Обратное комптоновское рассеяние. История эффекта. Угловые распределения в собственной и лабораторной системах отсчета

Степан Захаров

10 мая 2021 г.

1 История эффекта

Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом интересовало ученых ещё с середины XIX века, когда Максвеллом была создана довольно стройная теория электромагнитизма. Череда открытий в физике частиц на рубеже XIX-XX вв. окончательно сформировала понимание об электромагнитном излучении, как о потоке безмассовых частиц с нулевым электрическим зарядом и отличных от нуля энергией и импульсом — фотонах. Взаимодействие же фотонов с электронами вещества (которые были открыты примерно в это же время) было описано в работах Дж. Дж. Томсона, который предположил, что заряд, взаимодействия с электромагнитной волной, испытывает ускорение и излучает вторичную волну во всех направлениях. Сечение рассеяния описывается формулой:

$$\frac{d\sigma_{_T}}{d\Omega} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4}\big(1 - \cos^2\theta\big) = \left\{r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}\right\} = r_e^2\big(1 + \cos^2\theta\big). \tag{1}$$

Видно, что сечение не зависит от энергии падающего фотона. Данное объяснение имело хорошее согласие с экспериментом в области энергий фотонов $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2$. Однако при увеличении энергии падающего фотона, предсказания классической томсоновской теории начинали расходиться с экспериментом. В добавок, энергия рассеянного фотона изменялась, чего не предсказывала теория Томсона. Дальнейшее исследование, которое провел А. Комптон показало, что эффект изменения частоты рассеянных фотонов зависит как от энергии падающих фотонов, так и от угла рассеяния. Сечение комптоновского рассеяния имеет похожую угловую зависимость с томсоновским сечением:

$$\frac{d\sigma_{_K}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]^2\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right). \tag{2}$$

В формуле 2: ω' – частота рассеянного фотона, которая определяется из законов сохранения импульса и энергии, через частоту падающего Ω фотона и угол рассеяния между падающим и рассеянным фотоном θ:

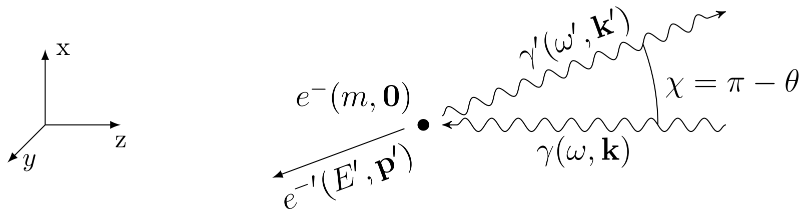
$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}. \tag{3}$$

Отметим, что параметр малости $\hbar\omega_0/m_e c^2 \ll 1$ напрямую входит в формулу 3 и определяет переход от комптоновского сечения к томсоновскому.

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда происходит процесс рассеяния оптических фотонов на ультрарелятивистских электронах. Характерные значения энергий в лабораторной системе отсчета :

- Энергия падающего фотона $\omega_0 \sim 2$ eV
- Энергия электрона $E_e \sim 5$ GeV ($\gamma \sim 10^4$)

В контексте работы нас интересует вид угловых распределений рассеянных фотонов. Для этого необходимо получить выражение для дифференциального сечения 2 в лабораторной системе отсчета. Удобно сначала получить вид сечения в системе покоя электрона, а затем перейти в лабораторную систему отсчета. Введем систему координат для задачи: ось z направим против направления движения фотона, оси x и y сориентируем так, чтобы тройка векторов xyz была правой, а также чтобы рассеяние происходило в плоскости xOz:



width=0.8

Рис. 1: Кинематика комптоновского рассеяния в системе покоя электрона.

Зафиксируем обозначения: частицы в начальном состоянии — без штриха, в конечном — со штрихом. Обычно за угол рассеяния принимают угол между начальным и конечным фотонами θ, но, учитывая тот факт, что начальный электрон ультрарелятивистский, можно ожидать сильный буст сечения в правое полупространство. Поэтому удобно работать с углом отлета фотона χ.

