Aufgabenblatt 15

Potenzreihen

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+2)^{100}\, z^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)^2}\, z^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left((-3)^k + 2^k\right) z^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+k} - k\right)^k z^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 3^k}\, z^{2k}$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}^2 z^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$

Bei der letzten Reihe ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge, mit $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$.
Berechnen Sie für die dritte Potenzreihe den Wert, d. h., geben Sie für den Funktionswert $g(z) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left((-3)^k + 2^k\right) z^k$ einen Ausdruck an.

Wer gerne ein wenig nachdenkt kann auch den Wert $f(z)$ *der letzten Reihe ausrechnen. So geht es los:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k = 1 + z + \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+2} z^{\ell+2} = \dots$$

Jetzt die definierende Eigenschaft $a_{\ell+2} = a_{\ell+1} + a_\ell$ *verwenden und eine Gleichung für* $f(z)$ *aufstellen, die leicht zu lösen ist.*

Reihen

Seien $a, \alpha \in \mathbb{R}$ und $|a| < 1$.

i) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k e^{ik\alpha}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.
(Hinweis: Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe und die Potenzrechengesetze.)

ii) Bestimmen Sie damit den Wert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k \cos(k\alpha)$.
(*Hinweis: Denken Sie daran, daß* $\cos(k\alpha)$ *der Realteil von* $e^{ik\alpha}$ *ist.*)

Ein Grenzwert

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ mit Hilfe des Sandwich-Prinzips.

Was ist mit $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$? Eine Antwort finden Sie, wenn Sie $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ untersuchen.

Eine Abschätzung

i) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$\frac{n^n}{e^{n+1}} \leqslant n! \leqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \tag{$*$}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Dafür können Sie das Ergebnis $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ aus den letzten beiden Aufgabenblättern verwenden.

Zur Erinnerung: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ *gilt, weil* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *monoton wachsend gegen* e *konvergiert und* $e \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$*, weil* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *das monoton fallend tut.*

ii) Folgern Sie aus $(*)$ mit Hilfe des Sandwich-Prinzps

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}\,.$$

iii) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, z^k$.