Aufgabenblatt 2

Mengen 1

Geben Sie die folgenden Mengen in der Form $\{\, x \mid B(x) \,\}$ an – sofern sie nicht schon in dieser Gestalt vorliegen – in diesem Fall vereinfachen Sie sie. Ein simples Beispiel: D sei die Menge aller ganzen Zahlen, die durch 3 teilbar sind $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists_{m \in \mathbb{Z}}\, n = 3 \cdot m\}$.

1) $Q :=$ Menge aller Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.
2) $\mathbb{P} :=$ Menge aller Primzahlen.
3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leqslant n \wedge \operatorname{ggT}(m, n) = 1\} \cup \{0\}$. Geben Sie $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{12}$ an. Wie sieht $\mathbb{Z}_p$ für $p \in \mathbb{P}$ aus?
4) $I :=$ Menge aller reellen Zahlen, deren Betrag kleiner als 1 ist.
   $J :=$ Menge aller reellen Zahlen, deren Quadrat größer oder gleich 2 ist.
5) $F := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}} : x^n + y^n = z^n\}$.
6) $W :=$ Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, die nicht oberhalb der ersten Winkelhalbierenden liegen.

$\operatorname{ggT}(m, n)$ meint den *größten gemeinsamen Teiler von* m *und* n, also etwa $\operatorname{ggT}(90, 84) = 6$ und $\operatorname{ggT}(455, 741) = 13$. m und n heißen *teilerfremd*, falls $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ gilt, wie bei $m = 91$ und $n = 33$.

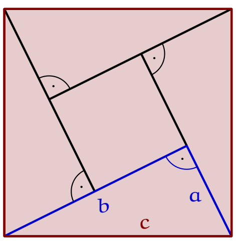
Mengen 2

Identifizieren Sie die folgenden Mengen, indem Sie eine Skizze anfertigen.

1) $A := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2) $B := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$.
3) $C := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$.
4) $D := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y - \frac{1}{2}x \leqslant 1\}$.
5) $E := \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x - 3 > 0\}$.
6) $F := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$.

Wenn Sie nicht alle Mengen analysieren können, dann hilft es auch, wenn Sie versuchen, Punkte der betreffenden Mengen durch Einsetzen zu bestimmen.

Rätsel



Welcher Satz läßt sich mit Hilfe dieser Skizze beweisen?
Wenn Sie es wissen, dann beweisen Sie ihn.

Der schlaue Hauslehrer

Ein junger Mann bewirbt sich bei einer reichen Familie um die Stelle eines Hauslehrers. Die Frau des Hauses sagt:
Ich stelle Sie ein, wenn Sie herausbekommen, wie alt meine drei Töchter sind.
Der junge Mann willigt ein und bekommt folgende Tipps von der Mutter:
Das Produkt des jeweiligen Alters meiner drei Töchter ist 36.
Die Summe des jeweiligen Alters meiner drei Töchter ist unsere Hausnummer.
Der Mann schaut also nach der Hausnummer, kommt zurück und sagt:
Das reicht noch nicht!
Daraufhin meint die Mutter:
Stimmt, meine älteste Tochter heißt Rosi.
Etwas später geht der junge Mann zufrieden fort. Offensichtlich hat er die Stelle bekommen. Was hat er der Frau geantwortet?

Induktion 1

Zeigen sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

1) $1 + 8 + 27 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

2) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.

3) Für alle $x \geqslant -1$ gilt $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. (Bernoulli-Ungleichung)

4)*) $n! \leqslant 4\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$.

Können Sie sich eine geometrische Interpretation der Bernoulli-Ungleichung vorstellen?

*) *Diese Aufgabe erfordert etwas Übersicht und Ausdauer. Am besten beweist man sie in der Form* $4\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \geqslant n!$ *und verwendet zu gegebener Zeit 3).*

Zur Erinnerung: $0! := 1$ *und* $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ *für* $n \geqslant 1$.