Aufgabenblatt 3

Dieses Aufgabenblatt ist lang, damit für jeden etwas dabei ist. Sie müssen nicht alle Aufgaben machen, suchen Sie sich diejenigen aus, die Ihnen zusagen. Insbesondere die letzte kann durchaus auch über die Weihnachtsferien hinaus noch behandelt werden.

Binomialkoeffizient

Die sogenannten *Binomialkoeffizienten* sind für $n, k \in \mathbb{N}_0$, die die Ungleichung $0 \leqslant k \leqslant n$ erfüllen, durch $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert. Dabei gilt $0! := 1$. Zeigen Sie für $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweisen Sie damit, daß alle Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Binom

i) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Was ergibt $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$? Wieviele Teilmengen können Sie also aus einer n-elementigen Menge bilden? (Vergl. Skript S. 52 – 53.)

ii) Was beschreibt die Zahlenfolge $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wie unterscheidet sie sich von $b_n := (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

iii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ergibt

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} \,?$$

Induktion

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

i) $47 \mid 7^{2n} - 2^n$,

ii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

iii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

v) $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$,

vi) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$,

vii) $n! > 2^n$, für $n \geqslant 4$,

viii) $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$,

ix) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

x) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Kloster

In einem Kloster lebten 100 Mönche und der Abt - allesamt geübt in Kontemplation und der Kunst des strengen logischen Denkens. Eines Tages rief der Abt alle Brüder zusammen und sprach zu ihnen: „Ich weiß, daß einige unter euch das Schweigegelübde gebrochen haben. Ich werde eines jeden Stirn berühren, und den Missetätern wird dort ein schwarzer Punkt verbleiben. Jeder, der sich dieses Males zweifelsfrei gewahr wird muß unsere Gemeinschaft in der folgenden Nacht verlassen.“ Das Vorhaben wurde ausgeführt. Keiner der Mönche konnte bei sich eine Veränderung bemerken, die ihm verraten hätte, ob er gezeichnet wurde. Nun verhielt es sich aber so, daß eine beträchtliche Anzahl der Mönche das Schweigegebot missachtet hatten. Obwohl die Brüder mit dem schwarzen Punkt nur zu deutlich von allen zu erkennen waren, wurde keiner daraufhin angesprochen, denn ein jeder fürchtete, dann von einem Punkt auf seiner eigenen Stirn erfahren zu müssen. In der ersten Nacht ereignete sich nichts, desgleichen in der zweiten und den folgenden Nächten, bis schließlich in der 19. Nacht alle Mönche mit dem schwarzen Mal verschwanden und am folgenden Morgen der gewohnte Klosteralltag einkehrte. Wie aber mag sich das zugetragen haben, wie viele Mönche sind denn tatsächlich gegangen und sind wirklich nur die mit schwarzem Punkt verschwunden? Wieso ist so lang nichts passiert und warum sind alle Träger des schwarzen Punktes schließlich gemeinsam aufgebrochen? Fragen über Fragen – und Sie müssen sie beantworten.

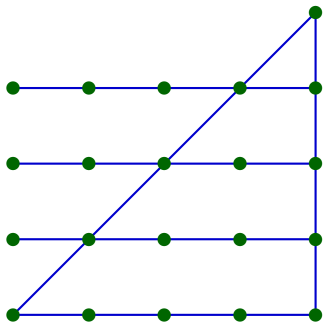
Bemerkung: Es ist müßig, Hilfsmittel, wie Spiegel oder heimliche Bündnisse und Absprachen etc. hinter dem Text zu vermuten, die dem geneigten Leser das strenge logische Denken ersparen sollen. Ein jeder kann sich damit unterhalten, Gründe zu ersinnen, die Spiegel oder Ähnliches ausschließen, bevor er sich dann endlich an die Lösung der Aufgabe macht.

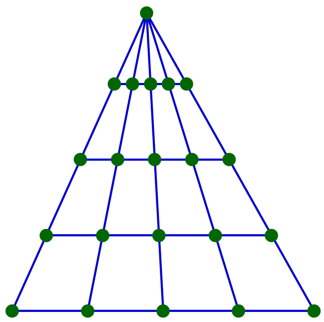
Der mathematische Koffer

Solange man über ein mathematisches Werkzeug keine Scherze machen kann, hat man es nicht wirklich verstanden. Beweisen Sie daher mittels vollständiger Induktion, *daß in einen Koffer unendlich viele Taschentücher hineinpassen* – aber nehmen Sie das bitte nicht zu ernst.

