

## Aufgabenblatt 5

### Warm up

Gegeben seien die Punkte  $\mathbf{a} := [1, -2, 3]$ ,  $\mathbf{b} := [2, 7, 1]$  und  $\mathbf{c} := [3, -2, 1]$ . Bestimmen Sie die Ebene  $E$ , die diese drei Punkte enthält. Geben Sie dabei die Ebenengleichung in Koordinatenform an.

Von einer weiteren Ebene  $F$  kennen wir den Normalenvektor  $\mathbf{m} := [10, -17, 10]$  und einen Punkt  $\mathbf{p} := [1, 1, 1] \in F$ . Bestimmen Sie auch diese Ebene. Berechnen Sie anschließend den **Schnittwinkel** von  $E$  und  $F$ , sowie die Schnittmenge  $E \cap F$ .

Eine Gerade  $g := \{ \mathbf{p} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R} \}$  durch  $\mathbf{p}$  hat den Richtungsvektor

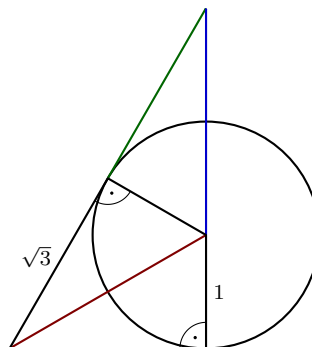
$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 9\sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2} - 18 \\ 9\sqrt{2} + 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den **Winkel**, mit dem  $g$  die Ebene  $E$  schneidet.

### Trigonometrie

Bestimmen Sie die fehlenden Strecken und alle Winkel in der nebenstehenden Skizze. Berechnen Sie die Bogenlänge des Kreisbogens, der von den beiden rechten Winkeln begrenzt wird.

Versehen Sie dazu die Skizze mit Namen für die Strecken, die Punkte und die Winkel.



### Gießerei

In einer Gießerei werden Legierungen aus Kupfer (Cu), Zinn (Sn) und Zink (Zn) benötigt. Als Restposten alter Aufträge liegen noch Legierungen mit 80% Cu, 15% Sn, 5% Zn, sowie 85% Cu, 12% Sn, 3% Zn und 75% Cu, 10 % Sn, 15% Zn vor. Kann daraus durch Zusammenschmelzen geeigneter Anteile dieser Legierungen der neue Auftrag mit 81% Cu, 12% Sn und 7% Zn bedient werden?

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit Hilfe des GAUSS-Verfahrens.

### Inkreis

Gegeben sind die Punkte  $A = [0, 0]$ ,  
 $B = [14, 0]$  und  $C = [9, 12]$ .

Bestimmen Sie mit Hilfe des Kosinus-Satzes die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

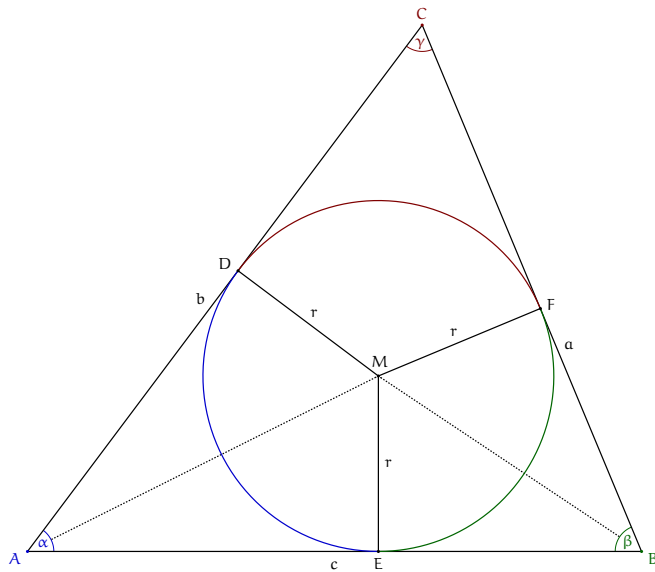
Zeigen Sie

$$r \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) = c$$

und berechnen Sie damit den Radius  $r$  des *Inkreises*.

Bestimmen Sie dann  $M$ . Stellen Sie die Geradengleichungen der Geraden durch  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $C$  auf und die der dazu senkrechten durch  $M$  (arbeiten Sie am besten mit der Koordinatenform der Gleichungen). Berechnen Sie damit  $D$

und  $F$ . Anschließend können Sie noch die Länge der Kreisbögen zwischen  $D$  und  $E$ , sowie  $E$  und  $F$  bestimmen. Wenn Sie bei der Berechnung von  $r$  ausreichend genau waren, werden Sie feststellen, daß alle Punkte rationale Koordinaten haben (es handelt sich um ein sog. *heronisches Dreieck*).



### Tetraeder

Finden Sie die Koordinaten der Punkte  $c$ ,  $d$  und  $m$  des abgebildeten Tetraeders  $T$ . Dabei ist  $m$  der Punkt in  $T$ , der von den Eckpunkten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  denselben Abstand hat.

Welche Kantenlänge hat  $T$ ?

Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebenengleichungen für die vier Seitenflächen von  $T$ .

Welchen Winkel schließt  $m$  mit den Eckpunkten  $a$  und  $b$  ein?

In welchem Winkel schneiden sich zwei Seitenflächen?

Bestimmen Sie das Volumen von  $T$ . Überlegen Sie sich an einer ebenen Figur, daß die Angabe von  $b$  überflüssig war.

