Klausur zur Analysis 2023

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel:	Taschenrechner ohne grafikfähiges Display und ohne Computeralgebrasystem. Eine A4-Seite mit handschriftlichen Notizen.
Zeit:	120 Min.
Gesamtpunktzahl:	100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (5 P, 7 P, 6 P, 7 P zusammen: 25 P)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

i) $\left(\sqrt{9n^2+15n}-3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **ii)** $\left(\ln\left(\frac{4n^2-1}{\sqrt{n^2+2}}\right)-\ln(2n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

iii) $\left(\frac{1}{n}\ln\left(n^2+e^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **iv)** $\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis: Die ln-Rechengesetze könnten hilfreich sein.

Aufgabe 2 (10 P)

Gegeben ist die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x-1}\ln\left(e^{-2x}+(1-e^{-2})x\right), & x\neq 1 \\ c, & x=1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie c so, daß sie stetig wird. (5 P)

Berechnen Sie die waagrechte Asymptote für $x\to-\infty$. (5 P)

Aufgabe 3 (zusammen: 30 P)

i) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für folgende Funktion durch (5 P) (25 P)

$$f(x) := \frac{x^4}{(2x-1)^2}.$$

Zeigen Sie dafür zunächst $f'(x) = 4\,\frac{(x-1)x^3}{(2x-1)^3}$ und $f''(x) = 4\,\frac{(2x^2-4x+3)x^2}{(2x-1)^4}$. (2 P)

Zeigen Sie mittels Polynomdivision, daß $a(x) := \frac{1}{16}(4x^2+4x+3)$ eine Näherungskurve von f ist. (6 P)

Bestimmen Sie alle Tangenten an f, die den Punkt $O := [0, 0]$ enthalten. (6 P)

Zeigen Sie, daß die von f und a auf dem Intervall $[1, \infty)$ eingeschlossene Fläche keinen endlichen Flächeninhalt hat. Zeigen Sie dafür $f(x) - a(x) = \frac{1}{8}\frac{2}{2x-1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(2x-1)^2}$. (6 P)

ii) Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

Aufgabe 4 (6 P, 10 P, 9 P zusammen: 25 P)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{1+3x} + \frac{1}{x^4} + \frac{18x}{(1+x^2)^{10}} + \frac{1}{\sqrt{5x^2-5}} + \frac{4x+2e^x}{x^2+e^x}\right) dx$ **ii)** $\displaystyle\int \cos^2(x)\, e^{-x}\, dx$

iii) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$. Was ist dabei zu beachten?

Hinweise:

Erinnern Sie sich beim zweiten Integral zu gegebener Zeit an $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Bestimmen Sie a *so, daß* $a \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-1}$ *den Integrand des dritten Integrals ergibt.*

Aufgabe 5 (10 P)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \binom{3k}{k} z^{2k}$.

Lösungen

Aufgabe 1 (5 P, 7 P, 6 P, 7 P)

i) $$\sqrt{9n^2+15n}-3n = \frac{\left(\sqrt{9n^2+15n}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+15n}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+15n}+3n} = \frac{9n^2+15n-9n^2}{\sqrt{9n^2+15n}+3n} = \frac{15n}{3n\left(\sqrt{1+\frac{5}{3n}}+1\right)}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{3n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{2},$$ +4

denn $\left(\frac{5}{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Daher konvergiert der Nenner im Bruch des letzten Ausdrucks nach der Summenregel konvergenter Folgen und wegen der Stetigkeit der Wurzel gegen 2. Die Quotientenregel liefert dann das Ergebnis. +1 (5 P)

ii) $$\ln\left(\frac{4n^2-1}{\sqrt{n^2+2}}\right) - \ln(2n+1) = \ln\left(\frac{(2n+1)(2n-1)}{\sqrt{n^2+2}\,(2n+1)}\right) = \ln\left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}\right) = \ln\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(2).$$ +5

