Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5: Differenzialgleichungen

- ***Motivation:***

  Dynamische Vorgänge in der Natur, der Technik oder Wirtschaft lassen sich oftmals mathematisch durch Differenzialgleichungen beschreiben. Wesentlich dabei ist, dass nicht nur eine gesuchte Größe in Abhängigkeit der Zeit oder des Ortes, sondern auch ihr Änderungsverhalten in die Modellierung eingeht.

  Das Kapitel Differenzialgleichungen hat also starken Anwendungsbezug. Wir betrachten die mathematischen Begriffe und Methoden unabhängig von speziellen Anwendungen

- ***Definition 14.1*** (Gewöhnliche Differenzialgleichung)

  Eine Gleichung, in der mindestens eine Ableitung einer unbekannten Funktion vorkommt, nennt man eine gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL).

- ***Bemerkung:***

  Die Bezeichnung „gewöhnlich“ wird verwendet, wenn die gesuchte Funktion in der Differenzialgleichung nur von einer Veränderlichen abhängt. Hängt die gesuchte Lösungsfunktion von mehreren Veränderlichen ab, so spricht man von einer „partiellen“ Differenzialgleichung. Neben gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen kommen in Anwendungen noch weitere Typen von Differenzialgleichungen vor.

- ***Beispiel*** (Einfache Differenzialgleichung):

Ein einfaches Beispiel für eine Differenzialgleichung ist

$$y' = -2y$$

In Worten formuliert lautet die Problemstellung folgendermaßen: „Wir suchen alle Funktionen y, deren Ableitung sich von der ursprünglichen Funktion nur um den Faktor -2 unterscheidet.“

Ein Kandidat für die Lösung ist die Exponentialfunktion $y(x) = e^{-2x}$, denn für die Ableitung gilt

$$y'(x) \;=\; -2e^{-2x} \;=\; -2\,y(x)$$

Es gibt jedoch noch weitere Lösungen. Da ein konstanter Faktor beim Ableiten erhalten bleibt, darf man die Exponentialfunktion mit einer beliebigen Konstante C multiplizieren, also

$$y(x) = Ce^{-2x}.$$

Somit besitzt die Differenzialgleichung unendlich viele Lösungen. Darunter ist auch die sogenannte triviale Lösung $y(x) = 0$.

- ***Definition 14.2*** (Lösung und allgemeine Lösung, Trajektorie)

  Eine Funktion ist eine Lösung der Differenzialgleichung, falls die Gleichung durch Einsetzen der Funktion und ihrer Ableitungen für alle Werte aus der Definitionsmenge der Funktion erfüllt ist. Die Menge aller Lösungsfunktionen bildet die **allgemeine Lösung**.

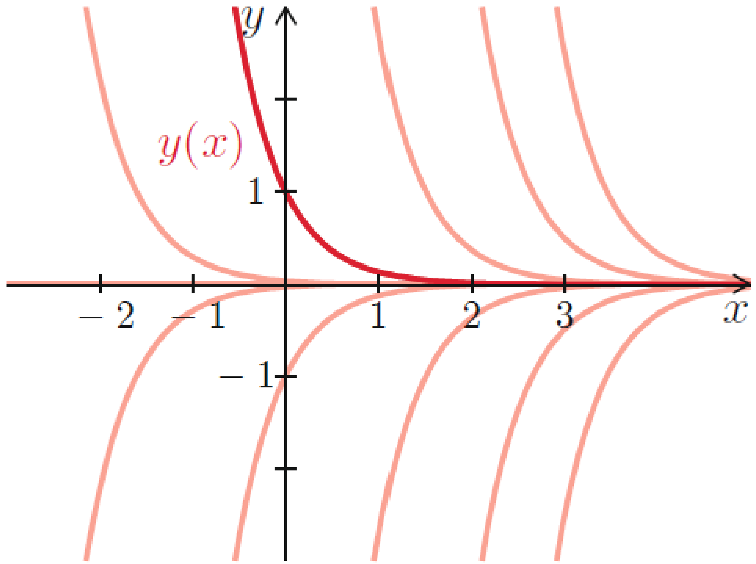
  Die grafische Darstellung einer Lösung bezeichnet man als **Trajektorie**.

- ***Beispiel*** (Einfache Differenzialgleichung):

  Die Differenzialgleichung $y' = -2y$ hat die Lösung die folgende allgemeine Lösung

  $$y(x) = Ce^{-2x}.$$

  Die graphische Darstellung ist in der Graphik nebenbei zu finden.



- ***Definition*** (Bezeichnungen bei Differenzialgleichungen)

  Bei Differenzialgleichungen kann man für die gesuchte Funktion und für die Variable beliebige Bezeichnungen verwenden. Es ist auch üblich, ganz auf die Bezeichnung der Variable zu verzichten.

  Für die Ableitungen verwendet man die Notationen mit Strich oder mit Punkt.

  Auch die Schreibweise mit $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$, ... und die Operatorschreibweise mit D, D^2, ... sind gebräuchlich.

- ***Definition*** (Ordnung)

  Man bezeichnet die höchste auftretende Ableitung in einer Differenzialgleichung als ***Ordnung*** der Differenzialgleichung.

- ***Beispiel*** (Einfache Differenzialgleichung zweiter Ordnung)

  Die Differenzialgleichung

  $$y'' = -9\,y$$

  hat die Ordnung 2.

  Wir suchen alle Funktionen, bei denen sich die zweite Ableitung von der ursprünglichen Funktion nur um den Faktor -9 unterscheidet.“ Sinus und Kosinus besitzen die Eigenschaft, dass sich die zweiten Ableitungen nur durch das Vorzeichen von der Ausgangsfunktion unterscheiden:

  $$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$$

  Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten. Durch Nachrechnen erkennt man somit, dass alle Funktionen der folgenden Art Lösungen sind.

  $$y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\,.$$

- ***Definition*** (explizite und implizite Form)

  Eine Differenzialgleichung, die nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, nennt man eine Differenzialgleichung in expliziter Form und ansonsten eine Differenzialgleichung in impliziter Form.

- ***Beispiel*** (Differenzialgleichgungen in expliziter und impliziter Form)

  a) Die Differenzialgleichung $y^2 = -7 + y'$ lautet in expliziter Form $y' = y^2 + 7$.

  b) Da die Differenzialgleichung $y' = \sin(y) + \cos(y')$ nicht nach y' aufgelöst werden kann, existiert für diese Differenzialgleichung keine explizite Form. Also sie hat nur eine implizite Form.

- ***Definition*** (Anfangswertproblem):

  Ein **Anfangswertproblem** (AWP) besteht aus einer Differenzialgleichung der Ordnung n und genau n Anfangsbedingungen in Form von Funktionswert und Ableitungen an einer einzigen Stelle x_0:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad y''(x_0) = y_2, \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

- ***Beispiel*** (Anfangswertproblem):

  Das Anfangswertproblem

$$y'' + 9\,y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -6$$

  besteht aus einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung und zwei Anfangswerten für $x = 0$. Unter allen Lösungsfunktionen $y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$ suchen wir diejenige Funktion, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert 1 und die Ableitung -6 hat.

  Aus dem Anfangswert $y(0) = 1$ erhalten wir die Bedingung $1 = C_2$.

  Für die erste Ableitung $y'(x) = 3\,C_1 \cos(3x) - 3C_2\, sin(3x)$ liefert der Anfangswert $y'(0) = -6$ die Bedingung $-6 = 3C_1$.

  Wir erhalten eine eindeutige Funktion als Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = -2\sin(3x) + \cos(3x).$$

- ***Definition*** (Randwertproblem):

  Ein Randwertproblem (RWP) besteht aus einer Differenzialgleichung der Ordnung n und genau n Randbedingungen in Form von Funktionswerten und Ableitungen an mindestens zwei verschiedenen Stellen.

- ***Beispiel*** (Randwertproblem):

  Beim Randwertproblem

  $$y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(\pi/2) = 1$$

  sucht man die Lösung der Differenzialgleichung, die an den beiden Stellen $x = 0$ und $x = \pi/2$ den Wert 1 hat.

  Aus der allgemeinen Lösung $y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$ erhält man aus der Bedingung $y(0) = 1$ den Wert $C_2 = 1$.
  Die zweite Bedingung $y(\pi/2) = 1$ ergibt $C_1 = -1$. Somit hat das Randwertproblem die eindeutige Lösung

  $$y(x) = -\sin(3x) + \cos(3x).$$

- ***Lösungsstrategie für Anfangs- und Randwertprobleme:***

  Zur Lösung eines Anfangs- oder Randwertproblems kann man zuerst die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung bestimmen und dann unter allen diesen Lösungen diejenige Lösung herausfinden, die alle Anfangs- oder Randwerte erfüllt.

