# Klausur zur Linearen Algebra 2022 / 23

(Dozent: Hellmich)

| | |
|---|---|
| Hilfsmittel: | Taschenrechner ohne grafikfähiges Display und ohne Computeralgebrasystem. Eine A4-Seite mit handschriftlichen Notizen. |
| Zeit: | 120 Min. |
| Gesamtpunktzahl: | 100 |

Bei den Lösungen werden Begründungen erwartet. Es ist keinesfalls ausreichend, wenn Sie nur Ergebnisse angeben.

## Aufgabe 1 (zusammen 45 P)

**1.** Zeigen Sie:

**i.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \mid 16n^3 + 2n$. (6 P)

**ii.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 3 - \frac{1}{n!}$. (8 P)

**iii.** Für alle $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{2^k} = 3 - \frac{n^2+2n+3}{2^n}$. (8 P)

**2.** Bestimmen Sie die Normalform der Zahl $z := \dfrac{6}{\frac{3-\mathrm{i}}{4-3\,\mathrm{i}} - 2\,\mathrm{i}} - 3 - \mathrm{i}$. (8 P)

Geben Sie eine der dritten Wurzeln von $z$ an.
*(Es könnte nützlich sein, eine kleine Skizze anzufertigen.)*

**3.** Gegeben sei $n := p \cdot q$, mit $p := 109$ und $q := 19$. Ferner sei $e := 409$. Bestimmen Sie die zugehörigen öffentlichen und privaten Schlüssel. (9 P)

**4.** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der kubischen Gleichung (6 P)

$$x^3 - 3x^2 + 6x - \frac{5}{2} = 0\,.$$

Geben Sie die Normalform der Gleichung und ihre Diskriminante an.

*Hinweis: Aufgabe 1.i. kann auch ohne Induktion gelöst werden. Bei Aufgabe 1.iii. ist es keine schlechte Idee, sich die Aussage für $n+1$ einmal aufzuschreiben.*

## Aufgabe 2 (zusammen 30 P)

**1.** Gegeben sind die beiden Vektoren $\mathbf{b}_3 := \frac{1}{9}[4, 7, -4]^t$ und $x := \frac{1}{9}[5, 11, 4]^t$. Bestimmen Sie die Ursprungsebene $E$, die $\mathbf{b}_3$ und $x$ enthält. Berechnen Sie auch die Ebene $F$, die orthogonal zu $\mathbf{b}_3$ ist und $x$ enthält. Welchen Abstand hat sie vom Ursprung?
Ergänzen Sie den Normalenvektor $\mathbf{b}_2$ der Ebene $E$ und $\mathbf{b}_3$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ und überprüfen Sie ihr Ergebnis. Stellen Sie $x$ in dieser Basis dar. (15 P)

**2.** Drehen Sie $x$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Achse mit der Richtung $\mathbf{b}_3$.
Kontrollieren Sie, daß $x$ und der gedrehte Vektor $x'$ dieselbe Länge haben und daß $x' \in F$ gilt. (10 P)

**3.** Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $x$ und $x'$ und erklären Sie, warum er kleiner als $\frac{\pi}{3}$ ist. (5 P)

## Aufgabe 3 (15 P)

Entscheiden Sie, ob die Matrix C invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Inverse $\mathrm{C}^{-1}$, sowie deren Determinante.

$$\mathrm{C} \coloneqq \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

## Aufgabe 4 (10 P)

Berechnen Sie die Determinante der $4{\times}4$-Matrix

$$\mathrm{D} \coloneqq \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} & 10 & -2-6\,\mathrm{i} \\ 3\,\mathrm{i} & -3\,\mathrm{i} & -1-2\,\mathrm{i} & 6+11\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & -3\,\mathrm{i} & -14-2\,\mathrm{i} & 1+10\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -4 & 2+5\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

# Lösungen

**Aufgabe 1** (6 + 8 + 8 + 8 + 9 + 6 P = 45 P)

**1.i.** Die Behauptung läßt sich am besten direkt zeigen: Nach dem kleinen Satz von FERMAT gilt $n^3 =_3 n$, denn $3 \in \mathbb{P}$. Das bedeutet $16n^3 + 2n =_3 16n + 2n = 18n =_3 0$, was wiederum äquivalent zu $3 \mid 16n^3 + 2n$ ist.