Aufgrund der Stetigkeit der Wurzel konvergiert der Nenner $\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}$ des Bruchs gegen 1, der Zähler strebt gegen 2 und der Bruch wegen der Quotientenregel konvergenter Folgen ebenfalls. Die Stetigkeit der $\ln$-Funktion zeigt dann die Konvergenz gegen $\ln(2)$. +1 +1 (7 P)

iii) $$\frac{1}{n}\ln\left(n^2+e^n\right) = \frac{1}{n}\ln\left(e^n\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)\right) = \frac{1}{n}\ln(e^n) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right) = \ln(e) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \ln(e) = 1,$$ +4

denn $\left(\frac{n^2}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, so daß, wegen der Stetigkeit des Logarithmus, $\ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)$ gegen $\ln(1) = 0$ konvergiert. Der zweite Summand ist, als Produkt dieses Ausdrucks mit der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Nullfolge. Das Ergebnis ergibt sich aus der Summenregel konvergenter Folgen. +1 (6 P) +1

iv) *1. Methode:* $a_n := \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ bestimmt eine Teilfolge der bekannten Folge $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen e konvergiert (die Indexfolge besteht aus den Quadratzahlen). Als Teilfolge ist sie ebenfalls konvergent, mit demselben Grenzwert e. Da die $\ln$-Funktion stetig ist, konvergiert die Folge $\ln(a_n)$ gegen $\ln(e) = 1$. Um das auf die Aufgabe anwenden zu können, erweitern wir die Folge mit n: +1 +2 +1

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = \frac{n}{n}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = \frac{1}{n}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right) = \frac{1}{n}\cdot\ln(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0\cdot 1 = 0.$$ +3

2. Methode: Die Regeln von DE L'HOSPITAL ergeben +1

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n^3}}{-\frac{1}{n^2}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0,$$ +5

denn im letzten Grenzwert konvergiert der Zähler des Bruchs gegen 0 und der Nenner gegen 1. (7 P) +1

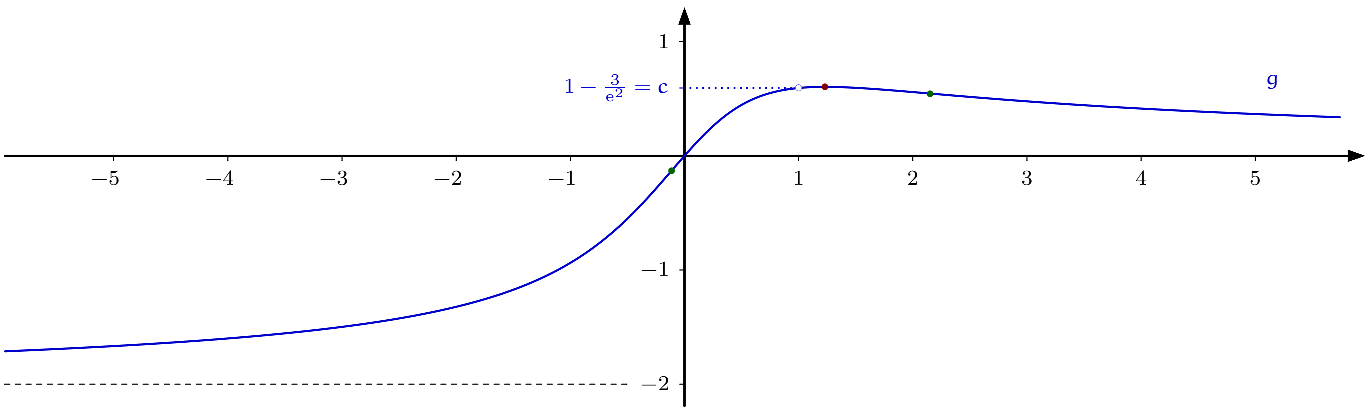
Aufgabe 2 (zusammen: 10 P)

