Klausur zur Linearen Algebra 2020 / 21

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen 40 P)

1. Zeigen Sie:

i. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$. (7 P)

ii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$. (8 P)

iii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$. (9 P)

2. Bestimmen Sie die Polarform der Zahl $z \coloneqq \dfrac{3-4\,i}{2-\dfrac{3\,i-5}{3+4\,i}} \cdot (292+146\,i)$. (5 P)

3. Zeigen Sie: $17 \mid 8707^{416} - 326^{464}$. (4 P)

4. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der kubischen Gleichung (7 P)

$$x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 1 = 0\,.$$

Geben Sie die Normalform der Gleichung an.

Aufgabe 2 (zusammen 30 P)

1. Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E \coloneqq \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \right\},$$
$$F \coloneqq \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie den Winkel, den diese Ebenen miteinander einschließen.

Geben Sie die Schnittgerade g von E und F an.

Bilden Sie aus dem Richtungsvektor von g und den Normalenvektoren von E und F eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\mathcal{B} \coloneqq \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ und überprüfen Sie ihr Ergebnis.

Stellen Sie den Vektor $x \coloneqq \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5+8\sqrt{3} \\ 11-4\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ in dieser Basis dar. (20 P)

2. Drehen Sie den Vektor x um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Achse mit der Richtung $[1, 4, 8]^t$.
Kontrollieren Sie, daß x und der gedrehte Vektor dieselbe Länge haben. (10 P)

Aufgabe 3 (15 P)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Inversen, sofern sie existieren.

$$A \coloneqq \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & 2i & i \\ 0 & 2i & i \end{bmatrix}, \qquad B \coloneqq \begin{bmatrix} i & 2 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 2i & 4 & 2i \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4 (15 P)

Bestimmen Sie den Kern und eine Basis für den Kern folgender Matrix:

$$C \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 6 & 3 & -1 & -9 & 11 \\ 0 & -6 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & -1 & -10 & 11 \end{bmatrix}.$$

Welche Dimension hat $\operatorname{im} C$?

Lösungen

Aufgabe 1 (7 + 8 + 9 + 5 + 4 + 7 P = 40 P)

1.i. Der Induktionsanfang für $n = 1$ behauptet $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$, was ersichtlich stimmt. +1

$n \to n+1$: Die Induktionsvoraussetzung lautet: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ (IV). Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{IV}}{=} 2 - \frac{2+n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{4+2n-1-n}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2+n+1}{2^{n+1}}.$$ +6

Das zeigt die Behauptung für $n+1$. (7 P)

1.ii. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die Aussage $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \geqslant \sqrt{1}$, die offensichtlich wahr ist. +1

Der Induktionsschritt $n \to n+1$: Die Induktionsvoraussetzung IV: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$ +7

Das zeigt die Aussage für $n+1$. (8 P)

1.iii. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die offensichtlich wahre Aussage

$\sum_{k=1}^{1} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{9-5}{6} = \frac{3}{2} - \frac{2+3}{2 \cdot 3}$. +2

Die Induktionsvoraussetzung IV: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{(2n+3)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{(2n+3)(n+3)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2} - \frac{2n^2+9n+9-2n-4}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n^2+7n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2} - \frac{(2n+5)(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$ +7

Das zeigt die Aussage für $n+1$. (9 P)

2.

$$\begin{aligned} z &= \frac{3-4\,i}{2 - \frac{3\,i-5}{3+4\,i}} \cdot (292 + 146\,i) = 146 \frac{(3-4\,i)(3+4\,i)}{6+8\,i+5-3\,i} \cdot (2+i) = 146 \cdot 25 \frac{2+i}{11+5\,i} \\ &= 146 \cdot 25 \frac{(2+i)(11-5\,i)}{121+25} = 25\,(22+5+11\,i-10\,i) = 25\,(27+i) = 675 + 25\,i.\end{aligned}$$ +3

