Modelos de regresión lineal simple y múltiple

Javier Herrero Pérez

2025-12-05

Ejercicio 1

```
library(readxl)
df <- read_excel("boston.xlsx")
```

Apartado 1

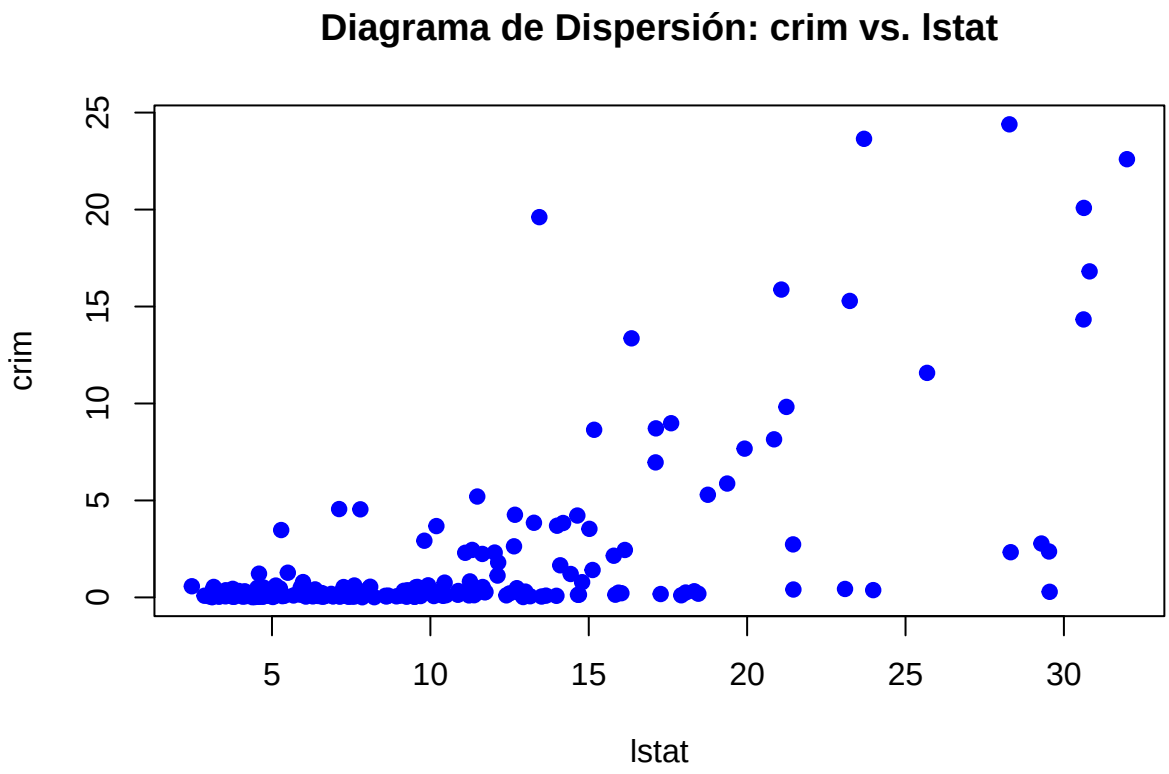
Se busca estudiar crim de manera lineal con la variable que tenga mayor relación lineal, para ello se va a estudiar la matriz de correlación eliminando la variable crim:

```
cor_matrix <- cor(df$crim,df[,-which(names(df)=="crim")])
cor_matrix
```

```
##          indus        chas       nox        rm      age        dis   ptratio
## [1,] 0.5790421 -0.05326154 0.5206876 -0.323822 0.448534 -0.4633303 0.4261423
##            black     lstat       medv
## [1,] -0.07510281 0.6391068 -0.5231014
```

Se observa que la variable que tiene una mayor relación lineal en lstat por lo que se entrena el modelo con esta variable

```
plot(df$lstat, df$crim,
     main = "Diagrama de Dispersión: crim vs. lstat",
     xlab = "lstat",
     ylab = "crim",
     pch = 19, col = "blue")
```



Apartado 2

```
lm1<-lm(crim~lstat,data=df)
summary(lm1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = crim ~ lstat, data = df)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -9.7449 -1.4171 -0.1196  1.0338 16.4752
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.62305    0.45836  -5.723 3.86e-08 ***
## lstat        0.42834    0.03673  11.663  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.401 on 197 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4085, Adjusted R-squared:  0.4055
## F-statistic:   136 on 1 and 197 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Se observa que la variable lstat es estadísticamente significativa por lo que se puede rechazar la hipótesis nula de $\beta = 0$ para esa variable. En cuanto al coeficiente de correlación es de 0.4085, explicando el 40% de

la dispersión de los datos. El p valor asociado a F-statistic es muy pequeño, confirmando que el modelo es globalmente significativo.

Apartado 3

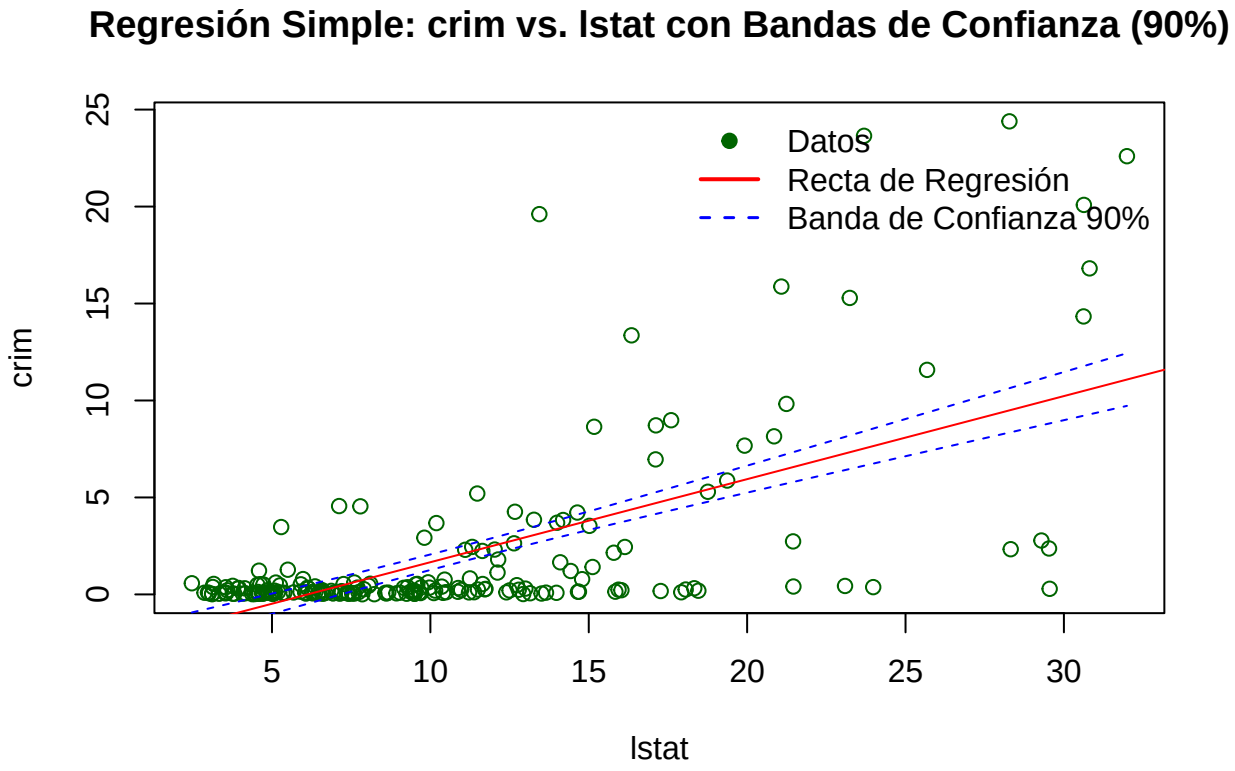
El intervalo de confianza al 90%:

