Klausur zur Analysis 2020 / 21

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen 15 P)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 360 \\ -520 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + 900 = 0 \right\}.$$

Eigenvektoren der Matrix zu den Eigenwerten $\lambda_1 := 25$ und $\lambda_2 := 100$ sind $[3,4]^t$ bzw. $[-4,3]^t$ *(das darf ungeprüft verwendet werden).*

Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q und berechnen Sie alle ihre Bestimmungsstücke. (10 P)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

Aufgabe 2 (6, 9, 9, 6 P, zusammen 30 P)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

i) $\left(\frac{2n^3 + 5n^2 + 2}{n^4 - 1} + \frac{6n^2 + 1}{1 + n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

ii) $\left(\frac{1}{n} \ln(1 + n^2) \right)_{n \in \mathbb{N}}$

iii) $\left(\sqrt{4n^2 + 8n} - \sqrt{4n^2 - 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

iv) $\left(n(1 - \cos(\tfrac{1}{n})) \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Hinweis: Denken Sie auch an die Regeln von de l'Hospital.

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)

i) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion (20 P)

$$f(x) \coloneqq x^3 e^{-\frac{x^2}{6}}$$

durch. Zeigen Sie dafür

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^2\big(9 - x^2\big)e^{-\frac{x^2}{6}}, \qquad f''(x) = \tfrac{1}{9}x\big(x^2 - 3\big)\big(x^2 - 18\big)e^{-\frac{x^2}{6}}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen und der positiven x-Achse eingeschlossen wird. Zeigen Sie dafür, daß $F(x) \coloneqq -18(\frac{x^2}{6}+1)e^{-\frac{x^2}{6}}$ eine Stammfunktion von f definiert.

ii) Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

Aufgabe 4 (5, 10 P)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{1+x} - \frac{2}{x^3} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}} + 2x\sqrt{1+x^2}\right) dx$ **ii)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos(x)dx$

Aufgabe 5 (7, 8 P)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihen

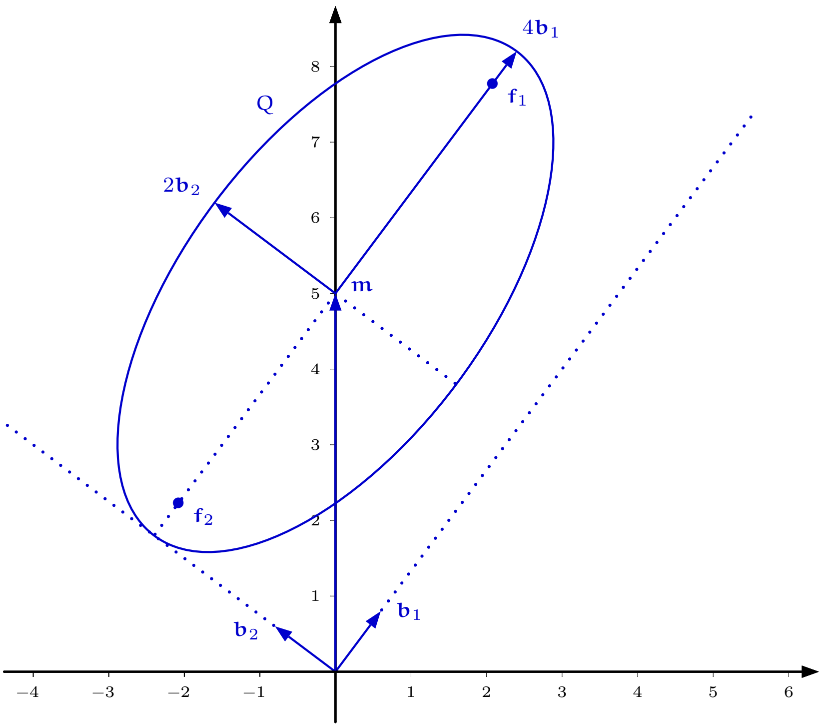
i) $\displaystyle h(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} z^{2k}$ **ii)** $\displaystyle p(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^k} z^k$

Lösungen

Aufgabe 1 (15 P)