*Alternativ* (der lange Weg über vollständige Induktion):
Der Induktionsanfang ist die wahre Aussage $3 \mid 16 + 2$. +1

$n \to n + 1$:

$$16(n+1)^3 + 2(n+1) = 16(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2n + 2 = 16n^3 + 2n + 3 \cdot 16n^2 + 3 \cdot 16n + 3 \cdot 6$$
$$=_3 16n^3 + 2n \overset{\text{IV}}{=}_3 0.$$ +5

Das zeigt die Behauptung für $n + 1$. (6 P)

**1.ii.** Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist die Aussage $\sum\limits_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 1 + 1 \leqslant 3 - \frac{1}{1!}$, die offensichtlich wahr ist. +1

Der Induktionsschritt $n \to n + 1$: Mit der Induktionsvoraussetzung IV $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 3 - \frac{1}{n!}$ folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 3 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = 3 - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$
$$= 3 - \frac{n}{(n+1)!} \leqslant 3 - \frac{1}{(n+1)!}.$$ +7

Das beweist die Aussage für $n + 1$. (8 P)

**1.iii.** Zu zeigen ist $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{2^k} = 3 - \frac{n^2 + 2n + 3}{2^n}$. (IV)

Der Induktionsanfang für $n = 2$ ist die offensichtlich wahre Aussage $3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4} = \sum\limits_{k=2}^{2} \frac{(k-1)^2}{2^k}$. +1

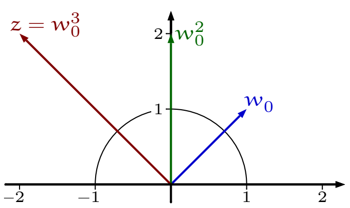
$n \to n + 1$: $\sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)^2}{2^k} = 3 - \frac{(n+1)^2 + 2n + 2 + 3}{2^{n+1}} = 3 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n+1}}$ ist aus IV abzuleiten:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)^2}{2^k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{2^k} + \frac{n^2}{2^{n+1}} \overset{\text{IV}}{=} 3 - \frac{n^2 + 2n + 3}{2^n} + \frac{n^2}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2n^2 + 4n + 6 - n^2}{2^{n+1}}$$
$$= 3 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n+1}}.$$ +7

Das beweist die Aussage für $n + 1$. (8 P)

**2.**

$$z = \frac{6}{\frac{3 - i}{4 - 3i} - 2i} - 3 - i = 6\,\frac{4 - 3i}{3 - i - 8i - 6} - 3 - i = 2\,\frac{(4 - 3i)(-1 + 3i)}{(-1 - 3i)(-1 + 3i)} - 3 - i$$
$$= \tfrac{1}{5}(-4 + 9 + 12i + 3i) - 3 - i = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i = 2(-1 + i).$$ +4




$z$ liegt im zweiten Quadranten auf der zweiten Winkelhalbierenden, sodaß der zugehörige Polarwinkel $3 \cdot \frac{\pi}{4}$ ist. Der Winkel für die dritte Wurzel $w_0$ muß demnach $\frac{\pi}{4}$ sein, d. h. $w_0 \sim 1 + i$. Aus $|z| = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^3$ folgt $|w_0| = \sqrt{2}$, was zu $w_0 = 1 + i$ führt. +4 (8 P)
$(w_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)),\ w_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1)).)$

**3.** $n = pq = 109 \cdot 19 = 2071$, $e = 409$. Dann ist $\varphi = 108 \cdot 18 = 1944$. Falls $\operatorname{ggT}(409, 1944) = 1$ gilt, ist $S_o := [e, n] = [409, 2071]$ der öffentliche Schlüssel: $+1$

$$\begin{aligned} 1944 &= 4 \cdot 409 + 308 \qquad & 308 &= 1944 - 4 \cdot 409 \\ 409 &= 1 \cdot 308 + 101 & 101 &= 409 - 1 \cdot 308 \\ 308 &= 3 \cdot 101 + 5 & 5 &= 308 - 3 \cdot 101 \\ 101 &= 20 \cdot 5 + 1 & 1 &= 101 - 20 \cdot 5. \end{aligned}$$ $+3$