- ***Beispiel*** (Randwertprobleme ohne eindeutige Lösung)

  a) Die Differenzialgleichung des Randwertproblems
  $$y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(\pi) = 0$$
  hat die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$.

  Aus dem ersten Randwert ergibt sich $C_2 = 1$. Damit ist $y(\pi) = -1$, unabhängig von der Konstanten C_2.

  Die zweite Randbedingung ist nicht erfüllbar. Dieses Randwertproblem besitzt also keine Lösung.

  b) Betrachtet man dagegen das Randwertproblem
  $$y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(\pi) = -1$$
  so sind alle Funktionen der Form $y(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$. Lösungen. Dieses Randwertproblem besitzt also unendlich viele Lösungen.

- ***Definition*** (Partikuläre Lösung)

  Eine einzelne Lösungsfunktion einer gewöhnlichen Differenzialgleichung nennt man spezielle Lösung oder partikuläre Lösung.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Differenzialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form

$$y' = f(x,y).$$

An jeder Stelle (x,y), an der die rechte Seite der Differenzialgleichung definiert ist, wird durch die Differenzialgleichung eine Steigung festgelegt. Wenn wir nun in entsprechend vielen Punkten diese Tangentenrichtungen grafisch veranschaulichen, dann lässt sich der Verlauf der Lösungen erkennen. Lösungsfunktionen verlaufen nämlich immer tangential zu diesen Richtungen. Besonders elegant kann man diese sogenannten Richtungsfelder mit Computerprogrammen erzeugen.

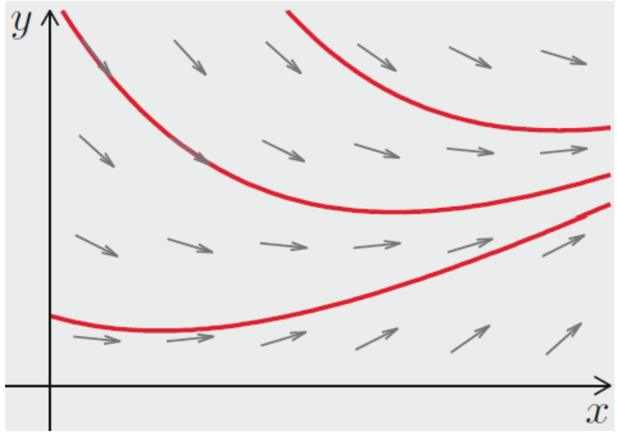
Definition (Linienelement und Richtungsfeld)

Eine Differenzialgleichung erster Ordnung in expliziter Form

$$y' = f(x,y)$$

ordnet jedem Punkt in der Ebene eine Steigung zu. Den zu einer Steigung gehörenden Richtungsvektor nennt man auch **Linienelement**.

Die Menge aller Linienelemente heißt **Richtungsfeld** der Differenzialgleichung.

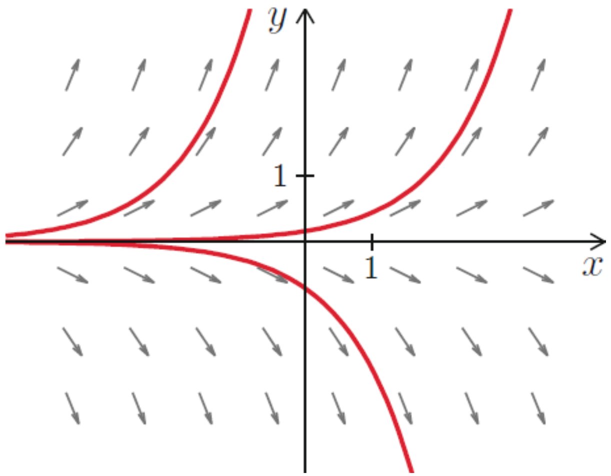


- ***Beispiele*** (Richtungsfeld)

a) Das Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$y' = y$$

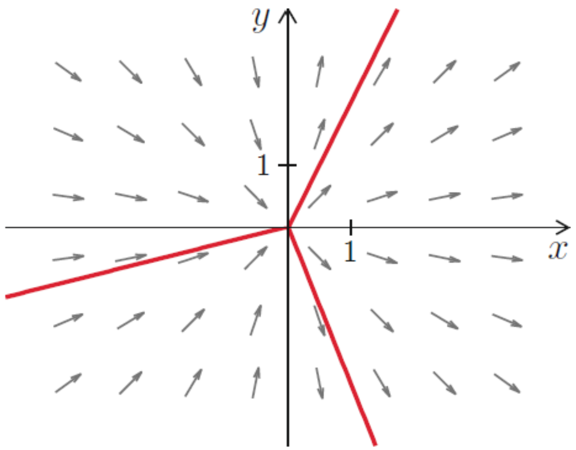
ist für alle P in der (x, y)-Ebene definiert. Es ist symmetrisch zur x-Achse. Alle Linienelemente durch Punkte mitunkte demselben y-Wert haben dieselbe Steigung. Die Lösungsfunktionen $y(x) = Ce^x$ verlaufen tangential zum Richtungsfeld.



b) Das Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$y' = y/x$$

besteht aus Linienelementen, die in Richtung der Ursprungsgeraden verlaufen. Auf der y-Achse, also für $x = 0$, sind formal keine Linienelemente definiert. Abgesehen vom Ursprung besitzen die Linienelemente auf der y-Achse im Grenzwert die Steigung $\pm\infty$. Im Ursprung ist keine Steigung definiert. Man bezeichnet diesen Punkt als Singularität der Differenzialgleichung. Dem Richtungsfeld kann man entnehmen, dass die Lösungsfunktionen Halbgeraden bis zum Ursprung sind.



- ***Definition*** (Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien)

  Ersetzt man in einer Differenzialgleichung erster Ordnung die Steigung durch den negativen Kehrwert, so bezeichnet man diese neue Differenzialgleichung als Differenzialgleichung der **Orthogonaltrajektorien**.

- ***Beispiel*** (Orthogonaltrajektorie)

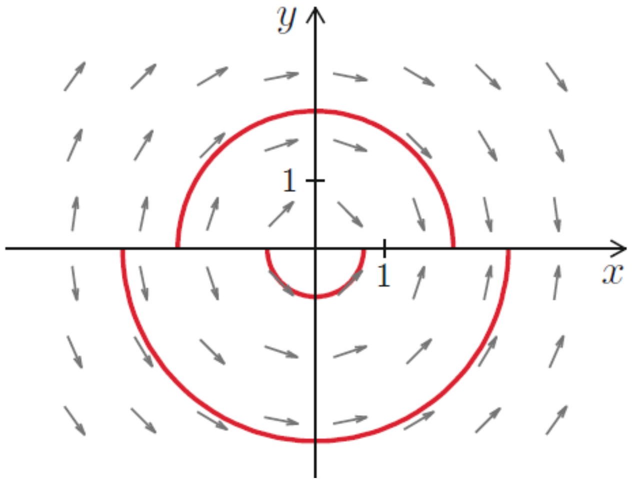
  Die Linienelemente der Differenzialgleichung

  $$y' = -\frac{x}{y}$$

  stehen senkrecht auf den Linienelementen der Differenzialgleichung $y' = y/x$.

  Das Richtungsfeld besteht aus Linienelementen, die orthogonal zu den Ursprungsgeraden verlaufen. Auf der x-Achse, also für $y = 0$, sind formal keine Linienelemente definiert.

  Dem Richtungsfeld entnimmt man, dass die Lösungsfunktionen Halbkreise um den Ursprung sind.



- ***Bemerkung*** (Orthogonaltrajektorien)

  Alle Lösungsfunktionen der ursprünglichen Differenzialgleichung und der zugehörigen Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien sind überall senkrecht zueinander.

- ***Ansätze zur Lösung von Differenzialgleichungen erster Ordnung***:

  Eine systematische Methode zur Lösung von Differenzialgleichungen erster Ordnung geht auf den Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli zurück. Allerdings lässt sich die sogenannte Separation der Variablen nicht bei allen Differenzialgleichungen erster Ordnung durchführen. Voraussetzung zur Anwendung dieser Methode ist, dass die Differenzialgleichung in *expliziter Form* vorliegt und sich auf der rechten Seite der Differenzialgleichung Terme, die nur x enthalten und Terme, die nur y enthalten, *trennen* lassen.

