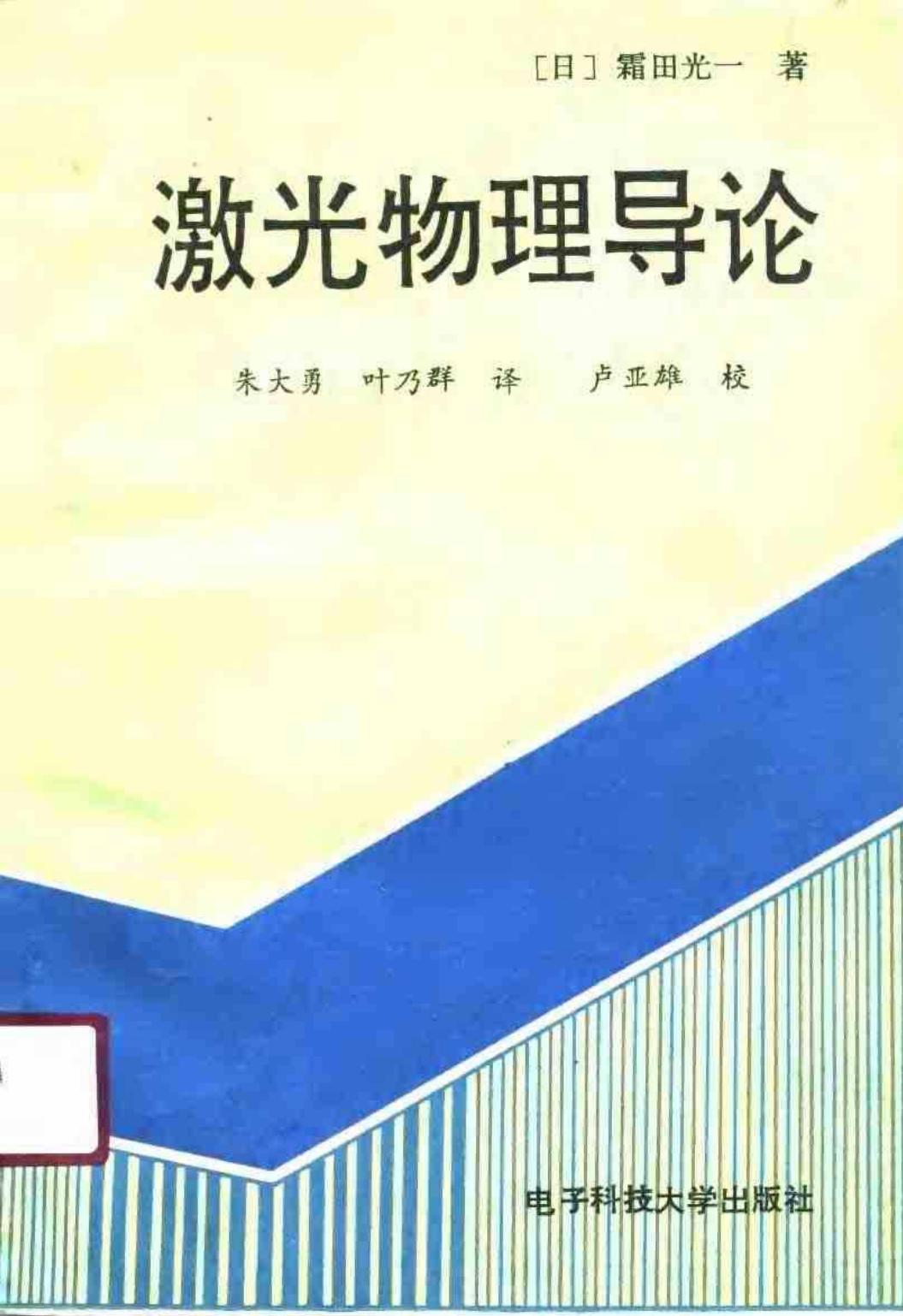


[日] 霜田光一 著

# 激光物理导论

朱大勇 叶乃群 译 卢亚雄 校



电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书内容包括量子电子学和激光器的基本原理。书中详细地介绍了二能级原子的光发射和吸收，原子的相干性和非线性效应，并且用密度矩阵和速率方程对激光动力学、相干解离及激光感应等有关现象进行了综合分析。每章均有若干习题，书后附有题解和答案。

本书可作为高等院校有关专业的教科书，也可供从事激光研究的科技人员和高等院校教师参考。

## INTRODUCTION to LASER PHYSICS

〔日〕 霜田光一 著

### 激光物理学导论

朱大勇 叶乃群 译

卢亚雄 校

\*

电子科技大学出版社出版

(中国成都市建设北路二段四号)

成都市七号信箱印刷厂印刷

四川省新华书店经销

\*

开本 850×1168 1/32 印张 8.825 字数 213千字

版次 1990年10月第一版 印次 1990年10月第一次印刷

印数 1—1600册

中国标准书号 ISBN 7-81018-284-6/TN·77

(F0452·121) 定价：3.90元

## 译 者 序

本书是国际著名的Springer出版社1986年出版的“光学科学丛书”第44卷第2版，作者是著名学者霜田光一教授。

本书内容涉及到量子电子学和激光器的基本原理，书中详细地介绍了二能级原子的光发射和吸收，原子的相干性和非线性效应，并用密度矩阵和速率方程对激光动力学、相干瞬变和激光感应现象进行了综合分析。

全书物理概念清晰，结构严谨，条理分明。为适应教学需要，每章均附有习题，书后有题解和答案，它不仅加深了读者对书中内容的理解，而且对正文也是一个很好的补充。

本书可作为高等院校有关专业的教科书和参考书，也可供激光领域的科技人员和高等院校教师参考。

本书由朱大勇翻译序言、第一至七章、题解和答案，叶乃群翻译第八、九章，卢亚雄负责全书的校订。

## 第二版序言

第二版新增加了讲述光学谐振腔的3.8节和附在书后的“习题和答案”部分，同时删去了第一版中的简短答案。第二版4、6节后面补充了克雷默斯-克朗林（Kramers-Kronig）关系式 和几道新习题。一些错误和刊误已修正。

霜田光一

1986年4月

## 第一版序言

激光开创了科学技术的新领域并得到迅速发展。各类激光器不仅在工业生产中广泛使用，而且也促进了半导体和其它材料微细结构的激光加工，原子或分子的能级选择，单原子的探测和捕获，飞秒测量，相位共轭等的革新。

因此，从事激光工程的人员需要懂得和应用激光物理的原理，对于研究激光光谱学和量子光学的科学家更是如此。

本书是为具备电磁场理论基础、基础量子力学和一定计算能力的学生，提供的一本易懂的激光物理入门课本。本书将使读者有效地理解激光器的基本概念，原理和理论分析以及激光增生效应。激光物理仍在不断发展，远未达到建立成熟体系的阶段。作者从激光问世到现在一直从事激光的基本研究，研究内容也包括在本书之中。

书中大多数的数学处理和超过基本程度的物理概念都作了详细解释。完全用物理描述的问题主要提供给那些具有扎实激光物理基础的读者。本书着重讨论物理量和实际参量的数量级，而不追求理论计算的精确值。

本书内容包括：综述典型激光器的技术性能，描述与激光有关的现代光学，讨论光的发射和吸收过程，描述激光的原理和粒子数反转的概念，使用速率方程近似推导激光器的输出特性。本书详细描述的原子相干性和非线性极化，为激光半经典理论、非线性光学和激光光谱学提供理论基础。最后简要地概述了全量子理论。每章均有习题和提示，大多数习题不仅仅是数值计算，而且对读者具有启发性。

霜田光一

1984年4月

# 目 录

译者序

第二版序言

第一版序言

**第一章 激光 一种新奇的光源** ..... ( 1 )

§1.1 激光的特性 ..... ( 1 )

    1.1.1 方向性 ..... ( 1 )

    1.1.2 单色性 ..... ( 2 )

    1.1.3 能量密度和亮度 ..... ( 3 )

    1.1.4 超短脉冲 ..... ( 4 )

§1.2 固体激光器 ..... ( 5 )

§1.3 气体激光器 ..... ( 8 )

    1.3.1 原子气体激光器 ..... ( 8 )

    1.3.2 分子激光器 ..... ( 11 )

§1.4 染料激光器 ..... ( 15 )

§1.5 半导体激光器 ..... ( 17 )

§1.6 其它激光器和激光物理 ..... ( 21 )

习题 ..... ( 22 )

**第二章 光的相干性** ..... ( 24 )

§2.1 杨氏实验 ..... ( 24 )

§2.2 迈克尔逊干涉仪 ..... ( 25 )

§2.3 时间相干性和空间相干性 ..... ( 28 )

§2.4 光场的复表示 ..... ( 31 )

§2.5 相干函数 ..... ( 34 )

习题 ..... ( 37 )

<b>第三章 光的电磁理论</b>	( 39 )
§3.1 麦克斯韦方程组	( 39 )
§3.2 光的反射和折射	( 43 )
§3.3 全反射	( 47 )
§3.4 法布里-珀罗谐振腔	( 52 )
§3.5 法布里-珀罗干涉仪	( 54 )
§3.6 平板波导	( 59 )
§3.7 高斯光束	( 66 )
§3.8 光学谐振腔	( 71 )
3.8.1 球面镜谐振腔的光斑尺寸和稳定性	( 71 )
3.8.2 球面镜谐振腔的谐振频率	( 75 )
3.8.3 其它类型的光学谐振腔	( 77 )
习题	( 78 )
<b>第四章 光的发射和吸收</b>	( 80 )
§4.1 电磁波的模密度	( 80 )
§4.2 热辐射的普朗克定律	( 83 )
§4.3 自发发射和受激发射	( 86 )
§4.4 电偶极子辐射和自发发射几率	( 90 )
§4.5 光的吸收	( 94 )
§4.6 复极化率和折射率	( 97 )
习题	( 102 )
<b>第五章 激光原理</b>	( 104 )
§5.1 粒子数反转	( 104 )
§5.2 三能级激光器的粒子数反转	( 106 )
§5.3 四能级激光器的粒子数反转	( 109 )
§5.4 激光放大	( 111 )
§5.5 激光振荡的条件	( 113 )
§5.6 激光振荡的频率	( 119 )

习题	( 122 )
<b>第六章 激光器的输出特性</b>	( 125 )
§6.1 激光器的速率方程	( 125 )
§6.2 稳态输出	( 127 )
§6.3 振荡的建立	( 131 )
§6.4 张驰振荡	( 134 )
§6.5 Q开关	( 137 )
习题	( 142 )
<b>第七章 相干相互作用</b>	( 144 )
§7.1 二能级原子和相干场之间的相互作用	( 144 )
§7.2 感应电偶极矩和感应发射系数	( 149 )
§7.3 密度矩阵	( 152 )
§7.4 密度矩阵的运动方程	( 155 )
§7.5 光学布洛赫方程	( 159 )
7.5.1 抽象空间的变换	( 160 )
7.5.2 旋转参考系的表示	( 162 )
7.5.3 纵向驰豫和横向驰豫	( 165 )
习题	( 166 )
<b>第八章 非线性相干效应</b>	( 168 )
§8.1 饱和效应	( 168 )
§8.2 饱和吸收引起的粒子数变化	( 173 )
§8.3 非线性复极化率	( 177 )
§8.4 非均匀加宽	( 179 )
8.4.1 多普勒加宽	( 179 )
8.4.2 具有多普勒加宽的非线性极化率	( 182 )
§8.5 烧孔效应	( 185 )
§8.6 瞬态相干现象	( 189 )
8.6.1 光学章动	( 193 )

8.6.2 自由感应衰减	( 194 )
8.6.3 光子回波	( 196 )
8.6.4 自感应透明	( 198 )
习题	( 201 )
<b>第九章 激光振荡理论</b>	( 203 )
§9.1 半经典理论的基本方程	( 204 )
§9.2 单模振荡	( 208 )
9.2.1 稳态振荡	( 210 )
9.2.2 范德玻尔 (Van der Pol) 方程	( 212 )
§9.3 多模振荡	( 215 )
9.3.1 两个振荡模之间的竞争	( 215 )
9.3.2 组合频率	( 219 )
§9.4 锁模	( 221 )
§9.5 气体激光器理论	( 226 )
9.5.1 驻波场中气体分子的密度矩阵	( 227 )
9.5.2 迭代近似解	( 229 )
9.5.3 三阶近似下的输出特性(兰姆凹陷)	( 233 )
§9.6 激光的全量子理论	( 236 )
习题	( 238 )
<b>题解和答案</b>	( 240 )
<b>参考文献</b>	( 261 )

# 第一章 激光——一种新奇的光源

激光是英文“光受激辐射放大”的缩写。激光原理与1954年发明的微波激射(微波受激辐射放大)原理相同。1960年激光发明前后，激光称为光学脉塞或红外脉塞。大约1965年以后，激光这个词才得到普遍承认。

激光导致了光学技术和光谱学的革命，并对科学技术的各个领域产生了深远的影响。在生物科学、医学，甚至在核聚变中，很多研究课题都使用了激光。此外，通过使用激光才能发现象光自聚焦、光学双稳态这样一些自然现象。

在讨论激光原理及研究其特性前，本章将简要地介绍一些激光辐射知识和不同类型的激光器。

## §1.1 激光的特性

激光器可以看成是一个光波振荡器或光波放大器。一些激光器可以产生可见光，另外一些激光器则产生不可见的红外或紫外射线。虽然可见光的波长范围大约从 $0.37\mu\text{m} \sim 0.75\mu\text{m}$ ，但是已知的激光器波长却在 $0.1\mu\text{m}$ (真空紫外)到 $1\text{mm}$ (微波范围)之间。实际所用的激光器，其波长覆盖范围从 $0.2\mu\text{m} \sim 500\mu\text{m}$ ( $0.5\text{mm}$ )。各种类型激光器的大小是不同的，若按尺寸来划分，半导体激光器可小于 $1\text{mm}$ ，而用于核聚变试验的激光器则大到 $100\text{m}$ ，但这些激光器的基本特性却多少相同。

### 1.1.1 方向性

通过观察可见激光，可以立即看出它是一束窄光束，除非被

反射或折射，它几乎沿直线传播。激光辐射线并不是理想的平行光束，光束通过较长距离后，由于衍射而逐渐加宽，这种加宽可以用波动光学或电磁理论来解释。光束的方向性可以用加宽角 $\delta\theta$ 来表示，它与激光器输出端的光束直径 $d$ 和波长 $\lambda$ 有关，用等式表示为

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{d} \quad (1.1)$$

激光束横截面内的场强分布和远距离角分布，可用衍射理论中熟悉的傅里叶变换将它们联系起来。对于相对平滑的强度分布，式(1.1)是方向角的近似表示式(3.7节)。由此可知，直径2mm、波长 $0.6\mu\text{m}$ 的红色激光束，其加宽角 $\delta\theta$ 约为 $3 \times 10^{-4}\text{ rad}$ 。例如在100m远处激光束的直径仅加宽到3cm左右。

激光辐射的方向性之所以如此之高，原因是激光束横截面上各点光波的相位几乎不变。这种相位的一致性通常称为相干性。简而言之，激光器的主要特性就是产生相干光，激光不仅在空间上是相干的，而且在时间上也是相干的，所以它几乎是完全的单色光。我们将在第二章详细地讨论相干性。

### 1.1.2 单色性

通常认为普通放电管或光谱灯产生的单根谱线是单色的，但是若用一台高分辨率的光谱仪来观察，就会看到它是具有一定宽度的光谱线。激光谱线的宽度相当窄，即使用最好的光谱仪都不可能检测其宽度。如果把波长几乎相同的两束激光平行入射到探测器上，就会观察到相应于两束激光频率之差的拍频，因此可以从拍频起伏来测定激光频率的起伏。虽然已知一台稳定的气体激光器的光谱宽度可低于1Hz，而大多数激光器的光谱宽度却在1MHz到1GHz之间。即使一台可见光激光器的光谱宽度为1GHz，它也不过是激光频率的两百万分之一，只相当于 $1\text{pm}$ ( $0.01\text{\AA}$ )的波长宽度。一台稳定激光器的1Hz光谱宽度相当于

$10^{-15}$ 的频率起伏。

激光振荡不象普通光源那样发射不规则的光波脉冲序列，而几乎是一列持续时间相当长的纯正弦波，这点可由下面实验得到证明。把一束激光分成两束后再合起来，众所周知叠加后的光束会显示出清晰的干涉条纹（第二章）。激光频率起伏的理论极限由自发发射确定（4.3节）；如果 $P$ 表示激活介质受激发射的光功率， $\nu$ 表示频率，则由参考文献（1.1）得到的频率起伏 $\delta\nu$ 为

$$\delta\nu = \frac{2\pi h\nu(\Delta\nu)^2}{P} \quad (1.2)$$

式中普朗克常数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ， $\Delta\nu$ 是谐振强度为最大值的一半时激光谐振腔频率的半宽度。

在实际的激光器中，由于各种原因谐振腔的谐振频率会受到干扰。此外，激活介质的激励条件不稳定也会引起谐振频率的起伏。因此为了稳定激光频率，必须使谐振腔免受外部振动，防止温度变化引起尺寸的改变以及避免压强起伏和电磁场的影响。

### 1.1.3 能量密度和亮度

激光器的效率并不高，一台普通激光器的输出功率低于输入功率的0.1%，效率最高的激光器也不超过40%。通常用于光学实验和计量的小型He-Ne激光器，其输出功率约1mW，比一个小灯泡的光还要微弱。即使大功率Ar离子激光器或YAG激光器，也只有10~100W（分别见1.2节和1.3节），与荧光灯相差不多。由于激光的方向性好，可以用一个短焦距的透镜把它聚焦到直径只有波长的几倍大小，因此可在焦点处达到很高的功率密度。例如，即使1mW的小输出功率，若聚焦在 $10\mu\text{m}^2$ 面积上，其功率密度将达到 $10\text{kW/cm}^2 = 100\text{MW/m}^2$ 。采用这种聚焦激光功率的方法，可以产生直流或低频交流电路中得不到的强电场。若把100W的激光束聚焦到 $10\mu\text{m}^2$ 的面积上，其电场计算值约为

$6 \times 10^7 \text{ V/m}$ , 而聚焦峰值功率为 $100 \text{ MW}$ 的脉冲激光器, 则能得 $6 \times 10^{10} \text{ V/m}$ , 即 $60 \text{ GV/m}$ 的极强电场。

高功率密度的激光能得到高密度的光子数。例如 聚焦波长为 $0.6 \mu\text{m}$  或光子能量为 $3.3 \times 10^{-19} \text{ J}$ 的 $1 \text{ mW}$ 的激光功率, 能得到 $10 \text{ kW/cm}^2$  的功率密度, 相当于每秒 $3 \times 10^{21}$ 光子数/ $\text{cm}^2$ 的通量。因为光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 这意味着光子密度为 $10^{18}$ 光子数/ $\text{cm}^3$ 。如果功率密度是 $1 \text{ GW/cm}^2$ , 那么我们将获得很高的光子密度, 其值为 $10^{17}$ 光子数/ $\text{cm}^3$ 。因此, 若把激光聚焦到物体上, 经常是几个光子同时与一个单原子起作用。

由于激光的单色性很好, 光的能量聚集在很窄的光谱线宽内, 即使激光功率的绝对值不大, 其亮度却很高。若用 $P$ 表示激光功率,  $\delta\nu$ 表示它的频谱宽度, 则等效亮度温度 $T_e$ 为

$$T_e = -\frac{P}{k_B \delta\nu}$$

式中玻尔兹曼常数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 。例如, 设 $P = 1 \text{ mW}$ ,  $\delta\nu = 1 \text{ Hz}$ , 我们将得到极高的亮度温度, 其值约 $10^{20} \text{ K}$ 。即使光谱线宽 $\delta\nu = 1 \text{ MHz}$ , 用 $P = 10 \text{ W}$ 的较大功率, 亮度温度也高达 $10^{17} \text{ K}$ 。总之, 与太阳或白炽灯(约 $10^4 \text{ K}$ )的亮度温度相比较, 上例中的亮度温度要高出它们好多个数量级。

#### 1.1.4 超短脉冲

激光器可以产生振幅和相位几乎是恒定的光输出, 也能以很高的速率对激光进行调制。在大多数情况下, AM(振幅调制)和FM(频率调制)的调制频率可以达到微波频率, 这意味着可得到较 $1 \text{ ns}$ 更短的脉冲。当调制器放置在激光器外部时, 外调制器的带宽确定了短脉冲宽度的极限, 当调制器放入激光谐振腔内时, 则主要是激活介质的增益带宽决定了脉宽的极限<sup>[1][2]</sup>。

$1 \text{ ns}$ 在普通电子学中差不多是脉冲宽度或响应时间的极限,

然而比它短1000倍的激光脉冲，也就是1ps( $1\text{ps} = 10^{-12}\text{s}$ )的激光脉冲已能得到，最近已获得了 $0.1 \sim 1\text{ps}$ 的亚皮秒和 $10 \sim 100\text{fs}$ ( $1\text{fs} = 10^{-15}\text{s}$ )的脉冲，它能够测量 $0.1\text{ps}$ 或更短的时间。因为光速

$$c = 299792458\text{m/s} \approx 3 \times 10^8\text{m/s}$$

$1\text{ps}$ 激光脉冲仅长 $0.3\text{mm}$ ，因此，与其说在传送光线，还不如说在传送光薄膜。

脉冲激光器的峰值功率比连续波(cw)激光器的输出功率高得多。即使一台小型脉冲激光器的峰值功率也可达到 $1\text{MW}$ 或更高，而一台大型脉冲激光器可达 $1\text{GW}$ 或更高。若使用激光放大器，能得到高达 $1\text{TW}$ 的峰值功率。因此，聚焦上述高功率激光脉冲时，在空间和时间上都将得到极高的能量密度。

光能量在时间上越集中，其光谱加宽就越大。包络为高斯线型的光脉冲具有围绕中心频率的高斯线型光谱分布。用 $\tau_p$ 表示高斯脉冲的半最大值全宽度，而用 $\delta\nu_p$ 表示光谱的半最大值全宽度，则得到关系式

$$\tau_p \delta\nu_p = (2/\pi) \ln 2 = 0.44$$

于是 $1\text{ps}$ 激光脉冲的宽度是 $440\text{GHz}$ ，相当于亚毫米波频率。

## §1.2 固体激光器

固体激光器是指激光材料由晶体或玻璃构成的一种激光器，具有窄的荧光谱线。在强光的激励下，在荧光波长上它可作为振荡器或放大器使用。虽然半导体激光器和塑料激光器也是固体材料，但通常不包括在固体激光器内<sup>[1-3]</sup>。

1960年6月问世的第一台固体激光器是红宝石激光器。固体激光器材料是透明、热稳定性好且坚硬的晶体或玻璃，其中含有

作为激活离子的过渡金属或稀上元素。红宝石晶体由 $\text{Al}_2\text{O}_3$  (刚玉)中掺有0.01%~0.1%<sup>(1)</sup> 的 $\text{Cr}^{3+}$ 离子构成，它用来产生和放大694nm波长的激光。

目前适用于材料处理或加工的固体激光器是YAG激光器，它是由含有0.1%~1% 的 $\text{Nd}^{3+}$ 离子的 $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$  (钇铝柘榴石)晶体构成，发射1.06μm激光，也可发射1.32μm激光。还有一些含有 $\text{Nd}^{3+}$ ， $\text{Pr}^{3+}$ ， $\text{Ho}^{3+}$ ， $\text{Er}^{3+}$ ， $\text{Tm}^{3+}$ 和 $\text{U}^{3+}$ 等三价离子的晶体，例如 $\text{CaWO}_4$ 和 $\text{CaF}_2$ ，其中大约有30种不同类型的晶体可作为激光材料。此外，还有少数含有 $\text{Sm}^{2+}$ ， $\text{Dy}^{2+}$ 二价离子的晶体，例如 $\text{CaF}_2$ 和 $\text{SrF}_2$ 也可作为激光材料。这些激光器的波长在近红外(1.0~2.6μm)区域，最近还研制出一种称做YLF( $\text{YLiF}_4$ ，钇锂氟化物)的可用于从紫外到红外某些波长的激光晶体。掺 $\text{Ce}^{3+}$ 能得到325nm和309nm谱线，掺 $\text{Tm}^{3+}$ 得到453nm谱线，而掺 $\text{Tb}^{3+}$ 可得到545nm谱线。掺 $\text{Pr}^{3+}$ 、 $\text{Ho}^{3+}$ 、 $\text{Er}^{3+}$ 、 $\text{Nd}^{3+}$ 的YLF晶体还可以产生其它一些新谱线，其中掺 $\text{Ho}^{3+}$ 可得到3.9μm的最长波长<sup>[1~4]</sup>。

固体激光器的典型装置如图1.1所示。把激光材料(如上述那些晶体)加工成圆棒，并把棒的两端研磨、抛光成平行平面，称它为激光棒。将棒放置在两块面对面的镜面之间，当围绕着棒的一个或几个闪光灯发出很强的闪光，使棒受到强烈照射时，便可发射出一个激光脉冲。典型的激光棒尺寸是长6cm，直径6mm，但有时也使用短于1cm或长于30cm的棒。

有几种激光器，例如YAG激光器，若用连续辐射光源激励，则能产生连续波振荡。通常YAG激光器能产生10~100W的连续功率。对于10ns~1ms的脉冲宽度，在重复频率为100~1Hz时，可以得到每个脉冲为50mJ~10J的输出能量。红宝石激光器不宜

(1)通常表示晶体中含有0.01%~0.1%的 $\text{Cr}_2\text{O}_3$ 重量。

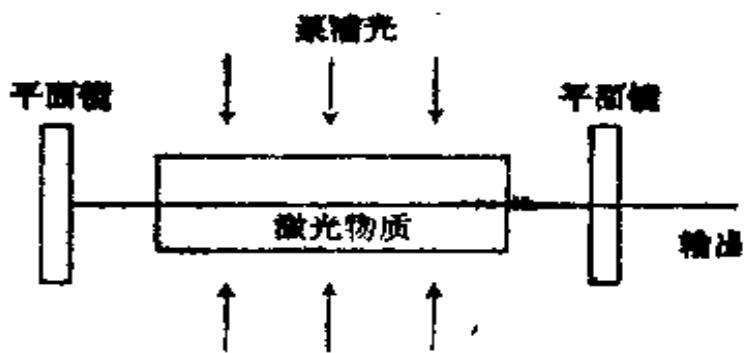


图1.1 光泵浦固体激光器

用来产生连续波，因为连续波输出的功率仅约1mW，然而它却能得到峰值功率为1~100MW的脉冲输出，该峰值功率的大小取决于脉宽(10ns~1ms)和红宝石棒的质量。

用含有1%~5% $\text{Nd}^{3+}$ 的硅酸盐玻璃、磷酸盐或氟化物玻璃所构成的玻璃激光器，其激光波长为1.05~1.06μm。要生长大根的红宝石或YAG晶体棒极为困难，然而用玻璃就比较容易制作出大根均匀的激光材料。基于这个原因，玻璃激光器常用来作为高输出功率的激光放大器，例如在惯性约束核聚变中作能量驱动器。由于玻璃的热传导性差，因而脉冲重复率相当低。

最近已研究出一种用于高重复频率或连续运转的小型固体激光器，所用的 $\text{Nd}^{3+}$ 不再作为低浓度杂质，而是作为一种主要的成分。把NPP(五磷酸钕， $\text{NdP}_5\text{O}_{14}$ )和LNP(磷酸锂钕， $\text{LiNdP}_4\text{O}_{14}$ )晶体做成小于1mm的薄片，并用氢离子激光器激励，可得到约1.05μm波长的激光输出。

虽然大多数激光器的波长只能在1%之内改变，但最近已研究出宽调谐的固体激光器，用 $\text{BeAl}_2\text{O}_4$ 晶体掺 $\text{Cr}^{3+}$ 构成的金绿宝石激光器，其输出功率和效率可以和YAG激光器相比，调谐范围却达到0.70~0.82μm。已经发现，在直到超过200℃的温度范围内，输出功率都随温度的增高而上升。在近红外区，已研制出用掺 $\text{Ni}^{2+}$ 或 $\text{Co}^{2+}$ 的 $\text{MgF}_2$ 晶体，其调谐范围分别是1.6~2.0μm

和 $1.6\sim2.3\mu\text{m}$ 。此外，用碱-卤化物晶体制成的几种色心激光器，可以覆盖 $0.9\sim3.3\mu\text{m}$ 的波长范围。产品化的色心激光器已用于光谱学研究之中。

### §1.3 气体激光器

1960年12月，用射频放电激励He、Ne混合气体，从而研制出了产生连续波输出的第一台激光器，即 $1.15\mu\text{m}$ 的He-Ne激光器。之后，从真空紫外 $100\text{nm}$ 到红外，甚至到毫米波的宽阔波长范围内，已研制出多种气体激光器。已知的激光谱线总数超过5000条<sup>[1][5]</sup>。在大多数情况下，气体要么用放电激发，要么用光泵激发，这涉及许多方法和激发机理。

若以介质分类，气体激光器可分为中性原子激光器，离子激光器，分子激光器，准分子激光器等。而按激发方法分类有放电激光器，化学激光器，光泵激光器，电子束泵浦激光器等。放电激发还可以进一步分为直流放电，高频放电，脉冲放电和空心阴极放电激发。关于激发的机理，很多过程人们已熟知，例如电子碰撞，与激发原子碰撞的能量转移，分子的离解，离子和电子的复合，共振吸收以及共振辐射的收集等。

#### 1.3.1 原子气体激光器

最典型的中性原子气体激光器是He-Ne激光器，图1.2简要地示出了它的能级。当一个He原子用放电激发到亚稳态 $2^1\text{S}$ 或 $2^3\text{S}$ 上，并与基态的一个Ne原子碰撞时，He原子的激发能转移给Ne原子，其结果是 $2s$ 和 $3s$ 能级上分布的Ne原子数增加。这些能级上的Ne原子再跃迁到较低的能级，便发射 $1.152\mu\text{m}$ 、 $0.633\mu\text{m}$ 、 $3.391\mu\text{m}$ 以及邻近的其它几条谱线的激光。He-Ne激光器的典型特性列在表1.1中。尽管短波长 $633\text{nm}$ He-Ne激光器的输出功率不高，但它是可见(红)光激光器中最便宜和最轻便的，因此在光

学实验、计量以及显示等方面，都有广泛的销售市场。

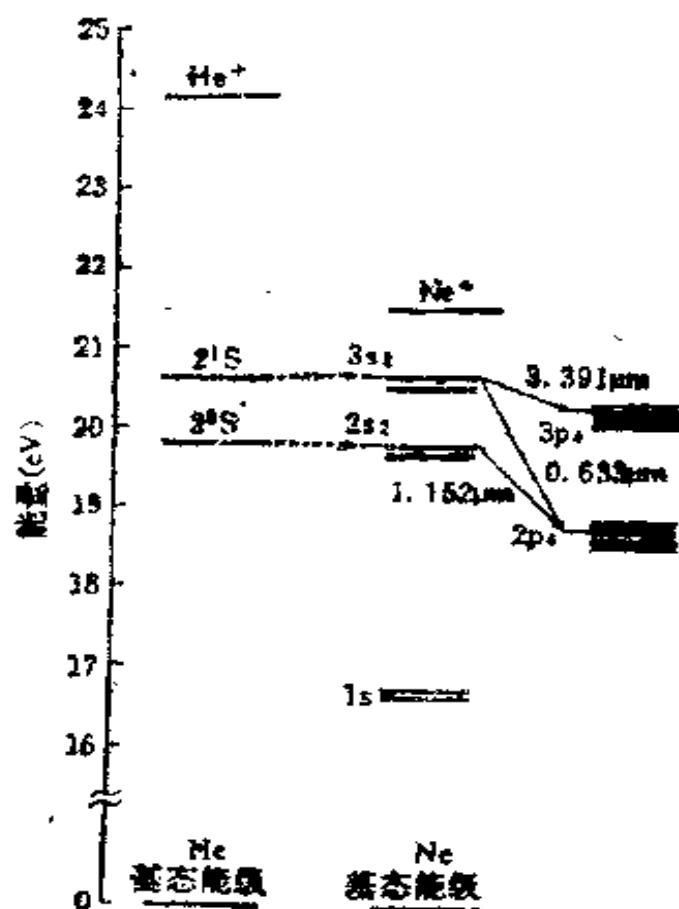


图1.2 He-Ne激光器的能级图<sup>(2)</sup>

表1.1 He-Ne激光器

波长 (μm)	跃迁 (帕邢符号)	长度 (cm)	直径 (mm)	输出功率 (mW)
0.6328	$3s_1 \rightarrow 2p_1$	15	1	1
0.6328	$3s_1 \rightarrow 2p_1$	180	3	80
1.1523	$2s_2 \rightarrow 2p_1$	100	7	20
3.3913	$3s_2 \rightarrow 3p_1$	100	3	10

(2)  $^1S$ 表示总电子自旋磁量子数S=0和轨道角动量L=0时的单态，而 $^3S$ 表示在S=1和L=0时的三重态。用P, D, F…分别表示L=1, 2, 3…时的态(1.6)。

已知纯Ne原子有很多激光谱线，它们一直延伸到远红外。用放电激励He, Ar, Kr和Xe气体时，也发现了许多激光谱线，但是除用于光谱研究外，它们并无多大实用价值。

通常所指的氩激光器，并不使用中性氩原子，而是使用氩离子的离子激光器。当几十安培强的放电电流通过充有氩气的密封激光管时，能获得例如514.5nm和488nm等20条以上的从绿色到紫外的氩离子激光谱线<sup>(3)</sup>。其中较强谱线的输出功率超过10W，即使较弱谱线也有约100mW。类似的Kr离子激光器，产生从647.1nm(红色)到紫色大约20条激光谱线。市场上很多离子激光器的输出功率在1~10W之间，离子激光器可用来激励染料激光器(后面讨论)。上述小型离子激光器在各种光谱仪以及医学应用中作光源使用。

金属原子(如汞)高温加热或空心阴极放电产生的金属离子也能产生激光，这类激光器称做金属蒸气激光器。尽管它们在可见和近紫外区域的效率高，但由于维持金属蒸气和长时间放电的困难，因此大多数金属离子激光器仍然处在发展阶段。从某种程度上来说，由Cd<sup>+</sup>产生的441.6nm和325nm连续辐射的He-Cd激光器已经实用。已知还有Hg<sup>+</sup>, Se<sup>+</sup>, Zn<sup>+</sup>, Sn<sup>+</sup>, Cu<sup>+</sup>, Ag<sup>+</sup>, Au<sup>+</sup>, In<sup>+</sup>, Pb<sup>+</sup>, Ge<sup>+</sup>, Al<sup>+</sup>, Tb<sup>+</sup>等金属离子激光器。中性金属原子激光器中，Pb、Mn、Cu等原子激光器的峰值输出功率可达1kW或更高，但是Pb的加热温度必须超过800℃，而Mn、Cu的加热温度必须超过1400℃。Cu原子激光器能在1~10kHz或更高重复频率下运转，其平均功率可达10~100W，效率为1%，由于具有黄色(578.2nm)和绿色(510.6nm)的谱线，因而有着广泛的用途。一种能在放电中分解出一些氯化物的Cu原子蒸气激光器，可以在低于500℃温度下工作，但它的输出功率和寿命都稍有下降。

(3) 中性原子Ar、Ar<sup>+</sup>离子、Ar<sup>2+</sup>离子用光谱符号分别表示为Ar I、Ar II、Ar III。

激光可以从大多数非金属元素获得。当一种合适的气体分子被分解时，在激发态上的原子就可从该激发态上产生激光发射。因此，O、Br、I、Cl、F、C、N、S、As等原子激光器都能实现。这些激光器中，苏联和西德利用分解CH<sub>4</sub>、I或C<sub>2</sub>F、I研制出1.31μm的I原子激光器，其峰值功率超过100GW，已用在核聚变研究中<sup>[1]~[3]</sup>。

自然界存在的91种元素中，只有少数元素不能用它们的气态原子产生激光，除Li、Ga外，还有Fe、Ni、Ti、W等元素，它们的沸点约2500℃，以及Po、At、Rn等放射性元素，我们只能得到极少量的这类元素的纯气体。因此可以得出结论，激光决不限于由一些特殊的元素产生，原则上讲，各种元素都可以产生激光。

### 1.3.2 分子激光器

多原子分子不同于原子(单原子分子)，它具有很多转动和振动能级，所以分子光谱几乎由数不清的谱线组成。很多气体分子都可以作为激光介质，但主要还是用那些较轻、较小的分子。在各种分子激光器中，我们只讨论某些典型的分子激光器。

N<sub>2</sub>激光器称为紫外激光器，它由短脉冲放电激发并发射337nm谱线，此外，它还具有从紫外0.31μm到红外8.2μm范围内的约400条谱线。通常，对于337nm谱线，其脉宽为几纳秒。小型激光器的峰值功率约100kW，而大型激光器则超过10MW。相比之下在316nm和358nm，可获得稍微小些的功率。激励N<sub>2</sub>激光器需要30~40kV的高压功率源。由于N<sub>2</sub>的能级特性，这种激光器不可能连续运转。

H<sub>2</sub>激光器和N<sub>2</sub>激光器一样，也用脉冲放电激发，它发射110~162nm的远紫外光。自1970年以来，这种激光器是波长最短的激光器，由于峰值功率只有10~100W，所以实用价值不大。

二氧化碳激光器可以在红外 $10\mu\text{m}$ 产生高效率的连续波输出，它是最有实用价值的分子激光器。已研制出了不同结构、不同激发方法以及容量不等的CO<sub>2</sub>激光器。包括那些同位素分子(如<sup>13</sup>CO<sub>2</sub>等)在内，CO<sub>2</sub>分子的激光谱线的总数将近1000条，但主要的支线在 $9\sim11\mu\text{m}$ 之间。通常获得单支线振荡的方法，是用一个带衍射光栅的激光谐振腔。如果只用反射镜，则在 $10.6\mu\text{m}$ 附近的几条谱线会同时振荡。即使一个小型CO<sub>2</sub>激光器也有1W左右的输出功率，而一台大型CO<sub>2</sub>激光器的输出功率则超过10kW。很多应用例如材料的处理与加热，都使用了CO<sub>2</sub>激光器。

因为CO<sub>2</sub>是三原子线性分子，所以它有三个振动模 $\nu_1$ 、 $\nu_2$ 、 $\nu_3$ ，如图1.3所示。 $\nu_1$ 称为伸张振动(伸长或压缩)， $\nu_2$ 是双简并弯曲振动， $\nu_3$ 是非对称伸张振动。

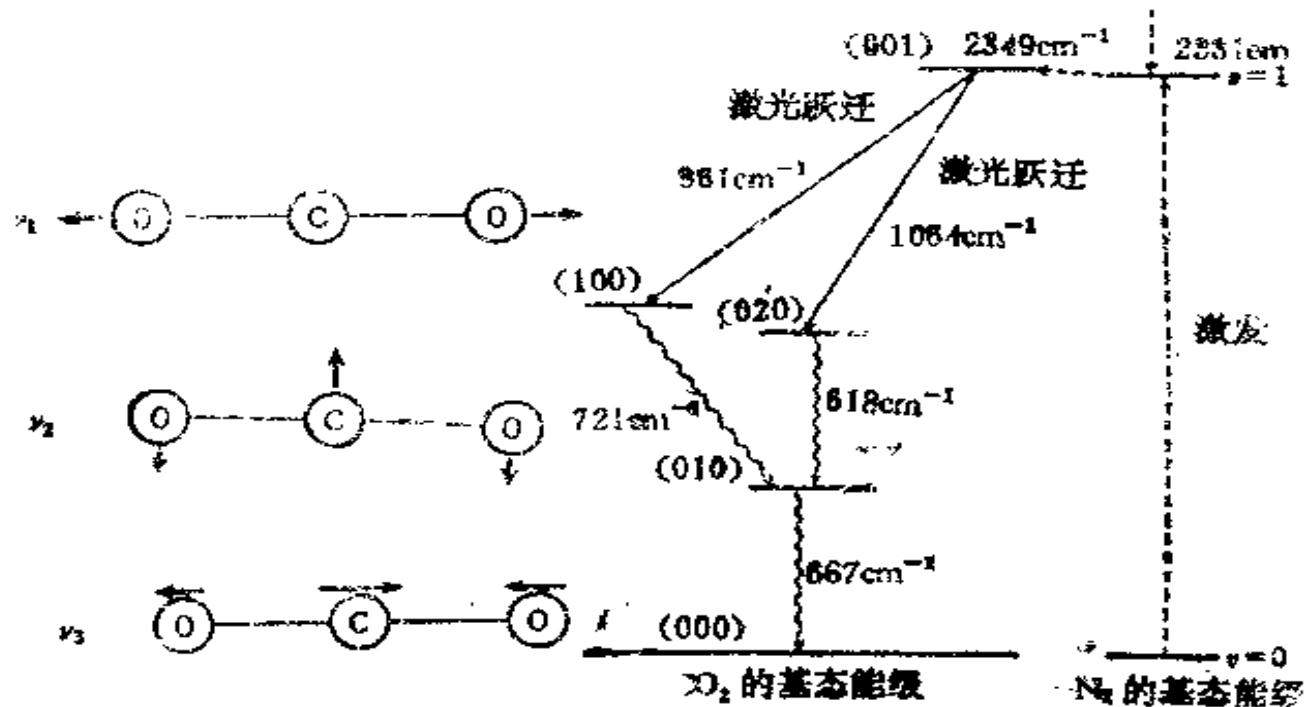


图1.3 CO<sub>2</sub>的三个振动模

图1.4 CO<sub>2</sub>的能级图

我们用 $\nu_1$ 、 $\nu_2$ 、 $\nu_3$ 分别表示各个振动模的量子数，而用( $\nu_1$

$\nu_1$ ,  $\nu_3$ )表示振动态。 $\text{CO}_2$ 激光器的基本振动态(000)和有关能级示于图1.4中。图中能量和跃迁频率用波数( $\text{cm}^{-1}$ )表示，它是光谱学中通常使用的单位。用 $\tilde{\nu}$ 表示波数时，频率大约是 $\nu \times 30\text{GHz}$ ，能量为 $\nu \times 1.9864 \times 10^{-23}\text{J}$ 。虽然用纯 $\text{CO}_2$ 也能得到激光辐射，但通常 $\text{CO}_2$ 激光器所使用的是 $\text{He}$ 、 $\text{N}_2$ 、 $\text{CO}_2$ 混合气体。 $\text{N}_2$ 的受激振动态是亚稳态，它的能量很接近 $\text{CO}_2$ 的 $\nu_3$ 振动态，于是产生共振能量转移使激发得到增强。因为分子振动能级之间几乎是等距的，所以 $\text{N}_2$ 和 $\text{CO}_2$ 较高激发振动能级实际上对 $\text{CO}_2$ 激光振荡也有贡献。可以认为介质中 $\text{He}$ 的作用是为了稳定放电和减少激光跃迁下能级(100)和(020)的粒子数。

如图1.4所示，对于(001) $\rightarrow$ (100)的 $10.4\mu\text{m}$ 带跃迁，用波数表示为 $961\text{cm}^{-1}$ ；对于(001) $\rightarrow$ (020)的 $9.4\mu\text{m}$ 带跃迁，用波数表示为 $1064\text{cm}^{-1}$ 。若转动量子数用 $J$ 表示，则P带的 $P(J)$ 谱线相当于 $J-1 \rightarrow J$ 跃迁而R带的 $R(J)$ 谱线相当于 $J+1 \rightarrow J$ 跃迁。由于 $\text{CO}_2$ 分子的对称性，激光跃迁发生在转动量子数为偶数的较低能级上，结果使每一个带的激光谱线数在30条以上。

标准的连续波 $\text{CO}_2$ 激光器用直流激励，总气压为 $10^2 \sim 10^3\text{Pa}$  ( $1\text{Pa} = 7.5\text{mTorr}$ )。当压强上升到 $10^4 \sim 10^5\text{Pa}$ 而接近大气压强时，让脉冲放电通过沿着管轴排列并垂直于管轴的一些短间隙，从而可得到 $10 \sim 100\text{MW}$ 以上的峰值功率。这种激光器称做横向激励大气压激光器，缩写为TEA激光器。一些TEA激光器使用探针电极，另外一些则使用棒状或平面电极。主放电用预放电或电子束触发控制。

虽然 $\text{N}_2\text{O}$ 和 $\text{CO}$ 激光器比 $\text{CO}_2$ 激光器的输出功率低，但它们分别在 $10 \sim 11\mu\text{m}$ 和 $5 \sim 6.5\mu\text{m}$ 各自有近100条激光谱线(只考虑主要同位素，即 $^{14}\text{N}_2$ ,  $^{16}\text{O}$ 和 $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ )。最近已研制出高输出功率的 $\text{CO}$ 激光器，它的效率与 $\text{CO}_2$ 激光器相近，达到 $10\% \sim 30\%$ 。除了这

些多原子分子外， $\text{NH}_3$ 、 $\text{OCS}$ 、 $\text{CS}_2$ 等分子在红外也有不少的激光谱线。此外，用 $\text{SO}_2$ 、 $\text{HCN}$ 、 $\text{DCN}$ 、 $\text{H}_2\text{O}$ 、 $\text{D}_2\text{O}$ 等分子，在远红外的 $30\mu\text{m}$ 到亚毫米波长也获得了很多激光谱线。

如果利用 $\text{CO}_2$ 激光器的输出对 $\text{CH}_3\text{F}$ 、 $\text{CH}_3\text{OH}$ 、 $\text{HCOOH}$ 等分子在其共振吸收波长上进行光激发，这些分子则在远红外产生激光发射。这类激光器称为光泵远红外激光器。目前象这样的激光谱线已超过1000条，其中大多数谱线只能以脉冲方式输出中等功率，但也有一些以相当高的效率提供高峰值输出功率。如果采用连续激发，它们当中也有不少可以连续运转。这些激光器用于远红外的研究，在此之前该波段一直没有合适的光源可用。

最近研制出的准分子激光器，是一种工作在短波长区域的高效率、高输出功率的激光器<sup>[11-13]</sup>。虽然一个准分子在基态不稳定，但是在电子激发态上双原子分子却是稳定的。 $\text{Xe}_2$ 激光器的能级与原子间距的函数关系，如图1.5所示，该激光器在1970年首次得到 $173\text{nm}$ 波长的激光发射。图中 $X$ 表示电子基态， $\Sigma$ 表示双原子分子沿着分子轴方向总电子角动量为零的电子态，下标 $g$ 表示当相对于分子中心的坐标反向时的轨道波函数不变，下标 $u$ 表示由于反向符号改变，右上标 $\pm$ 表示相对于含分子轴平面的镜反射对称性。

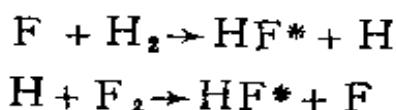
图1.5  $\text{Xe}_2$  的能级图

其它的稀有气体准分子激光器也有类似的能级。准分子激光器可以用电子束或放电激发。在脉冲激发的条

件下，Kr<sub>2</sub>或Ar<sub>2</sub>可在真空紫外的146nm或126nm处得到10~100MW的峰值功率。

其次，已研制出具有更好性能的稀有气体卤化物准分子激光器。由不同原子组成的准分子，例如XeCl、KrF、ArF，称为异质准分子或复合受激态。1975年以来，研究并研制出分别在308nm、249nm和193nm处运转的异质脉冲准分子激光器，它们发射持续时间为几纳秒的脉冲，峰值功率至少10MW，较大型的异质准分子激光器，则高于1GW。准分子激光器正有效地用于光化学研究。此外，使用准分子激光的约束核聚变研究也取得了进展。

典型的化学激光器是HF激光器，它在波长约2.7μm处有高的输出功率。它利用H<sub>2</sub>和F<sub>2</sub>之间的化学反应在受激振动态上形成的HF分子产生激光。实际上，为了控制反应，我们用SF<sub>6</sub>代替F<sub>2</sub>或加入少量的O<sub>2</sub>，并用脉冲放电或电子束照射引发反应。当一个F原子被释放出来时发生如下放热反应



在受激振动态（\*表示一个受激态）上产生大量的HF分子，而在基态上几乎没有分子形成。因此激光辐射主要在ν=3→2, 2→1和1→0跃迁上产生。化学反应是以声速的量级传播的，所以激光脉冲的持续时间为微秒量级，每个脉冲输出能量的范围从1J到1kJ以上。DF和HBr化学激光器发射的波长比HF长，但它的输出功率较低。

#### §1.4 染料激光器

用光泵浦被酒精、环乙烷、甲苯等稀释的有机染料，可以得到激光，这种激光器称做染料激光器<sup>[1~9]</sup>。由于染料的荧光光谱

宽达 $100\sim200\text{cm}^{-1}$ ，所以用衍射光栅或棱镜能较易地调谐激光波长。光聚蒲的光源可用闪光灯，Ar、Kr离子激光器，N<sub>2</sub>激光器，KrF激光器，Cu激光器或固体激光器的较高次谐波。1966年脉冲染料激光器研制成功以来，已用500种以上的不同染料制成了各种染料激光器<sup>[1~10]</sup>，其中只有一些染料可以连续波运转。实际上，大约10种不同的染料就足以在可见区域获得任何波长的激光输出。图1.6给出了用N<sub>2</sub>激光器泵浦几种染料的例子。

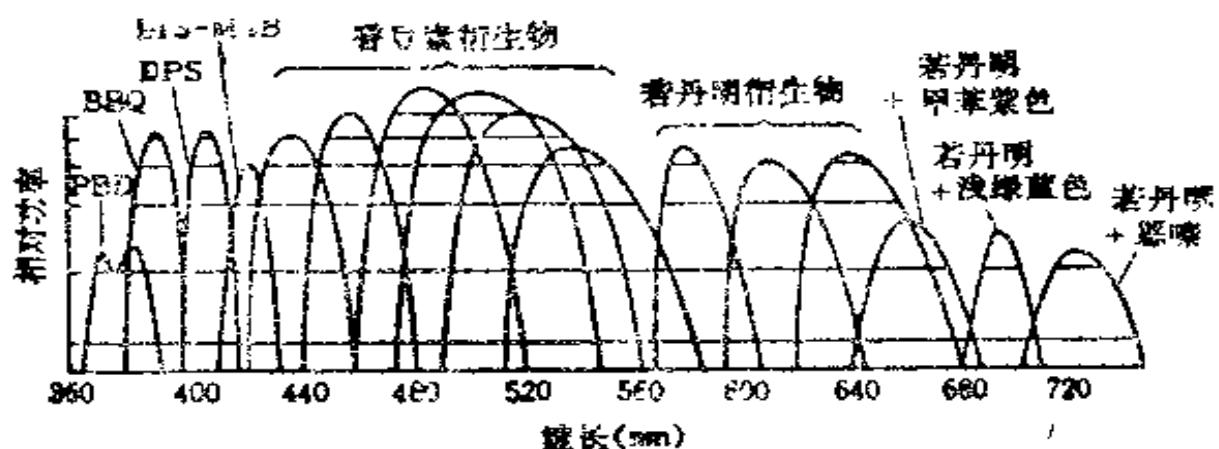


图1.6 N<sub>2</sub>激光器激发的染料激光器的波长和输出功率

染料激光器的效率比较高，但是泵浦光会引起染料发热而使激光作用减弱。因此，为了得到连续波运转，染料溶液必须循环冷却。通常还采用条状喷流来取代染料池以消除后者窗的光学损耗。由此可以得到超过1W的连续波输出，但一般是10~100mW。它的脉冲峰值功率高于1kW，并能放大到100MW以上。此外还可以用锁模激光器的脉冲序列去激发染料激光器(9.4节)，使之产生持续时间极短的同步脉冲，最短脉冲比0.1ps小得多<sup>[1~2]</sup>。

由于染料激光器的介质是液体，使用不方便，因此它的应用受到一定限制。由于染料激光器在可见光波段是最方便的可调谐激光器，所以它也用于光谱学研究和光谱分析。

## §1.5 半导体激光器

半导体激光器可以在光或电子束激励下工作，它的特殊之处是电流通过 $p-n$ 结可以激励发射激光。与其它激光器相比，它的尺寸特别小。虽然1957年就已提出了半导体激光器，但是直到1962年才首次在低温下获得脉冲发射。由于1970年成功地实现了室温下连续工作，因而它作为光纤通讯的光源得到了迅速发展<sup>[1\*11]</sup>。

晶体的能级分别处在禁带上面的导带或下面的价带中，在半导体导带中只有少数电子，而价带几乎被电子占满。由于电流载流子(电子和空穴)很少，这就造成了电子传导的困难。在含有某种杂质的 $n$ 型半导体中，大量电子从杂质能级被激发到导带，在 $p$ 型半导体中，其价带上的电子则被激发到杂质能级上，结果产生大量的空穴。这两种情况都能很好地实现电子传导。

所谓 $p-n$ 结是由单晶体半导体内的 $p$ 区和 $n$ 区构成的<sup>[1\*2]</sup>。当 $p$ 区相对于 $n$ 区加负偏置时，只有很小的电流流过；反之假如 $p$ 区为正偏置，则电流很容易流过。在这种情况下， $p$ 区的空穴将注入 $n$ 区， $n$ 区的电子则注入 $p$ 区。当一个电子与一个空穴相碰时，它们便结合在一起，并发射一个能量几乎等于带隙能量的光子。发光二极管(LED)就是基于这种原理制成的一种极小光源。一个电子和一个空穴复合并发射一个光子(不发射声子)的现象称为直接跃迁。为了动量平衡，同时发射一个光子和一个声子的现象则称为间接跃迁。

简单半导体激光器的结构如图1.7所示。直接跃迁半导体的两块平行表面<sup>(4)</sup>垂直于 $p-n$ 结的平面，其正电位接 $p$ 型半导体的电

(4)通常用解理面。

极，负电位接n型半导体的电极。举例来说，假如在室温下有几十千安/厘米<sup>2</sup>电流，或者在液氮温度下有稍超过1kA/cm<sup>2</sup>的电流流过GaAs的p-n结，就会得到波长约0.85μm的激光振荡。由于光从一块边长约2~20μm的小面积发射出来，所以半导体激光器的输出方向性较差，其张角约为5°~30°。图1.8示出了发射光强与结电流的函数关系。可以看出，当结电流超过 $I_{th}$ 时，光强迅速增加，而低于 $I_{th}$ 时，光强则相当低。电流 $I_{th}$ 是激光振荡的起始电流，称为阈值电流。当电流低于阈值时，发射光的方向性差，且光谱宽度宽，这与发光二极管颇为类似。反之，假如超过阈值，激光就具有较窄的光谱宽度和较好的方向性。

