Aufgabenblatt 4

Wissenswertes über die reellen Zahlen

Wir sehen es als gegeben an, daß es für jede Zahl $x \in [0,1]$ eine Dezimalentwicklung $x = 0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ mit Ziffern $x_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ gibt. Manche haben eine periodische Entwicklung, wie etwa $0.35012121212\ldots$ Solche Zahlen schreiben wir in der üblichen Weise, in diesem Beispiel also $0.350\overline{12}$. Eine Dezimalentwicklung, für die es einen kleinsten Index n gibt, so daß $x_i = 0$ für alle $i > n$ gilt, nennen wir abbrechend.

i) Sei $x = 0.\overline{1}$. Verifizieren Sie $x = 0.1 + \frac{x}{10} = \frac{1}{10} + \frac{x}{10}$. Lösen Sie diese Gleichung auf. Was bedeutet das für $0.\overline{9}$?

ii) Passen Sie die Idee aus i) an, um einen Bruch für $0.\overline{237}$ zu finden. Haben Sie das erst einmal soweit verstanden, dann wird es Ihnen auch nicht schwerfallen $0.101\overline{405}$ in einen Bruch zu verwandeln.

iii) Zu welcher Vermutung können Sie gelangen, wenn Sie die bisherigen Überlegungen auf eine beliebige Zahl anwenden, deren Dezimalentwicklung periodisch ist?

iv) Die Zahl $\frac{31}{250} = 0.124$ hat offensichtlich eine abbrechende Dezimalentwicklung. Wenden Sie das bisher Erreichte an, um zu zeigen, daß es sich bei $0.123\overline{9}$ um dieselbe Zahl handelt.

v) Geben Sie ein Verfahren an, um jede Zahl, die eine abbrechende Dezimalentwicklung aufweist, mit einer nicht abbrechenden Entwicklung zu versehen. Auf diese Weise kann man jeder Zahl aus $(0,1]$ eine unendliche Dezimalentwicklung zuweisen (warum das wünschenswert sein könnte, zeigt die nächste Aufgabe).

vi) Geben Sie ein Verfahren an, das für jede rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ihre Dezimalentwicklung liefert. Überlegen Sie sich, daß diese immer periodisch oder abbrechend ist.

Cantors Diagonaltrick

Gibt es eine Abzählung der reellen Zahlen? Für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gibt es sie, wie wir wissen. Nehmen wir also an, es gäbe auch eine für $\mathbb{R}$. Wir sind bescheiden und wollen nur das Intervall $(0,1]$ abzählen. Das müßte dann ebenfalls möglich sein. Es gäbe also eine unendlich lange Liste, in der alle Zahlen aus $(0,1]$ aufgeführt sind:

$$
\begin{aligned}
(0,1] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\} = \{0.&\mathbf{x_{11}}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}x_{16}\ldots\\
0.&x_{21}\mathbf{x_{22}}x_{23}x_{24}x_{25}x_{26}\ldots\\
0.&x_{31}x_{32}\mathbf{x_{33}}x_{34}x_{35}x_{36}\ldots\\
0.&x_{41}x_{42}x_{43}\mathbf{x_{44}}x_{45}x_{46}\ldots\\
0.&x_{51}x_{52}x_{53}x_{54}\mathbf{x_{55}}x_{56}\ldots\\
&\vdots\\
&\qquad\qquad\ldots\}
\end{aligned}
$$

Wenn wir dabei verabreden, daß wir alle Zahlen mit einer unendlich langen Dezimalentwicklung versehen (so wie wir uns das in der vorigen Aufgabe unter v) überlegt haben), dann kommt jede Zahl auch nur einmal in dieser Liste vor. Nun konstruieren Sie aus L nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl

$$y := \mathbf{0}.y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \ldots \in (0,1],$$
$$y_1 := \begin{cases} 2 & \text{falls } x_{11} = 1 \\ 1 & \text{falls } x_{11} \neq 1 \end{cases}$$
$$y_2 := \begin{cases} 2 & \text{falls } x_{22} = 1 \\ 1 & \text{falls } x_{22} \neq 1 \end{cases}$$
$$y_3 := \begin{cases} 2 & \text{falls } x_{33} = 1 \\ 1 & \text{falls } x_{33} \neq 1 \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$y_k := \begin{cases} 2 & \text{falls } x_{kk} = 1 \\ 1 & \text{falls } x_{kk} \neq 1 \end{cases}$$
$$\vdots$$

Diese Zahl y müßte natürlich ebenfalls in der Liste zu finden sein – wo eigentlich? Ziehen Sie ihre Schlüsse.
(*Ist die Zahl* 2 *in dieser Konstruktion von besonderer Bedeutung?*)

RSA-Verfahren

Gegeben sind die beiden Primzahlen 23, sowie der öffentliche Schlüssel

$$S_o = [e, n] := [401, 713]\,.$$

Entschlüsseln Sie die mit S_o verschlüsselte Nachricht $C := 189$.

Diophantos

Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der beiden Gleichungen $g\colon\ 18x + 48y = 5$ und $h\colon\ 2x + 5y = 51$, sofern es welche gibt. Veranschaulichen Sie sich das Ganze mit einer Zeichnung.

Hinweis: Der größte gemeinsame Teiler hilft bei der Entscheidung, ob es ganzzahlige Lösungen gibt, oder nicht. Das Lemma von Euklid *hilft dabei, gegebenenfalls eine auszurechnen. Um alle anderen zu finden, bestimmen Sie dann alle ganzzahligen Lösungen von* $18x + 48y = 0$ *bzw.* $2x + 5y = 0$*. Bilden Sie damit systematisch alle Lösungen. Wem das zu theoretisch ist, der kann auch von einer Lösung ausgehen und alle anderen mit einem ganzzahligen Steigungsdreieck finden.*

Zusatzaufgabe: Eine Legende besagt, daß folgendes Rätsel auf dem Grabstein des griechischen Mathematikers Diophantos von Alexandria (~ 250 n. Chr.) zu lesen war:

Diophantos von Alexandria

Knabe zu sein gewährte
ihm Gott ein Sechstel des
Lebens; noch ein Zwölftel
dazu, und Er kleidete
seine Wangen in Flaum.
Ein Siebtel noch, und Er
entzündete ihm das Licht
der Ehe; fünf Jahre nach
der Heirat schenkte Er ihm
einen Sohn. Doch ach! - das
spätgeborene kränkliche
Kind: die Hälfte der
Lebensspanne des Vaters
hatte es erreicht, da raffte
das kalte Schicksal es hinweg.
Vier Jahre fand er Trost in
dieser Wissenschaft der
Zahlen, dann beschloss
das Leben auch er.

Wie alt wurde Diophantos von Alexandria demnach?