- ***Definition*** (Separierbare Differenzialgleichung)

  Eine Differenzialgleichung erster Ordnung, die man in der Form

$$y' = f(x)/g(y)$$

  schreiben kann, bezeichnet man als ***separierbar***

- ***Beispiel*** (Separierbare Differenzialgleichung)

  Bei der Differenzialgleichung $y' = -x/y$ ersetzen wir y' formal durch den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$. Dann formen wir die Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur noch Ausdrücke mit y und dy und auf der rechten Seite nur noch Ausdrücke mit x und dx stehen und integrieren auf beiden Seiten:

  $$y\,dy = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = -\int x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}\,x^2 + C_2.$$

  Bringt man C_1 auf die rechte Seite, so erkennt man, dass $C_2 - C_1 > 0$ gelten muss. Jetzt ist es geschickt, anstatt der beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 eine neue Konstante $C > 0$ mit $\mathrm{C}^2 = 2(C_2 - C_1)$ zu verwenden. Wir lösen nach y auf und erhalten

  $$y(x) = \pm\sqrt{C^2 - x^2}, \qquad x \in (-C, C), \qquad C > 0.$$

  Die Lösungskurven sind also Kreise um den Ursprung mit Ausnahme der x-Achse.

- ***Generell:***

  Liegt eine Differenzialgleichung erst einmal in separierter Form vor, so führt der Lösungsansatz aus dem vorherigen Beispiel zum Ziel. Integriert man die separierbare Differenzialgleichung formal nach x, also

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \Longrightarrow \quad g(y)y' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \int g(y)y'dx = \int f(x)\,dx\,,$$

  so erhält man durch Einsetzen des Differenzialquotienten $y' = dy/dx$ und Kürzen von dx

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dy = \int f(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx\,.$$

  Hinter der formalen Umformung mit den Differenzialen dx und dy steht die Anwendung der Substitutionsregel für Integrale.

- ***Separation der Variablen:***

Die allgemeine Lösung einer separierbaren Differenzialgleichung kann man durch folgende Schritte bestimmen:

(1) Ersetze y' formal durch dy/dx.

(2) Separiere alle Terme in x und alle Terme in y und bringe die Differenzialgleichung damit in die Form $g(y)\, dy = f(x)\, dx$.

(3) Integriere symbolisch

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

separat auf beiden Seiten.

(4) Löse die integrierte Gleichung nach der gesuchten Funktion y(x) auf.

- ***Bemerkung:***

Beim Integrieren der Gleichung ist zu beachten, dass die unbestimmten Integrale formal auf beiden Seiten jeweils eine Integrationskonstante erzeugen. Zur Vereinfachung kann man die beiden additiven Konstanten zu einer einzigen Konstante zusammenfassen

Beim letzten Schritt der Separation ist zu beachten, dass das Auflösen der integrierten Gleichung nach der gesuchten Funktion nicht immer möglich.

- ***Beispiele*** (Separation der Variablen)

  a) Die Differenzialgleichung $y' = y$ ist separierbar, denn sie kann in der Form

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{y}} = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad f(x) = 1, \qquad g(y) = \frac{1}{y}$$

geschrieben werden. Die Integration von $f(x)$ nach x und von $g(y)$ nach y erfolgt durch

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x+C}.$$

Wir lösen nach y auf und erhalten

$$y(x) = \pm e^{x+C} = \pm e^{C} e^{x} = \tilde{C} e^{x}$$

  b) Die Differenzialgleichung $y' = y/x$ kann in der Form

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(y) = \frac{1}{y}$$

geschrieben werden, sie ist also separierbar. Die Integration von $f(x)$ nach x und von $g(y)$ nach y erfolgt durch

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad |y| = |x| e^{C} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{C} x = \tilde{C} x$$

- ***Motivation der linearen Substitution:***

Differenzialgleichungen mit einer ganz bestimmten Struktur können unter Umständen durch eine Substitution gelöst werden. Die Idee dabei ist, dass durch eine Variablentransformation eine einfachere Differenzialgleichung entsteht. Bei einer Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(ax + by + c)$$

bietet sich die lineare Substitution $u = ax + by + c$ an.

Mithilfe von $u' = a + by'$ können wir x und y vollständig eliminieren und erhalten die transformierte Differenzialgleichung

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \qquad \Rightarrow \qquad u' = a + bf(u)$$

Diese neue Differenzialgleichung in u können wir durch Separation lösen:

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{a + bf(u)}\, du = \int 1\, dx$$

- ***Satz*** (Lineare Substitution)

Eine Differenzialgleichung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c)$$

lässt sich mit der linearen Substitution $u = ax + by + c$ und $u' = a + by'$ in eine separierbare Differenzialgleichung transformieren.

- ***Beispiel*** (Lineare Substitution)

Bei der Differenzialgleichung

$$y' = \frac{1}{1+x-y}$$

bietet sich die lineare Substitution $u = 1 + x - y$ an. Unter Berücksichtigung von $u' = 1 - y'$ ergibt sich eine neue Differenzialgleichung:

$$1 - u' = \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u-1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du'}{dx} = \frac{u-1}{u}.$$

Diese neue Differenzialgleichung lässt sich durch Separation lösen

$$\int \frac{u}{u-1}\, du = \int 1\, dx\,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung $\frac{u}{u-1} = 1 + \frac{1}{u-1}$ erhalten wir

$$u + \ln|u-1| \;=\; x + C.$$

Aus der Rücksubstitution $u = 1 + x - y$ ergibt sich die Beziehung $1 - y + \ln \mid x - y \mid = C$, die sich leider nicht nach y auflösen lässt.

- ***Motivation:***

Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen sind Differenzialgleichungen, die man in der Form

$$y' = f(y/x)$$

darstellen kann. Zur Vereinfachung verwenden wir die Substitution $u = y/x$. Wie bei der linearen Substitution drücken wir y' durch u und u' aus. Dazu lösen wir die Substitutionsgleichung nach y auf und berechnen die Ableitung:

$$y = u\,x \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + x.$$

Durch Einsetzen erhält man folgende transformierte Differenzialgleichung:

$$u'x + x = f(u) \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

Trennt man x und u mittels $u' = du/dx$, so ergibt sich

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

- ***Satz*** (Substitution bei einer Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung)

Eine Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung

$$y' = f(y/x)$$

lässt sich mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ und $u' = \frac{y'-u}{x}$ in eine separierbare Differenzialgleichung transformieren.

Beispiel (Substitution einer Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung)

Die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

ist ein typisches Beispiel für eine Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung. Mit der Substitution $u = y/x$ und $y' = u'x + u$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$u'x + u = u^2 + u \qquad \Rightarrow \qquad u'x = u^2.$$

Diese Differenzialgleichung ist separierbar, denn

$$\int \frac{1}{u^2}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{u} = \ln|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{-1}{\ln|x| + C}.$$

Aus der Rücksubstitution $u = y/x$ bzw. $y = u\, x$ folgt die allgemeine Lösung

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + C}.$$

- ***Definition*** (Lineare Differenzialgleichung)

  Eine Differenzialgleichung, die man in der Form

  $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)\,y = r(x)$$

  schreiben kann, nennt man eine **lineare Differenzialgleichung** n −ter Ordnung.

  Die Koeffizienten $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ und die Störfunktion $r(x)$ sind dabei beliebige Funktionen, die von x abhängen.

  - ***Definition*** (Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichung)

  Eine lineare Differenzialgleichung mit Störfunktion $r(x)$ nennt man eine **inhomogene** lineare Differenzialgleichung. Ist die Störfunktion $r(x)$ die Nullfunktion, dann bezeichnet man die Differenzialgleichung als eine **homogene** lineare Differenzialgleichung.

- ***Definition*** (Triviale Lösung)

  Jede homogene lineare Differenzialgleichung hat die triviale Lösung $y(x) = 0$.

- ***Beispiel*** (Lineare Differenzialgleichungen)

  a) Die Differenzialgleichung $\dot{N} = -\lambda N$ ist linear und homogen.

  b) Die Differenzialgleichung $\ddot{x} = \cos(x)$ ist eine nichtlineare Differenzialgleichung.

- ***Satz:*** (Addition von homogener und partikulärer Lösung)

  Addiert man zu einer partikulären Lösung y_p einer linearen Differenzialgleichung eine Lösung y_h der entsprechenden homogenen linearen Differenzialgleichung, dann ergibt

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

  wieder eine Lösung der linearen Differenzialgleichung.

- ***Satz:*** (Differenz partikulärer Lösungen)

  Bei einer linearen Differenzialgleichung ergibt die Differenz zweier partikulärer Lösungen

$$y_{p1}(x) - y_{p2}(x) = y_h(x)$$

  eine Lösung y_h der entsprechenden homogenen linearen Differenzialgleichung.