```
confint(lm1,level=0.90)
```

```
##                    5 %       95 %
## (Intercept) -3.3805543 -1.8655501
## lstat        0.3676485  0.4890385
```

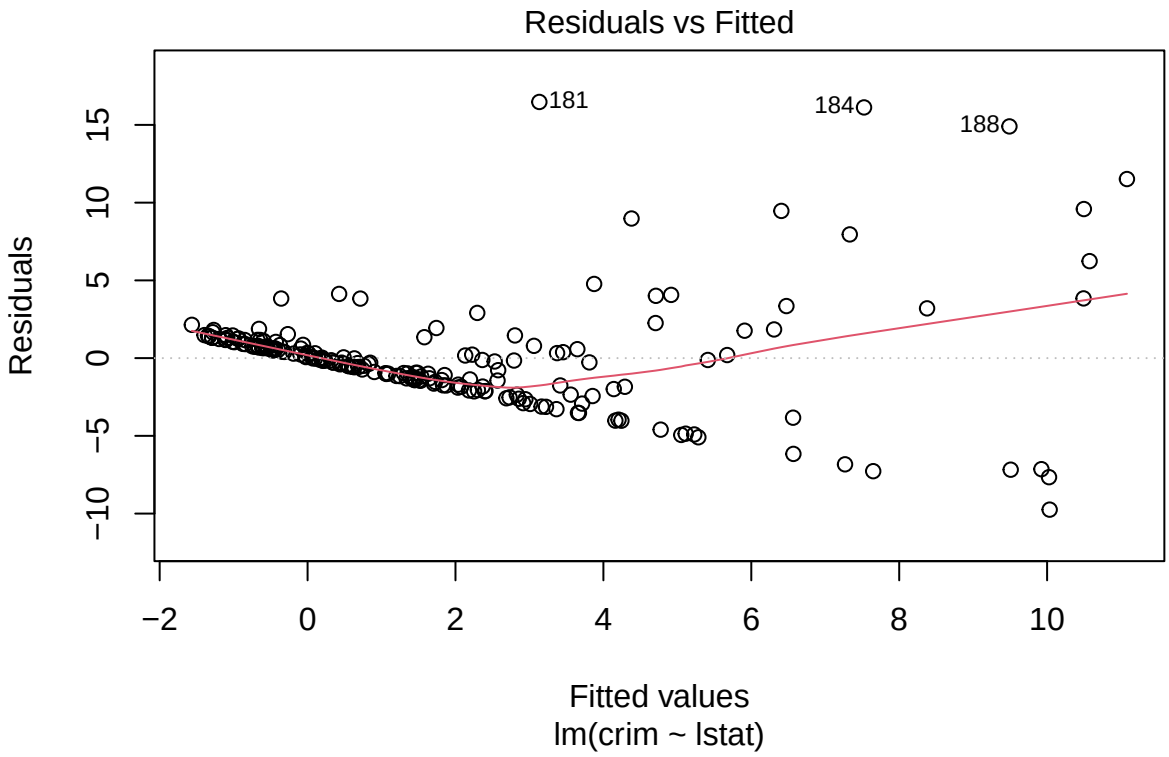
```
new_data <- data.frame(lstat = seq(min(df$lstat), max(df$lstat), length.out = 100))
confidence_intervals <- predict(lm1, newdata = new_data, interval = "confidence", level = 0.9)
```

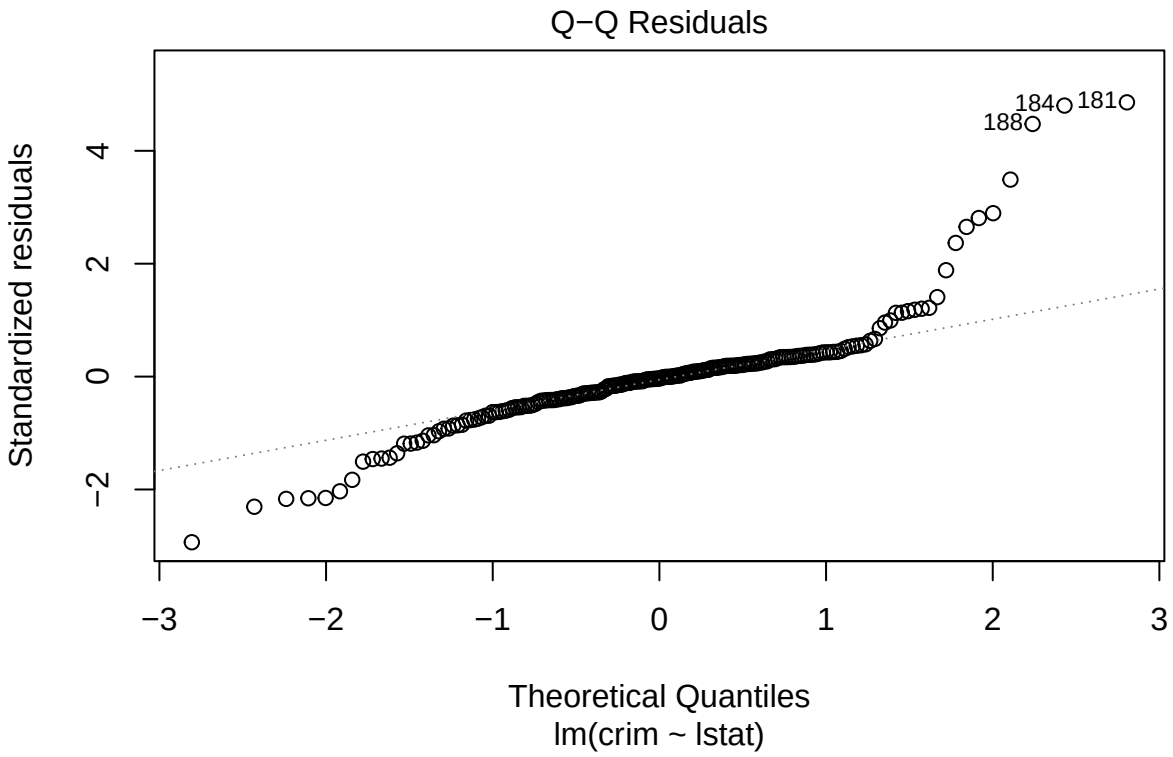
```
plot(df$lstat, df$crim,
     main = "Regresión Simple: crim vs. lstat con Bandas de Confianza (90%)",
     xlab = "lstat",
     ylab = "crim", col = "darkgreen")
abline(coef=coef(lm1), col='RED')
lines(new_data$lstat, confidence_intervals[, "lwr"], col = "blue", lty = 2)
lines(new_data$lstat, confidence_intervals[, "upr"], col = "blue", lty = 2)
legend("topright",
       legend = c("Datos", "Recta de Regresión", "Banda de Confianza 90%"),
       col = c("darkgreen", "red", "blue"),
       pch = c(19, NA, NA),
       lty = c(NA, 1, 2),
       lwd = c(NA, 2, 1.5),
       bty = "n")
```

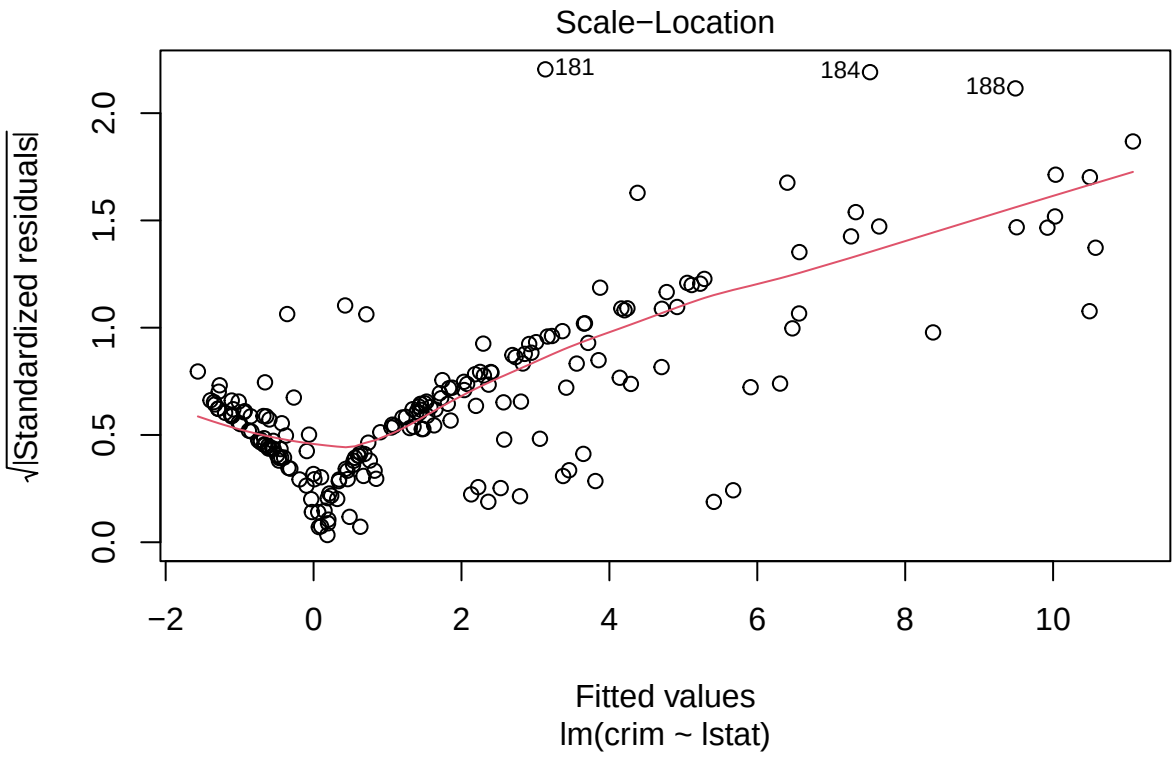


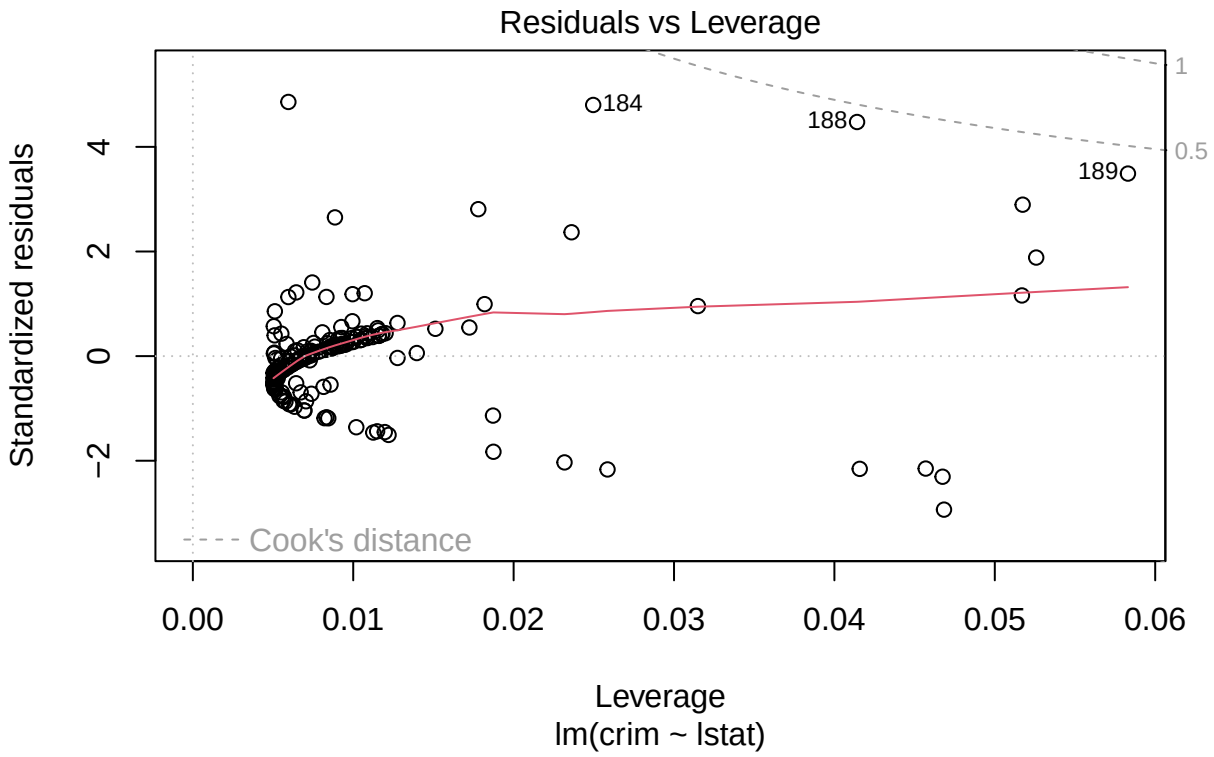
Apartado 4