Поляризации частиц будем обозначать следующим образом: поляризация фотона описывается вектором Стокса $\vec{\xi} = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3] = [I, Q, U, V]$. Его компоненты задаются соотношением амплитуд и сдвиг фаз по главным осям системы. Если амплитуды электромагнитного поля имеют проекции на главные оси: E_x и E_y, а разность фаз между ними – ψ, то выражения для стоксовских параметров следующие:

$$\begin{aligned} I &= E_x^2 + E_y^2 \\ Q &= E_x^2 - E_y^2 \\ U &= 2E_x E_y \cos\psi \\ V &= 2E_x E_y \sin\psi. \end{aligned} \tag{4}$$

Удобно также нормировать вектор Стокса на значение полной интенсивности $I = E_x^2 + E_y^2$. Тогда остальные параметры будут изменяться в пределах $[-1, +1]$. Поляризацию же электронного пучка принято определять как направление спина, усредненное по всем электронам в пучке: $\vec{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]$; компоненты вектора есть проекции среднего спина на главные оси системы.

1.1 Случай неполяризованных электронов

Если начальный пучок электронов не поляризован, то сечение рассеяния будет зависеть только от поляризации оптических фотонов $\vec{\xi}$. Для начала необходимо учитывать степень поляризации фотонов. Пусть фотоны поляризованы линейно по одной из главных осей. Тогда степень поляризации будет дополнительным множителем последнего члена в формуле 2 :

$$\frac{d\sigma_{\kappa}(\vec{\xi})}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]^2\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - (1-\xi_1)\sin^2\theta\right). \tag{5}$$

В общем случае поляризация фотонов может иметь произвольное направление. Параметры ξ_1 и ξ_2 однозначно, но неявно задают полную степень поляризации и угол поворота плоскости поляризации к главным осям. Сечение же зависит только от полной степени линейной поляризации ξ_{lin}. В связи с этим удобно выделить явно полную степень и угол поворота плоскости поляризации, основываясь на выводе, проведенном в главе [ВСТАВИТЬ ССЫЛКУ НА ФОРМУЛУ 6 ИЗ ГЛАВЫ ПРО КОРРЕКЦИЮ ОПТИКИ]:

$$\xi_{lin} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \tag{6}$$

$$\varphi_0 = \pi/4 - \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{Q}{U}\right). \tag{7}$$

Наличие поворота плоскости поляризации к главным осям вызывает появление дополнительной угловой зависимости от азимутального угла φ:

$$\frac{d\sigma_{\kappa}(\vec{\xi})}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]^2\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \big(1-\xi_{lin}\cos(2[\varphi-\varphi_0])\big)\sin^2\theta\right). \tag{8}$$

Данное выражение представляет собой дифференциальное сечение комптоновского рассеяния поляризованного фотона на неполяризованном электроне в системе покоя электрона. Чтобы получить его вид в лабораторной системе отсчета, необходимо выполнить преобразования Лоренца для всех входящих в него величин. Перед этим условимся величины, выраженные в лабораторной системе отсчета обозначать индексом $x_{\text{л}}$, а в системе покоя электрона — без индекса. Относительное движение системы покоя электрона и лабораторной системы описывается γ–фактором:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} = \frac{E_e}{m_e}, \qquad \beta = \frac{v_e}{c} \tag{9}$$

В дальнейших расчетах пользуемся системой единиц Хевисайда, где $\hbar = c = e = 1$. Найдем выражения для четырехимпульсов начальных частиц:

$$k_{\text{л}} = \omega\big(1,0,0,-1\big), \qquad p_{\text{л}} = E_e\big(1,0,0,\beta\big) \tag{10}$$