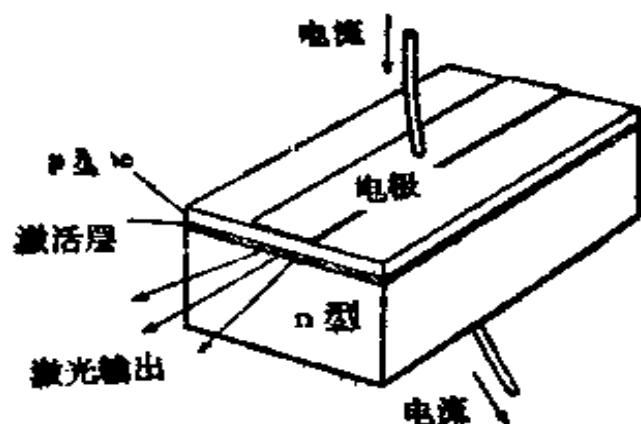


图1.7 简单的半导体激光器

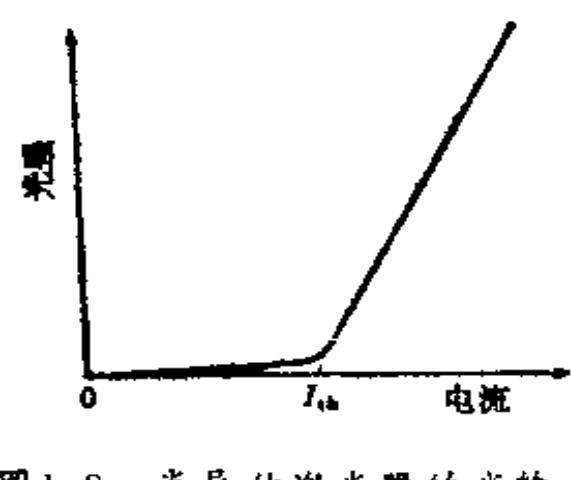


图1.8 半导体激光器的光输出与激发电流的关系

因为在Si和Ge中不发生直接跃迁，所以不能从它们之中得到激光，但如果用InP、InAs和InSb则分别能在波长为0.91μm，3.1μm和5.2μm处产生激光。激光的波长随温度或电流稍有变化。在某些情况下，利用外部磁场和压强可以改变波长值的百分之几十。假设p-n结由混合晶体构成，例如由两种不同材料InAs和GaAs构成的 $In_xGa_{1-x}As$ ，它的发射波长在0.9~3.1μm之间

变化，并取决于混合比 $x$ 。图1.9示出了各种三元半导体的波长区域。

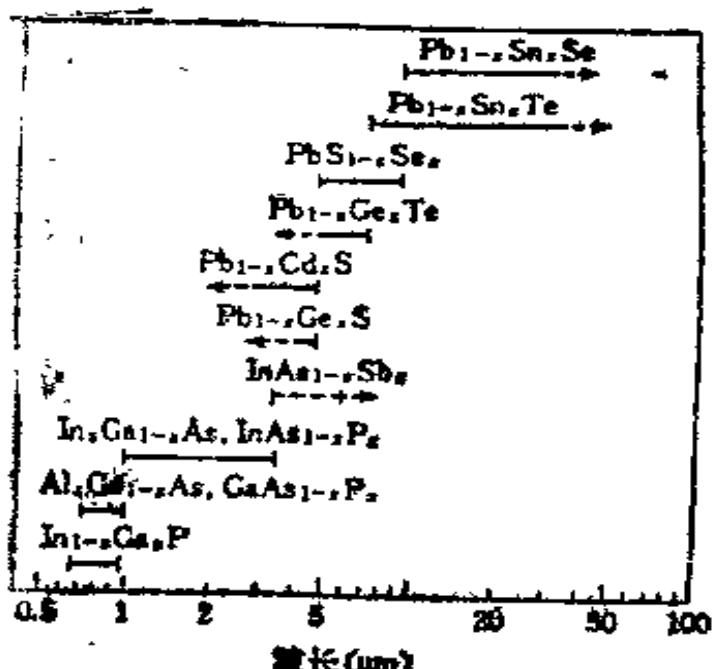


图1.9 各种三元半导体激光器的输出波长区域

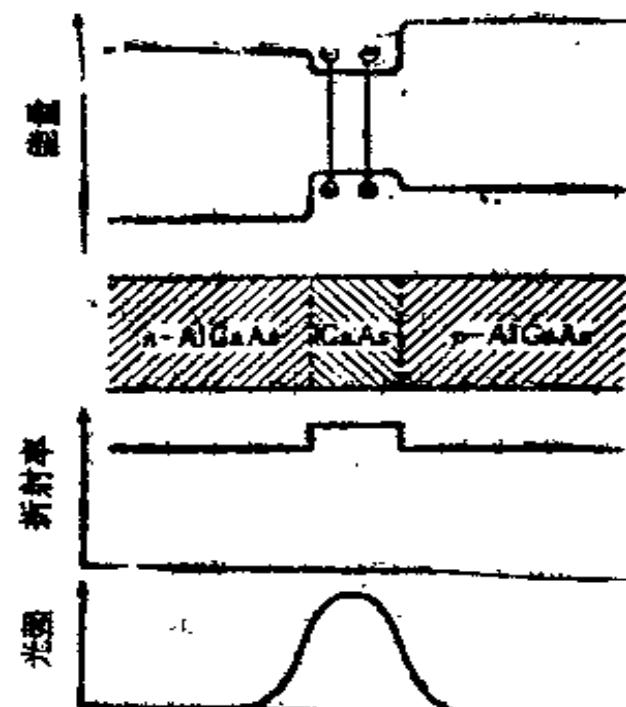


图1.10 DH结构激光器的能量级、折射率和光强分布

早期半导体激光器的 $p-n$ 结由单一材料构成，称为同质结，但新的 $p-n$ 结则由两种不同的半导体构成，称为异质结。在此，我们比较一下GaAs和 $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ (以下简写为AlGaAs)，发现AlGaAs的带隙能量比GaAs高，而折射率则比GaAs低。因此，由GaAs和AlGaAs构成的异质结，光集中在折射率较高的GaAs内(3.6节)。此外，因为GaAs的带隙较窄，电子和空穴载流子也都集中在GaAs内。于是，假如我们在GaAs薄激活层两边分别制作一个 $p$ 型AlGaAs和 $n$ 型AlGaAs的异质结(如图1.10所示)，那么光和载流子就被限制在激活层周围。这种器件不但

光和载流子之间存在强相互作用，而且也降低了两者不必要的损耗，因而激光器的振荡阈值明显降低，这种p-n结称为双异质结，或双异质结构(缩写为DH结构)。鉴于DH结构GaAs-AlGaAs激光器的阈值电流密度即使在室温下也低于 $1\text{kA}/\text{cm}^2$ ，因此适当冷却就能获得连续运转。

应该使DH结构内两种半导体晶体的晶格常数尽可能匹配。此外，由于晶格缺陷，载流子的寿命变短，引起阈值电流上升，激光功率迅速降低。对于 $1.2\sim1.7\mu\text{m}$ 波长的DH结构激光器，用三元化合物不可能使晶格常数匹配，因此使用了四元化合物 $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ 。改变x或y可以改变波长，但是为了与基质(一般是InP)晶格常数匹配，而不改变x、y。具有平面结构的DH结构激光器中(如图1.7所示)，在垂直于结平面方向上，光集中在激活层附近，而在横向光则被大大展宽，即使只有很小的电流变化，它的强度分布也会改变。图1.7中为了让激光在中心发射，我们把上电极宽度做窄(称为条状结构)，但这还不足以阻止激光发射区域的横向扩展，因此设计了很多不同结构的半导体激光器以限制激活区域，不但厚度减薄，而且横向宽度也小。作为这种结构的举例，图1.11示出了埋置双异

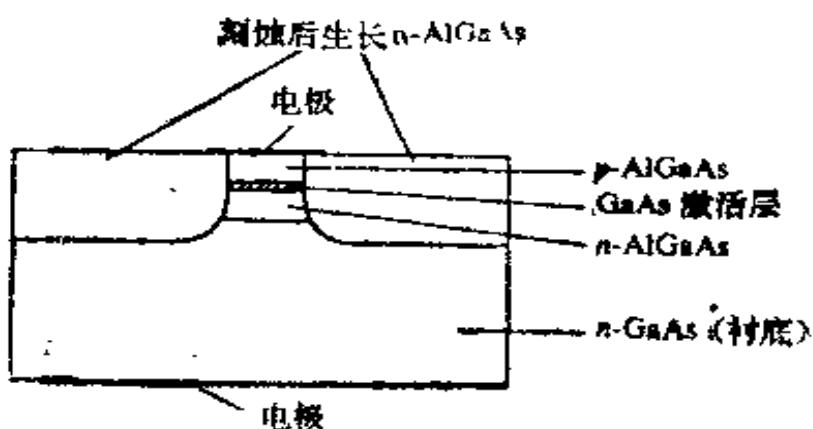


图1.11 埋置双异质激光器的横截面

质结构的横截面。在制作带有GaAs激活层的AlGaAs DH结构后，只有镀有几微米宽的掩膜中心部分保留下来，其余的则用刻蚀除去。然后，在刻蚀部分上再生长一层n型AlGaAs晶体。用这种方法可以使激活层在所有边上都被AlGaAs包围（上、下、左、右）。并且，由于注入载流子也被限制在中心部分，所以双异质结激光辐射的模式与矩形横截面波导的微波模式类似。

半导体激光器一般长 $100\sim 500\mu m$ ，条宽 $2\sim 20\mu m$ ，激活层厚 $0.1\sim 2\mu m$ ，输出连续波功率 $1\sim 100mW$ ，在波长大于 $3\mu m$ 时，输出功率要小些。如果脉冲运转，则能获得 $1\sim 10W$ 或更高的峰值功率，其脉宽为皮秒量级。

## §1.6 其它激光器和激光物理

虽然某些激光器（如上所述）所用材料相同，但它们的激发方法却完全不同，这里我们不去详细叙述，而只列出其中几种，如大电流通过金属丝的闪光激发，冲击波或喷气的气动激发以及等离子体激发等。

不同结构重要的激光器有环形激光器，波导型气体激光器，布拉格衍射或分布反馈半导体激光器和染料激光器。目前在气体激光器和固体激光器中使用了多种类型的谐振腔，例如用于改善频率响应和模式特性的复合谐振腔，以及能够获得不同输出特性的非稳谐振腔等。

最后，我们还必须提到在原理上不同于已介绍过的那些激光器，例如喇曼激光器和自由电子激光器。喇曼激光器是利用强激光入射到气体、液体或固体物质上产生受激喇曼效应制成的。喇曼激光器的频率相对于入射光频率的偏移应等于材料的共振频率。

光参量振荡器与喇曼激光器类似。如果频率为 $\nu_0$ 的激光入射到非线性光学晶体上，则频率 $\nu_0$ 将被分成为闲置频率 $\nu_+$ 和信号

频率 $\nu_r$ ，即有 $\nu_r = \nu_1 + \nu_2$ 。使用一个合适的谐振腔，它就可以作为频率为 $\nu_r$ 的振荡器或放大器。

在自由电子激光器中，高速电子束通过空间调制磁场或高电场后被调制，因此它发射相干光。自由电子激光器具有引人注目的特性，宽范围可调谐，预期的高效率以及大的输出功率，它的理论和实验的研究正在迅速发展。因为光参量振荡器和自由电子激光器没有利用量子谐振，所以有的观点认为，按其本义它们不能算作激光器。但是，由于发射光是相干的，以及具有与激光器共同的特性，所以又可以把它们看成是一种激光器。

以后几章将描述相干光物理学和激光特性。在激光物理中还存在很多新现象和实际问题，但不论如何，强相干光和原子之间的相互作用是激光物理的基本过程。根据本书的论述，理解以下问题应该是可能的：模式控制动力学，塞曼极化，非稳振荡，激光器其它的非常特性以及非线性光学效应和它的实际应用。

在9.6节中，我们给出了激光全量子力学理论的梗概，从某种意义上来说，它是激光物理最基本的理论。虽然我们忽略了象光学谐波振荡、受激散射和光自聚焦这样一些典型的非线性光学效应，但是从第七到第九章对半经典处理的直接延伸描述，上述问题应该是不难理解的。近几年激光物理研究中值得注意的问题包括：激光振荡中的各种非稳定性，光学双稳态及其应用，超辐射，多光子过程以及物质的高阶光学效应。

## 习 题

1.1 本章所提到的哪些固体激光器能在可见光区域工作？

1.2 试尽可能多地找出能够在可见光区域产生连续波功率大于1W的激光器。

1.3 在如下波长区域，哪种激光器有最高的峰值功率？

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| (a) $100 \sim 1000 \mu\text{m}$ | (d) $0.5 \sim 2 \mu\text{m}$   |
| (b) $10 \sim 100 \mu\text{m}$   | (e) $0.1 \sim 0.5 \mu\text{m}$ |
| (c) $2 \sim 10 \mu\text{m}$     |                                |

1.4 试计算横截面为 $0.1 \mu\text{m} \times 2.0 \mu\text{m}$ 的 $10 \text{ mW}$ 半导体激光器的平均功率密度，并把该值同峰值功率为 $1 \text{ MW}$ 、直径为 $6 \text{ mm}$ 的脉冲YAG激光器比较。

1.5 哪些半导体能用于在可见光波长工作的激光二极管中？

(提示：见图1.9)

1.6 试计算 $\text{Cr}^{3+}$ 浓度为 $0.02\%$ 的红宝石(发射波长为 $694 \text{ nm}$ )的最大储能密度。红宝石密度为 $4 \text{ g/cm}^3$ 。

## 第二章 光的相干性

从很多实验可以观察到光的干涉和衍射现象。用单色光谱光源来观察干涉和衍射，必须使用暗室，而用激光白天在普通室内就能观察到。干涉和衍射现象是由光的波动特性引起的，这些特性将在本章讨论。

### §2.1 杨氏实验

1801年T. Young首先进行了观察光波动特性最典型的实验，称做杨氏实验。

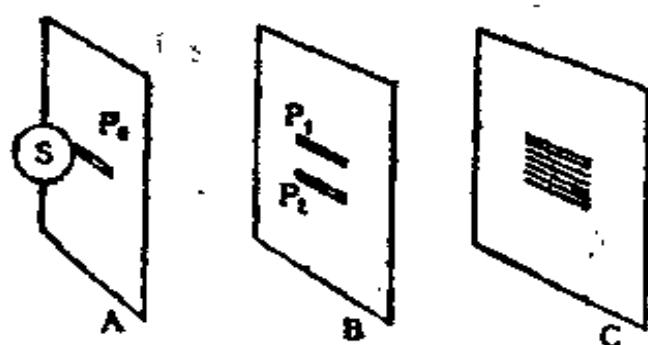


图2.1 杨氏实验

如图2.1所示，窄狭缝 $P_0$ 置于光源S附近。当衍射光通过狭缝 $P_0$ 并穿过挡板B上的两个狭缝 $P_1$ 和 $P_2$ 后，在右边屏C上形成很细的干涉条纹，这些条纹间距的解释如下。

如图2.2所示， $x$ 轴的取向从狭缝 $P_0$ 到屏，屏和狭缝垂直于 $x$ 轴。把第一个狭缝 $P_0$ 取在 $x$ 轴上，并使两个狭缝 $P_1$ 和 $P_2$ ( $x = l_0$ ,  $y = \pm a$ 处)与 $z$ 轴平行。现在我们来研究从 $P_0$ 出射的光通过 $P_1$ 和 $P_2$ 到达位于 $x = l_0 + l$

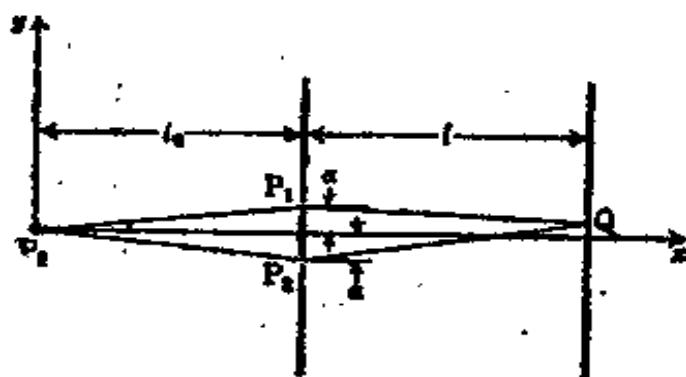


图2.2 杨氏实验中的两光路

处屏上 $Q(l_0 + l, y)$ 点的干涉。从 $P_0$ 通过 $P_1$ 到达 $Q$ 的光程为

$$s_1 = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 Q} = \sqrt{l_0^2 + a^2} + \sqrt{l^2 + (y - a)^2}$$

从 $P_0$ 通过 $P_2$ 到达 $Q$ 的光程则是

$$s_2 = \overline{P_0 P_2} + \overline{P_2 Q} = \sqrt{l_0^2 + a^2} + \sqrt{l^2 + (y + a)^2}$$

两光程差为

$$s_2 - s_1 = \sqrt{l^2 + (y + a)^2} - \sqrt{l^2 + (y - a)^2}$$

若屏足够远，使得 $l \gg a, l \gg y$ ，则上式可近似写成

$$s_2 - s_1 = \frac{2ay}{l} \quad (2.1)$$

如果用 $A_1$ 和 $A_2$ 分别表示光从 $P_1$ 和 $P_2$ 到达 $Q$ 点的振幅，用 $\omega$ 表示圆频率<sup>(1)</sup>，则两个光波振幅的叠加可以表示为

$$A_1 \cos(\omega t - ks_1) + A_2 \cos(\omega t - ks_2)$$

式中 $t = 0$ 时刻取 $P_0$ 的相位等于零，波数<sup>(2)</sup>由下式给出

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.2)$$

式中 $c$ 是光速， $\lambda$ 为波长。

因为 $Q$ 点的光强 $I$ 可以表示为振幅平方的时间平均，而且 $\cos^2 \omega t$ 的时间平均等于 $1/2$ ，故有

$$I = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1 A_2 \cos k(s_2 - s_1) \quad (2.3)$$

从式(2.3)可看出，当 $k(s_2 - s_1) = 2n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时，光强最大，而 $k(s_2 - s_1) = (2n+1)\pi$ 时光强最小。换句话说，当 $s_2 - s_1 = n\lambda$ 时出现亮纹， $s_2 - s_1 = (n+1/2)\lambda$ 时出现暗纹。如果将这些条件代入式(2.1)， $n$ 级亮条纹在屏上的位置 $y$ ，则由下式给出

(1)以下圆频率简称为频率。

(2)为了与 $1/\lambda$ 表示的光谱波数区别， $k$ 称为波长常数或相位常数。

$$y_n = n \frac{l\lambda}{2a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

条纹是等距的，其值为

$$y_{n+1} - y_n = \frac{l\lambda}{2a} \quad (2.4)$$

基于实验观察的条纹间距正比于  $l$ ，反比于  $a$ ，故可以由式(2.4)计算光波长。

特别当两狭缝的宽度相等时， $A_1 = A_2$ ，屏上的光强则变为

$$I = A^2 (1 + \cos k(s_2 - s_1)) = A^2 \left(1 + \cos \frac{2kay}{l}\right) \quad (2.5)$$

在这种情况下，因为最小亮度处的光强变为零，所以我们观察到的干涉条纹明暗间的差别就最明显。

## §2.2 迈克尔逊干涉仪

迈克尔逊干涉仪(图2.3)把一平行光束分成两束，使两束光重新会合时存在光程差而产生干涉。从光源S发出的光通过一块半镀银镜后，被部分反射和透射。然后分开的两光束又被平面反射镜  $M_1$  和  $M_2$  反射。被反射的光通过半镀银镜再次被部分反射和透射后进入探测器D。如果光束在半镀银镜入射点到反射镜  $M_1$  和  $M_2$  的距离分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，则进入探测器D两光束间的光程差为

$$s_2 - s_1 = 2(l_2 - l_1) \quad (2.6)$$

现在，我们可以直接从式(2.3)看出，入射到探测器上的光强随着反射镜  $M_2$  (或  $M_1$ ) 沿光束方向的移动而按下面关系变化

$$I = (A_1^2 + A_2^2)/2 + A_1 A_2 \cos 2k(l_2 - l_1) \quad (2.7)$$

该强度以半个波长的周期变化，如图2.4所示。通常进入到探测

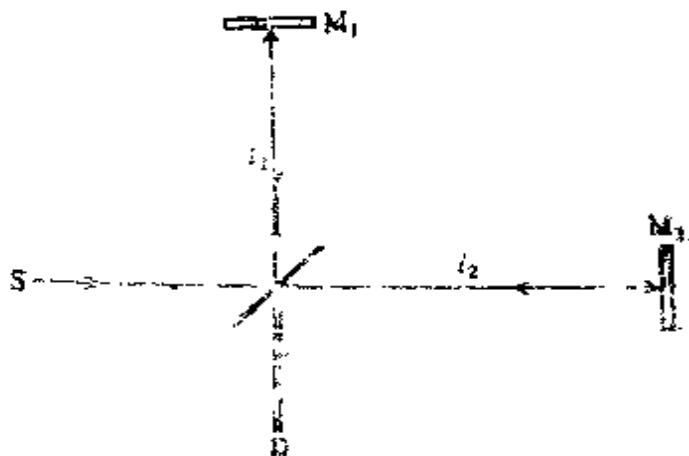


图2.3 迈克尔逊干涉仪

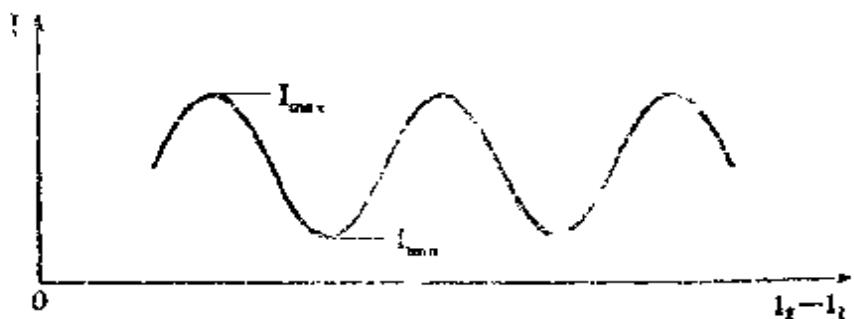


图2.4 入射到探测器D上的光强  
随镜 $M_2$ 的移动而变化

器的光束并不完全平行，有些光线稍稍倾斜于光束轴线。由于光程差随着光线倾斜于束轴而逐渐变化(3.5节)，因此在 $D$ 上可观察到同心圆的干涉花样。

假如由半镀银镜分束后重新会合的两束光的振幅 $A_1$ 和 $A_2$ 相等，则暗环的强度为零，于是得到清晰明亮的干涉图样。如果使用普通单色光源，则光程差不大时，在反射镜 $M_2$ 移动时所观察到的干涉图样很清晰。然而，当光程差增加到几厘米，干涉图样就会变得越来越不清晰，最终完全消失。对于一个特定的波长，把光程差限制在干涉图样较清晰范围内的那个长度，称为相干长度。

为了定量地表示干涉图样的清晰度，定义

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (2.8)$$

并称 $V$ 为条纹可见度，式中 $I_{\max}$ 和 $I_{\min}$ 分别是条纹最大和最小强度。

### §2.3 时间相干性和空间相干性

在迈克尔逊干涉仪中条纹可见度通常随光程差 $s_2 - s_1$ 的增加而下降，如图2.5所示。条纹可见度开始明显下降时的光程差取决于光源的质量，通常用不严格定义光程差的限制长度，而只确定其相干长度。现在我们来讨论干涉图样的条纹可见度为什么随光程差的增加而下降。

如果光波是一个无限大的连续平面波，其表示式为 $A \cos(\omega t - ks)$ ，式中假定振幅 $A$ 、频率 $\omega$ 和波数 $k = \omega/c$ 都是常数，尽管对于大的光程差，根据式(2.7)的计算，应该出现干涉条纹，但实际上干涉图样随着光程差增加而消失，原因是来自光源的入射光波并不是一个长的连续的简谐波，而是一些短周期波。另一方面，



图2.5 可见度作为光程差的函数(示意图)

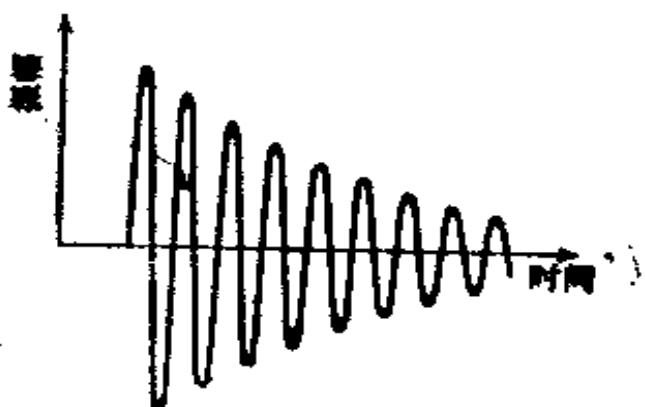


图2.6 衰减振荡的波形

光源稳定发光是因为这些短脉冲波相继出现并不停地叠加的结果。

从一个受激原子发射出的光能是不变的( $\hbar\omega$ )，相应的光波可看成是一个振幅随时间下降的衰减振荡，如图2.6所示。若用 $\tau_e$ 表示原子激发态的寿命，则在 $t$ 时刻，衰减光的强度将下降到初始的 $1/e$ ，振幅下降到 $1/\sqrt{e}$ ；在 $2\tau_e$ 时刻，振幅将下降到初始振幅的 $1/e$ 。于是从 $t=0$ 时刻开始的衰减振荡振幅 $E(t)$ 可以表示为

$$E(t) = A \exp(-t/2\tau_e) \cos(\omega t + \theta) \quad (2.9)$$

式中 $\theta$ 是 $t=0$ 时的相位。

一个光源实际有许多原子，光从这些原子中发射出来。每个独立原子什么时候，什么地点，以什么相位发射光完全是随机的。因此，由于在统计不变的发射速率下有很多原子发光，故在不同时刻发射的任意两光波，即使光强的平均值不变<sup>[2·1]</sup>，其相位基本上也是无关的。这就是为什么在迈克尔逊干涉仪中，只要被分开的两束光的光程差小于 $c\tau_e$ ，就能观察到清晰的干涉图样，而当光程差较大时，干涉图样就会消失的原因。对于后种情况，两叠加波的发射时间间隔大于 $\tau_e$ 。

当两光束产生清晰的干涉图样时，它们是相干的，完全不能产生干涉图样时是不相干的。如果两光束相干得到的条纹可见度 $V=1$ ，则它们是完全相干的，若 $V=0$ ，则它们完全不相干。因此条纹可见度 $V$ 被用来表示光的相干程度，并称为相干度。

激光具有极好的相干性，但严格说来，它并不是完全相干的，所以 $V$ 接近于1而稍小于1。即使用相干性相当差的激光，其相干长度至少也有几厘米，而相干性极好的激光，相干长度将达到1000km或更长。普通的白炽灯泡的干涉性能很差，当光程差超过几微米时，几乎完全不相干。然而也并不是绝对不相干，在光程差小于几微米时，其相干度不为零。

按照迄今所做的解释，单色光谱源(即原子光谱线)发射的光，其相干长度应该是 $c\tau_a$ 或 $2c\tau_a$ 量级。在这里 $\tau_a$ 是激发态寿命，因此它又是单个原子发射的衰减时间或每个光脉冲的持续时间。举例来说，若 $\tau_a$ 为 $1\text{ns} = 10^{-9}\text{s}$ ，则相干长度至少应该约 $30\text{cm}$ ；如果 $\tau_a$ 为 $10\text{ns} = 10^{-8}\text{s}$ ，则至少应该约 $3\text{m}$ 。然而实际光谱光的相干长度比这些数值要小得多，并不是因为寿命比较短，而是由于光源内单个原子发射的光频彼此略有差异，这是由材料均匀性的缺陷、磁场或电场的影响等造成的。就低压气体放电产生的发射线来说，主要原因是气体原子热运动引起多普勒效应。

当光源内原子发射的频率不同且分布在某一频率范围内时，各个原子发射的光所形成的干涉条纹，其间距不均匀，同时在条纹内产生相应的位移。因此，光源内所有原子发射的光所形成的干涉图样，其条纹可见度将下降。如果每个原子发射的光的频率与系综平均差为 $\Delta\omega$ ，则在 $t$ 时刻光的相位实际是随机的（这里 $\Delta\omega t > 2\pi$ ）。所以，即使衰减时间 $\tau$ 长，其相干性也差，仅持续约 $2\pi/\Delta\omega$ 的时间。这样，每单个原子所发射的光的相干时间约为该原子受激态的寿命，光谱线的相干时间较短，约为光谱线宽的倒数。

下面我们讨论空间相干性。在杨氏实验中，来自空间两个不同的光因干涉在屏上产生干涉图样，当空间不同的两点发出的光干涉而形成清晰的干涉图样时，我们说在那里存在着空间相干性。

假设杨氏实验(图2.1)中狭缝 $P_0$ 的宽度增大，则屏上干涉图样的可见度下降，这是为什么呢？如果狭缝 $P_0$ 的宽度较宽， $P_0$ 处实际上不存在衍射，并且从光源发出的光以直线到达挡板 $B$ ，因此到达 $P_1$ 和 $P_2$ 点的光来自光源不同的两点。由于光源中不同点由不同的原子发光，因而它们不会产生干涉。从这样宽的光源中不同点所发射的光波并不相干。因此，随着狭缝 $P_0$ 加宽，空间相

干性下降。

现在，如果使用一台激光器，即使把狭缝 $P_0$ 的宽度加宽到实际上完全不存在狭缝的程度，我们仍然可以得到高清晰的干涉图样。由于激光不但有高的时间相干性，而且也有很高的空间相干性，因此来自激光器上任意两个点的光都能产生明显的干涉。此外，还可以证明，如果使用适当的反射镜把从激光器两端反方向发射的两束激光叠加起来，也会出现清晰的干涉图样。

传播方向上的空间相干性，原则上由时间相干性确定。对于理想的平行平面光波，或由小孔衍射发散的球面波，在传播方向(纵向)上的空间相干长度等于光速 $c$ 乘上时间相干性的持续时间。如果光线的方向不完全一致，或者对于不同传播方向的合成光线，则空间相干性较低。对于普通光源，可以认为时间相干性和空间相干性之间的横向相关性极小，通常需要把时间相干性和空间相干性区别开来。

## §2.4 光场的复表示

考虑一任意光电场，它不是由纯谐波，而是由频率多少不同的各个分量组成。用复傅里叶积分来表示随时间变化的这种光电场

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.10)$$

式中 $f(\omega)$ 是频率 $\omega$ 的复傅里叶分量，并由傅里叶变换得出

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.11)$$

因为实际的电场是实量，所以 $E(t)$ 也必须是实量，用星号(\*)表示复共轭，则应满足条件

$$f(-\omega) = f^*(\omega) \quad (2.12)$$

若已知正频率分量，则负频率分量可由式(2.12)单值确定。

按点光场 $E(t)$ 的解析表达式，仅由正频率分量构成的复振幅 $A(t)$ ，在1946年由盖伯(D.Gabor)<sup>[2\*2]</sup>定义为以下形式

$$A(t) = 2 \int_0^\infty f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.13)$$

于是，实际振幅可用上述复振幅表示为

$$E(t) = \operatorname{Re} \{ A(t) \} \quad (2.14)$$

式(2.13)的虚部和它的实部式(2.14)互为希耳伯特(Hilbert)变换，可表示为

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ A(t) \} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(t')}{t' - t} dt' \\ E(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \{ A(t') \}}{t' - t} dt' \end{aligned}$$

式中积分在 $t = t'$ 时取主值。

交流电路和光电磁场理论中，我们使用了光电场(或磁场)或无线电波的复数表示来描述几乎是理想的单色波。按照上述定义的复振幅分析，我们就可以处理随时间任意变化的电磁波和相应的非单色波。

均匀介质中的光能通常正比于电场振幅的平方，振幅的平方给出光强。然而，复振幅绝对值的平方 $A(t)A^*(t)$ 较实际光场 $E(t)$ 的平方更为合适。例如，对于频率为 $\omega$ 的光脉冲， $(E(t))^2$ 中出现一个必须要消除的 $2\omega$ 频率分量，通常用在比 $1/\omega$ 还长的时间内求平均值的方法来去掉它。如果采用这种方法，由于在上述时间范围内取平均时，脉冲包络无疑会变化，因而不能得到真实的瞬时光强。 $A(t)A^*(t)$ 只表示脉冲包络不包含光频分量，故能够表示瞬时光强。定义瞬时光强 $I(t)$ 为

$$I(t) = |A(t)|^2 = A(t)A^*(t) \quad (2.15)$$

式中振幅  $A(t)$  由式(2.13)给出。光在真空或均匀介质中传输时，式中的比例常数已取为1。但光在非均匀介质中传输时，上式应包含有由介质折射率确定的比例常数。此外还必须指出，当折射率是色散的或各向异性的，式(2.15)是近似式。

现在用复数表示法来计算进入迈克尔逊干涉仪探测器  $D$  的光强。假设由半镀银镜分开的两束光被镜  $M_1$  和  $M_2$  反射后在  $D$  上叠加时的振幅相等，由于有光程差  $s_2 - s_1$ ，被  $M_2$  反射的光束存在  $\tau = (s_2 - s_1)/c$  的时间滞后，这样进入到探测器的光强可以表示为

$$\begin{aligned} I(t) &= [A(t) + A(t + \tau)][A^*(t) + A^*(t + \tau)] \\ &= A(t)A^*(t) + A(t + \tau)A^*(t + \tau) \\ &\quad + A(t)A^*(t + \tau) + A(t + \tau)A^*(t) \end{aligned}$$

因为实验只能检验强度的时间平均值，故应对上式取时间平均。对于强度不变的光源，在  $t$  和  $t + \tau$  时刻的强度相等，因此

$$\overline{A(t)A^*(t)} = \overline{A(t + \tau)A^*(t + \tau)}$$

两项都等于  $|A|^2$ ，式中上方的横线表示对时间求平均。因为

$$\overline{A(t)A^*(t + \tau)} = (\overline{A^*(t)A(t + \tau)})^*$$

故有

$$\bar{I}(t) = 2|A|^2 + 2\operatorname{Re}\{\overline{A^*(t)A(t + \tau)}\} \quad (2.16)$$

上式右边第二项相当于自相关函数  $G(\tau)$  的实部，而

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \langle A^*(t)A(t + \tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^*(t)A(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

原因是当起伏统计不变时，用括号  $\langle \rangle$  表示的系统平均值与时间平均值相等。

如果改变 $I_2$ ，测量迈克尔逊干涉仪的干涉条纹可见度随函数 $\tau = (s_2 - s_1)/c$ 的变化，就能得到自相关函数随时间差函数 $\tau$ 的相对变化。上面的自相关函数 $G(\tau)$ 是功率谱 $I(\omega)$ 的傅里叶变换，它们的关系是

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (2.18)$$

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (2.19)$$

上面方程构成维纳·辛钦(Wiener-Khintchine)定理。

## §2.5 相干函数

虽然自相关函数表示了时间相干性，但是为了使它更为普遍，并能包括空间相干性，下面我们来考虑两点之间光振幅的互相关性。若 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 分别为不同两点 $P_1$ 和 $P_2$ 的复振幅，则互相关函数为

$$\begin{aligned} G_{12}(\tau) &= \langle A_1^*(t) A_2(t + \tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1^*(t) A_2(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

$G_{12}(\tau)$ 正好表示杨氏实验屏上的光强，其中 $\tau$ 是来自狭缝 $P_1$ 和 $P_2$ 光的时间差。

将互相关函数 $G_{12}(\tau)$ 归一化，则表示为

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{G_{12}(\tau)}{\sqrt{G_{11}(0)G_{22}(0)}} \quad (2.21)$$

1938年塞尼克(F.Zernike)<sup>12•3</sup>称它为一阶相干函数。由于 $G_{11}(0) = \langle |A_1(t)|^2 \rangle$ 表示 $P_1$ 处光强 $I_1$ ，而 $G_{22}(0) = \langle |A_2(t)|^2 \rangle$ 表示 $P_2$ 处光强 $I_2$ ，因而也可写成

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle A_1^*(t)A_2(t+\tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.22)$$

称 $\gamma_{12}(\tau)$ 为复相干度。如果在 $P_1$ 和 $P_2$ 处两光波在时间间隔 $\tau$ 内完全时间相干和空间相干，则 $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ ，若它们是完全非时间相干的，或者是完全非空间相干的，则 $\gamma_{12}(\tau) = 0$ 。

通常，当来自任意两点的光波 $A_1(t)$ 和 $A_2(t+\tau)$ 叠加时，其光强为

$$|A_1(t)|^2 + |A_2(t+\tau)|^2 + A_1(t)A_2^*(t+\tau) + A_1^*(t)A_2(t+\tau)$$

用 $I$ 表示它的时间平均，利用式(2.20)和(2.22)得到

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + G_{12}^*(\tau) + G_{12}(\tau) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

若 $P_1$ 和 $P_2$ 间距较远，或者时间差 $\tau$ 较长，则复相干度 $\gamma_{12}(\tau)$ 较小，只要从 $P_1$ 和 $P_2$ 到叠加点两光波间的光程差变化限制在几个波长之内，对于相干性较好的普通单色光源来说，实际上 $\gamma_{12}(\tau)$ 的大小没有显著变化，但 $\gamma_{12}(\tau)$ 的相位变化明显。于是可以写成

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_0 \exp(i k(s_2 - s_1)) \quad (2.24)$$

式中 $\tau = (s_2 - s_1)/c$ 的变化较小时，其复量 $\gamma_0$ 为常数。干涉图样在亮区和暗区的强度由下面公式给出

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_0|$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_0|$$

干涉条纹可见度由式(2.8)可表示为

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_0|}{I_1 + I_2} \quad (2.25)$$

所以，如果测量相对强度 $I_1$ 和 $I_2$ 及干涉条纹可见度，由上式就能得到 $|\gamma_0|$ 值，即 $\gamma_{12}(\tau)$ 的大小。干涉图样最亮部分 $\gamma_{12}(\tau)$ 相位为

零，而最暗部分为 $\pi$ 。

作为一个重要例子，最后讨论2.3节提出的光频分布在一个窄带范围（尽管差不多是单色光）内光的相干函数。 $P_1$ 处光的规范化自相干函数表示为

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\langle A_1^*(t)A_1(t+\tau) \rangle}{\langle A_1^*(t)A_1(t) \rangle} \quad (2.26)$$

由于光源中每个原子发射的光波是式(2.9)所表示的衰减波，所以第n个原子发射的光波复振幅可以写成

$$A_n(t) = A \exp(i\omega_n t + i\theta_n - t/2\tau_s) \quad (2.27)$$

如果每个原子的频率相同，则 $\omega_n = \omega_0$ 。当光波相位 $\theta_n$ 是随机的，于是自相干函数变为

$$\gamma_{11}(\tau) = \exp(i\omega_0 \tau) \exp(-|\tau|/2\tau_s) \quad (2.28)$$

光源中大量原子发射的光波也是如此。在这种情况下，自相干函数的变化如图2.7所示，它表示了每个原子的衰减情况。

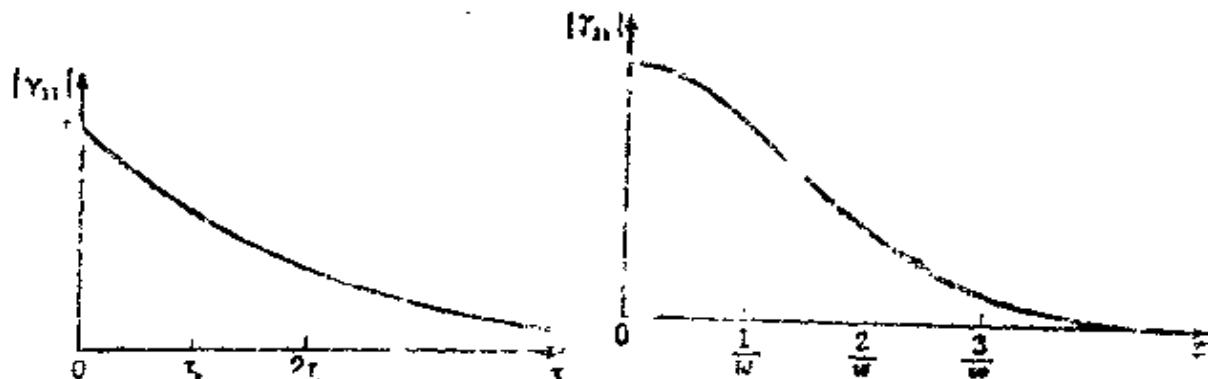


图2.7 由式(2.28)给出的自相干函数

图2.8 由式(2.30)给出的自相关函数

其次，当受激原子的寿命比较长时，让我们来探讨一下发射频率为高斯分布的情况。假设频率分布的中心为 $\omega_0$ ，由此得到

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi w}} \exp(-(\omega - \omega_0)^2/w^2) \quad (2.29)$$

式中 $w$ 是 $I(\omega)$ 下降到 $I(\omega_0)$ 的 $1/e$ 处的半宽度。由于式(2.29)是光强的频率分布且给出了功率谱，因而自相关函数能从式(2.18)得到

$$\begin{aligned}\gamma_{11}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi w}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{w}\right)^2 + i\omega\tau\right] d\omega \\ &= \exp(i\omega_0\tau) \exp(-w^2\tau^2/4)\end{aligned}\quad (2.30)$$

上述情况下自相关函数是高斯函数，如图2.8所示。当时间差 $\tau$ 约比 $1/w$ 大时，即使原子衰减时间相当长，也可看到相干度的下降。

## 习 题

2.1 使用红色He-Ne激光器做杨氏干涉实验时，若想在屏上观察到3mm周期的干涉条纹，试求两狭缝间距。设双缝到屏的距离为1m。

2.2 试解释图2.2所示的杨氏实验中，为什么需要狭缝 $P_0$ ? 如果 $P_0$ 太宽或太窄，会发生什么情况?

2.3 考虑由式(2.9)给出的光衰减振荡系统，试计算理想迈克尔逊干涉仪中用光程差表示的干涉条纹可见度。

2.4 假设由迈克尔逊干涉仪观察到的干涉条纹强度表达式为

$$I(\Delta s) = I_0 \{1 + \exp(-\alpha^2(\Delta s)^2) \cos k\Delta s\}$$

式中 $\Delta s = s_2 - s_1$ 是光程差，常数 $\alpha$ 比波数 $k$ 小得多，试求光源的光谱(功率谱密度)(提示：使用式(2.30))。

2.5 证明 $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}^*(-\tau)$ ，式中 $\gamma_{12}(\tau)$ 是复相干度或归一化互相关函数。

2.6 试计算由自相关函数式(2.28)给出的光源功率谱。

2.7 线性调频的高斯光脉冲，其复振幅为

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_p^2} + i\omega_0 t + i\alpha t^2\right)$$

试求该脉冲的功率谱和归一化自相干函数。

(提示:  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x+iy)^2) dx = \sqrt{\pi}$ )

2.8 假设光谱线具有高斯线型，它的半最大值全宽度为 1GHz，若在一合理的干涉仪中使用该光源，试问当可见度下降到 0.5 时的光程差有多大。

### 第三章 光的电磁理论

光的干涉和衍射实验充分证明了光的波动性，在理论上光波可看成是电磁波，它满足麦克斯韦方程组。由于电磁场的量子化而引入的光量子即光子的概念，可表述光的粒子性。激光的相干性要比其它光源发出的光的相干性好得多，正是在这种特殊情况下，激光电磁场的量子化才能揭示一些实质性的内容。本章将讨论用经典电磁波表示的光波的性质。

#### §3.1 麦克斯韦方程组

由电磁理论知，电场强度 $\vec{E}$ 、电通量密度 $\vec{D}$ 、磁场强度 $\vec{H}$ 、磁通量密度 $\vec{B}$ 、电流密度 $\vec{j}$ 和电荷密度 $\rho$ 都是随坐标( $x, y, z$ )和时间 $t$ 变化的函数，其变化由麦克斯韦方程组给出：

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (3.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

有时 $\text{curl } \vec{E}$ 可写成 $\text{rot } \vec{E}$ 或 $\nabla \times \vec{E}$ ， $\text{div } \vec{D}$ 写成 $\nabla \cdot \vec{D}$ 。其中 $\nabla$ 是矢量算子，其 $x, y, z$ 分量分别是 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 。使用这个算子， $\text{grad } \phi$ 可表示为 $\nabla \phi$ 。

设 $\epsilon$ 为媒质的介电常数， $\mu$ 为磁导率， $\sigma$ 为电导率，则有

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3.5)$$

使用极化强度 $\vec{P}$ 和真空介电常数 $\epsilon_0$ ，则可得到

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

而

$$\chi = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0 \vec{E}} \quad (3.6)$$

称为电极化率，并且有 $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$ ，当场强 $\vec{E}$ 较弱时，通常 $\vec{P}$ 正比于 $\vec{E}$ ； $\vec{E}$ 较强时， $\vec{P}$ 不再正比于 $\vec{E}$ ， $\vec{P}$ 随时间的变化并不总与 $\vec{E}$ 随时间的变化同步。存在非线性效应和色散的情况将在以后的章节中讨论。这里，假设 $\chi$ 和 $\epsilon$ 都为常数，我们只讨论理想介质的情况，即 $\sigma = 0$ ，并且磁导率为

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

对式(3.1)取旋度并利用式(3.2)和 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，则 $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{E}$ 变为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

按矢量运算有

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

利用式(3.3)和 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ，由此得到

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

但因静电荷只产生静电场，并且与光学介质中的电磁波无关，所以略去这一项，并令  $\rho = 0$ ，因而  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，式(3.7)变成

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8a)$$

即

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (3.8b)$$

这就是传播波的方程，其速度为

$$v = 1 / \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3.9)$$

真空中的光速为

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299792458 \text{ m/s}$$

用  $\eta$  表示介质的折射率，则

$$\eta = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = c \sqrt{\epsilon \mu}, \quad v = \frac{c}{\eta} \quad (3.10)$$

对于理想的平面波，在平面波阵面上不仅各处的相位相同，而且电场的大小和方向也相同。如果波阵面平行于  $XY$  平面，则  $\vec{E}$  对  $x$ 、 $y$  的导数都为零，因此式(3.8b)变为

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

上式是沿  $\pm z$  方向传播的电磁波满足的方程，通常它的解可表示为以下形式

$$E_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt) \quad (3.12a)$$

$$E_y = g_1(z - vt) + g_2(z + vt) \quad (3.12b)$$

从麦克斯韦方程组可知，电磁波是横波，因此  $E_z = 0$ 。式(3.12)

中的 $f_1$ 、 $f_2$ 、 $g_1$ 、 $g_2$ 都是单值函数，函数 $f_1(z)$ 给出了 $t=0$ 时刻沿 $+z$ 方向传播的 $x$ 方向偏振的平面波波形， $f_2(z)$ 给出了沿 $-z$ 方向传播的 $x$ 方向偏振的平面波波形。同理， $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 分别表示沿 $\pm z$ 方向传播的 $y$ 方向偏振的平面波波形。

伴随电场传播的磁场波可由式(3.2)求解如下。因为沿 $z$ 方向传播的平面波对 $x$ 、 $y$ 的导数为零，故式(3.2)的 $x$ 分量变为

$$-\frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

式(3.12a)对 $t$ 微分和对 $z$ 积分，则有

$$H_x = \epsilon v [f_1(z-vt) - f_2(z+vt)] \quad (3.13a)$$

同理，从式(3.2)的 $y$ 分量可推得

$$H_y = \epsilon v [-g_1(z-vt) + g_2(z+vt)] \quad (3.13b)$$

方程(3.12)和(3.13)表明，由函数 $f_1$ 、 $f_2$ 、 $g_1$ 、 $g_2$ 确定的电磁波的场强 $E$ 和 $H$ 是相互垂直的，并沿 $E \times H$ 方向传播。

单位时间内通过垂直于 $z$ 轴的单位面积内的电磁能量，等于玻印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 的 $z$ 分量的时间平均值。对于 $x$ 方向的偏振波，可从式(3.12a)、(3.13a)导出

$$S_z = \epsilon v [f_1^*(z-vt) - f_2^*(z+vt)]$$

而 $y$ 方向的偏振波，可从式(3.12b)、(3.13b)导出

$$S_z = \epsilon v [g_1^*(z-vt) - g_2^*(z+vt)]$$

迄今，我们所考虑的是任意形式的电磁波，利用傅立叶展开，任意波形都能表示为简谐波的叠加。激光近乎是理想的单色光，因此如果用 $\exp(i\omega t)$ 表示频率为 $\omega$ 的单色平面波的时间因子<sup>(1)</sup>，则方程(3.8a)变为

---

(1) 时间因子有时写成 $\exp(-i\omega t)$ 。在这种情况下，复极化率和反射及透射系数都变为相应的复数共轭值。通常电子学中用 $\exp(i\omega t)$ ，光学中用 $\exp(-i\omega t)$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (3.14)$$

式中  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ , 这里

$$k = \omega/v = 2\pi/\lambda$$

称为波数或相位常数, 但当  $k$  为复量时, 通常称为传播常数。

现在, 可将沿  $\pm z$  方向传播的  $x$  方向偏振的单色波电场和磁场表示为

$$\begin{aligned} E_x &= F_1 \exp(i\omega t - ikz) + F_2 \exp(i\omega t + ikz) \\ H_z &= \bar{\epsilon}v [F_1 \exp(i\omega t - ikz) - F_2 \exp(i\omega t + ikz)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

第一项是沿  $+z$  方向传播的分量, 第二项是沿  $-z$  方向传播的分量。当  $\mu = \mu_0$  时, 由式(3.10)可将  $\epsilon v$  写成

$$\epsilon v = \eta \epsilon_0 c = \eta \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \quad (3.16)$$

对于沿任意方向传播的电磁波, 可沿传播方向取波矢  $\vec{k}$ , 其大小为  $k = \omega/v$ 。在确定点  $\vec{r}$  处的复电场  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  可由下式给出

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - ik \cdot \vec{r}) \quad (3.17)$$

式中表示平面波的复振幅  $\vec{E}_0$  垂直于  $\vec{k}$ 。如果波矢和  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴之间的夹角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ , 则波矢分量为

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma$$

这样, 式(3.17)可重写为

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \exp[i\omega t - ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)]$$

## §3.2 光的反射和折射

当平面电磁波入射到具有不同折射率的两种介质分界面上时, 每个偏振分量的反射和透射系数都将由电磁场的边界条件决定。在这里, 我们把边界取为  $xy$  平面, 当  $z < 0$  时, 折射率  $\eta_1 =$

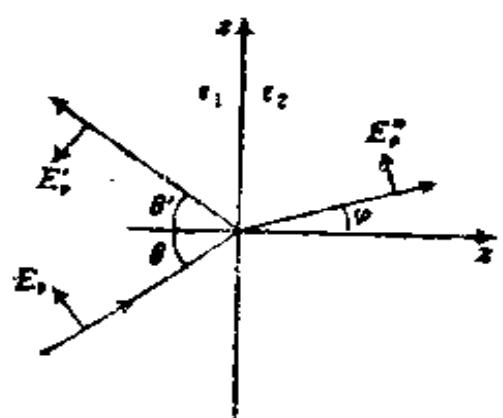
$\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}$ ,  $z>0$  时,  $\eta_1 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}$ ; 入射面取为  $xz$  平面, 入射角为  $\theta$ 。

因为反射系数和透射系数都取决于入射光的偏振态, 我们将分别考虑两个分量: 一个是电场平行于入射面的  $p$  分量, 另一个 是电场垂直于入射面的  $s$  分量<sup>(2)</sup>。如果  $p$  分量的电场正方向的取向如图 3.1 所示, 则入射光  $p$  分量的电场和磁场可写为

$$\begin{aligned} E_p &= A_p \exp(-ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)) \\ H_p &= \epsilon_1 v_1 E_p, \quad H_s = H_t = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

式中忽略了时间因子  $\exp(i\omega t)$ 。 $s$  分量电场沿  $y$  方向, 并由下式给出

$$E_s = A_s \exp(-ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)) \quad (3.19)$$



$s$  分量的磁场既垂直于  $\vec{k}$  又垂直于  $y$  轴, 其大小为  $\epsilon_1 v_1 E_s$ 。

首先考虑  $p$  分量。如图 3.1 所示, 我们用带撇号的量表示有关反射光的相应量, 记反射角为  $\theta'$ , 则反射光的电场和磁场可写为

$$\begin{aligned} E'_p &= A'_p \exp(-ik_1(x \sin \theta' - z \cos \theta')) \\ H'_p &= \epsilon_1 v_1 E'_p \end{aligned} \quad (3.20)$$

图 光的反射和折射  $z>0$  具有折射角  $\varphi$  的透射光表示为

$$\begin{aligned} E'_s &= A'_s \exp(-ik_2(x \sin \varphi + z \cos \varphi)) \\ H'_s &= \epsilon_1 v_2 E'_s \end{aligned} \quad (3.21)$$

在界面  $z=0$  处的边界条件要求  $\vec{E}$  的  $x$  和  $y$  分量及  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  的  $z$  分量是连续的,  $\vec{H}$  的所有分量都应该是连续的(假定  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ )。当  $z \rightarrow 0$  时,  $z<0$  一侧介质中  $p$  分量的电场和磁场是

(2)  $s$  代表德语单词 Senkrecht, 意思是垂直。

$$E_x = A_p \cos \theta \exp(-ik_1 x \sin \theta) - A'_p \cos \theta' \exp(-ik_1 x \sin \theta') \\ + \eta_1 [A_p \exp(-ik_1 x \sin \theta) + A'_p \exp(-ik_1 x \sin \theta')]$$

这两个量应分别等于  $z \rightarrow 0$  时  $z > 0$  一侧的电场和磁场值，于是有

$$A_p \cos \theta \exp(-ik_1 x \sin \theta) - A'_p \cos \theta' \exp(-ik_1 x \sin \theta') \\ = A'_p \cos \varphi \exp(-ik_2 x \sin \varphi) \quad (3.22)$$

$$\eta_1 [A_p \exp(-ik_1 x \sin \theta) + A'_p \exp(-ik_1 x \sin \theta')] \\ = \eta_2 A'_p \exp(-ik_2 x \sin \varphi) \quad (3.23)$$

式(3.23)的推导中利用了式(3.16)。既然式(3.22)、(3.23)在边界面上任意  $x$  点都成立，故有

$$k_1 \sin \theta = k_2 \sin \varphi \quad (3.24)$$

由此得到反射定律

$$\theta = \theta'$$

和折射定律

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (3.25)$$

利用式(3.24)，式(3.22)和(3.23)可简化为

$$(A_p - A'_p) \cos \theta = A'_p \cos \varphi \\ \eta_1 (A_p + A'_p) = \eta_2 A'_p \quad (3.26)$$

从中消去  $A'_p$ ，得到振幅反射系数

$$r_s = \frac{A'_p}{A_p} = \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta \cos \theta + \sin \varphi \cos \varphi} \quad (3.27)$$

改写上式，振幅和功率反射系数分别变为

$$r_s = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}, \quad R_s = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg}^2(\theta + \varphi)} \quad (3.28)$$

功率反射系数  $R_s$  常称为反射率。

从式(3.27)或(3.28)看出， $\theta + \varphi = \pi/2$  时， $p$  分量的反射系数

为零，这时的入射角称为布儒斯特角，用 $\theta_B$ 表示，其值为

$$\tan \theta_B = \eta_2 / \eta_1 \quad (3.29)$$

当 $\eta_1 = 1$ 时，对 $\eta_2 = 1.52$ (BK7玻璃)，得到 $\theta_B = 56^\circ 40'$ ；对 $\eta_2 = 1.46$ (石英玻璃)，得到 $\theta_B = 55^\circ 35'$ ；对 $\eta_2 = 4.0$ (波长 $1.5 \sim 10 \mu\text{m}$ 处的锗)，得到 $\theta_B = 75^\circ 58'$ 。