```
plot(lm1)
```


Residuals vs Fitted
181
184
188
Residuals
15
10
5
0
−5
−10
−2
0
2
4
6
8
10
Fitted values
lm(crim ~ lstat)


Q−Q Residuals
Standardized residuals
−2
0
2
4
184
181
188
−3
−2
−1
0
1
2
3
Theoretical Quantiles
lm(crim ~ lstat)


Scale−Location
181
184
188
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−2
0
2
4
6
8
10
Fitted values
lm(crim ~ lstat)



Tras los resultados obtenidos se puede concluir que los residuos son heterocedasticos, debido a que la dispersión de los residuos no es constante. En la figura de Residuals vs Fitted se aprecia como la línea roja que corresponde al valor medio no es constante si no que presenta un patrón curvo.

Estos resultados justifican el hecho de hacer una transformación logaritmica. También se va a decidir eliminar unos valores outliers, lo que va a mejorar el valor de R^2 y el análisis:

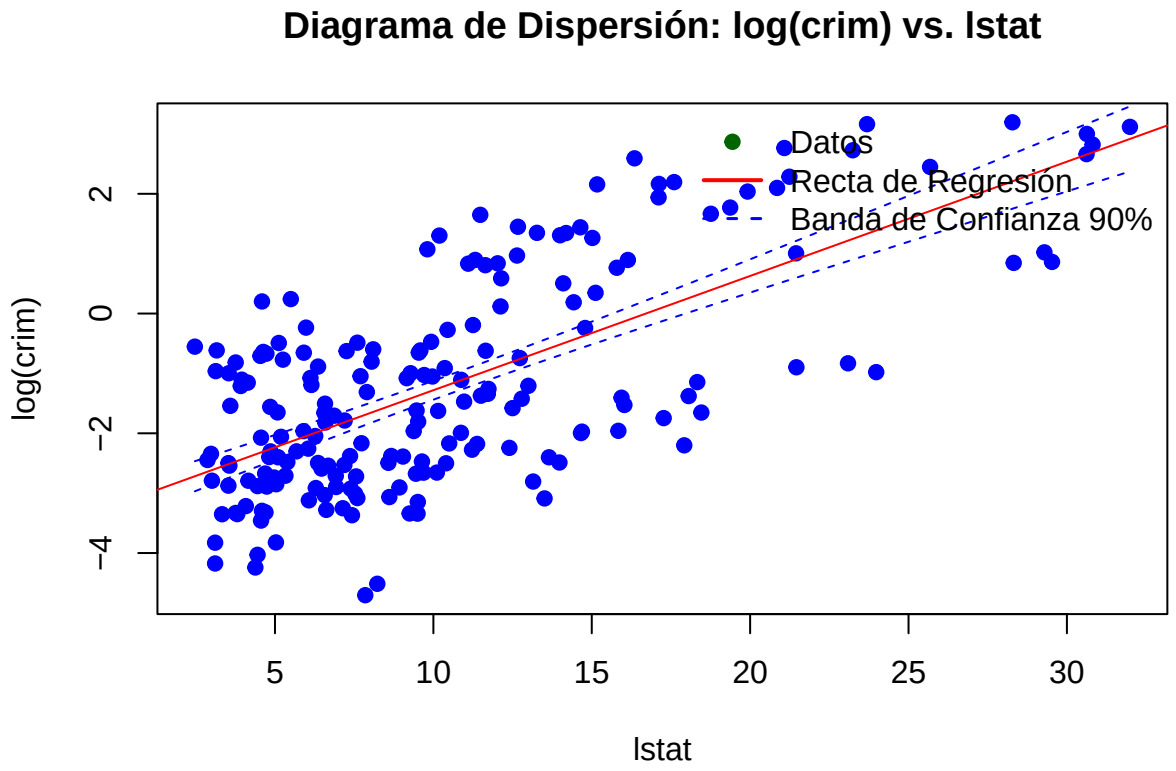
```
df <- read_excel("boston.xlsx")
df<-df[-c(60,178,181),]
df<-df[-c(173,177,127),]
lm1<-lm(log(crim)~lstat,data=df)
summary(lm1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(crim) ~ lstat, data = df)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.01307 -1.08914 -0.04107  1.04539  2.66068
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -3.18914    0.18167  -17.55   <2e-16 ***
## lstat        0.19087    0.01466   13.02   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