Das zeigt $\operatorname{ggT}(409, 1944) = 1$. Für den privaten Schlüssel brauchen wir die Darstellung nach Euklid:

$$\begin{aligned} 1 &= 101 - 20 \cdot (308 - 3 \cdot 101) = 61 \cdot 101 - 20 \cdot 308 = 61 \cdot (409 - 1 \cdot 308) - 20 \cdot 308 \\ &= 61 \cdot 409 - 81 \cdot 308 = 61 \cdot 409 - 81 \cdot (1944 - 4 \cdot 409) = 385 \cdot 409 - 81 \cdot 1944. \end{aligned}$$ $+4$

Daher ist $S_p := [385, 2071]$ der private Schlüssel. (9 P) $+1$

**4.** Die kubische Gleichung $x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 3x^2 + 6x - \frac{5}{2} = 0$ wird durch die Substitution $x = y - \frac{b}{3} = y + 1$ auf die Normalform $y^3 + py + q = 0$ gebracht. Dabei ist $p = c - \frac{1}{3}b^2 = 6 - 3 = 3$ und $q = \frac{2}{27}b^3 - \frac{1}{3}bc + d = -\frac{2 \cdot 3^3}{27} + \frac{18}{3} - \frac{5}{2} = -2 + 6 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$. Die Normalform lautet daher $y^3 + 3y + \frac{3}{2} = 0$. $+2$

$\Delta = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} > 0$ zeigt, daß es nur eine reelle Lösung gibt, nämlich: $+1$

$$x_1 := \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + \frac{q}{2}} + 1 = \sqrt[3]{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2} + 1 \approx -0.4662 + 1 = 0.5338.$$ (6 P) $+3$

## Aufgabe 2

(15 + 10 + 5 P = 30 P)

**1.** Den Normalenvektor $\mathbf{b}_2$ von $E$ erhalten wir über das Kreuzprodukt $\mathbf{b}_3 \times \mathbf{x}$: $+2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 11 \\ -4 & 4 \\ 4 & 5 \\ 7 & 11 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 28 & + & 44 \\ -20 & - & 16 \\ 44 & - & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ -36 \\ 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{b}_2.$$ $+2$

Damit ist $E = \{ [y_1, y_2, y_3]^t \in \mathbb{R}^3 \mid 8y_1 - 4y_2 + y_3 = 0 \}$. Die Ebene mit dem Normalenvektor $\mathbf{b}_3$, die $\mathbf{x}$ enthält, ist $F = \{ [y_1, y_2, y_3]^t \in \mathbb{R}^3 \mid 4y_1 + 7y_2 - 4y_3 = 9 \}$. Ihr Abstand vom Ursprung: $d(\mathbf{0}, F) = \frac{9}{9} = 1$. $+4$

Für die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ wählen wir $\mathbf{b}_1 := \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = \frac{1}{9}[1, 4, 8]^t$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B := \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$ $+1$

$$\det(B) = \frac{1}{9^3} \det \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 8 \\ 4 & -4 \\ 8 & 1 \end{matrix} = \frac{1}{729}(16 + 448 + 16 + 128 - 7 + 128) = \frac{729}{729} = 1 > 0$$ $+2$

zeigt die positive Orientierung von $\mathcal{B}$. $B^t$ ist die Transformationsmatrix für die Basisdarstellung bzgl. $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{x}_B := B^t\mathbf{x} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 \\ 0 \\ 81 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$ $+2$

Die Darstellung von $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$ ist daher $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$. (15 P) $+2$