把式(3.27)代入式(3.26)的任一式中，可得到 $p$ 分量的振幅透射系数：

$$d_p = \frac{A'_p}{A_p} = \frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{\sin \theta \cos \theta + \sin \varphi \cos \varphi}$$

或

$$d_p = \frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{\sin(\theta + \varphi) \cos(\theta - \varphi)} \quad (3.30)$$

因为这是两种不同介质中的电场振幅比，所以 $d_p$ 并不表示光强的透射系数。

如果用功率密度(即单位时间通过垂直于波矢单位面积上的能量)来定义光强，则它应等于 $\vec{E} \times \vec{H}$ 。因为 $\vec{E} \times \vec{H}$ 正比于 $\epsilon_0 E^2$ 或 $\eta E^2$ ，故 $p$ 分量的透射系数或透射率变为

$$D_p = \frac{\eta_2 A'_p}{\eta_1 A_p} = \frac{4 \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi}{\sin^2(\theta + \varphi) \cos^2(\theta - \varphi)} \quad (3.31)$$

应当注意，由于折射引起光束横截面积按因子 $\cos \varphi / \cos \theta$ 变化，当考虑光束能量通量的透射系数时，它应等于

$$T_p = \frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{\sin^2(\theta + \varphi) \cos^2(\theta - \varphi)} \quad (3.32)$$

同理， $s$ 分量的振幅反射系数和透射系数分别为

$$r_s = \frac{A'_s}{A_s} = - \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)} \quad (3.33)$$

和

$$d_s = \frac{A'_s}{A_s} = \frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{\sin(\theta + \varphi)} \quad (3.34)$$

功率透射系数，即透射率和能量通量的透射系数分别为

$$D_s = \frac{4 \sin \theta \cos^2 \theta \sin \varphi}{\sin^2(\theta + \varphi)} \quad (3.35)$$

和

$$T_s = \frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{\sin^2(\theta + \varphi)} \quad (3.36)$$

上述公式给出了两种介质边界上的反射和透射系数，称为菲涅耳公式。

### §3.3 全 反 射

图3.1所示是 $n_2 > n_1$ 时光线的反射与折射，而当 $n_2 < n_1$ 时，存在一入射角 $\theta_c$ ，其相应的折射角 $\varphi = \pi/2$ 。如果反射角 $\theta$ 大于 $\theta_c$ ，则不存在透射光线， $\theta_c$ 称为临界角，其值为

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n_{12}}, \quad n_{12} = \frac{n_1}{n_2} > 1 \quad (3.37)$$

$\theta > \theta_c$ 时，所有的入射光都被反射，这种情况称为全反射，这意味着在边界的远区没有平面波(式(3.21))传播，但并不表明在 $z > 0$ 的区域电磁场会完全消逝。

虽然 $\theta > \theta_c$ 的全反射情况不满足式(3.25)的实折射角，但是当

$$\sin \varphi = n_{12} \sin \theta > 1 \quad (3.38)$$

时满足式(3.25)的折射角的复数值 $\varphi = ia + \pi/2$ 。因此，如果把 $\cos \varphi$ 取为虚数

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \pm i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1}$$

则3.2节中所有的菲涅耳公式都将适用。折射波的p分量或s分量变为

$$E^s = A^s \exp [ -ik_z(x n_{12} \sin \theta \pm iz \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1}) ]$$

因为 $p$ 分量和 $s$ 分量的振幅在 $z \rightarrow \infty$ 时必须是有限的，故 $\cos\varphi$ 取负号，即

$$\cos\varphi = - i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1} \quad (3.39)$$

于是 $z > 0$ 时，介质中的电场为

$$E' = A' \exp(-k_2 z \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1}) \exp(-i(k_2 n_{12} \sin \theta) x) \quad (3.40)$$

式中已略去时间因子 $\exp(i\omega t)$ 。从上方程可看出，沿 $x$ 方向传播的平面波振幅随 $z$ 按指数衰减，这种波称为瞬逝波。

瞬逝波的振幅变为 $z = 0$ 处的 $1/e$ 时所传播的距离 $z_{ss}$ ，为

$$z_{ss} = \frac{1}{k_2 \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1}} \quad (3.41)$$

如果 $\theta$ 接近临界角 $\theta_c$ ，且 $\Delta\theta = \theta - \theta_c$ 较小，则式(3.41)近似为

$$z_{ss} \approx \frac{\lambda_0}{2\pi n_2} \sqrt{\frac{\tan \theta}{2\Delta\theta}}$$

式中 $\lambda_0$ 为真空中波长，从该式可看出，当 $\Delta\theta \approx 0.01 \text{ rad}$ 时，瞬逝波的穿透深度约一个波长。

把式(3.38)，(3.39)代入式(3.30)，从式(3.40)得到

$$E'_p = \frac{2n_{12} \cos \theta}{\cos \theta - i n_{12} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1}} \cdot A_p \exp(-z/z_{ss}) \exp(-i(k_2 n_{12} \sin \theta) x) \quad (3.42)$$

于是由入射波 $p$ 分量引起的瞬逝波的电场和磁场分别为

$$E_x = - i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1} E'_p \quad (3.43)$$

$$E_s = - n_{12} \sin \theta E'_p \quad (3.44)$$

$$H_s = \epsilon_0 v_2 E'_p \quad (3.45)$$

其余分量 $E_y$ 、 $H_x$ 和 $H_z$ 都为零。

坡印廷矢量的 $z$ 分量为

$$S_z = E_x H_y - E_y H_x = E_x H_x$$

从式(3.43)和(3.45)可清楚地看出,  $E_x$ 和 $H_x$ 在相位上相差 $\pi/2$ , 因此 $S_z$ 的时间平均值为零。也可以从式(3.44)和(3.45)看出, 因为 $\sin\theta > 0$ ,  $E_x$ 和 $H_x$ 的相位相反, 所以坡印廷矢量 $x$ 分量的时间平均值由下式给出:

$$S_x = E_y H_z - E_z H_y = -E_x H_x$$

并取正值。瞬逝波的能量在边界附近的入射面内, 沿 $x$ 方向传播。可设想为入射光不是立即在 $z=0$ 的几何界面上全反射, 而是在穿进介质一小段距离 $z_{\text{tr}}$ (即 $z>0$ )后才被全反射。其实, 当一束光被全反射时, 反射面上反射光和入射光的位置有一位移, 如图3.2所示。这个位移称为古斯-汉兴(Goos-Hänchen)位移。当 $\theta$ 接近于临界角 $\theta_c$ 时, 这个位移变大。虽然如此, 该位移也只不过是波长的量级<sup>[3•11]</sup>。

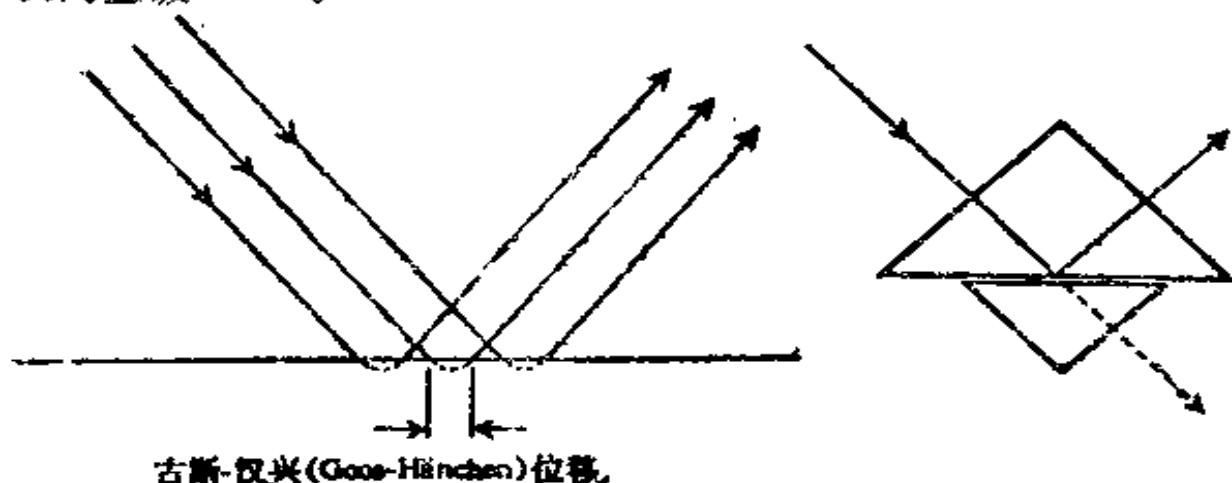


图3.2 全反射时的古斯-汉兴位移

图3.3 瞬逝波的棱镜耦合

如果将两块全反射棱镜紧靠在一起, 使它们的间隔大约是一个波长量级, 如图3.3所示。由于全反射, 上面一块棱镜引起的瞬逝波将穿进下面棱镜, 使部分光透射到下面棱镜, 如图中虚线所示。耦合程度随两棱镜的间距而变化。据此原理制作的器件可

用于将波导光波耦合到自由空间<sup>[3.2]</sup>。

虽然全反射时的功率反射系数是1，但由于存在相移，振幅反射系数并不等于1。由式(3.27)、(3.33)有

$$r_p = \frac{\cos\theta + i n_{12} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}{\cos\theta - i n_{12} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}$$

$$r_s = \frac{n_{12} \cos\theta + i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}{n_{12} \cos\theta - i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}$$

因为这些系数的绝对值为1，可改写为

$$r_p = \exp(i\delta_p), \quad r_s = \exp(i\delta_s) \quad (3.46)$$

式中相角 $\delta_p$ 、 $\delta_s$ 由下式给出

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_p}{2} = \frac{n_{12} \sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}{\cos\theta} \quad (3.47)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2} = \frac{\sqrt{n_{12}^2 \sin^2\theta - 1}}{n_{12} \cos\theta} \quad (3.48)$$

$\delta_p$ 和 $\delta_s$ 随 $\theta$ 的变化曲线( $n_{12} = 1.52$ )如图3.4所示。

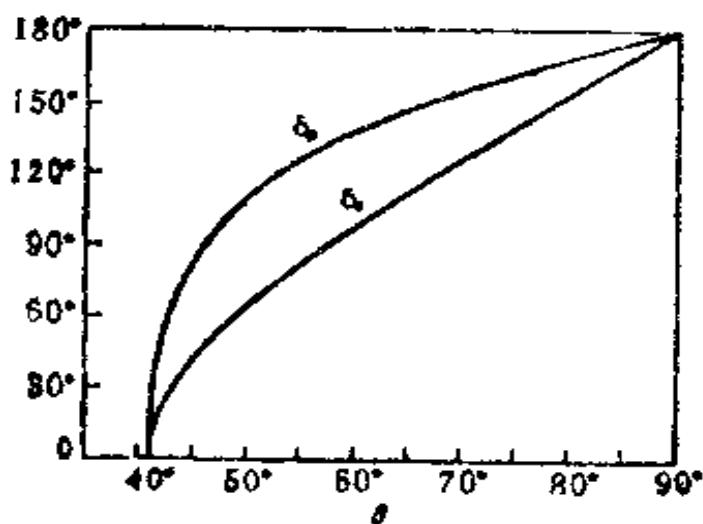


图3.4 反射波的相角作为入射角 $\theta$ 的函数( $n_{12} = 1.52$ )

由图3.4可知，全反射时的相移大，而且 $p$ 分量和 $s$ 分量的相移相差相当大。由式(3.47)、(3.48)得两分量间的相位差为

$$\delta_p - \delta_s = 2\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta\sqrt{n_{12}^2\sin^2\theta - 1}}{n_{12}\sin\theta}\right) \quad (3.49)$$

当 $n_{12} = 1.52$ ,  $\theta$ 约为 $47.5^\circ$ 或 $55.5^\circ$ 时,  $\delta_p - \delta_s = 45^\circ(\pi/4)$ 。因此，制作一个如图3.5所示的棱镜，在它的两个面上发生全反射，这时 $p$ 分量和 $s$ 分量间的相位差等于 $90^\circ$ 。这个棱镜称为菲涅耳菱形棱镜，通常用作 $1/4$ 波片，它对波长的依赖性较小。

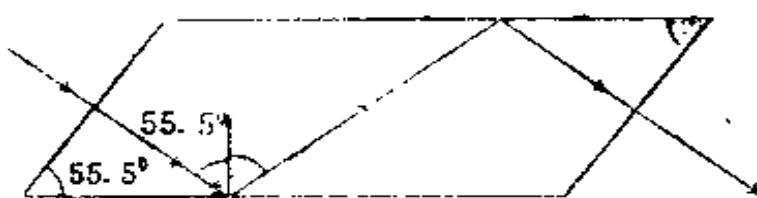


图3.5 菲涅耳菱形棱镜( $n_{12} = 1.52$ )

在两种透明介质边界上，除全反射外，振幅反射系数和振幅透射系数都是实量，并且它们的相位为零或 $\pi$ 。对半导体或金属来说  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ( $\sigma$ 是电导率)，当频率为 $\omega$ 时式(3.2)右边变成

$$\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\sigma + i\omega\epsilon')\vec{E}$$

式中  $\vec{D} = \epsilon' \vec{E}$ 。这个方程等价于取复介电常数

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' \quad (3.50)$$

式中  $\epsilon'' = \sigma/\omega$ ，并令  $\vec{j} = 0$ 。同理，折射率也可以用复数形式表示为

$$\eta = \eta' - i\kappa \quad (3.51)$$

当  $\mu = \mu_0$  时，式中实部和虚部分别是

$$\eta' = \left\{ \frac{1}{2\epsilon_0} [ \sqrt{(\epsilon')^2 + (\epsilon'')^2} + \epsilon' ] \right\}^{1/2} \quad (3.52)$$

$$\kappa = \left\{ \frac{1}{2\epsilon_0} [ \sqrt{(\epsilon')^2 + (\epsilon'')^2} - \epsilon' ] \right\}^{1/2} \quad (3.53)$$

$\kappa$ 为消光系数。

### §3.4 法布里-珀罗谐振腔

两块平面镜相隔一定的间距相对放置所组成的系统，在一特定电磁波长下会产生谐振，这就是最基本的光学谐振腔，称为法布里-珀罗谐振腔。

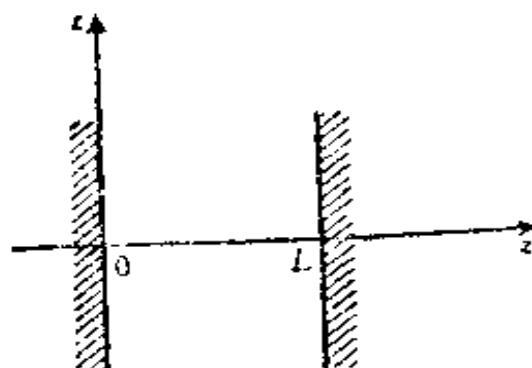


图3.6 法布里-珀罗谐振

如图3.6所示，反射面的法线方向取为z轴，两个反射面分别置于 $z=0$ 和 $z=L$ 处，偏振方向取x轴的方向，并假定反射面是理想导体。通常，沿z方向传播的电磁波由式(3.15)确定。因为在 $z=0$ 的理想导体表面上 $E_x=0$ ，所以 $F_1=-F_2$ 。如果取 $A_x=2iF_1$ ，则有

$$E_x = A_x \exp(i\omega t) \sin kz \quad (3.54)$$

因为 $z=L$ 处也满足 $E_x=0$ ，必定有 $\sin kz=0$ ，所以只有下列频率的波才容许存在

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega = \frac{n\pi c}{L} \quad (3.55)$$

式中n为整数，当L远远大于光波长时，n很大。因为 $k=2\pi/\lambda$ ( $\lambda$ 为波长)，所以式(3.55)表明，L是半波长的整数(n)倍。

如果L为常数，则式(3.55)表征法布里-珀罗谐振腔的本征波数和本征频率。本征模式的空间函数由 $\sin kz$ 确定，模式数目等

于  $0 \leq z \leq L$  内模式函数的波峰或波谷的个数<sup>(3)</sup>。任何随空间和时间变化的电磁场都可以表示为这些模式的叠加。从数学角度来说，在  $z = 0$  和  $z = L$  处为零的任意函数  $f(z)$  都能展开为具有本征值(式(3.55))的模函数(式(3.54))<sup>(4)</sup>，这就是熟知的傅立叶展开。

如果不是理想反射面，则在  $z = 0$  和  $z = L$  处， $E_z \neq 0$ 。这种情况下也可以在  $0 \leq z \leq L$  内将代表任意电磁场的函数  $f(z)$  表示为以下形式

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \sin \frac{2\pi n z}{L} + B_n \cos \frac{2\pi n z}{L} \right) \quad (3.56)$$

这个方程在  $z = 0 \sim L$  外以周期  $L$  重复出现。对于任意  $z$ ，有

$$f(z+L) = f(z)$$

$0 \sim L$  内电磁场模式函数为  $\sin k z$  和  $\cos k z$ ，其中  $k = 2n\pi/L$ ，这可从式(3.56)中清楚地看出。比较式(3.56)和式(3.55)发现，该情况下模式间隔是理想反射面模式间隔的两倍，然而实质上两者是等价的，因为在非理想表面，函数是按两个三角函数(正弦和余弦)来展开的。

把非理想反射面之间的电磁场表示为式(3.56)的形式，相当于要按照边界条件来确定模式，该边界条件要求在  $z = 0$  和  $z = L$  处的电磁场相等，这样的边界条件称为周期性边界条件，对于  $\vec{E}(x, y, z, t)$  可写成

$$\vec{E}(z=0) = \vec{E}(z=L), \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}(z=0) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}(z=L) \quad (3.57)$$

(3) 计算模式数目时，峰、峰(或谷、谷)为一个模式。

(4) 如果给定某时刻的电磁场，则可以由麦克斯韦方程组确定任意时刻的场。

求解无限大空间的电磁场，通常会遇到数学上的困难，例如发散的积分或者无穷大量和无穷小量乘积所产生的不确定性。但在物理研究中，并不需考虑整个宇宙的无限空间，把研究范围限制在边长为 $L$ 的立方体内是十分方便的， $L$ 应大于实际研究中相关的长度，并假定立方体的边界满足周期性的边界条件。在体积为 $L^3$ 的物理空间以外，电磁场可以看成以立方格的形式不断重复出现。上述法布里-珀罗谐振腔是一维情况，第四章将讨论电磁场的三维模式问题。

### §3.5 法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗干涉仪由两块部分透明的平行反射平面组成。如图3.7所示，它分为两类：图(a)所示是平行放置的两反射面，其间是真空或充有空气之类的气体；图(b)所示是透明固体材料（例如玻璃）的平行反射表面。如果让单色光从不同方向射入，并观察透射光的空间分布，则干涉条纹是一簇同心圆，如图3.8所示。其中能分辨的两圆环，证明光源中存在着波长略有差别的两个分量。

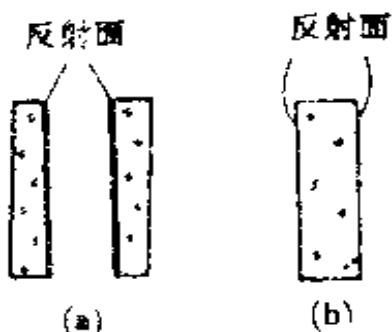


图3.7 法布里-珀罗

干涉仪

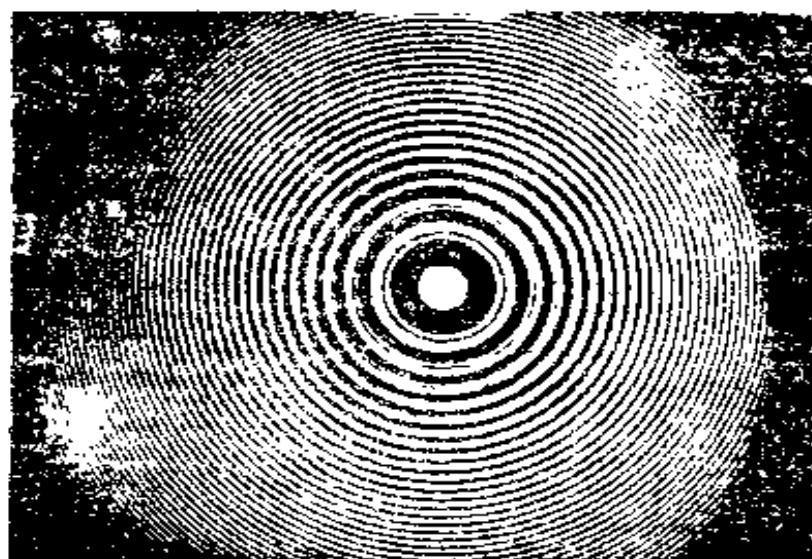


图3.8 法布里-珀罗干涉仪的干涉条纹

在实际实验中，通常在单色光源和干涉仪之间放一块毛玻璃片，以便光线散射，并且通过具有低放大倍数的望远镜干涉仪来观察干涉条纹，或者用聚焦在无限远的照相机拍摄干涉条纹。

假定在  $z = 0$  和  $z = L$  处两反射面的反射系数  $r$  和透射系数  $d$  相等，虽然  $r$  和  $d$  都是入射角和偏振方向的函数，但当入射角较小时，它们实际上是常数<sup>(5)</sup>，这一点可从菲涅耳公式中看出。对于频率为  $\omega$  的入射光，如果其波矢在  $xz$  平面内并且不考虑时间因子  $\exp(i\omega t)$ ，则透过  $z = 0$  平面并入射到  $z = L$  平面上的光场可写为

$$E_s(x, y, z) = E_0 d \exp(-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)) \quad (3.58)$$

式中  $E_0$  是入射到干涉仪上光波电场的振幅。

光在  $z = 0$  和  $z = L$  间来回反射，并按图 3.9 所示路线传播。透射光的电场强度可表示为几何级数

$$\begin{aligned} E_t(x, y, z) &= E_0 d^2 \exp(-ik(x \sin \theta + L \cos \theta)) \\ &\cdot [1 + r^2 \exp(-2ikL \cos \theta) + r^4 \exp(-4ikL \cos \theta) + \dots] \\ &= \frac{E_0 d^2 \exp(-ik(x \sin \theta + L \cos \theta))}{1 - r^2 \exp(-2ikL \cos \theta)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

式中假定干涉仪前后介质的折射率相等。如果干涉仪外部的折射率是 1，内部折射率是  $\eta$ ，若  $\theta$  是  $0 < z < L$  的入射角并且  $\theta \ll 1$ ，则干涉仪外入射角是  $\theta_e = \eta \theta$ 。因为透射光的强度正比于  $|E_t|^2$ ，所

(5) 我们假定  $r$  和  $d$  取实数，如果存在相移，则可考虑稍微偏离几何表面的等效反射率，以保证  $r$  为正实数。

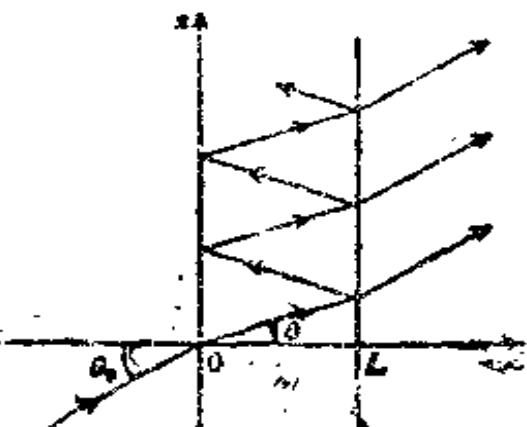


图 3.9 法布里-珀罗干涉仪中的光线路径

以从式(3.59)得到

$$I_d = \frac{I_0 D^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2kL \cos\theta)} \quad (3.60)$$

式中  $I_0$  是入射光强,  $R = r^2$  是反射率,  $D = d^2$  是透射率。

当  $kL \cos\theta$  随频率  $\omega$ 、反射面间距  $L$  或入射角  $\theta$  变化时, 干涉仪的透射比  $I_d/I_0$  随  $kL \cos\theta$  变化的曲线如图 3.10 所示。图中给出了  $D = 0.98 - R$  即假定反射面上光损耗是 2% 情况下的透射比。当  $kL \cos\theta = n\pi$  时, 透射比最大;  $kL \cos\theta = (n + 1/2)\pi$  时, 透射比最小, 这里  $n$  是整数。从图 3.10 可以清楚地看出, 当反射比变大时, 虽然峰变得更陡, 但峰值高度却变小, 即透射比变小。如果在反射面上无任何损耗, 则有  $D = 1 - R$ , 并且最大透射比是 1, 且与  $R$  的大小无关。

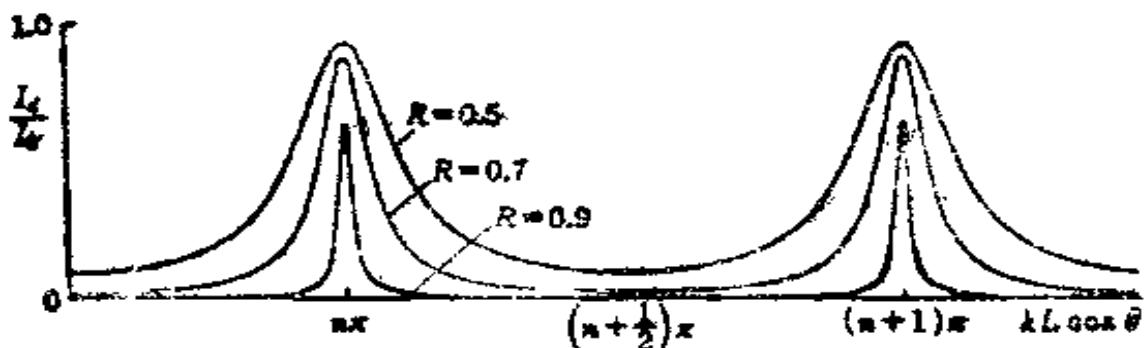


图 3.10 透射比随反射面间距  $L$  或反射角  $\theta$  变化的曲线,  $D = 0.98 - R$

在正入射情况下,  $\theta = 0$ ,  $\cos\theta = 1$ , 于是在  $kL = n\pi$  时透射比最大, 因而

$$L = n\lambda/2 \quad (3.61)$$

当间距  $L$  变化时, 每半波长间隔可观察到一个最大的透射比。如果保持  $L$  不变而改变  $\omega$ , 则

$$\omega = n\pi c/L$$

时，透射比最大，这和法布里-珀罗谐振腔的谐振条件式(3.55)等价。在 $L$ 保持不变，观察透射比随入射角 $\theta_0$ 的变化，出现最大透射率的入射角 $\theta_m$ 可由下面确定，因为

$$kL = n\pi + \phi_0 \quad (3.62)$$

式中 $n$ 是整数， $0 \leq \phi_0 < \pi$ ，则有

$$\cos\theta_m = \frac{(n-m)\pi}{n\pi + \phi_0} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

如果 $L \gg \lambda$ ，则 $n \gg m$ ，于是

$$\theta_m \approx \sqrt{\frac{2\phi_0}{n\pi} + \frac{2m}{n}} \quad (3.63)$$

上式推导中使用了当 $\theta_m \ll 1$ 时 $\cos\theta_m = 1 - \theta_m^2/2$ 的近似。当 $\phi_0 = 0$ 时，利用式(3.61)得到

$$\theta_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{L}} \quad (3.64)$$

当 $\phi_0 \neq 0$ 时，式(3.63)可写为

$$\theta_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{L} + \theta_0^2}$$

式中 $\theta_0$ 是 $m=0$ 时的入射角。从这些结果可以明白，为什么通过法布里-珀罗干涉仪观察一个单色光源时会出现图3.8那样的同心圆干涉条纹。

因为不同频率的干涉条纹的位置是不同的，所以法布里-珀罗干涉仪可以作为光谱仪。我们不能区分 $kL$ 值相差 $\pi$ 的整数倍的两个频率，这是因为不同级次 $n$ 的干涉条纹彼此重叠。只要 $kL = \omega L/v$ 在 $\pm \pi/2$ 范围内变化，那么某一级次的干涉条纹就不会与不同级次的干涉条纹混淆，由此决定的这个频率范围用 $\omega_{FSR}$ 表示

FSR表示自由光谱范围，“自由”的意思是指它不受另一级次条纹的影响)，其表示式为

$$\omega_{FSR} = \frac{\pi v}{L} \quad (3.65)$$

它是与干涉条纹间距相对应的角频率。实际上通常用频率(Hz)或波数( $\text{cm}^{-1}$ )表示FSR。用法布里-珀罗干涉仪测量的波长或频率的精度由干涉条纹的尖锐程度确定，下面用细度 $F$ 来确定这个精度。在 $\theta = 0$ 时，透射比最大，从式(3.60)、(3.62)可以看出，对于 $\phi_0 = \Delta\phi/2$ ，如果

$$1 + R^2 - 2R\cos\Delta\phi = 2(1 - R)^2$$

则透射比为最大值的一半，因此 $\Delta\phi$ 是用相角表示的干涉条纹的宽度。因为 $\Delta\phi \ll 1$ ，解上面方程可得到

$$\Delta\phi = \frac{1 - R}{\sqrt{R}}$$

于是用频率表示的干涉条纹宽度是

$$\Delta\omega = \frac{v}{L} \cdot \frac{1 - R}{\sqrt{R}} \quad (3.66)$$

现在把条纹间距和条纹宽度之比定义为细度 $F$ ，即 $\pi/\Delta\phi$ 或 $\omega_{FSR}/\Delta\omega$ ，因此

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} \quad (3.67)$$

普通法布里-珀罗干涉仪的细度 $F = 10 \sim 100$ ，而高质量的干涉仪可大于200。

最后，让我们来分析一下两面反射镜之间的光电场。由于来回反射，该电场可写成

$$E(x, y, z) = E_0 d \exp(-ikx \sin\theta) \{ \exp(-ikz \cos\theta) + r \exp(-ik(2L-z)\cos\theta) \} (1 + a + a^2 + \dots)$$

$$a = r^2 \exp(-2ikL \cos\theta)$$

{ } 括号的第一项是入射波(式(3.58)), 第二项是在  $z=L$  处被反射后沿  $-z$  方向传播的波,  $a$  是在  $z=0$  和  $z=L$  处经两次反射后波的相对振幅。如果令  $b = r \exp(-2ikL \cos\theta)$ , 则有

$$E(x, y, z) = E_0 d \exp(-ikx \sin\theta) \cdot \frac{(1-b) \exp(-ikz \cos\theta) + 2b \cos(kz \cos\theta)}{1 - r^2 \exp(-2ikL \cos\theta)} \quad (3.68)$$

当

$$kL \cos\theta = n\pi \quad (3.69)$$

时, 分母最小, 这时光电场最大。这就是干涉仪获得最大透射比的条件。分子中第一项代表沿  $z$  轴传播的波, 第二项代表驻波, 在  $z=0$  和  $z=L$  之间的驻波波节数是  $n$ 。

### §3.6 平板波导

半导体激光器和光集成电路中利用了光沿介质薄层传播的特性。这类光波导中最简单的一种是一薄层介质构成的波导层, 它的两个边界是平面, 薄层介质(波导层)折射率  $\eta_1$  大于两边介质的折射率  $\eta_2$ , 如图3.11所示。从原理上讲, 它等效于法布里-珀罗干涉仪, 但这里光并不沿几乎垂直于表面的方向入射, 而是沿平行于表面的方向入射。取薄层介质即波导层表面的法线方向为  $z$  轴, 考虑沿  $x$  方向传播的波。

如果假定来自波导外(折射率为1)的光线对波导层的入射角是  $\theta$ , 如图3.12所示。当  $\theta \ll 1$  时, 在波导层端面上的折射角  $\phi = \theta/\eta_1$ 。因为波导层边界平面上的入射角是  $\pi/2 - \phi$  (见图3.12),

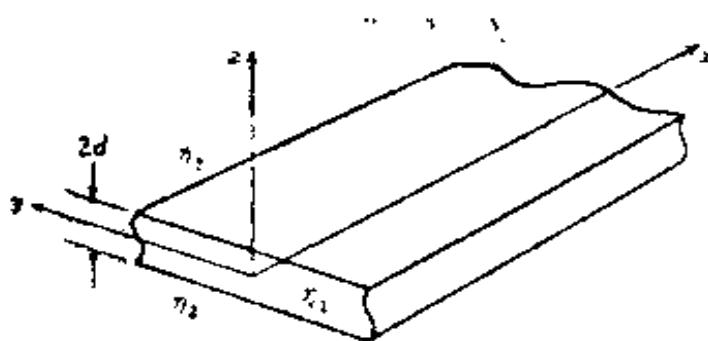


图 3.11 平板光波导

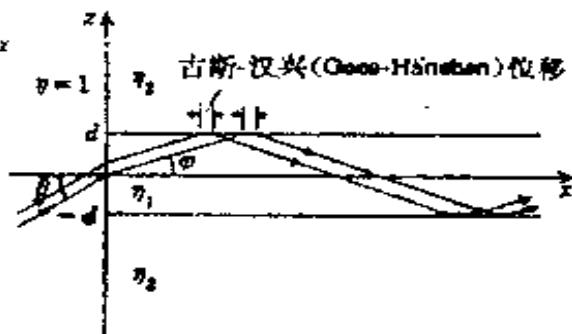


图 3.12 平板波导中光传播示意图

如果满足条件

$$\cos\varphi > \eta_2/\eta_1$$

在该边界平面上将产生全反射。当 $\theta \ll 1$ 时,  $\cos\varphi$ 近似为 $1 - \varphi^2/2$ , 令折射率差 $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_2$ , 则入射角满足关系

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{\eta_1} \right)^2 < \frac{\Delta\eta}{\eta_1}, \text{ 即 } \theta^2 < 2\eta_1 \Delta\eta \quad (3.70)$$

的光, 将经历多次全反射后沿波导层传播。在传播过程中每次全反射总是伴随有古斯-汉兴位移, 并且在波导层两侧都将产生瞬逝波, 这样的波导称为平板波导或对称平板波导<sup>[3\*2]</sup>。可以确定沿着波导全反射的光波相互干涉产生的电磁场。取波导层的边界平面为 $z = d$ 和 $z = -d$ , 光波频率为 $\omega$ ,  $x$ 轴方向的波数为 $k_x$ , 由于光电场在 $y$ 方向是均匀的, 所以可写成

$$\vec{E}(z) \exp(i\omega t - ik_x x)$$

从式(3.14)可知, 此时的波动方程变成

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} = (k_x^2 - k^2) \vec{E}(z) \quad (3.71)$$

式中在波导层内部( $|z| < d$ ) $k$ 等于 $k_1 = \eta_1 \omega / c$ , 在波导层外部( $|z| > d$ ) $k$ 等于 $k_2 = \eta_2 \omega / c$ 。因此波导层传播的导波由两部分组成: 一

部分是在波导层外部( $|z|>d$ )，振幅随 $|z|$ 成指数衰减的瞬逝波；另一部分是在波导层内部( $|z|<d$ )可以表示成谐波的驻波。为了使式(3.71)的解满足这些条件，必须有

$$k_z^2 - k_2^2 = \gamma^2 > 0, \quad k_z^2 - k_1^2 = -\beta^2 < 0 \quad (3.72)$$

类似于微波波导，在光波导中也存在两种类型的电磁波，即TE波(横电波)和TM波(横磁波)。前者的电场只有横向分量即 $E_x = 0$ ，而磁场的 $H_x \neq 0$ ；后者的磁场只有横向分量即 $H_x = 0$ ，而电场 $E_x \neq 0$ 。

先来讨论TM波。在波导层内( $|z|<d$ )，可以写成

$$E_x = A \sin \beta z \quad \text{或} \quad B \cos \beta z \quad (3.73)$$

在波导层外( $|z|>d$ )，则有

$$E_x = C \exp(-\gamma |z|) \quad (3.74)$$

这里省略了因子 $\exp(i\omega t - ik_x x)$ 。式中 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 都是常数，由于在边界面上 $E_x$ 是连续的，所以分别有

$$C = A \exp(\gamma d) \sin \beta d \quad \text{或} \quad B \exp(\gamma d) \cos \beta d \quad (3.75)$$

此外，又因为假定波导层在 $y$ 方向是无限的， $E_y$ 和 $H_y$ 都是零，因此其它分量 $E_x$ 、 $H_z$ 可用 $E_z$ 来表示。在波导层内，按麦克斯韦方程组，式(3.1)的 $y$ 分量和式(3.2)的 $z$ 分量分别为

$$\frac{dE_z}{dz} + ik_x E_z = -i\omega\mu_0 H_z \quad (3.76)$$

$$-ik_x H_z = i\omega\epsilon_1 E_z \quad (3.77)$$

式中 $\epsilon_1 = \eta_1^2 \epsilon_0$ 。消去两方程中的 $H_z$ ，则有

$$\frac{dE_z}{dz} + ik_x E_z = i \frac{k_1^2}{k_z} E_z$$

利用 $\beta^2 = k_1^2 - k_z^2$ ，则得

$$E_z = -i \frac{k_x}{\beta^2} \frac{dE_z}{dz} \quad (3.78)$$

由式(3.77)还可得到

$$H_y = i \frac{\omega \bar{\epsilon}_1}{\beta^2} \frac{dE_z}{dz} \quad (3.79)$$

在波导层外, 用 $\epsilon_2$ 代替 $\epsilon_1$ 并利用 $\gamma^2 = k_x^2 - k_z^2$ , 则有

$$E_z = i \frac{k_x}{\gamma^2} \frac{dE_z}{dz} \quad (3.80)$$

$$H_y = -i \frac{\omega \epsilon_2}{\gamma^2} \frac{dE_z}{dz} \quad (3.81)$$

从式(3.73)、(3.78)、(3.79)得波导层内( $|z| < d$ )电磁场表达式(i)为

$$\begin{aligned} E_z &= A \sin \beta z & E_x &= B \cos \beta z \\ E_z &= -iA \frac{k_x}{\beta} \cos \beta z \quad \text{或} & E_x &= iB \frac{k_x}{\beta} \sin \beta z \\ H_y &= iA \frac{\omega \epsilon_1}{\beta} \cos \beta z & H_y &= -iB \frac{\omega \epsilon_1}{\beta} \sin \beta z \end{aligned}$$

从式(3.74)、(3.80)、(3.81)得波导层外( $z > d$ )电磁场表达式(ii)为

$$\begin{aligned} E_z &= A \exp(-\gamma(z-d)) \sin \beta d \\ E_z &= -iA \frac{k_x}{\gamma} \exp(-\gamma(z-d)) \sin \beta d \\ H_y &= iA \frac{\omega \epsilon_2}{\gamma} \exp(-\gamma(z-d)) \sin \beta d \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} E_x &= B \exp(-\gamma(z-d)) \cos \beta d \\ E_x &= -iB \frac{k_x}{\gamma} \exp(-\gamma(z-d)) \cos \beta d \\ H_y &= iB \frac{\omega \epsilon_2}{\gamma} \exp(-\gamma(z-d)) \cos \beta d \end{aligned}$$

若用 $|z|$ 代替 $z$ , 则(i)中的方程也可适用于波导层外 $z < -d$ 的区域。对于给定的波导层, 参数 $\beta$ 、 $\gamma$ 及 $k$ 可由导波的频率和模式确定(见下面的解释)。

因为 $H_z$ 在波导表面( $z = d$ )是连续的, 所以必须满足下列条件

$$\frac{\epsilon_1}{\beta} \cos \beta d = \frac{\epsilon_2}{\gamma} \sin \beta d \quad \text{或} \quad -\frac{\epsilon_1}{\beta} \sin \beta d = \frac{\epsilon_2}{\gamma} \cos \beta d$$

从而

$$\operatorname{tg} \beta d = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{或} \quad -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\beta}{\gamma} \quad (3.82)$$

由式(3.72)可知,  $\beta$ 的最大值 $\beta_m$ 由下式给出

$$\beta_m^2 = k_1^2 - k_2^2$$

并可求出 $\gamma^2 = \beta_m^2 - \beta^2$ 。于是条件式(3.82), 即本征方程 分别变为

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\sqrt{\beta_m^2 - \beta^2}}{\beta} = \operatorname{tg} \beta d \quad \text{或} \quad -\operatorname{ctg} \beta d \quad (3.83)$$

用图解法求解式(3.83), 其解见图3.13。式(3.83)的左边是与波导层厚度无关的函数, 用粗黑线画出。 $\operatorname{tg} \beta d$ 和 $-\operatorname{ctg} \beta d$ 是周期为 $\pi/d$ 的周期函数, 分别用实线和虚线画出。图3.13画出的是 $d = 3.2/\beta$ 时的图形。

对于正弦函数模式 $E_x = A \sin \beta z$ , 式(3.83)的解由粗线与实线的交点确定, 图3.13中存在两个这样的解。从最小值开始, 其解依次记作 $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、……, 式中 $\beta_0$ 略小于 $\pi/2$ ,  $\beta_1$ 略小于 $3\pi/2$ 。由图3.14中 $\beta = \beta_0$ 和 $\beta = \beta_1$ 时的 $\text{TM}_0$ 、 $\text{TM}_1$ 波给出了电磁场横向分量 $H_z$ 和 $E_x$ 的分布。随着波导层变厚, 解将增多, 这是因为 $\operatorname{tg} \beta d$ 的周期相对于 $\beta$ 变得越来越短。

余弦函数模式  $E_x = B \cos \beta z$  的解由图 3.13 中粗线与虚线的交点确定。这种模式的电磁场横向分量  $H_y$  和  $E_x$  是  $z$  的奇函数，其

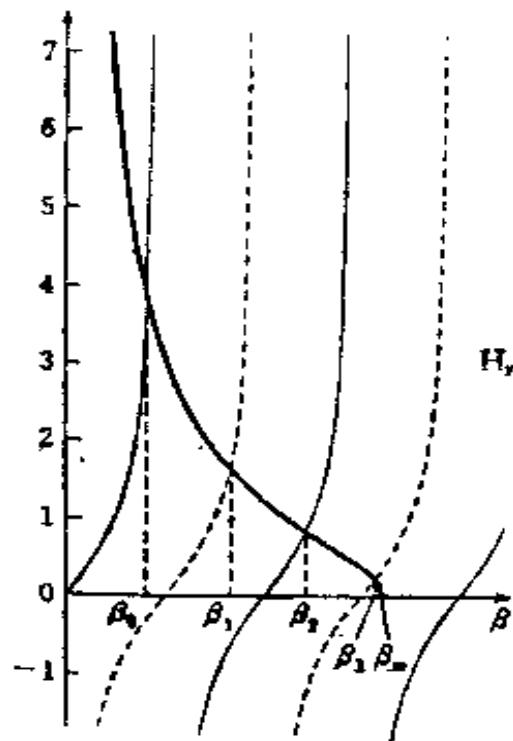


图 3.13 粗黑线表示式(3.83)  
左边对  $\beta$  的关系曲线。  
细线表示  $\operatorname{tg} \beta d$ , 虚线  
表示  $\operatorname{ctg} \beta d$ 。 $\beta_0, \beta_1, \dots$   
是式(3.83)的解

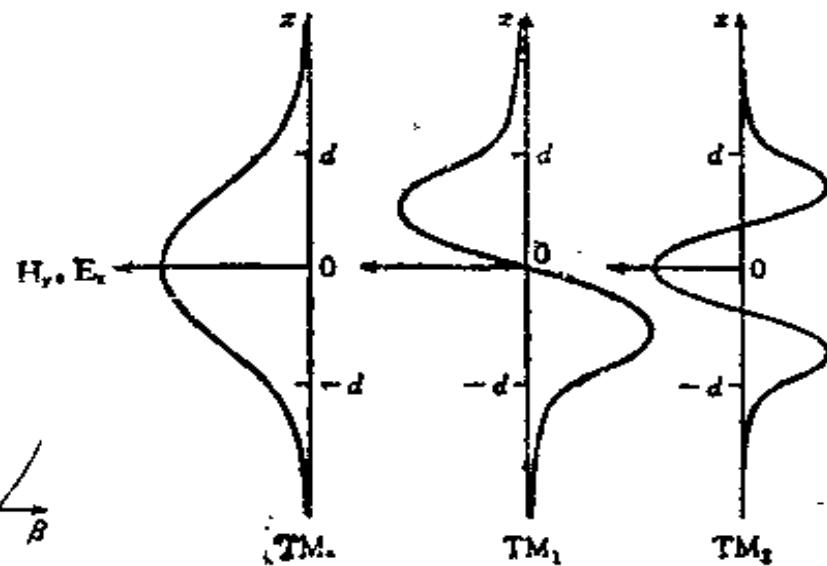


图 3.14 薄膜光波导每个模式  
的振幅分布

解分别记作  $\beta_1, \beta_2, \dots$ , 图 3.14 画出了  $\beta = \beta_1$  的  $TM_1$  波。当波导层很薄时, 从图 3.13 可看出, 只有  $TM_0$  波存在。对于给定厚度为  $2d$  的波导层, 无论光频多低,  $TM_0$  波总能传播, 而  $TM_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 波只能在频率高于各自的截止频率时才能传播。

如果交换  $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$  和有关的常数, 则上面适用于  $TM$  波的方程同样也适用于  $TE$  波。当条件式(3.72)维持不变时, 确定  $TE$  波的奇、偶模的传播常数( $\beta$ 、 $\gamma$  和  $k_z$ )的本征方程不由式(3.83)而由

下式给出：

$$\frac{\sqrt{\beta_n^2 - \beta^2}}{\beta} = \operatorname{tg} \beta d \quad \text{或} \quad -\operatorname{ctg} \beta d \quad (3.84)$$

式(3.83)中的系数 $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ 等于 $(\eta_1/\eta_2)^2 = n_{12}^2$ ，其值大于1，但接近于1。因此， $\text{TE}_n$ 波 $E_z$ 的 $z$ 向分布几乎和图3.14中 $\text{TM}_n$ 波 $H_z$ 的 $z$ 方向分布相同。

$\text{TE}_n$ 或 $\text{TM}_n$ 波没有截止频率，但与 $d$ 比较，波长越长，则 $\gamma$ 越小，使在波导层外传播的光能增多。若用 $\nu_c$ 表示 $\text{TE}_n$ 和 $\text{TM}_n$ 波的截止频率，令式(3.83)，(3.84)中 $k_x = 0$ 和 $\beta = \beta_n$ ，则得到

$$\operatorname{tg} \beta_n d = 0 \quad \text{或} \quad \operatorname{ctg} \beta_n d = 0$$

因此

$$\nu_c = n \frac{v_1}{4d}$$

若用介质(折射率 $\eta_1 = c/v_1$ )的波长来表示，则截止波长为

$$\lambda_c = 4d/n$$

即波导层的厚度 $2d$ 等于截止波长一半的整数倍。

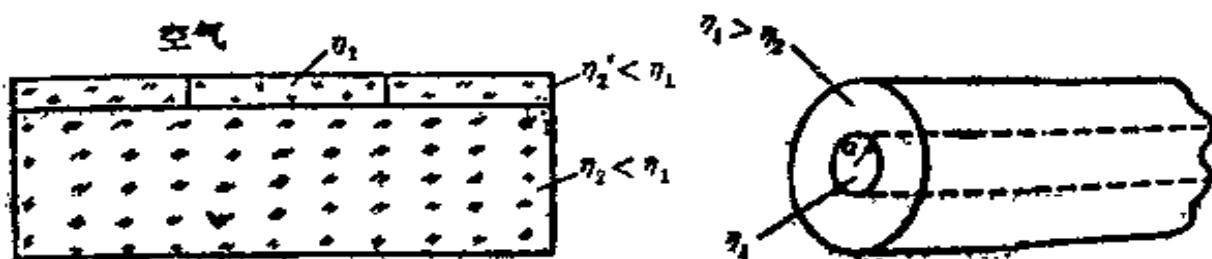


图3.15 矩形截面光波导

图3.16 光纤

实际上，大多数光波导波导层上、下介质的折射率是不同的。为了进一步限制横向分布，可采用如图3.15所示的矩形横截面光波导，要描述其中传播光的电磁场分布并不容易，但利用上

述结果，以很好地概括光纤的基本特征，对光纤也是如此。对于圆形横截面光纤，其折射率 $\eta(r)$ 是半径 $r$ 的函数，使用柱面坐标求解波方程是很方便的。在折射率分布是阶跃函数的情况下，例如 $\eta(r) = \eta_1(r < a)$ 和 $\eta(r) = \eta_2(r > a)$ (见图3.16)时，波方程的解用贝塞尔和诺伊曼函数表示<sup>[3-3]</sup>。

### §3.7 高斯光束

前面在求解波动方程式(3.8)时，只将电场和磁场看成是满足麦克斯韦方程组的矢量，在波动光学中，只使用变量 $u$ 的标量波动方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (3.85)$$

就足以解释衍射、干涉、双折射等现象。这等价于只考虑矢量的一个分量。式(3.85)称为亥姆霍兹方程。通常当介质的尺寸大于波长时，光波几乎是横向的，所以用标量来处理是令人满意的。本节将用亥姆霍兹方程分析单色光的特性。众所周知，任意电磁场都可展开为平面波和球面波，下面将会看到，沿任意轴向传播的光波则可以近似展开为沿该轴向的厄米-高斯函数模式。

取光波沿 $z$ 轴方向，设介质中横波的波数为 $k$ ，令

$$u = f(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (3.86)$$

式中，表示光波解的函数 $f$ 当 $x$ 或 $y$ 很大时应变为零，并随 $z$ 缓慢变化。忽略 $f$ 对 $z$ 的二阶导数，亥姆霍兹方程(3.85)可改写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (3.87)$$

用分离变量法求解式(3.87)，令

$$f(x, y, z) = X(x)Y(y)G(z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{F(z)}\right) \quad (3.88)$$

这里， $G(z)$ 和 $F(z)$ 是缓变函数，对较大的 $x^2 + y^2 = r^2$ ，即远离轴线的点，上式中指数项实际变为零。若从式(3.88)的试探解得到式(3.87)的解，即可证明我们假设的正确性。

对式(3.88)求微分得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(X'' - \frac{4x}{F}X' - \frac{2}{F}X + \frac{4x^2}{F^2}X\right)Y G \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{F}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \left[G' + \frac{GF'}{F^2}(x^2+y^2)\right]XY \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{F}\right)\end{aligned}$$

式中 $X'$ 等是 $dX(x)/dx$ 等的简写。由于对 $y$ 的导数和对 $x$ 的导数有相同形式，将它们代入式(3.87)则有

$$\begin{aligned}\frac{X''}{X} - \frac{4x}{F} \frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} - \frac{4y}{F} \frac{Y'}{Y} - \frac{4}{F} - 2ik \frac{G'}{G} \\ + 2 \frac{x^2+y^2}{F^2} (2 - ikF') = 0\end{aligned}\quad (3.89)$$

若要方程在 $X$ 仅为 $x$ 的函数、 $Y$ 只为 $y$ 的函数、 $F$ 和 $G$ 仅为 $z$ 的函数的条件下仍能成立，则首先必须满足 $2 - ikF' = 0$ 。对此式积分得到

$$F(z) = \frac{2}{ik}(z + C) \quad (3.90)$$

积分常数 $C$ 通常是复数。如果在 $z = z_0$ 处波前是平面( $f$ 的相位与 $x$ 和 $y$ 无关)，则可写成

$$\frac{2}{ik} - C = w_0^2 - \frac{2}{ik}z_0, \quad F(z) = w_0^2 + \frac{2}{ik}(z - z_0) \quad (3.91)$$

式(3.88)中最后一项等于 $1/e$ 时的半径在 $z = z_0$ 处为最小值 $w_0$ ， $w_0$ 表示光腰，称为最小光束半径。

一旦 $F(z)$ 由式(3.90)确定，就能将方程式(3.89)分离为 $X(x)$ 、 $Y(y)$ 和 $G(z)$ 的常微分方程。 $X$ 的厄米微分方程为

$$\frac{X''}{X} - \frac{4\pi}{F} \frac{X'}{X} + \frac{4\pi}{F} = 0$$

对Y也可得到类似的微分方程，其解分别为

$$X(x) = H_n \left( \sqrt{\frac{2}{F}} x \right), \quad Y(y) = H_m \left( \sqrt{\frac{2}{F}} y \right) \quad (3.92)$$

式中H表示整n阶或m阶厄米多项式。利用式(3.90)、(3.92)，可从式(3.89)推出如下关于G的微分方程

$$\frac{G'}{G} = \frac{2i}{h} - \frac{n+m+1}{F} = -\frac{n+m+1}{z+C} \quad (3.93)$$

对上式积分得到

$$G(z) = \frac{A}{(z+C)^{n+m+1}} \quad (3.94)$$

式中A是积分常数。最后得到了亥姆霍兹方程的解，它是由厄米多项式和高斯分布函数的乘积表示的，即

$$u_{n,m}(x, y, z) = H_n \left( \sqrt{\frac{2}{F}} x \right) H_m \left( \sqrt{\frac{2}{F}} y \right) \cdot \frac{A}{(z+C)^{n+m+1}} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{F} - i h z \right) \quad (3.95)$$

式中F和C由式(3.90)、(3.91)确定。

如果在柱坐标下求解旁轴分布光束的亥姆霍兹方程，则其本征模式能够用拉盖尔多项式和高斯分布函数的乘积表示。总之最低阶模只是一个高斯分布，“高斯光束”通常是指最低阶模的光束。

现在我们集中来讨论激光中重要的、高斯光束最基本的特性。令上面方程中m=n=0，即可得到基模解，此时式(3.95)给出了随x和y变化的高斯分布。因为F(z)是复量，把1/F(z)分成

实部和虚部，于是从式(3.91)可得到

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{k^2 w_0^4 + 2ik(z - z_0)}{k^2 w_0^4 + 4(z - z_0)^2} \quad (3.96)$$

光束半径作为 $z$ 的函数为

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{4(z - z_0)^2}{k^2 w_0^4}} \quad (3.97)$$

连同考虑式(3.96)中的 $\exp(-ikz)$ ，式(3.96)中的相位因子可改写为

$$\exp\left[-ik\left(z + \frac{2(z - z_0)r^2}{k^2 w_0^4 + 4(z - z_0)^2}\right)\right]$$

式中 $x^2 + y^2 = r^2$ 。上式表示了波面的曲率，如图3.17所示。因为在 $z$ 处波面偏离垂直平面的位移是

$$\frac{2(z - z_0)r^2}{k^2 w_0^4 + 4(z - z_0)^2} = \frac{r^2}{2R}$$

可以得到波面的曲率半径为

$$R(z) = (z - z_0) \left(1 + \frac{k^2 w_0^4}{4(z - z_0)^2}\right) \quad (3.98)$$

在 $z = z_0$ 处 $R$ 趋于无穷大，当 $z$ 远离 $z_0$ 时， $R \approx z - z_0$ 。当 $n = m = 0$ 时，轴线上高斯光束的复振幅可用 $G(z)$ 表示，可从式(3.90)、(3.94)导出

$$G(z) = \frac{2A}{ikF(z)}$$

由式(3.96)得相角 $\phi(z)$ 为

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{k w_0^4}{2(z - z_0)} \quad (3.99)$$

