Klausur zur Linearen Algebra 2021 / 22

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen 40 P)

1. Zeigen Sie:

i. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $5 \mid n^5 - n$. (5 P)

ii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \geqslant \sqrt{2n+1}$. (8 P)

iii. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$. (8 P)

2. Bestimmen Sie die Polarform der Zahl $z := 4 + 2\,i + \frac{2}{5} \cdot \frac{2-i}{1 - \frac{2\,i+3}{2+i}}$. (5 P)

3. Verschlüsseln Sie mit $S_o = [e, n] := [317, 943]$ die Nachricht $M := 409$. (7 P)

4. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der kubischen Gleichung (7 P)

$$x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0\,.$$

Geben Sie die Normalform der Gleichung und ihre Diskriminante an.

Hinweis: Aufgabe 1.i. kann auch ohne Induktion gelöst werden. Bei Aufgabe 1.iii. ist es keine schlechte Idee, sich die Aussage für $n+1$ mal aufzuschreiben.

Aufgabe 2 (zusammen 35 P)

1. Gegeben sind die beiden Ursprungsebenen E und F, mit den zugehörigen Normalenvektoren $[-6, \sqrt{3}, 3]^t$ bzw. $[6, \sqrt{3}, 3]^t$.

Geben Sie E und F an.

Bestimmen Sie den Winkel, den diese Ebenen miteinander einschließen.

Zeigen Sie: $\boldsymbol{x} := [2, 0, 4]^t \in E$.

Bestimmen Sie die Schnittgerade g von E und F.

Ergänzen Sie den Richtungsvektor von g auf folgende Weise zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$: $\mathbf{b}_3$ ist parallel zum Richtungsvektor von g und $\mathbf{b}_1$ liegt in der x_1x_2-Ebene. Überprüfen Sie ihr Ergebnis.

Stellen Sie den Vektor $\boldsymbol{x}$ in dieser Basis dar. (20 P)

2. Drehen Sie den Vektor $\mathbf{x}$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Achse mit der Richtung $[0, -\sqrt{3}, 1]^t$.
Kontrollieren Sie, daß $\mathbf{x}$ und der gedrehte Vektor $\mathbf{x}'$ dieselbe Länge haben. (10 P)

3. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$. Erklären Sie Ihr Ergebnis anhand einer Skizze.
Zeigen Sie: $\mathbf{x}' \in \mathrm{F}$. (5 P)

Aufgabe 3 (15 P)

Zeigen Sie, daß die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ der Spaltenvektoren der Matrix

$$\mathrm{B} := [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5] := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 4 & 14 & -19 & 1 & 18 \\ 8 & 28 & -36 & 1 & 38 \\ -3 & -9 & 12 & 1 & -14 \\ 2 & 10 & -12 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig ist.

Was bedeutet das für die Matrix B?

Stellen Sie den Vektor $\mathbf{y} := [20, 83, 168, -54, 62]^t$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar.

Aufgabe 4 (10 P)

Berechnen Sie die Determinante der 4×4-Matrix

$$\mathrm{C} := \begin{bmatrix} 3\,i & -3\,i & -1-2\,i & 6+11\,i \\ 2\,i & -3\,i & -14-2\,i & 1+10\,i \\ 0 & i & 6 & -i \\ -i & i & 4 & -2-5\,i \end{bmatrix}.$$

Lösungen

Aufgabe 1 (5 + 8 + 8 + 5 + 7 + 7 P = 40 P)

1.i. Die Behauptung läßt sich am besten direkt zeigen: Nach dem kleinen Satz von FERMAT gilt $n^5 =_5 n$ und daher $n^5 - n =_5 n - n = 0$, denn $5 \in \mathbb{P}$. Das ist äquivalent zu $5 \mid n^5 - n$.