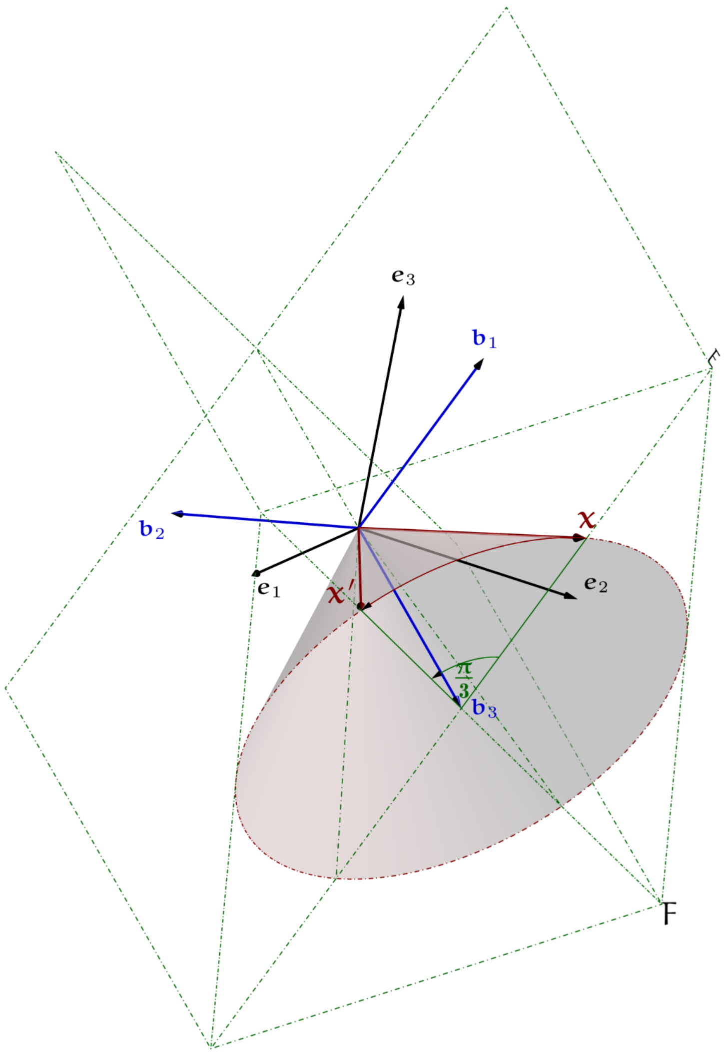
**2.** Die Drehachse hat den Richtungsvektor $\mathbf{b}_3$. Den gedrehten Vektor $\mathbf{x}'$ erhalten wir jetzt wie folgt:

$$\mathbf{x}' = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathrm{B}^t\mathbf{x} = \mathrm{B}\mathrm{D}_{3,\frac{\pi}{3}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathrm{B}\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) & 0\\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad +8$$

$$= \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix}1 & 8 & 4\\ 4 & -4 & 7\\ 8 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix}9+8\sqrt{3}\\ 18-4\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{18}\begin{bmatrix}8\\-4\\1\end{bmatrix} =: \mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2'.$$

Die Kontrolle: $\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{9}\sqrt{25+121+16} = \frac{1}{9}\sqrt{162} = \sqrt{2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{3\cdot 81}{4\cdot 81}} = \sqrt{\|\mathbf{x}_1'\|^2 + \|\mathbf{x}_2'\|^2} = \|\mathbf{x}'\|$, denn $\mathbf{x}_1' \perp \mathbf{x}_2'$. $+1$

$4\cdot\frac{1}{2} + 7 + \frac{\sqrt{3}}{18}(4\cdot 8 -\!- 7\cdot 4 - 4) = 9$ zeigt, daß $\mathbf{x}'$ die Ebenengleichung von F erfüllt, d. h. $\mathbf{x}' \in \mathrm{F}$. (10 P) $+1$