- ***Satz:*** (Lösung homogener linearer Differenzialgleichungen 1. Ordnung)

  Die allgemeine Lösung y_h einer homogenen linearen Differenzialgleichung

  $$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$

  erster Ordnung lässt sich durch Separation bestimmen und lautet

  $$y_h(x) = C\,e^{-\int \frac{a0(x)}{a1(x)}dx}.$$

  Eine spezielle homogene Lösung erhält man, wenn man C = 1 setzt

- ***Definition:*** (Fundamentallösung)

  Die spezielle Lösung

  $$y_1(x) = e^{-\int \frac{a0(x)}{a1(x)}dx}$$

  einer homogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung $a_1(x)\,y' + a_0(x)y = 0$

  bezeichnet man als **Fundamentallösung**.

- ***Beispiel*** (Homogene Differenzialgleichung erster Ordnung)

  Die Differenzialgleichung

$$y' + \frac{1}{x}\, y = 0$$

  ist eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.

  Mit $a_1(x) = 1$ und $a_0(x) = 1/x$ ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(x) \;=\; C\, e^{-\int \frac{a0(x)}{a1(x)}dx} \;=\; C\, e^{-\int \frac{1}{x}dx} \;=\; C\, e^{-\ln(x)} \;=\; \frac{C}{x}.$$

- ***Ansatz zur Lösung von lienearen GDL erster Ordnung durch die Variation der Konstanten***

  Eine partikuläre Lösung einer linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y \;=\; r(x)$$

  lässt sich durch **Variation der Konstanten** bestimmen:

  (1) Berechne die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

  (2) Ersetze die Konstante C in der homogenen Lösung durch eine Funktion $C(x)$. Daraus ergibt sich ein Ansatz y_p für eine partikuläre Lösung.

  (3) Bestimme die Funktion $C(x)$ durch Einsetzen von y_p in die Differenzialgleichung.

- ***Beispiel*** (Inhomogene Differenzialgleichung erster Ordung)

  Die lineare Differenzialgleichung

$$y' + \frac{1}{x}\, y \;= \frac{2}{1+x^2}$$

  hat die homogene Lösung $y_h(x) = C/x$

  Zur Bestimmung einer partikulären Lösung wählen wir den Ansatz $y_p(x) = C(x)/x$.

  Durch Einsetzen in der Gleichung erhält man $C'(x) = 2x/(1+x^2)$, also $C(x) = \ln(1+x^2)$. Also die finale Lösung lautet:

$$y_p(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

- ***Satz:*** (Linearkombination von Lösungen)

  Sind y_1 und y_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung, dann ist auch

$$y(x) \; = \; C_1 \, y_1(x) \; + \; C_2 \, y_2(x)$$

  mit beliebigen Konstanten C_1 und C_2 eine Lösung dieser Differenzialgleichung.

- ***Beispiel:*** (Linearkombination von Lösungen)

  Die homogene Differenzialgleichung

$$y'' \; + \; 9\,y \; = \; 0$$

  hat die beiden Lösungen $y_1(x) \; = \; \sin(3x)$ und $y_2(x) \; = \; \cos(3x)$.

  Also ist auch

$$y(x) \; = \; C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

  eine Lösung.

- ***Definition:*** *(Fundamentalsystem)*

  Die n Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ einer linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung bilden

  ein Fundamentalsystem, wenn aus

$$C_1\, y_1(x) + \; C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x) = \; 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

  folgt, dass $C_1 = 0, \;\; C_2 = 0, \dots, C_n = 0.$

  Man nennt dann $y_1, y_2, \dots, y_n$ Fundamentallösungen der Differenzialgleichung.

Satz: (Allgemeine Lösung und Fundamentallösung)

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung erhält man als Linearkombination von n Fundamentallösungen

$$y(x) = \; C_1\, y_1(x) + \; C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x)$$

Dabei bilden die n Fundamentallösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem und $C_1, C_2, \dots, C_n$ sind beliebige Konstanten.

Satz: (Wronski-Kriterium)

Die n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Wronski-Determinante für alle reellen Zahlen x nicht null ist, also

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_1^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad für\ alle\ x \in \mathbb{R}$$

- ***Beispiele*** (Wronski-Kriterium)

  a) Wir untersuchen, ob die beiden Funktionen $y_1(x) = \cos(\omega x)$ und $y_2(x) = \sin(\omega x)$ für $\omega \neq 0$ ein Fundamentalsystem bilden. Dazu berechnen wir die Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega x) & sin(\omega x) \\ -\omega sin(\omega x) & \omega cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega\cos^2(\omega x) + \omega\sin^2(\omega x) = \omega$$

Die Wronski-Determinante ist für alle reelle Zahlen x ungleich null. Somit bilden die beiden Funktionen ein Fundamentalsystem.

  b) Die drei Polynome $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ und $y_3(x) = x^2$ bilden ein Fundamentalsystem, denn die Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

ist für alle reelle Zahlen x ungleich null.

- ***Motivation:***

  Lineare Differenzialgleichungen, bei denen die Koeffizienten keine echte Funktionen ai(x), sondern nur konstante Zahlen ai sind, lassen sich systematisch lösen.

Definition: *(Lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten)*

Eine lineare Differenzialgleichung, bei der die Faktoren vor den Ableitungen keine echten Funktionen, sondern nur Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = r(x),$$

nennt man eine **lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten**.

Definition: *(Charakteristische Gleichung)*

Zur homogenen linearen Differenzialgleichung

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

gehört die **charakteristische Gleichung**

$$a_n\, \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0.$$

Sie entsteht aus der Differenzialgleichung durch den Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$.

- ***Definition*** (Eigenwerte und Eigenfunktionen)

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

bezeichnet man als **Eigenwerte** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Die Lösungsfunktionen, die sich daraus durch den Exponentialansatz ergeben, nennt man **Eigenfunktionen**

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y2(x) = e^{\lambda_2 x}, \qquad \ldots \qquad , y_n(x) = e^{\lambda_n x}.$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen können reell oder komplex sein.

- ***Beispiel*** (Charakteristische Gleichung)

Zu der homogenen linearen Differenzialgleichung betrachten wir die charakteristische Gleichung:

$$y^{(5)} - 3\,y''' + 52\,y'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^5 - 3\lambda^3 + 52\,\lambda^2 = 0.$$

Den Faktor λ^2 kann man ausklammern. Dadurch sind $\lambda_{1,2} = 0$ Lösungen der charakteristischen Gleichung.

- ***Mögliche Lösungen bei Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:***

  Bei den Eigenwerten einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten sind folgende Fälle zu beachten:

  a) Einfache reelle Eigenwerte

  b) Einfache komplexe Eigenwerte

  c) Mehrfache reelle Eigenwerte

  d) Mehrfache komplexe Eigenwerte

  Die allgemeine Lösung besteht aus einer Linearkombination der Eigenfunktionen

a) Einfache reelle Eigenwerte

Jeder einfache reelle Eigenwert λ einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten erzeugt genau eine reelle Fundamentallösung:

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Beispiel:

Die Differenzialgleichung mit der charakteristischen Gleichung

$$y'' - 7y' + 12y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 4$. Daraus ergeben sich die Eigenfunktionen

$$y_1(x) = e^{3x} \ , \qquad y_2(x) = e^{4x}.$$

Da zwei Exponentialfunktionen mit unterschiedlichem Exponenten ein Fundamentalsystem bilden lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

b) Mehrfache reelle Eigenwerte

Jeder doppelte reelle Eigenwert λ einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten erzeugt genau zwei reelle Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \ , y_2(x) = xe^{\lambda x}.$$

Falls die Vielfachheit des reellen Eigenwerts größer als zwei ist, entstehen jeweils durch Multiplikation mit x neue Fundamentallösungen

$$y_3(x) = x^2 e^{\lambda x} \ , y_4(x) = x^3 e^{\lambda x}, \ldots$$

Beispiel:

Die Differenzialgleichung mit der charakteristischen Gleichung

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Der doppelte reelle Eigenwert $\lambda_{1,2} = -1$ ergibt zwei Fundamentallösungen $y_1(x) = e^{-x}$ und $y_2(x) = xe^{-x}$ und die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

c) Einfache komplexe Eigenwerte

Jedes einfache konjugiert komplexe Paar Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten erzeugt genau zwei reelle Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)\ ,\ y_2(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

Der Realteil erzeugt Lösungsanteile in Form von Exponentialfunktionen und die Imaginärteile erzeugen Sinus- und Kosinusanteile.