В системе покоя электрона четырехимпульс фотона имеет вид:

$$k = \gamma(1+\beta)\omega\big(1,0,0,-1\big) \tag{11}$$

Рассеянный фотон имеет импульс под углом к оси z, значит необходимо отдельно преобразовать параллельную и перпендикулярную компоненты:

$$\omega' = \gamma\big(\omega'_{\text{л}} - \beta k'_{z\text{л}}\big) = \gamma\omega'_{\text{л}}\big(1-\beta\cos\chi_{\text{л}}\big) \tag{12}$$

$$k'_z = \gamma\big(k_{z\text{л}} - \beta\omega'_{\text{л}}\big) = \gamma\omega'_{\text{л}}\big(\beta\cos\chi_{\text{л}} - 1\big) \tag{13}$$

$$k'_x = k'_{x\text{л}} = \omega'\sin\chi_{\text{л}} \tag{14}$$

Используя предыдущие формулы, найдем выражения для преобразования косинуса и синуса угла отлета фотона:

$$\cos\chi = \frac{k'_z}{\omega'} = \frac{\cos\chi_л - \beta}{1-\beta\cos\chi_л}, \qquad 1+\cos\chi = \frac{(1-\beta)(1+\cos\chi_л)}{1-\beta\cos\chi_л} \tag{15}$$

$$\sin\chi = \frac{k'_x}{\omega'} = \frac{\sin\chi_л}{\gamma(1-\beta\cos\chi_л)} \tag{16}$$

Используем формулу 3 и преобразуем сечение 8 так, чтобы оно было выражено через частоту начального фотона и угол отлета конечного фотона уже в лабораторной системе отсчёта. Для этого можно сначала поработать с параметром ω/ω':

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega'} &= 1 + \frac{\omega}{m_e}(1+cos\chi) = 1 + \frac{[\gamma(1+\beta)\omega]}{m_e}\frac{(1-\beta)(1+\cos\chi_л)}{1-\beta\cos\chi_л} \\ &= 1 + \frac{\omega}{\gamma m_e}\frac{(1+\cos\chi_л)}{1-\beta\cos\chi_л} \simeq 1 + \frac{\omega}{\gamma m_e}\frac{(1+1-\chi_л^2/2)}{1-\beta(1-\chi_л^2/2)} \overset{\cdot 2/2}{=\!=} 1 + \frac{\omega}{\gamma m_e}\frac{(4-\chi_л^2)}{\underbrace{2(1-\beta)}_{=1/\gamma^2} + \underbrace{\beta\chi_л^2}_{\sim\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)\frac{1}{\gamma^2}}} \\ &\simeq \frac{1/\gamma^2 + \chi_л^2 + \frac{4\omega}{\gamma m_e}}{1/\gamma^2+\chi_л^2} \overset{\cdot\gamma^2}{=\!=} \frac{1+\gamma^2\chi_л^2 + \frac{4\gamma\omega}{m_e}}{1+\gamma^2\chi_л^2} = \left\{\begin{matrix}\eta = \gamma\chi_л \\ \kappa = \frac{4\gamma\omega}{m_e}\end{matrix}\right\} = \frac{1+\eta^2+\kappa}{1+\eta^2}.\end{aligned} \tag{17}$$

Итак, мы получили выражение для отношения частот начального и конечного фотонов, выраженное через два безразмерных параметра: η угол отлета фотона в единицах γ и κ — параметр жесткости начального фотона. Стоит отметить, что расчет проведен для ультрарелятивистского случая, когда $\chi_л \sim 1/\gamma \sim 10^{-4}$, поэтому членами $\sim 1\gamma^4$ можно пренебречь.

По аналогии с преобразованиями выше, выразим оставшиеся параметры в сечении:

$$\sin^2\chi = \frac{\sin^2\chi_л}{\gamma^2(1-\beta\cos\chi_л)^2} \simeq \frac{\chi_л^2}{\gamma^2\big(1-\beta(1-\chi_л^2/2)\big)^2} \simeq \frac{4\chi_л^2}{\gamma^2(1/\gamma^2+\chi_л^2)^2} = \frac{4\eta^2}{(1+\eta^2)^2} \tag{18}$$

$$d\Omega = \sin\chi d\chi d\varphi \simeq \frac{4\eta d\eta d\varphi}{(1+\eta^2)^2} = \frac{4\gamma^2}{(1+\eta^2)^2}\underbrace{\sin\chi_л d\chi_л d\varphi}_{d\Omega_л} \tag{19}$$