Alternativ (der lange Weg über Induktion):
Der Induktionsanfang ist die wahre Aussage $5 \mid 1^5 - 1$, denn 5 ist ein Teiler von 0: $0 = 0 \cdot 5$. +1

$n \to n+1$:

$$(n+1)^5 - (n+1) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} n^k - n - 1 = n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n =_5 0,$$ +3

denn laut Induktionsvoraussetzung gilt $5 \mid n^5 - n$, also $n^5 - n =_5 0$. Außerdem $5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n =_5 0$. +1
Das zeigt die Behauptung für $n+1$. (5 P)

1.ii. Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{1} \frac{2}{\sqrt{2k-1}} = 2 = \sqrt{4} \geqslant \sqrt{3} = \sqrt{2+1}$, die offensichtlich wahr ist. +1

Der Induktionsschritt $n \to n+1$: Die Induktionsvoraussetzung IV: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \geqslant \sqrt{2n+1}$. Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{\sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{2k-1}} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{2n+1} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}^2 + 2}{\sqrt{2n+1}} = \frac{2n+3}{\sqrt{2n+1}}$$
$$\geqslant \frac{2n+3}{\sqrt{2n+3}} = \sqrt{2n+3}.$$ +7

Das zeigt die Aussage für $n+1$. (8 P)

1.iii. Zu zeigen ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$. (IV)

Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die offensichtlich wahre Aussage $6 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2} = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{k^2}{2^k}$. +1

$n \to n+1$:
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{(n+1)^2 + 4n + 4 + 6}{2^{n+1}} = 6 - \frac{n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 6}{2^{n+1}} = 6 - \frac{n^2 + 6n + 11}{2^{n+1}}$ ist aus der IV abzuleiten:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \overset{\text{IV}}{=} 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} + \frac{n^2+2n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 6 - \frac{2n^2 + 8n + 12 - n^2 - 2n - 1}{2^{n+1}} = 6 - \frac{n^2 + 6n + 11}{2^{n+1}}.$$ +7

Das beweist die Aussage für $n+1$. (8 P)

2.
$$z = 4 + 2\,i + \frac{2}{5} \cdot \frac{2 - i}{1 - \dfrac{2\,i + 3}{2 + i}} = 4 + 2\,i + \frac{2}{5} \cdot \frac{(2-i)(2+i)}{2 + i - 2\,i - 3} = 4 + 2\,i - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{1 + i}$$
$$= 4 + 2\,i - 2 \cdot \frac{1 - i}{2} = 3 + 3\,i.$$ +4

Die Polardarstellung $z = 3\sqrt{2}\,e^{i\varphi}$ erhalten wir mittels $\varphi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$: $z = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. (5 P) +1

3. Die Nachricht $M = 409$ mit $S_o = [e, n] = [317, 943]$ verschlüsseln: (7 P)

$$
\begin{aligned}
C &=_n 409^{317} & &= 409 \cdot (409^2)^{158} \\
&=_n 409 \cdot 370^{158} & &= 409 \cdot (370^2)^{79} \\
&=_n 409 \cdot 165^{79} & &= 409 \cdot 165 \cdot (165^2)^{39} \\
&=_n 409 \cdot 165 \cdot 821^{39} & &= 409 \cdot 165 \cdot 821 \cdot (821^2)^{19} \\
&=_n 163 \cdot 739^{19} & &= 163 \cdot 739 \cdot (739^2)^{9} \\
&=_n 163 \cdot 739 \cdot 124^{9} & &= 163 \cdot 739 \cdot 124 \cdot (124^2)^{4} \\
&=_n 491 \cdot 288^{4} & &= 491 \cdot (288^2)^{2} \\
&=_n 491 \cdot 903^2 =_n 491 \cdot 657 =_n 81\,.
\end{aligned}
$$

4. Die kubische Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0$ wird durch die Substitution $x = y - \frac{b}{3} = y - 2$ auf die Normalform $y^3 + py + q = 0$ gebracht. Dabei ist $p = c - \frac{1}{3}b^2 = 3 - \frac{36}{3} = -9$ und $q = \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d = \frac{2 \cdot 6^3}{27} - \frac{18}{3} + 2 = 1 - 6 + 2 = 12$. Die Normalform lautet daher $y^3 - 9y + 12 = 0$. +3
$\Delta = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = -27 + 36 = 9 > 0$ zeigt, daß es nur eine reelle Lösung gibt, nämlich:

$$x_1 := \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{q}{2}} - 2 = \sqrt[3]{3-6} - \sqrt[3]{3+6} - 2 = -\big(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} + 2\big) \approx -5.5223.$$ (7 P) +4

