Klausur zur Analysis 2022

(Dozent: Hellmich)

Hilfsmittel: Taschenrechner ohne grafikfähiges Display und ohne Computeralgebrasystem.

Zeit: 120 Min.

Gesamtpunktzahl: 100

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

Aufgabe 1 (zusammen: 20 P)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle - 50 \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle - 625 = 0 \right\}.$$

Eigenvektoren der Matrix zu den Eigenwerten $\lambda_1 := 25$ und $\lambda_2 := -25$ sind $[3,4]^t$ bzw. $[-4,3]^t$ *(das darf ungeprüft verwendet werden).*

Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q und berechnen Sie alle ihre Bestimmungsstücke. (12 P)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (8 P)

Aufgabe 2 (7 P, 8 P, 8 P, 7 P, zusammen: 30 P)

Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls (mit Ausnahme der letzten) ihre Grenzwerte.

i) $\left(\sin\left(2.5\,\pi + 4n^2 - \frac{4n^3 + 8n^2 + 2\pi n}{n+2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ii) $\left(\sqrt{n^3 - n} - n\sqrt{n} + 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$

iii) $\left(\frac{1}{n}\ln(e^n + 1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

iv) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)

i) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion (20 P)

$$f(x) \coloneqq x\cos(x)$$

mit dem Definitionsbereich $D_f \coloneqq [-\pi, \pi]$ durch. Bei den Extrema und den Wendepunkten werden Sie auch auf Näherungsmethoden zurückgreifen müssen (erste Schätzwerte sind $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = 2$).
Finden Sie alle Tangenten an f durch den Punkt $[0, 0]$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen und der zweiten Winkelhalbierenden $g(x) \coloneqq -x$ eingeschlossen wird.

ii) Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine sorgfältige Skizze ein. (5 P)

Aufgabe 4 (5 P, 10 P)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int \left(\sqrt[4]{1-x} + \frac{3}{2x+1} - x\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3+3x^2} + \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) dx$ **ii)** $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin^2(x) dx$

Aufgabe 5 (zusammen: 10 P)