**3.** Der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$: $\cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}'\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}'\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{x}_{\mathcal{B}}\,|\,\mathbf{x}'_{\mathcal{B}}\rangle}{\|\mathbf{x}_{\mathcal{B}}\|\|\mathbf{x}'_{\mathcal{B}}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41.41° \approx 0.7227$.
Er ist kleiner als $\frac{\pi}{3}$. Das liegt daran, daß $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ auf dem Kegelmantel eines Kegels liegen, dessen Symmetrieachse parallel zu $\mathbf{b}_3$ ist und dessen Spitze sich im Ursprung $\mathbf{0}$ befindet. Schneidet man diesen Kegel senkrecht zur Kegelachse in Höhe von $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{x}'$, so erhält man einen Schnittkreis in F, auf dem $\mathbf{x}$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ bis zu $\mathbf{x}'$ gedreht wird. Der Winkel zwischen den (Orts)Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ dagegen wird an der Kegelspitze gemessen und ist daher normalerweise kleiner als der Drehwinkel (außer, wenn $\mathbf{x}$ senkrecht auf der Drehachse stehen sollte). (5 P)

*Alternative Wege:*

Die Drehmatrix $\mathrm{D}_{\mathfrak{b}_3}(\alpha) = \mathrm{P}_{\mathfrak{b}_3} + (\mathbb{1} - \mathrm{P}_{\mathfrak{b}_3})\cos(\alpha) + \mathrm{R}_{\mathfrak{b}_3}\sin(\alpha)$ wurde berechnet:

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{b}_3} = \tfrac{1}{81}\begin{bmatrix} 16 & 28 & -16 \\ 28 & 49 & -28 \\ -16 & -28 & 16 \end{bmatrix}, \ \mathbb{1} - \mathrm{P}_{\mathfrak{b}_3} = \tfrac{1}{81}\begin{bmatrix} 65 & -28 & 16 \\ -28 & 32 & 28 \\ 16 & 28 & 65 \end{bmatrix}, \ \mathrm{R}_{\mathfrak{b}_3} = \tfrac{1}{81}\begin{bmatrix} 0 & 36 & 63 \\ -36 & 0 & -36 \\ -63 & 36 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{b}_3}\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{162}\begin{bmatrix} 97 & 28 & -16 \\ 28 & 130 & -28 \\ -16 & -28 & 97 \end{bmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{162}\begin{bmatrix} 0 & 36 & 63 \\ -36 & 0 & -36 \\ -63 & 36 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{b}_3}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{18\cdot 81}\begin{bmatrix} 729 \\ 1458 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{18\cdot 81}\begin{bmatrix} 648 \\ -324 \\ 81 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{\sqrt{3}}{18}\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}'.$$

Falls statt $\mathfrak{b}_3 \times \boldsymbol{x}$ das Kreuzprodukt $\boldsymbol{x} \times \mathfrak{b}_3$ verwendet wurde:

$$\mathcal{B} = \left\{ \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}, \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathrm{B} \coloneqq \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ -8 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \coloneqq \mathrm{B}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{81}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -8 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{81}\begin{bmatrix} -81 \\ 0 \\ 81 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$\boldsymbol{x}' = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ -8 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 9 + 8\sqrt{3} \\ 18 - 4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

## Aufgabe 3 (15 P)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| II | 2 | 4 | 1 | 3 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathrm{II} - \mathrm{I}$ |
| III | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| V | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\mathrm{V} - \mathrm{IV}$ |
| I | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{V}$ |
| II | 0 | 3 | 1 | 2 | 3 | −1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{V}$ |
| III | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\mathrm{IV} - 2\cdot\mathrm{V}$ |
| V | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | |
| I | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | −2 | $\mathrm{I} - \mathrm{IV}$ |
| II | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | −1 | 1 | 0 | 3 | −3 | $\mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{IV}$ |
| III | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\mathrm{III} - 5\cdot\mathrm{IV}$ |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | −2 | |
| V | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | |
| II | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 0 | −3 | 1 | II − III |
| III | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −15 | 10 | |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | −2 | |
| V | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | |
| I | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 3 · I − II |
| II | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | −1 | 12 | −9 | |
| III | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −15 | 10 | |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | −2 | |
| V | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | |
| I | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | −1 | 1 | −15 | 9 | |
| II | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | −1 | 12 | −9 | |
| III | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −15 | 10 | |
| IV | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | −2 | |
| V | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | −1 | 1 | |