Aufgabe 2

(20 + 10 + 5 P = 35 P)

1. $E = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -6x_1 + \sqrt{3}x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$, $F = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6x_1 + \sqrt{3}x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$, mit den Normalenvektoren $\mathbf{n}_E := [-6, \sqrt{3}, 3]^t$ und $\mathbf{n}_F := [6, \sqrt{3}, 3]^t$. +1

Der Schnittwinkel $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\langle \mathbf{n}_E \mid \mathbf{n}_f \rangle|}{\|\mathbf{n}_E\|\|\mathbf{n}_F\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{|-36+3+9|}{36+3+9}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$. +2

Der Vektor $\mathbf{x} = [-2, 0, 4]^t$ gehört zu E, denn $-6x_1 + \sqrt{3}x_2 + 3x_3 = -6 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 0$ zeigt, daß er die Ebenengleichung von E erfüllt. +1

Den Richtungsvektor $\mathbf{n}_g$ von $g = E \cap F$ erhalten wir jetzt einfach über das Kreuzprodukt $\mathbf{n}_E \times \mathbf{n}_F$: +2

$$
\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3 & 3 \\ -6 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3 & 3 \end{bmatrix}
\quad : \quad
\begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & - & 3\sqrt{3} \\ 18 & + & 18 \\ -6\sqrt{3} & - & 6\sqrt{3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \\ -12\sqrt{3} \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}
\sim \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}
=: \mathbf{n}_g.
$$ +2

Damit kennen wir $g = \{ s \cdot \mathbf{n}_g \mid s \in \mathbb{R} \} = \left\{ [0, \sqrt{3}\,s, -s]^t \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$. +1

Für die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ wählen wir $\mathbf{b}_3 := \frac{1}{2}[0, \sqrt{3}, -1]^t$. $\mathbf{b}_1 = [b_1, b_2, 0]^t$ soll in der x_1x_2-Ebene liegen: Daher muß $0 = \langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_3 \rangle = \sqrt{3}\,b_2$, also $b_2 = 0$ gelten. Damit können wir für $\mathbf{b}_1$ einfach $\boldsymbol{e}_1$ nehmen: $\mathbf{b}_1 := \boldsymbol{e}_1 = [1, 0, 0]^t$. Dann ist $\mathbf{b}_2 := \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}[0, 1, \sqrt{3}]^t$ und folglich +4

$$
\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad
B := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.
$$ +1

$$
\det(B) = \frac{1}{2^3}\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{matrix} = \frac{1}{8}(2 + 0 + 0 - 0 + 6 - 0) = 1 > 0
$$ +2

zeigt die positive Orientierung von $\mathcal{B}$. B^t ist die Transformationsmatrix für die Basisdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}} := \mathrm{B}^t\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ +2

Die Darstellung von $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$ lautet daher $\mathbf{x} = 2\,\mathbf{b}_1 + 2\sqrt{3}\,\mathbf{b}_2 + 2\,\mathbf{b}_3$. (20 P) +2