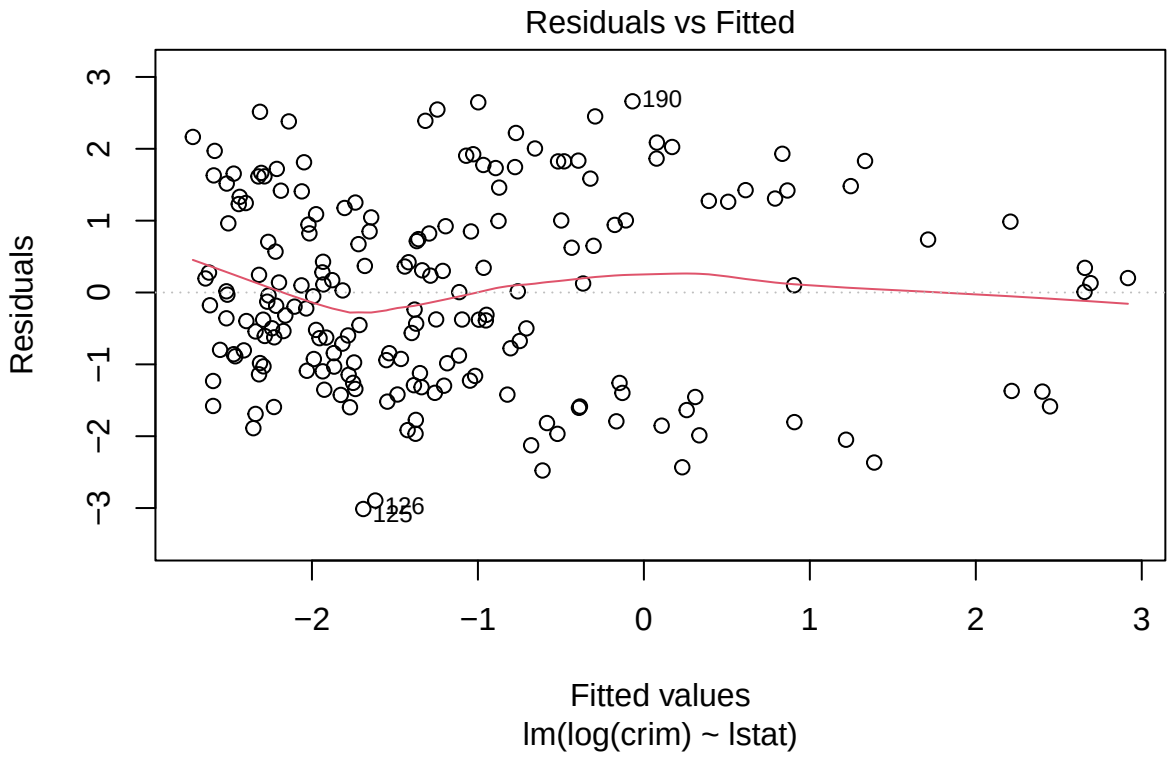
```
##
## Residual standard error: 1.324 on 191 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4702, Adjusted R-squared:  0.4674
## F-statistic: 169.5 on 1 and 191 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

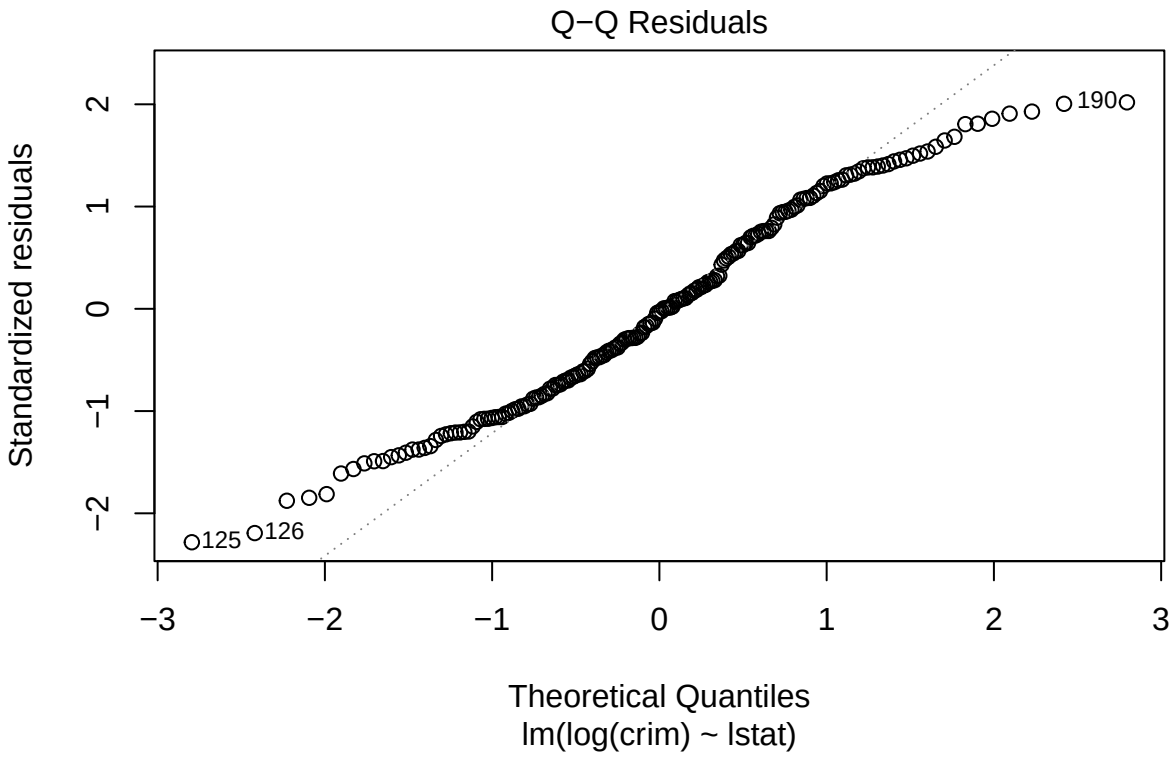
Se ha decidido aplicar el logaritmo únicamente a crim ya que si se aplicaba a ambos el valor de R^2 disminuía.

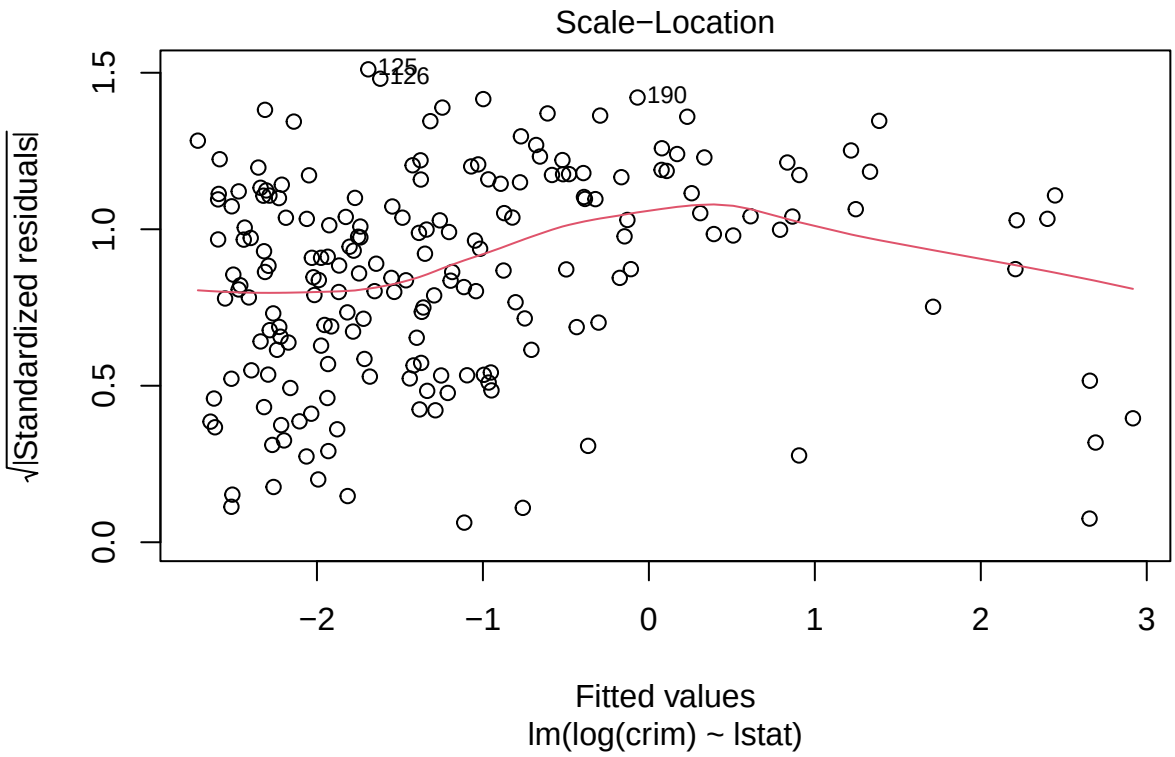
```
new_data <- data.frame(lstat = seq(min(df$lstat), max(df$lstat), length.out = 100))
confidence_intervals <- predict(lm1, newdata = new_data, interval = "confidence", level = 0.9)
plot(df$lstat, log(df$crim),
     main = "Diagrama de Dispersión: log(crim) vs. lstat",
     xlab = "lstat",
     ylab = "log(crim)",
     pch = 19, col = "blue")
abline(coef=coef(lm1), col='RED')
lines(new_data$lstat, confidence_intervals[, "lwr"], col = "blue", lty = 2)
lines(new_data$lstat, confidence_intervals[, "upr"], col = "blue", lty = 2)
legend("topright",
       legend = c("Datos", "Recta de Regresión", "Banda de Confianza 90%"),
       col = c("darkgreen", "red", "blue"),
       pch = c(19, NA, NA),
       lty = c(NA, 1, 2),
       lwd = c(NA, 2, 1.5),
       bty = "n")
```

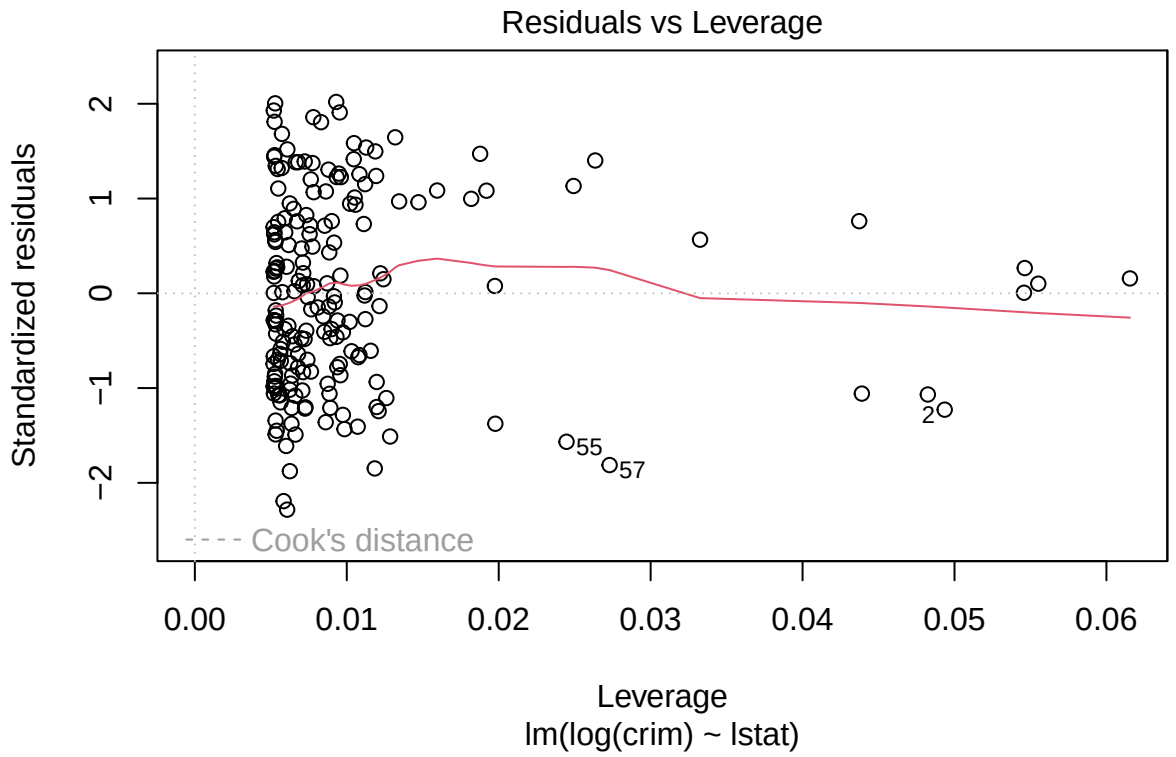


```
plot(lm1)
```


Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
lm(log(crim) ~ lstat)
190
126
125
−3
−2
−1
0
1
2
3


Q−Q Residuals
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
lm(log(crim) ~ lstat)
125
126
190
−3
−2
−1
0
1
2
3


Scale−Location
125
126
190
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
−2
−1
0
1
2
3
Fitted values
lm(log(crim) ~ lstat)



Se observa un mejor ajuste tras la transformación y la eliminación de algunos valores. Ahora la media de los residuos se encuentara en torno al cero y el QQ Residuals presenta una tendencia más clara.

Ejercicio 2

Punto 1