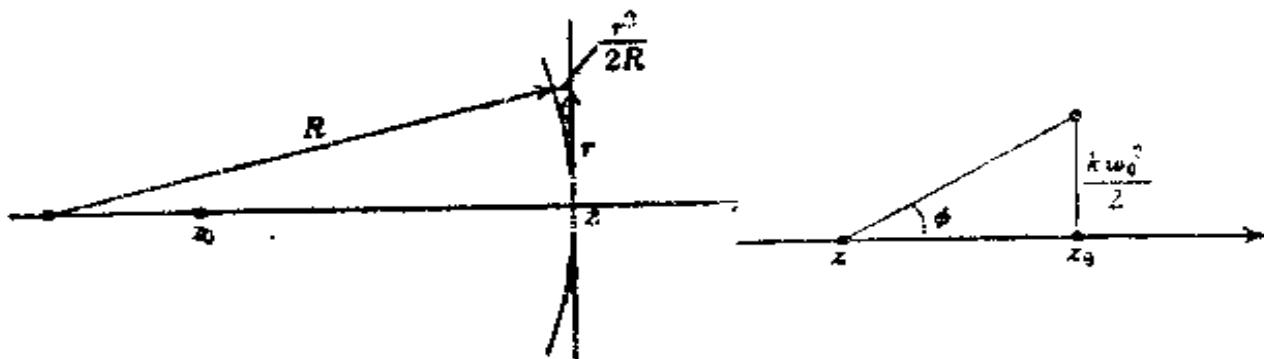


图3.17 波面的偏离和曲率  
半径 $R$

图3.18 相角 $\phi$ 和位置 $z$   
的关系

把积分常数 $A$ 改写为 $A_0 = 2A/kw_0$ ，则有

$$G(z) = \frac{A_0}{w} \exp(i\phi)$$

于是在 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  处的高斯光束振幅最后可写成

$$u_{00}(i, z) = \frac{A_0}{w} \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2} - ik \left( z + \frac{r^2}{2R} \right) + i\phi \right] \quad (3.100)$$

式中 $w$ 、 $R$ 、 $\phi$ 都是 $z$ 的缓变函数。

图3.18示出了相角和 $z$ 的关系。从式(3.97)可知，斜边长度正比于 $w$ 。当 $z$ 从 $-\infty$ 开始增加时， $\phi$ 从零开始增大，在 $z = z_0$ 处 $\phi$ 为 $90^\circ$ ，在 $z = +\infty$ 时 $\phi$ 为 $180^\circ$ 。如上所述，光斑半径在 $z = z_0$ 时最

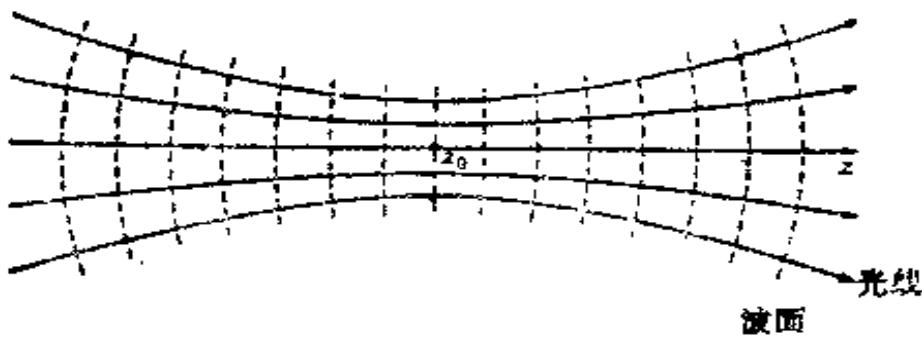


图3.19 高斯光束的光线（—）和波面（---）

小，此时波面(等相位面)是平面。在这个区域的附近，其波长大于横向延伸的平面波波长。高斯光束波面和光线相互正交情况如图3.19所示。

远离 $z_0$ 光腰处 $z$ 点的光斑半径正比于 $z - z_0$ ，远处的高斯光束振幅下降到 $1/e$ 处的光束半角 $\Delta\theta$ 可从式(3.97)得到

$$\Delta\theta = \frac{2}{kw_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

因此，最小光斑直径 $2w_0$ 和远离 $z_0$ 的光束发散角 $2\Delta\theta$ 的乘积为 $(4/\pi)\lambda$ ，约等于一个波长。

## §3.8 光学谐振腔

光学谐振腔是激光器的基本组成部分，常称为光腔。虽然从几何角度来看很大程度上它是开放的，但它仍是一个光的约束结构。从概念上讲，在3.4节中讨论的法布里-珀罗谐振腔是最简单的一类谐振腔，在第一台气体激光器中实际上使用了这种谐振腔。然而法布里-珀罗谐振腔很难在单模下工作，且镜面的平整精度必须优于波长的百分之一。除此之外，两面反射镜还必须精确地垂直激光轴线，其误差小于几弧秒。

在球面镜构成的谐振腔中，这些困难得到克服，现在大多数激光器都使用这类谐振腔。此外，在半导体激光器和一些染料激光器以及气体激光器中普遍采用波导谐振腔。

### 3.8.1 球面镜谐振腔的光斑尺寸和稳定性

考虑由球面镜 $M_1$ 和 $M_2$ 组成的长度为 $L$ 的光学谐振腔。如果镜面是理想反射面，则高斯光束可在镜面之间来回传播，以便重现其波分布，因此高斯光束的波面曲率能够与镜面曲率精确匹

配。于是沿着由镜面曲率中心确定的光束轴线方向建立起等幅波的本征模式。

因为实际上镜面不是理想的反射面，镜面间的介质也不是无损耗的，所以光波要衰减。然而在大多数激光谐振腔中，阻尼效应相当小，本征模式可得到很好的近似。

设 $z$ 轴正交于两镜面，两镜面的曲率半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ (见图3.20)。习惯上假定凹面镜的 $R$ 为正，凸面镜的 $R$ 为负。利用式(3.98)，可由曲率条件求出本征高斯模：

$$R_1 = z_0 \left( 1 + \frac{a^2}{z_0^2} \right) \quad (3.101)$$

$$R_2 = (L - z_0) \left( 1 + \frac{a^2}{(L - z_0)^2} \right) \quad (3.102)$$

为简便起见，式中 $a = k\omega_0^2/2$ 。从式(3.101)得到 $a^2 = z_0 R_1 - z_0^2$ 代入式(3.102)得

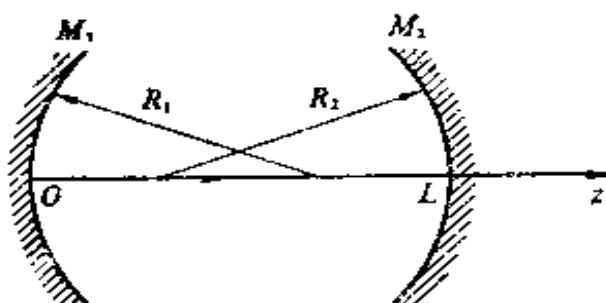


图3.20 球面镜谐振腔

$$(L - z_0)R_2 = (L - z_0)^2 + z_0 R_1 - z_0^2$$

于是求出

$$z_0 = \frac{(R_1 - L)L}{R_1 + R_2 - 2L} \quad (3.103)$$

$$a^2 = \frac{(R_1 + R_2 - L)(R_1 - L)(R_2 - L)L}{(R_1 + R_2 - 2L)^2} \quad (3.104)$$

现在如果定义谐振腔的稳定性参数为

$$g_1 = 1 - (L/R_1), \quad g_2 = 1 - (L/R_2) \quad (3.105)$$

则直接计算的结果为

$$z_0 = \frac{(1-g_1)g_2 L}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (3.106)$$

$$a^2 = \frac{(1-g_1 g_2)g_1 g_2 L^2}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}$$

或  $w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{(1-g_1 g_2)g_1 g_2}}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (3.107)$

从式(3.97)可得到两镜面上的光斑尺寸(1/e半径) $w_1 = w(0)$ 和 $w_2 = w(L)$ 为

$$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi g_1} \sqrt{\frac{g_1 g_2}{1 - g_1 g_2}} \quad (3.108)$$

当镜的实际尺寸并不比光束的光斑尺寸大得多时,由于高斯光束的外部逸出镜外,相当多的光能被损失掉。通常用菲涅耳数来量度这种衍射损耗,菲涅耳数定义为

$$N_F = r_m^2 / \lambda L \quad (3.109)$$

式中 $r_m$ 为腔镜的半径。如果 $N_F$ 远大于1,则衍射损耗可忽略。当 $N_F \approx 1$ 时,衍射损耗是可观的。 $n+m$ 越大,即横模阶次越高,衍射损耗越大。

在式(3.108)中 $g_1 g_2 = 1$ 时,光斑尺寸为无穷大。而且,若 $g_1 g_2 / (1 - g_1 g_2)$ 为负值,则不能形成稳定的高斯光束,因而谐振腔是非稳的。当 $0 < g_1 g_2 < 1$ 时,谐振腔是稳定的。谐振腔的稳定性条件示于图3.21 $g_1 g_2$ 平面上。法布里-珀罗谐振腔用 $g_1 = g_2 = 1$ 表示。当 $R_1 + R_2 = 2L$ 或 $g_1 + g_2 - g_1 g_2 = 0$ 时,谐振腔是共焦腔。当 $R_1 + R_2 = L$ 或 $g_1 g_2 = 1$ 时,谐振腔为共心腔。这几

种谐振腔的典型结构如图3.22所示。

值得提出的是，共焦腔的光线结构有两种不同的类型，图

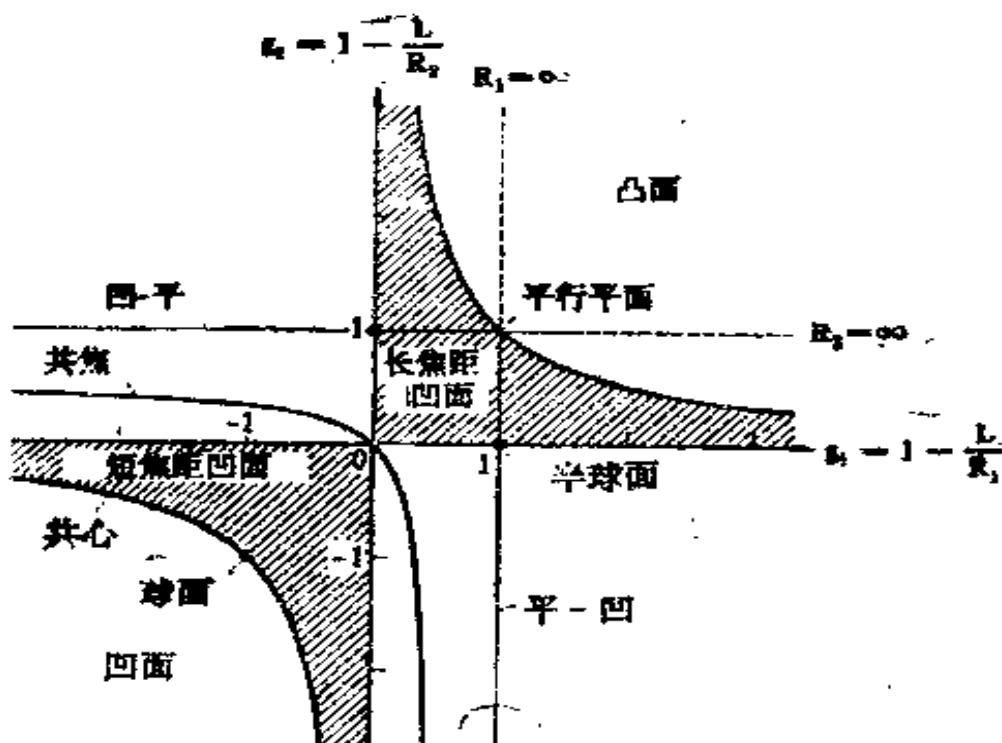


图3.21  $g_1 g_2$  平面上的稳定区(阴影部分)  
和非稳区(非阴影部分)

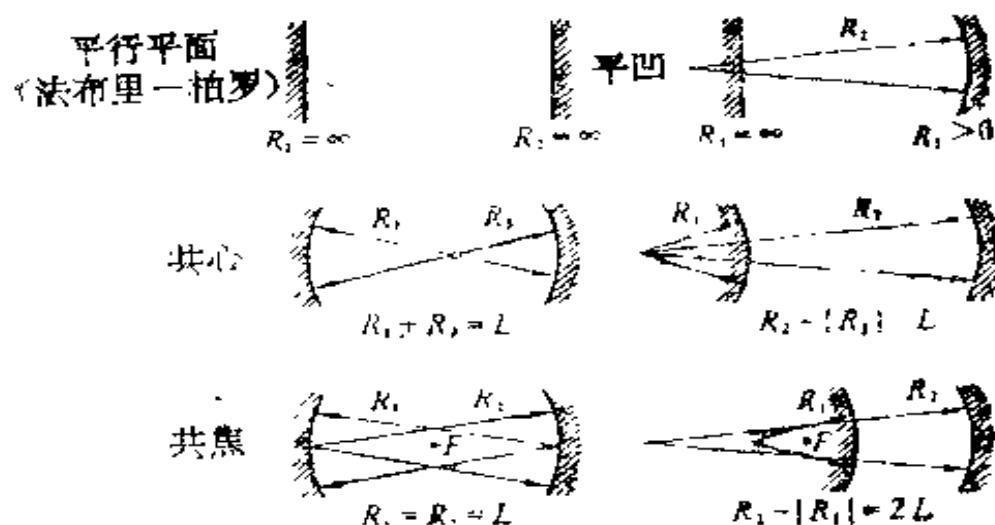


图3.22 镜构成谐振腔的典型方式

3.23中已用几何光学法举例说明。在这里还应该注意，高增益激光器常使用非稳定谐振腔，在这种激光器中，光在腔内只要几个往返就可以从激光介质中获得足够光能，得到有效的光输出。



图3.23 共焦腔中的光线传播  
(a)行波型, (b)驻波型

### 3.8.2 球面镜谐振腔的谐振频率

行波分量在两镜之间往返一次后必须有同相的相位差，由这一条件即可确定谐振模式的本征频率。换句话说，单程传播的相移一定是 $\pi$ 的整数倍。从式(3.91)、(3.95)得到高斯光束在 $z=0$ 和 $z=L$ 处的相位因子分别为 $(-z_0 + ia)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $(L - z_0 + ia)^{-\frac{1}{2}} \exp(-ikL)$ 。设 $(L - z_0 + ia)/(-z_0 + ia)$ 的幅角用 $\phi_0$ 标记，则相位条件可表示为

$$(n+m+1)\phi_0 + kL = l\pi \quad (3.110)$$

式中 $l$ 为一较大整数，称为纵模数。这里有

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{aL}{a^2 + z_0^2 - z_0 L}$$

用式(3.106)、(3.107)重写上式

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \sqrt{\frac{1 - g_1 g_2}{g_1 g_2}} \quad \text{或} \quad \phi_0 = \cos^{-1} \sqrt{g_1 g_2} \quad (3.111)$$

对稳定腔， $\phi_0$ 为正，其取值范围在 $0 \sim \pi/2$ 之间。因此，从式

(3.110)、(3.111)得到了( $n, m, l$ )模的本征频率:

$$\omega_{nm,l} = \frac{c}{L} [l\pi + (n+m+1)\cos^{-1}\sqrt{g_1 g_2}] \quad (3.112)$$

如前面提到的那样, 因为高斯光束的电场和磁场几乎是纯横向的, 故谐振模式记为  $\text{TEM}_{nm,l}$ , 在这里  $\text{TEM}$  表示“横电磁场”。因为  $l$  很大, 且常常是未定的, 所以模式可以用横模数  $n, m$  来标记而不包括纵模数, 如  $\text{TEM}_{nm}$ 。

$\text{TEM}_{nm}$  模的横向场分布由式 (3.95) 中厄米-高斯函数<sup>(6)</sup>来描述。图 3.24 示出了实验观察到的激光器镜面上模式图样的几个实例。因为  $H_0(x)=1$ , 所以基模  $\text{TEM}_{00}$  具有轴对称高斯分布。高阶厄米多项式是  $H_1(x)=x, H_2(x)=x^2 - 1, H_3(x)=x^3 - 3x, H_4(x)=x^4 - 6x^2 + 3$  等等。高阶模的本征频率高于基模, 如图 3.25 所示。

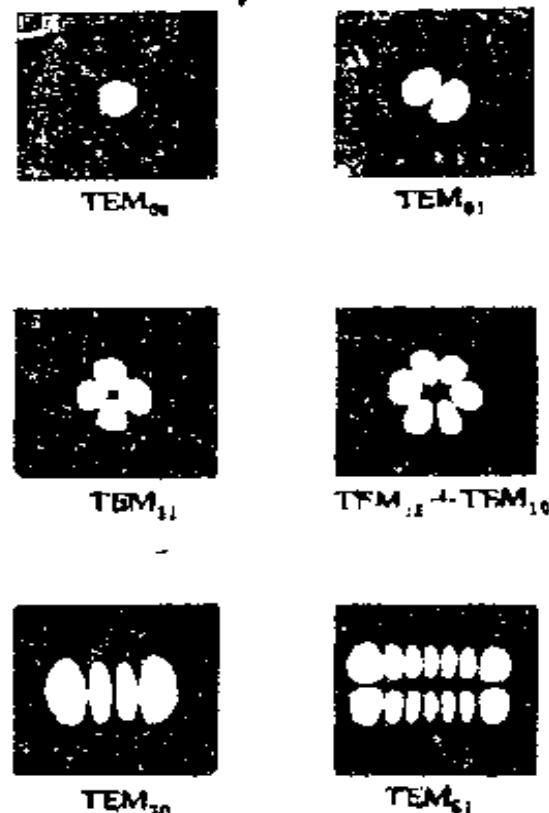


图 3.24 银玻璃激光器的横模图样

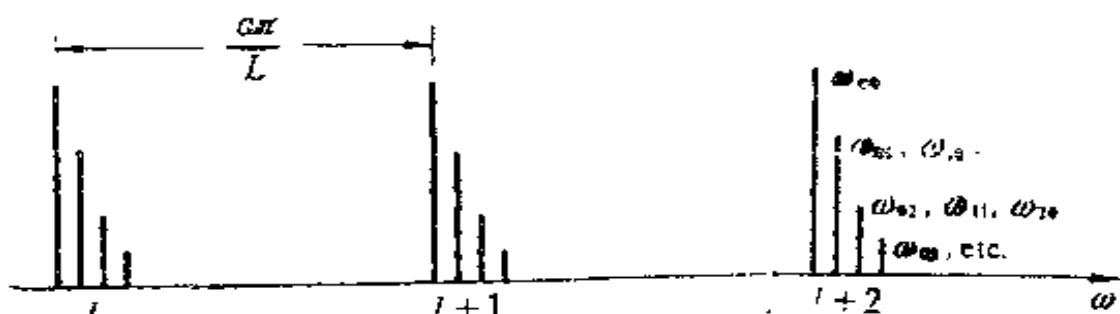


图 3.25 光学谐振腔的模式频谱示意图

(6) 极坐标下的替换表达式为拉盖尔-高斯多项式。

高阶横模有更宽的光束，这一点能从式(3.95)导出。因此，当一个可变光阑共轴地放置在谐振腔中时，高阶横模受到很大的抑制，基模占优势。另外，镜面上的细小刻痕或一根细金属丝粘在镜面或别的横跨光束的地方，都将会不同程度地抑制每个模式，抑制的程度取决于微扰处的光强分布。通常，任何折射率或损耗的横向分布都会影响横模，此特点可用于模式选择。因此，可以把光波导或光纤当做模式选择器。

### 3.8.3 其它类型的光学谐振腔

具有共心三镜结构的光学谐振腔(中间的一面镜对光有部分透射)，可用来改善模式选择能力和频率稳定性。还有折叠光束和交叉光束结构的谐振腔。在环形激光器和旋转传感器中，使用了由三面镜或四面镜构成的环形谐振腔(见图9.8(b))。

半导体激光器的光学谐振腔本质上是波导腔，它是由任一端面上都带有反射器的光波导组成。最简单的反射器由半导体解理面或小晶面构成，也可使用外加镜，但使用沿光波导的波纹镜结构则更加紧凑和稳定，且性能更好。沿着激活区周期性结构所产生的反射，称为分布反馈，简写为DFB。当反射器与激活区分开时，这种类似的结构称为分布布拉格反射器，简写为DBR。这种反射器在布拉格条件下( $\lambda = 2ds \sin\theta$ 且 $\theta = \pi/2$ )的波长 $\lambda_c$ 处具有最大的反射率。

在长波长气体激光器中，也使用了圆形或矩形横截面的波导谐振腔，它们有较小孔径和较高的光场强度，能有效的工作。除此以外可用光纤构成很长的光学谐振腔。为了改进谐振腔的频率调谐特性、频率选择性和偏振特性等，可在光学谐振腔中插入光栅、棱镜、偏振片和透镜。对这类谐振腔更深入的讨论超出了本书的范围。

## 习 题

3.1 已知两种介质的折射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$ ，试求正入射在平面边界上光的反射系数。在正入射时，为什么式(3.28)中的 $r_s$ 与式(3.33)中的 $r_s$ 符号相反？

3.2 试由麦克斯韦方程组证明：在均匀、各向同性的介质中传播的平面电磁波的电场与磁场应相互垂直，并且与电介质损耗和磁损耗无关(提示：证明 $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$ )。

3.3 假设在复折射率为式(3.51)表示的介质中，有一单色平面电磁波传播，试求磁场和电场之间的相位差公式。

3.4 若偏离布儒斯特角一小角度 $\Delta\theta$ ，求一阶近似下 $p$ 分量反射系数的表达式。试估算 $\Delta\theta = 1^\circ$ 和 $n_{21} = 1.52$ 时的反射系数。

3.5 当入射角刚好为布儒斯特角时，偏振面倾斜一小角度 $\Delta\phi$ ，试求一阶近似下反射系数的表达式，并估算 $\Delta\phi = 1^\circ$ ， $n_{21} = 1.52$ 时的反射系数。

3.6 证明用作光谱仪的法布里-珀罗干涉仪的分辨率为

$$\lambda / \Delta \lambda = nF$$

式中 $n$ 为式(3.61)中的整数， $F$ 为细度， $\Delta\lambda$ 为与 $\Delta\phi$ 相应的波长差。以 $L$ 、 $\lambda$ 、 $R$ 的形式重写分辨率表达式，并计算 $\lambda = 0.57\mu\text{m}$ ， $L = 6\text{cm}$ 和 $R = 0.91$ 时的分辨率。

3.7 如果薄膜的光学厚度为 $\lambda/4$ ，并且折射率等于空气和玻璃折射率的几何平均值。试证明正入射条件下，表面镀有这种薄膜的玻璃的反射系数为零。如果空气中波长为500nm，玻璃表面镀有该波长下的相消反射膜，试用图示出玻璃表面反射率随波长的变化关系。若考虑玻璃和薄膜的正常色散，试定性说明图形应怎样修改？注意：正 肯尼 $n/\partial\lambda < 0$ 。

3.8 若式(3.70)不满足 $\theta^3 \ll 1$ , 试求平板波导的最大接收角 $\theta_{\max}$ , 并计算 $\eta_1 = 1.48, \eta_2 = 1.44$ 时用角度表示的最大接收角。

3.9 用图解法解释, 为什么对于沿着平板波导传播的瞬逝波分量, 模式越高, 衰减越慢? (提示: 参考图3.13和式(3.72))

3.10 用图示出高斯激光束沿轴向的光强分布(提示:  $I(z) = [\omega_0/w(z)]^2 I_0$ )。

3.11 设双光子的跃迁几率正比于光强的平方, 即光场的四次方。证明在大块物质中, 由聚焦高斯光束感应的双光子跃迁总数基本上与焦点处的光束半径无关。为什么当透镜焦距太长或太短时, 实际跃迁的总数下降?

3.12 画图示出高斯光束波面曲率半径随 $z$ 变化的函数关系, 并找出最小曲率半径。

3.13 假设高斯光束通过一根长 $2L$ , 半径为 $a$ 的圆柱管, 光处在管子的中心, 入射到进口横截面 $\pi a^2$ 上的功率可以透过, 试导出其透射系数公式, 并证明光腰等于 $\sqrt{\lambda L/\pi}$ 时, 能获得最大透射率。当高斯光束透过一个直径为 $a = 1\text{ mm}$ , 长为 $L = 50\text{ cm}$ 的管子时, 试计算波长分别为 $0.63\mu\text{m}$ 和 $10.6\mu\text{m}$ 时的透射百分比。

3.14 如果两凹面镜的曲率半径 $R_1, R_2$ 完全相等, 即 $R_1 = R_2$ , 则共焦结构谐振模的光斑尺寸最小。试证明, 当两镜的曲率半径稍为不同时, 在接近共焦结构时, 光斑尺寸将变大。

## 第四章 光的发射和吸收

正是由于对光的发射和吸收的研究，才发展了象光谱化学分析、原子物理学和量子力学这样一些学科，并且促进了微波量子放大器和激光器的发明。物质的光发射和吸收，是以一个量子或一个光子为单位的不连续过程，这个发现成为本世纪量子物理发展的基础。热辐射的普朗克定律证明了使用光量子能量的必要性。在推导该定律之前，我们还将计算电磁波的模密度。

### §4.1 电磁波的模密度

当光波电磁场被有效地限制在一个封闭空间或激光谐振腔内时，用封闭空间或激光谐振腔的特征模来展开电磁波十分方便。从物体发射的光进入到自由空间时，必须考虑模在无限延伸的空间中的连续分布。然而，即使在这种情况下，把电磁场限制在一个足够大的有限空间内，如3.4节所作的那样，由于特征模变得不连续，使问题得以简化。当采用笛卡尔坐标时，通常在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向上取一个边长为  $L$  的立方体，显然  $L$  必须远远大于物体的尺寸和光波的波长。当考虑原子和光相互作用时，必须  $L \gg c\tau_a$ ， $\tau_a$  为原子激发态的寿命。

现在，我们来研究这种尺寸的立方体中电磁波的特征模，计算空间单位体积内模的数目。令笛卡尔坐标中单位矢量为  $\hat{x}$ ， $\hat{y}$  和  $\hat{z}$ ，则任意方向上的平面波波矢可表示为

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (4.1)$$

具有这种波矢的平面电磁波的复振幅可表示为

$$A \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$$

式中  $A$  表示振幅大小和相位的复量,  $\omega$  为频率,  $\vec{r}$  为半径矢量,  
 $\vec{r} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ 。

首先计算边长为  $L$  的一个立方体表面上满足周期性边界条件的模密度。由于边界条件要求在  $x = 0$ 、 $x = L$  处的振幅相同, 因而特征模可由下式确定

$$\exp(ik_x L) = 1$$

所以

$$k_x = (2\pi/L)n_x$$

同理有

$$k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$

式中  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$  可为正、负整数或零。由  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  有

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (4.2)$$

为简单起见, 若假定空间是真空, 则用  $n_x$ 、 $n_y$  和  $n_z$  表示的光频  $\omega = kc$  由下式给出

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (4.3)$$

因为  $n_x$ 、 $n_y$  和  $n_z$  不连续, 所以  $\omega$  也取不连续值。如果  $L$  远大于光波长 ( $\lambda = 2\pi/k$ ), 则  $n_x + n_y + n_z$  是一个很大的约为  $L^2/\lambda^2$  的量。由于存在着大量密集的模, 因此可以按下面方式计算  $k$  空间的模数。

如上所述, 因为  $k_x$ 、 $k_y$  和  $k_z$  都是  $2\pi/L$  的整数倍, 沿  $x$ 、 $y$  和  $z$

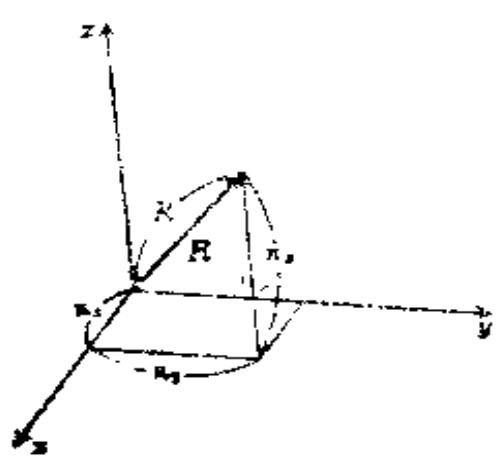


图4.1 波矢 $\vec{R}$ 和它的 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 分量( $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$ )，单位为 $2\pi/L$

方向分别取 $n_x$ 、 $n_y$ 和 $n_z$ (如图4.1所示)，于是在半径为 $R$ 的球内 $n_x$ 、 $n_y$ 和 $n_z$ 的组数等于球体积 $(4\pi/3)R^3$ 。由于每组( $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$ )有两个偏振方向不同的电磁波模，因而在半径为 $R$ 的球内用点表示的总模数等于 $2(4\pi/3)R^3$ 。因为 $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = R$ ，用 $k = (2\pi/L)R$ 和 $\omega = (2\pi c/L)R$ 。于是频率在 $0 \sim \omega$ 的电磁波特征模的总数目由下式给出

$$2 \times \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\omega L}{2\pi c} \right)^3 = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} L^3 \quad (4.4)$$

对式(4.4)微分，得到频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 之间模的数目为

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} L^3 d\omega$$

由于立方体的体积为 $L^3$ ，因而空间单位体积的模数，即频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 范围的模密度可表示为

$$m(\omega) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (4.5)$$

应该指出，该式不仅对周期性边界条件成立，而且当立方体边界为理想导体时也成立。在这种情况下，电磁波模式可以看成是法布里-珀罗谐振腔模式的三维推广(见3.4节讨论)，特征模式可以看成是在 $x$ 、 $y$ 和 $z$ 每个方向上驻波的组合。因为在某个方向上的驻波是传播方向分别为 $+\vec{k}$ 和 $-\vec{k}$ 两个波的叠加，所以改变 $\vec{k}$ 的符号可得到同一驻波。于是，在计算驻波模数时，只对 $n_x$ 、 $n_y$ 和 $n_z$ 取正整数。当 $x = 0$ 和 $L$ ， $y = 0$ 和 $L$ 时，边界条

件必须满足

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L} n_z$$

这和3.4节中式(3.55)完全一致，因此得到

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

式中 $n_x$ 、 $n_y$ 和 $n_z$ 为正整数。只要计算半径为 $R = \omega L / \pi c$ 球体的八分之一，考虑到两个偏振方向，再乘以2就可以得到频率在 $0 \sim \omega$ 的驻波模数，故有

$$\frac{2}{8} \times \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\omega L}{\pi c}\right)^3 = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} L^3$$

这与式(4.4)一致。因此，由理想导体包围的空间，电磁波模密度由式(4.5)确定。

如果用线频率 $\nu = \omega / 2\pi$ 代替圆频率，计算 $\nu \sim \nu + d\nu$ 之间的模密度，则式(4.5)重新写成

$$m(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (4.6)$$

## §4.2 热辐射的普朗克定律

根据统计力学原理，一个振子在热平衡下能量处于 $U$ 和 $U + dU$ 之间的几率为

$$p(U) dU = \frac{1}{k_B T} \exp(-U/k_B T) dU \quad (4.7)$$

式(4.7)称为正则分布，其中玻尔兹曼常数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 。温度一定时，几率分布随能量的增加而下降，如图 4.2 所示。低

温时，几率分布主要集中在低能区域；高温时，几率分布变得平坦。因此，在高能区域有一个相当宽的分布范围。

黑体辐射可看成是在热平衡下高温物体发射光电磁波。由此可见，每个模式的电磁波能量取正则分布（式（4.7））。只要具有特征模式频率的电磁波的能量 $U$ 取连续值，用任何方法都不可能解释观察到的黑体辐射光谱分布。

1900年普朗克假设电磁波的能量不连续，只取分立值

$$U = nh\nu = nh\omega \quad (4.8)$$

式中 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，从而能用令人佩服的方法解释所观察到的黑体辐射光谱。这里，常数 $h = 2\pi\hbar = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ，称为普朗克常数。式（4.8）可以看成是具有 $n$ 个光子的态，每个光子的能量为 $\hbar\omega$ 。如果电磁波的能量只能取式（4.8）给定的分立值，则在热平衡下正则分布的能量分布如图 4.3 所示。这时，平均能量 $W_{av}$ 可以用如下公式计算

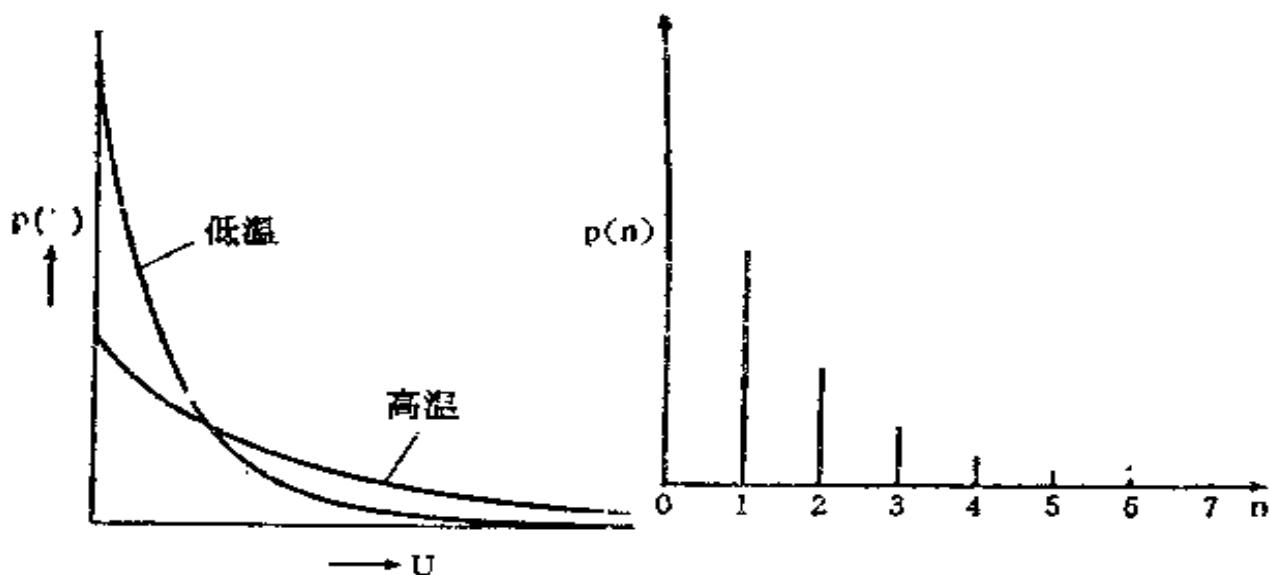


图 4.2 热平衡下由式（4.7）给出的能量分布

图 4.3 热平衡下， $U = nh\omega$  时的能量分布

$$W_{\text{th}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega \exp(-n \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \hbar \omega / k_B T)} \quad (4.9)$$

它给出了频率为 $\omega$ 的模式热辐射，如果令

$$\exp(-\hbar \omega / k_B T) = r$$

则式(4.9)中分母的级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

分子的级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} n r^n = r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

因此得到

$$W_{\text{th}} = \hbar \omega \frac{r}{1-r} = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \quad (4.10)$$

研究上述方程，我们发现当 $\hbar \omega \ll k_B T$ 时， $W_{\text{th}} \approx k_B T$ ，这和假定 $U$ 取连续值的情况一致。但是，在高频波段 $\hbar \omega \gg k_B T$ ， $W_{\text{th}}$ 将随频率的增加而趋于零，明显地与 $U$ 取连续值的情况不同。

方程(4.10)是热平衡下物体温度为 $T$ 时，每个电磁波模式的平均能量。由于频率在 $\omega$ 和 $\omega + d\omega$ 之间的电磁波模密度由式(4.5)给出，因而所有模式单位体积热辐射的能量，即圆频率在 $\omega$ 和 $\omega + d\omega$ 之间的热辐射的能量密度可从式(4.5)和(4.10)得到

$$W_{\text{th}}(\omega) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega d\omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \quad (4.11)$$

若用线频率 $\nu$ 表示，则有

$$W_{\text{rr}}(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \cdot \frac{h\nu d\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (4.12)$$

式(4.12)是黑体辐射的普朗克定律或热辐射的普朗克方程。图4.4示出了几种不同温度下黑体辐射的光谱强度或光谱轮廓。

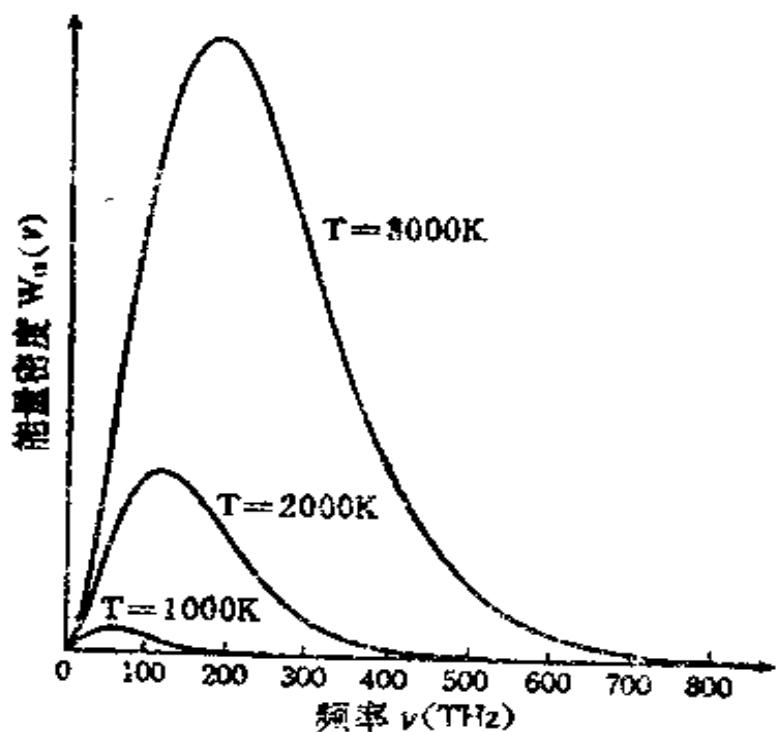


图4.4 黑体辐射的光谱分布(计算值)

### §4.3 自发发射和受激发射

当原子在两个能级 $W_U$ 和 $W_L$ 间跃迁时，在上能级 $W_U$ 的原子将发射光，在下能级 $W_L$ 的原子则吸收光。发射或吸收的光的频率由玻尔关系式给出

$$\omega = \frac{W_U - W_L}{\hbar} \quad (4.13)$$

式(4.13)不但对原子而且对分子、离子、原子团和原子核都成立，但在第4和5章中一般都认为是原子。

下能级原子的光吸收与入射光的强度成正比。即使没有入射光，上能级原子也会发射光，这种现象称为自发发射<sup>(1)</sup>。设A为单位时间内单个原子的自发发射几率，当入射光的能量密度为 $W(\omega)$ 时，上能级一个原子发射光的几率由下式给出

$$p(U \rightarrow L) = A_{UL} + B_{UL}W(\omega) \quad (4.14)$$

式中右边第二项表示正比于入射光强度的光发射，称为感应发射或受激发射。下能级一个原子吸收光的几率由下式给出

$$p(L \rightarrow U) = B_{LU}W(\omega) \quad (4.15)$$

如果上下能级分别对应单个本征态<sup>(2)</sup>，则有

$$B_{UL} = B_{LU} \quad (4.16)$$

如果上能级为 $g_U$ 重简并态，下能级为 $g_L$ 重简并态，由于对每对本征态间的跃迁关系式(4.16)都成立，因而考虑简并时其总跃迁几率为

$$g_U B_{UL} = g_L B_{LU}$$

除非特别说明，以下我们只考虑非简并能级之间的跃迁。如果两个能级或其中一个能级是简并的，则跃迁是所有子能级间跃迁的叠加。

式(4.14)、(4.15)由爱因斯坦在1916年导出，系数 $A_{UL}$ 和 $B_{UL}$ 称为爱因斯坦A系数和B系数。在不需要指明上下能级时，可以去掉下标，简写为A和B。

如果下能级有 $N_L$ 个原子，则这些原子在单位时间内吸收的光能量，即吸收的功率为：

$$P_{abs} = \hbar \omega B W(\omega) N_L \quad (4.17)$$

(1)亦称自发辐射。

(2)量子力学本征态无简并性。

相应地，单位时间内上能级 $N_u$ 个原子发射的光能量，即发射功率由下式给出

$$P_{\text{em}} = \hbar\omega(A + BW(\omega))N_u \quad (4.18)$$

当两个原子系统处于温度为 $T$ 的热平衡状态时，将保持玻耳兹曼分布或正则分布，故有

$$N_u = N_i \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_i T}\right) \quad (4.19)$$

若该系统因黑体辐射处于平衡状态，则在能量密度为 $W_{\text{rad}}(\omega)$ 的热辐射场作用下，发射功率和吸收功率相等。当 $W(\omega) = W_{\text{rad}}(\omega)$ 时，令 $P_{\text{abs}} = P_{\text{em}}$ ，从式(4.17)、(4.18)得到

$$W_{\text{rad}}(\omega) = -\frac{A}{B} \cdot \frac{N_u}{N_i - N_u} \quad (4.20)$$

将式(4.19)代入上式，则有

$$W_{\text{rad}}(\omega) = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_i T) - 1} \quad (4.21)$$

根据量子力学原理，若一个模式内有几个光子，则上能级一个原子发射一个光子的几率为

$$p(U \rightarrow L) = (n+1)A$$

下能级一个原子吸收一个光子的几率为

$$p(L \rightarrow U) = nA$$

若模密度为 $m(\omega)$ ，则频率在 $\omega$ 到 $\omega + d\omega$ 范围内有 $m(\omega)d\omega$ 个模。

假定每个模内平均有 $n$ 个光子<sup>3</sup>，则辐射的能量密度为

$$W(\omega) = m(\omega)n\hbar\omega$$

(3)当每个模式的电磁场可以用一个谐振器来描述时，它的能量为 $(n+1/2)\hbar\omega$ ，式中 $n$ 为整数。 $\hbar\omega/2$ 为零点能，并由此产生量子起伏，但不能用任何光学能量测量法检测到它。

利用该结果重写上面两个方程，得到

$$p(U \rightarrow L) = \frac{A}{m(\omega)\hbar\omega} W(\omega) + A$$

$$p(L \rightarrow U) = \frac{A}{m(\omega)\hbar\omega} W(\omega)$$

把上面两式与式(4.14)、(4.15)比较，立即可看出

$$B = \frac{A}{m(\omega)\hbar\omega} \quad (4.22)$$

利用模密度式(4.5)，得到

$$\frac{A}{B} = m(\omega)\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

把上式代入式(4.21)则有

$$W_{\text{th}}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (4.23)$$

式(4.23)和前面得到的热辐射普朗克方程(4.11)完全一致。

尽管辐射吸收和感应发射只发生在入射光的一个模式上，但是自发发射却发生在光谱宽度  $d\omega$  内所有的  $m(\omega)d\omega$  个模式上，因此  $A = m(\omega)B\hbar\omega$ 。这里，附加因子  $\hbar\omega$  是由于在式(4.14)、(4.15)中不用光子数而用辐射能量密度  $W(\omega)$  来表示发射和吸收几率的结果。如果用光子数密度  $\rho(\omega)$  代替  $W(\omega)$  并用  $A' + B'\rho(\omega)$  表示发射几率，则有  $A' = m(\omega)B'$ 。到此为止，我们仅考虑  $A$  对  $B$  之比， $A$  和  $B$  的绝对值将在下一章讨论。

假如忽略处在热平衡下原子的其它能级而只考虑  $W_U$  和  $W_L$  两个能级，则只能得到频率由玻尔关系式(4.13)决定的单色光。对其它频率，辐射与这两个能级原子之间无相互作用，故  $A = B = 0$ ，因此原子对这些频率是完全透明的。另外，由于黑体的能级是连续

分布的，因此它可吸收或发射所有频率的光。即使能级连续分布，处于热平衡状态下的上能级（正好位于下能级上面的  $\hbar\omega$  处）原子数也等于下能级原子数的  $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$  倍。因此，对于一个黑体，式(4.23)对任何频率都成立，表明黑体辐射是频率  $\omega$  的连续函数。

在4.2节，我们假定光子为正则分布，导出了热辐射方程，而这里假定原子为玻耳兹曼分布，且光子处在热平衡状态下导出热辐射方程，都得到了完全一致的结果。热辐射普朗克方程与实验结果很好地符合，表明光能量不但是量子化的，而且受激原子产生的光发射中存在自发发射和感应发射。若  $A=0$ ，则从式(4.20)或(4.21)得到  $W_{uv}=0$ ，并且无热辐射。若  $B_{uv}=B_{vu}=0$  或  $B_{uv}=0$  而  $B_{vu}\neq 0$ ，则热辐射光谱将完全不同。

#### §4.4 电偶极子辐射和自发发射几率

根据经典电磁理论，一个电荷被加速时将产生电磁辐射。因此，一个做简谐运动的电荷能以振荡频率产生电磁辐射。间距为  $z$  的正负电荷  $\pm e$  构成的电偶极矩，其大小等于  $ez$ ，它的方向从电荷  $-e$  到电荷  $+e$ 。现在，如果做以下的谐波运动

$$z = z_0 \exp(i\omega t) + z_0^* \exp(-i\omega t) \quad (4.24)$$

叫振荡电偶极矩  $\mu(t)$  为

$$\mu(t) = p_0 \exp(i\omega t) + p_0^* \exp(-i\omega t) \quad (4.25)$$

式中  $p_0 = ez_0$ 。

这个振荡电偶极子所发射的电磁辐射场由麦克斯韦方程组确定。离电偶极子  $r$  远处 ( $kr \gg 1$ )，电场和磁场分别为

$$E_\theta = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{k^2 \sin\theta}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + c.c.$$

$$H_{\phi} = -\frac{\omega p_0}{4\pi} \cdot \frac{k \sin \theta}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + \text{c.c.} \quad (4.26)$$

$$E_r = E_{\phi} = H_{\theta} = H_r = 0$$

式中  $k = \omega/c$ ,  $\varphi$  是对  $z$  轴的方位角, c.c. 表示前面一项的复数共轭。玻印廷矢量的径向分量的时间平均则变成

$$P(\theta) = \frac{\omega^4 |p_0|^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (4.27)$$

在整个立体角范围内对上式积分, 得到振荡电偶极子(式(4.25))辐射的总功率为

$$P = \frac{\omega^4 |p_0|^2}{3\pi \epsilon_0 c^3} \quad (4.28)$$

把位移  $z$  用一个量子力学算子表示, 由  $\pm e$  电荷位移产生的电偶极矩  $\mu = ez$  也用一个算子表示, 决定上下能级间跃迁的电偶极矩算子由一个作用于上( $U$ )下( $L$ )态本征函数的  $2 \times 2$  阶矩阵表示。当为非简并态时, 波函数的对称性是确定的:

$$\phi_U(\vec{r}) = \phi_L(-\vec{r}) \quad (\text{偶})$$

$$\text{或} \quad \phi_U(\vec{r}) = -\phi_L(-\vec{r}) \quad (\text{奇})$$

式中  $i = U, L$ 。两能级原子的电偶极矩矩阵对角元为零, 即  $\mu_{UU} = \mu_{LL} = 0$ , 这是因为  $ez$  是奇函数, 无论  $\phi_i$  是偶函数或奇函数,  $\phi_i^* e z \phi_i$  总是奇函数。因此

$$\mu_{U,L} = \int \phi_U^*(\vec{r}) e z \phi_U(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \quad (4.29)$$

当上下态的对称性不同时, 则非对角元  $\mu_{UL}$  和  $\mu_{LU}$  不为零, 这时它们表示跃迁的几率振幅。由于表示一个物理量的任何算子都是哈密顿算子, 因此

$$\mu_{UL} = \mu_{LU}^* \quad (4.30)$$

一般认为在薛定谔方程中波函数是随时间变化的, 可以把薛定谔

方程中的波函数 $\phi_n(\vec{r}, t)$ 分离为一个时间函数和一个空间函数 $\phi_n(\vec{r})$ 的形式

$$\phi_n(\vec{r}, t) = \exp(-i(W_n/\hbar)t)\phi_n(\vec{r}) \quad (4.31)$$

式中 $W_n$ 为 $n$ 态的本征能量。与薛定谔表示式相反，海森伯表达式中波函数不随时间变化，取而代之的是物理量随时间变化。在这里，我们将使用薛定谔表达式。

上( $U$ )下( $L$ )态间跃迁电偶极矩的 $z$ 分量的非对角矩阵元可以表示为

$$\begin{aligned} \int \phi_U^* e z \phi_L d\vec{r} &= \int \phi_U^* e z \phi_L d\vec{r} \exp(i\omega_0 t) = \mu_{UL} \exp(i\omega_0 t) \\ \int \phi_L^* e z \phi_U d\vec{r} &= \int \phi_L^* e z \phi_U d\vec{r} \exp(-i\omega_0 t) = \mu_{LU} \exp(-i\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

式中 $e$ 为电子电荷。可以看出，如果 $\omega_0 = (W_U - W_L)/\hbar$ ，上式则分别相当于经典电偶极矩式(4.25)右边的第一和第二项。因此，令 $p_0 = \mu_{UL}$ ，就可以从经典电偶极子辐射的计算中得到自发发射几率。从式(4.28)得到一个受激原子发射的功率为

$$P_{emt} = \frac{\omega^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\mu_{UL}|^2 \quad (4.33)$$

另外，根据式(4.18)在没有入射光时，一个原子所发射的功率可写成 $P_{emt} = A\hbar\omega$ ，这样得到爱因斯坦 $A$ 系数为

$$A = \frac{\omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\mu_{UL}|^2 \quad (4.34)$$

上式的推导为半经典近似，其中原子用量子力学处理，而电磁场用经典方法处理。与激光有关的半经典近似将在7~9章中详细讨论。式(4.34)与全量子力学计算的结果一致，表明量子力学自发发射过程，可以看成是等效的原子电偶极子的经典电偶极子

辐射。从相对论角度来看麦克斯韦方程是正确的，它确切地描述了以量子力学为基础的单个光子行为。

既然得到了自发发射几率(式(4.34))，就能够求解爱因斯坦 $B$ 系数，由该系数给出感应发射和吸收几率。利用式(4.22)，计算电磁波模数得到 $B$ ，若入射光频率为 $\omega$ ，则有

$$B = \frac{\pi}{3\epsilon_0 h^2} |\mu_{\text{eff},z}|^2 \quad (4.35)$$

但是必须指出，这是在入射光相对于原子电偶极矩方向非极化的情况下导出的，当原子电偶极矩相对于入射光偏振方向是随机时，方程(4.35)也适用。因此， $x$ 、 $y$ 和 $z$ 分量 $\mu_x$ 、 $\mu_y$ 和 $\mu_z$ 间有以下关系

$$\langle |\mu_x|^2 \rangle = \langle |\mu_y|^2 \rangle = \langle |\mu_z|^2 \rangle = |\mu_{\text{eff},z}|^2 / 3$$

式中 $\langle \rangle$ 表示统计平均并已省略下标 $UL$ 。如果原子偶极矩平行于入射光的偏振方向，则感应发射或吸收系数由下式给出

$$B = \frac{\pi}{\epsilon_0 h^2} |\mu_{\text{eff},z}|^2 \quad (4.36)$$

用量子力学计算 $B$ 系数的方法将在7.2节讨论。上面 $B$ 系数用圆频率表示，如果用线频率表示，则会得到不同的结果(见后)。

用 $2\pi\nu$ 代替式(4.34)中的 $\omega$ ，便得到频率为 $\nu$ 的自发发射的爱因斯坦 $A$ 系数

$$A = \frac{16\pi^3 \nu^3}{3\epsilon_0 h c^5} |\mu_{\text{eff},z}|^2 \quad (4.37)$$

$B$ 系数与式(4.35)或(4.36)中只令 $\omega = 2\pi\nu$ 得到的结果不同，因为在 $\nu$ 和 $\nu + d\nu$ 频率范围内模数 $m(\nu)d\nu$ 不同于 $\omega$ 和 $\omega + d\omega$ 圆频率范围内的模数 $m(\omega)d\omega$ (见4.1节)，如果用 $\nu$ 代替 $\omega$ 表示 $B$ ，则式(4.22)变为

$$B_v = \frac{A}{m(v)hv}$$

把式(4.6)、(4.37)代入上式可得

$$B_v = \frac{2\pi^2}{3\varepsilon_0 h} |\mu_{vA}|^2 \quad (4.38)$$

下标 $v$ 表示入射光的能量密度用线频率而不是用圆频率表示。

式(4.35)和(4.38)是原子的指向相对于入射光偏振方向是随机的情况下的平均值。假定所有原子偶极矩都按入射光的偏振方向排列，则应去掉分母中的因子3。当入射光的偏振取 $z$ 方向时，一般应写为 $\langle |\mu_z|^2 \rangle$ 而不写为 $|\mu_{0z}|^2/3$ 。若所有的原子都按 $z$ 方向排列，则有 $\langle |\mu_z|^2 \rangle = |\mu_{0z}|^2$ ，若它的排列方向是随机的，则有因子 $1/3$ 。任何中间情况都可以用 $\langle |\mu_z|^2 \rangle$ 来估计。式(4.38)代表了随机取向偶极子的最典型情况。

## §4.5 光 的 吸 收

如果入射到一个处于热平衡、温度为 $T$ 的物体上的光强，比该温度下的黑体辐射强度还高，则入射光被吸收且被衰减。由于吸收体一般不是黑体，而且入射光的光谱分布不同于黑体的光谱分布，因此我们将分别讨论每一个频率分量。如果频率为 $\omega$ 的入射光的能量密度 $W(\omega)$ 比吸收体该频率下热辐射的能量密度 $W_{\text{th}}(\omega)$ 还高，则吸收体吸收的功率(式(4.17))将高于发射功率(式(4.18))，为净吸收。因此，如果一个明亮的光源放在物体的一边，则可以观察到物体的吸收光谱。反之，如果物体周围更暗(背景温度比物体低)，则将观察到物体的发射光谱。假如物体是一个无发射的理想吸收体，则只能观察到物体的热辐射。

现在，假定物体热辐射忽略不计，只考虑强入射光的吸收。与连续光谱的热辐射不同，假定入射光几乎是理想的单色光，例

如来自激光器的激光。换言之，无论吸收体的吸收线宽怎样窄，都假设光源的光谱宽度比它更窄。入射光的频率记为 $\omega$ ，则在中心频率 $\omega_0$ 附近感应跃迁系数的频率分布为

$$B(\omega) = Bg(\omega) \quad (4.39)$$

由于爱因斯坦 $B$ 系数是在光源的光谱分布比谱线的分布更宽的情况下定义的，由此得到

$$\int B(\omega) d\omega = B, \quad \int g(\omega) d\omega = 1$$

式中 $g(\omega)$ 表示归一化线型函数。根据 $B(\omega)$ ，上下能级的原子数分别为 $N_u$ 和 $N_d$ 的吸收体，单位体积所吸收的光功率为

$$\Delta P = (N_d - N_u) \hbar \omega B(\omega) \frac{P}{c} \quad (4.40)$$

式中 $P$ 为通过单位面积的入射光功率。取传输方向为 $z$ 轴方向，得到

$$\frac{d}{dz} P(z) = - (N_d - N_u) \frac{\hbar \omega}{c} B(\omega) P(z)$$

振幅吸收常数 $a(\omega)$ 定义为

$$\frac{d}{dz} P(z) = - 2a(\omega) P(z)$$

比较上面两等式，得到振幅吸收常数为

$$a(\omega) = (N_d - N_u) \frac{\hbar \omega}{2c} B(\omega) \quad (4.41)$$

把式(4.39)、(4.35)代入式(4.41)，得到

$$a(\omega) = (N_d - N_u) \frac{\pi \omega}{6 \epsilon_0 \hbar c} |\mu_{u,d}|^2 g(\omega) \quad (4.42)$$