Für $x \to 1^{\pm}$ strebt $\frac{1}{x-1}\ln\bigl(e^{-2x} + (1-e^{-2})x\bigr)$ gegen einen unbestimmten Ausdruck des Typs „$\frac{0}{0}$". Daher $+1$
versuchen wir es mit den Regeln von DE L'HOSPITAL:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{\ln\bigl(e^{-2x} + (1-e^{-2})x\bigr)}{x-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{-2e^{-2x} + (1-e^{-2})}{e^{-2x} + (1-e^{-2})x} = 1 - 3e^{-2}. \qquad +2$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert e^{-2x} für $x \to 1^{\pm}$ gegen e^{-2}. Der Zähler konvergiert daher gegen $1-3e^{-2}$ und der Nenner gegen 1, so daß sich der erste Grenzwert aus den Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt. Für $c = 1-3e^{-2} \approx 0.594$ wird die Funktion an der Stelle $x = 1$ $+1$
stetig.

Für $x \neq 1$ ist $x \mapsto \ln(e^{-2x} + (1-e^{-2})x)$ als Verkettung der stetigen Funktionen $x \mapsto e^{-2x} + (1-e^{-2})x$ und $\ln$ stetig. g ist dann das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ und folglich stetig. (5 P) $+1$



Für $x \to -\infty$ wird e^{-2x} und damit auch $\ln\bigl(e^{-2x} + (1-e^{-2})x\bigr) = \ln\bigl(e^{-2x}(1 + (1-e^{-2})xe^{2x})\bigr) = -2x + \ln\bigl(1 + (1-e^{-2})xe^{2x}\bigr)$ unbeschränkt. $g(x)$ strebt daher wieder gegen einen unbestimmten Ausdruck, diesmal des Typs „$\frac{\infty}{\infty}$". Die Regeln von DE L'HOSPITAL ergeben jetzt $+1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\bigl(e^{-2x} + (1-e^{-2})x\bigr)}{x-1} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^{-2x} + (1-e^{-2})}{e^{-2x} + (1-e^{-2})x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^{-2x}}{-2e^{-2x} + (1-e^{-2})} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{-2 + (1-e^{-2})e^{2x}} = -2. \end{aligned} \qquad +4$$

Die waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$ befindet sich in der Höhe -2. (5 P)

NB.: Genauso findet man auch die Höhe 0 der waagrechten Asymptote für $x \to \infty$.

Aufgabe 3 (zusammen: 30 P)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^4}{(2x-1)^2}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\},\\
f'(x) &= \frac{4x^3(2x-1)^2 - 4x^4(2x-1)}{(2x-1)^4} = 4\frac{(2x-1)\big[x^3(2x-1)-x^4\big]}{(2x-1)^4} = 4\frac{x^4-x^3}{(2x-1)^3} = 4\frac{x^3(x-1)}{(2x-1)^3},\\
f''(x) &= 4\,\frac{(4x^3-3x^2)(2x-1)^3 - 6(x^4-x^3)(2x-1)^2}{(2x-1)^6} = 4\,\frac{x^2\big((4x-3)(2x-1)-6x^2+6x\big)}{(2x-1)^4}\\
&= 4\,\frac{x^2(8x^2-6x-4x+3-6x^2+6x)}{(2x-1)^4} = 4\,\frac{x^2\big(2x^2-4x+3\big)}{(2x-1)^4}.
\end{aligned}
$$
+2

NÄHERUNGSKURVE: Bei $x = \frac{1}{2}$ hat f einen Pol ohne Vorzeichenwechsel, also eine senkrechte Asymptote. +1

Wir müssen die Polynomdivision $x^4 : (4x^2-4x+1)$ durchführen, um die Näherungskurve erkennen zu können:

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^4) : \big(4x^2-4x+1\big) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16} + \dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{16}}{4x^2-4x+1}\\
\underline{-x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2}\\
\qquad x^3 - \frac{1}{4}x^2\\
\qquad \underline{-x^3 \;+ x^2 - \frac{1}{4}x}\\
\qquad\qquad \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\\
\qquad\qquad \underline{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}}\\
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}
\end{array}
$$
+3

Das heißt: $f(x) = \frac{x^4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{16}(4x^2+4x+3) + \frac{1}{16}\frac{8x-3}{(2x-1)^2} = a(x) + \frac{1}{16}\frac{8x-3}{(2x-1)^2}$.