Теперь можно выписать вид сечения комптоновского рассеяния на неполяризованных электронах в лабораторной системе отсчёта:

$$\frac{d\sigma_K(\vec{\xi})}{d\Omega_л} = 2\gamma^2 r_e^2\left[\frac{1}{1+\eta^2+\kappa}\right]^2\left(2 + \frac{\kappa^2}{(1+\eta^2)(1+\eta^2+\kappa)} - \frac{4\eta^2}{(1+\eta^2)^2}\big(1-\xi_{lin}\cos(2[\varphi-\beta])\big)\right) \tag{20}$$

1.2 Полностью поляризованный случай

В современных ускорителях пучки электронов довольно быстро поляризуются из-за синхротронного излучения при движении по криволинейной орбите. Сечение рассеяния в таком случае будет зависеть как от поляризации электронов, так и от поляризации фотонов. Вклад, связанный с поляризацией электронов можно представить как добавку к сечению рассеяния поляризованных фотонов на неполяризованных электронах:

$$\frac{d\sigma_{\text{К}}(\vec{\xi},\vec{\zeta})}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{К}}(\vec{\xi})}{d\Omega} + \frac{r_e^2}{2}\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]^2 \xi_3 \vec{f}\cdot\vec{\zeta}, \qquad \vec{f} = -\frac{1+\cos\chi_{\text{л}}}{m_e}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}\cos\chi_{\text{л}}) \tag{21}$$

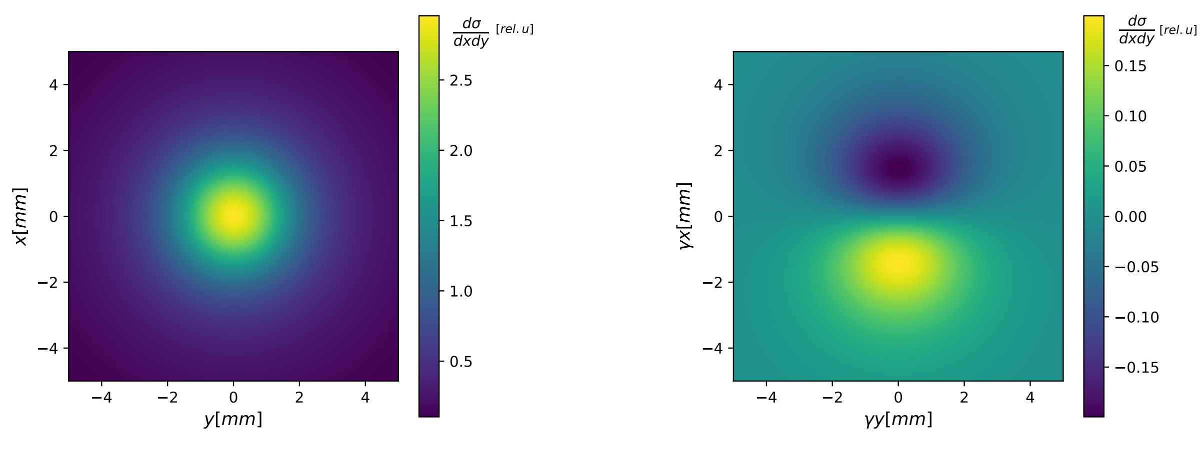
В нашем случае пучок электронов поляризуется против направления магнитного поля, поэтому вектор $\vec{\xi} = [-P, 0, 0]$, где P - степень поляризации. Учитывая, что импульс начального фотона направлен по оси z, можем по ортогональности исключить из $\vec{f}$ член, пропорциональный $\mathbf{k}$. Далее переходим в лабораторную систему аналогично случаю, рассмотренному выше:

$$\begin{aligned} \vec{f}\cdot\vec{\zeta} &= -\frac{1+\cos\chi_{\text{л}}}{m_e}\mathbf{k}'\cdot\vec{\zeta} = \frac{P}{m_e}\cdot\underbrace{(1+\cos\chi_{\text{л}})}_{\frac{2}{1+\eta^2}}\cdot\underbrace{\sin\chi}_{\frac{2\eta}{1+\eta^2}}\cdot\underbrace{\frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1+\cos\chi)}}_{2\gamma\omega_{\text{л}}\frac{1+\eta^2}{1+\eta^2+\kappa}} = \\ &= \frac{8\omega_{\text{л}}P}{m_e}\frac{\eta}{(1+\eta^2)(1+\eta^2+\kappa)} \end{aligned} \tag{22}$$