Die Gleichung von Q lautet: $0 = \langle \mathbf{x} \,|\, A\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b} \,|\, \mathbf{x} \rangle + 900$, mit $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A := \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 360 \\ -520 \end{bmatrix}$.
$\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine ONB aus Eigenvektoren für die Matrix A zu den Eigenwerten 25 und 100. Daher ist $B := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix und $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = B^*\mathbf{x}$. Es gilt

$$\mathbf{b}_{\mathcal{B}} := B^*\mathbf{b} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 360 \\ -520 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 200 \\ 600 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad A_{\mathcal{B}} := B^*AB = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ +2



+5

Die transformierte Gleichung lautet also

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \,|\, A_{\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle + 900 \\ &= 25\tilde{x}^2 + 100\tilde{y}^2 - 200\tilde{x} - 600\tilde{y} + 900 \\ &= 25\big(\tilde{x}^2 - 8\tilde{x} + 16\big) + 100\big(\tilde{y}^2 - 6\tilde{y} + 9\big) - 400 - 900 + 900 \\ &= 25(\tilde{x}-4)^2 + 100(\tilde{y}-3)^2 - 400 \\ &= 400\left[\frac{(\tilde{x}-4)^2}{4^2} + \frac{(\tilde{y}-3)^2}{2^2} - 1\right] \end{aligned}$$ +6

Damit handelt es sich bei Q um eine Ellipse mit großer Halbachse $a = 4$ in Richtung $\mathbf{b}_1$, kleiner Halbachse $b = 2$ in Richtung $\mathbf{b}_2$ und $e = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Der Mittelpunkt befindet sich bei $\mathbf{m} := 4\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, +2
die Brennpunkte bei $\mathbf{f}_{1/2} = \mathbf{m} \pm 2\sqrt{3}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \pm 1.2\sqrt{3} \\ 5 \pm 1.6\sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.078 \\ 7.771 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} -2.078 \\ 2.229 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2 (6, 9, 9, 6 P)

i)

$$\frac{2n^3+5n^2+2}{n^4-1}+\frac{6n^2+1}{1+n^2}=\frac{2n^3+5n^2+2}{n^4-1}+\frac{(6n^2+1)(n^2-1)}{n^4-1}$$ +4

$$=\frac{2n^3+5n^2+2+6n^4-5n^2-1}{n^4-1}=\frac{n^4\left(6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}=\frac{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{1-\frac{1}{n^4}}\xrightarrow{n\to\infty}6,$$

denn $(\frac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\frac{1}{n^4})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen. Daher konvergiert der Zähler nach der Summenregel konvergenter Folgen gegen 6, der Nenner gegen 1 und, wegen der Quotientenregel, der Bruch gegen 6. +2

Oder:

$$\frac{2n^3+5n^2+2}{n^4-1}+\frac{6n^2+1}{1+n^2}=\frac{n^4\left(\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)}{n^4\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}+\frac{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{1-\frac{1}{n^4}}+\frac{6+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}6,$$

(6 P)

ii) $\sqrt[n]{1+n^2}=\sqrt[n]{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\sqrt[n]{n^2}\,\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}1$: Der erste Faktor konvergiert nach einem Satz +2
der Vorlesung gegen 1, der zweite, wegen $1+\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}1>0$ und einem weiteren Satz der Vorlesung und +2
der gesamte Ausdruck schließlich nach dem Produktsatz konvergenter Folgen. Wegen der Stetigkeit von +1
$\ln$ folgt

$$\frac{1}{n}\ln(1+n^2)=\ln\left((1+n^2)^{\frac{1}{n}}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{1+n^2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\ln(1)=0.$$

(9 P) +4

iii)

$$\sqrt{4n^2+8n}-\sqrt{4n^2-1}=\left(\sqrt{4n^2+8n}-\sqrt{4n^2-1}\right)\frac{\sqrt{4n^2+8n}+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{4n^2+8n}+\sqrt{4n^2-1}}$$

$$=\frac{4n^2+8n-4n^2+1}{\sqrt{4n^2+8n}+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{n\left(8+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{8}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$=\frac{8+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{8}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{8}{2\sqrt{4}}=2.$$

