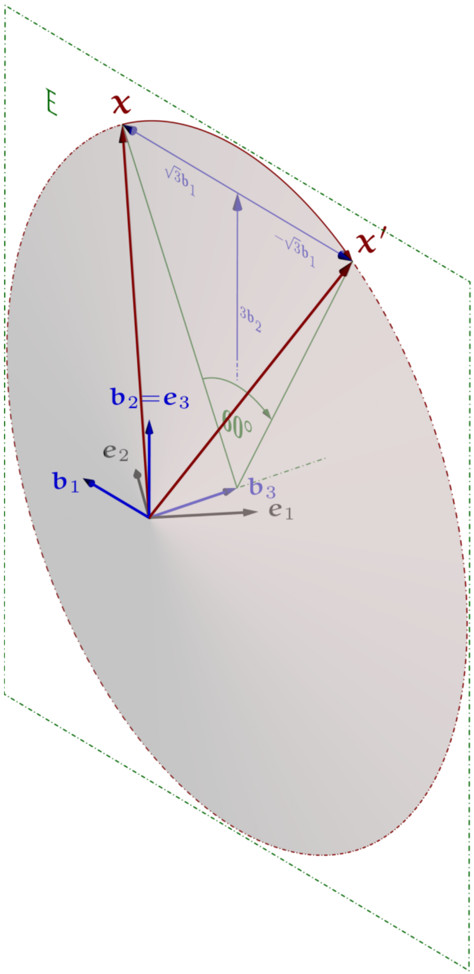
$$\mathbf{x}' = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathrm{B}^{\mathrm{t}}\mathbf{x} = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathrm{B}\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) & 0\\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 3\\ 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 3\\ 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$ +9

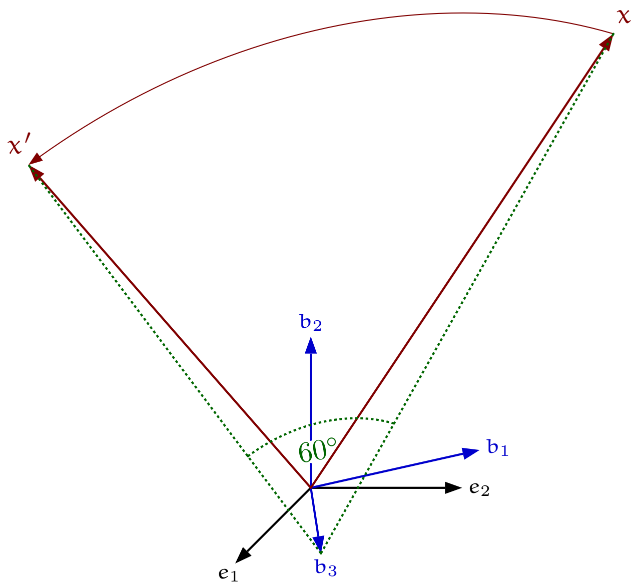
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 3\\ 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$$

Die Länge von $\mathbf{x}$: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = \sqrt{3+1+9} = \|\mathbf{x}'\|$, wie erwartet. (10 P) +1

Der Öffnungswinkel des Kegels ist der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}_3$: $\cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{b}_3\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{b}_3\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \approx 73.9°$. +4

$\mathbf{x}' \in \mathrm{E}$ folgt einfach aus $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, d. h. $\mathbf{x}'$ erfüllt die Ebenengleichung von E. (5 P) +1





Aufgabe 3 (15 P)

$\ker A$ bestimmen heißt, das Gleichungssystem $Ax = \mathbb{0}$ lösen. Das machen wir mit dem GAUSS-Verfahren:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
I	2	1	1	3	5		
II	0	0	2	−1	2		
III	−2	1	1	16	11	III + I	
IV	−2	0	1	6	4	IV + I	
V	6	2	9	−4	14	V − 3 · I	
I	2	1	1	3	5		
II	0	0	2	−1	2	II ↔ IV	
III	0	2	2	19	16	III + II	
IV	0	1	2	9	9		
V	0	−1	6	−13	−1		
I	2	1	1	3	5	I − II	
II	0	1	2	9	9		+9
III	0	2	4	18	18	III − 2 · II	
IV	0	0	2	−1	2		
V	0	−1	6	−13	−1	V + II	
I	2	0	−1	−6	−4	2 · I + IV	
II	0	1	2	9	9	II − IV	
III	0	0	0	0	0		
IV	0	0	2	−1	2		
V	0	0	8	−4	8	V − 4 · IV	
I	4	0	0	−13	−6		
II	0	1	0	10	7		
III	0	0	2	−1	2		
IV	0	0	0	0	0		

Das führt auf

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{13}{4} \cdot x_4 + \tfrac{3}{2} \cdot x_5 \\ x_2 &= -10 \cdot x_4 - 7 \cdot x_5 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 \\ x_4 &= 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ x_5 &= 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 \end{aligned}$$ +2

Damit läßt sich der Kern systematisch angeben:

$$\ker A = \left\{ t \begin{bmatrix} 13 \\ -40 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -14 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{C} \right\}.$$ +2

Eine Basis ist daher

$$\mathcal{B}_{\ker A} := \left\{ \begin{bmatrix} 13 \\ -40 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -14 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$ +1

Nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{im} A = 5 - \dim \ker A = 3$. +1

Aufgabe 4 (10 P)

$$\det(\mathrm{D}) = \det \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -2\,\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 3-3\,\mathrm{i} & 0 \\ 5\,\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} & 3\,\mathrm{i} & 2 & 2\,\mathrm{i} \\ 4\,\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 4 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

berechnen wir mit dem Determinantenschema:

I	$2\,\mathrm{i}$	i	i	$-2\,\mathrm{i}$	0	$\mathrm{I}-\mathrm{III}$		
II	2	-1	-1	1	0			
III	$2\,\mathrm{i}$	i	i	$3-3\,\mathrm{i}$	0			
IV	$5\,\mathrm{i}$	$2\,\mathrm{i}$	$3\,\mathrm{i}$	2	$2\,\mathrm{i}$	$\mathrm{IV}-2\,\mathrm{V}$		
V	$4\,\mathrm{i}$	i	i	4	i			
I	0	0	0	$-3+\mathrm{i}$	0			
II	2	-1	-1	1	0			
III	$2\,\mathrm{i}$	i	i	$3-3\,\mathrm{i}$	0			
IV	$-3\,\mathrm{i}$	0	i	-6	0			
V	$4\,\mathrm{i}$	i	i	4	i			
I	2	-1	-1		0		$3-\mathrm{i}$	$+9$
II	$2\,\mathrm{i}$	i	i		0			
III	$-3\,\mathrm{i}$	0	i		0			
IV	$4\,\mathrm{i}$	i	i		i			
I	2	-1	-1			$\mathrm{I}-\mathrm{i}\,\mathrm{II}$		
II	$2\,\mathrm{i}$	i	i					
III	$-3\,\mathrm{i}$	0	i				i	
I	4	0	0					
II	$2\,\mathrm{i}$	i	i					
III	$-3\,\mathrm{i}$	0	i					
I		i	i				4	
II		0	i					

Daher ist

$$\det(\mathrm{D}) = 4\,\mathrm{i}(3-\mathrm{i})\det \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = 4(3\,\mathrm{i}+1)\,\mathrm{i}^2 = -4(1+3\,\mathrm{i}) = -4-12\,\mathrm{i}.$$ +1