Подставим полученный ответ в 21, не забудем преобразовать элемент телесного угла и получим вид сечения в случае поляризованных электронов.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{К}}(\vec{\xi},\vec{\zeta})}{d\Omega_{\text{л}}} &= \frac{d\sigma_{\text{К}}(\vec{\xi})}{d\Omega_{\text{л}}} + \frac{r_e^2}{2}\frac{8\gamma\omega_{\text{л}}P\xi_3}{m_e}\left[\frac{\cancel{1+\eta^2}}{1+\eta^2+\kappa}\right]^2\frac{\eta}{(1+\eta^2)(1+\eta^2+\kappa)}\frac{4\gamma^2}{\cancel{(1+\eta^2)^2}} = \\ &= \frac{d\sigma_{\text{К}}(\vec{\xi})}{d\Omega_{\text{л}}} + 4\gamma^2 r_e^2\kappa P V\frac{\eta}{(1+\eta^2)(1+\eta^2+\kappa)^3} \end{aligned} \tag{23}$$

Проанализируем полученное сечение. Неполяризованная его часть представляет собой куполообразную функцию с максимумом в нуле.



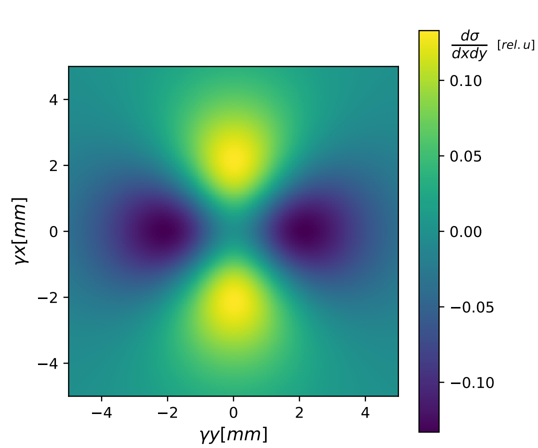
(a) Дифференциальное сечение комптоновского рассеяния в неполяризованном случае

(b) Разница сечений комптоновского рассеяния для фотонов с $V = \pm 1$

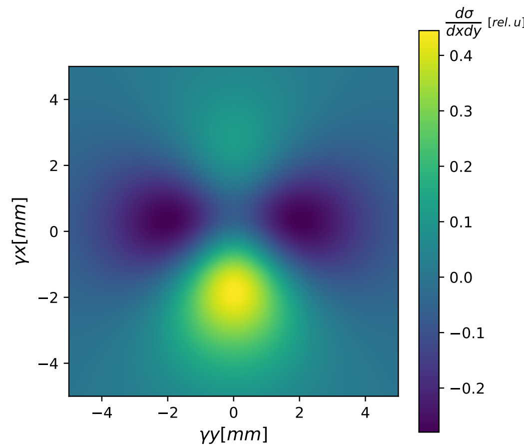
Рис. 2: Дифференциальные сечения обратного комптоновского рассеяния

Вклад в сечение члена, отвечающего за наличие у электронного пучка поляризации мал по сравнению с остальными членами, однако его можно выделить, если рассматривать разницу сечений для фотонов с левой и правой циркулярными поляризациями. Тогда распределение будет иметь явную асимметрию в направлении среднего спина электронов в пучке (в случае задачи по оси x)

Наличие у фотонов линейной поляризации вызывает появление квадрупольного члена по азимутальному углу. Это сильно искажает картину и при определенных условиях может как нивелировать эффект от поляризации пучка, так и вызвать появление ложного эффекта.



(a) Разница сечений комптоновского рассеяния для фотонов с $\xi_{lin} = \pm 0.1$



(b) Разница сечений комптоновского рассеяния для фотонов с $V = \pm 1$ и $\xi_{lin} = \pm 0.2$

Рис. 3: Дифференциальные сечения обратного комптоновского рассеяния