Die Polardarstellung $z = 25\sqrt{730}\,e^{i\varphi}$ erhalten wir mittels $\varphi = \arccos\left(\frac{27}{\sqrt{730}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{27}\right) \approx 0.037 \simeq 2.121^\circ$ zu $z \approx 25\sqrt{730}\,e^{0.037\,i}$. (5 P) +2

3. $8707^{416} - 326^{464} =_{17} 3^{416} - 3^{464} = 3^{16\cdot 26} - 3^{16\cdot 29} = (3^{16})^{26} - (3^{16})^{29} =_{17} 1^{26} - 1^{29} = 0$. Dabei haben wir für das letzte $=_{17}$-Zeichen den kleinen Satz von FERMAT verwendet: $3^{16} =_{17} 1$, denn $\mathrm{ggT}(3, 17) = 1$. +3
Damit haben wir $17 \mid 8707^{416} - 326^{464}$ gezeigt. (4 P) +1

4. Die kubische Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$ wird durch die Substitution $x = y - 1$ auf die Normalform $y^3 + py + q = 0$ gebracht. Dabei ist $p = c - \frac{1}{3}b^2 = -3 - \frac{9}{3} = -6$ und $q = \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d = \frac{2\cdot 27}{27} + \frac{9}{3} + 1 = 6$. Die Normalform lautet daher $y^3 - 6y + 6 = 0$. +3

$\Delta = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = -8 + 9 = 1 > 0$ zeigt, daß es nur eine reelle Lösung gibt, die durch

$$x_1 := \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{q}{2}} - 1 = \sqrt[3]{1-3} - \sqrt[3]{1+3} - 1 = -\big(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1\big) \approx -3.8473$$ +4

gegeben ist. (7 P)

Aufgabe 2 (20 + 10 P = 30 P)

1. $\mathsf{E} = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \right\}$ und $\mathsf{F} = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$ haben die Normalenvektoren $\mathbf{n}_\mathsf{E} := [8, -4, 1]^t$ bzw. $\mathbf{n}_\mathsf{F} := [4, 7, -4]^t$. +2

Wegen $\langle \mathbf{n}_\mathsf{E} \mid \mathbf{n}_\mathsf{F} \rangle = 32 - 28 - 4 = 0$ sind $\mathbf{n}_\mathsf{E}$ und $\mathbf{n}_\mathsf{F}$ und damit auch E und F orthogonal zueinenader. Der Schnittwinkel von E und F ist daher $\frac{\pi}{2}$. +2

Den Richtungsvektor $\mathbf{n}_g$ von $g = \mathsf{E} \cap \mathsf{F}$ erhalten wir jetzt einfach über das Kreuzprodukt $\mathbf{n}_\mathsf{E} \times \mathbf{n}_\mathsf{F}$: +2

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & -4 \\ 8 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{bmatrix} 16 & - & 7 \\ 4 & + & 32 \\ 56 & + & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 36 \\ 72 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} =: \mathbf{n}_g.$$ +2

Damit kennen wir $g = \{\, t \cdot \mathbf{n}_g \mid t \in \mathbb{R} \,\}$. +2

Laut Konstruktion ist $\{\mathbf{n}_g, \mathbf{n}_\mathsf{E}, \mathbf{n}_\mathsf{F}\}$ bereits eine Orthogonalbasis: Die Vektoren sind paarweise orthogonal zueinander und damit linear unabhängig. Drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden immer eine Basis.

Wegen $\|\mathbf{n}_g\| = \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9 = \|\mathbf{n}_\mathsf{E}\| = \|\mathbf{n}_\mathsf{F}\|$, bietet es sich an, $\mathbf{b}_1 := \frac{1}{9}\mathbf{n}_g$, $\mathbf{b}_2 := \frac{1}{9}\mathbf{n}_\mathsf{E}$ und $\mathbf{b}_3 := \frac{1}{9}\mathbf{n}_\mathsf{F}$ zu wählen: +2