Traditionelle Weihnachtsaufgabe

Auf einem Weihnachtsmarkt sollen 21 Weihnachtsbäume so aufgestellt werden, daß möglichst viele gerade Reihen unterschiedlicher Richtungen zu jeweils 5 Bäumen entstehen und keine zwei Reihen mehr als einen Baum gemeinsam haben. Finden Sie eine Anordnung mit mehr als 11 Reihen? Zwei Anordnungen sind unten aufgeführt, allerdings nur mit 6 bzw. 9 Reihen.





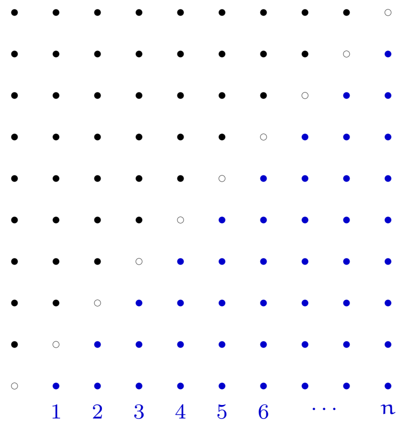
Bemerkung: Diese Aufgabe hat nicht direkt mit dem Unterrichtsstoff zu tun und ist daher nur als eine weihnachtliche Schulung Ihres geometrischen Vorstellungsvermögens zu verstehen.

Quadrat- und Kubiksummen

Die folgende Aufgabe ist für all jene gedacht, die sich ihre Neugier bewahrt haben, und mit Aufgaben wie *„Zeigen Sie* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$", oder „$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$"nicht ganz zufrieden sind, weil sie nur darin bestehen, diese Formeln mittels vollständiger Induktion zu verifizieren. *Wie* solche Formeln zustande kommen könnten erfährt man dabei nicht.

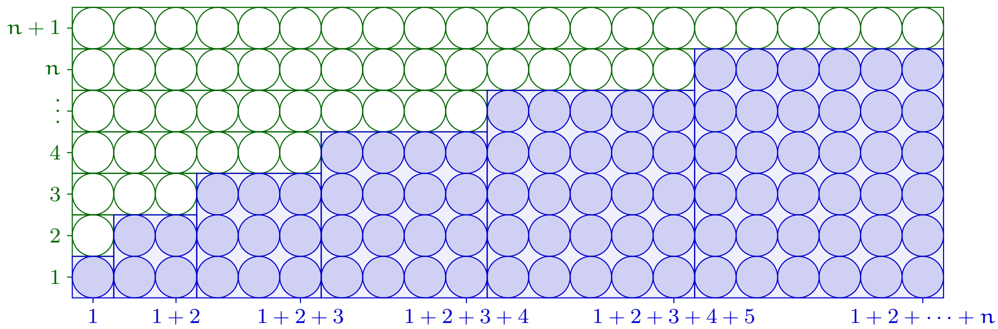
Wir wollen schrittweise eine Methode erarbeiten, wie man für Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} k^p$ diese Formeln systematisch ausrechnen kann. Die Idee dafür erraten wir aus den Fällen $p = 1$, $p = 2$ und $p = 3$.

Der Fall $p = 1$: Wir suchen einen Weg, die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ auf geometrischem Wege direkt zu erhalten (also nicht mittels vollständiger Induktion). Dafür müssen Sie sich nur klarmachen, daß in der Skizze die Anzahl der blauen Punkte genau durch diese Summe wiedergegeben wird. Vergleichen Sie das mit der Anzahl der Punkte des ganzen Quadrats, dann müßten Sie die Formel direkt herleiten können.



Der Fall $p = 2$: (AL-CHWARIZMI ca. 780 – 850 n. C.)

Die geniale Idee von AL-CHWARIZMI bestand darin, die gesuchte Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2$ in einer geometrischen Figur unterzubringen, deren Inhalt leicht anzugeben ist:



Machen Sie sich anhand der Skizze klar, daß

$$(1+1)+(2^2+1+2)+(3^2+1+2+3)+\cdots+(n^2+1+2+\cdots n) = (n+1)(1+2+\cdots+n),$$

also

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(k^2+\sum_{\ell=1}^{k}\ell\Big) = (n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

gilt. Verwenden Sie nun Ihr Wissen $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ aus der ersten Aufgabe, um daraus eine Gleichung für die gesuchte Quadratsumme aufzustellen, die leicht zu lösen ist.

Den Fall $p = 3$ für die Kubiksumme behandeln wir, falls noch Interesse dafür besteht, im nächsten Aufgabenblatt.