Beispiel:

Die Differenzialgleichung mit der charakteristischen Gleichung

$$y'' - 4y' + 20y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

hat zwei Nullstellen $\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i$. Der Realteil der Eigenwerte steht bei der Lösung in der e-Funktion und die Imaginärteile erzeugen Sinus- und Kosinusschwingungen. Dies führt zu der Lösung:

$$y(x) = e^{2x}(C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x))$$

d) Mehrfache komplexe Eigenwerte

Jedes doppelte konjugiert komplexe Paar Eigenwerte $\lambda = a \pm i\, b$ einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten erzeugt genau vier reelle Fundamentallösungen

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)\ ,\ y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)\,,$$
$$y_3(x) = xe^{ax}\cos(bx)\ ,\ y_4(x) = xe^{ax}\sin(bx).$$

Falls die Vielfachheit des komplexen Eigenwerts größer als zwei ist, entstehen jeweils durch Multiplikation mit x neue Fundamentallösungen

$$y_5(x) = x^2e^{ax}\cos(bx)\ ,\ y_6(x) = x^2e^{ax}\sin(bx)\,, \dots\dots$$

Beispiel:

Die Differenzialgleichung $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0.$$

Das Polynom hat die doppelten Lösungen $\lambda_{1,2} = 1 + i$ und $\lambda_{3,4} = 1 - i$. Somit ist

$$y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x + C_3x\cos x + C_4x\sin x)$$

die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

- ***Beispiel:***

Die Eigenwerte der Differenzialgleichung

$$y^{(5)} - 3y''' + 52\,y'' = 0$$

Hat die die charakteristische Gleichung

$$\lambda^5 - 3\lambda^3 + 52\lambda^2 = 0$$

und die daher die Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -4$ und $\lambda_{4,5} = 2 \pm 3i$.

Es kommen also sowohl eine doppelte reelle Lösung als auch ein komplex konjugiertes Paar als Eigenwerte vor. Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differenzialgleichung ist somit

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x} + e^{2x}(C_4 \cos(3\,x) + C_5 \sin(3\,x)).$$

- ***Ansätze zur Findung der partikulären Lösung der inhomogenen linearen DGL***

Die Lösung ist die Summe Aufgrund der einfachen Struktur von linearen Differenzialgleichungen erzeugen Störfunktionen in Form eines Polynoms in der Regel partikuläre Lösungen, die auch Polynome sind. Dasselbe Prinzip gilt auch für Exponentialfunktionen und gedämpfte und ungedämpfte harmonische Schwingungen.

Deshalb wählt man als Ansatz für eine partikuläre Lösung einfach die Störfunktion in einer etwas allgemeineren Form mit zunächst freien Koeffizienten.

Die folgende Übersicht zeigt die Ansätze für einige Typen von Störfunktionen.

Störansatztabelle

Störfunktion	Ansatz für partikuläre Lösung
Polynom vom Grad n $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	Polynom vom Grad n $y_p(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
Exponentialfunktion $r(x) = a\,\mathrm{e}^{k\,x}$	Exponentialfunktion $y_p(x) = A\,\mathrm{e}^{k\,x}$
Harmonische Schwingung $r(x) = a_1 \cos(\omega\,x) + a_2 \sin(\omega\,x)$	Harmonische Schwingung $y_p(x) = A_1 \cos(\omega\,x) + A_2 \sin(\omega\,x)$
Gedämpfte harmonische Schwingung $r(x) = \mathrm{e}^{k\,x}\,(a_1 \cos(\omega\,x) + a_2 \sin(\omega x))$	Gedämpfte harmonische Schwingung $y_p(x) = \mathrm{e}^{k\,x}\,(A_1 \cos(\omega\,x) + A_2 \sin(\omega x))$

- ***Beispiel*** (Störansatz)

  a) Die Störfunktion der Differenzialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 8x + 4x^2$$

besteht aus einem Polynom vom Grad 2. Laut Tabelle ist der Störansatz für eine partikuläre Lösung $y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$. Das Einsetzen der Funktion mit ihren Ableitungen in die Differenzialgleichung erhält man

$$4 - 8x + 4x^2 \; = \; y'' - 3y' + 2y \; = \; 2A_2 - 3(A_1 + 2A_2 x) + 2\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) \; = \; (2A_0 - 3A_1 + 2A_2) + (2A_1 - 6A_2)x + 2A_2 x^2$$

Daraus erhält man

$$\begin{cases} 2A_0 - 3A_1 + 2A_2 = 4 \\ 2A_1 - 6A_2 = -8 \\ 2A_2 = 4 \end{cases}$$

und die eindeutige Lösung $A_2 = 2, A_1 = 2$ und $A_0 = 3$ besitzt.

Eine partikuläre Lösung lautet $y_p(x) = 3 + 2x + 2x^2$

b) Finden Sie eine partikuläre Lösung der Differenzialgleichung $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

- ***Definition: Resonanz***

  Bei einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten spricht man von Resonanz, falls die Störfunktion in der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung enthalten ist

Zuordnung von Eigenwerten bei Störfunktionen

Störfunktion	Zugeordneter Eigenwert
Polynom vom Grad n $r(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$\lambda = 0$
Exponentialfunktion $r(x) = a\,\mathrm{e}^{k\,x}$	$\lambda = k$
Harmonische Schwingung $r(x) = a_1 \cos(\omega\,x) + a_2 \sin(\omega\,x)$	$\lambda = \pm\omega\,\mathrm{i}$
Gedämpfte harmonische Schwingung $r(x) = \mathrm{e}^{k\,x}\,(a_1 \cos(\omega\,x) + a_2 \sin(\omega x))$	$\lambda = k \pm \omega\,\mathrm{i}$

Übersicht der Lösungen:

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die bisherigen Beispiele zu linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Bei jeder homogenen Differenzialgleichung werden zu unterschiedlichen Störfunktionen jeweils der entsprechende Ansatz für eine partikuläre Lösung angegeben.

Differenzialgleichung Charakteristische Gleichung Eigenwerte	Störfunktion	Ansatz für partikuläre Lösung (Resonanzfälle sind rot markiert)
$y' + 2y = 0$	e^{-2x}	$x\,A\,e^{-2x}$
$\lambda + 2 = 0$	e^{2x}	$A\,e^{2x}$
$\lambda_1 = -2$	$e^{-2x}\cos x$	$(A_1\cos x + A_2\sin x)\,e^{-2x}$
$y'' + 9y = 0$	$\cos(3x)$	$x\,(A_1\cos(3x) + A_2\sin(3x))$
$\lambda^2 + 9 = 0$	$\sin(3x)$	$x\,(A_1\cos(3x) + A_2\sin(3x))$
$\lambda_{1,2} = \pm 3\,i$	$e^{3x}\cos(3x)$	$(A_1\cos(3x) + A_2\sin(3x))\,e^{3x}$
$y'' - 7y' + 12y = 0$	e^{3x}	$x\,A\,e^{3x}$
$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$	e^{4x}	$x\,A\,e^{4x}$
$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4$	e^{-3x}	$A\,e^{-3x}$
$y'' - 3y' + 2y = 0$	e^{-x}	$A\,e^{-x}$
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$	e^{-2x}	$A\,e^{-2x}$
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$	e^{x}	$x\,A\,e^{x}$
$y'' + 3y' = 0$	e^{-3x}	$x\ A\,e^{-3x}$
$\lambda^2 + 3\lambda = 0$	e^{3x}	$A\,e^{3x}$
$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3$	x^2	$x\,(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$
$y'' + 2y' + y = 0$	e^{-x}	$x^2\,A\,e^{-x}$
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$	e^{x}	$A\,e^{x}$
$\lambda_{1,2} = -1$	x	$A_0 + A_1 x$
$y'' - 4y' + 20y = 0$	$e^{2x}\cos(4x)$	$x\,(A_1\cos(4x) + A_2\sin(4x))\,e^{2x}$
$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$	e^{2x}	$A\,e^{2x}$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm 4\,i$	$\sin(4x)$	$A_1\cos(4x) + A_2\sin(4x)$

5.4.1 Definitionen

Schwingungsdifferenzialgleichungen sind lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr Verhalten ist trotz ihrer Einfachheit vielfältig, sodass man verschiedene Phänomene, die bei Differenzialgleichungen auftreten können, studieren kann. In Anwendungen treten Schwingungsdifferenzialgleichungen an vielen Stellen auf.

So kann ein mechanischer Schwinger ebenso wie ein elektrischer Schaltkreis als Schwingungsdifferenzialgleichung modelliert werden.

- ***Definition*** (Schwingungsdifferenzialgleichung)

  Eine Differenzialgleichung, die man in der Form
  $$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = r(t)$$
  schreiben kann, nennt man eine **Schwingungsdifferenzialgleichung** mit der **Dämpfung** $\delta \geq 0$ und der Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$.

- ***Definition*** (Freie und erzwungene Schwingung)

  Eine homogene Schwingungsdifferenzialgleichung bezeichnet man als freie Schwingung, eine inhomogene als angeregte oder erzwungene Schwingung.