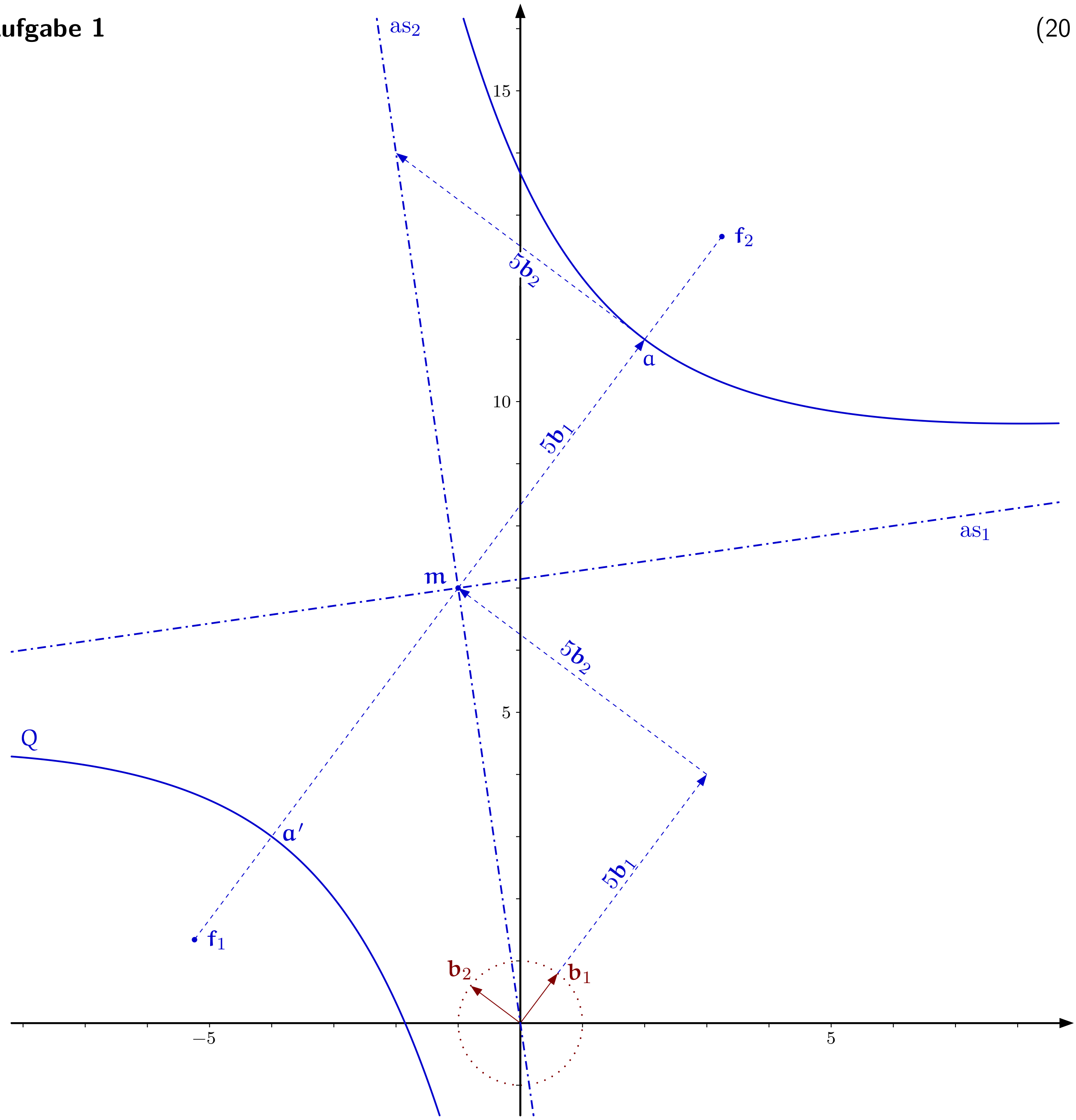
Bestimmen Sie

i) den Konvergenzradius der Potenzreihe $h(z) \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!+1} z^k$, (5 P)

ii) die TAYLOR-Reihe der Funktion $p(z) \coloneqq \dfrac{z^2}{3+4z}$, sowie ihren Konvergenzradius. (5 P)

Lösungen

Aufgabe 1 (20 P)



+8

Die Gleichung von Q lautet: $0 = \langle \boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} \rangle + \langle \mathbf{b} \,|\, \boldsymbol{x} \rangle - 625$, mit $\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A := \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{b} := -50 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ ist eine ONB aus Eigenvektoren für die Matrix A zu den Eigenwerten 25 und -25. Daher ist $B := \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix und $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = B^*\boldsymbol{x}$. Es gilt

$$\mathbf{b}_{\mathcal{B}} := B^*\mathbf{b} = -\tfrac{50}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ 250 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad A_{\mathcal{B}} := B^*AB = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ +2

Die transformierte Gleichung lautet also

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \,|\, A_{\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle + \langle \mathbf{b}_{\mathcal{B}} \,|\, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle - 625 \\
&= 25\tilde{x}^2 - 25\tilde{y}^2 - 250\tilde{x} + 250\tilde{y} - 625 \\
&= 25\big(\tilde{x}^2 - 10\tilde{x} + 25\big) - 25\big(\tilde{y}^2 - 10\tilde{y} + 25\big) - 625 + 625 - 625 \\
&= 25(\tilde{x} - 5)^2 - 25(\tilde{y} - 5)^2 - 25^2 \\
&= 25^2\Big[\frac{(\tilde{x}-5)^2}{5^2} - \frac{(\tilde{y}-5)^2}{5^2} - 1\Big]
\end{aligned}$$ +6

Damit handelt es sich bei Q um eine Hyperbel mit den Halbachsen $a = 5$ in Richtung $\mathbf{b}_1$, $b = 5$ in Richtung $\mathbf{b}_2$ und $e = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$. Der Mittelpunkt befindet sich bei $\mathbf{m} := 5\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, die +2
Brennpunkte bei $\mathbf{f}_{1/2} = \mathbf{m} \mp 5\sqrt{2}\,\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \mp 3\sqrt{2} \\ 7 \mp 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -5.2426 \\ 1.3431 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 3.2426 \\ 12.6569 \end{bmatrix}$.