光谱线有各种分布，但洛伦兹分布和高斯分布是最基本的。对于洛伦兹分布，函数 $g_L(\omega)$ 定义为

$$g_L(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2} \quad (4.43)$$

当 $\omega - \omega_0 = \pm \Delta\omega$ 时,  $g_L(\omega)$ 为最大值 $g_L(\omega_0) = 1/\pi\Delta\omega$ 的一半,  $\Delta\omega$ 称为半最大值半宽度(简写为HWHM)。

HWHM为 $\Delta\omega$ 的高斯分布函数, 由下式给出

$$g_G(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta\omega} \exp\left[-\ln 2 \cdot \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right] \quad (4.44)$$

在光谱线中心 $\omega = \omega_0$ 处的最大值为

$$g_G(\omega_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{0.470}{\Delta\omega}$$

其大小是洛伦兹分布最大值 $g_L(\omega_0)$ 的 $\sqrt{\pi \ln 2} = 1.476$ 倍。图4.5比较了具有相同 $\Delta\omega$ 的 $g_L(\omega)$ 和 $g_G(\omega)$ 分布函数, 从图中可看出, 洛伦兹分布比高斯分布向两边延伸得更远, 因此归一化后有较小的最大值。

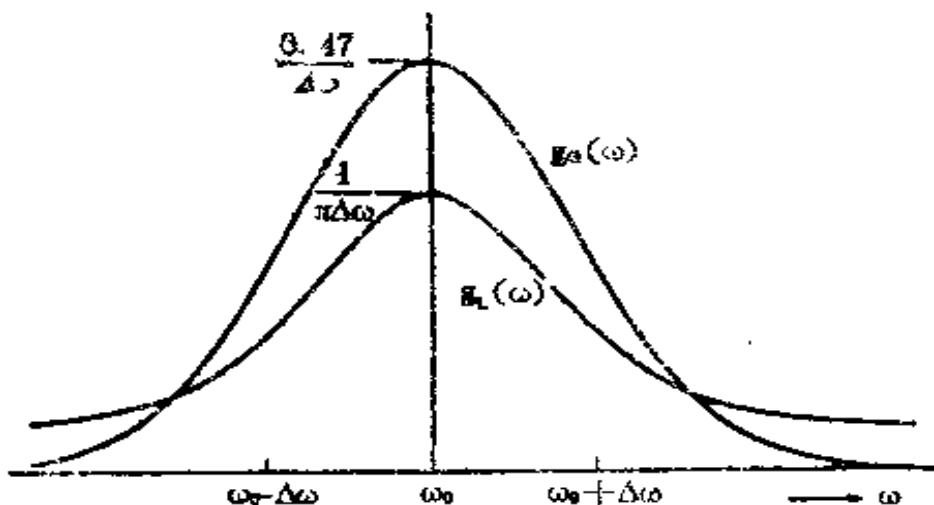


图4.5 洛伦兹函数和高斯函数

在原子引起的光的感应吸收或发射中，假定每个原子有一个横截面 $\sigma$ ，进入该截面的入射光将被吸收或产生感应发射；下能级原子的 $\sigma$ 称为吸收横截面，上能级原子的 $\sigma$ 称为感应发射横截面。从式(4.16)可以清楚看出，感应发射横截面等于吸收横截面，因而对于频率为 $\omega$ 的单色光，它们都用 $\sigma(\omega)$ 表示。这样，当介质的上下能级单位体积中的原子数分别为 $N_u$ 和 $N_L$ 时，其功率吸收常数为

$$2\alpha(\omega) = (N_L - N_u) \sigma(\omega) \quad (4.45)$$

比照式(4.45)和式(4.42)，表示铁匠中原子的吸收截面可以表示为

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi^2}{3\epsilon_0 h c} |\mu_L|^2 g(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c} B(\omega) \quad (4.46)$$

此外，当介质处于温度为 $T$ 的热平衡下， $N_u$ 和 $N_L$ 之间的关系式(4.19)成立，故有

$$N_L - N_u = [1 - \exp(-\hbar\omega/k_b T)] N_L$$

对于低频或高温情况，有 $\hbar\omega \ll k_b T$ ，于是上式还可近似为

$$N_L - N_u \approx \frac{\hbar\omega}{k_b T} N_L$$

在高频(光)或低温下， $\hbar\omega \gg k_b T$ ，则可近似为

$$N_L - N_u \approx N_u$$

## §4.6 复极化率和折射率

光的吸收和发射过程必然存在色散，因此研究光的吸收和发

射时必须考虑光的相位、振幅和能量大小的变化。在4.4节中，我们用一个经典振动电偶极子来处理原子两个能级之间的跃迁，把介质中的大量原子认为是一些经典振子，从而导出介质的光学特性。在外力 $F$ 的驱动下，一个固有频率为 $\omega_0$ ，衰减常数为 $\gamma$ 的振子，其振幅 $x$ 的微分方程由下式给出

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (4.47)$$

式中 $m$ 为振子质量。用 $-e$ 表示它的电荷，当驱动电场为入射光 $E(\omega) \exp(i\omega t)$ 时，方程(4.47)变为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E(\omega) \exp(i\omega t)$$

静态解可以写成如下形式

$$x = x(\omega) \exp(i\omega t)$$

将其代入上面方程，则不难导出

$$x(\omega) = \frac{e}{m} \cdot \frac{E(\omega)}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2} \quad (4.48)$$

当衰减很小，满足 $\gamma \ll \omega$ ，则可近似为

$$x(\omega) = \frac{e}{2m\omega_0} \cdot \frac{E(\omega)}{\omega - \omega_0 - i\gamma} \quad (4.49)$$

当介质上下能级单位体积的原子数分别为 $N_U$ 和 $N_L$ 时，用 $P(\omega) \exp(i\omega t)$ 表示的介质复极化强度为

$$P(\omega) = -ex(\omega)(N_L - N_U) \quad (4.50)$$

由于复极化率 $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ 由下式确定

$$P(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) E(\omega)$$

所以从式(4.49)、(4.50)可得到

$$\chi(\omega) = -\frac{(N_L - N_U)e^2}{2\epsilon_0 m \omega_0} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\gamma} \quad (4.51)$$

其虚部和实部分别为

$$\chi'(\omega) = -\frac{(N_L - N_U)e^2}{2\epsilon_0 m \omega_0} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (4.52)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{(N_L - N_U)e^2}{2\epsilon_0 m \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (4.53)$$

图4.6示出了它们随 $\omega$ 变化的曲线。

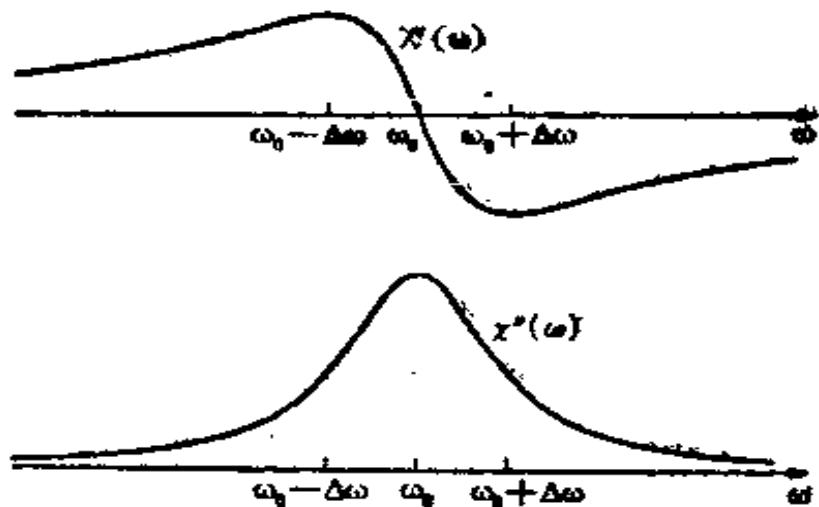


图4.6 复极化率的实部 $\chi'(\omega)$ 和虚部 $-\chi''(\omega)$

通常，当给定复极化率 $\chi(\omega)$ 后，复介电常数为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega))$$

假设介质的磁导率 $\mu = \mu_0$ ，则复折射率 $\eta$ 可写为

$$\eta = \eta' - i\kappa = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (4.54)$$

式中 $\eta'$ 是实部， $\kappa$ 为虚部，称为消光系数，可证明它正比于吸收常数。沿 $z$ 方向传播的平面波的振幅可表达为 $\exp(i\omega t - ikz)$ 。在折射率用复量 $\eta' - i\kappa$ 表示的介质中，有

$$k = (\eta' - i\kappa) \cdot \frac{\omega}{c} \quad (4.55)$$

于是振幅

$$\exp(i\omega t - ikz) = \exp\left(-\frac{\kappa\omega}{c}z\right) \cdot \exp\left[i\omega t - i\eta' \frac{\omega}{c}z\right]$$

上式代表了以 $\exp(-\alpha z)$ 形式的衰减，因此吸收系数为

$$\alpha = \frac{\omega}{c} - \kappa \quad (4.56)$$

当式(4.54)中 $|\chi(\omega)| \ll 1$ 时， $\kappa$ 近似等于 $\chi''/2$ ，把式(4.53)代入式(4.56)中得到

$$\alpha \approx \frac{(N_L - N_U)e^2}{4\epsilon_0 mc} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (4.57)$$

上式表明，吸收线型是洛伦兹型。如果用量子力学中的 $2\omega|\mu_{UL}|^2/3\hbar$ 替换该方程中 $e^2/m$ 项且假定为洛伦兹分布(式(4.43))，则将得到与量子力学计算结果(式(4.42))相同的结论。因此，复极化率的实部和虚部可以表示为

$$\chi'(\omega) = -(N_L - N_U) \frac{|\mu_{UL}|^2}{3\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (4.58)$$

$$\chi''(\omega) = (N_L - N_U) \frac{|\mu_{UL}|^2}{3\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (4.59)$$

这时，由 $fe^2/m = 2\omega|\mu_{UL}|^2/3\hbar$ 定义的振子强度 $f$ 为

$$f = \frac{2m\omega}{3e^2\hbar} |\mu_{UL}|^2 \quad (4.60)$$

常态介质中的原子处于热平衡或十分接近热平衡状态，从而 $N_L > N_U$ 。这时，由式(4.59)有 $\chi'' > 0$ ，也就是说吸收系数 $\alpha$ 为正且介质吸收光。如果使 $N_L < N_U$ ，则 $\chi'' < 0$ 和 $\alpha < 0$ ，这意味着吸收为负，光被放大。由于 $N_L < N_U$ 这样的粒子数分布与热平衡下的分布相反，所以激光物理中称它为粒子数反转，在下一章我们将详细讨论。

方程(4.58)、(4.59)表明，两原子介质的 $\chi'(\omega)$ 和 $\chi''(\omega)$ 是紧密相关的。尽管实际材料有复杂的色散和吸收光谱，但是色散和吸收之间存在着下面所示的基本关系式。

假定只有 $E(t)=\delta(t)$ 函数形式的电场，在 $t=0$ 时加到介质上， $\delta$ 函数可以表示成以下形式

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega$$

介质的感应极化强度 $P(t)$ 为

$$P(t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4.61)$$

式中 $\chi(\omega)$ 为复极化率，由式(4.61)的傅里叶变换得

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp(-i\omega t) dt$$

由于在电场作用之前，极化应为零，即 $t < 0$ 时 $P(t) = 0$ ，因此上面方程变成

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\infty} P(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (4.62)$$

上式的实部和虚部互为希尔伯特(Hilbert)变换(见2.4节描述)<sup>(4)</sup>；

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (4.63a)$$

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (4.63b)$$

---

(4)如果式(4.62)中用 $-i\omega$ 代替 $t$ ，用 $t$ 代替 $\omega$ ，用 $2\epsilon_0 f(\omega)$ 代替 $P(t)$ ，则该式与式(2.13)相同。在这里使用了常用的定义式 $X(\omega) = X'(\omega) - iX''(\omega)$ 。

积分在 $\omega' = \omega$ 时取主值。这些关系式由克朗林(R.kronig)在1926年和克雷默斯(A.kramers)在1927年首先导出，所以常称为克雷默斯-克朗林关系式。

本章导出了复极化率。在假定介质等效于一个经典振子系统的基础上，得到了吸收系数，在这里，相当于原子电偶极子的经典电偶极子的大小取决于电偶极子辐射。用量子力学处理包含饱和效应的复极化率问题，将在第八章讨论。

## 习 题

4.1 假定两块平行平面理想导体相距为 $L$ ，设 $L$ 小于半个波长，试求两导体之间二维空间电磁波的模密度。

4.2 试将热辐射能量密度的普朗克方程重写成辐射波长的函数。

4.3 试求零温度热辐射对理想反射体和黑体表面产生的压强

(提示:  $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ )。

4.4 本书用式(4.14)定义爱因斯坦 $B$ 系数，但在其它一些著作中经常可以看到有不同的定义。当用光强代替能量密度定义 $B$ 时，试求式(4.22)和式(4.35)相应的关系式。注意：立体角 $d\Omega$ 内辐射的玻印廷矢量大小定义为该立体角内的光强 $I d\Omega$ 。

4.5 证明式(4.26)是麦克斯韦方程的一个解(提示：使用球面坐标的麦克斯韦方程)。

4.6 试从式(4.27)导出式(4.28)。

4.7 若 $|p_0|^2$ 从初始值 $|\mu_{UL}|^2$ 以等于爱因斯坦 $A$ 系数的速率衰减，试证明由式(4.25)表示的经典电偶极子发射的总能量为 $\hbar\omega$ 。

4.8 试证明一个衰减振荡的功率谱可由洛伦兹分布函数表

示。

4.9 试计算理想情况下原子跃迁的吸收横截面。假设它的加宽仅由原子的寿命决定且 $\Delta\omega = A$ 。

4.10 若 $\omega$ 从零变到无穷大, 试在复平面上画出表示复极化率(式(4.51))的轨迹。

4.11 一个跃迁电偶极矩为1德拜的气体原子, 在温度300K和气压1Pa时, 其洛伦兹线宽 $HWHM = 1\text{GHz}$ 。试求波长 $1\mu\text{m}$ 时的共振辐射光深度。注意: 光通过光深度时, 光强衰减到初始值的 $1/e$ 。1德拜 $= 10^{-18}\text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{s}^2$ 制静电单位或1德拜 $= 3.335 \times 10^{-30}\text{C} \cdot \text{m}$ 。

## 第五章 激光原理

激光器不同于普通光源(如电灯或放电管)，它是一种类似于无线电发射机的振荡器。本章将借助于电路理论和速率方程介绍激光的基本理论，激光器的半经典理论和量子力学理论将放到第九章讨论。

激光器的基本结构如图5.1所示，它由两个反射镜 $M_1$ 和 $M_2$ 之间放置一粒子数反转(见下面阐述)的放大介质组成。两个反射镜构成的法布里-珀罗谐振腔，把谐振频率上的光波限制在两镜之间。除平面镜外，也可使用凹面镜、衍射光栅或布拉格反射器构成谐振腔，偶而也用多于两个反射镜的光学谐振腔。如第一章所述，有很多种放大介质可用于激光器，它们通过粒子数反转和受激辐射对光放大起着关键的作用，但也有一些激光器，例如喇曼激光器就不用粒子数反转。

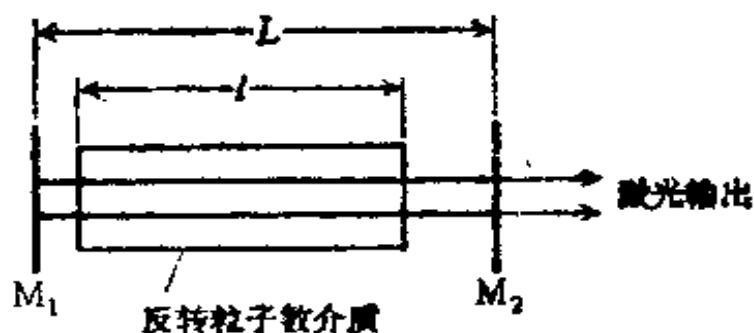


图5.1 具有法布里-珀罗腔的激光器

### §5.1 粒子数反转

如4.3节所述，只要上下能级有原子分布，受激发射和吸收就会同时发生。从上能级到下能级的跃迁几率与下能级到上能级的

跃迁几率相等。介质处于常态时，下能级原子数比上能级原子数多，造成光的净吸收。如果用一种适当的方式激发介质，以致上能级原子数 $N_u$ 多于下能级原子数 $N_L$ ，则该介质上的入射光将会由于受激发射而被放大。

与热平衡下 $N_L > N_u$ 相反，形成 $N_u > N_L$ 的过程就是粒子数反转，具有 $N_u > N_L$ 原子的粒子数就是反转粒子数。习惯上粒子数反转和反转粒子数都称为反转粒子数差。现在，若把反转粒子数差 $N_u - N_L$ 用于式(4.19)，由于 $N_u/N_L = \exp(-\hbar\omega/k_b T) > 1$ ，所以 $\hbar\omega/k_b T < 0$ 。因为 $\hbar\omega/k_b$ 为正量，所以粒子数反转状态相应于负温度，即 $T < 0$ 。因此，可以说粒子数反转的状态具有负的温度。当然，这不是热力学观念中的温度，它只不过是一个由式(4.19)表示的粒子数反转状态参数。

为了形成原子能级粒子数反转，必须利用储能激发介质原子，用这种方法使下能级原子数 $N_L$ 减少，上能级原子数 $N_u$ 增加。由于原子重新分布，好象从下能级往上能级泵浦，所以这个过程称为泵浦。通常所用的泵浦方法是光泵浦，原子被光照射而激发；介质为气体时，则用气体放电激发；介质若为半导体，则可用正向电流通过 $p-n$ 结注入载流子的方式激发。除此之外，还有其它方法，例如用电子束辐射或其它辐射激发，用化学反应或激波激发等。

在微波量子放大器出现之前，很多人认为粒子数反转过程不可能实现。法布里克特(V.A.Fabricant)是从1940年左右就开始积极研究为实现粒子数反转的第一个人，不过他的研究是失败的<sup>[6\*1]</sup>。第二次世界大战后，微波光谱学发展起来，1954年汤斯(C.H.Townes)等用氨分子束成功实现了粒子数反转，制成一个波长1.25cm的微波量子放大器<sup>[6\*2]</sup>。因为氨分子分布在热平衡能级之间，当下能级分子在非均匀电场的作用下消失时，在上能级即形成分子的积累，因此能够实现粒子数反转。而这种通过减

少下能级原子数来建立粒子数反转的方法不能用于光学跃迁。

上面的方法不能用于光学跃迁的原因如下：从式(4.19)看出，对于微波频率 $\nu$ ,  $h\nu \ll k_B T$ , 所以在微波波段 $N_u \approx N_L$ 。对于光频 $\nu$ ,  $h\nu \gg k_B T$ , 故上能级粒子数 $N_u$ 很少。为了在光波段得到受激发射，只消除下能级原子是不够的，还必须用泵浦的方法增加上能级粒子数。当二能级原子通过照射或电子碰撞被激发时，上能级粒子数将增加，但同时这些受激原子返回下能级的消激发几率将随入射光或电子的增加而增大。于是，不管原子可能受到的激发多强，也不可能得到粒子数反转。因此，为了产生激光实现粒子数反转，必须使用三能级或四能级的原子。此外，并不总是要求原子能级必须是分立的或线宽极窄的，在某些情况下，也可以是能带。染料激光器和半导体激光器基本上可认为是四能级激光器（见后面讨论）。

## §5.2 三能级激光器的粒子数反转

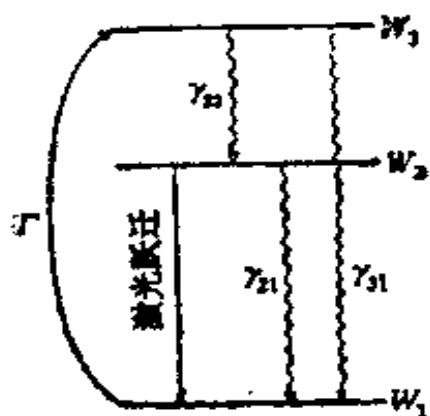


图5.2 三能级激光器  
的能级图

除1.2节提到的红宝石激光器外，还有很多三能级激光器，例如光泵浦气体激光器。假定与激光原子相关的三个能级的能量和粒子数分别记为 $W_1, W_2, W_3$ 和 $N_1, N_2, N_3$ ，设 $W_3 > W_2 > W_1$ ，如图5.2所示。在热平衡状态下，则有 $N_1 > N_2 > N_3$ ，这里最低态1并非一定是原子的基态。在能级1上的原子，通过与光子、电子或具有适当能量的受激原子碰撞后被激发到能级3上。这里，我们不讨论

激发的具体过程，用 $\Gamma$ 表示上述任何一种泵浦方法使原子从能级1到能级3的激发几率。

停止泵浦后，激发原子一般会逐步回到热平衡态，这一过程称为驰豫。如果我们考虑个别原子，在驰豫过程发生的同时，另外一些原子被激发。除了受激原子通过发射一个光子跃迁到较低态的辐射过程外，还存在着非辐射过程，例如气体中的分子碰撞或固体中原子晶格的相互作用，此时受激原子跃迁到较低态，并以分子动能或晶格振动能的形式释放其能量。因为驰豫是这种统计过程的结果，所以我们定义驰豫速率或驰豫常数为受激原子在单位时间内驰豫几率的统计平均。驰豫速率的倒数是受激原子的平均寿命，由于它又等于受激原子的荧光衰减时间，因而有时又称为荧光寿命。

一个原子热激发从低态 $W_L$ 到高态 $W_U$ 的几率 $\gamma_{LU}^{(1)}$ 与热驰豫从 $W_U$ 到 $W_L$ 的相反过程的几率 $\gamma_{UL}$ 有关。这个关系式在热平衡下可写为

$$N_U \gamma_{UL} = N_L \gamma_{LU}, \quad N_U = N_L \exp\left(-\frac{W_U - W_L}{k_B T}\right)$$

式中 $T$ 为介质温度。于是得到

$$\frac{\gamma_{LU}}{\gamma_{UL}} = \exp\left(-\frac{W_U - W_L}{k_B T}\right) \quad (5.1)$$

即使 $N_U$ 和 $N_L$ 不表示热平衡的粒子数，关系式(5.1)一般仍成立。

如果这些几率为常数，则在泵浦下，表示三能级系统每个能级上原子数变化的速率方程可写成

$$\frac{dN_1}{dt} = -(\Gamma + \gamma_{12} + \gamma_{13})N_1 + \gamma_{21}N_2 + \gamma_{31}N_3 \quad (5.2)$$

(1) 单位时间几率速率的简称。

$$\frac{dN_1}{dt} = \gamma_{12}N_2 - (\gamma_{21} + \gamma_{13})N_1 + \gamma_{31}N_3, \quad (5.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\Gamma + \gamma_{12})N_1 + \gamma_{23}N_3 - (\gamma_{21} + \gamma_{32})N_2, \quad (5.4)$$

其中  $N_1 + N_2 + N_3 = \text{常数} = N$ ,  $N$  为三能级系统中的总原子数。

稳态时，在不变的泵浦条件下，其原子数的分布可以通过令式(5.2)~(5.4)左边为零得到。虽然其解很容易计算，但是表达式冗长。假定能级间隔  $h\nu$  远大于热能  $k\cdot T$ ，于是  $\gamma_{12} \ll \gamma_{21}$ ,  $\gamma_{13} \ll \gamma_{31}$  和  $\gamma_{23} \ll \gamma_{32}$ ，所以在式(5.2)~(5.4)中可以忽略  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  和  $\gamma_{23}$ ，得到稳态解

$$N_1 = \frac{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{32})\Gamma} N \quad (5.5)$$

$$N_2 = \frac{\gamma_{32}\Gamma}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{32})\Gamma} N \quad (5.6)$$

如果激发很强，使得

$$\Gamma > \gamma_{21} \left( 1 + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{32}} \right) \quad (5.7)$$

则  $N_2 > N_1$ ，即粒子数反转。为了能用中等泵浦获得粒子数反转，从上面条件可以看出， $\gamma_{21}$  应小， $\gamma_{32}$  应比  $\gamma_{31}$  大。换句话说，从激光上能级到激光下能级的驰豫应该慢，而对于开始被激发的原子，它从最上面能级3驰豫到上能级2应该快。

用  $\Delta N = N_2 - N_1$  定义的粒子数反转是激发强度  $\Gamma$  的函数，从式(5.5)、(5.6)计算得到

$$\Delta N = \frac{\gamma_{32}\Gamma - \gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{32})\Gamma} N \quad (5.8)$$

并在图5.3中示出。当激发极强时，粒子数反转由下式给出

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \Delta N = \frac{\gamma_{32} N}{\gamma_{21} + \gamma_{32}} \times \frac{N}{1 + \gamma_{21}/\gamma_{32}} \quad (5.9)$$

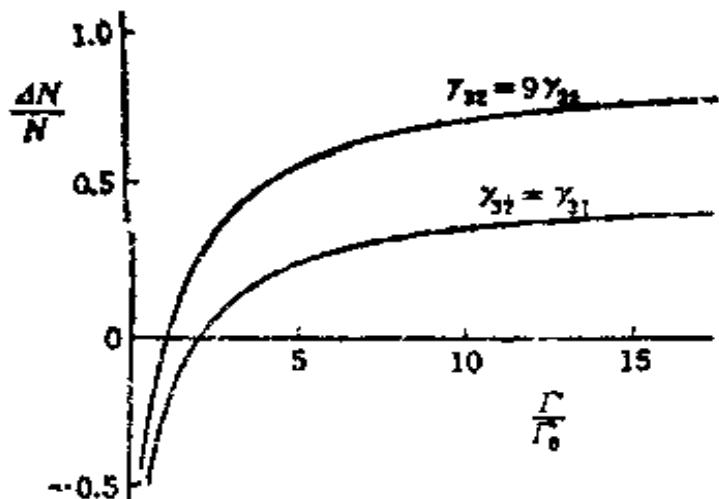


图 5.3 三能级系统粒子数反转随激发强度的变化  
关系 ( $\Gamma_0 = \gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) / (\gamma_{21} + \gamma_{32})$ )

从上式也可以看出,  $\gamma_{21}$  越小或  $\gamma_{32}$  越大, 粒子数反转越大, 相应激光也越强。激光振荡的阈值条件和激光器的输出特性将在 5.5 节和以后的几节中讨论。

### §5.3 四能级激光器的粒子数反转

在三能级激光器中, 因为激光跃迁的下能级是最低能级, 所以大多数原子在热平衡时集聚在该能级上 ( $N_1 \approx N$ )。为了得到粒子数反转, 必须用强泵浦使最低能级 1 上的原子数减少到一半以下。在四能级系统中, 这个要求则可以大大降低。

在如图 5.4 所示的原子四能级系统中, 希望在能级 2 和 1 之间实现粒子数反转。如果在基能级 0 之上的激光下

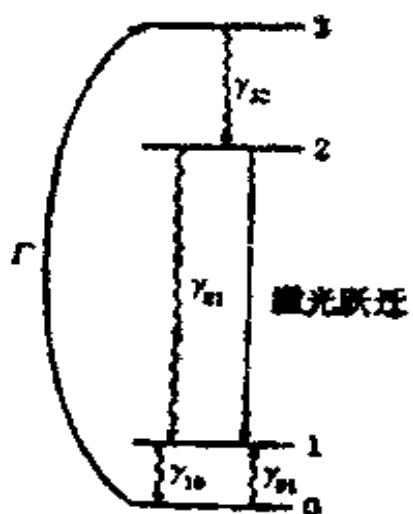


图 5.4 四能级激光器的能级图

能级的能量高于  $k_B T$ ，则在激光下能级1上的热激发原子数相当少，泵浦比较少的原子数到上能级2，就可以很容易实现粒子数反转。下面讨论这种情况下的粒子数反转条件。

虽然假设能级1、2和3之间的间隔远大于  $k_B T$ ，如同三能级激光器那样，我们没有忽略从原子集聚最多的基能级0到邻近能级1的热激发原子数  $\gamma_{01}N_0$ 。因此，四能级原子粒子数的速率方程为

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \gamma_{01}N_0 - \gamma_{10}N_1 + \gamma_{21}N_2 + \gamma_{31}N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\gamma_{21}N_2 + \gamma_{32}N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} &= \Gamma N_0 - \gamma_{31}N_3 \\ -\frac{dN_0}{dt} &= \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt}\end{aligned}\quad (5.10)$$

除了设  $\gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21}$  和  $\gamma_3 = \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}$  之外，方程(5.10)中各系数的意义与三能级系统相同。式(5.10)的稳态解为

$$N_1 = \left( \frac{\gamma_{01}}{\gamma_{10}} + \frac{\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_2\gamma_{31}}{\gamma_{10}\gamma_2\gamma_3} \Gamma \right) N_0 \quad (5.11)$$

$$N_2 = \frac{\gamma_{32}\Gamma}{\gamma_2\gamma_3} N_0 \quad (5.12)$$

$$N_3 = \frac{\Gamma}{\gamma_3} N_0 \quad (5.13)$$

因为  $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$ ，所以  $N_0$  由下式给出：

$$N_0 = \frac{\gamma_{10}\gamma_2\gamma_3 N}{(\gamma_{10} + \gamma_{01})\gamma_2\gamma_3 + \gamma_{32}(\gamma_{21} + \gamma_{10})\Gamma + \gamma_2(\gamma_{31} + \gamma_{10})\bar{\Gamma}} \quad (5.14)$$

从式(5.11)、(5.12)，粒子数反转条件可表示为

$$\Gamma > \frac{\gamma_{01}\gamma_2\gamma_3}{\gamma_{32}\gamma_{10} - \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_2\gamma_{31}} \quad (5.15)$$

上式分子中的 $\gamma_{01}$ 是从能级0到能级1的热激发几率，由关系式 $\gamma_{01} = \gamma_{10}\exp(-W_1/k_B T)$ 表示，它是一个小量，因此降低了粒子数反转所需的激发强度 $\Gamma$ 。因为 $\gamma_{31} < \gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{30} + \gamma_{32}$ 和 $\gamma_{21} < \gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{20}$ ，式(5.15)可以近似为

$$\Gamma > \frac{\gamma_{01}\gamma_2\gamma_3}{\gamma_{10}\gamma_{32}} = \exp(-W_1/k_B T) \gamma_2 \left( 1 + \frac{\gamma_{31} + \gamma_{30}}{\gamma_{32}} \right) \quad (5.16)$$

式中 $\gamma_{10} \gg \gamma_2$ 。与三能级系统的粒子数反转条件式(5.7)比较，发现除因子 $\exp(-W_1/k_B T)$ 外，两式是很类似的。由于四能级系统有一个额外的能级0，因而这里很明显地用 $\gamma_{21} + \gamma_{20}$ 代替 $\gamma_{21}$ ，用 $\gamma_{31} + \gamma_{30}$ 代替 $\gamma_{31}$ 。因子 $\exp(-W_1/k_B T)$ 很重要，正是由于该因子，在激光下能级1的能量比基能级0至少高出几倍 $k_B T$ 的情况下，使用很弱的泵浦也能得到粒子数反转。

## §5.4 激光放大

本节我们将要讨论当介质中粒子数反转时，产生激光放大和激光振荡的原因。因为粒子数反转时， $N_U > N_L$ ， $\chi''$ 为负(式(4.59)右边第一项因子 $(N_L - N_U)$ 变为负)。由于吸收常数 $\alpha$ 为负，故 $\exp(-\alpha z)$ 随 $z$ 的增加而增加。换句话说，在粒子数反转下， $\alpha < 0$ 意味着产生放大而不是吸收。因为功率比例于振幅的平方，所以介质长度为 $z$ 的功率的放大或增益是 $\exp(-2\alpha z) = \exp(Gz)$ ，式中 $G = -2\alpha$ 称为增益常数， $G/2$ 称为放大常数<sup>(2)</sup>。

(2)为避免混淆，有时 $G/2$ 称为振幅放大常数。但应该注意，amplification中“amplification”本来代表振幅。

设激光介质上能级2和下能级1之间反转粒子数为 $\Delta N = N_2 - N_1$ , 则由式(4.41)很容易得出激光介质的增益常数

$$G = \Delta N \frac{\hbar\omega}{c} B(\omega) \quad (5.17)$$

可以改写为

$$G = \Delta N \sigma(\omega)$$

在大多数激光器和微波量子放大器中, 产生跃迁的上下能级经常是简并的。如果电场或磁场作用于原子, 则简并将部分或全部消除, 出现若干分离的子能级。当计算热力学平衡和由入射光引起的感应跃迁几率时, 必须考虑每一个子能级。用 $N_2$ 表示简并度为 $g_2$ 的上能级总原子数, 用 $N_1$ 表示简并度为 $g_1$ 的下能级总原子数, 由于热平衡条件必须应用于每一个子能级, 所以有

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (5.18)$$

如果 $g_2 > g_1$ , 则热平衡下 $N_2$ 大于 $N_1$ 是可能的。因此, 当存在简并时, 再把 $N_2 - N_1$ 看成是反转粒子数是不恰当的。尽管如此, 若把简并的上下能级的每一个子能级原子数分别记为 $N_1$ 和 $N_2$ , 则可以用 $\Delta N = N_2 - N_1$ 确定反转粒子数。当能级简并时, 习惯上仍用 $N_1$ 和 $N_2$ 表示总原子数, 所以反转粒子数必须用下式表示

$$\Delta N = \frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1} \quad (5.19)$$

当考虑感应发射和吸收时, 上下子能级之间的跃迁分别是 $g_2$ 和 $g_1$ 的倍数。因此, 爱因斯坦 $B$ 系数变为

$$B = g_2 B_{21} = g_1 B_{12} \quad (5.20)$$

这里，对于激光跃迁简并的上下能级，热平衡分布式(5.18)和B系数式(5.20)通常对任何一对能级都成立。

对于具有式(5.19)的反转粒子数和式(5.20)B系数的激光介质，其增益常数可将式(5.19)、(4.39)和(4.35)代入式(5.17)得到

$$G = \left( |N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1| \right) \frac{\pi\omega}{3\varepsilon_0 c \hbar} |\mu_{21}|^2 g(\omega) \quad (5.21)$$

或

$$G = \left( \frac{g_1}{g_2} N_2 - N_1 \right) \frac{\pi\omega}{3\varepsilon_0 c \hbar} |\mu_{12}|^2 g(\omega)$$

注意，对于二能级系统有 $|\mu_{U1}|^2 = |\mu_{LU}|^2$ ，对于一对简并能级则有 $g_2 |\mu_{21}|^2 = g_1 |\mu_{12}|^2$ 。

粒子数反转介质中的激光放大是热平衡状态下一般介质吸收的反过程。入射光在一般介质中会衰减，其频率和相位不变。如果在时间上反转这个吸收过程，则初始的弱光在相反方向上振幅将增加，但频率和相位不变。上面通过激光放大描述了光波的特性。单个原子对激光放大的贡献将在第七章讨论。

## §5.5 激光振荡的条件

如果在一个放大器上加上正反馈，则放大作用就会增强，尽管它可能会不稳定。但是在一定条件下可以建立起振荡。图5.5示出了一个反馈放大器，图中输出电压 $V_o$ 的一小部分 $\beta V_o$ ( $\beta < 1$ )反馈叠加在放大器的输入电压 $V_i$ 上。当 $\beta = 0$ 时，反馈为零，用 $A$ 表示信号的电压增益，则有 $V_o = AV_i$ 。若 $\beta \neq 0$ ，则有效输入电压变为 $V_i + \beta V_o$ ，放大后的输出信号为

$$V_o = A(V_i + \beta V_o)$$

于是反馈放大器的电压增益可表示为

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 - \beta A} \quad (5.22)$$

因为我们讨论的是复输入和输出电压，所以  $A$  和  $\beta$  一般为包括其相移的复量。当  $|1 - \beta A| < 1$  时，为正反馈； $|1 - \beta A| > 1$  时，为负反馈。

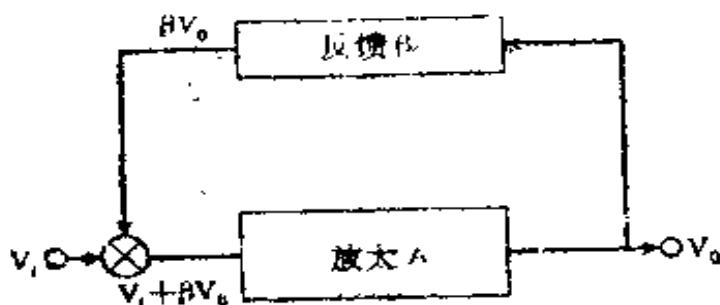


图 5.5 反馈放大器

为简化起见，假定放大器和反馈网络都没有相移，因此  $A$  和  $\beta$  是实数。于是，当  $\beta A > 0$  时，为正反馈，而且电压增益比无反馈时大。如果  $\beta$  或  $A$  逐渐增加使  $\beta A = 1$ ，则电压增益将为无限大。实际上，即使输入为零，电路元件和放大器中微弱的电噪声也被放大并产生一个大的输出电压。输出电压不能无限增加的原因是放大器产生的能量受到限制。也就是说，放大总是要饱和的。

电压增益  $A$  和反馈系数  $\beta$  通常都与频率有关。因此，在  $\beta A$  为最大值的某一个频率上开始振荡。如果振荡增长到一个大的振幅，则放大器的非线性特性会降低电压增益，并影响频率特性。于是最初按指数增长的振荡振幅，逐渐降低其增长速率，同时伴随有一个频移。最后，当振幅和频率达到满足  $\beta A = 1$  时，将建立起具有恒定振幅的稳态振荡。但是，最后状态并不总是恒定振幅，在

某些情况下， $\beta A$ 值永远达不到1，振幅交替地出现增加或降低，振荡频率也出现增加或降低，这种振荡状态常常称为张驰振荡。此外，在一定条件下也会出现振幅或频率间歇式地变化，产生一个所谓的混沌态。在激光器中也会产生上述三种类型的振荡<sup>(3)</sup>。

我们首先讨论激光器的稳定振荡。假定镜 $M_1$ 和 $M_2$ 之间的激光介质处于粒子数反转的状态，如图5.1所示。设 $R_1$ 和 $R_2$ 为镜的反射系数， $l$ 为激光介质的长度， $G$ 为增益常数。光波通过激光介质两次的往返增益为

$$A^2 = \exp(2Gl) \quad (5.23)$$

式中 $A$ 为往返一周的放大振幅。因为放大输出往返一周的反馈为 $\sqrt{R_1 R_2}$ ，故有

$$\beta = \sqrt{R_1 R_2} \exp(i\theta) \quad (5.24)$$

因为反馈波的相位可能与初始波明显不同，所以附加因子 $\exp(i\theta)$ 是必要的。光波具有如此高的频率或这样短的波长，即使频率变化较小，其相位差也会有显著的变化。因此假定在放大中无相移<sup>(4)</sup>，则激光只在 $\theta$ 几乎为零的频率上振荡。设 $\theta = 0$ 并把常数 $\beta A = 1$ 代入上面两个方程，得到

$$Gl + \frac{1}{2} \ln R_1 R_2 = 0 \quad (5.25)$$

在实际的激光介质中，除了与激光有关的两个能级外，还存在其它能级的原子和某些杂质原子。此外，在固体激光器中有基

(3) 1963年初作者就认为红宝石激光器中的无衰减张驰振荡是由非线性吸收引起的<sup>[5·3]</sup>，激光器中的衰减张驰振荡将在8.4节中讨论。混沌激光振荡最近已得到证实<sup>[5·4]</sup>。

(4) 在高增益激光介质中这是不真实的。

质晶体，在气体激光器中有离子和电子，所有这些粒子都在一定程度上吸收激光，造成损耗，这与反射镜引起的损耗不同，可以用一个唯象往返一周的功率传输系数 $K(<1)$ 来表示。于是可以用有效损耗常数表示：

$$L_{eff} = -\frac{1}{2l} \ln K$$

使用这个附加损耗，激光振荡条件式(5.25)修正为

$$(G - L_{eff})l + \frac{1}{2} \ln R_1 R_2 = 0 \quad (5.26)$$

或

$$G = \frac{1}{2l} [\ln R_1 R_2] + L_{eff} \quad (5.27)$$

因为 $R_1 < 1$ 和 $R_2 < 1$ ，所以这些方程中 $\ln R_1 R_2 < 0$ ，因此 $|\ln R_1 R_2|$ 的值越小，达到激光振荡所需的增益就越小。我们取反射镜的反射系数接近1，使用 $R_1 R_2 \approx 1$ 近似，于是式(5.27)可写为

$$G = \frac{1 - R_1 R_2}{2l} + L_{eff}, \quad (5.28)$$

上式左边是增益系数，右边为损耗系数，方程(5.28)表示了增益和损耗之间的平衡。当增益比损耗小时，光场(即使有的话)将按指数衰减。相反，如果增益比损耗大，则任意小的光场(例如热辐射)按指数增长从而建立起振荡。这时，增长的速率由增益和损耗之间的差额确定。当光场变得足够强时，上能级原子数减少，于是激光介质的增益变小，然而损耗却没有明显变化。因此，当光强增加时，增益超过损耗的差额就会下降，如图5.6所示，增长速率变小且最终达到增益和损耗相等的状态(图5.6中的P点)。

式(5.27)或(5.28)给出了激光振荡增益常数的阈值，并同时给出稳态振荡值。

借助于式(5.28)、(5.17)，反转粒子数的阈值或稳态振荡时的反转粒子数由下式给出

$$\Delta N_{th} = \frac{c}{\hbar\omega B(\omega)} \left( \frac{1 - R_1 R_2}{2l} + L_{eff} \right) \quad (5.29)$$

利用式(5.21)，上式可以写为

$$\left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)_{th} = \frac{3\epsilon_0 c h}{\pi\omega |\mu_{21}|^2 g(\omega)} \left[ \frac{1 - R_1 R_2}{2l} + L_{eff} \right] \quad (5.30)$$

为简化起见，假定能级是非简并的，并且 $B(\omega)$ 和 $g(\omega)$ 具有洛伦兹分布，其 $g(\omega_0) = (\pi\Delta\omega)^{-1}$ 。当 $\omega = \omega_0$ 时，式(5.29)或(5.30)变为

$$\Delta N_{th} = \frac{3\epsilon_0 c h}{|\mu_{21}|^2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \left[ \frac{1 - R_1 R_2}{2l} + L_{eff} \right] \quad (5.31)$$

从右边第一项因子看出，跃迁电偶极矩越大，阈值越低；从第二和第三项因子分别看出，随着线宽变窄和光学谐振腔损耗的降低，阈值也随之下降。

在以上讨论中，我们已考虑了光在两镜之间往返传输的放大和衰减，也可以用光学谐振腔中电磁波的模式来处理激光振荡问题。

图5.1所示激光器的两个反射镜起着法布里-珀罗谐振腔的作用(见3.4节)，限制波矢垂直于反射镜表面的光，其频率等于腔

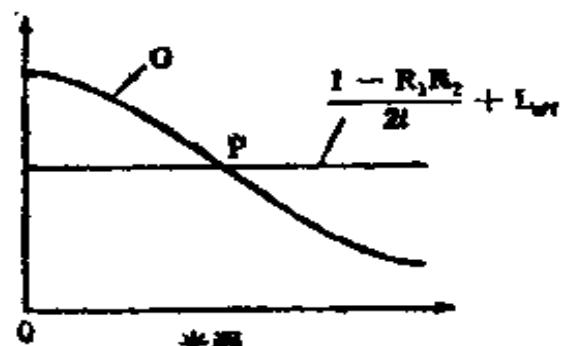


图5.6 饱和增益 $G$ 和光损耗随光强的变化

本征频率的一个。设  $W$  为谐振腔中的储能， $P_L$  为单位时间的能量损耗，即反射镜和激光介质的损耗，于是谐振腔的品质因素可定义为

$$Q_s = \frac{\omega W}{P_L} \quad (5.32)$$

式中  $\omega$  为光的角频率。若用  $\kappa$  表示谐振腔中固有自由衰减的振幅衰减常数，则有

$$2\kappa = -\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{\omega}{Q_s} \quad (5.33)$$

为简单起见，假设光强分布均匀，激光介质均匀地充满谐振腔 ( $l=L$ )，于是功率损耗可表示为

$$P_L = \frac{\omega UL}{Q_s} \quad (5.34)$$

式中  $U$  为谐振腔单位长度的平均能量密度。由激光介质受激发射提供给谐振腔的光功率为  $P_e$ ，激光介质的反转粒子数为  $\Delta N$ ，于是从式(4.40)得到

$$P_e = \Delta N \hbar \omega B(\omega) U L \quad (5.35)$$

如果增益  $P_e$  等于功率损耗  $P_L$  时的反转粒子数用  $\Delta N_{es}$  表示，则有

$$\frac{1}{Q_s} = \Delta N_{es} \hbar B(\omega) \quad (5.36)$$

由反射率分别为  $R_1$  和  $R_2$  且间距为  $L$  的两面反射镜构成的光学谐振腔，在  $2L/c$  时间内，腔内能量的反射损耗等于  $(1 - R_1 R_2)UL$ 。忽略其它损耗，功率损耗  $P_L$  为

$$P_L = \frac{c(1 - R_1 R_2)}{2} U L$$

由上式和式(5.34)，谐振腔的品质因数可以表示为以下形式

$$Q_e = \frac{2\omega L}{c(1 - R_1 R_2)} \quad (5.37)$$

反转粒子数的阈值或稳态下的反转粒子数可从式(5.36)、(5.37)得到

$$\Delta N_{ss} = \frac{c(1 - R_1 R_2)}{2\hbar\omega B(\omega)L} \quad (5.38)$$

因为这里已忽略了除反射镜损耗之外的其它损耗，所以这个结果与考虑光在反射镜之间往返传播所得到的式(5.29)一致。

## §5.6 激光振荡的频率

设一平面波在激光器的两镜之间往返传播，现在来讨论怎样确定激光振荡的频率。首先，从反射镜表面 $z=0$ 处沿 $+z$ 方向传播的平面波的复数表示为

$$E(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \quad (5.39)$$

式中 $k$ 为复量。记 $k$ 的实部为 $k_0$ ，因为 $k$ 虚部的两倍为增益 $G$ ，故有

$$k = k_0 + i\frac{G}{2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (5.40)$$

式中 $\chi(\omega)$ 为复磁化率，通过关系式 $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi(\omega))$ 与 $\epsilon$ 相联系（见4.6节讨论）。如果 $\chi(\omega)$ 很小，则波数 $k_0$ 和增益 $G$ 可近似为

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega) \right] \quad (5.41)$$

和

和

$$G = -\frac{\omega}{c} \chi''(\omega) \quad (5.42)$$

因为粒子数反转时  $\chi'' < 0$ , 所以  $G > 0$ 。

把式(5.40)代入式(5.39), 在  $z = L$  处的镜表面上得到

$$E(L, t) = E_0 \exp(GL/2) \exp(i(\omega t - k_0 L)) \quad (5.43)$$

假设在  $z = 0$  和  $L$  处镜的振幅反射系数分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 则式(5.43)表示的波在  $z = L$  处被反射后其振幅应乘上  $r_2$  且沿  $-z$  方向传播。当反射波紧接着在  $z = 0$  处被镜再次反射时, 它必须再乘  $r_1$  且表示为

$$E(0, t) = r_1 r_2 E_0 \exp(GL) \exp(i(\omega t - 2k_0 L))$$

并且沿  $+z$  方向传播。现在如果激光振荡是稳定的, 上面表示式应等于  $z = 0$  处的初始值  $E_0 \exp(i\omega t)$  (在式(5.39)中作过假设)。所以稳态振荡的条件由下式给出

$$r_1 r_2 \exp(GL) \exp(-2ik_0 L) = 1$$

用与式(5.24)相同的  $\beta$  相同的关系式  $r_1 r_2 = \sqrt{R_1 R_2} \exp(i\theta)$ , 上面方程的绝对值变为

$$\sqrt{R_1 R_2} \exp(GL) = 1 \quad (5.44)$$

相角重写为

$$2k_0 L = 2n\pi + \theta \quad (5.45)$$

式中  $n$  为整数。式(5.44)的对数与从能量平衡得到的式(5.25)完全相同, 式(5.42)代入(5.44)得到:

$$-\frac{\omega}{c} \chi''(\omega) L = \frac{1}{2} \ln R_1 R_2 \quad (5.46)$$

上式两边为负。如果  $R_1 R_2$  接近于 1, 则可以利用  $\ln R_1 R_2 = R_1 R_2 - 1$  的近似, 重写上面方程, 激光振荡条件为

$$-\chi''(\omega) = 1/Q. \quad (5.47)$$

式中 $Q_c$ 是式(5.37)给出的光学谐振腔的品质因数。

由式(5.45)确定振荡频率，利用式(5.41)，则式(5.45)变为

$$\frac{\omega}{c} (2 + \chi'(\omega)) L = 2n\pi + \theta \quad (5.48)$$

从式(4.52)、(4.53)或(4.58)、(4.59)可以看出，对于洛伦兹分布，下面关系式成立

$$\chi'(\omega) = -\chi''(\omega) \frac{\omega - \omega_0}{\gamma} \quad (5.49)$$

稳态振荡条件式(5.47)重写为

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma Q_c}$$

所以将上式代入式(5.48)，则稳态振荡的频率<sup>(5)</sup> $\omega$ 由下式给出

$$\frac{\omega}{c} \left[ 2 + \frac{\omega - \omega_0}{\gamma Q_c} \right] L = 2n\pi + \theta \quad (5.50)$$

考虑到反射引起的相移并令式(5.48)中 $\chi' = 0$ ，则谐振频率 $\omega_c$ 可表示为

$$\omega_c = \frac{c}{L} \left[ n\pi + \frac{\theta}{2} \right] \quad (5.51)$$

将式(5.51)代入式(5.50)右边，并利用式(5.33)左边的 $\omega/Q$ ，由此得到

$$\frac{\omega - \omega_c}{\kappa} + \frac{\omega - \omega_0}{\gamma} = 0 \quad (5.52)$$

于是求得激光频率为

$$\omega = \frac{\kappa\omega_0 + \gamma\omega_c}{\kappa + \gamma} \quad (5.53)$$

(5)圆频率与角频率简写成频率。

因为 $\kappa$ 是谐振腔的衰减常数，它等于谐振曲线半最大值半宽度(用角频率)。此外 $\gamma$ 是振荡偶极子的衰减常数，即谱线的半最大值半宽度。若定义谱线的Q值为 $Q_0 = \omega_0/2\gamma$ (表示锐度)，使用 $Q_c = \omega/2\kappa \approx \omega_0/2\kappa$ 的近似，则可将式(5.53)重写为以下形式

$$\omega = \frac{Q_0\omega_0 + Q_c\omega_c}{Q_0 + Q_c} \quad (5.54)$$

从这些方程可看出，激光频率处于光学谐振腔谐振频率和激光跃迁频率之间，但是它比较接近于具有较高Q值的那一个频率。就一般激光器而论，其谐振腔的Q值比谱线的Q值高，即 $Q_c > Q_0$ 。若取一级近似，激光频率则等于谐振腔的谐振频率，但它向光谱线频率的方向有一些移动，这种情况称为频率牵引效应。

大多数激光器不仅以单模而且也以多模振荡，因为谱线宽度 $\gamma$ 比由式(5.51)给出的模间隔 $c\pi/L$ 更宽，使小信号增益超过损耗，引起一些模式振荡。在本章我们只考虑了法布里-珀罗谐振腔的纵模。应该指出，在实际使用的大多数激光器中，也存在高阶横模的激光振荡。

## 习 题

5.1 图5.2所示的光泵浦三能级系统中，假设驰豫率 $\gamma_{21}(\gg\gamma_{12})$ ， $\gamma_{31}(\gg\gamma_{13})$ 和 $\gamma_{32}(\gg\gamma_{23})$ 与泵浦功率密度 $P$ 无关，试求激发速率 $\Gamma$ 与 $P$ 之间的关系式(提示： $\Gamma = (N_1 - N_3)BP/c$ )。

5.2 假设如图5.2所示的三能级系统中，泵浦很强以致于能级1和能级3之间的跃迁完全饱和，而 $\gamma_{12}$ ， $\gamma_{13}$ 和 $\gamma_{23}$ 不能忽略，试求该情况下的稳态反转粒子数。

5.3 三能级原子的气体最初处在高温 $T$ 的热平衡状态，假定

气体温度突然降到一个较低温度 $T_1$ ，以致激发能级上粒子数随时间而变，最后在 $T_1$ 达到平衡。试证明当 $\gamma_{3,2} = 0$ 时，在能级2和3之间的瞬态粒子数反转条件为

$$(K - 1)^{k-1}(a_3 - b_3) > K \cdot (b_2 - b_3)^{k-1}(a_2 - b_2)$$

式中

$$a_2 = \exp(-W_2 - W_1)/k_B T_s$$

$$a_3 = \exp(-W_3 - W_1)/k_B T_s$$

$$b_2 = \exp(-W_2 - W_1)/k_B T_e$$

$$b_3 = \exp(-W_3 - W_1)/k_B T_e$$

$$K = \gamma_{2,1}/\gamma_{3,1} > 1$$

当 $\exp((K - 1)\gamma_{3,1}t) = K(a_2 - b_2)/(a_3 - b_3)$ 时，在 $t$ 时刻出现最大粒子数反转(提示： $N_3/N_1 = (a_3 - b_3)\exp(-\gamma_{3,1}t) + b_3$ ， $N_2/N_1 = (a_2 - b_2)\exp(-K\gamma_{3,1}t) + b_2$ )。

5.4 试用爱因斯坦 $A$ 系数、反转粒子数和波长表示洛伦兹分布中心频率的增益常数。

5.5 考虑一根长5cm的红宝石棒，两端镀膜层的反射系数 $R = 0.9$ 。假设铬离子的浓度为 $N = 1 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ，感应发射截面 $\sigma = 2 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ ，棒的有效损耗常数为 $0.011 \text{ cm}^{-1}$ 。试问达到振荡阈值条件时受激铬离子的最小百分率是多少？

5.6 试求增益介质长度为 $L_g$ 、吸收介质长度为 $L_a$ 组成的一台腔长为 $L_g + L_a$ 的激光器阈值条件。用增益介质的感应发射截面 $\sigma$ 、吸收体的振幅吸收常数 $\alpha$ 和反射镜的反射系数 $R$ 表示粒子数反转的阈值。

5.7 按照式(5.31)，跃迁电偶极矩越大，粒子数反转的阈值越低。相反，实际上使用很弱的介质发射线比使用与大电偶极矩跃迁相对应的强谱线，更容易实现激光振荡。为什么电偶极矩大的跃迁相应的激光振荡难以实现？