Damit folgt nun leicht

$$
|f(x) - a(x)| = \frac{1}{16}\frac{|8x-3|}{(2x-1)^2} = \frac{1}{16}\frac{|x|\big|8-\frac{3}{x}\big|}{x^2\big(2-\frac{1}{x}\big)^2} = \frac{1}{16|x|}\cdot\frac{\big|8-\frac{3}{x}\big|}{\big(2-\frac{1}{x}\big)^2} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0,
$$
+1

denn $\frac{1}{16|x|}$ konvergiert gegen 0 und $\frac{|8-\frac{3}{x}|}{(2-\frac{1}{x})^2}$ gegen 2. Das zeigt, daß $a(x) = \frac{1}{16}(2x+1)^2 + \frac{1}{8}$ tatsächlich eine Näherungskurve von f bestimmt. Es ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel bei $\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\big]$. +1

NULLSTELLEN: $f(x) = 0$ hat offensichtlich nur die Lösung $x = 0$. Die Nullstelle $T_1 \coloneqq [0,0]$ markiert auch das Minimum der Funktion, da sie keine negativen Werte annehmen kann. +1

EXTREMA: $f'(\tilde{x}) = 0$ hat die schon identifizierte Stelle $\tilde{x} = 0$ und die Stelle $\tilde{x}_1 = 1$ als Lösungen. Wegen $f''(1) = 4\,\frac{2-4+3}{1^4} > 0$, handelt es sich bei $T_2 \coloneqq [1,1]$ um einen Tiefpunkt. +2

WENDEPUNKTE: $f''(\hat{x}) = 0$ führt wieder auf $\hat{x} = 0$ und auf die quadratische Gleichung $2\hat{x}^2 - 4\hat{x} + 3 = 0$, die reell nicht lösbar ist. Daher hat f keine Wendepunkte ($[0,0]$ ist aber auch ein Flachpunkt von f). +2

DIE TANGENTEN DURCH O: Die Tangente $t(x) = f(u) + f'(u)(x-u)$ an einer Stelle $0 \neq u \in D_f$ soll +1
den Punkt $O = [0,0]$ enthalten, d. h., es muß $0 = f(u) - uf'(u)$, oder $\frac{f(u)}{u} = f'(u)$ gelten: +1

$$
\frac{f(u)}{u} = \frac{u^3}{(2u-1)^2} = 4\,\frac{u^3(u-1)}{(2u-1)^3} \quad\Leftrightarrow\quad 2u-1 = 4u-4 \quad\Leftrightarrow\quad u = \frac{3}{2}.
$$
+2

$f\big(\frac{3}{2}\big) = \frac{81}{64}$, d. h. $P = \big[\frac{3}{2}, \frac{81}{64}\big]$ ist der Berührpunkt der Tangente $t(x) = f'\big(\frac{3}{2}\big)x = \frac{27}{32}x$. Eine weitere Tangente +1
durch O ist natürlich die x-Achse (das ist der Fall $u = 0$). +1