Der Punkt $\mathbf{a} = 10\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$ und der gegenüberliegende $\mathbf{a}' = 5\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Die beiden Asymptoten haben die Gleichungen

$$\mathrm{as}_1(t) = \mathbf{m} + 5t(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} -1 + 7t \\ 7 + 7t \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{as}_2(t) = \mathbf{m} + 5t(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} -1 - t \\ 7 + t \end{bmatrix}.$$ +2

NB: Durch Elimination des Parameters t erhält man gewöhnliche Geradengleichungen:

$x = -1 - 7t \quad \wedge \quad y = 7 + 7t$ *führt auf* $y = \frac{1}{7}x + \frac{50}{7}$, *also* $\mathrm{as}_1(x) = \frac{1}{7}x + \frac{50}{7}$,

$x = -1 - t \quad \wedge \quad y = 7 + 7t$ *führt auf* $y = -7x$, *also* $\mathrm{as}_2(x) = -7x$.

Aufgabe 2 (7 P, 8 P, 8 P, 7 P)

i)
$$\begin{aligned}
\sin\Big(2.5\,\pi + 4n^2 - \frac{4n^3 + 8n^2 + 2\pi n}{n+2}\Big) &= \sin\Big(\frac{2.5\pi n + 4n^3 + 5\pi + 8n^2 - 4n^3 - 8n^2 - 2\pi n}{n+2}\Big) \\
&= \sin\Big(\frac{0.5\pi n + 5\pi}{n+2}\Big) = \sin\Big(\frac{0.5\pi + \frac{5\pi}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\Big) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \sin(0.5\pi) = 1,
\end{aligned}$$ +5

denn $(\frac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\frac{5\pi}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen. Daher konvergiert der Zähler nach der Summenregel konvergenter Folgen gegen 0.5π, der Nenner gegen 1 und, wegen der Quotientenregel, der Bruch gegen $\frac{\pi}{2}$. Da $\sin$ eine +1
stetige Funktion ist, konvergiert die Folge gegen $\sin\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1$. (7 P) +1

ii)
$$\begin{aligned}
\sqrt{n^3 - n} - n\sqrt{n} + 3 &= \frac{\big(\sqrt{n^3-n} - (n\sqrt{n} - 3)\big)\big(\sqrt{n^3-n} + (n\sqrt{n} - 3)\big)}{\sqrt{n^3-n} + n\sqrt{n} - 3} \\
&= \frac{n^3 - n - (n\sqrt{n} - 3)^2}{\sqrt{n^3-n} + n\sqrt{n} - 3} = \frac{n^3 - n - (n^3 - 6n\sqrt{n} + 9)}{\sqrt{n^3-n} + n\sqrt{n} - 3} \\
&= \frac{6n\sqrt{n} - n - 9}{\sqrt{n^3-n} + n\sqrt{n} - 3} = \frac{n\sqrt{n}\big(6 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{9}{n\sqrt{n}}\big)}{n\sqrt{n}\Big(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 - \frac{3}{n\sqrt{n}}\Big)} \\
&= \frac{6 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{9}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 - \frac{3}{n\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 3,
\end{aligned}$$ +6

oder, viel einfacher:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3-n}-n\sqrt{n}+3 &= \frac{\left(\sqrt{n^3-n}-n\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^3-n}+n\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^3-n}+n\sqrt{n}}+3\\ &= \frac{n^3-n-n^3}{\sqrt{n^3-n}+n\sqrt{n}}+3 = \frac{-n}{\sqrt{n^3-n}+n\sqrt{n}}+3 \qquad +6\\ &= 3-\frac{n}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1\right)} = 3-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 3,\end{aligned}$$

denn wegen der Stetigkeit der Wurzel konvergiert $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ gegen 1 und, wegen der Quotientenregel $+1$ konvergenter Folgen, $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}$ gegen $\frac{1}{2}$. Da $\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert der zweite Summand nach $+1$ der Produktregel konvergenter Folgen gegen 0 und die Folge wegen der Summenregel gegen 3. (8 P)

iii) $\frac{1}{n}\ln\left(e^n+1\right) = \frac{1}{n}\ln\left(e^n(1+e^{-n})\right) = \frac{1}{n}\ln\left(e^n\right)+\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-n}\right) = 1+\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1,$ $+6$

denn e^{-n} konvergiert gegen 0, daher $1+e^{-n}$ gegen 1 und, wegen der Stetigkeit der $\ln$-Funktion, $\frac{1}{n}\ln(1+e^{-n})$ gegen $0\ln(1)=0$. $+2$

Oder mit Hilfe der Regeln von DE L'HOSPITAL*:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(e^n+1\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{e^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{-n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad +6$$

denn e^{-n} konvergiert gegen Null, der Nenner also gegen 1, so daß sich das Ergebnis aus der Quotientenregel $+2$ konvergenter Folgen ergibt. (8 P)

