Aufgabenblatt 7

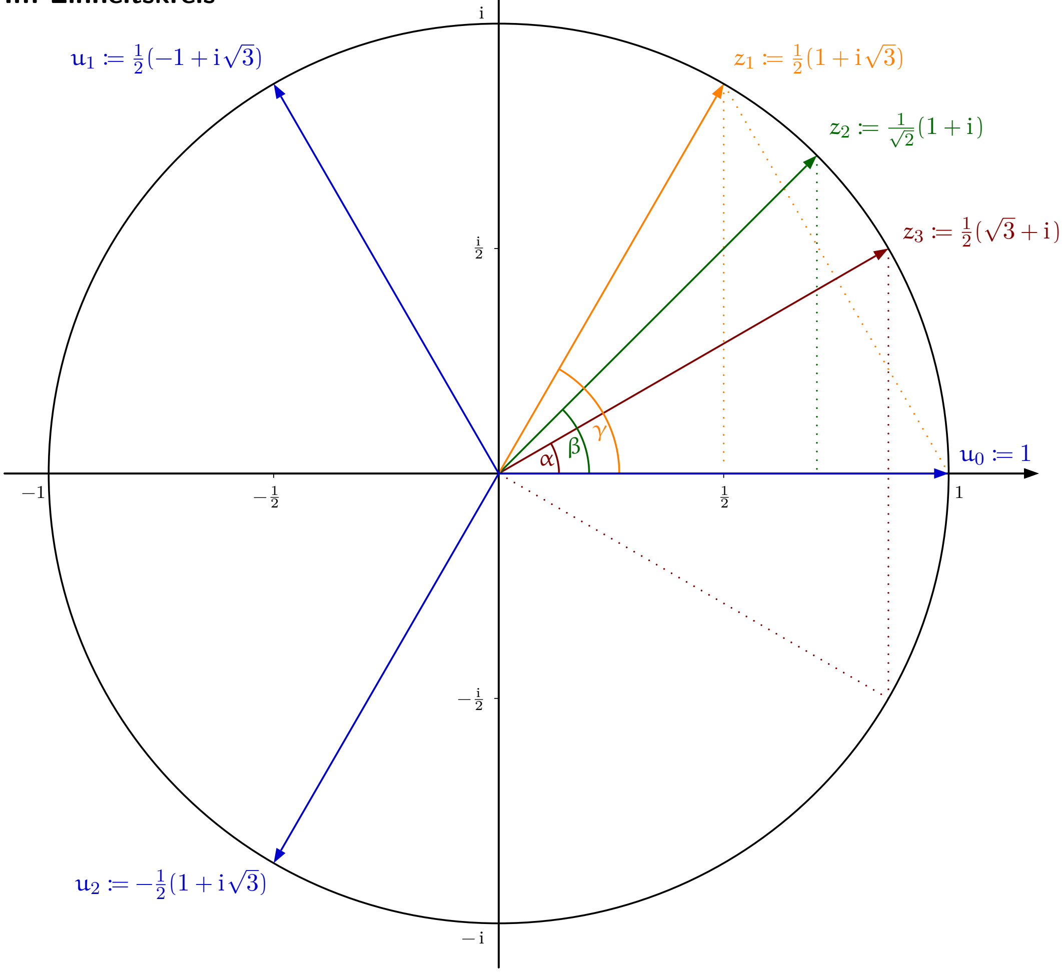
Grundlagen

i) Geben Sie die folgende Zahl in ihrer Standardform $a + \mathrm{i}\, b$ an.

$$\frac{1 + 3\,\mathrm{i}}{2 + \dfrac{5 - 3\,\mathrm{i}}{3 + 4\,\mathrm{i}}} \cdot (146 - 73\,\mathrm{i})\,.$$

ii) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(4 + 3\,\mathrm{i})^{n-k}}{(3 + 4\,\mathrm{i})^{k}}\,.$

Im Einheitskreis



Berechnen Sie u_0^3, u_1^3 und u_2^3. Was fällt Ihnen dabei auf?

Berechnen Sie auch z_1^6, z_2^8 und z_3^{12}.

