Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4: Integralrechnung

4.1: Das unbestimmte Integral

4.2 Flächen und bestimmte Integrale

4.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

4.4 Integration von rationalen Funktionen

4.5. Mehrdimensionale Integrationsregeln

4.6. Substitutionsregel, Transformationssatz

- ***Motivation:***
  - Das Hauptthema des vorangehenden Kapitels war Differentialrechnung, die direkt auf viele interessante Probleme angewendet werden kann. Ingenieure stehen jedoch oft vor dem mathematischen Problem, eine Funktion aus Informationen über ihre Ableitung zu finden.
  - Dieser Prozess der Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung kann als „Umkehrung“ der Differentiation betrachtet werden. Mathematiker nennen diesen Prozess Integration.

- ***Das unbestimmte Integral***

$$\boxed{Wenn\ \ F'(x) = f\ (x), dann\ ist\ \int f\ (x)\ dx = F(x) + C}$$

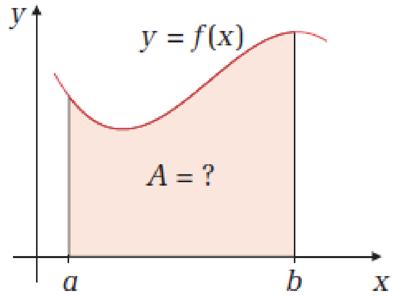
wobei C eine beliebige Konstante ist.

- ***Beispiele:***
  - $\boxed{\int x^r dx \ = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C}$ Zum Beispiel: $\int x^2 dx \ = \frac{1}{3} x^3 + C\,,\quad \int \sqrt{x} dx \ = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$
  - $\int (2x^2 + 2x + 5) dx = \ \frac{2}{3} x^3 + x^2 + 5x + C$
  - $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
  - $\int e^{ax} dx = \ \frac{1}{a} e^{ax} + C$

- ***Grundlegende Integrationsregeln:*** Sei f und g zwei Funktionen und $a \neq 0$ eine konstante; dann gilt:

$$\boxed{\int af(x)dx = a\int f(x)dx\,, \qquad \int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

- ***Motivation:***
  - Das Konzept des Integrals kann benutzt werden, um Flächeninhalte zu berechnen.
  - Dieses Problem ist seit mehr als 4 000 Jahren von Bedeutung. Wie alle großen Flüsse haben der Tigris und der Euphrat in Mesopotamien (heute Teil des Irak) sowie der Nil in Ägypten gelegentlich ihren Verlauf als Ergebnis einer schweren Flut verändert. Einige Bauern haben dabei Land verloren, andere Land gewonnen. Da auf Landflächen oft Steuern erhoben wurden, war es notwendig, die Fläche einer Parzelle neu zu berechnen, deren Grenze ein unregelmäßig verlaufendes Flussufer sein könnte
  - Andere Fragestellung: Wie ermittelt man die Fläche von Baden Württemberg oder von Deutschland?

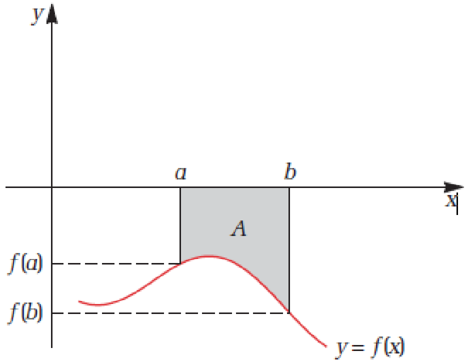


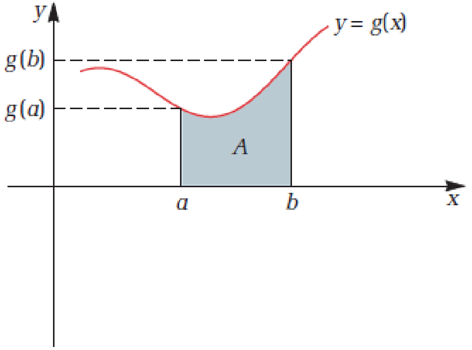
- ***Das bestimmte Integral:***

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \;=\; \Big|_a^b F(x) \;=\; F(b) - F(a)}$$

wobei F ein unbestimmtes Integral von f über ein Intervall, das a und b enthält.

- ***Bemerkung:***
  - Wenn f eine positive Funktion ist, dann ist $\int_a^b f(x)dx$ die Fläche zwischen der Funktion f, dem horizontalen Axis (Gerade $y = 0$) und den Vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$.
  - Wenn f eine negative Funktion ist, dann ist $\int_a^b f(x)dx$ die oben beschrieben Fläche mal -1.





- ***Beispiele:***
  - $\int_2^5 e^{2x}dx = \Big|_2^5 \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^4 = 10.985{,}9$
  - $\int_{-2}^2 (x - x^3 - x^5)dx = \Big|_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\right) = \left(2 - 4 - \frac{64}{6}\right) - \left(2 - 4 - \frac{64}{6}\right) = 0$

- ***Eigenschaften bestimmter Integrale:***

  Wenn f eine *integrierbare* Funktion auf einem Intervall ist, das a, b und c enthält und α eine beliebige reelle Zahl ist, dann gilt:

  - $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
  - $\int_a^a f(x)dx = 0$
  - $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- ***Integrierbarkeit von stetigen Funktionen:***

  Wenn f stetig ist, dann ist f integrierbar.