```
df <- read_excel("boston.xlsx")
lm2<-lm(crim~medv,data=df)
```

Punto 2

```
summary(lm2)
```

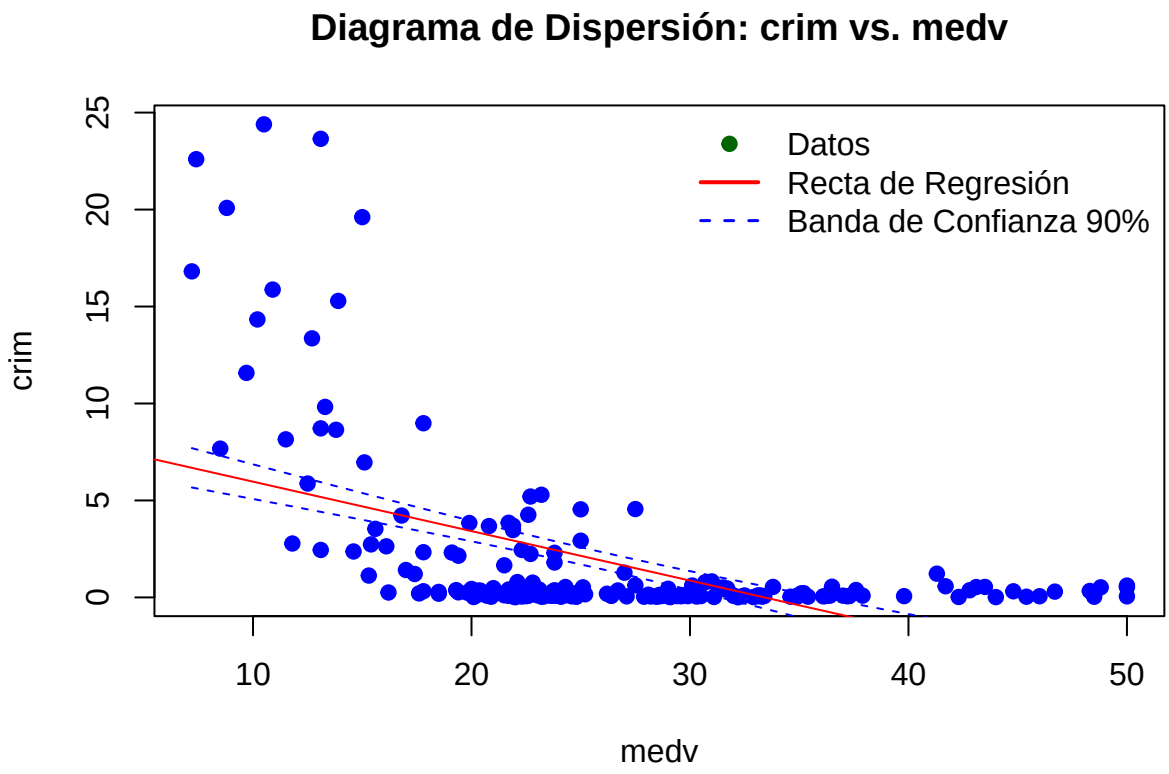
```
##
## Call:
## lm(formula = crim ~ medv, data = df)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.1341 -2.4009 -1.0186  0.7805 18.5528
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   8.5183     0.8108  10.506  < 2e-16 ***
```

```
## medv         -0.2550     0.0296  -8.615 2.26e-15 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.769 on 197 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2736, Adjusted R-squared:  0.2699
## F-statistic: 74.21 on 1 and 197 DF,  p-value: 2.258e-15
```

La variable medv es estadísticamente significativa para explicar la variable crim. Por otro lado el p-value de F-statistic es muy bajo por lo que se rechaza la hipótesis nula demostrando que el modelo es globalmente significativo. Este modelo es capaz de captar el $27,36\%$ de la varianza de los datos, aunque es un valor bajo más adelante se desarrollaran transformaciones que subiran este valor. La recta mínima de los cuadrados viene dada por $y = -0.255\beta_1 + 8.518$ por lo que a mayor sea el precio medio de la vivienda menor será la tasa de criminalidad.

Punto 3

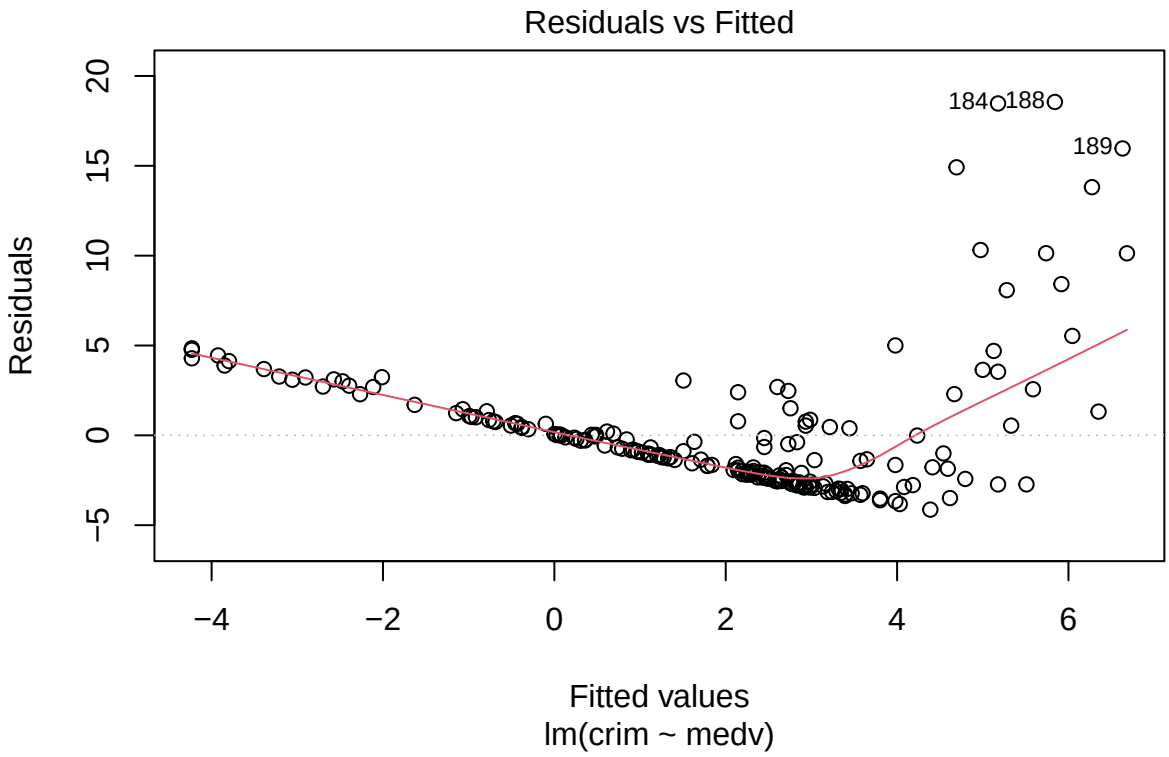
```r
new_data<-data.frame(medv=seq(min(df$medv),max(df$medv),length.out=100))
coefidence_intervals<-predict(lm2,newdata=new_data,interval = "confidence",level=0.9)