Freie Schwingung:

Eigenwerte der Schwingungsdifferenzialgleichung:

Die Schwingungsdifferenzialgleichung hat die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

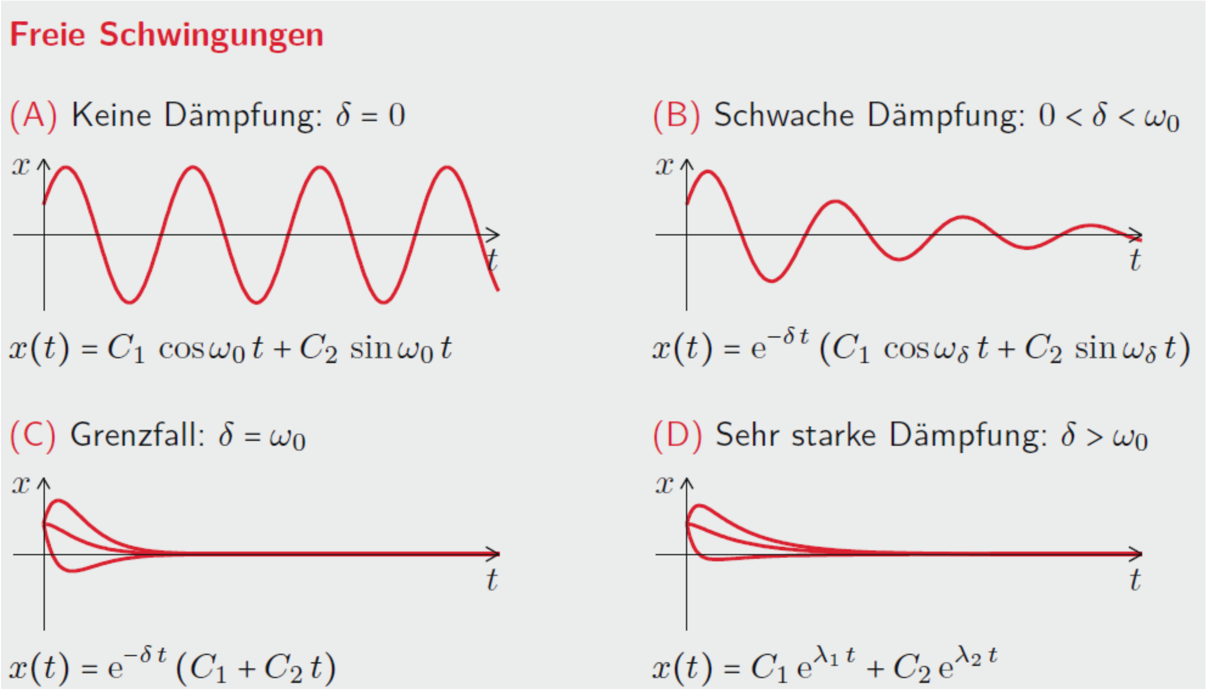
Deshalb unterscheidet man vier Fälle:

(A) Keine Dämpfung: $\delta = 0$

(B) Schwache Dämpfung: $0 < \delta < \omega_0$

(C) Grenzfall: $\delta = \omega_0$

(D) Sehr starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$



Harmonisch angeregte Schwingung:

Bei praktischen Problemstellungen treten Schwingungen typischerweise dann auf, wenn ein schwingungsfähiges System eine Anregung von außen erfährt.

Definition (Harmonisch angeregte Schwingung)

Eine Differenzialgleichung der Form

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2\, x_E\, \cos(\omega_E t)$$

bezeichnet man als **harmonisch angeregte Schwingung**. Dabei bezeichnet $x_E > 0$ die **Erregeramplitude** und $\omega_E > 0$ die **Erregerkreisfrequaenz**.

Satz (Harmonisch angeregte, ungedämpfte Schwingung)

Eine harmonisch angeregte Schwingung mit $\delta = 0$ besitzt die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_E^2} & x_E \cos(\omega_E t) & \text{für} \quad \omega_E < \omega_0 \\ \frac{1}{2}\,\omega_0\, t & x_E \cos(\omega_E t - \frac{\pi}{2}) & \text{für} \quad \omega_E = \omega_0 \\ \dfrac{\omega_0^2}{\omega_E^2 - \omega_0^2} & x_E \cos(\omega_E t - \pi) & \text{für} \quad \omega_E > \omega_0\,. \end{cases}$$

Satz (Harmonisch angeregte, gedämpfte Schwingung)

Eine harmonisch angeregte Schwingung mit $\delta > 0$ besitzt die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2\, x_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega_E^2}} \cos(\omega_E t - \varphi), \qquad \tan\varphi = \frac{2\,\delta\,\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}.$$

Beispiel (Harmonisch angeregte, gedämpfte Schwingung)

Bei der Schwingungsdifferenzialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4\,x = 8\,\cos 3\,t$$

handelt es sich um ein schwach gedämpftes Problem mit Dämpfung $\delta = \frac{1}{2}$ und Kreisfrequenz $\omega_0 = 2$. Die Erregerkreisfrequenz ist $\omega_E = 3$ und die Erregeramplitude $x_E = 2$.

Die homogene Lösung lautet

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t}\,(C_1\,\cos\omega_\delta\,t + C_2\,\sin\omega_\delta\,t)$$

mit der Kreisfrequenz

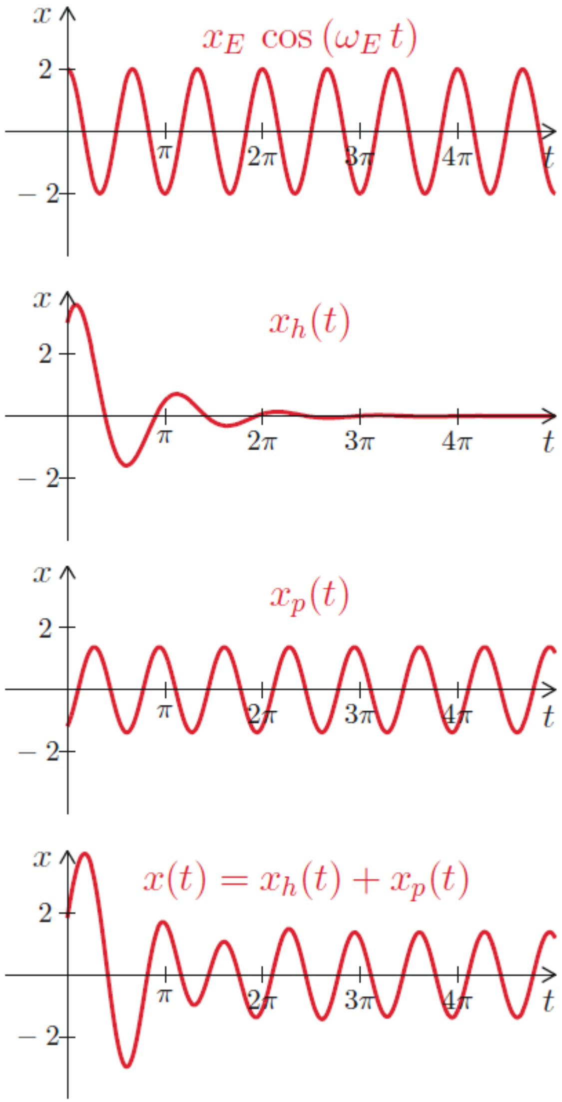
$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

Die partikuläre Lösung $x_p(t) = A\,\cos(3\,t - \varphi)$ hat die Amplitude

$$A = \frac{8}{\sqrt{(2^2 - 3^2)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{34}}\,.$$

Bei überkritischer Anregung liegt die Phasenverschiebung $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{-5}\right) + \pi$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Bei der allgemeinen Lösung, die durch Überlagerung der homogenen und der partikulären Lösung entsteht, tritt nach einer gewissen Zeit ein sogenannter eingeschwungener oder stationärer Zustand ein. Die exponentiell gedämpfte homogene Lösung spielt nur zu Beginn der Schwingung eine Rolle.



- ***Definition*** (System gewöhnlicher Differenzialgleichungen)

  Ein System von Gleichungen, in dem die Ableitungen mehrerer unbekannter Funktionen vorkommen, nennt man ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen oder Differenzialgleichungssystem.

- ***Beispiel*** (Differenzialgleichungssystem)

  Die drei Gleichungen

$$\begin{cases} \dot{x_1} + x_1 - x_2 & = 0 \\ \dot{x_2} + x_1 + x_2 + x_1 x_2 & = 0 \\ \dot{x_3} + x_3 - x_1 x_2 & = 0 \end{cases}$$

  stellen ein Differenzialgleichungssystem für die gesuchten Funktionen x_1, x_2 und x_3 dar. Alle drei Funktionen hängen von der Variable t ab. Das Differenzialgleichungssystem ist ein Spezialfall eines nach dem amerikanischen Meteorologen und Mathematiker Edward Norton Lorenz benannten Systems, das als Lösung einen sogenannten Lorenz-Attraktor besitzt.