- ***Motivation:***
  - Im Kapitel 3 haben wir eine rationale Funktion als den Quotienten $P(x)/Q(x)$ zweier Polynome definiert. Nur gelegentlich müssen Ökonomen solche Funktionen integrieren. Deshalb geben wir nur ein Beispiel, das ein Verfahren illustriert, das man in allgemeineren Situationen verwenden kann.
  - Das Verfahren ist die Division in einfachen Funktionen.

- ***Beispiel:***

  Zu berechnen ist $\int \frac{x^4+3x^2-4}{x^2+2x}dx$

  - Wir wenden die Polynomdivision auf den Integranden an und kommen zum folgenden Ergebnis:

$$\frac{x^4+3x^2-4}{x^2+2x} = x^2-2x+7-\frac{14x+4}{x^2+2x}$$

  - Für den Rest führen wir eine Dekomposition in einfachen Termen. Wichtig für die Division, ist dass die Ordnung des Polynoms im Zähler kleiner oder gleich als die des Nenners ist. Dafür merken wir, dass sich der Nenner Folgendermaßen dividieren lässt $x^2+2x = x(x+2)$ und lösen wir die folgende Gleichung:

$$\frac{14x+4}{x^2+2x} = \frac{14x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

  - Wir bekommen das Folgende System (i): $A+B=14$ und (ii): $2A=4$; Also $A=2$ und $B=12$.
  - Es ergibt sich also:

$$\int \frac{x^4+3x^2-4}{x^2+2x}dx = \int (x^2-2x+7)dx - \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{12}{x+2}dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+7x-2\ln|x|-12\ln|x+2|+C.$$

-

- ***Definition:***

  Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine n-dimensionale Funktion. Falls f stetig auf $I = [a_1, b_1]\text{x}[a_2, b_2]\text{x} \dots \text{x}[a_n, b_n]$, dann existiert das n- dimensionale Integral auf I und ist definiert durch:

$$\int_I^{\cdot} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

- ***Satz:***

Falls die Funktion f stetig ist, dann spielt die Reihenfolge der Integration keine Rolle

- ***Beispiele:*** Berechnen Sie
  - $\int (x_1 \cos(x_2) + e^{x_2} + x_1) dx$
  - $\int_0^2 \left(\int_0^2 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 \right) dx_1$
  - $\iiint x_1 x_2 x_3 dx$
  - $\int_I^{\cdot} \sin(x_1 + x_2)\, dx$, mit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{x} \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
  - $\int_I^{\cdot} \frac{x_1^2 x_3^3}{1 + x_2^2} dx$, mit $I = [0, 2]\text{x}[0, 1]\text{x}[1, 2]$

- ***Satz:***

Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine n-dimensionale stetige Funktion. Sei $g: G \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetig differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$\int\limits_{g(B)}^{\cdot} f(x)dx = \int\limits_{B}^{\cdot} f(g(z)) \cdot |\det g'(z)| dz$$

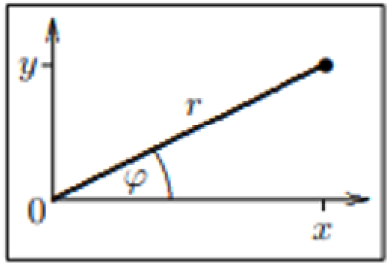
falls $|\det g'(z)| \neq 0$ für alle $z \in G$.

- ***Anwendung (Polarkoordinaten):***

  Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-dimensionale stetige Funktion.

  Sei $g: G \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\phi) \\ x_2 = r\sin(\phi) \end{cases} \qquad r \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi)$$



  Es gelte:

$$\int_{g(B)}^{\cdot} f(x)dx = \int_{B}^{\cdot} f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \cdot r \, dr \, d\phi$$

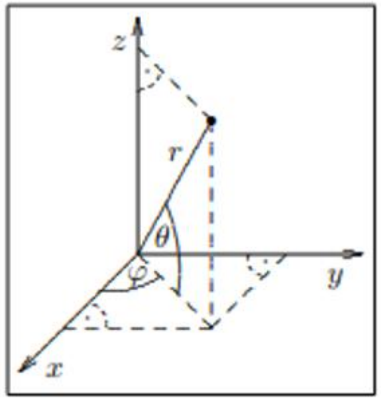
- ***Beispiele:*** Berechnen Sie
  - $\int_0^2 \left(\int_0^2 (x_1^2 + x_2^2) dx_2\right) dx_1$
  - $\int_A^{\cdot} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx,$ mit $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\right\}$

- ***Anwendung (Kugelkoordinaten):***

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 3-dimensionale stetige Funktion.

Sei $g\colon G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch:

$$\begin{cases} x_1 = rcos(\phi)\cos(\theta) \\ x_2 = rsin(\phi)\cos(\theta) \\ x_3 = rsin(\theta) \end{cases} \qquad \mathrm{r} \in [0,\infty), \phi \in [0,2\pi)\,, \theta \in [0,\pi)$$



Es gelte:

$$\int_{g(B)}^{\cdot} f(x)dx = \int_{B}^{\cdot} f\big(rcos(\phi)\cos(\theta)\,, rsin(\phi)\cos(\theta)\,, rsin(\theta)\big) \cdot r^2\cos(\theta)\ dr\, d\phi\, d\theta$$

- ***Beispiele:*** Berechnen Sie

  - $\int_A^{\cdot} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dx$, mit $\mathrm{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 \leq 1\}$