+6

Dabei wurde die Summenregel in $8+\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}8$, $4+\frac{8}{n}\xrightarrow{n\to\infty}4$, sowie $4-\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}4$ und die
Stetigkeit der Quadratwurzel samt Summenregel im Nenner verwendet. Schließlich folgt das Ergebnis aus +3
der Quotientenregel konvergenter Folgen. (9 P)

iv)

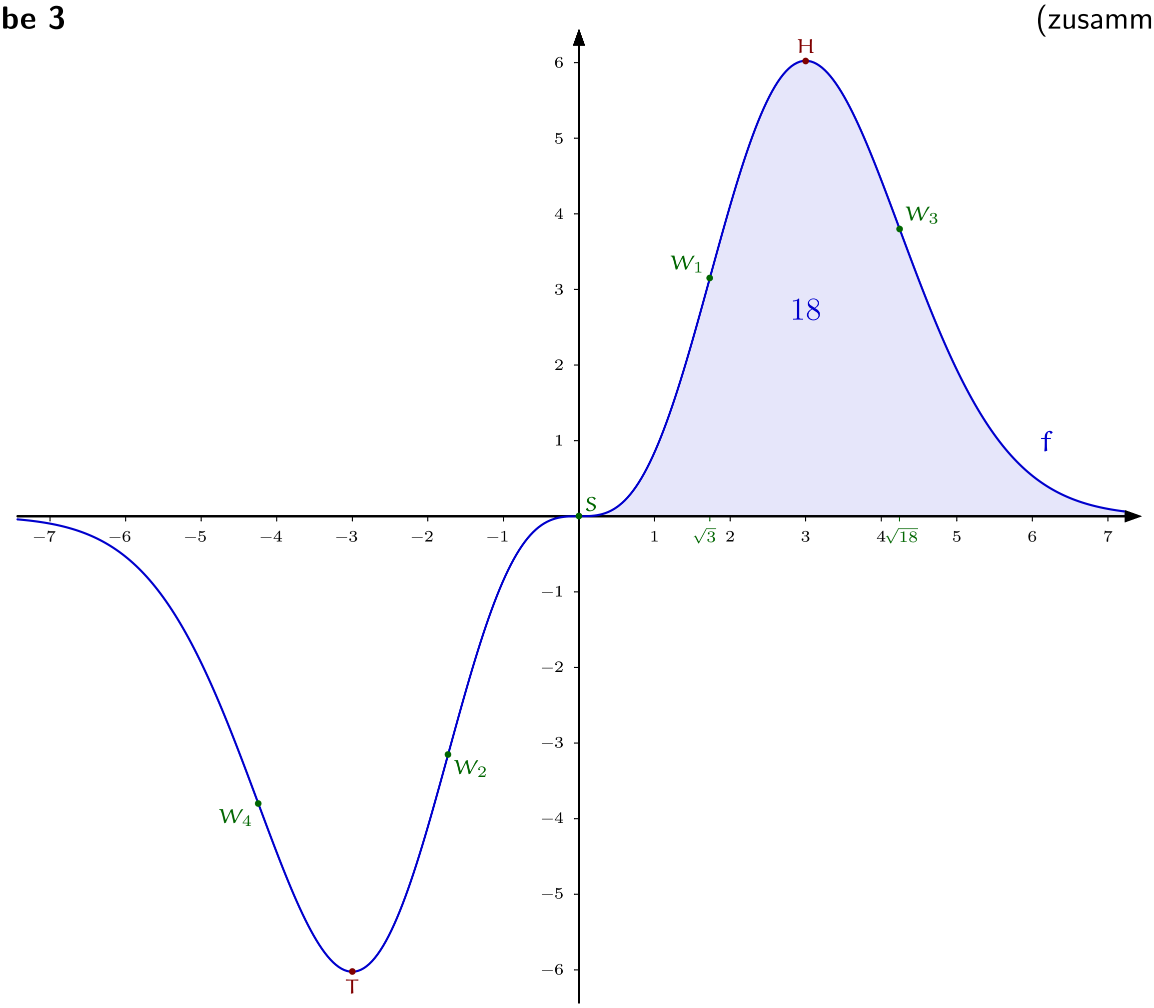
$$n\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$ +3

denn nach den Regeln von DE L'HOSPITAL und wegen der Stetigkeit von $\sin$ gilt

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{1}=\sin(0)=0.$$

(6 P) +3

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)