- ***Lösung des Differenzialgleichungssystems:***

  In der Regel sind bei einem Differenzialgleichungssystem die gesuchten Funktionen so untereinander gekoppelt, dass man die Funktionen nicht einzeln, sondern nur gemeinsam berechnen kann.

Eliminationsverfahren:

Das Eliminationsverfahren für Differenzialgleichungssysteme verfolgt eine ähnliche Idee wie das Gaußsche Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Aus allen Differenzialgleichungen des Systems wird eine einzige Gleichung hergeleitet, die nur noch eine der gesuchten Funktionen und ihre Ableitungen enthält.

Beim Eliminationsverfahren versucht man ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen durch sukzessive Elimination einzelner Funktionen und ihrer Ableitungen auf eine einzige Differenzialgleichung zurückzuführen. Das Eliminationsverfahren eignet sich für einfache Differenzialgleichungssysteme mit wenig Gleichungen und mit wenig Funktionen.

- ***Beispiel*** (Eliminationsverfahren)

Beim Differenzialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dfrac{1}{t} x_2 = 0 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - t x_1 + 2x_2 = te^t \end{cases}$$

bietet es sich an, die erste Gleichung nach x_2 aufzulösen, abzuleiten $x_2 = -t\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 - t\ddot{x}_1$

und diese Beziehungen in die zweite Gleichung einzusetzen $\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + x_1 = -e^t$.

Man erhält

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - \frac{1}{4} e^t \quad \text{und} \quad x_2(t) = t\left(C_1 e^{-t} + C_2(t-1)e^{-t} - \frac{1}{4} e^t\right)$$

Zustandsvariablen:

Mit dem Eliminationsverfahren versucht man, ein Differenzialgleichungssystem auf eine einzige Gleichung zu reduzieren. Insbesondere bei numerischen Näherungsverfahren geht man genau den umgekehrten Weg. Ausgehend von einer einzigen Differenzialgleichung erzeugt man durch Einführung von sogenannten Zustandsgrößen ein äquivalentes Differenzialgleichungssystem.

- ***Definition*** (Zustandsvariablen)

Eine beliebige Differenzialgleichung n-ter Ordnung

$$f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}, t\right) = 0$$

kann man mithilfe von n **Zustandsvariablen** oder **Zustandsgrößen**

$$z_1(t) = x(t), \qquad z_2(t) = \dot{x}(t), \qquad z_3(t) = \ddot{x}(t), \qquad \dots \qquad z_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

durch ein äquivalentes Differenzialgleichungssystem erster Ordnung darstellen:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ f\left(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dot{Z}_n, t\right) = 0 \end{cases}$$

Beispiel (Zustandsvariablen)

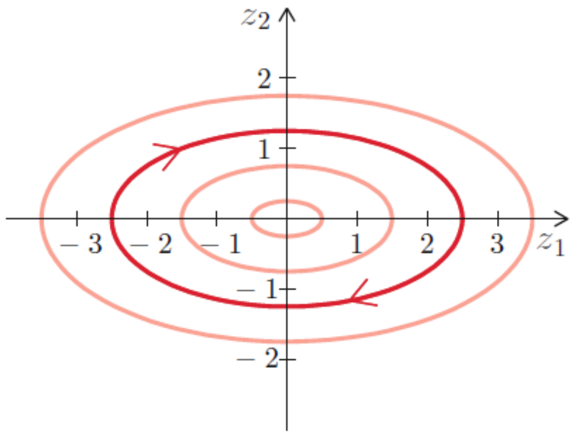
Die Differenzialgleichung einer freien Schwingung $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ kann man mit den Zustandsgrößen $z_1 = x$ und $z_2 = \dot{x}$ als System mit zwei Gleichungen erster Ordnung darstellen:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{z}_1 = z_2 \quad und \quad \dot{z}_2 = z_1 = \ddot{x} = -2\delta z_2 - \omega_0^2\, z_1.$$

Für $\delta = 0$ bestehen die Lösungen aus ungedämpften harmonischen Schwingungen:

$$\begin{aligned} z_1(t) = x(t) &= \quad C_1 \cos\omega_0 t + \quad C_2 \sin\omega_0 t \\ z_2(t) = \dot{x}(t) &= -\omega_0 C_1 \sin\omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos\omega_0 t \end{aligned}$$

Die Phasenkurven sind Ellipsen. Das Verhältnis der Halbachsen ist durch die Kreisfrequenz ω_0 festgelegt. Den Gleichgewichtspunkt $(0|0)$ bezeichnet man als Wirbelpunkt. Die Abbildung zeigt den Fall $\omega_0 = \frac{1}{2}$.



Beispiel (Zustandsvariablen)

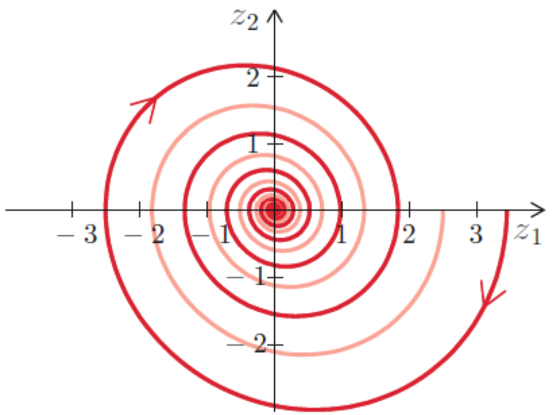
Die Differenzialgleichung einer freien Schwingung $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ kann man mit den Zustandsgrößen $z_1 = x$ und $z_2 = \dot{x}$ als System mit zwei Gleichungen erster Ordnung darstellen:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{z}_1 = z_2 \quad und \quad \dot{z}_2 = z_1 = \ddot{x} = -2\delta z_2 - \omega_0^2\, z_1.$$

Im Fall von schwacher Dämpfung, also für $0 < \delta < \omega_0$, bestehen die Lösungen aus gedämpften harmonischen Schwingungen:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_1 \cos\omega_\delta t + C_2 \sin\omega_\delta t) \\ z_2(t) &= -\delta\, \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_1 \cos\omega_\delta t + C_2 \sin\omega_\delta t) \\ &\quad + \omega_\delta\, \mathrm{e}^{-\delta t}\,(C_2 \cos\omega_\delta t - C_1 \sin\omega_\delta t)\,. \end{aligned}$$

Die Phasenkurven sind Spiralen, die sich alle im Strudelpunkt $(0|0)$ treffen.



Beispiel (Zustandsvariablen)

Die Differenzialgleichung einer freien Schwingung $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ kann man mit den Zustandsgrößen $z_1 = x$ und $z_2 = \dot{x}$ als System mit zwei Gleichungen erster Ordnung darstellen:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{z}_1 = z_2 \quad und \quad \dot{z}_2 = z_1 = \ddot{x} = -2\delta z_2 - \omega_0^2\, z_1.$$

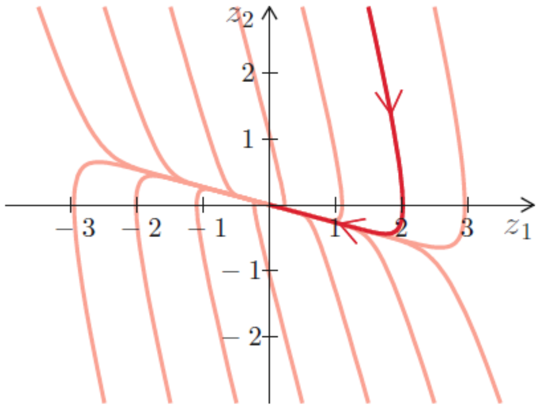
Bei sehr starker Dämpfung, also für $\delta > \omega_0$, bestehen die Lösungen aus zwei e-Funktionen mit negativem Exponenten:

$$z_1(t) = x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$
$$z_2(t) = \dot{x}(t) = \lambda_1 C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Der größere der beiden negativen Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

bestimmt die Steigung der Ursprungsgeraden durch den Knotenpunkt, an den sich die Phasenkurven annähern.



- ***Definition*** (Lineares System mit konstanten Koeffizienten)

  Ein Differenzialgleichungssystem, das man in der expliziten Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dot{x}_1 & = & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & + & r_1(t) \\
\dot{x}_2 & = & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & + & r_2(t) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\dot{x}_n & = & a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}\,x_n & + & r_n(t)
\end{array}$$

  schreiben kann, nennt man ein lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Störfunktionen $r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)$.