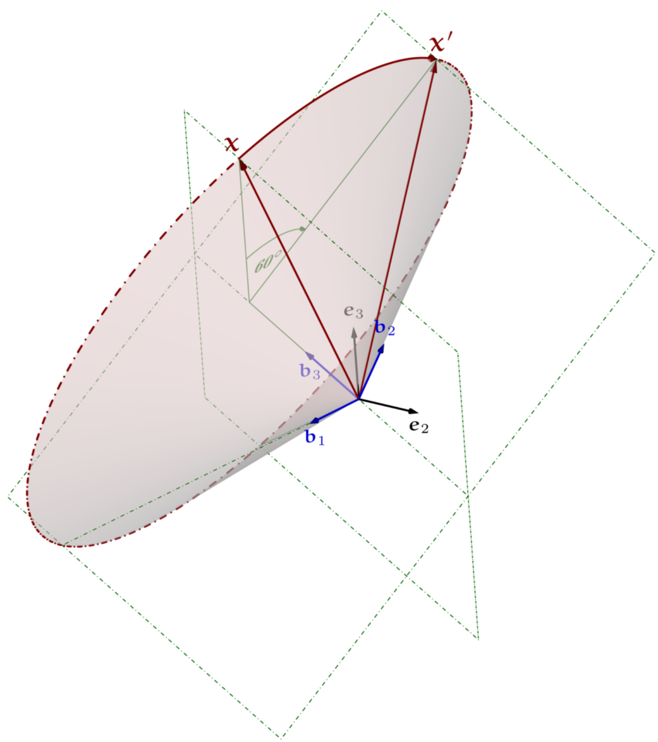
2. Die Drehachse hat den Richtungsvektor $\mathbf{b}_3$. Den gedrehten Vektor $\mathbf{x}'$ erhalten wir jetzt wie folgt:

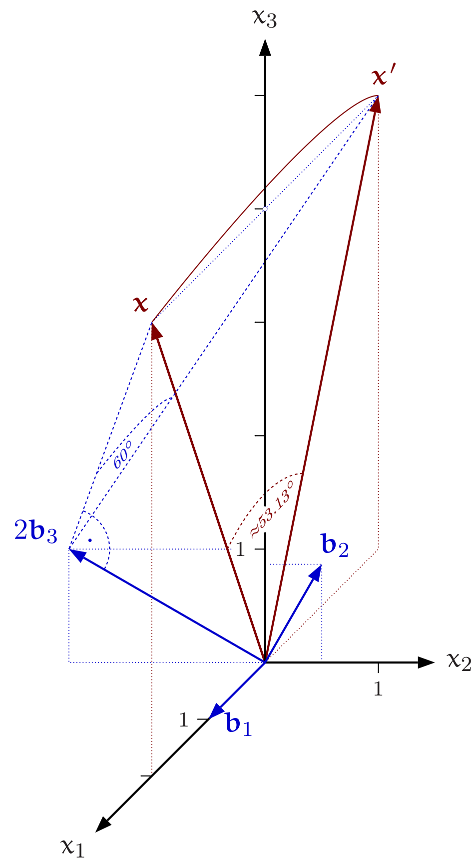
$$\mathbf{x}' = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathrm{B}^t\mathbf{x} = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathrm{B}\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$ +9

$$= \mathrm{B}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Die Länge von $\mathbf{x}$: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} = \sqrt{(-2)^2+16} = \|\mathbf{x}'\|$, wie erwartet. (10 P) +1

Der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ ist $\cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}'\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}'\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{16-4}{16+4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13°$ und nicht etwa $60°$, wie man meinen könnte. Das liegt daran, daß $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ auf dem Kegelmantel eines Kegels liegen, dessen Symmetrieachse parallel zu $\mathbf{b}_3$ ist und dessen Spitze sich im Ursprung $\mathbf{0}$ befindet. Schneidet man diesen Kegel senkrecht zur Kegelachse in Höhe von $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{x}'$, so erhält man einen Schnittkreis, auf dem $\mathbf{x}$ um $60°$ bis zu $\mathbf{x}'$ gedreht wurde. Der Winkel zwischen den (Orts)Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ dagegen ist normalerweise kleiner (außer, wenn $\mathbf{x}$ senkrecht auf der Drehachse stehen sollte). $\mathbf{x}' \in \mathrm{F}$ folgt einfach aus $-2\cdot 6 + 4\cdot 3 = 0$, d. h. $\mathbf{x}'$ erfüllt die Ebenengleichung von F. (5 P)





Aufgabe 3 (15 P)