5.8 估算由谐振腔产生的频率牵引系数，可用激光跃迁频率定义为 $S = (\omega - \omega_0) / (\omega_c - \omega_0)$ 。若激光介质长为50cm，洛仑兹增益分布的半最大值半宽度为0.5GHz，两反射镜的反射率为0.9，试求S值。

## 第六章 激光器的输出特性

泵浦和驰豫影响下的激光特性由谐振腔内光与原子间的相互作用确定。处理这些问题有不同的激光理论，可以把它们分类成速率方程理论，半经典理论和量子力学理论。在量子力学理论中，光和原子具有粒子性，而在半经典理论中，根据麦克斯韦方程组把光场看成是经典电磁波，原子用量子力学描述。速率方程表示原子粒子数和光能或光子数的时间变化，忽略光的相位和原子的偏振。因此，速率方程不能用于求解激光器的频率或讨论多模振荡特性。

### §6.1 激光器的速率方程

在第五章，我们讨论了三能级或四能级系统产生粒子数反转的条件，计算了无受激发射的反转粒子数。当激光器工作时，反转粒子数由于受激发射效应而降低。实际原子是多能级系统，激光还受到其它能级的影响。本章的目的是研究激光器的输出功率，激光跃迁能级以外的其它能级和泵浦的影响仅作为参数引入到驰豫速率和激发速率中。我们将不讨论激发过程，只讨论由激光功率引起的受激发射效应。

考虑从能级2到能级1产生的激光跃迁，其驰豫速率(有时称为驰豫常数)分别是 $\gamma_2$ 和 $\gamma_1$ 。原子优先被泵浦到上能级，但也有一些原子被激发到下能级，上能级和下能级的激发速率(单位时间单位体积激发的原子数)分别用 $\Phi_2$ 和 $\Phi_1$ 表示。虽然这些驰豫速率和激发速度随材料、温度和泵浦强度等的不同而明显变化，

但是它们与光强相对无关，所以可以假定为常数。

假设激光介质中的原子，处在能量密度为 $W$ 、频率为 $\omega$ 的激光场中。在上能级和下能级的单位体积中原子数分别为 $N_2$ 和 $N_1$ （以后称为粒子数）。单位时间受激发射几率为 $N_2 B(\omega)W$ ，吸收几率为 $N_1 B(\omega)W$ ，其中 $B(\omega)$ 由4.5节式(4.39)定义。上能级和下能级的粒子数变化速率分别是

$$\frac{dN_2}{dt} = \Phi_2 - \gamma_2 N_2 - (N_2 - N_1) B(\omega)W \quad (6.1)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \Phi_1 - \gamma_1 N_1 + (N_2 - N_1) B(\omega)W \quad (6.2)$$

用 $\kappa$ 表示谐振腔的振幅衰减常数，可以写出谐振腔中光能密度的变化速率为

$$\frac{dW}{dt} = -2\kappa W + \hbar\omega(N_2 - N_1)B(\omega)W \quad (6.3)$$

式(6.3)右边的第二项是由受激发射引起的能量增加，因为自发发射比受激发射小，所以忽略了自发发射效应。方程(6.1)~(6.3)是激光器的基本速率方程。

在无激光功率即 $W=0$ 而激光介质又被泵浦的情况下，粒子数用上标 $(0)$ 表示。因此，对于稳态，从式(6.1)、(6.2)得到

$$N_2^{(0)} = \frac{\Phi_2}{\gamma_2}, \quad N_1^{(0)} = \frac{\Phi_1}{\gamma_1} \quad (6.4)$$

在热平衡下，激发只是热激发，所以热激发与驰豫速率之比变为

$$\left(\frac{\Phi_2}{\gamma_2}\right)_T \propto \exp\left(-\frac{W_2}{k_B T}\right), \quad \left(\frac{\Phi_1}{\gamma_1}\right)_T \propto \exp\left(-\frac{W_1}{k_B T}\right)$$

同式(5.1)一样，原子粒子数比为

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_T = \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{k_B T}\right)$$

它遵循玻耳兹曼分布，利用以前提到过的各种方法，使用大的 $\Phi_z$ 和小的 $\gamma_z$ ，在激光器中可以产生大的反转粒子数。

$$\Delta N^{(0)} = N_2^{(0)} - N_1^{(0)} \quad (6.5)$$

激光振荡的条件，或者达到反转粒子数阈值的条件，由令式(6.3)右边为零得到的 $N_2 - N_1$ 值给出，即

$$\Delta N_{th} = \frac{2\kappa}{\hbar\omega B(\omega)} \quad (6.6)$$

如果将式(5.33)代入式(5.36)，则式(6.6)与5.5节得到的结果完全一致。

## §6.2 稳态输出

稳态时，速率方程(6.1)~(6.3)等于零。取式(6.1)/ $\gamma_2$ 和式(6.2)/ $\gamma_1$ 之差，并利用式(6.4)，得到

$$\Delta N^{(0)} - \Delta N - 2\tau \Delta N B(\omega) W = 0 \quad (6.7)$$

式中

$$\Delta N = N_2 - N_1, \quad \tau = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1} \right) \quad (6.8)$$

上式 $\tau$ 表示二能级系统的有效驰豫时间。从式(6.7)得到

$$\Delta N = \frac{\Delta N^{(0)}}{1 + 2\tau B(\omega) W} \quad (6.9)$$

这表明激光介质的反转粒子数 $\Delta N$ 随光能量密度 $W$ 的增加而下降，如图6.1所示。从式(6.3)右端可以看出，光能量增加的速率随 $\Delta N$ 的减小而降低，当式(6.3)右边两项绝对值相等时，得到稳

本振荡，因此有

$$\Delta N = \frac{2\kappa}{\hbar\omega B(\omega)} \quad (6.10)$$

换句话说，稳态时  $\Delta N = \Delta N_{ss}$ 。

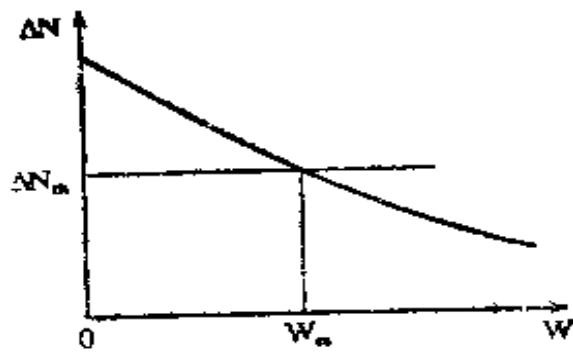


图6.1 反转粒子数随能量密度增加而下降，当稳态激光器的能量密度为  $W_{ss}$  时，反转粒子数等于阈值

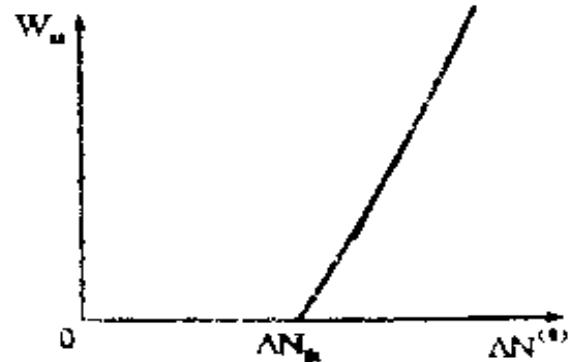


图6.2 稳态激光器的输出功率作为反转粒子数的函数

因为稳态时的能量密度  $W_{ss}$  同时满足式(6.9)和式(6.10)的能量密度  $W$  值，令  $\Delta N = \Delta N_{ss}$ ，由此得到

$$W_{ss} = \frac{\hbar\omega}{4\kappa\tau} (\Delta N^{(+)}) - \Delta N_{ss} \quad (6.11a)$$

或

$$W_{ss} = \frac{1}{2\tau B(\omega)} \left[ \left( \frac{\Delta N^{(+)}}{\Delta N_{ss}} - 1 \right) \right] \quad (6.11b)$$

随着激发强度逐渐增加，当反转粒子数超过  $\Delta N_{ss}$  值时，就有激光输出，如图6.2所示，输出功率与  $\Delta N^{(+)}$  -  $\Delta N_{ss}$ ，即超过阈值的部分成正比线性增加，这个关系对任何激光器都近似成立。对于每一种实际的激光器，上面计算所作的假设并不完全成

立。举例来说，当激发很弱时，介质的温度上升，可能改变驰豫常数并且功率特性也可能偏离直线。某些激光器的功率特性曲线随着 $\Delta N$ 的增加而上升到直线上面，而另外一些则落到直线下面。如果画出功率特性与激发强度(即用泵浦电流代替反转粒子数)的关系曲线，则经常会偏离直线较远。

方程(6.11)给出了谐振腔中的能量密度。因为从单位体积的激光介质中由受激辐射而发射的光功率为 $P_{ss} = 2\kappa W_{ss}$ ，所以从式(6.11a)得到

$$P_{ss} = \frac{\hbar\omega}{2\tau} (\Delta N^{(0)} - \Delta N_{ss}) \quad (6.12)$$

因为式(6.12)分母中的 $\tau$ 是由式(6.8)定义的原子驰豫时间，所以 $\hbar\omega/\tau$ 是单个原子发射的光功率。当一个原子从上能级向下能级跃迁时， $N_1$ 减少1， $N_2$ 增加1，粒子数反转应减少2，能发射光的有效原子的数目是 $\Delta N/2$ ，故式(6.12)是不难理解的。

上面方程代表的是谐振腔内的功率而不是腔外可利用的功率。由于普通激光器的一个反射镜是部分透射的，因而可以得到输出，同时在谐振腔内产生功率损耗并使阈值上升。如果镜的透射太大，则输出功率下降，故有一个最大输出时的最佳透射率。

若用 $T$ 表示腔长为 $L$ 的一个反射镜的透射率，则激光介质单位体积的稳态输出可表示为

$$P_{out} = 2\kappa_T W_{ss}, \quad \kappa_T = \frac{c}{4L} T \quad (6.13)$$

式中 $\kappa_T$ 是由输出耦合引起的振幅衰减常数，也可称为输出耦合系数。如果 $T$ 为零时的振幅衰减常数用 $\kappa_0$ 表示，则一般可认为

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_T \quad (6.14)$$

用式(6.11a), 单位体积的输出功率可以写成

$$P_{\text{out}} = \frac{\hbar\omega\kappa_T}{2\kappa\tau} (\Delta N^{(0)} - \Delta N_{\text{min}}) \quad (6.15)$$

因为阈值  $\Delta N_{\text{min}}$  正比于  $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1$  变化, 如式(6.6)所示, 所以当  $\kappa_T = 0$  时, 它取最小值:

$$\Delta N_{\text{min}} = \frac{2\kappa_0}{\hbar\omega B(\omega)} \quad (6.16)$$

用相对激发强度  $\mathcal{N}$ , 并将其定义为反转粒子数与反转粒子数最小值之比, 即

$$\mathcal{N} = \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta N_{\text{min}}} \quad (6.17)$$

可将式(6.15)重写为

$$P_{\text{out}} = \frac{\kappa_T}{\tau B(\omega)} \left( \frac{\kappa_0 \mathcal{N}}{\kappa_0 + \kappa_1} - 1 \right) \quad (6.18)$$

于是得到了输出功率与输出耦合系数的函数关系, 如图6.3所示。最大输出功率的最佳耦合  $\kappa_{\text{opt}}$  是  $\kappa_T$  的最佳值, 由下式给出

$$\kappa_{\text{opt}} = (\sqrt{\mathcal{N}} - 1) \kappa_0 \quad (6.19)$$

它由式(6.18)对  $\kappa_1$  微分为零得到。因此, 最佳耦合时的有用功率可以表示为

$$P_{\text{opt}} = \frac{\kappa_0}{\tau B(\omega)} (\sqrt{\mathcal{N}} - 1)^2 \quad (6.20)$$

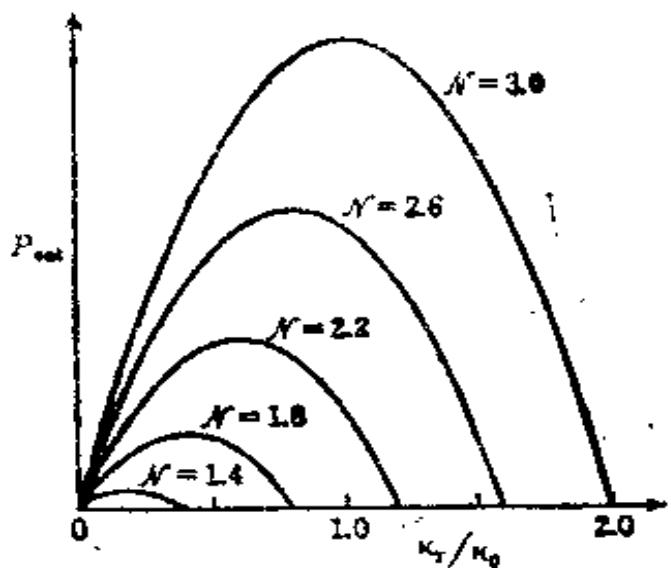


图6.3 输出功率与输出耦合系数 $k_T/k_0$ 的关系曲线,  $N$ 是相对激发强度

### §6.3 振荡的建立

激光振荡的建立可以用速率方程(6.1)~(6.3)进行讨论。如5.6节所述,在一个普通激光器中光学谐振腔的 $Q$ 值比光谱线的 $Q$ 值高,即 $\kappa \ll \gamma$ ,只要谐振腔中由受激发射引起的能量增长的速度不太大,那么与反转粒子数 $\Delta N$ 的变化相比较,光能量 $W$ 的变化就比较慢。当考虑式(6.3)中 $W$ 的时间变化时,  $\Delta N$ 可以假定取准稳定值,使振荡的建立比较容易计算(见下所述)。必须同时考虑 $\Delta N$ 和 $W$ 变化的情况将在下一节讨论。

在这里,我们假定在振荡建立期间,随着 $W$ 的逐渐增加, $\Delta N$ 取由光强瞬时值确定的稳态值。将式(6.9)代入式(6.3),就可得到

$$\frac{dW}{dt} = -2\kappa W + \frac{\hbar\omega \Delta N^{(0)} B(\omega) W}{1 + 2\tau B(\omega) W} \quad (6.21)$$

为了简化表达式,令

$$\hbar\omega\Delta N^{(a)}B(\omega) = 2a, \quad 2\tau B(\omega) = b$$

使用 $(1 + bW)^{-1} \approx 1 - bW$ 的近似，假设饱和不太强，于是稳态时的光能量密度可写为

$$W_{ss} = \frac{a - \kappa}{ab} \quad (6.22)$$

方程(6.21)可写为

$$2dt = \frac{dW}{(a - \kappa - abW)W} \quad (6.23)$$

对式(6.23)进行积分得到

$$2(a - \kappa)t = \ln \frac{W}{a - \kappa - abW} + \frac{a - \kappa - abW_0}{W_0}$$

式中 $W_0$ 是 $t = 0$ 时的初始能量，即热辐射能量。利用式(6.22)，上面方程可以写为

$$\exp(2(a - \kappa)t) = \frac{W}{W_0} \cdot \frac{W_{ss} - W_0}{W_{ss} - W}$$

求解上式，于是 $W$ 的时间特性可以表示为

$$W(t) = \frac{W_{ss}W_0 \exp(2(a - \kappa)t)}{W_{ss} + W_0 \{\exp(2(a - \kappa)t) - 1\}} \quad (6.24)$$

因为 $W_{ss} \gg W_0$ ，对式(6.24)作适当的近似后可重写为

$$W(t) = \frac{W_{ss}}{1 + A \exp(-2(a - \kappa)t)} \quad (6.25)$$

式中

$$A = W_{ss}/W_0$$

典型参量的计算结果如图6.4和图6.5所示。由式(5.33)、(5.37)，衰减常数 $\kappa = c(1 - R_1R_2)/4L$ ，当 $L = 1\text{m}$ 和 $R_1R_2 = 0.9$ 时，得到 $\kappa = 7.5 \times 10^6 \text{s}^{-1}$ 。我们已取放大系数 $a$ 比 $\kappa$ 稍大，所以

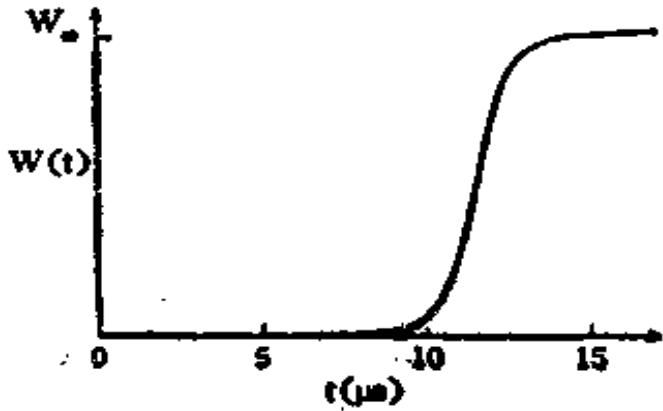


图 6.4 激光振荡的准稳态建立

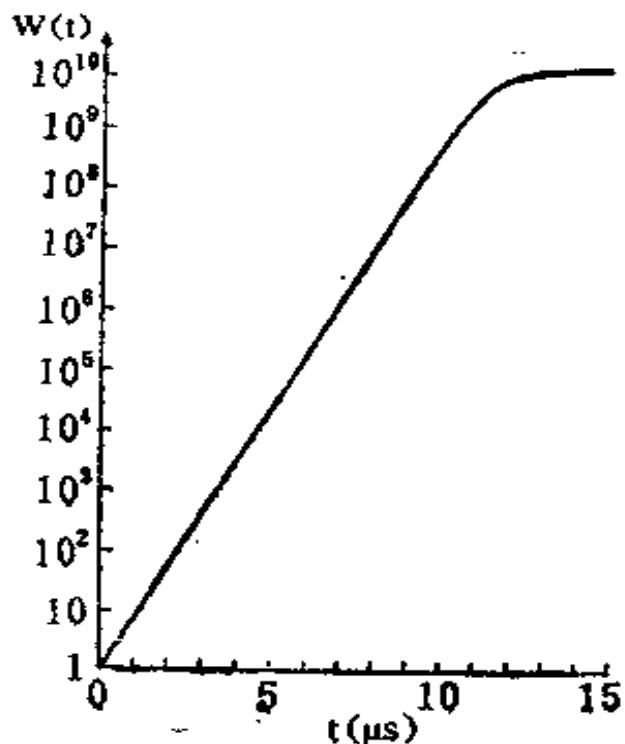


图 6.5 纵轴  $W(t)$  用对数坐标表示的振荡建立  
(同图 6.4)

$\alpha - \kappa = 1 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ 。初始能量  $W_0$  可以由  $t = 0$  时的热辐射或者激光模式散射的泵浦辐射给出。 $W_0$  值估计约为  $1 \sim 10^3 \hbar\omega$ 。从式(6.25)和用对数坐标给出  $W(t)$  的图 6.5 中可以明显看出， $W_0$  大的变化，实际上相当于时间坐标一个小小的位移。在这个例子里，我们令  $A = W_{\text{sat}}/W_0 = 10^{10}$ 。

从图 6.5 清楚看出，激光功率开始按指数规律增加，然后呈现饱和，最后达到稳态。图 6.4 所示曲线变化的主要部分是在  $10 \mu\text{s}$  饱和建立以后。上面振荡建立的计算只在  $\alpha - \kappa$  比  $\tau^{-1}$  小得多时才近似成立。低增益的连续波气体激光器就是一个很好的例子。相反对低  $Q$  谐振腔或高增益的激光介质(例如固体激光器)上述近似不成立，这种情况将在以下几节讨论。

## §6.4 张驰振荡

由闪光灯激发产生的红宝石激光或由脉冲电流激发产生的半导体激光经常出现张驰振荡的特性(图6.6)，而不象图6.4所示那样单调上升。这种张驰振荡或脉冲振荡的特性可用速率方程讨论。因为用三个方程(6.1)~(6.3)计算有些麻烦，所以我们假定脉冲或瞬变现象只在相当短的时间内出现，并且在此期间除上下激光能级外，实际上不发生任何跃迁(激发或驰豫)。

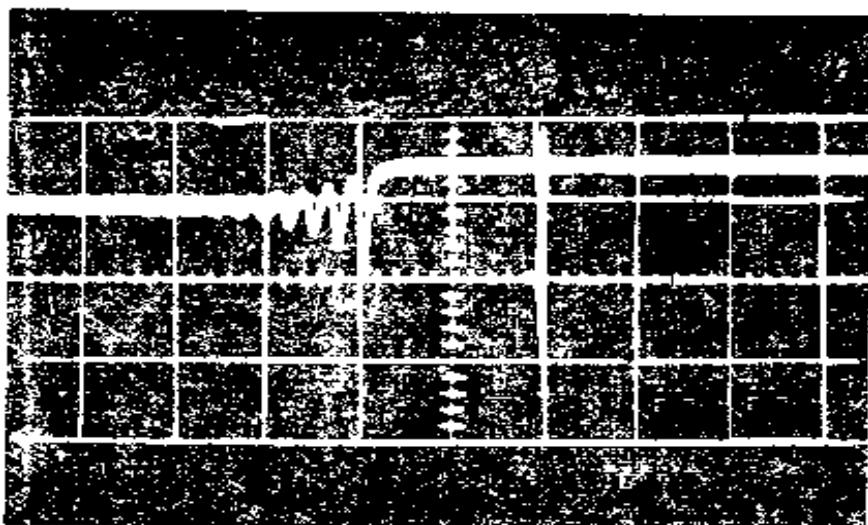


图6.6 在红宝石激光器中观察到的张驰振荡，  
时间标度每格  $10\mu s^{(0 \cdot 1)}$

假若这种情况下上下能级原子数的和  $N_2 + N_1$  为常数，则反转粒子数  $\Delta N = N_2 - N_1$  的时间变化可以写为

$$\frac{d}{dt} \Delta N = \frac{\Delta N(0) - \Delta N}{\tau} - 2 \Delta N W B(\omega) \quad (6.26)$$

而式(6.3)变为

$$\frac{d}{dt} W = -2\kappa W + \hbar\omega \Delta N W B(\omega) \quad (6.27)$$

这些方程构成一组含有两个变量 $W$ 和 $\Delta N$ 乘积项的非线性联立微分方程。

为简化表达式，我们把变量 $\Delta N$ 、 $W$ 和 $t$ 转换成如下无量纲的量

$$x = \hbar\omega\tau B(\omega)\Delta N, \quad y = \tau B(\omega)W, \quad \theta = t/\tau$$

于是式(6.26)和(6.27)变为

$$\frac{dx}{d\theta} = x_0 - x - 2xy \quad (6.28)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -x, y + xy \quad (6.29)$$

式中已令

$$x_0 = 2\kappa\tau, \quad x_0 = \hbar\omega\tau B(\omega)\Delta N^{(0)}$$

显然， $x_0$ 是粒子数反转的固值(式(6.6))，即稳态的 $x$ 值(式(6.10))，令式(6.28)和式(6.29)等于零，稳态能量则由下式给出

$$y = -\frac{1}{2} \left( \frac{x_0}{x} - 1 \right) \quad (6.30)$$

等于式(6.11)。

对于较大的相对激发强度 $\mathcal{N} = x_0/x$ ，由数值计算法求解非线性联立微分方程(6.28)、(6.29)，得到辐射建立的结果如图6.7所示。它对一个实际激光器的张驰振荡(图6.6)给予了较满意的解释。开始时的大振幅之后，张驰振荡逐渐衰减，最后趋于稳态。速率方程可以线性化并作解析分析，因此研究参数对张驰振荡的周期和衰减常数的影响就比较容易。

如果 $x$ 和 $y$ 分别接近 $x_0$ 和 $y_0$ ，令

$$x = x_0(1+p), \quad y = y_0(1+q) \quad (6.31)$$

因为 $p$ 和 $q$ 比1小，所以忽略 $p$ 、 $q$ 项，于是式(6.28)、式(6.29)简

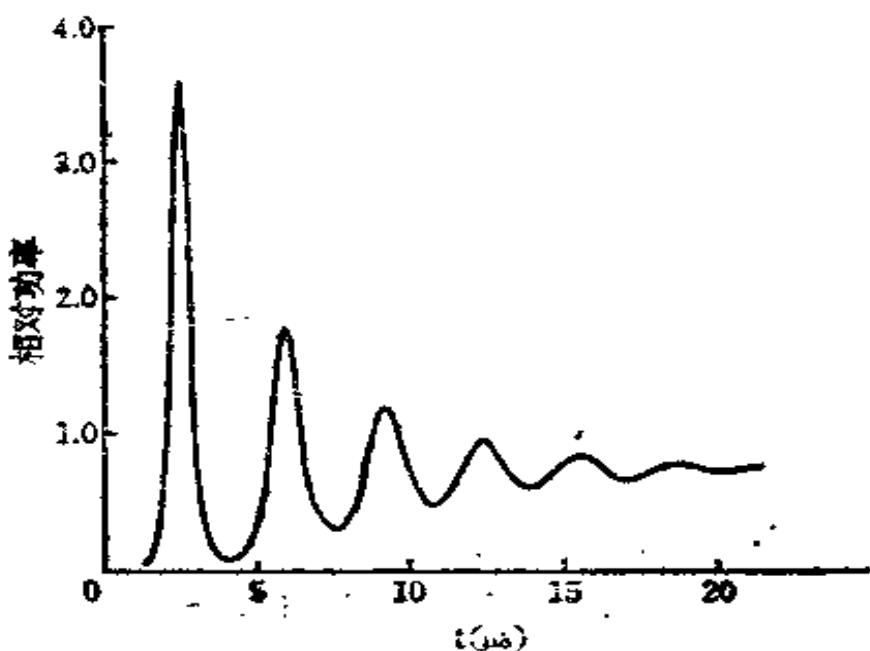


图 6.7 数值计算张驰振荡的实例

化为

$$\frac{dp}{d\theta} = -\mathcal{N}p - (\mathcal{N} - 1)q, \quad \frac{dq}{d\theta} = x_1 p$$

从两方程中消去  $p$ , 得到

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + \mathcal{N} \frac{dq}{d\theta} + x_1 (\mathcal{N} - 1)q = 0 \quad (6.32)$$

这就是熟知的衰减微分方程, 其解是  $t = \theta\tau$  的函数:

$$q = A \exp(-\gamma t) \cos \omega(t - t_0) \quad (6.33)$$

式中  $A$  和  $t_0$  为初始值, 而

$$\omega_+ = \frac{1}{2\tau} \sqrt{4x_1(\mathcal{N}-1) - \mathcal{N}^2} \approx \frac{1}{\tau} \sqrt{x_1(\mathcal{N}-1)}$$

$$\gamma = \mathcal{N}/2\tau$$

从这个结果可以看出, 激发越强, 张驰振荡的周期就越短, 衰减

常数也越大。上面对 $\omega_n$ 的近似是在 $\kappa\tau \gg 1$ 情况下得到的，所以 $x_0 \gg 1$ 。

## §6.5 Q 开 关

当激光跃迁的上能级寿命比较长时，用称为Q开关的方法可以获得高瞬时功率的短激光脉冲。在这种工作方式下，最初激光器被连续泵浦，同时激光腔保持低Q状态。当反转粒子数增加到足够高时，突然把激光腔转换到高Q值状态，于是积累在上能级的能量在很短的时间内作为激光释放出来。因为以这样一种方式得到的激光脉冲峰值功率比从一般脉冲振荡得到的高得多，所以Q开关激光器的输出脉冲又称为巨脉冲。

Q开关激光器的特性也能用速率方程(6.28)、(6.29)来研究。对于一般振荡，有 $y \leq y_0$ ，从式(6.30)可以看出， $y$ 大约为1。相反，在Q开关工作时，因为除在脉冲建立的开始阶段外， $y \gg 1$ ，所以式(6.28)中 $x_0 - x$ 项比起 $2xy$ 可以忽略，于是得到

$$-\frac{dx}{d\theta} = -2xy \quad (6.34a)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -x_0 y + xy \quad (6.34b)$$

可以用数值法计算这些方程对归一化脉冲功率和反转粒子数的时间变化，如图6.8所示。

从图中可以看出，由于反转粒子数取初始阈值的10倍，因而脉冲迅速建立且粒子数随脉冲的增长而下降。脉冲达到最大值后，由于这时激光介质的增益实际上降到零，脉冲逐渐衰减。在图6.8的例子中，脉冲峰值功率为稳态功率的7450倍。

虽然这样的脉冲形状只能在数值计算中得到，但是 $x$ 和 $y$ 之间

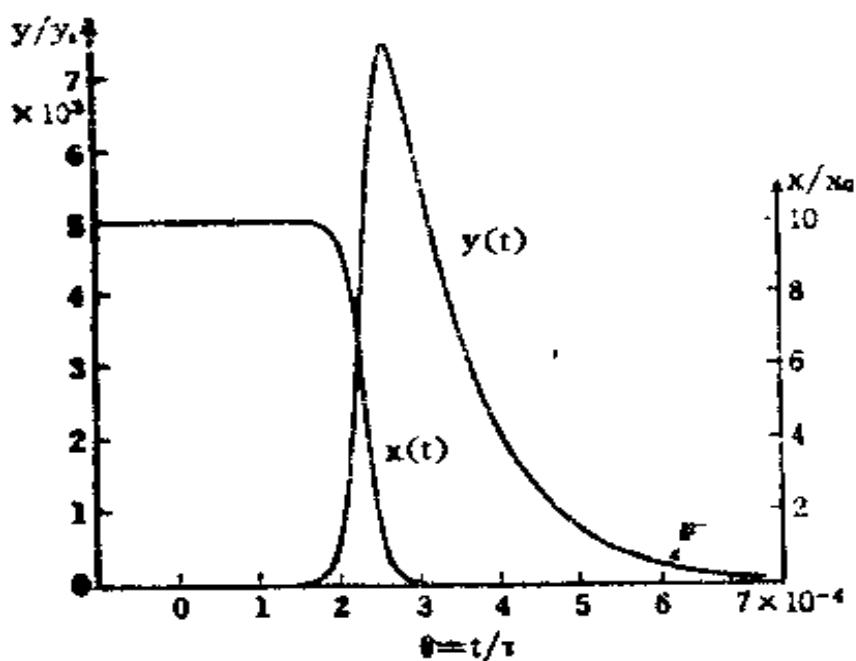


图 6.8  $Q$  开关激光器的归一化输出功率  $y(t)$  和反转粒子数  $x(t)$ 。 $x_s = 10^4$ ,  $x_0 = 10x_s = 10^5$ , 归一化光强初始值  $y(0) = 10^{-6}y_s$ 。由式 (6.30) 有  $y_s = 4.5$ , 因此  $y(0) = 4.5 \times 10^{-6}$   
(由 Yoshio Cho 计算)

的解析关系式可以从以下峰值功率和脉冲能量的计算中求出。重写式(6.34a)

$$\frac{dx}{x} = -2y d\theta$$

利用初始条件  $\theta = 0$  时  $x = x_0$ , 对上式积分得

$$\ln \frac{x}{x_0} = -2 \int_0^\theta y d\theta \quad (6.35)$$

再次利用式(6.34a), 重写式(6.34b)为

$$dy = -x_s y d\theta - \frac{1}{2} dx$$

对上式积分并代入式(6.35), 可得到

$$y = \frac{x_0 - x}{2} - \frac{x_s}{2} \ln \frac{x_0}{x} \quad (6.36)$$

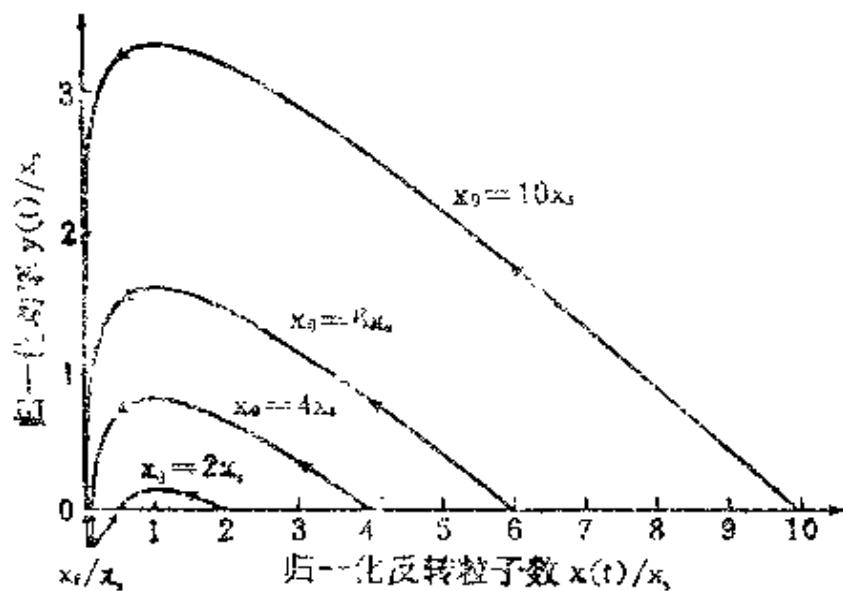


图6.9 Q开关激光器的归一化输出功率  $y(t)$  与相应反转粒子数  $x(t)/x_s$  之间的关系。  $x_0$  是反转粒子数的初始值,  $x_s$  是稳定振荡下的反转粒子数

图6.9中示出了  $x$  和  $y$  之间的关系, 图中参数  $x_0$  是  $t = \theta = 0$  时的归一化反转粒子数。

在开始, 当  $x = x_0$  时, 归一化功率  $y$  为零。功率  $y$  随时间增加, 反转粒子数  $x$  相应地下降。当  $x$  降低到  $x_s$  时, 增益刚好等于损耗, 这时功率  $y$  不再进一步增加, 从最大值开始逐渐下降, 最后变为零。最终的反转粒子数  $\Delta N^{(t)}$  由下式给出

$$\Delta N^{(t)} = \frac{x_s}{\hbar \omega \tau B(\omega)} \quad (6.37)$$

式中  $x_s$  是满足式(6.36)中  $y = 0$  的  $x$  值:

$$x_0 - x_s = x_s \ln \frac{x_0}{x_s} \quad (6.38)$$

从开始到结束受激发射所释放的总脉冲能量等于  $\hbar\omega(\Delta N^{(0)} - \Delta N^{(t)})/2$ 。谐振腔耦合输出引起的衰减常数和前面一样仍用  $\kappa_T$  表示，从Q开关激光器得到的有用输出脉冲能量由下式给出

$$W = \frac{\kappa_T}{\kappa} \cdot \frac{\hbar\omega}{2} (\Delta N^{(0)} - \Delta N^{(t)}) \quad (6.39)$$

式(6.36)对  $x$  微分得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2x}$$

从上式可以看出，当  $x = x_0$  (阈值)时，输出功率  $y$  变为最大。于是相对于稳态功率归一化后的脉冲输出功率变为

$$y_{\max} = \frac{x_0 - x}{2} = \frac{x_0}{2} \ln \frac{x_0}{x} \quad (6.40)$$

因此，Q开关激光器的峰值功率为

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 2\kappa_T \frac{y_{\max}}{\tau B(\omega)} \\ &\approx \hbar\omega\kappa_T \left[ (\Delta N^{(0)} - \Delta N_{ss} - \Delta N_{ss} \ln \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta N_{ss}}) \right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

如果脉冲能量可以用峰值功率和有效脉冲宽度  $\Delta t$  的乘积来表示，则有

$$\Delta t = \frac{W}{P_{\max}} = \frac{1}{2\kappa} \left( 1 - \frac{1}{N-1} \ln N \right)^{-1} \quad (6.42)$$

式中

$$N = x_0/x_s = \Delta N^{(0)} / \Delta N_{ss}$$

是  $Q$  值刚好转换时相应的激发强度。

为了进一步理解Q开关激光器的特性，下面列出了一些典型的参量值。固体激光器（例如红宝石、YAG或钕玻璃激光器）的上能级原子的寿命 $\tau$ 大约为 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ s。 $t = 0$ 时，在转换Q值之前谐振腔内的损耗很大，光在谐振腔两镜之间往返几次就损耗殆尽。因此最初光的衰减常数为 $\kappa' \approx 10^9 \text{ s}^{-1}$ ，当 $t < 0$ 时，阈值 $2\kappa'\tau$ 相当高，反转粒子数 $x_0$ 增加到可以与连续泵浦下建立振荡时的 $\kappa'\tau = 10^5 \sim 10^6$ 相比拟。在 $t = 0$ 时，谐振腔的Q值突然上升，使得 $t > 0$ 时的 $\kappa$ 降低到 $10^7 \text{ s}^{-1}$ 以下，而且把阈值 $x_c = 2\kappa\tau$ 降低到小于 $x_0$ 的百分之一，故有 $x_c \ll x_0$ ，于是式(6.40)可以近似为

$$y_{\max} \approx x_0/2$$

其误差在百分之几以内。

由式(6.41)，激光输出峰值功率可以表示为

$$P_{\max} \approx \hbar\omega\kappa \cdot \Delta N^{(0)} \quad (6.43)$$

因为 $x_c$ 比 $x_0$ 小， $x_0$ 大约又比 $x$ 大一百倍，所以可以使用 $x_c \ll x_0$ 的近似，从式(6.39)得到输出能量为

$$W \approx \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \frac{\kappa\tau}{\kappa} \Delta N^{(0)} \quad (6.44)$$

有效脉冲宽度可由下式给出

$$\Delta t \approx 1/2\kappa \quad (6.45)$$

因为稳态工作时不可能使反转粒子数比阈值高很多，所以由式(6.15)，例如对于 $\Delta N^{(0)} \approx 2N_{++}$ ，稳态输出功率变为

$$P_{\text{out}} \approx \frac{\hbar\omega\kappa\tau}{2\kappa\tau} \Delta N_{++} \quad (6.46)$$

相反，在Q开关激光器中，可以使 $\Delta N^{(0)}$ 达到 $\Delta N_{++}$ 的一百倍，当 $\tau = 10^{-4} \sim 10^{-3}$ s， $\kappa = 10^7 \text{ s}^{-1}$ 时， $\kappa\tau$ 为 $10^8 \sim 10^9$ 量级。因此，

可以看出，Q开关激光器的峰值功率(式(6.43))是稳态功率(式(6.46))的 $10^4 \sim 10^5$ 倍。例如，如果把Q开关用于一个稳态输出为1kW的激光器中，则能获得 $10 \sim 100$ MW的脉冲峰值功率。

当反转粒子数  $\Delta N^{(\bullet)} = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\kappa_r = \kappa/2 = 5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega = 2 \times 10^{19} \text{ J}$  时，由式(6.43)计算的峰值输出功率可达  $P_{\max} = 10^7 \text{ W/cm}^2$ 。重新设  $\kappa = 10^7 \text{ s}^{-1}$ ，从式(6.45)得到脉冲宽度  $\Delta t = 50 \text{ ns}$ 。如果使  $\kappa$  小于  $10^7 \text{ s}^{-1}$ ，则脉冲宽度反比于  $\kappa$  而变宽。但是若  $\kappa_r$  与  $\kappa$  之比保持常数，则脉冲能量不变，并且峰值功率比例于  $\kappa$  而变小。相反，如果  $\kappa$  较大，则脉冲宽度变窄峰值功率变大。但是，如果使  $\kappa$  比  $10^7 \text{ s}^{-1}$  大几倍且脉冲宽度小于或约为  $10 \text{ ns}$ ，则阈值  $x_c = 2\kappa\tau$  正比于  $\kappa$  而变大， $x_c \ll x_0$  的近似不再成立，峰值功率和脉冲能量将比从式(6.43)、(6.44)得到的值要小。于是，实际上巨脉冲的宽度下限约为  $10 \text{ ns}$ 。

当光强变化很快时，如跃迁几率、驰豫速率这样一些参数与准稳态时不同，速率方程的基本假设可能不再成立。然而，就大多数固体激光器来说，时间标度约为  $1 \text{ ns}$  时，速率方程近似常常是成立的。对于半导体激光器，时间标度为  $10 \text{ ps}$  时，可认为速率方程近似成立。更严格的证明必须借助于第九章的半经典理论。

## 习 题

6.1 在式(6.3)中忽略了自发发射效应，若考虑自发发射效应，试求出式(6.3)右边相应增加的项(提示：爱因斯坦A系数是与空间模式无关的一个光子的发射几率)。

6.2 假设增益为洛伦兹分布，试求反转粒子数阈值与频率的函数表达式。

6.3 假设激光器增益具有洛伦兹分布，试画出表示激光器稳态功率与频率的关系曲线。

6.4 证明由式(6.20)给出的  $P_{\text{pp}}$  与  $\mathcal{N}$  关系曲线上的任意切线，与式(6.18)表示的直线完全一样。

6.5 不用  $(1 + bW)^{-1} \approx 1 - bW$  近似，试求出式(6.21)的积分。

6.6 试在  $x-y$  平面上绘制由式(6.28)、(6.29)表示的驰豫振荡示意图。如果配有微机，画出  $x_0 = 2.5x_1$  的数值计算曲线(提示： $y = (x_0 - x)/2x$  时  $dx/d\theta = 0$ ； $x = x_1$  时  $dy/d\theta = 0$ ，曲线是一种会聚螺旋)。

6.7 试求图6.8中巨脉冲的半最大值全宽度，在相同条件下将其结果与式(6.42)计算的  $\Delta t$  值相比较。

6.8 由(6.39)Q开关激光器给出最大脉冲能量，求最大脉冲能量对应的最佳输出耦合公式(提示： $\Delta N_{\text{th}} = \Delta N_{\text{th},\text{max}} \cdot (\kappa_0 + \kappa_+)/\kappa_0$ ，利用式(6.17))。

6.9 试求巨脉冲峰值功率与稳态功率的比与  $\mathcal{N} = x_0/x_1$  的函数关系式。当  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  时，其比的极限是多大？

## 第七章 相干相互作用

迄今，我们主要讨论了原子的跃迁几率和跃迁过程中光能量的发射和吸收。为了对激光最重要的特性即相干性有清楚的认识，有必要讨论光和原子间的相干相互作用，然后再讨论这种相干相互作用与原子和非相干光相互作用的不同之处。

当一个原子处在相干光场中，原子将产生相对于光场具有固定相位的电偶极矩。当许多原子与同一光场相互作用时，则感应的原子电偶极矩的相位间存在相关性。处于这种状态下的原子，被认为是具有相干性的原子。象光的相干那样，原子相干的程度可从完全相干到完全非相干。在本章，我们先讨论没有微扰时原子的相干性。

### §7.1 二能级原子和相干场之间 的相互作用

假定原子只有两个本征态，即只有两个能级<sup>(1)</sup>，这样的原子称为二能级原子。相应的本征态波函数为本征函数  $\phi_1(r, t)$  和  $\phi_2(r, t)$ ，本征能量分别为  $W_1$  和  $W_2$  ( $W_2 > W_1$ )。若原子的哈密顿算符记为  $\mathcal{H}$ ，则薛定谔方程可写为

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{H}\phi \quad (7.1)$$

(1) 假定本征态是非简并的，因此只有一个上能级和一个下能级。

在无微扰情况下，无微扰哈密顿算符记为  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ ，于是式(7.1)的解可表示为

$$\psi_n(\vec{r}, t) = \phi_n(\vec{r}) \exp(-i(W_n/\hbar)t) \quad (7.2)$$

$$\mathcal{H}_0 \phi_n(\vec{r}, t) = W_n \phi_n(\vec{r}, t) \quad (7.3)$$

式中  $n=1$  和  $2$ 。本征函数的空间部分用  $\phi_n(\vec{r})$  表示。一个未受微扰的二能级原子，处于两个本征态的任一态上，其本征能量为  $W_1$  或  $W_2$ ，于是原子核附近的电子分布可用  $|\phi_n(\vec{r}, t)|^2 = |\phi_n(\vec{r})|^2$  来表示。

这里假定与原子相作用的光波长比原子的尺寸大，因而可以认为作用于原子的光场在空间上是均匀的，并以频率  $\omega$  随时间变化。于是，该电场可表示为

$$E(t) = |\mathcal{E}| \cos(\omega t + \theta) = (\mathcal{E} \exp(i\omega t) + \mathcal{E}^* \exp(-i\omega t))/2$$

式中  $\mathcal{E}$  为复振幅，可写为

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}| \exp(i\theta) \quad (7.4)$$

因为  $|\mathcal{E}|$  和  $\theta$  对相干场来说是常数，所以可选择时间原点使  $\theta = 0$ 。

在本章，我们只考虑电偶极子跃迁的情况。取  $z$  方向为光场的偏振方向，原子的电偶极矩算符用  $\mu_z$  表示，则微扰哈密顿算符可以表示为

$$\mathcal{H}'(t) = -\mu_z E(t) = -\mu_z (\mathcal{E} \exp(i\omega t) + c.c.)/2 \quad (7.5)$$

通常，因为微扰原子的波函数可以用本征函数的展开来表示，所以处在任意状态的二能级原子的波函数可以写成以下形式：

$$\psi(\vec{r}, t) = a_1(t) \phi_1(\vec{r}, t) + a_2(t) \phi_2(\vec{r}, t) \quad (7.6)$$

式中  $a_1(t)$  和  $a_2(t)$  表示本征态 1 和 2 的几率振幅，且随时间缓慢变化。将  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'(t)$  和式(7.6)代入薛定谔方程(7.1)，由此

得到

$$\begin{aligned} i\hbar \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \phi_1 + \alpha_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{d\alpha_2}{dt} \phi_2 + \alpha_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) \\ = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}')(\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$\mathcal{H}'$ 的矩阵元表示为

$$\mathcal{H}'_{11} = \int \phi_1^* \mathcal{H}' \phi_1 d\vec{r} \quad (7.8)$$

因为 $\mu_1$ 的对角元素为零(4.4节详尽讨论), 所以 $\mathcal{H}'_{11} = 0$ 和 $\mathcal{H}'_{22} = 0$ 。用 $\phi_1^*$ 乘以式(7.7), 再对空间积分, 得到

$$i\hbar \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 \mathcal{H}'_{12} \exp(-i\omega_0 t) \quad (7.9a)$$

在这里, 我们用了本征函数的正交性

$$\int \phi_1^* \phi_2 d\vec{r} = \int \phi_2^* \phi_1 d\vec{r} = 0$$

$\omega_0$ 是二能级原子的固有频率, 它由下式给出

$$\omega_0 = \frac{W_2 - W_1}{\hbar}$$

同理, 用 $\phi_2^*$ 乘以式(7.7), 再对其积分, 得到

$$i\hbar \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1 \mathcal{H}'_{21} \exp(i\omega_0 t) \quad (7.9b)$$

现在, 如果把式(7.5)的电偶极子相互作用用哈密顿算符矩阵元

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{12} &= -\mu_{12} [\mathcal{E} \exp(i\omega t) + c.c.] / 2 \\ \mathcal{H}'_{21} &= -\mu_{21} [\mathcal{E} \exp(i\omega t) + c.c.] / 2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

分别代入式(7.9a)和式(7.9b), 则有

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{i}{2\hbar} \mu_{12} \alpha_2 (\mathcal{E} \exp(i\omega t) + c.c.) \exp(-i\omega_0 t)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}\mu_{21}a_1(\mathcal{E}\exp(i\omega t) + c.c.)\exp(i\omega_0 t)$$

由于上式右边的 $\exp(\pm i(\omega + \omega_0)t)$ 项变化很快，当在大于 $1/\omega$ 的时间范围内求平均时，它可以取为零。保留剩余的共振项 $\exp(\pm i(\omega - \omega_0)t)$ 的这种近似称为旋转波近似。这个术语的含意将在7.5节中详细介绍。在旋转波近似下，式(7.11)变为

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= \frac{ix}{2}\alpha_2\exp(i(\omega - \omega_0)t) \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{ix^*}{2}\alpha_1\exp(-i(\omega - \omega_0)t)\end{aligned}\quad (7.12)$$

式中

$$x = \frac{\mu_{12}\mathcal{E}}{\hbar}, \quad x^* = \frac{\mu_{21}\mathcal{E}^*}{\hbar}$$

当假定入射光场的 $x$ 和 $\omega$ 为常数时，式(7.12)的联立微分方程组比较容易求解。式(7.12)中第一个方程对 $t$ 微分且将其结果代入第二个方程，则得到

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} - i(\omega - \omega_0)\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{|x|^2}{4}\alpha_1 = 0 \quad (7.13)$$

这个方程的解一般可写为

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= [A_1\exp(i\Omega t/2) \\ &\quad + B_1\exp(-i\Omega t/2)]\exp[i(\omega - \omega_0)t/2]\end{aligned}\quad (7.14)$$

$$\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + |x|^2} \quad (7.15)$$

式中 $A_1$ 和 $B_1$ 是由初始条件决定的积分常数。

现在，假设原子开始( $t < 0$ )时处在上能级2，而在 $t \geq 0$ 时受到了由式(7.5)所表示的相干相互作用，于是初始条件可写为

$a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ , 从而有

$$A_1 = -B_1 = \frac{x}{2\Omega}$$

因此, 由式(7.14), (7.12)得到

$$a_1(t) = \frac{ix}{\Omega} \exp[i(\omega - \omega_0)t/2] \sin \frac{\Omega t}{2} \quad (7.16)$$

$$a_2(t) = \exp[-i(\omega - \omega_0)t/2] \cdot$$

$$\left( \cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \quad (7.17)$$

因为原子最初处在上能级, 故在  $t = 0 \sim t$  的时间内,  $|a_1(t)|^2 = 1 - |a_2(t)|^2$  代表了由于微扰(式(7.5))而感应产生的向下能级跃迁的几率。因为

$$|a_1(t)|^2 = \frac{|x|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \quad (7.18)$$

所以, 跃迁几率随时间不是单调增加, 而是周期性地变化, 如图 7.1 所示。

由图 7.1 或式(7.18)可以看出, 从  $t = 0 \sim \pi/\Omega$ , 原子发射光, 而

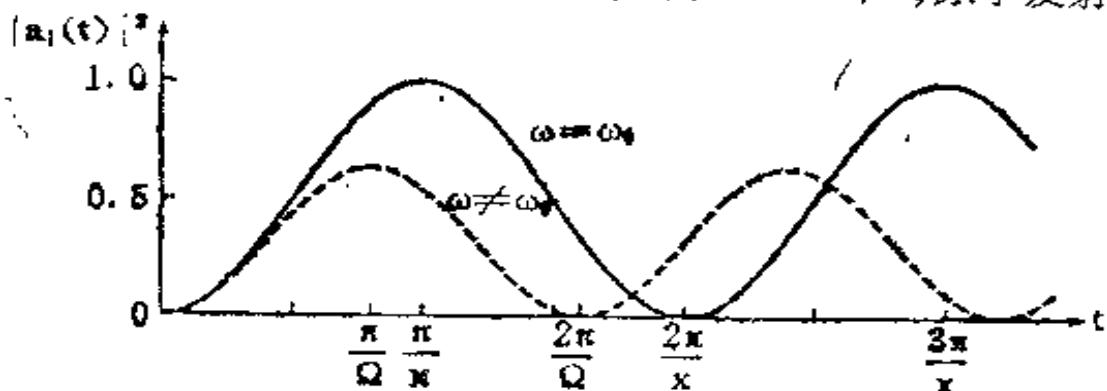


图 7.1 相干相互作用下二能级原子的跃迁几率

从  $t = \pi/\Omega \sim 2\pi/\Omega$ , 原子则吸收光; 之后, 发射和吸收周期性地重复。这是除了相干相互作用之外没有其它微扰时的情况。然而实际存在驰豫效应, 例如与其它原子的碰撞和自发发射。因此, 图7.1中的正弦曲线变成了一种衰减振荡的形式。式(7.15)中的  $\Omega$  称为 跃动频率,  $\omega = \omega_0$  时 的  $\Omega$  值即  $|x| = |\mu_{12} \mathcal{E}|/\hbar$  称为 拉比 (Rabi) 特征频率, 简称拉比频率。

## §7.2 感应电偶极矩和感应发射系数

如前所述, 处于稳定状态  $\psi_1$  或  $\psi_2$  的非简并二能级原子 没有电偶极矩, 但当它受到相干相互作用时, 就会感应出一个振荡电偶极矩  $p(t)$ 。用  $e$  表示电子的电荷量, 取  $z$  轴为光场方向, 则  $p(t)$  可由  $ez$  的量子力学期待值给出

$$p(t) = \int \phi^*(\vec{r}, t) e z \phi(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (7.19)$$

将式(7.6)和式(4.34)代入上方程, 得到

$$p(t) = a_1^* a_2 \mu_{21} \exp(i\omega_0 t) + a_2^* a_1 \mu_{12} \exp(-i\omega_0 t) \quad (7.20)$$

因为受相干相互作用(式(7.5))微扰的原子, 其  $a_1$  和  $a_2$  分别由式(7.16)和式(7.17)给出, 将它们代入式(7.20), 得到

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{i\mathbf{x}}{2\Omega} \mu_{21} \left( \sin \Omega t - i \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} (1 - \cos \Omega t) \right) \exp(i\omega t) \\ & + c.c. \end{aligned} \quad (7.21)$$

虽然由式(7.20)看来,  $p(t)$  似乎以固有频率  $\omega_0$  振荡, 但是当  $a_1$ 、 $a_2$  代入式(7.20)后, 从式(7.21)可看出, 它实际上是以入射光的频率  $\omega$  振荡。

当 $\omega = \omega_0$ 时，由式(7.21)可看出，在初始的 $t=0 \sim \pi/\Omega$ 阶段，感应电偶极矩的相位超前电场 $90^\circ$ ，极化电流 $\partial p/\partial t$ 的相位超前 $180^\circ$ ，即与电场反相。电流沿电场反向流动等效于一个负电阻，它从电场中吸收负能量，也就是说，它向电场提供能量。这与感应发射能量相同。由式(7.21)、(7.4)可得到电偶极矩在 $\omega = \omega_0$ 时提供给电场的功率为

$$P = -\overline{\frac{\partial p}{\partial t} E} = \frac{\hbar\omega|x|^2}{2\Omega} \sin\Omega t \quad (7.22)$$

它等效于感应发射能量 $\hbar\omega|a_1(t)|^2$ 对时间的导数。即使在 $\omega \neq \omega_0$ 时，这个关系式也成立。通常二能级原子的能量损耗等于感应电偶极矩对光场所做的功。

基于以上考虑，现在来讨论非相干光引起的原子感应吸收和发射。当原子受到非相干微扰时，波函数也可以表示为如式(7.6)形式的 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的线性叠加。在这种情况下，几率振幅 $a_1$ 和 $a_2$ 的相位是不确定的。即使每一个原子的 $p(t)$ 有确定的瞬时值，但是对于大量原子的系统平均或者一个长周期的时间平均来说，其值为零。由于 $|p(t)|^2$ 的平均不为零，所以即使在非相干光情况下，感应跃迁的几率也不为零。因此，仍可利用上述对相干相互作用的计算来求出爱因斯坦 $B$ 系数。