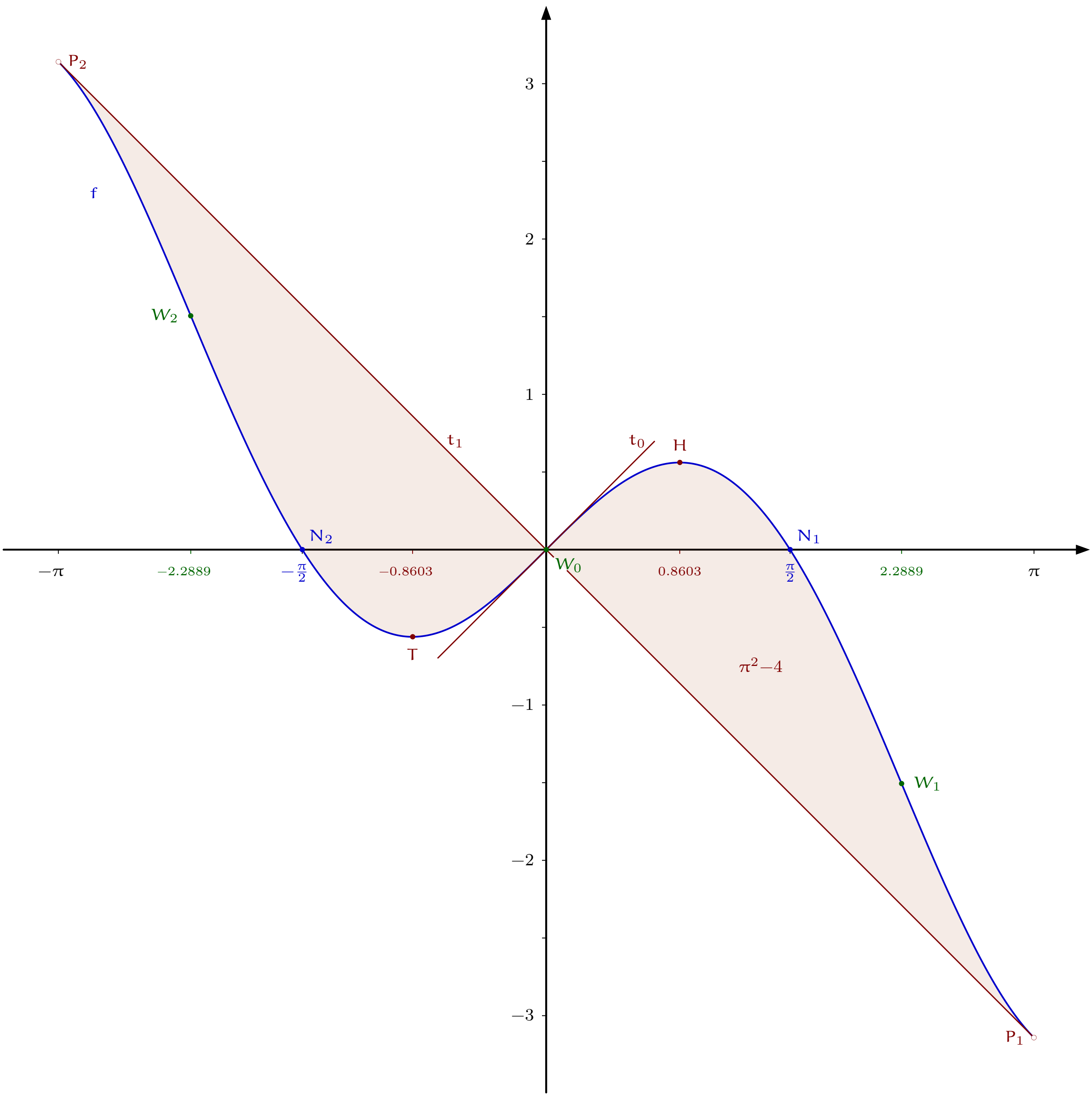
iv) Wir verwenden das Quotientenkriterium mit $a_k := \frac{k}{(k+1)!}$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)(k+1)!}{(k+2)!k} = \frac{k+1}{(k+2)k} = \frac{k+1}{k^2+2k} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0<1, \qquad +5$$

denn $\frac{1}{k}$ konvergiert gegen 0, während $\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}$ nach den Rechenregeln konvergenter Folgen gegen 1 konvergiert. $+1$ Das Ergebnis folgt also aus der Produktregel konvergenter Folgen. Laut Quotientenkriterium ist die Reihe $+1$ konvergent. (7 P)

NB: Es ist nicht schwer zu zeigen, daß sie den Wert 1 *als Grenzwert hat. Es gilt nämlich* $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. *Bei der Summe handelt es sich also um eine sogenannte* Teleskopsumme $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}$.