Wir müssen versuchen, das inhomogene lineare Gleichungssystem $y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + y_3\mathbf{b}_3 + y_4\mathbf{b}_4 + y_5\mathbf{b}_5 = \mathbf{y}$ für die Koeffizienten $y_1,\ldots,y_5$ der Basisentwicklung von $\mathbf{y}$ in der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ zu lösen. $+1$
Dabei entscheiden wir auch gleich, ob es sich bei $\mathcal{B}$ überhaupt um eine Basis handelt:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
I	1	3	−4	0	5	20	
II	4	14	−19	1	18	83	II − 4 I
III	8	28	−36	1	38	168	III − 8 I
IV	−3	−9	12	1	−14	−54	IV + 3 I
V	2	10	−12	3	11	62	V − 2 I
I	1	3	−4	0	5	20	2 I − 3 II
II	0	2	−3	1	−2	3	
III	0	4	−4	1	−2	8	III − 2 II
IV	0	0	0	1	1	6	
V	0	4	−4	3	1	22	V − 2 II
I	2	0	1	−3	16	31	2 I − III
II	0	2	−3	1	−2	3	2 II + 3 III
III	0	0	2	−1	2	2	
IV	0	0	0	1	1	6	
V	0	0	2	1	5	16	V − III
I	4	0	0	−5	30	60	I + 5 IV
II	0	4	0	−1	2	12	II + IV
III	0	0	2	−1	2	2	III + IV
IV	0	0	0	1	1	6	
V	0	0	0	2	3	14	V − 2 IV
I	4	0	0	0	35	90	I − 35 V
II	0	4	0	0	3	18	II − 3 V
III	0	0	2	0	3	8	III − 3 V
IV	0	0	0	1	1	6	IV − V
V	0	0	0	0	1	2	
I	4	0	0	0	0	20	
II	0	4	0	0	0	12	
III	0	0	2	0	0	2	
IV	0	0	0	1	0	4	
V	0	0	0	0	1	2	

$+9$

Das zeigt einerseits, daß die Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind, denn das GAUSS-Verfahren $+2$
erzeugt eine vollbesetzte Diagonale für die Matrix B. Das bedeutet, daß B injektiv, als quadratische Matrix daher auch surjektiv und folglich invertierbar ist. Andererseits kann man die Koeffizienten der $+1$
Basisentwicklung jetzt einfach ablesen:
$y_1 = 5$, $y_2 = 3$, $y_3 = 1$, $y_4 = 4$, $y_5 = 2$, also $\mathbf{y} = 5\,\mathbf{b}_1 + 3\,\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + 4\,\mathbf{b}_4 + 2\,\mathbf{b}_5$. $+2$

Aufgabe 4 (10 P)

$$\det(C) = \det\begin{bmatrix} 3\,i & -3\,i & -1-2\,i & 6+11\,i \\ 2\,i & -3\,i & -14-2\,i & 1+10\,i \\ 0 & i & 6 & -i \\ -i & i & 4 & -2-5\,i \end{bmatrix}$$

berechnen wir mit dem Determinantenschema:

I	$3\,i$	$-3\,i$	$-1-2\,i$	$6+11\,i$	$I+3\,IV$	
II	$2\,i$	$-3\,i$	$-14-2\,i$	$1+10\,i$	$II+2\,IV$	
III	0	i	6	$-i$		
IV	$-i$	i	4	$-2-5\,i$		
I	0	0	$11-2\,i$	$-4\,i$		
II	0	$-i$	$-6-2\,i$	-3		
III	0	i	6	$-i$		
IV	$-i$	i	4	$-2-5\,i$		
I		0	$11-2\,i$	$-4\,i$		i
II		$-i$	$-6-2\,i$	-3	$II+III$	
III		i	6	$-i$		
I		0	$11-2\,i$	$-4\,i$		
II		0	$-2\,i$	$-3-i$		
III		i	6	$-i$		
I			$11-2\,i$	$-4\,i$		i
II			$-2\,i$	$-3-i$		

Daher ist

$$\det(C) = i^2 \det\begin{bmatrix} 11-2\,i & -4\,i \\ -2\,i & -3-i \end{bmatrix} = -\left[(2\,i-11)(3+i) - 8\,i^2\right]$$
$$= -(-2-33-11\,i+6\,i) - 8 = 27+5\,i.$$