如果入射光较弱，则 $\varphi$ 和 $x$ 相当小，只有频率 $\omega$ 很接近 $\omega_0$ 时，由式(7.18)给出的跃迁几率才可能大。一个初始处于下能级的原子，其吸收几率也应由式(7.18)给出。非相干光具有连续光谱分布，在频率 $\omega$ 处的傅立叶分量为 $e(\omega)$ 。 $e(\omega)$ 的统计平均为零，但 $|e(\omega)|^2$ 的统计平均则不为零，并且在 $\omega_0$ 附近可认为有一个与 $\omega$ 无关的值。因此，如果令

$$\left\langle \left| \frac{\mu_{12}e(\omega)}{\hbar} \right|^2 \right\rangle_{ss} = x_{ss}^2, \quad (7.23)$$

则这个建立叶分量的感应跃迁几率可令式(7.18)中 $x \rightarrow 0$ , 并用 $x_{\perp\perp}^2$ 代替 $|x|^2$ 得到

$$|a(\omega, t)|^2 = \left( \frac{\sin(\omega - \omega_0)t/2}{\omega - \omega_0} \right)^2 x_{\perp\perp}^2$$

由 $0 \sim t$ 对上式积分, 则一个二能级原子在时间间隔 $t$ 内感应跃迁的几率可表示为

$$\int_0^t |a(\omega, t)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2} x_{\perp\perp}^2 t \quad (7.24)$$

因为在频带 $\omega \sim \omega + d\omega$ 之间的光电场为 $e(\omega)$ , 所以单位体积的能量为

$$\epsilon_0 |e(\omega)|^2 / 2$$

于是能级密度的统计平均变为

$$\rho(\omega) = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{2 |\mu_{12}|^2} x_{\perp\perp}^2 \quad (7.25)$$

由于频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 之间的光的感应跃迁几率式(7.24)可以写成 $B\rho(\omega)t$ (式中 $B$ 为感应发射系数), 故由式(7.24), (7.25)可推出

$$-\frac{\pi}{2} x_{\perp\perp}^2 t = B \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{2 |\mu_{12}|^2} x_{\perp\perp}^2 t$$

由上式有

$$B = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar^2} |\mu_{12}|^2 \quad (7.26)$$

这与4.4节得到的式(4.36)相同。在以上计算中, 电偶极矩 $z$ 方向分量(光场方向上的分量)用 $\mu$ 标记。当每个原子随机无向分布时, 原子电偶极矩的矩阵元则可用 $\mu_z$ 表示, 因为 $\langle |\mu_{12}|^2 \rangle = |\mu_z|^2/3$ , 所以有

$$B = \frac{\pi}{3\epsilon_0 h^2} |\mu_s|^2 \quad (7.27)$$

这相当于线偏振光在气体介质中产生的感应发射系数。同样，当电偶极矩沿某一个方向取向，入射光的偏振方向又不确定时，则感应发射系数与式(7.27)相同。当入射光的偏振方向和原子的电偶极矩方向都不确定时，感应发射系数也由式(7.27)给出。

### §7.3 密 度 矩 阵

为了理解原子(或分子)系统和光的相互作用，我们只要清楚每个原子的行为和求出系统平均就可以了。但这样的计算太复杂，还会遇到数学上不可克服的困难。例如，处理气体分子碰撞这种统计效应都不简单。

介质对入射光的响应、受激介质的发射等现象都可以用感应电偶极矩、跃迁几率和原子的布居来描述。在二能级原子中，这些量可以用 $|a_1|^2$ 、 $a_1 a_2^*$ 、 $a_2 a_1^*$ 和 $|a_2|^2$ 来表示，几率振幅没有在这些表达式中单独出现。用下面定义的密度矩阵可使很多物理计算得以简化，其物理意义则更加清楚。

通常，某一原子的波函数可以用本征态的本征函数 $\phi_n(\vec{r}, t)$ 来展开，其形式为

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{r}, t) \quad (7.28)$$

可以用空间波函数 $\phi_n(\vec{r})$ 重写式(7.28)，消除时间变化函数 $a_n(t)$ ：

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{r}) \quad (7.29)$$

式中

$$c_s(t) = a_s(t) \exp(-i(W_s/\hbar)t) \quad (7.30)$$

这一点也可从式(7.2)立即看出。定义密度矩阵 $\rho$ 的矩阵元为

$$\rho_{s,n} = c_s c_n^* \quad (7.31a)$$

$$\rho_{s,n} = a_s a_n^* \exp\left(i \frac{W_n - W_s}{\hbar} t\right) \quad (7.31b)$$

从式(7.31)可看出

$$\rho_{s,n} = \rho_{n,s}^* \quad (7.32)$$

因此密度矩阵是厄米矩阵。波函数归一化为

$$\sum_s |a_s|^2 = \sum_s |c_s|^2 = 1$$

则密度矩阵变为

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_s \rho_{s,s} = 1 \quad (7.33)$$

式中 $\text{Tr}$ 为求迹算符(全部对角元素之和)。一个物理量的算符 $A$ 的期望值，用密度矩阵可表示为

$$\langle A \rangle = \int \phi^*(\vec{r}, t) A \phi(\vec{r}, t) d\vec{r} = \sum_s \sum_n c_s c_n^* A_{s,n}$$

由于

$$\sum_n \rho_{s,n} A_{s,n} = (\rho A)_{s,s}$$

因此

$$\langle A \rangle = \text{Tr}\{\rho A\} \quad (7.34)$$

在7.1节讨论的二能级原子的密度矩阵可表示为

$$\rho = \begin{bmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \exp(i\omega_0 t) \\ a_1 a_2^* \exp(-i\omega_0 t) & |a_2|^2 \end{bmatrix}$$

因此，实际上对角元给出原子的布居(总数的几率)，而非对角元给出复电偶极矩。可以用式(7.34)去计算电偶极矩算符

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$$

的期望值而得到式(7.20)。

在描述密度矩阵时，假定原子处于量子力学的纯态，由于已知几率振幅 $a_n(t)$ ，因而波函数 $\phi(\vec{r}, t)$ 是确定的。密度矩阵也适用于混合态情况，在这种状态下，原子系综中每个原子的波函数是未知的，只知道它们的统计平均。由于混合态中每个原子的几率振幅不确定，因而每个原子的密度矩阵也不确定。但可以认为系综平均 $\langle \rho \rangle_{ss}$ 是一个确定的函数且连续变化。从下面的推导可以很清楚地看出，使用系综平均的密度矩阵，原子系综物理量的期望值可由下面与式(7.34)类似的公式给出

$$\langle A \rangle_{ss} = \text{Tr}\{\langle \rho \rangle_{ss} A\} \quad (7.35)$$

混合态中每个原子的几率振幅是不确定的，但是其波函数取纯态

$$\phi^{(1)} = \sum_s a_s^{(1)} \phi_s$$

的统计几率 $p^{(1)}$ 是已知的，于是求得系综平均的密度矩阵 $\langle \rho \rangle_{ss}$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned} (\langle \rho \rangle_{ss})_{mn} &= \langle c_m c_m^* \rangle_{ss} = \sum_l p^{(1)} c_m^{(1)} c_m^{(1)*} \\ &= \sum_l p^{(1)} a_m^{(1)} a_m^{(1)*} \exp(-i\omega_{mn}t) \quad (7.36) \end{aligned}$$

式中 $\hbar\omega_{mn} = W_m - W_n$ 为本征能量之差。算符 $A$ 期望值的统计平均为

$$\langle A \rangle_{ss} = \sum_l p^{(1)} \int \phi^{(1)*} A \phi^{(1)} d\vec{r}$$

用式(7.36)重写上式为

$$\langle A \rangle_{ss} = \sum_l p^{(1)} \sum_s \sum_m c_m^{(1)} c_m^{(1)*} A_{sm}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i p^{(i)} \sum_s \sum_n \rho_{s,n} A_{n,s} = \sum_s \sum_n \left( \sum_i p^{(i)} \rho_{s,n} \right) A_{n,s} \\
 &= \sum_s \sum_n (\langle \rho \rangle_{s,s})_{s,n} A_{n,s} = \text{Tr}\{\langle \rho \rangle_{s,s} A\}
 \end{aligned}$$

这样，就得到了式(7.35)。

## §7.4 密度矩阵的运动方程

从薛定谔方程(7.1)可以得到描述密度矩阵随时间变化的运动方程。象7.1节计算二能级原子那样，将式(7.29)代入式(7.1)就得到 $c_s$ 的时间变化率。当哈密顿算符为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$ 时(这里 $\mathcal{H}'$ 为微扰)，一般有

$$i\hbar \frac{dc_s}{dt} = \sum_k c_k \mathcal{H}_{s,k} \quad (7.37)$$

为了得到密度矩阵的时间变化，将矩阵元表达式(7.31a)对时间微分得到

$$\frac{d\rho_{s,n}}{dt} = \frac{dc_s}{dt} c_n^* + c_n \frac{dc_n^*}{dt}$$

将式(7.37)和它的复共轭代入上方程，由于 $\mathcal{H}_{s,k}^* = \mathcal{H}_{k,s}$ ，则有

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d\rho_{s,n}}{dt} &= \sum_k c_k \mathcal{H}_{s,k} c_n^* - c_n \sum_k c_k^* \mathcal{H}_{k,n} \\
 &= \sum_k (\mathcal{H}_{s,k} \rho_{k,n} - \rho_{s,k} \mathcal{H}_{k,n}) \quad (7.38)
 \end{aligned}$$

使用对易运算符号

$$[\mathcal{H}, \rho] = \mathcal{H}\rho - \rho\mathcal{H}$$

式(7.38)可以写成

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (7.39)$$

通常称上式为密度矩阵的运动方程。用 $W_0$ 表示式(7.3)中无微扰哈密顿算符 $\mathcal{H}_0$ 的本征值，重写式(7.38)为

$$i\hbar \frac{d\rho_{nn}}{dt} = W_n \rho_{nn} - W_0 \rho_{nn} + \sum_k (\mathcal{H}'_{nk} \rho_{kn} - \rho_{nk} \mathcal{H}'_{kn})$$

或

$$\frac{d\rho_{nn}}{dt} = -i\omega_{nn} \rho_{nn} - \frac{i}{\hbar} \sum_k (\mathcal{H}'_{nk} \rho_{kn} - \rho_{nk} \mathcal{H}'_{kn}) \quad (7.40)$$

这个方程在解题时经常用到。

使用密度矩阵的优点是对混合态和纯态都可使用相同的运动方程(7.39)。在多体问题中，常常是密度矩阵的统计平均已知，各个粒子的波函数未知，在这种情况下，使用密度矩阵可以用类似于计算纯态的方法来计算任何物理量。由于用与纯态相同的标记 $\rho$ 来表示混合态的密度矩阵 $\langle \rho \rangle$ ，不会有困难，所以两种情况下都采用 $\rho$ 的写法。

在7.1节，我们已讨论了只有相干相互作用的二能级原子的行为。在一个二能级原子系统中，不仅有原子之间的相互作用，而且还存在着自发发射和与介质中其它原子（例如杂质、器壁、固体中基质晶体原子、液体中溶剂分子）的非相干相互作用。这些作用与入射波之间没有相位关系。实际上，在这种非相干微扰下，不可能去追踪每一个原子的波函数变化。然而，使用密度矩阵处理它们，可以简单地把驰豫和衰减效应引入到唯象近似理论中去。因为与激光有关的许多现象可以用二能级原子近似处理，所以为了简明起见，以后只讨论二能级原子的密度矩阵，很容易把它推广到多能级原子。

通常一个能级间隔为 $\hbar\omega_0 = W_1 - W_0$ 的二能级原子，当它处于微扰 $\mathcal{H}'$ 作用下， $2 \times 2$ 阶密度矩阵的运动方程可以从式(7.40)出发用矩阵元的变化表示

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\rho_{12} \mathcal{H}'_{21} - c_s c_s) \quad . \quad (7.41)$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i\omega_0 \rho_{12} - \frac{i}{\hbar} (\rho_{22} - \rho_{11}) \mathcal{H}'_{12} \quad (7.42)$$

因为  $\rho_{21} = \rho_{12}^*$ ,  $\rho_{22} = 1 - \rho_{11}$ , 所以剩余矩阵元的方程可从上面方程得到。这里,  $\rho_{11}$  和  $\rho_{22}$  表示原子的布居, 而电偶极矩式 (7.20) 为

$$\langle p(t) \rangle_{..} = \rho_{12} \mu_{21} + c_s c_s \quad (7.43)$$

因此,  $\rho_{12}$  可以看成是复电偶极矩的相对值或归一化电偶极矩。

当体积  $V$  中有  $n$  个原子 ( $n \gg 1$ ) 时, 二能级原子介质的极化强度为

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = N \langle \vec{p} \rangle \quad (7.44)$$

式中  $\vec{p}_k$  为第  $k$  个原子的电偶极矩,  $N = n/V$  是单位体积的原子数,  $\langle \vec{p} \rangle$  为电偶极矩的系综平均。此外, 用  $\Delta\rho$  表示粒子数反转密度  $\rho_{22} - \rho_{11}$ , 原子的反转粒子数为

$$\Delta N = (\rho_{22} - \rho_{11}) N = N \Delta\rho$$

根据式 (7.41),  $\Delta\rho$  随时间的变化为

$$\frac{d}{dt} \Delta\rho = - \frac{2i}{\hbar} (\rho_{12} \mathcal{H}'_{21} - c_s c_s)$$

我们把二能级原子的微扰分成激光场的相干微扰和非相干微扰 (例如由激发和驰豫引起)。下面,  $\mathcal{H}'$  只表示相干微扰, 假定非相干微扰由激发系数  $\Gamma_{ee}$  和驰豫时间  $\tau$  表示, 则上面方程将写成

$$\frac{d}{dt} \Delta\rho = \Gamma_{ee} - \frac{\Delta\rho}{\tau} - \frac{2i}{\hbar} (\rho_{12} \mathcal{H}'_{21} - c_s c_s) \quad (7.45)$$

虽然此方程表面上似乎是正确的，但是只有在时间范围比激发或驰豫的特征时间长，或者当两能级之间驰豫速率的作用差异可忽略时，方程(7.45)才是一种有效的近似。在普通激光理论中，我们把上方程作为基本方程之一用于所有实际情况。

激发中存在着两种相反的过程：一种是泵浦，这样取名是因为通过强光照射或电子碰撞等把下能级的原子泵浦到上能级，以便产生粒子数反转；另一种是热消激发，它通过热骚动减少粒子数反转。于是激发速率可表示为

$$\Gamma_{ex} = \Gamma_p - \Gamma'$$

式中 $\Gamma_p$ 为泵浦速率， $\Gamma'$ 为热消激发速率。

当泵浦和激光场都不存在，即 $\Gamma_p = \mathcal{H}' = 0$ 时，从式(7.45)得到稳态下

$$\Gamma' = -\frac{\Delta\rho^{(T)}}{\tau} = \frac{1}{\tau}(\rho_{11}^{(T)} - \rho_{22}^{(T)}) \quad (7.46)$$

式中 $\rho_{11}^{(T)}$ 和 $\rho_{22}^{(T)}$ 为热平衡时的粒子数<sup>(2)</sup>。由于它们必须满足玻尔兹曼分布，故有

$$\rho_{11}^{(T)} = \rho_{22}^{(T)} \exp(-\hbar\omega_0/k_B T)$$

将其代入式(7.46)，由于 $\rho_{11}^{(T)} = 1 - \rho_{22}^{(T)}$ ，所以

$$-\Delta\rho^{(T)} = \tau\Gamma' = \tanh\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)$$

对长波长跃迁，由于 $\hbar\omega_0 \ll k_B T$ ，因而通常可取 $\tau\Gamma' \approx 0$ 。但普遍假定包含 $\Gamma'$ 项，按照 $\Delta\rho^{(T)} (< 0)$ ，则式(7.45)可以重写为

$$\frac{d}{dt} \Delta\rho = \Gamma_p - \frac{\Delta\rho + \Delta\rho^{(T)}}{\tau} - \frac{2i}{\hbar} (\rho_{12} \mathcal{H}'_{12} - c.c.) \quad (7.47)$$

(2) 上标(T) 表示在温度T时的热平衡。

更为普遍的是不用泵浦速率 $\Gamma$ , 而用无微扰粒子数反转 $\Delta\rho^{(0)}$ (它是在没有激光场时在泵浦作用下二能级原子的粒子数差)。当 $\Gamma_s = 0$ 和 $\mathcal{H}' = 0$ 时, 从式(7.45)有

$$\Delta\rho^{(0)} = \tau\Gamma_{ss} - \tau\Gamma_s - \tau\Gamma'$$

使用式(7.46), 上式变成

$$\Delta\rho^{(0)} = \tau\Gamma_s + \Delta\rho^{(r)}$$

因此, 对 $\mathcal{H}' \neq 0$ , 式(7.45)或(7.47)可改写为

$$\frac{d}{dt}\Delta\rho = -\frac{\Delta\rho - \Delta\rho^{(0)}}{\tau} - \frac{2i}{\hbar}(\rho_{12}\mathcal{H}'_{12} - c.c.) \quad (7.48)$$

其次, 用 $1/\gamma$ 表示极化, 即原子电偶极矩的系统平均的驰豫时间, 于是式(7.42)可改写为

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = (i\omega_0 - \gamma)\rho_{12} - \frac{i}{\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11})\mathcal{H}'_{12} \quad (7.49)$$

应该指出,  $\tau$ 和 $1/\gamma$ 通常不相等。

以下术语用于磁共振: 纵向驰豫时间 $\tau$ , 横向驰豫时间 $1/\gamma$ 。在磁共振中习惯上常用 $T_1$ 和 $T_2$ 表示, 但在这里, 为了避免与能级符号混淆, 用 $\tau$ 和 $1/\gamma$ 。因此 $1/\tau$ 为纵向驰豫常数,  $\gamma$ 为横向驰豫常数。

## §7.5 光学布洛赫方程

当无驰豫(或驰豫被看成是基本微观过程)时, 相干相互作用的问题可用式(7.9a、b)求解, 对于那些具有唯象驰豫常数且微扰和初始条件有确定形式的相互作用, 则可用式(7.49)和式(7.45)或(7.48)求解。光波段的相干相互作用效应, 也可以类似于在微波和无线电波段磁共振中处理磁矩的进动和章动那样, 用进动矢量模型来描述。由范曼(R.P.Feynman)等提出<sup>[7-11]</sup>的

这个模型，提供了一个有用的直观图象。通过下面给出的变换，二能级原子和光场之间的相干电偶极子相互作用，可以用描述磁场中磁矩的布洛赫方程组来描述。因此称它们为光学布洛赫方程。

### 7.6.1 抽象空间的变换

除真实的物理空间( $x, y, z$ )外，在抽象三维空间( $X, Y, Z$ )中，矢量 $\vec{\rho}$ 有三个分量，其定义为

$$\begin{aligned}\rho_x &= \rho_{12} + \rho_{21} = 2 \operatorname{Re}\{\rho_{12}\} \\ \rho_y &= \frac{1}{i} (\rho_{12} - \rho_{21}) = 2 \operatorname{Im}\{\rho_{12}\} \\ \rho_z &= \rho_{22} - \rho_{11} = \Delta\rho\end{aligned}\quad (7.50)$$

矢量 $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ 常称为策矢量或光学布洛赫矢量，于是式(7.41)、(7.42)变成

$$\frac{d}{dt} \rho_x = -\omega_0 \rho_x + \frac{1}{i\hbar} (\mathcal{H}'_{12} - \mathcal{H}'_{21}) \rho_z \quad (7.51a)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_y = \omega_0 \rho_y - \frac{1}{\hbar} (\mathcal{H}'_{12} + \mathcal{H}'_{21}) \rho_z \quad (7.51b)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_z = -\frac{1}{i\hbar} (\mathcal{H}'_{12} + \mathcal{H}'_{21}) \rho_x + \frac{1}{\hbar} (\mathcal{H}'_{12} - \mathcal{H}'_{21}) \rho_y \quad (7.51c)$$

现在，设想一个虚构的力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ，它在抽象空间中的分量为

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{1}{\hbar} (\mathcal{H}'_{12} + \mathcal{H}'_{21}) \\ F_y &= \frac{1}{i\hbar} (\mathcal{H}'_{12} - \mathcal{H}'_{21}) \\ F_z &= \omega_0\end{aligned}\quad (7.52)$$

于是式(7.51a~c)可简化成

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F} \times \vec{\rho} \quad (7.53)$$

这与磁矩在磁场或陀螺在引力场中的矢量运动方程形式完全相同。

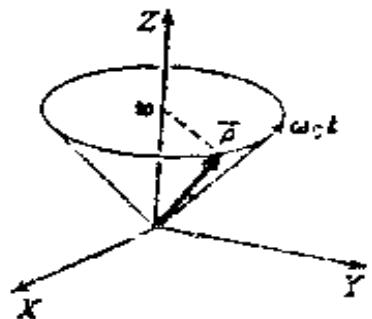
我们先研究无微扰时  $\vec{\rho}$  的运动。由式(7.52)可知，因为当  $\mathcal{H}' = 0$  时， $F_x = F_y = 0$ ，故式(7.51)或(7.53)中  $d\rho_z/dt = 0$ ，因此  $\vec{\rho}$  的 Z 分量是常数。 $\vec{\rho}$  在 XY 平面的分量以角速度  $\omega_0$  旋转，如图 7.2 所示。这与旋转陀螺或磁矩的进动相对应，而二能级原子的  $\omega_0$  与陀螺受到的引力或磁矩受到的静态磁场力相对应。

光学布洛赫矢量的旋进运动

有微扰时，实空间( $x, y, z$ )中的磁共振与抽象空间( $X, Y, Z$ )二能级原子的对应是这样的，即  $H'$  与  $\omega_0$  相对应(如上所述)，微扰磁场的  $x$  和  $y$  分量则分别对应于  $\mathcal{H}'_{12}$  的实部和虚部。换句话说，由于光场引起的微扰  $\mathcal{H}'_{12}$  可用 XY 平面上的一个复矢量来表示。由式(7.4)给出的相干光场  $E(t)$  产生的微扰为

$$\mathcal{H}'_{12} = -\mu_{12}E(t) = -\frac{\mu_{12}}{2}[\mathcal{E}\exp(i\omega t) + \mathcal{E}^*\exp(-i\omega t)] \quad (7.54)$$

它在 XY 平面上的复表示包含有两项：带有  $\exp(i\omega t)$  的一项，表示左旋旋转波；带有  $\exp(-i\omega t)$  的另一项，表示右旋旋转波。这样，如果  $\omega = \omega_0$ ，则前一项是  $\vec{\rho}$  矢量以角速度  $\omega_0$  围绕 Z 轴进动的共振项，后一项由于旋转方向相反，不产生共振。7.1 节中式



(7.12) 近似称为旋转波近似的原 因是它只保留了 XY 平面内与  $\vec{\rho}$  的旋转有相同方向的旋转微扰。

### 7.5.2 旋转参考系的表示

如果把矢量变换到以角速度  $\omega$  绕 Z 轴旋转的参考系 ( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ) 中(见图7.3), 则旋转波近似的概念将会更加清楚, 按照拉莫尔(Larmor)定理, 在旋转系中的时间导数  $\partial/\partial t$  和静止系中的时间导数  $d/dt$  有关:

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (7.55)$$

式中矢量  $\vec{\omega}$  的分量为  $(0, 0, \omega)$ , 因此在旋转系中式(7.53)变成

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = (\vec{F} - \vec{\omega}) \times \vec{\rho} \quad (7.56)$$

$\vec{F} - \vec{\omega}$  的 Z 分量为  $\omega_0 - \omega$ , 从式(7.52)可看出, 在静止系中的 X 和 Y 分量分别为  $2\text{Re}\{\mathcal{H}_{12}^z/\hbar\}$  和  $2\text{Im}\{\mathcal{H}_{12}^z/\hbar\}$ 。因此, 当  $\omega = \omega_0$  时

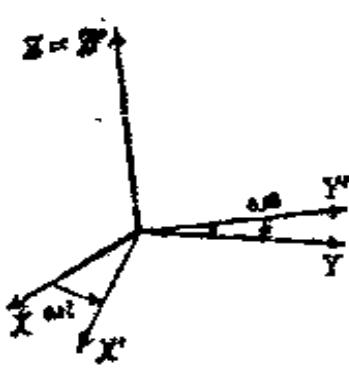


图7.3 参考系  $(X', Y', Z')$  以  
角速度  $\omega$  绕静止系  $(X, Y, Z)$   
Z轴旋转

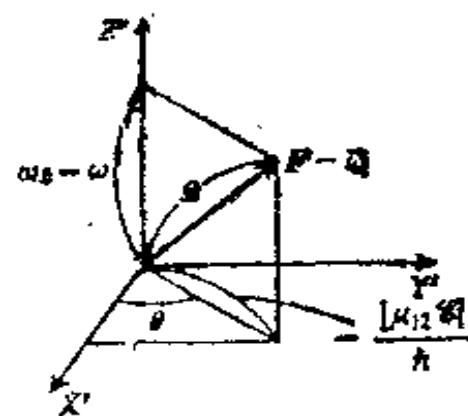


图7.4 微扰矢量在旋转系  
中的表示

在旋转系中，式(7.54)的第一项相对于旋转系是静止的复矢量，第二项则以角速度 $-2\omega$ 旋转的复矢量。

如果在旋转波近似下，忽略式(7.54)的第二项，则旋转系中的微扰 $\mathcal{H}'_{12} = -\mu_{12}\mathcal{E} \exp(i\omega t)/2$ 将变成 $\mathcal{H}'_{12} = -\mu_{12}\mathcal{E}/2$ ，因此

$$F_{x*} = \frac{2}{\hbar} \operatorname{Re} \{\mathcal{H}'_{12}\} = -\frac{1}{\hbar} \operatorname{Re} \{\mu_{12}\mathcal{E}\} \quad (7.57a)$$

$$F_{y*} = \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \{\mathcal{H}'_{12}\} = -\frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} \{\mu_{12}\mathcal{E}\} \quad (7.57b)$$

于是表示 $\vec{F}$ 或 $\vec{F} - \vec{\omega}$ 在 $X'Y'$ 平面上的投影的复矢量的绝对值为 $-\|\mu_{12}\mathcal{E}\|/\hbar$ ，如图7.4所示。图中辐角 $\theta$ 表示入射波(式(7.4))的相角。

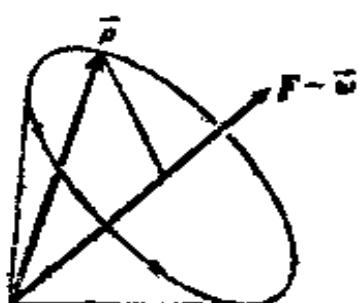


图7.5 布洛赫矢量 $\vec{\rho}$ 绕微扰  
矢量 $\vec{F} - \vec{\omega}$ 的进动运动

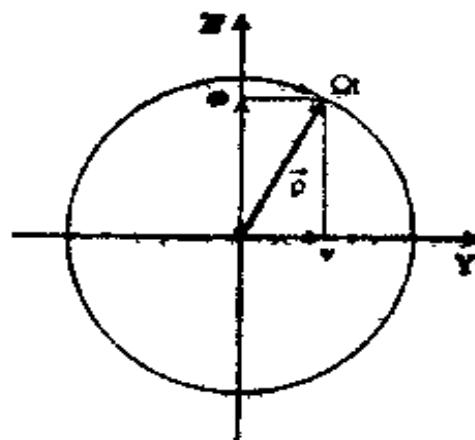


图7.6 共振频率( $\omega = \omega_0$ )下微扰  
产生的布洛赫矢量运动

在旋转系中观察时，式(7.56)表明 $\vec{\rho}$ 以角速度 $|\vec{F} - \vec{\omega}|$ 绕矢量 $\vec{F} - \vec{\omega}$ 缓慢进动，如图7.5所示。为了与静止系中围绕Z轴快速进动相区别，我们称这一运动为章动。有微扰时在静止系中 $\vec{\rho}$ 的运动是进动与章动的叠加。从图7.4可立即清楚地看出章动的角

速度为

$$|\vec{F} - \vec{\omega}| = \sqrt{\left| \frac{\mu_{12} \vec{s}}{\hbar} \right|^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (7.58)$$

这与7.1节式(7.15)中的章动频率相同。特别是在共振时,  $\omega = \omega_0$ , 如果微扰的初始相位为零, 则  $\vec{\rho}$  在  $Y'Z'$  平面内将以角速度  $\Omega = -|\mu_{12} \vec{s}|/\hbar$  旋转。如图7.6所示, 粒子数反转以正弦规律变化, 感应电偶极矩以比粒子数反转滞后  $90^\circ$  的相位变化。当微扰的初始相位为零时,  $|\mu_{12} \vec{s}|$  沿  $X'$  方向 ( $\vec{F} - \vec{\omega}$  沿  $-X'$  方向), 由  $\rho'_x$  给出的偶极矩  $\vec{p}$  比静止系中以角速度  $+\omega$  旋转的复矢量  $\vec{s}$  相位上超前  $90^\circ$ , 这就是二能级原子(其粒子数反转由式(7.21)表达)电偶极矩的图解表示。

现在让我们在旋转系中求以  $\vec{\rho}$  的分量表示的  $\vec{\rho}$  的运动方程。用  $u$ 、 $v$  和  $w$  分别表示  $\vec{\rho}$  的  $X'$ 、 $Y'$  和  $Z'$  分量<sup>(3)</sup>。由于  $X'$  和  $Y'$  轴以角速度  $\omega$  相对于  $X$  和  $Y$  轴围绕  $Z = Z'$  轴旋转, 因此有

$$(u + iv)\exp(i\omega t) = \rho_x + i\rho_y = 2\rho_{12} \quad w = \rho_z \quad (7.59)$$

对  $t$  微分, 有

$$\frac{du}{dt} - \omega v + i \left( \frac{dv}{dt} + \omega u \right) = 2\exp(-i\omega t) \frac{d}{dt} \rho_{12}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \rho_z$$

将式(7.42)代入并令  $x = \mu_{12} \vec{s} / \hbar$ (如7.1节那样), 得到式(7.54)微扰下的结果

$$\frac{du}{dt} = -(\omega_0 - \omega)v - \text{Im}\{x\}w \quad (7.60a)$$

(3)  $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  时用  $\vec{\rho} = (u, v, w)$  代替。

$$\frac{du}{dt} = (\omega_0 - \omega)u + \operatorname{Re}\{x\}w \quad (7.60b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \operatorname{Im}\{x\}u - \operatorname{Re}\{x\}v \quad (7.60c)$$

不用说，这与式(7.56)等同。

### 7.5.3 纵向驰豫和横向驰豫

迄今，我们已讨论了在无驰豫情况下的布洛赫方程及其几何表示。驰豫效应可以通过下面增加唯象项来讨论。象7.4节那样，用 $1/\tau$ 表示纵向驰豫常数，用 $\gamma$ 表示横向驰豫常数，把驰豫项加到式(7.60)中得到

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u - (\omega_0 - \omega)v - \operatorname{Im}\{x\}w \quad (7.61a)$$

$$\frac{dv}{dt} = (\omega_0 - \omega)u - \gamma v + \operatorname{Re}\{x\}w \quad (7.61b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \operatorname{Im}\{x\}u - \operatorname{Re}\{x\}v - \frac{w - w^{(0)}}{\tau} \quad (7.61c)$$

式中 $w^{(0)} = \Gamma_{ex}\tau$ 为无微扰时的粒子数反转(在 $t \rightarrow \infty$ 、 $\theta = 0$ 时的 $w$ 值)。用不变的驰豫速率描述固体中杂质离子的瞬态效应和饱和加宽的有效性，最近已得到严格的验证<sup>[7.2, 7.3]</sup>。

当纵向和横向驰豫时间不等时，在多数情况下，处理 $\vec{\rho}$ 分量的运动方程较矢量的运动方程更为方便。如果 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 分别为抽象空间中旋转系( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ )三个方向上的单位矢量，则式(7.61a~c)可合写成以下形式

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = (\vec{F} - \vec{\omega}) \times \vec{\rho} - \gamma u \vec{i} - \gamma v \vec{j} - \frac{w - w^{(0)}}{\tau} \vec{k} \quad (7.62)$$

在这里驰豫项已加到运动方程(7.56)中。

从式(7.61)或(7.62)可以明显看出，纵向驰豫表示Z方向的驰豫，横向驰豫表示垂直于Z轴方向上的驰豫。如果纵向驰豫常数 $\tau^{-1}$ 为零，横向驰豫时间 $\gamma$ 有限时， $\rho$ 在静止系(X, Y, Z)中按图7.7(a)所示那样运动。当 $\gamma$ 为零， $\tau$ 有限时， $\rho$ 则按图7.7(b)所示的那样运动。

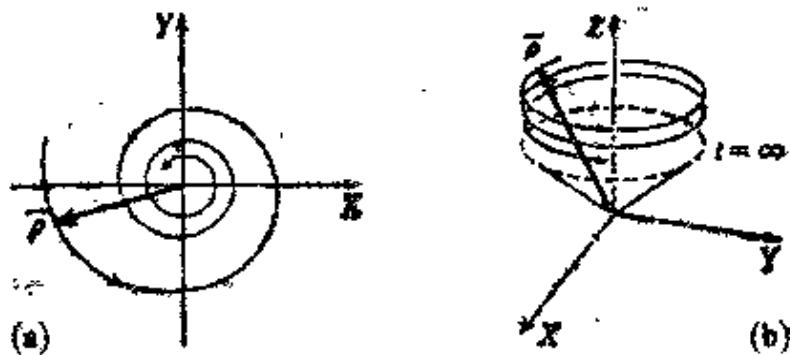


图7.7 布洛赫矢量

(a) 横向驰豫, (b) 纵向驰豫

## 习题

7.1 设 $t=0$ 时的初始条件为 $a_1=\exp(i\theta)$ ,  $a_2=0$ , 试求式(7.12)的解。

7.2 试用式(7.21)计算感应电偶极矩的相位，讨论相位随光场振幅如何变化。

7.3 对方程(7.1)积分可以得到 $\phi(t)=\exp(-i\mathcal{H}_0 t/\hbar)\phi(0)$ ，无微扰时哈密顿算符表示为

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$$

试证明

$$\exp(-i\mathcal{H}_0 t/\hbar) = \begin{pmatrix} \exp(-iW_1 t/\hbar) & 0 \\ 0 & \exp(-iW_2 t/\hbar) \end{pmatrix}$$

7.4 证明系综平均的密度矩阵 $\langle \rho \rangle_{\text{av}}$ 满足 $\text{Tr}(\langle \rho \rangle_{\text{av}}^2) \leq 1$ , 等式在什么情况下成立?

7.5 证明由式(7.20)计算的感应电偶极矩的系综平均等于式(7.43)。

7.6 在无微扰的条件下将式(7.51a~c)的解直接用 $t=0$ 的初始值表示。

7.7 假定除驰豫效应外无任何微扰, 试求光学布洛赫矢量 $\vec{\rho}$ 的幅度与时间的关系。

7.8 当微扰场 $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ,  $\mu_{12}$ 为实数时, 在旋转系中, 求解式(7.60a~c)以得到 $\vec{\rho}$ 分量的三个分量 $u, v, w$ (提示:  $\text{Im}\{x\} = 0$ )。

## 第八章 非线性相干效应

在普通光学中，诸如介质的吸收系数和折射率是与光强无关的常数。从第七章的讨论可以清楚地看出，激光与物质之间的相干相互作用在强度上是非线性的，在时间上是非稳态的。对于弱场，介质的极化强度与光场成正比，因此是线性的，但当光场很强时，其关系一般就变成非线性的了。当极化强度 $P$ 不正比于场强 $E$ 时，极化率 $\chi$ 不再是常数，同样吸收系数和折射率也不再是常数。结果就出现了一般线性光学中没有的非线性光学现象。

光强越强，非线性效应就越显著。但是，非线性效应的出现并不是简单地由光功率或能量的大小决定的，普通光源的功率即使高达100W，也几乎观察不到非线性效应，但若用激光光源，即使其功率在1mW以下也可观察到明显的非线性效应。在短脉冲激光下，即使能量小于1nJ，也可能观察到相当强的非线性共振相干相互作用。

非线性光学效应包括饱和吸收、光学谐波产生、光学频率混频等。本章我们主要研究相干相互作用的一些基本非线性效应。

### §8.1 饱 和 效 应

在4.6节导出了弱入射光下的复极化率和吸收常数。在第七章已计算了二能级原子（或分子）与任意振幅的单色场之间的

相干相互作用。式(7.21)给出的偶极矩是非线性的，因为 $\Omega$ 包括 $x$ ， $x$ 正比于入射光的振幅。在本章我们将利用前一章的结果推导由二能级原子组成的均匀介质的非线性吸收系数。

假设在一个有大量二能级原子的介质中有一部分原子处于上能级，其余原子处于下能级。由式(7.4)给出的相干光场入射时，在上能级的原子将产生感应发射，在下能级的原子将吸收入射光。在 $0 \sim t$ 时间内，两类原子在入射场的作用下产生能级跃迁的几率由式(7.18)给出。如果考虑弛豫效应，尽管入射场始终是稳态波，原子同光场之间的相干相互作用的持续时间也将是有限的。

例如，气体中的一个分子刚刚与另一个分子碰撞之后，必然处于上能级或下能级中，然后将受到入射光场相干相互作用的微扰。接着当这个分子与另外分子再碰撞时，这种相互作用就结束了。分子之间的碰撞是随机的，故在时间 $t \sim t + dt$ 之间发生碰撞的几率可表示为一个常数 $\gamma dt$ 。那么，相干相互作用的持续时间在 $t \sim t + dt$ 之间的几率由下式给出

$$w(t)dt = \gamma \exp(-\gamma t)dt \quad (8.1)$$

现在假定每个分子在短暂的碰撞过程中都受到强烈的微扰，以致于碰撞后它所处的能级（假定这能级是纯分子本征态中的一个）完全跟碰撞前的状态无关，这样相干相互作用的平均持续时间就等于纵向和横向驰豫时间 $\tau = 1/\gamma$ 。

因此，一个刚刚碰撞后处于上能级的原子（或分子）在下一次碰撞前向下能级跃迁的平均几率为

$$\langle |\alpha_1(t)|^2 \rangle_{av} = \int w(t) |\alpha_1(t)|^2 dt$$

将式(7.18)和(8.1)代入，上式变为

$$|\alpha_1(t)|^2 \cdot \nu = \frac{\gamma |x|^2}{2(\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (8.2)$$

再除以相干相互作用的平均持续时间  $\tau = 1/\gamma$ , 上式就给出单位时间的跃迁几率  $p(2 \rightarrow 1)$ 。下能级一个原子吸收入射光跃迁到上能级单位时间的跃迁几率  $p(1 \rightarrow 2)$  与此相等, 即

$$p(1 \rightarrow 2) = p(2 \rightarrow 1) = \frac{\gamma |x|^2}{2(\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (8.3)$$

假定入射光被单位体积内下能级原子数为  $N_{\downarrow}^{(0)}$ 、上能级原子数为  $N_{\uparrow}^{(0)}$  的介质吸收, 则下能级原子吸收的功率(单位时间内吸收的能量)为  $N_{\downarrow}^{(0)} \hbar \omega p(1 \rightarrow 2)$ , 上能级原子感应发射释放出的能量为  $N_{\uparrow}^{(0)} \hbar \omega p(2 \rightarrow 1)$ 。利用式(8.3), 可得到单位体积内介质所吸收的净功率为

$$\Delta P = (N_{\downarrow}^{(0)} - N_{\uparrow}^{(0)}) \frac{\hbar \omega \gamma |x|^2}{2(\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (8.4)$$

因为入射光场的振幅  $\mathcal{E}$  如同式(7.4), 则功率密度(单位横截面上的入射光功率)为<sup>(1)</sup>

$$P = \frac{e_0 |\mathcal{E}|^2}{2} c \quad (8.5)$$

单位体积吸收的功率为

$$\Delta P = 2\sigma P \quad (8.6)$$

式中  $\sigma$  是振幅吸收系数。因此, 利用式(8.4)~(8.6) 和  $\Omega^2 = (\omega - \omega_0)^2 + |x|^2$ , 得到

$$\sigma = \frac{(N_{\downarrow}^{(0)} - N_{\uparrow}^{(0)}) \omega \gamma |\mu_{12}|^2}{2e_0 \hbar c ((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + |x|^2)} \quad (8.7)$$

(1) 电场能量密度是  $e_0 |E(t)|^2 / 2 = e^2 |el|^2 / 4$ , 磁场能量密度的大小与此相同, 因此它们的总和是  $e^2 |el|^2 / 2$ .

见光下，大多数情况是  $N_{\perp}^{(0)} \ll N_{\parallel}^{(0)}$ ，但也有  $N_{\perp}^{(0)}$  并不小的情况。

这里我们假定了介质的二能级原子的谐振频率是均匀的并等于  $\omega_0$ ，图8.1示出了吸收系数（式(8.7)）在不同入射光强下随频率的变化，其曲线是洛伦兹线型的。曲线的半最大值半宽度称为

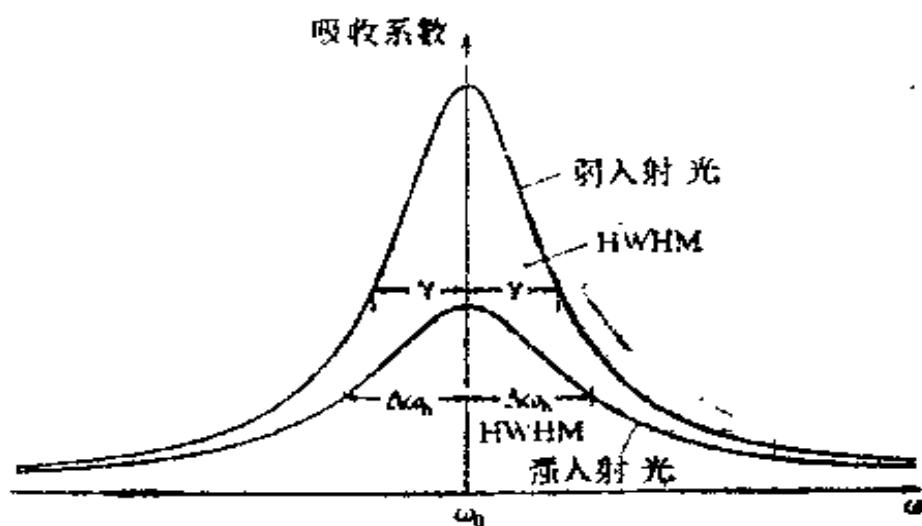


图8.1 一个均匀加宽谱线的线型

均匀线宽，与下一节描述的非均匀线宽相对应。从式(8.7)得到该均匀线宽为

$$\Delta\omega_0 = \sqrt{\gamma^2 + |x|^2} \quad (8.8)$$

从图8.2可看出，线宽随着光强的增加而增加，称为饱和加宽。

其次，当频率不变光强增加时，在光强较弱的情况下，吸收功率线性地增加。若光强较强，吸收系数逐渐变小，吸收功率接近一个饱和值  $\Delta P_s$ ，参见图8.3。吸收功率不再正比于入射功率，这种效应称为饱和吸收或非线性吸收。

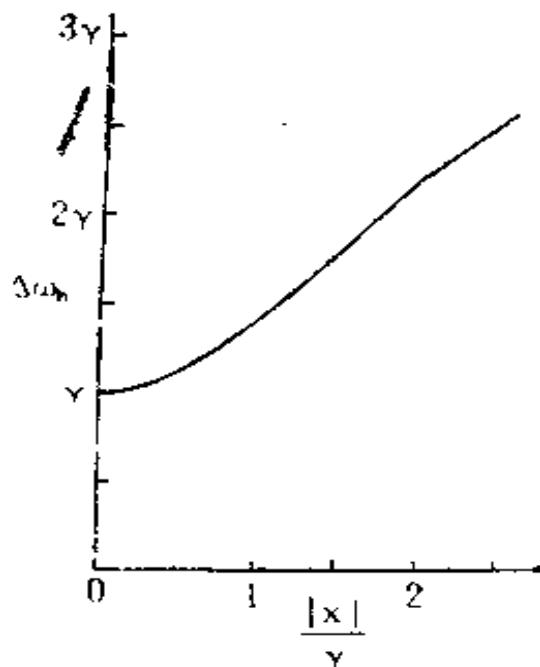


图 8.2 均匀线宽的饱和加宽( $\Delta\omega_s$ 是半最大值半宽度,  $x = \mu_{12} \mathcal{E} / h$ )

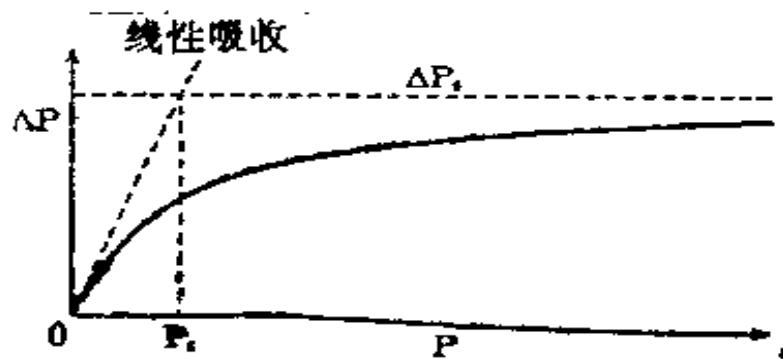


图 8.3 吸收功率的饱和与入射光功率的函数关系。  
 $P_s$  是饱和功率,  $\Delta P_s$  是吸收功率的饱和值

振幅吸收系数是入射光功率密度  $P$  的函数, 可以表示成下面形式

$$\alpha(P) = \frac{\alpha(0)}{1 + P/P_s} \quad (8.9)$$

$\alpha(0)$  是  $P = 0$  时的振幅吸收系数, 即线性吸收系数, 在中心频率  $\omega = \omega_0$  处的线性吸收常数为

$$\alpha(0) = (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \frac{\omega |\mu_{12}|^2}{2\epsilon_0 \hbar c \gamma} \quad (8.10)$$

若将式(4.43)中的 $g(\omega)$ 用 $\Delta\omega = \gamma$ 取代，并令 $|\mu_{11}|^2/3 = |\mu_{12}|^2$ ，则可看出式(8.10)与式(4.42)是相同的。式(8.9)中的 $P_s$ 称为饱和功率<sup>(2)</sup>或饱和参量，它由下式给出

$$P_s = \frac{\epsilon_0 \hbar^2 c \gamma^3}{2|\mu_{12}|^2} \quad (8.11)$$

吸收功率的饱和值 $\Delta P_s$ 可由式(8.9)和(8.6)当 $P \rightarrow \infty$ 时的公式 $\Delta P_s = 2\alpha(0)P_s$ 得到，把式(8.11)代入，得到

$$\Delta P_s = (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \hbar \omega \gamma / 2$$

## §8.2 饱和吸收引起的粒子数变化

在式(8.7)中吸收系数正比于未受微扰的粒子数差 $N_1^{(0)} - N_2^{(0)}$ ，但在饱和吸收情况下， $N_1$ 变得比 $N_1^{(0)}$ 小，相应的 $N_2$ 比 $N_2^{(0)}$ 大。我们用表示平均跃迁几率的式(8.2)来计算微扰后的 $N_1$ 和 $N_2$ ，结果如下

$$N_1 = N_1^{(0)} - (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \frac{|x|^2}{2(\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (8.12)$$

$$N_2 = N_2^{(0)} + (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \frac{|x|^2}{2(\Omega^2 + \gamma^2)}$$

原子数差变成

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \left( 1 - \frac{|x|^2}{\Omega^2 + \gamma^2} \right) \\ &= (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + |x|^2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

与其说上式是饱和吸收的结果，还不如说是产生饱和吸收的原

(2)更严格地说，它是饱和功率密度。

因，这是因为强光入射时，由于粒子数差的减少使得吸收系数变小。

上面的观点可以这样来理解，注意到功率吸收系数 $2\alpha$ 可以写为

$$2\alpha = (N_1 - N_2)\sigma$$

参见式(4.45)，其中 $\sigma$ 是吸收截面。当光强增加时， $\sigma$ 不变，所以 $\alpha$ 的减少可以看成是 $(N_1 - N_2)$ 的减小，如下所述。从式(8.13)得到的与饱和吸收式(8.7)相应的吸收截面为

$$\sigma = \frac{\omega \gamma |\mu_{12}|^2}{\epsilon_0 \hbar c ((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2)} \quad (8.14)$$

$\sigma$ 与 $|x|^2$ 无关。

以上我们讨论了理想二能级原子的光吸收，其中假定纵向与横向驰豫时间相等。但在实际的光吸收中，还存在基态以及上下能级(2和1)以外的跃迁能级，因此那些被激发到能级1和2的原子在统计意义上可以向任何其它能级跃迁，而且由于这些跃迁的几率各不相同，故 $N_1 + N_2$ 不可能保持恒定。即使如此，唯象处理驰豫问题的速率方程近似经常被采用。下面讨论能级1和能级2分别具有不同驰豫率 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的二能级原子，这样一个准二能级原子的速率方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\gamma_1(N_1 - N_1^{(0)}) - (N_1 - N_2)I\sigma \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\gamma_2(N_2 - N_2^{(0)}) + (N_1 - N_2)I\sigma \end{aligned} \quad (8.15)$$

式中 $I$ 是入射光子通量，吸收截面 $\sigma$ 可由式(8.14)中的 $\gamma$ 替换为“”

$$\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (8.16)$$

而得到。 $I$ 用入射光功率密度 $P$ 或 $|x|^2$ 表示为

$$I = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{\epsilon_0 \hbar c}{2\omega |\mu_{12}|^2} |x|^2 \quad (8.17)$$

因为稳态时式(8.15)等于零，故当介质中入射光强为常量时，得到

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^{(0)} - \frac{\gamma_2(N_1^{(0)} - N_2^{(0)})I\sigma}{\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)I\sigma} \\ N_2 &= N_2^{(0)} + \frac{\gamma_1(N_1^{(0)} - N_2^{(0)})I\sigma}{\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)I\sigma} \end{aligned} \quad (8.18)$$

由式(8.14)、(8.17)有

$$I\sigma = \frac{|x|^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (8.19)$$

利用纵向驰豫时间的定义式

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \quad (8.20)$$

将式(8.18)重写得到

$$N_1 = N_1^{(0)} - \frac{\gamma}{2\gamma_1} \cdot \frac{(N_1^{(0)} - N_2^{(0)})|x|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2}$$

(3)考虑上、下能级能量的不准确性分别是 $\hbar\gamma_1/2$ 和 $\hbar\gamma_2/2$ ，两能级之间的跃迁宽度是 $\gamma_1/2$ 和 $\gamma_2/2$ 的总和。对洛伦兹函数有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(x-y)^2 + a^2} \cdot \frac{b}{(y-x_0)^2 + b^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a+b}{(x-x_0)^2 + (a+b)^2} \end{aligned}$$

因此两宽度 $a$ 和 $b$ 的乘积为 $a+b$ ，但对其它模型这一简单求和公式是无效的。

$$N_2 = N_{20}^{(0)} + \frac{\gamma}{2\gamma_2} \cdot \frac{(N_{10}^{(0)} - N_{20}^{(0)})|x|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \quad (8.21)$$

因此，粒子数差表示成

$$N_1 - N_2 = (N_{10}^{(0)} - N_{20}^{(0)}) \left( 1 - \frac{\gamma\tau|x|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \right) \quad (8.22)$$

当  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $\gamma\tau = 1$ , 上方程变为式(8.13)。当  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , 即对于准二级原子,  $N_1$  的减小不等于  $N_2$  的增加。

从式(8.14)、(8.22)得到功率吸收系数  $2\alpha = (N_1 - N_2)\sigma$  为

$$2\alpha = \frac{N_{10}^{(0)} - N_{20}^{(0)}}{\varepsilon_0 \hbar c} \cdot \frac{\omega\gamma|\mu_{12}|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \quad (8.23)$$

当  $\gamma\tau = 1$ , 上方程与以前的计算结果式(8.7)一致。当  $\gamma\tau \neq 1$ , 饱和功率的表达式为

$$P_s = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2 c \gamma}{2|\mu_{12}|^2 \tau} \quad (8.24)$$

而不是式(8.11)。饱和光子通量  $I_s = P_s/\hbar\omega$  由下式给出

$$I_s = 1/2\sigma\tau \quad (8.25)$$

而且, 描写饱和吸收系数  $\alpha(I)$  与线性吸收常数  $\alpha(0)$  之间关系的式(8.9)成为

$$\alpha(I) = \frac{\alpha(0)}{1 + I/I_s}$$

具有反转粒子数  $\Delta N$  的介质, 增益常数以相同的方式饱和。因此, 若用  $G(0)$  表示弱入射光下的非饱和增益常数, 则入射光功率为  $P$  或光通量为  $I$  时的增益系数可写为

$$G(P) = \frac{G(0)}{1 + P/P_s} = \frac{G(0)}{1 + I/I_s} \quad (8.26)$$

式中  $P_s$  和  $I_s$  与式 (8.24)、(8.25) 中的相同。 $G(P)$  是饱和增益系数， $G(0)$  为小信号增益系数。

### §8.3 非线性复极化率

使用密度矩阵的系综平均，也可以研究二能级原子的饱和吸收问题，由此得到的复极化率，不仅能描述非线性吸收，而且也可以描述非线性色散。

当考虑光场的稳态吸收时，由于方程 (7.61) 的每一个式都应为零，则有

$$\begin{aligned} \gamma u + (\omega_0 - \omega)v + \text{Im} \{ x \} w &= 0 \\ (\omega_0 - \omega)u - \gamma v + \text{Re} \{ x \} w &= 0 \\ \text{Im} \{ x \} u - \text{Re} \{ x \} v - (w - w^{(0)})/\tau &= 0 \end{aligned} \quad (8.27)$$

解上述联立方程，得到

$$u = \frac{-(\omega_0 - \omega)\text{Re} \{ x \} - \gamma \text{Im} \{ x \}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} w^{(0)} \quad (8.28a)$$

$$v = \frac{\gamma \text{Re} \{ x \} - (\omega_0 - \omega)\text{Im} \{ x \}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} w^{(0)} \quad (8.28b)$$

$$w = \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} w^{(0)} \quad (8.28c)$$

将式 (7.59) 代入，由式 (7.43) 给出的二能级原子感应电极矩表达式变为

$$\langle p(t) \rangle_{av} = (u + iv) \exp(i\omega t) \mu_{z1}/2 + c.c.$$

介质的宏观极化强度由下式给出

$$P(t) = N \mu_{z1} (u + iv) \exp(i\omega t)/2 + c.c. \quad (8.28)$$

式中 $N$ 是单位体积介质的二能级原子数, 利用 $x = \mu_{12} \mathcal{E} / \hbar$ 以及从式(8.28a、b)得到的关系

$$u + i\nu = \frac{(-\omega_0 + \omega + i\gamma)x}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} w \quad (8.29)$$

式(8.29)可表示为

$$P(t) = \frac{Nw^{(0)}}{2\hbar} \cdot \frac{-\omega_0 + \omega + i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2}.$$

$$|\mu_{12}|^2 \mathcal{E} \exp(i\omega t) + c.c. \quad (8.30)$$

式中 $|\mu_{12}|^2 = \mu_{21}\mu_{12}$ .