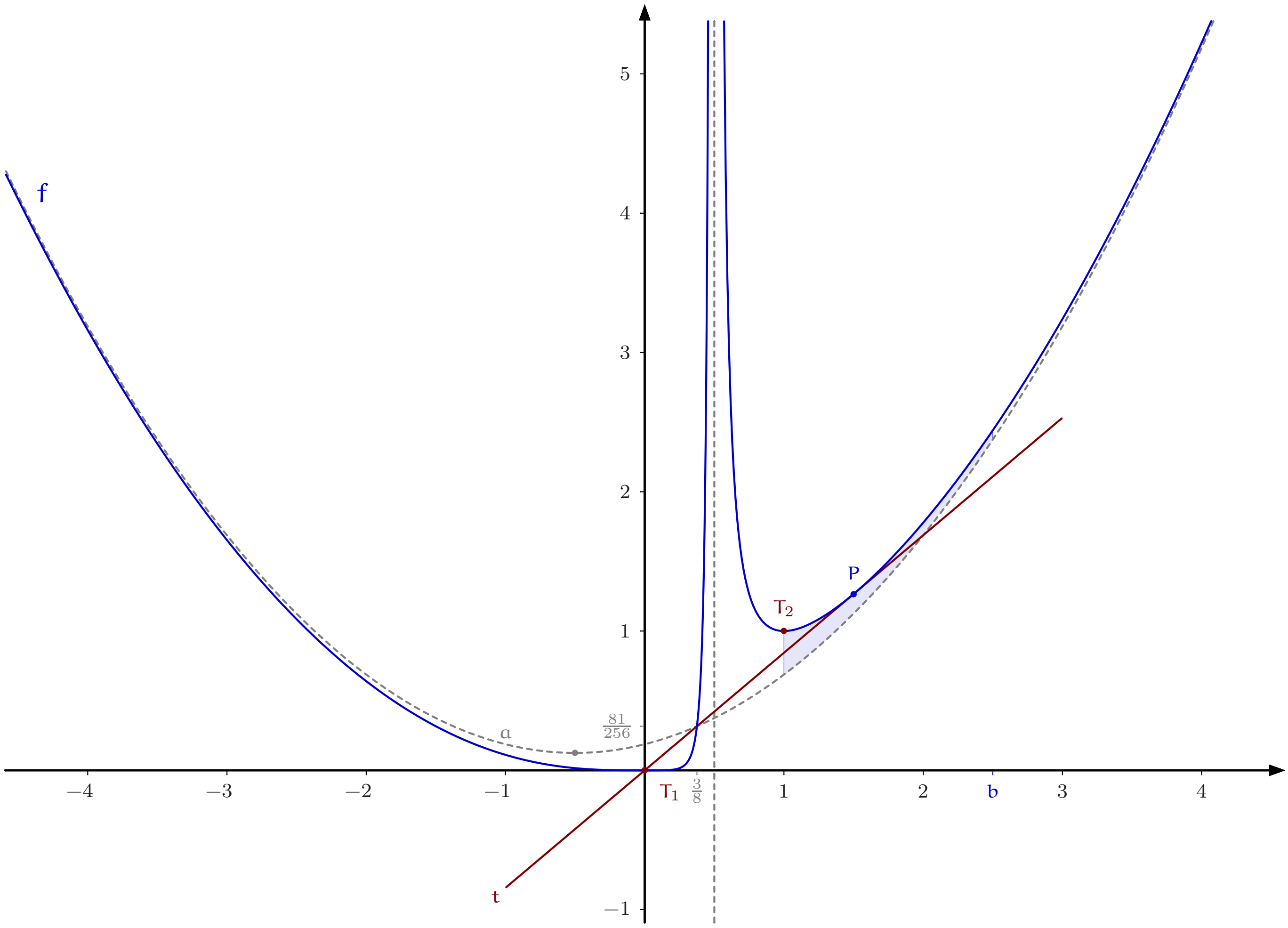
FLÄCHENINHALT: Zunächst zerlegen wir $f(x) - a(x)$ so weit, daß uns eine Stammfunktion einfällt:

$$f(x) - a(x) = \frac{1}{16}\frac{8x-4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{(2x-1)^2} = \frac{1}{8}\frac{2}{2x-1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(2x-1)^2}.$$ +2

Damit erhalten wir

$$\int_1^b \big(f(x) - a(x)\big)\,dx = \left[\frac{1}{8}\ln\big(|2x-1|\big) - \frac{1}{32}\frac{1}{2x-1}\right]_1^b = \frac{1}{8}\ln\big(2b-1\big) - \frac{1}{32}\frac{1}{2b-1} - \frac{1}{16}\ln(1) + \frac{1}{32}$$ +3