Aufgabe 3 (zusammen: 25 P)



+5

$$f(x) = x\cos(x), \qquad f'(x) = \cos(x) - x\sin(x), \qquad f''(x) = -(2\sin(x) + x\cos(x)).$$ +1

NULLSTELLEN: f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos(x) = -f(x)$. Daher muß es sich bei der Nullstelle bei $x_0 = 0$ um einen Wendepunkt handeln: $W_0 := [0, 0]$. Weitere Nullstellen in D_f stammen von $\cos(x) = 0$, also $x_{1/2} = \pm\frac{\pi}{2}$: $N_1 := \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $N_2 := \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. +1

EXTREMA: $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) = 0$ ist eine transzendente Gleichung, für die wir keine geschlossenen Lösungen finden können. Wir sind demnach auf Näherungsmethoden, etwa das NEWTON-Verfahren, angewiesen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n\sin(x_n)}{2\sin(x_n) + x_n\cos(x_n)}, \quad x_0 = 1,$$ +5

$$x_1 \approx 0.86\,4536397, \qquad x_2 \approx 0.86033\,9078, \qquad x_3 \approx 0.86033\,3589, \qquad f(x_3) \approx 0.56110.$$

$f'(x_3) \approx 4 \cdot 10^{-11}$, $f''(x_3) \approx -2.08 < 0$. Also liegt bei $H \approx [0.86033, 0.56110]$ ein Hochpunkt und, wegen der Punktsymmetrie von f, bei $T \approx [-0.86033, -0.56110]$ ein Tiefpunkt.

WENDEPUNKTE: $f''(x) = -(2\sin(x) + x\cos(x)) = 0$ hat die schon als Wendestelle identifizierte Lösung $x_0 = 0$ (falls nicht: f'' ist als zweite Ableitung einer punktsymmetrischen Funktion wieder punktsymmetrisch, daher findet bei 0 ein Vorzeichenwechsel statt – oder: $f''(-1) \approx 2.2$, $f''(1) \approx -2.2$, d. h. Wechsel von einer Links- in eine Rechtskurve). Weitere Lösungen gewinnen wir wieder mit dem NEWTON-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)} = x_n - \frac{2\sin(x_n) + x_n\cos(x_n)}{3\cos(x_n) - x_n\sin(x_n)}, \quad x_0 = 2,$$ +5

$$x_1 \approx 2.321581287, \quad x_2 \approx 2.28\,9128505, \quad x_3 \approx 2.2889297\,36, \quad x_4 \approx 2.2889297\,28, \quad f(x_4) \approx -1.50607.$$

$f''(x_4) \approx -3.8 \cdot 10^{-10}$. Bei $W_1 \approx [2.28893, -1.50607]$ und $W_2 \approx [-2.28893, 1.50607]$ liegen Wendepunkte, wie der Vorzeichenwechsel $f''(2) \approx -0.99$, $f''(2.5) \approx 0.81$ für W_1 beweist (der Wendepunkt W_2 folgt aus der Punktsymmetrie von f).

DIE TANGENTEN:

Da $f(0) = 0$ gilt, ist $[0, 0]$ ein Kurvenpunkt. Daher ist eine Tangente durch diesen Punkt die gewöhnliche an der Stelle $u = 0$: $t_0(x) = f'(0)x = x$. +1

Für jede andere muß $0 = f(u) + f'(u)(0 - u) = u\cos(u) - u\cos(u) + u^2\sin(u) = u^2\sin(u)$ gelten. Die einzig neuen Lösungen stammen von $\sin(u) = 0$, also $u_1 = \pi$ und $u_2 = -\pi$. Die zugehörigen Tangenten: +1

$t_1(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) = -\pi - (x - \pi) = -x.$ +1

Wegen $t_1(-\pi) = \pi$ geht t_1 auch durch den zweiten Berührpunkt $P_2 := [-\pi, \pi]$ (der erste ist $P_1 := [\pi, -\pi]$), so daß also nur *eine* weitere Tangente vorhanden ist.