+9

Nach der ersten Umformung können wir $\det(\mathsf{C}) = 6 \neq 0$ ablesen, sodaß die Inverse von C existiert. Diese läßt sich nach der letzten Umformung einfach angeben: +1

$$\mathsf{C}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -15 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 24 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & -90 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$ +2

Natürlich ist $\det(\mathsf{C}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathsf{C})} = \frac{1}{6}$. +1

Kontrolle:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -15 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 24 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & -90 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 2-2 & 2-2 & -30+24+18-12 & 18-18-12+12 \\ 8-8 & -2+8 & 2-8+6 & -30+96-90+54-30 & 18-72+60-36+30 \\ 0 & 0 & 6 & -90+90 & 60-60 \\ 0 & 0 & 0 & 18-12 & -12+12 \\ 0 & 0 & 0 & 18-18 & -12+18 \end{bmatrix} = \mathbb{1}.$$ +2

## Aufgabe 4 (10 P)

$$\det(\mathsf{D}) = \det\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} & 10 & -2-6\,\mathrm{i} \\ 3\,\mathrm{i} & -3\,\mathrm{i} & -1-2\,\mathrm{i} & 6+11\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & -3\,\mathrm{i} & -14-2\,\mathrm{i} & 1+10\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -4 & 2+5\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

berechnen wir mit dem Determinantenschema:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $-\mathrm{i}$ | $2\mathrm{i}$ | $10$ | $-2-6\mathrm{i}$ | I + IV | |
| II | $3\mathrm{i}$ | $-3\mathrm{i}$ | $-1-2\mathrm{i}$ | $6+11\mathrm{i}$ | II − 3 IV | |
| III | $2\mathrm{i}$ | $-3\mathrm{i}$ | $-14-2\mathrm{i}$ | $1+10\mathrm{i}$ | III − 2 IV | |
| IV | $\mathrm{i}$ | $-\mathrm{i}$ | $-4$ | $2+5\mathrm{i}$ | | |
| I | $0$ | $\mathrm{i}$ | $6$ | $-\mathrm{i}$ | | |
| II | $0$ | $0$ | $11-2\mathrm{i}$ | $-4\mathrm{i}$ | | |
| III | $0$ | $-\mathrm{i}$ | $-6-2\mathrm{i}$ | $-3$ | | |
| IV | $\mathrm{i}$ | $-\mathrm{i}$ | $-4$ | $2+5\mathrm{i}$ | | |
| I | | $\mathrm{i}$ | $6$ | $-\mathrm{i}$ | | |
| II | | $0$ | $11-2\mathrm{i}$ | $-4\mathrm{i}$ | | |
| III | | $-\mathrm{i}$ | $-6-2\mathrm{i}$ | $-3$ | III + I | $-\mathrm{i}$ |
| I | | $\mathrm{i}$ | $6$ | $-\mathrm{i}$ | | |
| II | | $0$ | $11-2\mathrm{i}$ | $-4\mathrm{i}$ | | |
| III | | $0$ | $-2\mathrm{i}$ | $-3-\mathrm{i}$ | | |
| I | | | $11-2\mathrm{i}$ | $-4\mathrm{i}$ | I − II | $\mathrm{i}$ |
| II | | | $-2\mathrm{i}$ | $-3-\mathrm{i}$ | | |
| I | | | $11$ | $3-3\mathrm{i}$ | | |
| II | | | $-2\mathrm{i}$ | $-3-\mathrm{i}$ | | |

Daher ist

$$\begin{aligned}\det(D) &= -\mathrm{i}^2 \det \begin{bmatrix} 11 & 3-3\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} \end{bmatrix} = -11(3+\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}(3-3\mathrm{i}) \\ &= -33 - 11\mathrm{i} + 6\mathrm{i} + 6 = -27 - 5\mathrm{i}.\end{aligned}$$