plot(df$medv,df$crim,
     main = "Diagrama de Dispersión: crim vs. medv",
     xlab = "medv",
     ylab = "crim",
     pch = 19, col = "blue")
abline(coef=coef(lm2), col='RED')
lines(new_data$medv, coefidence_intervals[, "lwr"], col = "blue", lty = 2)
lines(new_data$medv, coefidence_intervals[, "upr"], col = "blue", lty = 2)
legend("topright",
       legend = c("Datos", "Recta de Regresión", "Banda de Confianza 90%"),
       col = c("darkgreen", "red", "blue"),
       pch = c(19, NA, NA),
       lty = c(NA, 1, 2),
       lwd = c(NA, 2, 1.5),
       bty = "n")
```

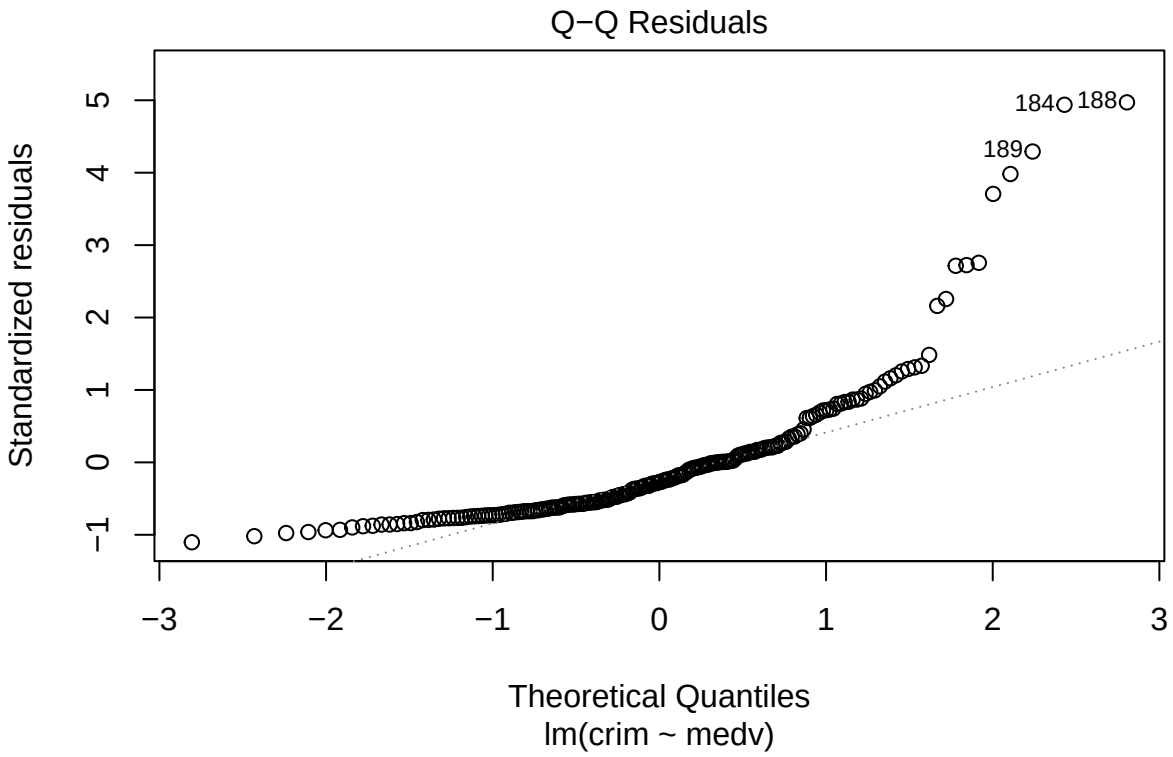


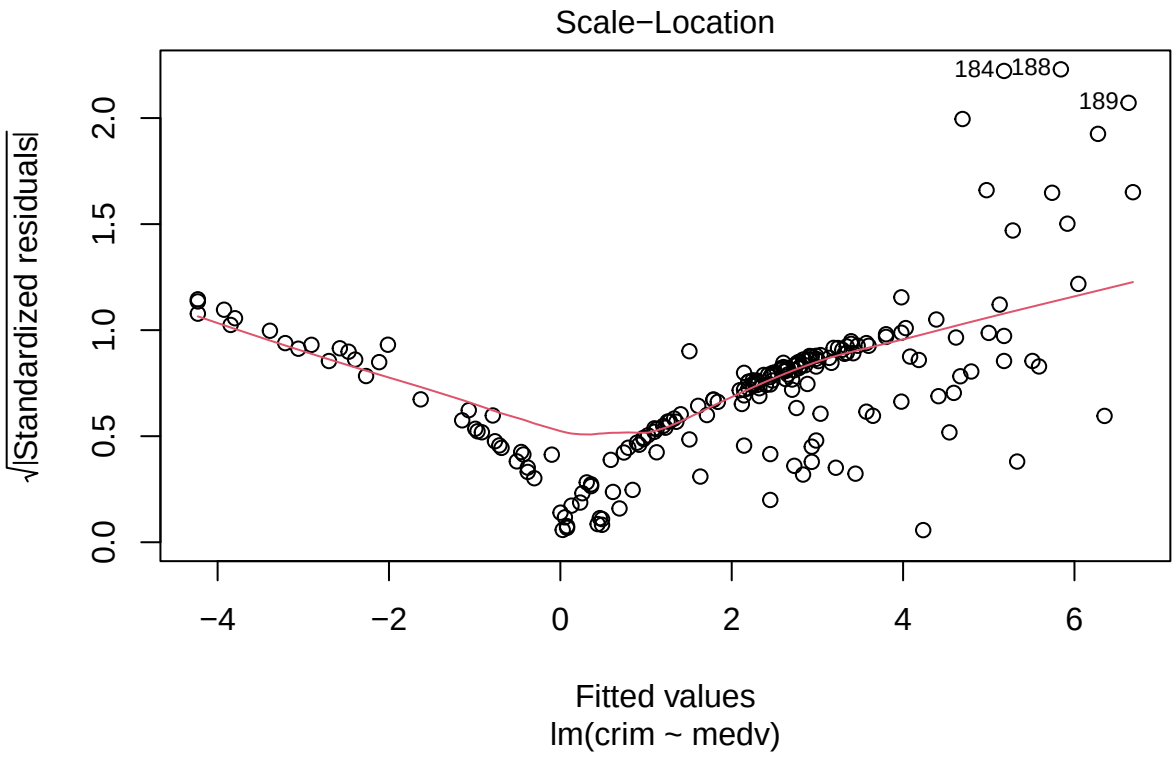
Se observa que regresión no es del todo buena para explicar el conjunto de datos. Veamos a continuación los residuos

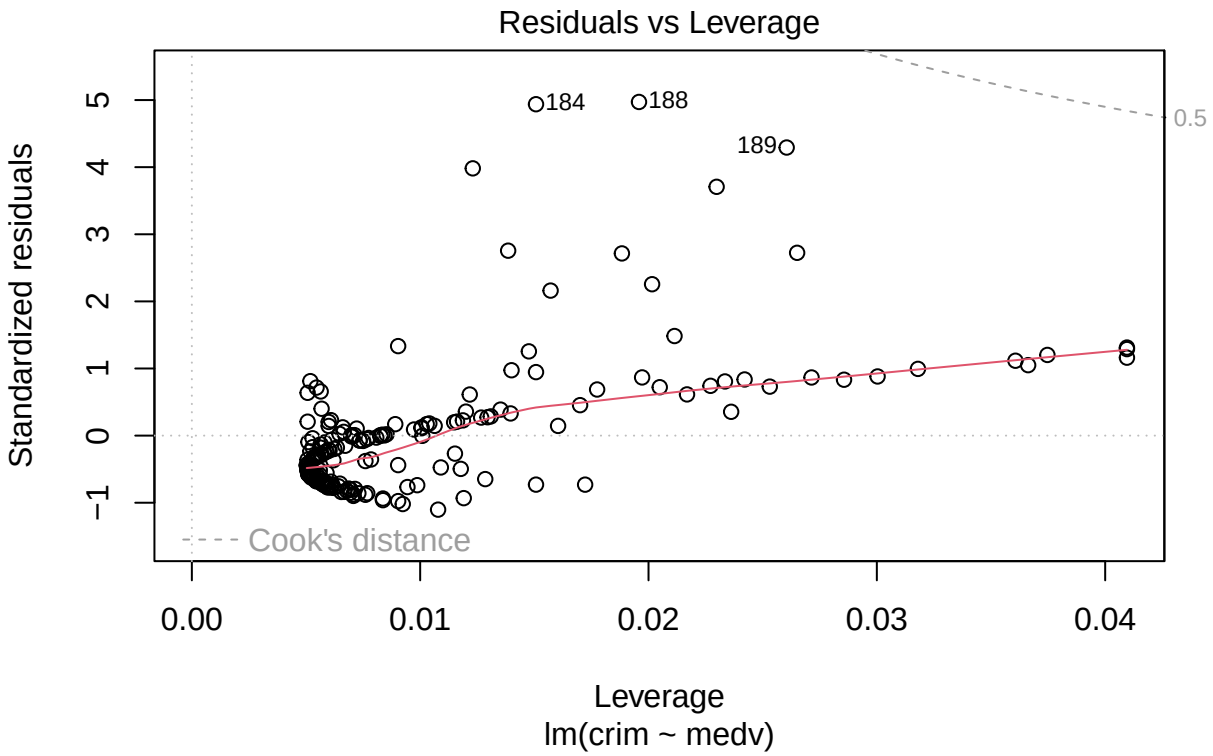
Punto 4