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B := \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$ +1

$$\det(B) = \frac{1}{9^3}\det\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9^3}(16 + 448 + 16 + 128 - 7 + 128) = \frac{729}{9^3} = 1 > 0$$

zeigt die positive Orientierung von $\mathcal{B}$. +2

B^t ist die Transformationsmatrix für die Basisdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{x}_\mathcal{B} := B^t\mathbf{x} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 + 8\sqrt{3} \\ 11 - 4\sqrt{3} \\ 4 + \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 \\ 81\sqrt{3} \\ 81 \end{bmatrix}_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}_\mathcal{B}.$$ +3

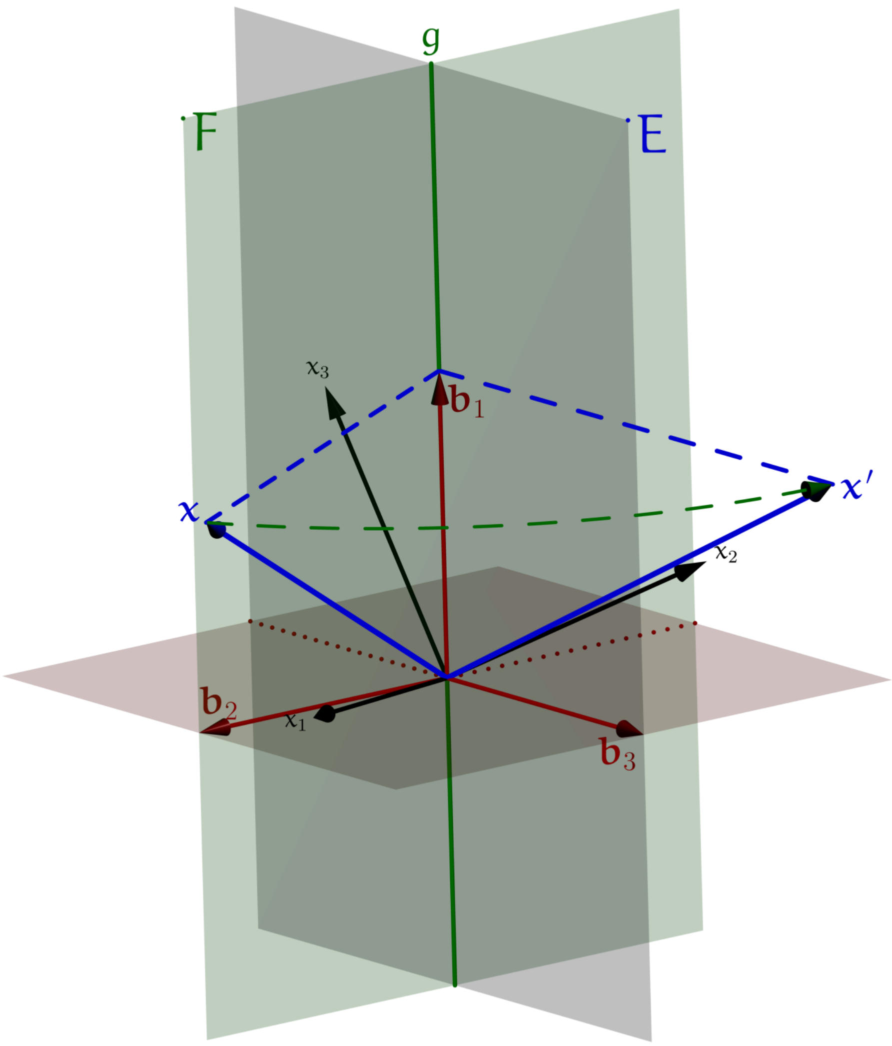
Die Darstellung von $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$ lautet also $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \sqrt{3}\,\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. (20 P) +2