DER FLÄCHENINHALT:

Die zweite Winkelhalbierende g ist t_1. Daher kennen wir deren Schnittpunkt bei $[0, 0]$ mit f und den einzigen Berührpunkt P_1 auf der rechten Seite. Der fragliche Flächeninhalt ist daher

$$\begin{aligned} 2\int_0^\pi (f(x) + x)\,dx &= 2\int_0^\pi (x\cos(x) + x)\,dx = 2\Big[x\sin(x) + \tfrac{x^2}{2}\Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin(x)\,dx \\ &= \pi^2 + 2\Big[\cos(x)\Big]_0^\pi = \pi^2 + 2\cos(\pi) - 2\cos(0) = \pi^2 - 4. \end{aligned}$$ +5

Aufgabe 4 (5, 10 P)

i)
$$\int\left(\sqrt[4]{1-x}+\frac{3}{2x+1}-x\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3+3x^2}+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx$$
$$=\int\left((1-x)^{\frac14}+\frac32\frac{2}{2x+1}+\frac12(-2x)(1-x^2)^{\frac12}+\frac23\frac{1}{1+x^2}+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx \qquad +5$$
$$=-\tfrac45(1-x)^{\frac54}+\tfrac32\ln(|2x+1|)+\tfrac12\tfrac23(1-x^2)^{\frac32}+\tfrac23\arctan(x)+\ln\big(1+e^{2x}\big)$$
$$=-\tfrac45\sqrt[4]{1-x}^{\,5}+\tfrac32\ln(|2x+1|)+\tfrac13\sqrt{1-x^2}^{\,3}+\tfrac23\arctan(x)+\ln\big(1+e^{2x}\big).$$

ii)
$$\int e^x\sin^2(x)dx=e^x\sin^2(x)-2\int e^x\sin(x)\cos(x)dx$$
$$=e^x\sin^2(x)-2\Big[e^x\sin(x)\cos(x)-\int e^x(\cos^2(x)-\sin^2(x))dx\Big]$$
$$=e^x\sin^2(x)-2e^x\sin(x)\cos(x)+2\int e^x(1-2\sin^2(x))dx \qquad +8$$
$$=e^x\sin^2(x)-2e^x\sin(x)\cos(x)+2e^x-4\int\sin^2(x)dx, \qquad \Rightarrow$$
$$\int_0^\pi e^x\sin^2(x)dx=\tfrac15\Big[\big(\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)+2\big)e^x\Big]_0^\pi=\tfrac25(e^\pi-1)\approx 8.8563. \qquad +2$$

Aufgabe 5 (zusammen: 10 P)

i) Wir verwenden das Quotientenkriterium für den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!+1}z^k$:

$$\frac{(k+1)^2(k!+1)}{k^2\,((k+1)!+1)}=\frac{k^2+2k+1}{k^2}\frac{\frac{(k+1)!}{k+1}+1}{(k+1)!+1}=\left(1+\frac2k+\frac{1}{k^2}\right)\frac{(k+1)!\big(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)!}\big)}{(k+1)!\big(1+\frac{1}{(k+1)!}\big)} \qquad +5$$
$$=\left(1+\frac2k+\frac{1}{k^2}\right)\frac{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)!}}{1+\frac{1}{(k+1)!}}\xrightarrow{k\to\infty}0,$$

denn nach den Rechenregeln konvergenter Folgen strebt der erste Faktor gegen 1, der Zähler des zweiten Faktors gegen 0 und der Nenner gegen 1, so daß sich das Ergebnis aus den Rechenregeln konvergenter Folgen ergibt. Der Konvergenzradius ist daher ∞. (5 P)

ii) $p(z)=\dfrac{z^2}{3+4z}=\dfrac{z^2}{3}\dfrac{1}{1-(-\frac43 z)}$ ergibt eine geometrische Reihe als TAYLOR-Reihe:

$$p(z)=\frac{z^2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac43 z\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k}{3^{k+1}}z^{k+2}. \qquad +4$$

Da es sich um eine geometrische Reihe handelt, muß $\frac43|z|<1$, also $|z|<\frac34$ gelten. Damit ist der Konvergenzradius $R=\frac34$. (5 P) +1