- ***Differenzialgleichungssystem in Matrixform***

  Ein lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich in Matrixform darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}(t)}$$

Lösungsstrategie für lineare Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung

Die Darstellung linearer Differenzialgleichungssysteme durch Matrizen ist der Schlüssel zum Erfolg. Wir werden in diesem Abschnitt erläutern, wie man die Lösung eines Differenzialgleichungssystems.

Die allgemeine Lösung x eines linearen Differenzialgleichungssystems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x}(t) = A\, x(t) + r(t)$ kann man folgendermaßen bestimmen:

(1) Berechne die allgemeine Lösung x_h des homogenen Systems $\dot{x}(t) = A\, x(t)$

(2) Berechne eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Systems.

(3) Addiere die homogene Lösung und die partikuläre Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Lösung eines homogenen linearen Systems:

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differenzialgleichungssystems erster Ordnung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ kann man durch folgende Schritte bestimmen:

(1) Berechne alle Eigenwerte λ_k aus der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0.$$

(2) Bestimme zu jedem Eigenwert λ_k einen Eigenvektor v_k:

$$(A - \lambda_k E)v_k = 0.$$

Dabei sind Spezialfälle bei mehrfachen Eigenwerten und komplexen Eigenwerten zu beachten.

(3) Die allgemeine Lösung besteht aus einer Linearkombination von Fundamentallösungsvektoren:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

Beispiel:

Wir betrachten das lineare Differenzialgleichungssystem erster Ordung in Matrixform

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} x.$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte berechnen wir die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0.$$

Die beiden Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$. Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ erhält man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt. Deshalb kann man eine Komponente des Eigenvektors frei wählen und die andere daraus berechnen. Einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -6$ erhält man aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Das es sich um ein homogenes Differenzialgleichungssystem handelt, benötigen wir keine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung setzt sich somit aus zwei Fundamentallösungen zusammen:

$$x(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad ■$$

Beispiel:

Für das lineare Differenzialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix},$$

bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}.$$

Aus den Eigenwerten $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 1$ ergeben sich die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung setzt sich aus den Fundamentallösungen zusammen:

$$\boldsymbol{x}_h(t) = C_1\, \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung verwenden wir einen entsprechenden Störansatz:

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

Obwohl die Störfunktion nur in der zweiten Koordinate vorhanden ist, benötigen wir in beiden Koordinaten einen entsprechenden Ansatz. Störansatz und Ableitung werden in das Differenzialgleichungssystem eingesetzt:

$$-2\,e^{-2t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} e^{-2t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Nach Kürzen mit e^{-2t} ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix},$$

das die eindeutige Lösung $A = 1$ und $B = -4$ besitzt. Somit lautet die allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\,e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\,e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

■

- ***Definition*** (Stabilität)

  Ein homogenes lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ bezeichnet man als

  - asymptotisch stabil, wenn alle Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ abklingen, also $lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$.
  - stabil, wenn alle Lösungsfunktionen für $t \to \infty$ beschränkt sind,
  - instabil, wenn es für $t \to \infty$ eine unbeschränkte Lösungsfunktion gibt.

- ***Satz*** (Stabilitätskriterium)

  Ein homogenes lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, bei dem

  - die Realteile aller Eigenwerte der Matrix A negativ sind, ist asymptotisch stabil,
  - mindestens ein Eigenwert der Matrix A einen positiven Realteil hat, ist instabil.

- ***Definition*** (Grenzstabilität)

  Ein homogenes lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ bezeichnet man als grenzstabil, wenn mindestens ein Eigenwert der Matrix A den Realteil null hat.

- ***Beispiel:***

  Das homogene lineare System erster Ordung mit konstanten Koeffizienten

  $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

  hat die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die allgemeine Lösung lässt sich darstellen durch

  $$x(t) = C_1 \cos(t)\, v_1 + C_2 \sin(t)\, v_2.$$

  Beide Eigenwerte liegen auf der imaginären Achse. Das System ist somit grenzstabil. Da alle Lösungen aus Sinus- und Kosinusfunktionen bestehen, ist das System stabil.

- ***Grenzstabilität und Stabilität***

  Grenzstabile Systeme liegen zwischen stabilen und instabilen Systemen. Es gibt grenzstabile Systeme, die stabil sind. Es gibt auch grenzstabile Systeme, die instabil sind.

Man spricht zwar von numerischen Lösungsverfahren für gewöhnliche Differenzialgleichungen, genau genommen meint man aber numerische Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen. Man sucht die Lösung einer Differenzialgleichung oder eines Differenzialgleichungssystems, die zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt einen vorgegebenen Anfangswert hat. Ein numerisches Verfahren liefert als Lösung eines Anfangswertproblems eine Folge von Näherungswerten.

Die von Leonhard Euler bereits im Jahre 1768 veröffentlichte Methode ist das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen. Trotzdem oder gerade deshalb wird es heute zur numerischen Lösung praktischer Probleme an vielen Stellen eingesetzt. Wir betrachten zunächst eine gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung mit einem Anfangswert zur Zeit t_0:

- ***Definition*** (Polygonzugverfahren von Euler)

  Mit dem Polygonzugverfahren von Euler kann man für das Anfangswertproblem

  $$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0$$

  mit der Iterationsvorschrift

  $$\tilde{x}_0 = x_0, \qquad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + h\,f(\tilde{x}_k, t_k), \qquad t_{k+1} = t_k + h\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

  Schritt für Schritt Näherungswerte $\tilde{x}_k$ für die exakte Lösung $x(t_0 + k\,h)$ berechnen.

  Dabei beeinflusst die gewählte Schrittweite h den Fehler der Näherungswerte.

- ***Beispiel:***

Wir betrachten das Polygonzugverfahren von Euler für das Anfangswertproblem

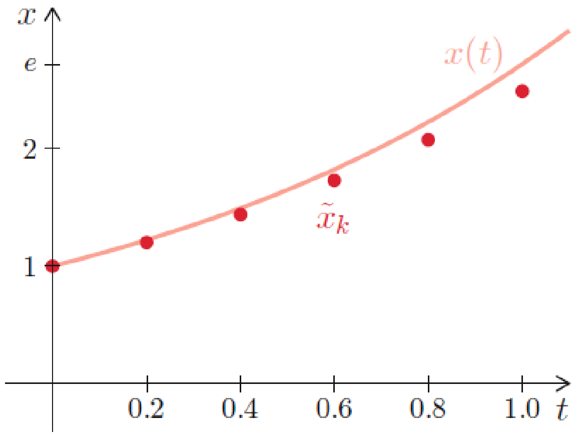
$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Da wir bei dieser Differenzialgleichung die exakte Lösung $x(t) = \mathrm{e}^t$ kennen, können wir die Qualität unserer Näherungslösungen beurteilen. Die Näherungslösungen berechnen sich aus

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + h\,\tilde{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Für $h = 0.2$ ergeben sich folgende Werte:

k	t_k	$\tilde{x}_k$	$x(t_k)$
0	0.0	1.0000	1.0000
1	0.2	1.2000	1.2214
2	0.4	1.4400	1.4918
3	0.6	1.7280	1.8221
4	0.8	2.0736	2.2255
5	1.0	2.4883	2.7183



Beispiel: Ein Pendel wird durch das nichtlineare Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\tfrac{g}{\ell}\sin x - \tfrac{k}{m\,\ell}\,y \end{aligned}$$

beschrieben, siehe *Abschnitt 14.7.5* und *Beispiel 14.39*. Dabei verwenden wir für die beiden Zustandsgrößen die Bezeichnungen x und y und für die Dämpfungskonstante die Bezeichnung k. Wir wenden das Polygonzugverfahren von Euler auf beide Zustände an. Um Verwechslungen mit der Dämpfungskonstanten k zu vermeiden, bezeichnen wir den Laufindex hier mit j:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j+1} &= \tilde{x}_j + h\,\tilde{y}_j \\ \tilde{y}_{j+1} &= \tilde{y}_j + h\left(-\tfrac{g}{\ell}\sin\tilde{x}_j - \tfrac{k}{m\,\ell}\,\tilde{y}_j\right) \end{aligned} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Mit den konkreten Werten für die einzelnen Parameter, $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $k = \frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{m\,kg}}{\mathrm{s}}$, $t_0 = 0$ s, $x(0) = \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 0\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ und der Schrittweite $h = 0.1$ s erhalten wir folgende Näherungswerte:

j	t_j	$\tilde{x}_j$	$\tilde{y}_j$
0	0.0	1.57	0.00
1	0.1	1.57	−1.00
2	0.2	1.47	−1.95
...	...	...	...