2. Die Drehachse mit dem Richtungsvektor $[1,4,8]^t \sim \mathbf{b}_1$ ist natürlich g. Den gedrehten Vektor $\mathbf{x}'$ erhalten wir nach der Vorarbeit aus 1. wie folgt:

$$\mathbf{x}' = \mathrm{B}\mathrm{D}_{1,\frac{\pi}{3}}\mathrm{B}^t\mathbf{x} = \mathrm{B}\mathrm{D}_{1,\frac{\pi}{3}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathrm{B}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3})\\ 0 & \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3})\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad +9$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 8 & 4\\ 4 & -4 & 7\\ 8 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix}9\\ 18\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}.$$

Also muß die Länge von $\mathbf{x}$ durch $\|\mathbf{x}'\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ gegeben sein. Kontrollieren wir das:
$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{81}\big(25 + 80\sqrt{3} + 192 + 121 - 88\sqrt{3} + 48 + 16 + 8\sqrt{3} + 3\big) = \frac{405}{81} = 5 = \|\mathbf{x}'\|^2.$ (10 P) $+1$



Aufgabe 3 (15 P)

Die Matrix B kann keine Inverse haben, da die dritte Spalte mit der ersten übereinstimmt. Die Spaltenvektoren sind also linear abhängig. Für die Invertierbarkeit von H müßten sie aber linear unabhängig sein. +3
Untersuchen wir die Matrix A mit Hilfe des erweiterten GAUSS-Verfahrens:

I	i	1	0	1	0	0	$i \cdot I$
II	1	$2i$	i	0	1	0	$II - III$
III	0	$2i$	i	0	0	1	
I	-1	i	0	i	0	0	
II	1	0	0	0	1	-1	$II + I$
III	0	$2i$	i	0	0	1	
I	-1	i	0	i	0	0	$I - II$
II	0	i	0	i	1	-1	
III	0	$2i$	i	0	0	1	$III - 2 \cdot II$
I	-1	0	0	0	-1	1	$I \cdot (-1)$
II	0	i	0	i	1	-1	$II \cdot (-i)$
III	0	0	i	$-2i$	-2	3	$III \cdot (-i)$
I	1	0	0	0	-1	1	
II	0	1	0	1	$-i$	i	
II	0	0	1	-2	$2i$	$-3i$	

Das zeigt die Existenz der Inversen A^{-1} und +12

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -i & i \\ -2 & 2i & -3i \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4 (15 P)

Um $\ker C = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Cx = 0 \}$ zu bestimmen, muß das homogene Gleichungssystem $Cx = 0$ gelöst werden. Das machen wir mit dem GAUSS-Verfahren: +1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
I	1	2	0	-1	0		
II	3	1	0	-3	5	$II - 3 \cdot I$	
III	6	3	-1	-9	11	$III - 6 \cdot I$	
IV	0	-6	1	3	4		
V	7	5	-1	-10	11	$V - 7 \cdot I$	
I	1	2	0	-1	0		
II	0	-5	0	0	5	$II : (-5)$	
III	0	-9	-1	-3	11		
IV	0	-6	1	3	4		+9
V	0	-9	-1	-3	11	$V - III$	
I	1	2	0	-1	0	$I - 2 \cdot II$	
II	0	1	0	0	-1		
III	0	-9	-1	-3	11	$III + 9 \cdot II$	
IV	0	-6	1	3	4	$IV + 6 \cdot II$	
I	1	0	0	-1	2		
II	0	1	0	0	-1		
III	0	0	-1	-3	2		
IV	0	0	1	3	-2	$IV + III$	

Das führt auf

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1 \cdot x_4 & - & 2 \cdot x_5 \\ x_2 & = & 0 \cdot x_4 & + & 1 \cdot x_5 \\ x_3 & = & -3 \cdot x_4 & + & 2 \cdot x_5 \\ x_4 & = & 1 \cdot x_4 & + & 0 \cdot x_5 \\ x_5 & = & 0 \cdot x_4 & + & 1 \cdot x_5 \end{array}$$ +2

Damit läßt sich der Kern bequem angeben:

$$\ker C = \left\{ x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$ +1

Eine Basis ist offensichtlich

$$\mathcal{B}_{\ker C} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$ +1

Nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{im} C = 5 - \dim \ker C = 3$. +1