Dieser Ausdruck divergiert für $b \to \infty$ gegen ∞, da $b \mapsto \ln(2b-1)$ nach oben unbeschränkt ist, während $-\frac{1}{32}\frac{1}{2b-1} + \frac{1}{32}$ gegen $\frac{1}{32}$ konvergiert und somit beschränkt bleibt. Die von f und a auf dem Intervall $[1, \infty)$ eingeschlossene Fläche hat daher keinen endlichen Flächeninhalt. +1



+5

Aufgabe 4 (6 P, 10 P, 9 P)

i)

$$\int \left(\sqrt[3]{1+3x} + \frac{1}{x^4} + \frac{18x}{(1+x^2)^{10}} + \frac{1}{\sqrt{5x^2-5}} + \frac{4x+2e^x}{x^2+e^x} \right) dx$$

$$= \int \left((1+3x)^{\frac{1}{3}} + x^{-4} - \frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)^9} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 2\,\frac{2x+e^x}{x^2+e^x} \right) dx$$ +6

$$= \frac{1}{4}\,\sqrt[3]{1+3x}^{\,4} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{(1+x^2)^9} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}(x) + 2\ln\bigl(x^2+e^x\bigr).$$

ii)

$$\int \cos^2(x)\, e^{-x}\, dx = -\cos^2(x)\, e^{-x} - 2\int \sin(x)\cos(x)\, e^{-x}\, dx$$

$$= -\cos^2(x)\, e^{-x} - 2\left[-e^{-x}\sin(x)\cos(x) + \int \bigl(\cos^2(x) - \sin^2(x)\bigr)\, e^{-x}\, dx \right]$$

$$= e^{-x}\left[2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x)\right] - 2\int \bigl(2\cos^2(x) - 1\bigr)\, e^{-x}\, dx$$ +10

$$= e^{-x}\left[2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) - 2\right] - 4\int \cos^2(x)\, e^{-x}\, dx \qquad \Rightarrow$$

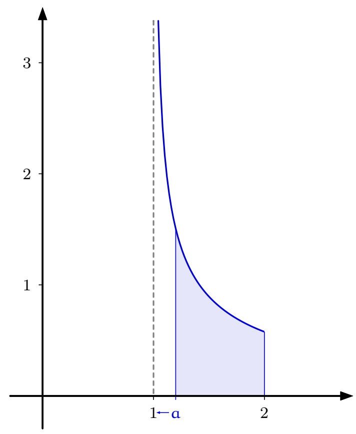
$$\int \cos^2(x)\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{5}\bigl(2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) - 2\bigr)e^{-x}.$$

iii)

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{d}{dx}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{a\to 1^+} \left[\sqrt{x^2-1}\right]_a^2$$ +9

$$= \lim_{a\to 1^+} \sqrt{3} - \sqrt{a^2-1} = \sqrt{3}.$$



Da sich bei $x = 1$ eine Polstelle der Funktion $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ befindet, muß man das Integral über den Grenzwert $a \to 1^+$ der unteren Grenze berechnen.

Aufgabe 5 (10 P)

Für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{3k}{k} z^{2k}$ versuchen wir das Quotientenkriterium:

$$\frac{\binom{3k+3}{k+1}}{\binom{3k}{k}} = \frac{(3k+3)!k!(2k)!}{(k+1)!(2k+2)!(3k)!} = \frac{3\cancel{(k+1)}(3k+2)(3k+1)\cancel{(3k)!}\cancel{k!}\cancel{(2k)!}}{2\cancel{(k+1)}\cancel{k!}(k+1)(2k+1)\cancel{(2k)!}\cancel{(3k)!}}$$ +7

$$= \frac{3(3k+2)(3k+1)}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{27\cancel{k^2}\left(1+\frac{2}{3k}\right)\left(1+\frac{1}{3k}\right)}{4\cancel{k^2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{2k}\right)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{27}{4}.$$

denn nach den Rechenregeln konvergenter Folgen strebt der Zähler gegen 27 und der Nenner gegen 4, so +1
daß der Grenzwert aus der Quotientenregel folgt. Der Konvergenzradius ist $R = \sqrt{\frac{4}{27}} = \sqrt{\frac{4\cdot 3}{81}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$ +2