+5

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{6}},$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-\frac{x^2}{6}} - \tfrac{1}{3}x^4 e^{-\frac{x^2}{6}} = \tfrac{1}{3}\big(9x^2 - x^4\big)e^{-\frac{x^2}{6}} = \tfrac{1}{3}x^2\big(9 - x^2\big)e^{-\frac{x^2}{6}},$$ +3

$$f''(x) = \tfrac{1}{3}\big(18x - 4x^3 - 3x^3 + \tfrac{1}{3}x^5\big)e^{-\frac{x^2}{6}} = \tfrac{1}{9}x\big(x^4 - 21x^2 + 54\big)e^{-\frac{x^2}{6}} = \tfrac{1}{9}x\big(x^2 - 3\big)\big(x^2 - 18\big)e^{-\frac{x^2}{6}}.$$

NULLSTELLEN: f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $f(-x) = (-x^3)e^{-\frac{(-x)^2}{6}} = -x^3 e^{-\frac{x^2}{6}} = -f(x)$. Daher muß es sich bei der dreifachen Nullstelle bei $x = 0$ um einen Sattelpunkt handeln: $S := [0, 0]$. +2

EXTREMA: $f'(x) = 0$ führt auf die schon identifizierte Stelle $x = 0$ und auf $9 - x^2 = 0$, also $x_{1/2} = \pm 3$. Wegen $f''(3) = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (9 - 18)e^{-1.5} < 0$ handelt es sich bei $H := [3, f(3)] = [3, 27e^{-1.5}] \approx [3, 6.0245]$ um ein lokales Maximum von f. Da $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$ gilt (s. u.), handelt es sich sogar um ein Maximum von f. +3
Wegen der Punktsymmetrie von f muß bei $T := [-3, f(-3)] = [-3, -27e^{-1.5}] \approx [-3, -6.0245]$ das Minimum liegen. +1

WENDEPUNKTE: $f''(x) = 0$ führt (neben der schon identifizierten Stelle $x = 0$) auf $x^2 = 3$ und $x^2 = 18$, mit den vier Lösungen $\tilde{x}_{1/2} = \pm\sqrt{3}$, $f(x_{1/2}) = \pm 3\sqrt{3}e^{-0.5}$ und $\tilde{x}_{3/4} = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$, $f(x_{3/4}) = \pm 54\sqrt{2}e^{-3}$. +1

Wegen $f''(1) = \frac{1}{9}(1 - 3)(1 - 18)e^{-\frac{1}{6}} > 0$ und $f''(2) = \frac{1}{9}(4 - 3)(4 - 18)e^{-\frac{4}{6}} < 0$ findet bei $x_1 \approx 1.732$ ein Vorzeichenwechsel für f'' statt. +1
Genauso bei $x_3 \approx 4.2426$: $f''(4) = \frac{1}{9}(16 - 3)(16 - 18)e^{-\frac{16}{6}} < 0$ und $f''(5) = \frac{1}{9}(25 - 3)(25 - 18)e^{-\frac{25}{6}} > 0$. +1
Damit liegen bei x_1 und x_3 die Wendepunkte $W_1 := [\sqrt{3}, 3\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}}] \approx [1.732, 3.1516]$ und $W_3 := [3\sqrt{2}, 54\sqrt{2}e^{-3}] \approx [4.2426, 3.8021]$ und wegen der Symmetrie von f sind $W_2 := [-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}}]$ und $W_4 := [-3\sqrt{2}, -54\sqrt{2}e^{-3}]$ die restlichen Wendepunkte. +2

ASYMPTOTEN:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2}{6}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\frac{x}{3}e^{\frac{x^2}{6}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x}{e^{\frac{x^2}{6}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{27}{xe^{\frac{x^2}{6}}} = 0$$

(zweimalige Anwendung der Regeln von DE L'HOSPITAL) zeigt, daß die x-Achse eine waagrechte Asymptote für f bildet. +1

Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, daß exponentielles Wachstum das polynomiale dominiert. Daher gilt $f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$.

DER FLÄCHENINHALT:

$$F'(x) = -18\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{6}+1\right)e^{-\frac{x^2}{6}} = -18\left(\frac{x}{3}e^{-\frac{x^2}{6}} + \left(-\frac{x^3}{18}-\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x^2}{6}}\right) = x^3e^{-\frac{x^2}{6}} = f(x) \qquad +2$$

beweist, daß F tatsächlich eine Stammfunktion von f ist.