```
plot(lm2)
```


Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
lm(crim ~ medv)
184
188
189
20
15
10
5
0
−5
−4
−2
0
2
4
6


Q−Q Residuals
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
lm(crim ~ medv)
184
188
189
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
0
1
2
3
4
5


Scale−Location
184
188
189
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−4
−2
0
2
4
6
Fitted values
lm(crim ~ medv)



Se observa cómo los residuos presentan heterocedasticidad demostrando que el modelo no es capaz de captar toda la información que hay en el conjunto de datos. En cuanto al QQ-residuals también se observa que no sigue el comportamiento deseado.

Punto 5

Como se ha visto no es adecuado utilizar una regresión lineal, se va a probar a describirlo mediante un polinomio de grado dos para la variable medv. para solucionar el problema de heterocedasticidad en los residuos se va a estudiar el logaritmo de crim. También se ha decidido eliminar una serie de valores outliers para mejorar el valor de R^2 como se muestra en el siguiente chunck:

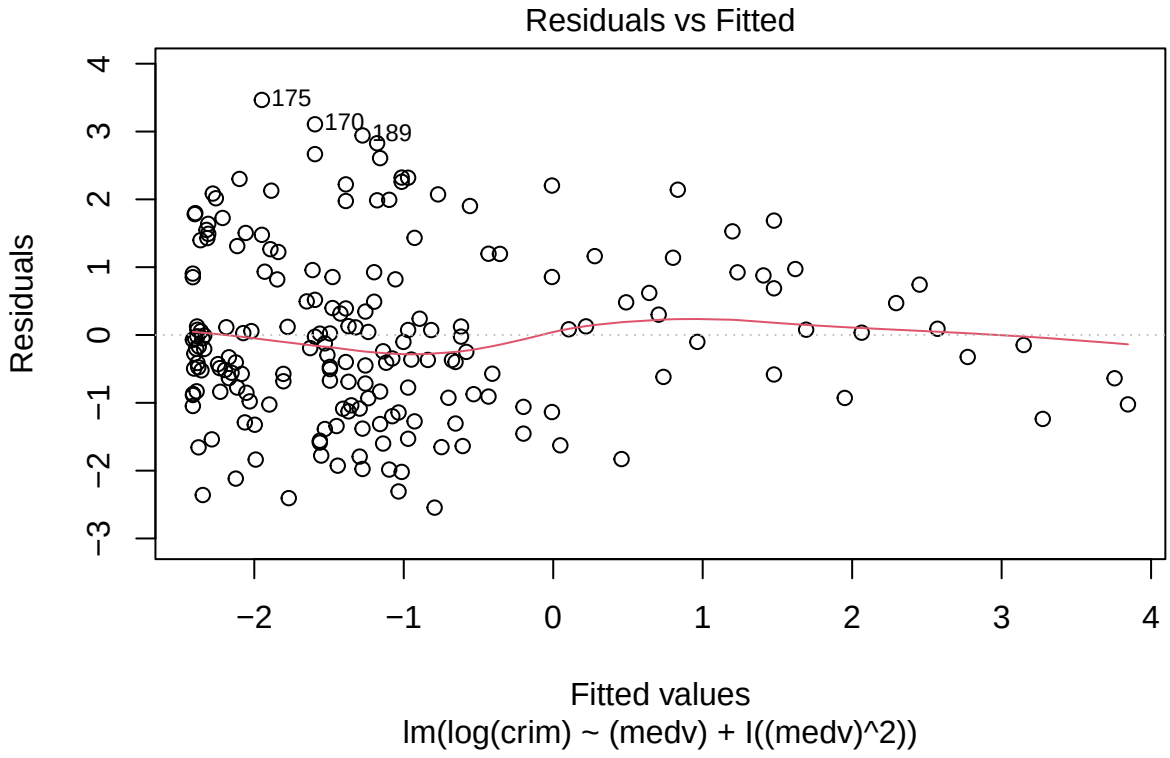
```
df <- read_excel("boston.xlsx")
df<-df[-c(127,128,34,50),]
lm2<-lm(log(crim)~(medv)+I((medv)**2),data=df)
summary(lm2)
```

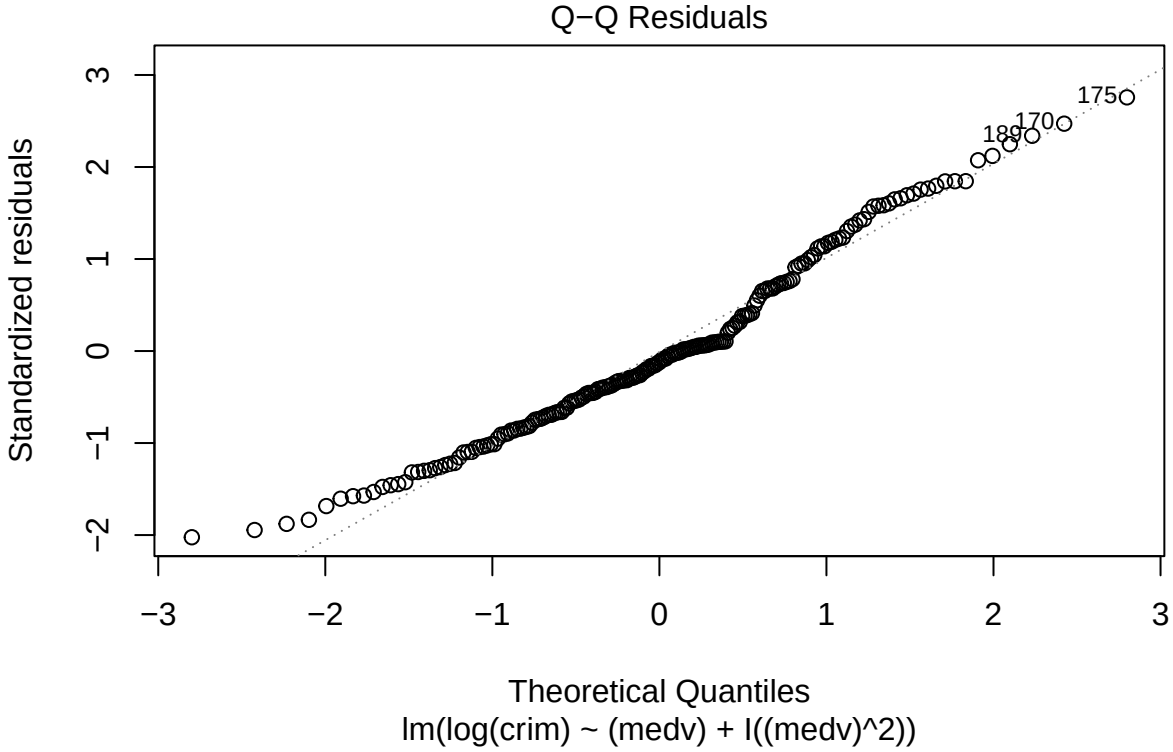
```
##
## Call:
## lm(formula = log(crim) ~ (medv) + I((medv)^2), data = df)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.5453 -0.8791 -0.1476  0.8548  3.4657
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  7.4947677  0.6475937  11.573   <2e-16 ***
## medv        -0.5648700  0.0477090 -11.840   <2e-16 ***
```

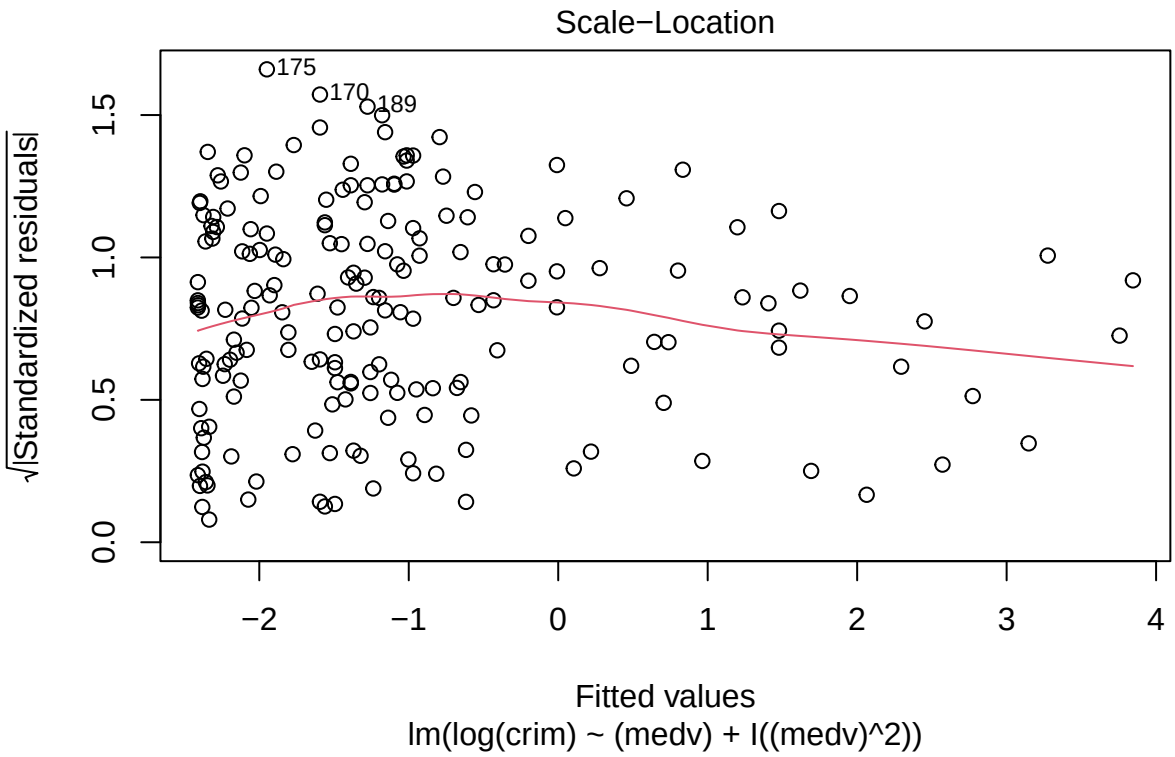
```
## I((medv)^2)  0.0080528  0.0008307   9.694   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.262 on 192 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5285, Adjusted R-squared:  0.5236
## F-statistic: 107.6 on 2 and 192 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

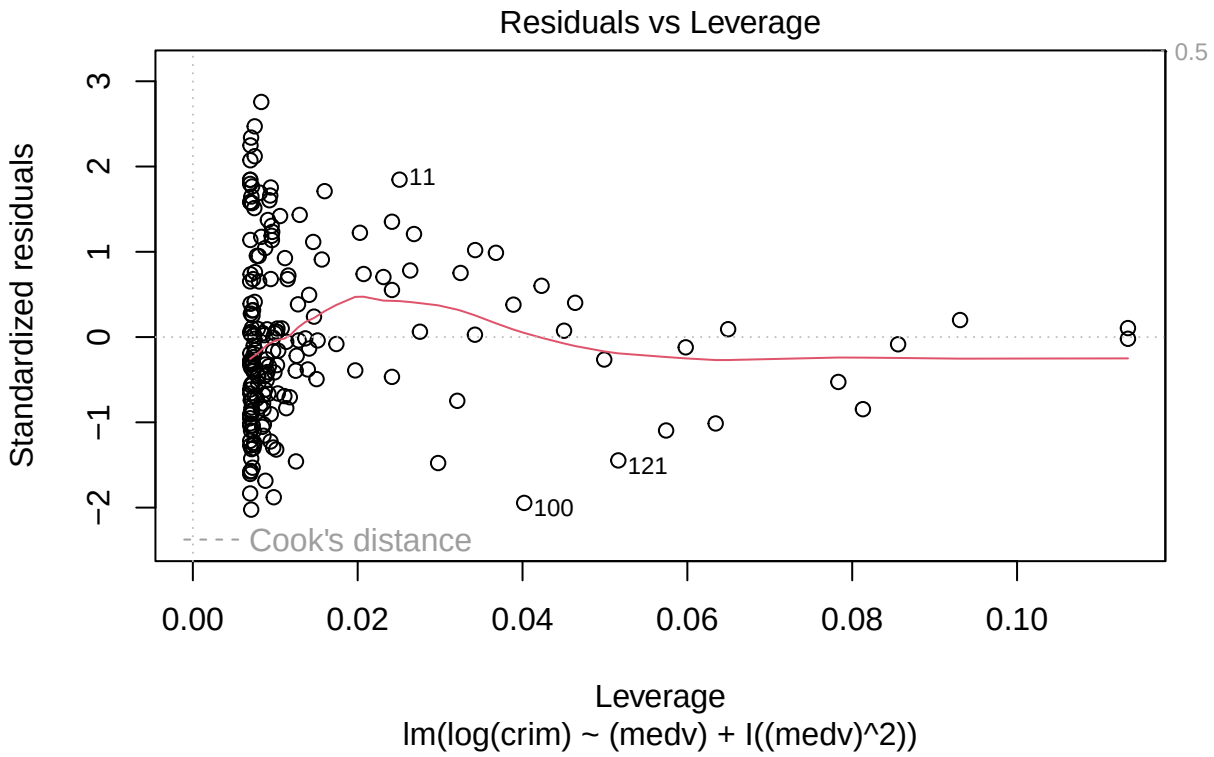
Con este nuevo ajuste se observa que tanto medv como I((medv)^2) tienen significancia estadística con un p value muy bajo. El valor de F-statistic sigue siendo bajo. También se observa que el valor de R^2 a aumentando hasta 0.5285, es decir, este nuevo modelo explica un un 25.5% más de varianza que el modelo anterior, lo cual es una mejora significativa.

```
plot(lm2)
```




Q−Q Residuals
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
lm(log(crim) ~ (medv) + I((medv)^2))
175
170
189
−3
−2
−1
0
1
2
3


Scale−Location
175
170
189
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
−2
−1
0
1
2
3
4
Fitted values
lm(log(crim) ~ (medv) + I((medv)^2))



Se observa ahora que los residuos presentan un mejor comportamiento que para el modelo anterior, siendo más homocedásticos y con la media con valores en torno al 0. Aunque todavía se observa mucha acumulación de puntos para valores bajos, se ha conseguido mejorar el modelo. En cuanto al QQ-residuals ahora sigue un comportamiento más parecido al deseado.

