Aufgabenblatt 6

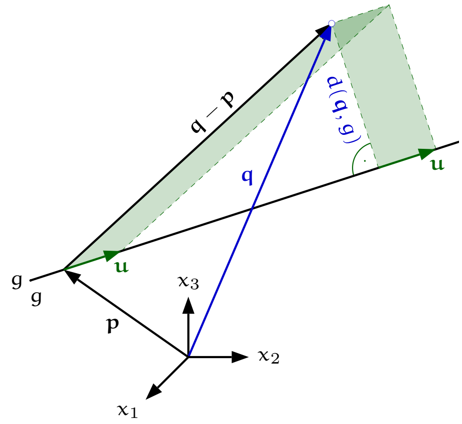
Abstand Punkt-Gerade

Gegeben sei eine Gerade g mit der Geradengleichung $\mathbf{g}(t) = \mathbf{p} + t\,\mathbf{u}$ und einem Richtungsvektor $\mathbf{u}$ der Länge 1. Machen Sie sich anhand der Skizze klar, daß der Abstand $d(\mathbf{q}, g)$ eines Punktes $\mathbf{q}$ von der Gerade g durch

$$d(\mathbf{q}, g) = \|\mathbf{u} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p})\|$$

bestimmt ist. Berechnen Sie damit den Abstand von $\mathbf{q} := [15, 6, 5]$ zur Gerade

$$g := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$



Zur Abstandsformel $d(\mathbf{q}, g)$.

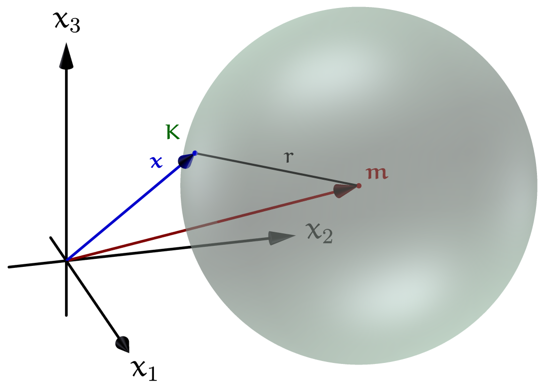
Tangentialebene

Eine Kugeloberfläche K ist der geometrische Ort aller Punkte $\mathbf{x}$, die von einem gegebenen Punkt $\mathbf{m}$ – dem Mittelpunkt – einen festen Abstand r haben. Das bedeutet also

$$K = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = r \,\}.$$

In der Koordinatenform verwendet man meist die quadrierte Version von $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = r$ als Kugelgleichung (genauer müßte es natürlich Gleichung der Kugeloberfläche, oder Sphäre heißen)

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$



Eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{m}$ *und Radius* r.

Zeigen Sie, daß die Tangentialebene T der Kugel K in einem Punkt $\mathbf{p} \in K$ durch die Menge

$$T = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{m} | \mathbf{p} - \mathbf{m} \rangle = r^2 \,\}$$

gegeben ist. Finden Sie eine Darstellung der Kugel (also nicht nur der Sphäre). Zeigen Sie für $\mathbf{m} := [3, 2, 2]$, $r := 1.5$ und $\mathbf{p} := [4, 1.5, 3]$, daß $\mathbf{x} := [-9, 213.5, 122]$ zu T gehört.

Determinanten

Berechnen Sie die folgende Determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ein effizientes Rechenschema, das sich eng an das für LGSe anlehnt, finden Sie im Skript auf S. 165.

Lineare Unabhängigkeit

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf lineare Unabhängigkeit

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

Entwickeln Sie den Vektor $\mathbf{x} := [5, 20, 23, 11]$ in der Basis $\mathcal{B}$ und $\mathbf{y} := [45, 30, 15]$ in der Basis $\mathcal{C}$. Finden Sie also die Koeffizienten $t_1, \dots, t_4$ in

$$t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 23 \\ 11 \end{bmatrix}$$

und gehen Sie entsprechend für $\mathcal{C}$ und $\mathbf{y}$ vor.

LGS

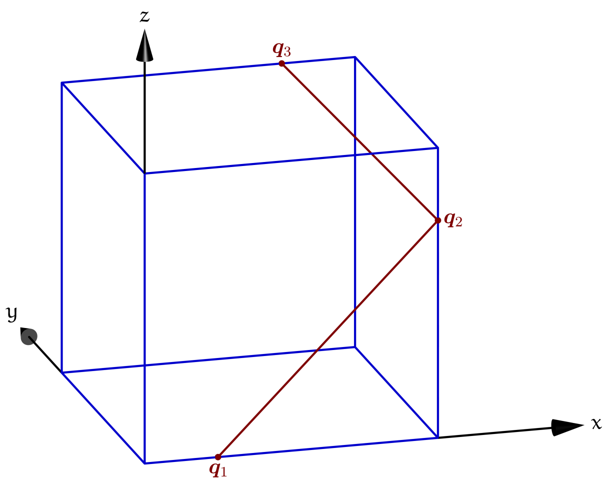
Finden Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 16z & + & 14w & = & 16 \\ 7x & + & 7y & - & 34z & + & 20w & = & -1 \\ -3x & - & y & + & 2z & + & 8w & = & 33 \\ 31x & + & 22y & - & 94z & + & 14w & = & -151 \end{array}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn man beim Gauss-Verfahren geeignete Zeilen und Spalten vertauscht.

Prinz Rupert

Gegeben sei ein Würfel mit der Seitenlänge 1. Wir positionieren ihn so in einem Koordinatensystem, daß eine Ecke der Ursprung $[0, 0, 0]$ ist und die angrenzenden Würfelkanten auf den positiven Koordinatenachsen liegen. Außerdem sind die Punkte $\mathbf{q}_1 := [\frac{1}{4}, 0, 0]$, $\mathbf{q}_2 := [1, 0, \frac{3}{4}]$ und $\mathbf{q}_3 := [\frac{3}{4}, 1, 1]$ gegeben.



i) Vergewissern Sie sich, daß der Streckenzug $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3$ zu einem Quadrat $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4$ ergänzt werden kann. Wo liegt $\mathbf{q}_4$? Können Sie an diesem Quadrat etwas Besonderes bemerken?

ii) Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Ebene, die die Punkte $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ und $\mathbf{q}_4$ enthält. Welche Winkel schließt sie mit den Koordinatenebenen $E_{x,y} := \{ [x, y, 0] \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ und $E_{x,z} := \{ [x, 0, z] \mid x, z \in \mathbb{R} \}$ ein?

iii) Wieso löst das Quadrat $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4$ Prinz Ruperts Problem?