Der fragliche Flächeninhalt berechnet sich jetzt gemäß

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\left[-18\left(\frac{x^2}{6}+1\right)e^{-\frac{x^2}{6}}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty} -18\left(\frac{a^2}{6}+1\right)e^{-\frac{a^2}{6}} + 18 = 18, \qquad +3$$

denn, genau wie oben bei der Asymptote zeigt man $18(\frac{a^2}{6}+1)e^{-\frac{a^2}{6}} \xrightarrow{a\to\infty} 0$.

Aufgabe 4 (5, 10 P)

i)

$$\begin{aligned}
&\int\left(\sqrt[3]{1+x} - \frac{2}{x^3} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}} + 2x\sqrt{1+x^2}\right)dx\\
&= \int\left((1+x)^{\frac{1}{3}} - 2x^{-3} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\sqrt{1+x^2}\right)dx\\
&= \tfrac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}} + x^{-2} + \ln\big(e^x + e^{-x}\big) + \tfrac{1}{3}\arcsin(x) + \tfrac{2}{3}\sqrt{1+x^2}^3 \qquad +5\\
&= \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{1+x}^4 + \frac{1}{x^2} + \ln\big(e^x + e^{-x}\big) + \tfrac{1}{3}\arcsin(x) + \tfrac{2}{3}\sqrt{1+x^2}^3.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int e^{3x}\cos(x)dx &= e^{3x}\sin(x) - 3\int e^{3x}\sin(x)dx = e^{3x}\sin(x) - 3\left[-e^{3x}\cos(x) + 3\int e^{3x}\cos(x)\right]\\
&= e^{3x}\big(\sin(x)+3\cos(x)\big) - 9\int e^{3x}\cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad +7\\
\int e^{3x}\cos(x)dx &= \tfrac{1}{10}e^{3x}\big(\sin(x)+3\cos(x)\big).\\
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos(x)dx &= \tfrac{1}{10}\Big[e^{3x}\big(\sin(x)+3\cos(x)\big)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \tfrac{1}{10}e^{\frac{3\pi}{2}}\big(\sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big)+3\cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\big) - \tfrac{1}{10}e^{\frac{-3\pi}{2}}\big(-\sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big)+3\cos\big(\tfrac{-\pi}{2}\big)\big) = \tfrac{1}{10}e^{\frac{3\pi}{2}} + \tfrac{1}{10}e^{\frac{-3\pi}{2}} \qquad +3\\
&= \tfrac{1}{5}\cosh\big(\tfrac{3\pi}{2}\big) \approx 11.132676.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 P)

i) Wir verwenden das Quotientenkriterium für den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} z^{2k}$:

$$\frac{\binom{3(k+1)}{k+1}}{\binom{3k}{k}} = \frac{(3k+3)!k!(2k)!}{(k+1)!(2k+2)!(3k)!} = \frac{(3k+3)(3k+2)(3k+1)(3k)!(2k)!}{(k+1)(2k+2)(2k+1)(2k)!(3k)!}$$

$$= \frac{27k^2\left(1+\frac{2}{3k}\right)\left(1+\frac{1}{3k}\right)}{4k^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{2k}\right)} = \frac{27\left(1+\frac{2}{3k}\right)\left(1+\frac{1}{3k}\right)}{4\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{2k}\right)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{27}{4},$$ +5

denn nach den Rechenregeln konvergenter Folgen strebt der Zähler gegen 27 und der Nenner gegen 4, so daß der Bruch nach der Quotientenregel den Grenzwert $\frac{27}{4}$ hat. Der Konvergenzradius ist daher

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\binom{3(k+1)}{k+1}}{\binom{3k}{k}}}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,.$$ +2

ii) Wir nutzen das Quotientenkriterium auch für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^k} z^k$:

$$\frac{\frac{(k+2)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k+1)!}{k^k}} = \frac{(k+2)!k^k}{(k+1)!(k+1)^{k+1}} = \frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e},$$ +6

denn $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} e$. Daher ist $R = e$. +2