Quadratische Gleichung

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen

$$x^2 - (7+i)x + 24 + 7i = 0, \tag{1}$$
$$10x^2 + (1-20i)x + 28 - 19i = 0. \tag{2}$$

Verwenden Sie dabei ruhig die *Mitternachtsformel* (am besten in der p-q-*Form*) und nutzen Sie für die dabei auftretende Wurzel (wohlgemerkt: aus einer komplexen Zahl) folgendes Ergebnis:

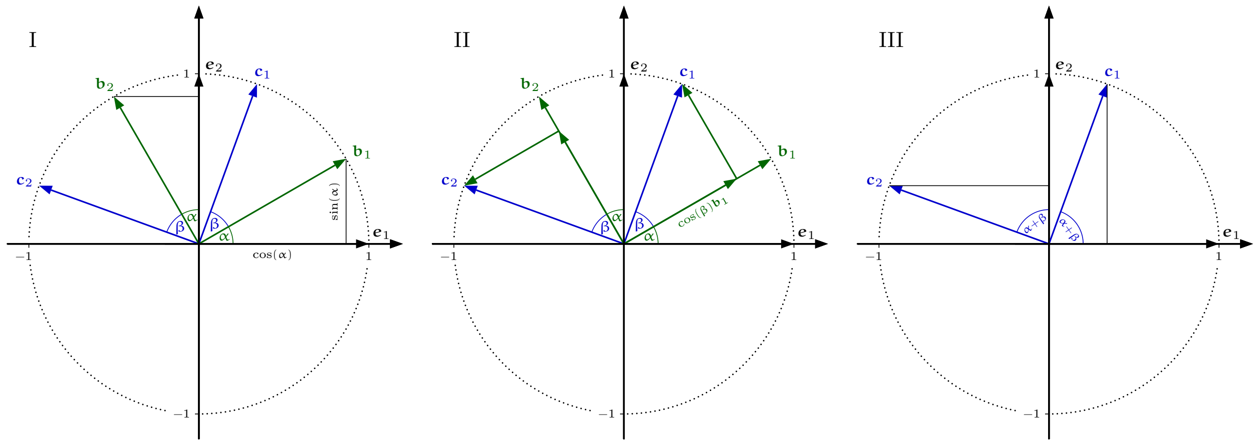
Durch

$$\sqrt{z} := \sqrt{\frac{1}{2}\big(|z| + a\big)} + i\nu(b)\sqrt{\frac{1}{2}\big(|z| - a\big)}\,, \qquad \nu(b) := \begin{cases} 1, & b \geqslant 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$

ist eine Quadratwurzel einer Zahl $z := a + ib$ *gegeben (also eine komplexe Zahl* w *mit der Eigenschaft* $w^2 = z$*). Eine weitere ist offensichtlich* $-\sqrt{z}$.

Überprüfen Sie Ihre Lösungen durch Einsetzen in die zugehörige quadratische Gleichung.

Die Additionssätze der Trigonometrie



i) Ergänzen Sie Skizze I, um die Koordinaten von $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ zu bestimmen.

ii) Ergänzen Sie Skizze II, um $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ zu bestimmen. Natürlich verwenden Sie dabei die Ergebnisse aus i.

iii) Ergänzen Sie Skizze III, um $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ direkt zu erhalten (ohne die Ergebnisse aus ii).

iv) Vergleichen Sie die Darstellung von $\mathbf{c}_1$ aus ii und iii. Zeigen Sie damit die *Additionssätze der Trigonometrie* (erinnern Sie sich dabei an $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{3}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \tag{4}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \quad \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1, \tag{5}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}, \tag{6}$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha). \tag{7}$$

Die Multiplikation in $\mathbb{C}$

Eine komplexe Zahl z auf dem Einheitskreis

$$\mathbb{C}_1 := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$$

läßt sich in der Form $z = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$ mit einem geeigneten Winkel α schreiben. Ein beliebige komplexe Zahl läßt sich daher durch

$$z = |z|\big(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)\big)$$

wiedergeben. Das ist die sogenannte *Polardarstellung* von z.

i) Bestimmen Sie die Polardarstellung von $z = 3+4\,\mathrm{i}$ und von u_1, z_1, z_2, z_3 aus der zweiten Aufgabe.

ii) Berechnen Sie für $z = |z|\big(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)\big)$ und $w = |w|\big(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta)\big)$ das Produkt $z \cdot w$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der vorigen Aufgabe. Geben Sie damit eine geometrische Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$.
(Dieser Aufgabenteil ist als Wiederholung der Vorlesung gedacht.)