Apartado 6

```
medv_prediccion <- data.frame(medv = c(10, 30, 100))
IC_log_crim<-predict(lm2,newdata=medv_prediccion,interval = "confidence",level=0.90)
IP_log_crim<-predict(lm2,newdata=medv_prediccion,interval = "prediction",level=0.90)

IC_crim <- exp(IC_log_crim)
IP_crim <- exp(IP_log_crim)
print("Intervalo de confianza:")
```

```
## [1] "Intervalo de confianza:"
```

```
print(IC_crim)
```

```
##            fit          lwr          upr
## 1 1.417309e+01 9.019219e+00 2.227204e+01
## 2 1.103784e-01 9.048294e-02 1.346485e-01
## 3 4.962122e+13 4.053690e+10 6.074132e+16
```

```
print("Intervalos de predicción:")
```

```
## [1] "Intervalos de predicción:"
```

```
print(IP_crim)
```

```
##            fit          lwr          upr
## 1 1.417309e+01 1.676449e+00 1.198225e+02
## 2 1.103784e-01 1.357461e-02 8.975129e-01
## 3 4.962122e+13 3.003750e+10 8.197304e+16
```

Se observa que para 10k y 30k dolares el precio es lo esperado debido a que estos valores se encuentran dentro del rango del conjunto de datos, siendo más sencillo calcularlo. Sin embargo, para el caso de 100k el valor se dispara debido a que se está extrapolando y sale del orden de 10^{13} con intervalos tan grandes debido al uso del modelo cuadrático y la transformación logarítmica. Por lo tanto, al tener buscar estudiar un valor tan lejos del rango de datos con el que se entrena el modelo provoca que el error aumente siendo un resultado poco significativo y con mucho error, como se observa en los intervalos de predicción y de confianza.

Ejercicio 3

Apartado 1

La metodología RegSubsets consiste en ajustar todos los posibles modelos de regresión lineal que se pueden contruir con k variables predictoras donde k va de 1 hasta el número de variables. Para cada número de variables se selecciona el mejor modelo utilizando como criterio R^2, BIC y CP.

Para el análisis se va a utilizar log(crim), ya que produce el modelo más robusto.

```
library(leaps)
```

```
## Warning: package 'leaps' was built under R version 4.5.2
```

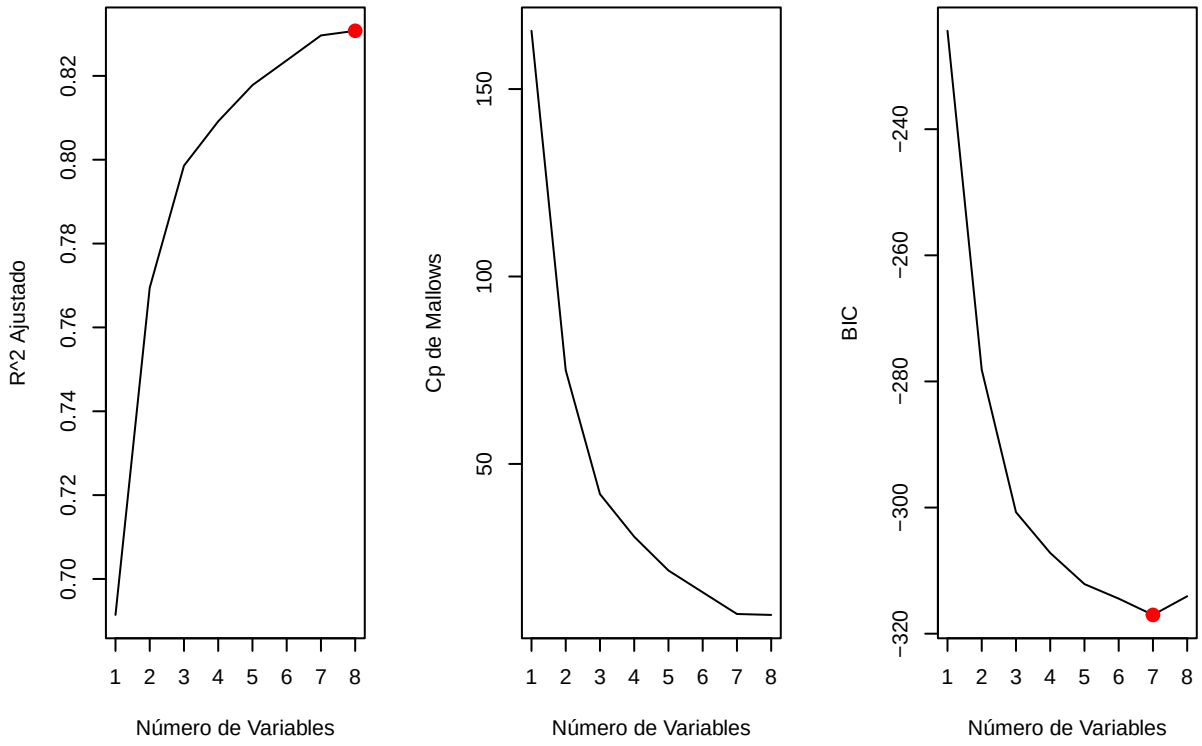
```
library(readxl)
df <- read_excel("boston.xlsx")
regfit<-regsubsets(log(crim)~.,data=df)
res.summary <- summary(regfit)
res.summary
```

```
## Subset selection object
## Call: regsubsets.formula(log(crim) ~ ., data = df)
## 10 Variables  (and intercept)
##         Forced in Forced out
## indus       FALSE      FALSE
## chas        FALSE      FALSE
## nox         FALSE      FALSE
## rm          FALSE      FALSE
## age         FALSE      FALSE
## dis         FALSE      FALSE
## ptratio     FALSE      FALSE
## black       FALSE      FALSE
## lstat       FALSE      FALSE
## medv        FALSE      FALSE
## 1 subsets of each size up to 8
## Selection Algorithm: exhaustive
##          indus chas nox rm  age dis ptratio black lstat medv
## 1  ( 1 ) " "   " "  "*" " " " " " " " " " "   " "   " "   " "
## 2  ( 1 ) " "   " "  "*" " " " " " " " " "*"   " "   " "   " "
## 3  ( 1 ) "*"   " "  "*" " " " " " " " " "*"   " "   " "   " "
## 4  ( 1 ) "*"   " "  "*" " " " "*" " " " "*"   " "   " "   " "
## 5  ( 1 ) "*"   "*"  "*" " " " "*" " " " "*"   " "   " "   " "
```

```
## 6  ( 1 ) "*"    "*"  "*" "*" " " " " " "*"      " "    "*"    " "
## 7  ( 1 ) "*"    "*"  "*" "*" "*" " " "*"      " "    "*"    " "
## 8  ( 1 ) "*"    "*"  "*" "*" "*" "*" "*"      " "    "*"    " "
```

Para 8 variables se han seleccionado todas menos nox y black.

```
par(mfrow = c(1, 3))

# Gráfico R^2 ajustado
plot(res.summary$adjr2, xlab = "Número de Variables", ylab = "R^2 Ajustado", type = "l")
points(which.max(res.summary$adjr2), res.summary$adjr2[which.max(res.summary$adjr2)], col = "red", cex =

# Gráfico Cp de Mallows
plot(res.summary$cp, xlab = "Número de Variables", ylab = "Cp de Mallows", type = "l")


# Gráfico BIC
plot(res.summary$bic, xlab = "Número de Variables", ylab = "BIC", type = "l")
points(which.min(res.summary$bic), res.summary$bic[which.min(res.summary$bic)], col = "red", cex = 2, p
```




```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Las gráficas de RegSubsets para log(crim) muestran que el R^2 se maximiza con 8 variables, pero elcriterio BIC y Cp alcanzan su punto óptimo con 7 variables.

Por lo tanto, se va a hacer el modelo de 7 variables.

```r
modelo_final <- lm(log(crim) ~.-black-medv-dis, data = df)
summary(modelo_final)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(crim) ~ . - black - medv - dis, data = df)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.20643 -0.51599  0.03419  0.55653  2.34177
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -11.837342   0.924091 -12.810  < 2e-16 ***
## indus         0.102717   0.016710   6.147 4.51e-09 ***
## chas         -0.552478   0.159412  -3.466 0.000653 ***
## nox           6.227401   0.850136   7.325 6.51e-12 ***
## rm            0.354721   0.095766   3.704 0.000278 ***
## age           0.008112   0.002921   2.777 0.006033 **
## ptratio       0.187359   0.028125   6.662 2.81e-10 ***
## lstat         0.042877   0.013566   3.161 0.001831 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.763 on 191 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8357, Adjusted R-squared:  0.8296
## F-statistic: 138.8 on 7 and 191 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Todos los p-value de las variables son menores a 0.05 por lo que se rechaza la hipótesis nula de que $\beta_i = 0$ con i asociado a la variable, esto confirma que todas las variables seleccionadas son estadísticamente significativas. En cuanto al coeficiente R^2 nos indica que este modelo es capaz de capturar el 83,57% de la varianza de los datos, además de que el p value de F-statistic es también despreciable.

Las variables con coeficientes positivos (aumenta la criminalidad) son:

- nox: Un aumento de la contaminación está asociado a un aumento de la tasa de criminalidad
- rm: No se espera que cuanto mayor sea el tamaño de las viviendas haya más criminalidad. Este resultado puede deberse a un efecto de colinealidad, en el que el modelo ya ha asignado los efectos negativos de la riqueza a otras variables.
- ptratio: A más alumnos por profesor la criminalidad aumenta.
- indus: A mayor industria más criminalización.
- age: Viviendas antiguas conlleva más criminalidad.
- lstat: A mayor porcentaje de población de clase baja la criminalidad aumenta.

Y el que tiene coeficiente negativo es chas.

Por lo tanto, ¿tienen todos sentido? No, los coeficientes de rm y age son contraintuitivos ya que deberían de ser negativos y son positivos. Estos signos que parecen erróneos ocurren porque en la regresión lineal múltiple el coeficiente de cada predictor aisla su efecto sobre los demás. Es posible que estas variables estén afectadas por la colinealidad de los otros predictores con más peso.

Apartado 2