由式(7.4)表示的入射光的电场是

$$E(t) = \mathcal{E} \exp(i\omega t)/2 + c.c.$$

和吸收时非线性极化率可表示为

$$\begin{aligned} \chi &= \chi' - i\chi'' \\ &= \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar} |\mu_{12}|^2 \frac{\omega_0 - \omega - i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \end{aligned} \quad (8.31)$$

其中考虑到吸收介质的粒子数反转 $w = \rho_s = \rho_{21} - \rho_{12}$ 应为负, 已令

$$Nw^{(0)} = -(N_1^{(0)} - N_2^{(0)})$$

当复极化率中 $|\chi'| \ll 1$ , 功率吸收系数为

$$2\alpha = \omega\chi''/c \quad (8.32)$$

因为式(8.31)的虚部是 $-\chi''$ , 将其代入式(8.32), 其结果等于式(23)。

此外, 式(8.31)实部表示的非线性色散由下式给出

$$\chi' = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar} |\mu_{12}|^2 \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \quad (8.33)$$

当 $|\chi'| \ll 1$ , 非线性折射率变成

$$\eta \approx \sqrt{1 + \chi'} \approx 1 + \chi'/2$$

## §8.4 非均匀加宽

在前节中我们假定介质中二能级原子的共振频率全部相等，但在实际介质中，共振频率随原子的位置和方向不同而稍有差别。气体中不同的分子有不同的速度，由于多普勒效应使得共振频率有一个扩展分布，当原子或分子的共振频率不相等时，介质的光谱线就相应地加宽了，称为非均匀加宽<sup>[8-11]</sup>。由于加宽有各种各样的原因，例如晶体中原子共振频率的分布、介质成分的非均匀性或外加磁场等，所以不可能全面讨论各种因素引起的非均匀加宽。

### 8.4.1 多普勒加宽

气体分子的速度服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布，由于多普勒效应产生的光谱线加宽是高斯线型的，故称为多普勒加宽<sup>[8-11]</sup>。

分子运动的多普勒效应主要由沿着入射光方向的分子速度分量决定。二阶多普勒效应与分子速度相对于入射光的方向无关，其相对大小只有 $10^{-12}$ 的数量级，所以除了高精度的要求，都忽略二阶多普勒效应。将分子沿光传播方向的速度分量用 $v$ 表示，由于多普勒效应，入射光频率从 $\omega$ 变为 $\omega'$ ， $\omega'$ 的大小为

$$\omega' = \omega - kv \quad (8.34)$$

其中 $k = \omega/c$ 。当分子的本征能量差为 $\hbar\omega_0 = W_2 - W_1$ 时，共振不在 $\omega = \omega_0$ 而在 $\omega' = \omega_0$ 处发生。这就是说，产生共振的入射光频率为

$$\omega = \omega_0 + kv \quad (8.35)$$

由于分子速度的分量  $v$  在正方向和负方向都有分布，按照速度分布光谱线就被非均匀加宽了。

假定分子的速度为麦克斯韦-玻尔兹曼分布，则气体中速度分量在  $v \sim v + dv$  之间的分子数为

$$N(v)dv = \frac{N}{\sqrt{\pi} u} \exp(-v^2/u^2)dv \quad (8.36)$$

这里  $u$  是最可几速度，它等于

$$u = \sqrt{\frac{2k_B T}{M}} \quad (8.37)$$

式中  $T$  是气体温度， $M$  是分子质量， $k_B$  是玻尔兹曼常数。

把从式(8.35)得到的速度分量表达式  $v = (\omega - \omega_0)/k$ ，代入式(8.36)中，则共振频率的光谱分布变为

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} ku} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{ku}\right)^2\right] \quad (8.38)$$

这是一个高斯线型(4.5节)，它的半最大值半宽度是

$$\Delta\omega_D = \sqrt{\ln 2} ku = 0.833 ku \quad (8.39)$$

此线宽称为多普勒宽度(或多普勒半宽度)。即使多普勒效应不是非均匀加宽的原因，例如固体中的光谱线，只要光谱线的非均匀加宽线型近似于高斯型，有关近似计算可采用。

如果气体的光谱线均匀加宽效应很弱，则其谱线型完全由多普勒加宽决定，即谱线为高斯线型，宽度为多普勒宽度。在实际工作中为了观察到光谱线，跃迁几率不能太小，并且一定要有相当大数目的分子，使分子间发生相互碰撞。这样，驰豫时间是有限的，而均匀加宽并不消失，由能级的自然寿命引起的均匀加宽称为自然宽度，由分子碰撞产生的加宽称为碰撞宽度。由于碰撞宽度几乎正比于气体的压力，有时又称为压力加宽，饱和加宽也

是均匀加宽。

一般来说，均匀加宽与多普勒加宽同时存在，结果光谱线更宽了。其半最大值半宽度(HWHM)比单独的均匀加宽宽度 $\Delta\omega_a$ 和单独的多普勒宽度 $\Delta\omega_b$ 还要宽<sup>(4)</sup>，但它并不等于 $\Delta\omega_a + \Delta\omega_b$ 之和而略小一些，如图8.4所示。

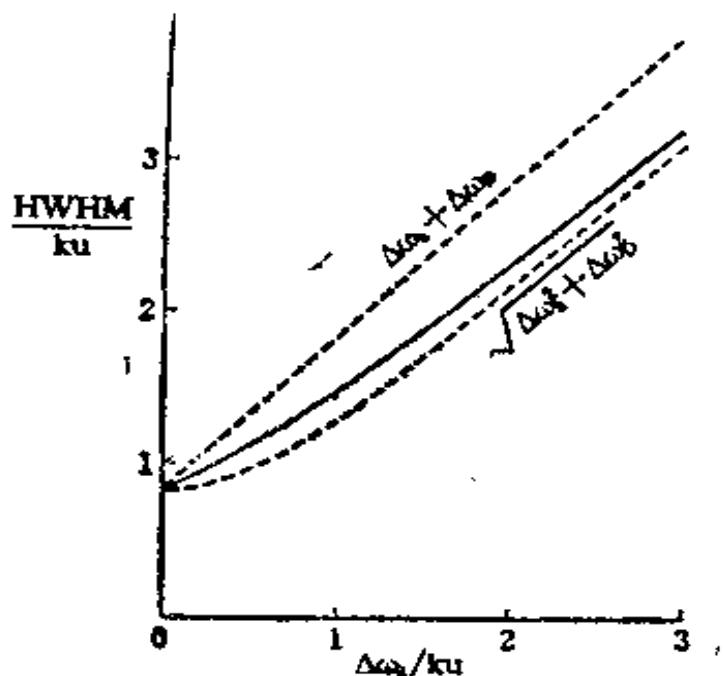


图8.4 具有多普勒加宽和均匀加宽(实线)谱线的半最大值半宽度， $\Delta\omega_a$ 是均匀宽度，  
 $\Delta\omega_b = 0.833ku$ 是多普勒宽度

(4) 如果一个分子与其它分子碰撞时发射和吸收光的相位改变不大，光谱线的宽度比多普勒加宽窄些，这个特殊效应则称为Dicke变窄。通常分子间的碰撞，相位变化的碰撞比能量变化的碰撞更为频繁，因此即使纵向弛豫时间长，横向弛豫时间也可以较短。前一节考虑到 $\gamma$ 和 $\tau$ 是唯象参数，与式(8.16)和(8.20)不同的计算，可以应用于这种情况。

### 8.4.2 具有多普勒加宽的非线性极化率

一个既有均匀加宽又有非均匀加宽的光谱线型可以表示为两种加宽的卷积积分。为了获得吸收、发射和色散线型，下面来计算考虑多普勒效应时的非线性复极化率<sup>[8-2]</sup>。由于式(8.31)中的共振频率 $\omega_0$ 在多普勒效应下变成 $\omega_0 + kv$ ，又由于速度分量 $v$ 的分布由式(8.36)表示，则多普勒加宽的非线性复极化率为

$$\chi_D = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\sqrt{\pi} \epsilon_0 \hbar u} |\mu_{1,2}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_0 + kv - \omega - i\gamma) \exp(-v^2/u^2) dv}{(\omega_0 + kv - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma \tau |x|^2} \quad (8.40)$$

$\chi_D$ 的实部 $\chi_D'$ 代表色散，其虚部 $-\chi_D''$ 按式(8.32)给出功率吸收系数 $k\chi_D$ ，相应地，具有多普勒加宽和均匀加宽的功率吸收系数 $2\alpha$ 可以表示成入射光频率和振幅的函数

$$2\alpha = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\sqrt{\pi} \epsilon_0 \hbar u} |\mu_{1,2}|^2 k\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v^2/u^2) dv}{(\omega_0 + kv - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma \tau |x|^2} \quad (8.41)$$

这些方程中的积分可以用等离子体色散函数来表示。设 $\zeta$ 为复变量，等离子体色散函数 $Z(\zeta)$ 的定义为

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2) dx}{x - \zeta} \quad (8.42)$$

也可以写为

$$Z(\zeta) = i \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\zeta y - \frac{1}{4}y^2) dy$$

$$\text{或 } Z(\zeta) = 2i \exp(-\zeta^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

式中  $x$  和  $y$  是实变量,  $t$  是复变量。

现在利用饱和加宽的均匀加宽

$$\Delta\omega_s = \sqrt{\gamma^2 + \gamma\tau|x|^2} \quad (8.43)$$

并令

$$\zeta = \frac{\omega - \omega_0 - i\Delta\omega_s}{ku}, \quad x = \frac{v}{u}$$

则有

$$\frac{\exp(-x^2) dx}{x - \zeta} = \frac{kv - \omega + \omega_0 - i\Delta\omega_s}{(kv - \omega + \omega_0)^2 + (\Delta\omega_s)^2} \exp(-v^2/u^2) kdv$$

故可以从式(8.40)得到

$$\chi'_D = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar k u} |\mu_{12}|^2 \operatorname{Re} \{ Z(\zeta) \} \quad (8.44)$$

$$- \chi''_D = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar k u} |\mu_{12}|^2 \frac{\gamma}{\Delta\omega_s} \operatorname{Im} \{ Z(\zeta) \} \quad (8.45)$$

一般来说, 这些公式表示了饱和吸收时的色散和吸收。弱光时的线性极化率  $\chi_1 = \chi_1' - i\chi_1''$ , 可由  $|x| \rightarrow 0$  极限下  $\chi_D$  的表达式得到, 故有

$$\chi_1 = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar k u} |\mu_{12}|^2 Z\left(\frac{\omega - \omega_0 - i\gamma}{ku}\right) \quad (8.46)$$

一般情况下, 介质的极化强度可以写成下面的形式

$$P = \epsilon_0 (\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \dots) \quad (8.47)$$

式中  $E$  是光电场,  $\chi_n$  是  $n$  阶非线性极化率。当介质相对于坐标反方向具有对称特性时, 偶数阶的非线性极化率将消失。因此, 对于各

向同性气体、液体和大多数固体，非线性极化率为

$$\chi = \chi_1 + \chi_3 E^3 + \chi_5 E^5 + \dots$$

对于包括多普勒加宽的式(8.40)的非线性极化率，其奇数阶非线性系数可用 $Z(\zeta)$ 和它的导数来表示。

在可见光范围内，在低于100Pa的气压下<sup>(5)</sup>，气体的多普勒加宽可以高达 $10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ ，而均匀加宽只有 $10^8 \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \sim 10 \text{ MHz}$ 。因而可以假定 $\Delta\omega_b \ll \Delta\omega_n$ ，即 $\gamma \ll k_u$ ，该近似称为多普勒极限近似。在此近似下等离子体色散函数具有下列简单形式

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{Z(\zeta)\} &= 2 \exp(-z^2) \int_0^\infty \exp(x^2) dx \\ \operatorname{Im}\{Z(\zeta)\} &= -\sqrt{\pi} \exp(-z^2) \end{aligned} \quad (8.48)$$

式中 $z = (\omega - \omega_0)/k_u$ 。故在多普勒极限近似下(式(8.48))功率吸收系数式(8.45)变为

$$2\alpha_D = \frac{N_{\text{e}}^{(0)} - N_{\text{e}}^{(\infty)}}{s_0 h u} |\mu_{12}|^2 \frac{\sqrt{\pi} \gamma}{\Delta\omega_b} \exp\left[-\left(\frac{(\omega - \omega_0)^2}{k_u}\right)\right] \quad (8.49)$$

如果比较一下弱入射光下 $\omega = \omega_0$ 时的吸收系数 $\alpha_D(0)$ 和无多普勒加宽时的式(8.10)，发现

$$\frac{\alpha_D(0)}{\alpha(0)} = \frac{\sqrt{\pi} \gamma}{k_u} \quad (8.50)$$

这表明由于多普勒加宽光谱线的峰值强度下降的倍数相当于均匀宽度与多普勒宽度的比值。

多普勒加宽存在时吸收谱线中心频率上的饱和效应，即吸收系数随入射功率 $P$ 减小，在多普勒极限近似下可表示成

(5) 略低于0.75Torr.

$$\alpha_d(P) = \frac{\alpha_d(0)}{\sqrt{1 + P/P_s}} \quad (8.51)$$

式中  $P_s$  是饱和功率。虽然  $P_s$  与无多普勒加宽时的式(8.24)相同，但式(8.51)中的因子是  $(1 + P/P_s)^{-1/2}$ 。无多普勒加宽的式(8.9)中的因子是  $(1 + P/P_s)^{-1}$ ，因为式(8.51)适用于  $\gamma \ll \hbar u$  的情况，而式(8.9)适用于  $\gamma \gg \hbar u$  的情况。

如果多普勒极限近似不适用，则等离子体色散函数中的积分必须通过数值计算法求解，图8.5示出了用数值法计算弱入射光 ( $|x|^2 \rightarrow 0$ ) 下中心频率的吸收系数(式(8.41))与无多普勒加宽时的吸收系数的比值。由图可看门，线性吸收系数  $\alpha_d(0)$  在有多普勒加宽时随着多普勒加宽的增强而接近多普勒极限，只有均匀加宽时，随多普勒加宽的减弱而接近  $\alpha(0)$ 。

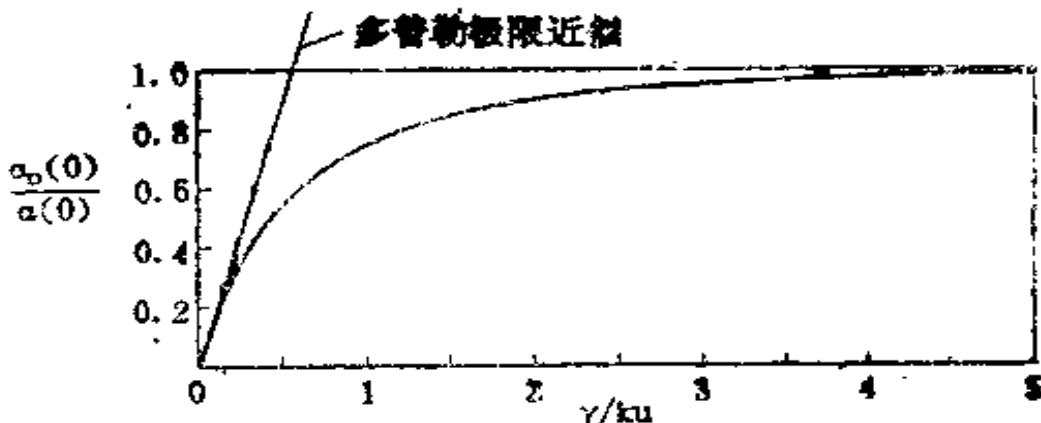


图8.5 同时具有多普勒加宽和均匀加宽的光谱强度。因为  $\gamma$  几乎与气压成比例，所以这条曲线表示吸收系数随气压的变化

## §8.5 烧孔效应

均匀加宽与非均匀加宽的区别首先由核磁共振实验中的烧孔

效应揭示出来。当一条光谱线同时被均匀和非均匀地加宽时，饱和效应一般只发生在入射光频率附近的均匀宽度内，并且不超出非均匀加宽的宽度。这样，当一个非均匀加宽的光谱线由于吸收某一给定频率的强入射光而达到饱和时，用弱探测光的吸收，频率扫描时就会在吸收峰上出现一个下陷，如图8.6所示。在光谱线上出现这样一个孔的效应称为烧孔效应。多普勒加宽的气体谱线的烧孔效应将在下面作详细的讨论<sup>[6,3]</sup>。



图8.6 光谱线的烧孔效应

如前节所述，多普勒效应使得共振频率从 $\omega_0$ 移到 $\omega_0 + hv$ ，其中 $v$ 是沿入射光方向的气体分子的速度分量。具有不同速度分量的分子有不同的跃迁几率。将式(8.14)或(8.2)中的 $\omega_0$ 用 $\omega_0 + hv$ 代替，可以得到具有速度分量 $v$ 的分子的吸收截面或平均跃迁几率。运动分子的吸收截面可表示成下面形式的 $\omega$ 和 $v$ 的函数

$$\sigma(v) = \frac{k\gamma|\mu_{12}|^2}{\epsilon_0\hbar((\omega_0 + hv - \omega)^2 + \gamma^2)} \quad (8.52)$$

并且，入射光子通量为 $I$ 时的跃迁几率变为

$$I\sigma(v) = \frac{|x|^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 + hv - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (8.53)$$

设 $N_1(v)$ 和 $N_2(v)$ 分别代表跃迁的下能级和上能级的分子速度分布，则二能级原子在稳态饱和吸收下的速度分布可由式(8.21)表示为

$$N_1(v) = N_1^{(0)}(v) - \frac{\gamma}{2\gamma_1} \cdot \frac{(N_1^{(0)}(v) - N_2^{(0)}(v))|x|^2}{(\omega_0 + kv - \omega)^2 + (\Delta\omega_k)^2}$$

$$N_2(v) = N_2^{(0)}(v) + \frac{\gamma}{2\gamma_2} \cdot \frac{(N_1^{(0)}(v) - N_2^{(0)}(v))|x|^2}{(\omega_0 + kv - \omega)^2 + (\Delta\omega_k)^2} \quad (8.54)$$

式中不含 $v$ 项的意义与前相同。假定入射光为零时每个能级的速度都服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布，则有

$$N_1^{(0)}(v) = \frac{N_1^{(0)}}{\sqrt{\pi u}} \exp(-v^2/u^2)$$

$$N_2^{(0)}(v) = \frac{N_2^{(0)}}{\sqrt{\pi u}} \exp(-v^2/u^2) \quad (8.55)$$

见图8.7中的虚线表示。

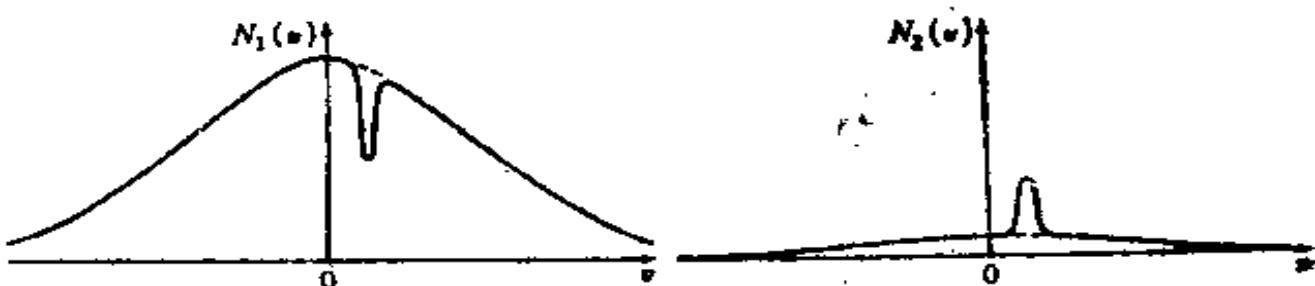


图8.7 由于饱和效应，上下能级分子速度分布的变化

当入射光足够强以达到饱和吸收时，下能级分子数减小，上能级分子数增加。如果谱线是非均匀加宽的，则分子数的增加和减少并不是均匀的。在多普勒加宽下，对那些速度分量为

$$v = \frac{\omega - \omega_0}{k}$$

的分子，分子的增加与减少为最大。这可以从式(8.54)右边第二项看出。当 $v$ 跟上面的 $v$ 值相差大于 $\Delta\omega_k/k$ 时，增加和减少都小于其最大值的一半。因此，当频率为 $\omega$ 的强光入射时，两个能级的速度分布就象图8.7中的实线所示的那样。故上下能级的粒子数差为

$$N_1(v) - N_2(v) \approx \frac{N_{10}^{(0)}(v) - N_{20}^{(0)}(v)}{1 + 2\tau I\sigma(v)} \quad (8.56)$$

式中 $\tau$ 是由式(8.20)给出的纵向驰豫时间。

一个由二能级原子组成的、具有这样的速度分布的气体介质，单位体积所吸收的入射功率为

$$\Delta P = \hbar\omega I \int (N_1(v) - N_2(v)) I\sigma(v) dv \quad (8.57)$$

因此，从式(8.56)、(8.57)，功率吸收系数 $2\alpha_D$ 可以写成

$$2\alpha_D = \frac{\Delta P}{\hbar\omega I} = \int \frac{N_{10}^{(0)}(v) - N_{20}^{(0)}(v)}{\sigma(v)^{-1} + 2\tau I} dv \quad (8.58)$$

若把式(8.17)、(8.52)、(8.55)代入式(8.58)，可得到与式(8.41)完全相同的方程。

但是，如果除了强饱和光外再用频率为 $\omega'$ 的弱探测光入射，当 $\omega'$ 扫描时，在吸收谱线上就会观察到一个凹陷，如图8.6所示。这是由于吸收强度正比于 $N_1(v) - N_2(v)$ 的原因，其中 $v$ 由 $v = (\omega' - \omega_0)/k$ 与探测光频率 $\omega'$ 相联系。

类似的凹陷也会在具有粒子数反转介质的发射光谱中出现。在这个烧孔实验中所观察到的凹陷的中心频率在 $\omega' = \omega$ 处，当 $\omega'$ 被扫描时，凹陷的宽度不是 $\gamma$ 而是 $2\gamma$ ，或精确地说是 $\gamma + \Delta\omega_k$ 。其原

因在于，即使分子速度分布的烧孔有狄拉克 $\delta$ 函数那么尖锐，用频率 $\omega'$ 探测到的线宽也是 $\gamma$ 。因此，烧孔实验中观察到的宽度等于强光在 $\omega$ 的烧孔宽度和在 $\omega'$ 探测吸收的宽度的总和。

## §8.6 瞬态相干现象

到目前为止，我们主要讨论了入射光和二能级介质相干相互作用的稳态情况。即使不是严格的稳态，与介质的驰豫时间相比，只要时间变化很缓慢，相互作用可以近似为稳态。一般室温下的固体和液体的驰豫时间为纳秒或更短的数量级，因此相互作用大多数可以认为是准稳态。固体在激光跃迁中也会出现驰豫时间比较长的例外情况，低压气体的驰豫时间可以相当长。在这些介质中不使用纳秒脉冲就可以观察到各种相干相互作用的瞬态现象。观察相干瞬态效应有助于研究激发态动力学性质，例如介质中的驰豫过程，激发能向其它能级的传输和化学反应。此外，它还是各种高速光电仪器的重要基础。

大多数相干瞬态现象可以用密度矩阵公式作很好的近似分析，此理论将二能级介质中的驰豫唯象地考虑进去<sup>[8.4]</sup>，尽管该近似有不令人满意之处，但给出一个更好近似的一般理论是不容易的。

到目前为止我们已经讨论了介质对稳态单色入射光的响应。当单色入射光的强度随时间变化以致于入射光的振幅迅速变化时，就会出现具有不同频率的边带分量，而且作用在不同点分子上的光电场的振幅和相位是不同的。因此，研究包括空间和时间变化的二能级分子同光场之间的非线性相干相互作用的瞬态现象时，必须把不同频率的传播常数的变化(即折射率的色散)考虑进去。由于二能级分子的感应电偶极矩的驰豫(横向驰豫)和粒子数

的驰豫(纵向驰豫)不同,电偶极矩和粒子数在空间和时间上的分布也不相同,介质的极化决定了光的传播。这里,极化是由粒子数与二能级分子的感应电偶极矩的乘积决定的。

因此,在处理瞬态相干效应时,必须记住介质中传播的光电场 $\vec{E}$ 和介质本身的极化强度 $\vec{P}$ 两者都是随时间和空间迅速变化的函数。存在感应极化强度 $\vec{P}$ 时,光电场 $\vec{E}$ 的空间和时间变化必须用麦克斯韦方程来表达,光电场感应产生的二能级介质的极化强度 $\vec{P}$ 必须由密度矩阵的运动方程组来描述。故在任何空间和瞬间 $\vec{E}$ 和 $\vec{P}$ 的解必须由这两个方程组联立求解得到。就是使用一台高速计算机实际上也几乎不可能获得非常精确的解。因此,目前所采用的方法是通过有效的简化来获得近似解,并在使理论计算简化的实验条件下观察瞬态相干效应。

在实际介质中存在着许多与入射光共振的二能级以外的其它能级之间的跃迁,同时还可能存在二能级分子之外的其它分子。用 $\vec{P}$ 表示仅由二能级跃迁产生的极化强度,用 $\epsilon_0\chi\vec{E}$ 表示其它原因产生的极化强度。这里假定 $\chi$ 是线性极化率,与光强度无关,非线性相干相互作用包括在 $\vec{P}$ 里,令 $\epsilon_0(1+\chi)=\epsilon$ ,包括两种极化的电位移矢量为

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \vec{P} \quad (8.59)$$

把该式代入从麦克斯韦方程组得到的波动方程式(3.7)中,得到

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \epsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (8.60)$$

分析三维光波的非线性相干现象,在数学上是非常困难的,我们的研究只局限于一维情况,取光传播的方向为 $z$ 轴,平面波的

$\vec{E}$  和  $\vec{P}$  表示为

$$\vec{E}(z, t) = \mathcal{E}(z, t) \exp(i\omega t - ikz)/2 + c.c. \quad (8.61)$$

$$\vec{P}(z, t) = \mathcal{P}(z, t) \exp(i\omega t - ikz)/2 + c.c.$$

式中  $\omega$  是光波的频率，波数  $k$  与二能级间的跃迁无关，并由下式定义

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} = \eta \frac{\omega}{c} \quad (8.62)$$

式中  $\eta = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  是介质的折射率， $\mathcal{E}(z, t)$  和  $\mathcal{P}(z, t)$  分别是  $\vec{E}$  和  $\vec{P}$  的包络，在时间及空间上与  $\omega$  和  $k$  相比，其变化是缓慢的。

使用式(8.61)，波动方程(8.60)重写如下

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z, t)}{\partial z^2} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(z, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(z, t)}{\partial t^2} \quad (8.63)$$

$\vec{E}(z, t)$  与  $\mathcal{E}(z, t)$  缩写成  $\vec{E}$  和  $\mathcal{E}$ ，则有

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k^2 \mathcal{E} \right) \exp(i\omega t - ikz) + c.c.$$

与  $k$  相比，如果  $\mathcal{E}$  的空间变化是缓慢的，使得

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| \ll k |\mathcal{E}|$$

成立，于是二阶微分  $\partial^2 \mathcal{E} / \partial z^2$  可忽略，既然认为  $\mathcal{E}$  的变化与  $\omega$  相比是缓慢的，类似的对于时间微分可以假设

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathcal{E}|$$

并略去 $\partial^2 \mathcal{E} / \partial t^2$ 项。这样的近似叫做慢变化包络近似，缩写成SVEA。极化强度 $P$ 对时间两次微分得到的方程与上面类似。在波动方程中极化强度 $P$ 是一个微扰，与 $\epsilon E$ 或者 $\epsilon_0 E$ 相比都是一个小量，因此不仅 $\partial^2 \mathcal{P} / \partial t^2$ 而且 $\partial \mathcal{P} / \partial t$ 也可以略去。在SVEA下波动方程式(8.63)可写成

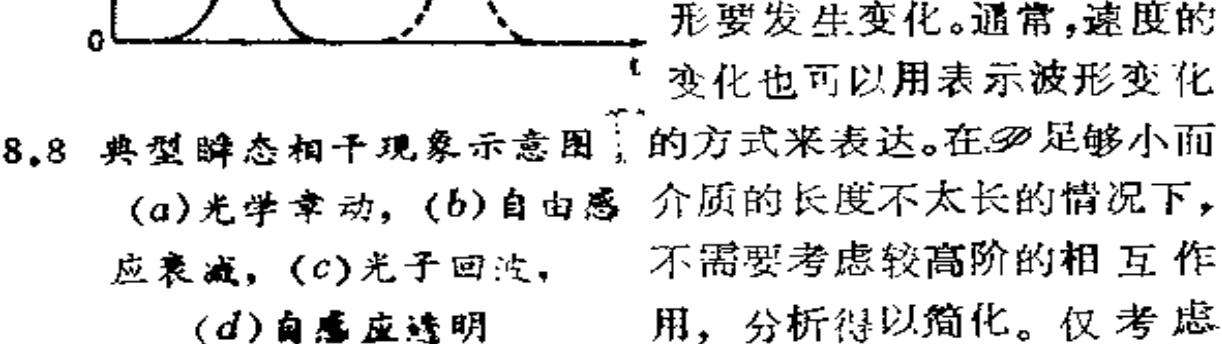
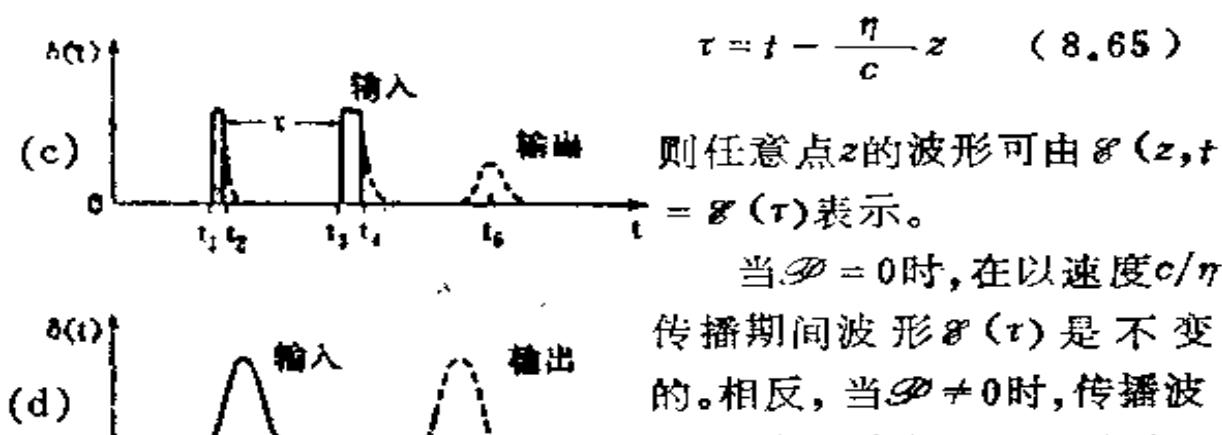
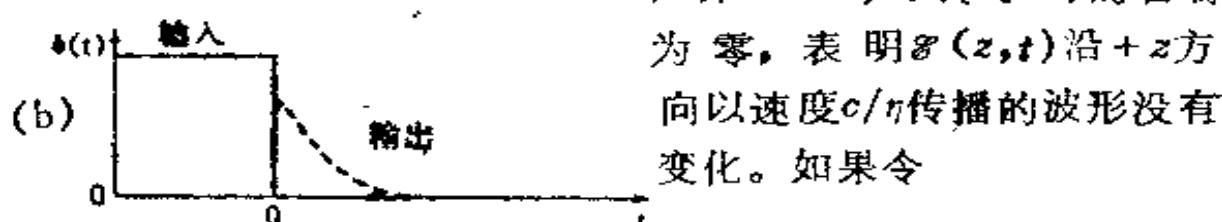
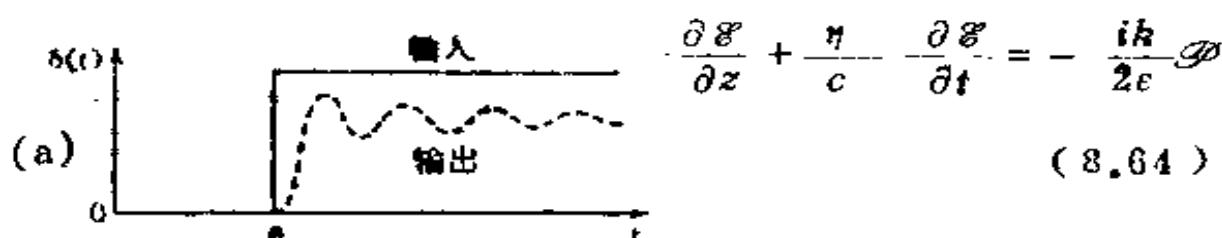


图8.8 典型瞬态相干现象示意图  
(a)光学受激，(b)自由空间吸收，  
(c)光子回波，  
(d)自感应透明

$z = 0$  处输入波形和  $z = L$  处输出波形差别较小的情况下，如果  $\Delta \varphi$  表示  $z = 0$  和  $z = L$  之间  $\varphi(t)$  的增量，从式(8.64)、(8.65)得到

$$\frac{\Delta \varphi}{L} \approx -\frac{ik}{2\epsilon} \quad (8.66a)$$

因此

$$\Delta \varphi = -\frac{ikL}{2\epsilon} \quad (8.66b)$$

观察这种情况下输出波形的变化，将得到二能级介质的非线性相干极化的时间变化。为了简化实验和相应的理论结果之间的比较，使用分步或脉冲调制激光，可对各种瞬态相干效应进行研究。图8.8示出了这一类典型的效应，如光学章动、自由感应衰减、光子回波以及自感应透明。下面来分析这些现象<sup>[8-5]</sup>。

### 8.6.1 光学章动

如7.1节所述，当频率和振幅都不变时，入射光在  $t = 0$  时作用于  $t < 0$  未被微扰的二能级分子，分子的吸收呈现出图7.1所示的章动现象。为了与自旋陀螺和磁共振现象中的章动区别开来，我们把这种效应叫做光学章动。由于驰豫效应和谱线加宽效应，实际观测到的光学章动呈现阻尼振荡的形式，如图8.8(a)中虚线所示。

在均匀介质中，光学章动信号的阻尼主要由横向时间决定。在多普勒加宽跃迁中，介质中每个分子的共振频率稍有不同，根据式(7.15)，相应的章动也有不同频率，如图7.1中的两条曲线所示。结果，具有非均匀加宽的所有分子的光学章动信号很快被破坏掉，使阻尼时间变得很短。因为频移较大的分子，其章动信号相对较小，阻尼时间比非均匀宽度的倒数稍长，并取决于入射

光强度。

### 8.6.2 自由感应衰减

与光学章动实验相反，如果把强度不变的入射光保持到 $t = 0$ 的时刻为止，或者在 $t = 0$ 时将入射光的振幅截断或者使入射光频率偏移某个量，如图8.8(b)所示。从 $t > 0$ 起，在未受微扰的状态下 $t = 0$ 时刻以前感应产生的电偶极矩将产生辐射并逐步衰减，这叫做自由感应衰减，缩写为FID<sup>[8.8]</sup>。象入射激光束一样，FID信号也是相干的，并向入射光束的方向发射，这是因为感应电偶极子相位的空间分布与入射光相同。

在旋转参考系中，如果用贾矢量代表密度矩阵，在 $t < 0$ 时均匀介质中产生的感应电偶极矩在 $t > 0$ 后不受微扰地释放出来，那么表示均匀介质这种特征的式(7.61)可以写成

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\gamma u - (\omega_0 - \omega)v \\ \frac{dv}{dt} &= (\omega_0 - \omega)u - \gamma v \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{w - w^{(0)}}{\tau}\end{aligned}\quad (8.67)$$

解上述方程，得到

$$u(t) + iv(t) = (u(0) + iv(0)) \exp(i(\omega_0 - \omega)t) \exp(-\gamma t) \quad (8.68)$$

式中初值 $u(0)$ 和 $v(0)$ 代表 $t = 0$ 时的感应电偶极子，并由式(8.28)给出。因为式(8.68)是在相对于实验室坐标系以频率 $\omega$ 旋转的参考系中表示的，因此FID的辐射偶极子是具有固有频率 $\omega_0$ 的振荡，其衰减时间就等于横向驰豫时间 $1/\gamma$ 。

如果把入射光的频率突然转换到 $\omega'$ , 而振幅不变, 使频移大于线宽, 即 $|\omega' - \omega_0| \gg \gamma$ 。在 $t > 0$ 之后, 频率为 $\omega'$ 的入射光与频率为 $\omega_0$ 的FID信号之间将会产生一个拍频, 我们把它叫做自由感应拍频。因为观测这种拍频相当于探测FID信号的外差, 所以要比探测入射光被突然截断时所发射的FID功率容易些。图8.9表示一个FID拍频信号, 该结果是利用 $N_2O$ 激光器观测 $0.87\text{Pa}$ 压强下 $^{15}\text{NH}_3$ 的 $10.8\mu\text{m}$ 振跃迁得到的。

FID在均匀介质中的衰减时间, 与光学章动的情况一样, 也等于横向驰豫时间。但当谱线为多普勒加宽时, 不同速度分子的FID频率是不同的, 由于这些分子之间的失相, 最后的拍频信号会消失得更快。这种情况下衰减时间的缩短, 不只是因为非均匀增宽, 而且还取决于光的强度, 因为烧孔中的一群分子对FID信号的贡献较大, 这些分子处于非均匀加宽范围内某狭窄的均匀宽度中。正如烧孔的强度和宽度取决于光的强度一样, FID的强度和衰减时间也取决于光的强度。而且, 由于激光束的空间强度分布和分子的横向移动, 也会使所观察的FID信号的衰减时间变得很短。

此外, 在气体分子碰撞中, 还存在着弱碰撞现象<sup>(6)</sup>, 这



图8.9 从氨的红外光谱线中观测到的自由感应拍频。强度为 $45\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$ 的 $N_2O$ (i5)激光谱线入射到 $0.87\text{Pa}$ 压强的 $^{15}\text{NH}_3$ 上

(6)也叫软性碰撞。

种碰撞不改变分子的能量和动量的大小，只改变分子偶极矩的相位或分子速度的方向，分别称为相变碰撞和小角度碰撞。由于这些碰撞的存在，由分子发射出来的FID信号的相位变得不规则，而且由于是气体分子，总的衰减时间变短了。这种效应以不同的方式影响自由感应拍频。可以利用这一原理分析弱碰撞过程，但是总的说来，要把所有这些过程都分别出来是很困难的。

### 8.6.3 光子回波

与光学章动和自由感应衰减不同，光子回波只在非均匀加宽介质中出现。当入射的两个光脉冲被一个时间间隔 $\tau$ 分开时，在第二个脉冲之后 $\tau$ 时刻介质会发射出一个光脉冲，就象光的回波一样。通常，我们把这种光脉冲叫做光子回波。这种回波是由类似于自旋回波的机制所产生的，即由光波的干涉效应产生的。这种效应的机制并不是由于光的粒子性，实际上没有任何理由把它叫做光子回波(photon echo)，所以有时也把它叫做“光回波”(photo echo)。

在解释光子回波的产生之前，应当注意，一个光脉冲作用在二能级分子上的效应通常可以由密度矩阵的 $\vec{\rho}$ 的旋转角度来表示。入射到二能级分子上的光脉冲可表示为

$$E(t) = \mathcal{E}(t) \exp(i\omega t)/2 + c.c. \quad (8.69)$$

式中 $\mathcal{E}(t)$ 代表振幅的时间变化包络。当 $\omega = \omega_0$ ，在谐振时，如7.5节中所述，在旋转系中，密度矩阵的 $\vec{\rho}$ 将在包括Z轴在内的平面上以章动频率 $|\mu_{12}\mathcal{E}(t)|/\hbar$ 旋转。从 $t = t_1$ 到 $t_2$ 的时间内，章动的角度 $\Theta$ 可由下式给出

$$\Theta = \frac{|\mu_{12}|}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} |\mathcal{E}(t)| dt \quad (8.70)$$

选取时间原点，使入射光的相位为零，这样 $\varphi(t)$ 是一个实数，并可由至 $X'$ 轴方向的一个矢量来表示。该矢量 $\vec{\rho}$ 以顺时针方向在 $Y'Z'$ 平面内旋转一个角度 $\Theta$ 。如果在 $t < t_1$ 和 $t > t_2$ 时， $\varphi(t) = 0$ ， $\Theta$ 就是矢量 $\vec{\rho}$ 在脉冲通过前后的角度差。 $\Theta = \pi(180^\circ)$ 的脉冲叫 $\pi$ 脉冲或 $180^\circ$ 脉冲， $\Theta = \pi/2(90^\circ)$ 的脉冲叫 $\pi/2$ 脉冲或 $90^\circ$ 脉冲。因为 $\Theta$ 代表脉冲振幅 $\varphi(t)$ 的积分，如式(8.70)所给出的那样，所以有时又把它叫做脉冲面积。

虽然任意强度的两个脉冲入射时通常都会产生光子回波，但只有当第一个脉冲是 $\pi/2$ 脉冲，第二个脉冲是 $\pi$ 脉冲时，才会获得最大的回波强度。当 $\pi/2$ 脉冲和 $\pi$ 脉冲入射时，光子回波的形成可用图8.10中的旋转坐标系的矢量模型加以说明。图中的时间顺序 $t = t_1, t_2, \dots$ ，相当于图8.8(c)中 $t = t_1, t_2, \dots$ 。甚至当谱线非均匀地加宽到非均匀宽度 $\Delta\omega_0$ 时，如果脉冲宽度 $\Delta t$ 足够短，

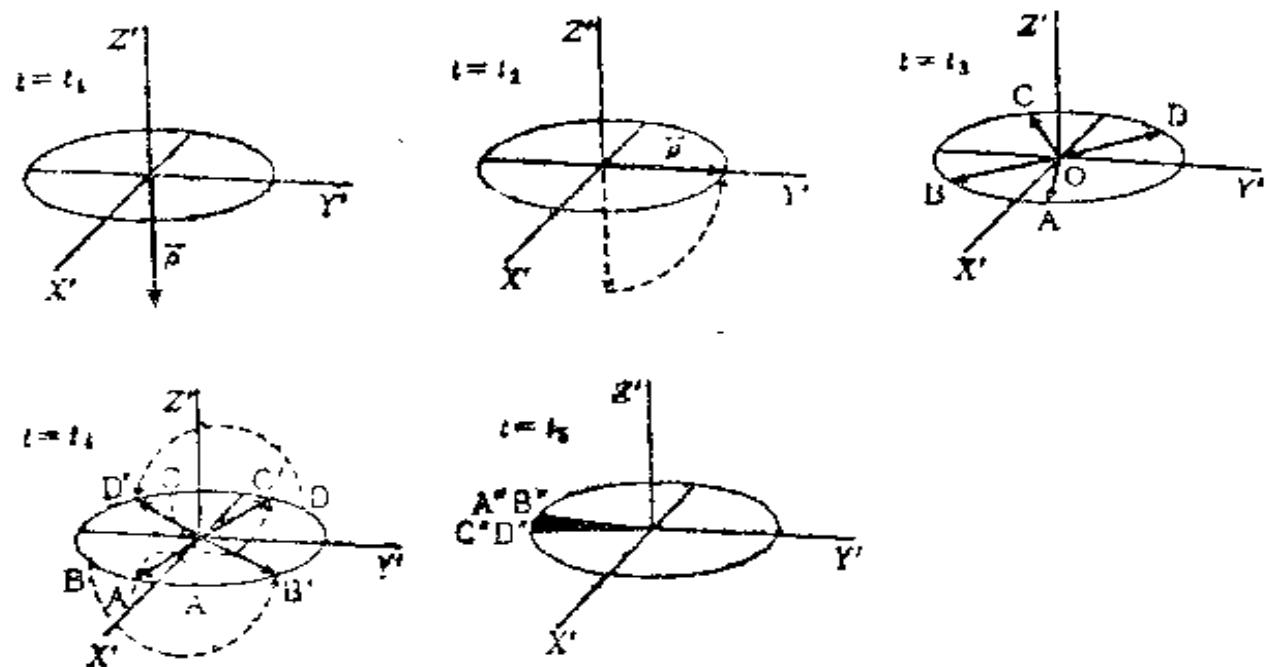


图8.10 光子回波的产生

也可以假定 $\Delta\omega_0 \cdot \Delta t \ll 1$ 。在这种情况下， $\pi/2$  脉冲把非均匀加宽的分子的贊矢量绕 $X'$ 轴旋转 $90^\circ$ 。

如图8.10所示，所有分子的贊矢量 $\rho$ 在 $t = t_1$ 初在 $-Z'$ 轴方向，在 $\pi/2$ 脉冲之后的 $t = t_2$ 时刻，立刻指向 $Y'$ 轴方向。接着由于非均匀加宽，每个分子的矢量 $\rho$ 都以与 $\omega$ 不同的角速度旋转。这样在时间推移了 $\tau \gg (\Delta\omega_D)^{-1}$ 之后，在 $t = t_3$ 时产生的失相，由 $X'Y'$ 平面上不同的矢量指向 $A, B, C, \dots$ 表示。此时 $\rho$ 的系统平均实际上已经消失。当 $\pi$ 脉冲作用时，这些分子的贊矢量绕 $X'$ 轴旋转 $180^\circ$ ，使得在 $t = t_4$ 时它们的方向由 $A', B', C', \dots$ 表示，矢量 $\rho$ 的系统平均仍然为零。如果时间再往 $t_4$ 之后推移，在 $t_5 = t_4 + \tau$ 时，这些矢量重新得到相同的相位而指向 $-Y'$ 轴方向，象 $A'', B'', C'', \dots$ 所表示的那样。同相的原因是每个分子在 $\pi$ 脉冲通过前后都保持同样的旋转频率，结果每个 $\rho$ 的相位角都可由下式给出

$$\angle AOY' = \angle A'' OA', \quad \angle BOY' = \angle B'' OB', \quad \dots$$

这点可从图8.10中看出。

正是以这种方式，在第二个脉冲通过后的 $\tau$ 时刻，矢量 $\rho$ 的系统平均便会再现并由于相干偶极子的结合而辐射出光脉冲。这就是光子回波。在实际介质中驰豫是不可避免的，如果脉冲间隔时间 $\tau$ 比驰豫时间长，光子回波则逐渐变小。这种衰减主要决定于偶极矩的相位驰豫时间，即横向驰豫时间。

#### 8.6.4 自感应透明

各种相干瞬态现象中，与传播有关的最明显的现象之一是自感应透明(缩写为SIT)。当 $2\pi$ 脉冲入射到二能级吸收介质上，只要脉冲宽度比驰豫时间短得多，脉冲将不被吸收地通过介质。因

为当脉冲面积为 $2\pi$ 时( $\Theta = 2\pi$ )，代表二能级介质的密度矩阵的矢量 $\rho$ 就会旋转到 $360^\circ$ 。当矢量 $\rho$ 从初始的 $0^\circ$ 旋转到 $180^\circ$ 时，入射光被吸收；然后，当它从 $180^\circ$ 旋转到 $360^\circ$ 时，同量的吸收光被辐射出来。因此，入射光通过吸收介质基本上不被吸收。这就是自感应透明，它与饱和吸收不同。

在自感应透明中，比吸收介质驰豫时间还短的一个 $2\pi$ 脉冲，几乎百分之百地穿透介质。在饱和吸收中，吸收性能随入射光的强度逐渐减弱，其中入射光强度振幅不变，或者说比吸收体的驰豫时间变得缓慢些。因此，饱和吸收的透射比不可能是百分之百。在自感应透明中，介质不同部位的、处在下能态的二能级分子与入射光脉冲相干相互作用，一旦光脉冲能量被吸收，此后就被相干地辐射出来。因此， $2\pi$ 脉冲的传播速度要比原来光的传播速度小百分之一，甚至十分之一。

这种现象可利用由平面传播波的麦克斯韦方程得到的近似方程(8.64)进行分析，其中介质每一部分的极化强度都可由光学布洛赫方程式(7.61)确定。当光脉冲宽度比驰豫时间短时，可以令式(7.61)中的 $\gamma = 0$ 和 $\tau = \infty$ ，即忽略驰豫项以简化计算。但必须注意窄脉冲的频率分量较多，而且不同位置不同时刻分子的行为是有差别的。

理论计算表明，当 $2\pi$ 脉冲入射到由二能级分子组成的吸收介质上时，尽管透射波形稍微有些变化，但脉冲面积保持不变。当入射光的脉冲面积在 $\pi$ 和 $3\pi$ 之间时，透射光的脉冲面积接近 $2\pi$ 。除了 $2\pi$ 脉冲之外，面积为 $4\pi$ 、 $6\pi$ 、……的脉冲也可以类似的稳定方式传播。特别是当 $2\pi$ 脉冲的振幅包络 $\varphi(t)$ 取图8.11所示的双曲正割函数时， $2\pi$ 脉冲将以常速传播，其波形和振幅在传播过程中都不变。

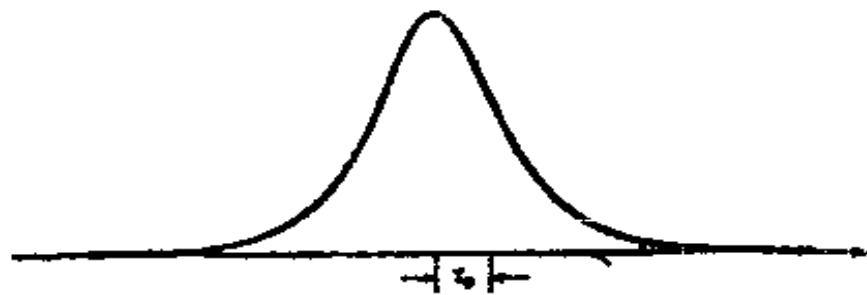


图 8.11 双曲正割函数  $\text{sh}(t/\tau_p)$   
在  $z$  方向传播的  $2\pi$  脉冲的振幅可由下式表示<sup>8.6</sup>

$$\frac{|\mu_{12}|}{\hbar} \mathcal{E}(z, t) = \frac{2}{\tau_p} \text{sh} \left( \frac{t}{\tau_p} - \frac{z}{v_p \tau_p} \right) \quad (8.71)$$

式中  $v_p$  是传播速度,  $\tau_p$  是脉冲宽度, 即振幅为最大值的  $2/(e + e^{-1}) = 0.648$  倍处的半宽度。自感应透明脉冲的传播速度  $v_p$  可由参考文献(8.5)给出

$$\frac{1}{v_p} = \frac{\eta}{c} \left( 1 + \frac{N\omega |\mu_{12}|^2 \tau_p^2}{2\epsilon\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega') d\omega'}{1 + (\omega - \omega')^2 \tau_p^2} \right) \quad (8.72)$$

式中  $\eta = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  是介质的折射率,  $N$ (如果粒子在上能级就是  $N_1^{(0)} - N_2^{(0)}$ )是单位体积的分子数,  $g(\omega)$  是二能级之间跃迁的归一化线型函数。若吸收线宽  $\Delta\omega_0$  较窄, 使  $\Delta\omega_0 \tau_p \ll 1$  时, 式中的积分就等于 1。相反, 如果  $\Delta\omega_0 \tau_p \gg 1$ , 积分就等于  $(\pi/\tau_p)g(\omega)$ 。

当非均匀加宽线的光谱宽度  $\Delta\omega_0$  较窄, 使  $\Delta\omega_0 \tau_p \ll 1$ , 式(8.72)可改写成下面的形式

$$\frac{1}{v_p} = \frac{\eta}{c} \left( 1 + \frac{U_\pi}{U_{\epsilon\pi}} \right) \quad (8.73)$$

式中  $U_\pi$  是单位体积脉冲的峰值能量,  $U_\pi = N\hbar\omega$  是二能级分子的最大能量。因为光电场的峰值可由下式给出

$$\mathcal{E}_e = \frac{2\hbar}{|\mu_{12}| \tau_p}$$

光脉冲的能量密度变成

$$U_{\text{am}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \times 2 = \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}_{\text{e}}^2 = \frac{2e\hbar^2}{|\mu_{12}|^2 \tau_p^2}$$

方程(8.73)的含意是，在自感应透明中，传播速度减慢是因为光脉冲能量暂时转换成了二能级分子的激发能。

## 习 题

8.1 试重写振幅吸收系数式(8.7)与频率 $\omega$ 和入射光功率 $P$ 的函数关系。其中 $P$ 用中心线性吸收系数 $a(0)$ 和饱和功率 $P_s$ 表示。

8.2 假如原子的跃迁电偶极矩为1德拜，荧光寿命为 $10^{-9}$ s，试计算该原子的波长为 $1\mu\text{m}$ 时谐振辐射的吸收横截面积，可以忽略多普勒加宽。

8.3 试说明小信号吸收常数与纵向驰豫时间无关的物理原因(提示：数学上可参考式(8.23))。

8.4 当纵向和横向驰豫常数不同时，试求出用未微扰时粒子数之差表示的吸收功率饱和值 $\Delta P_s$ 的计算公式。

8.5 证明当参量 $a$ 变化时，非线性极化率式(8.31)的轨迹在复平面上是一个椭圆，并确定主轴的方向和椭圆的偏心率。

8.6 原子的跃迁电偶极矩为1德拜，原子量为100，求该原子自然宽度等于300K时多普勒宽度的波长(提示：用式(4.31)和(8.39))。

8.7 推导式(8.51)，并证明该式中的 $P_s$ 与由式(8.24)给出的 $P_s$ 相同。

8.8 在8.5节描述的烧孔实验中，频率为 $\omega'$ 的弱探测光束与频率为 $\omega$ 的饱和光束共线，证明凹陷的半宽度为 $\gamma + \Delta\omega_s$ 。

8.9 当探测光束与饱和光束的夹角为一小角度 $\theta$ 时，烧孔半宽度是多少？

8.10 试由式(8.57)证明，非均匀加宽线所吸收的功率不呈现无非均匀加宽时的吸收那样明显的饱和。通过烧孔解释产生这种情况的原因。

8.11 计算多普勒加宽中二能级原子系统自由感应衰减。

8.12 光学驱动的阻尼时间与入射光强度有关，而自由感应衰减的阻尼时间与入射光强度无关，试解释其原因。

8.13 式(7.12)表示入射光脉冲的振幅是时间的函数，假定入射光频率为 $\omega = \omega_0$ ，利用下式

$$\theta(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \frac{\mu_0}{h} \int_{-\infty}^{T'} \sigma(t) dt$$

试在式(7.12)的条件下求解二能级问题。

8.14 计算由式(8.71)给出的双曲正割脉冲的半最大值半宽度。

## 第九章 激光振荡理论

第六章我们利用速率方程探讨了激光的输出特性，本章将进一步讨论考虑相位因素后的激光振荡。这样，原子同激光辐射场的相互作用，不仅仅处理为感应发射的几率且可以处理为相干相互作用。激光振荡理论可以分为两大类：一是半经典理论，其特点是将光看成由麦克斯韦方程组表示的经典电磁波，而将原子在电磁场中的行为用量子力学来描述。另一类理论称为全量子理论，不仅原子是量子化的，光也是量子化的，两者都用量子力学描述。

图9.1所示是典型激光器的物理模型。由图可见，激光器并不是一个由二能级原子和光学谐振腔组成的封闭系统，而是一个与外界有作用的开放系统。它同时与冷热池都有接触，并不处于热平衡状态。这个系统的特性由光与原子之间的非线性相互作用决定，意味着必须同时考虑原子相干性和光学相干性。

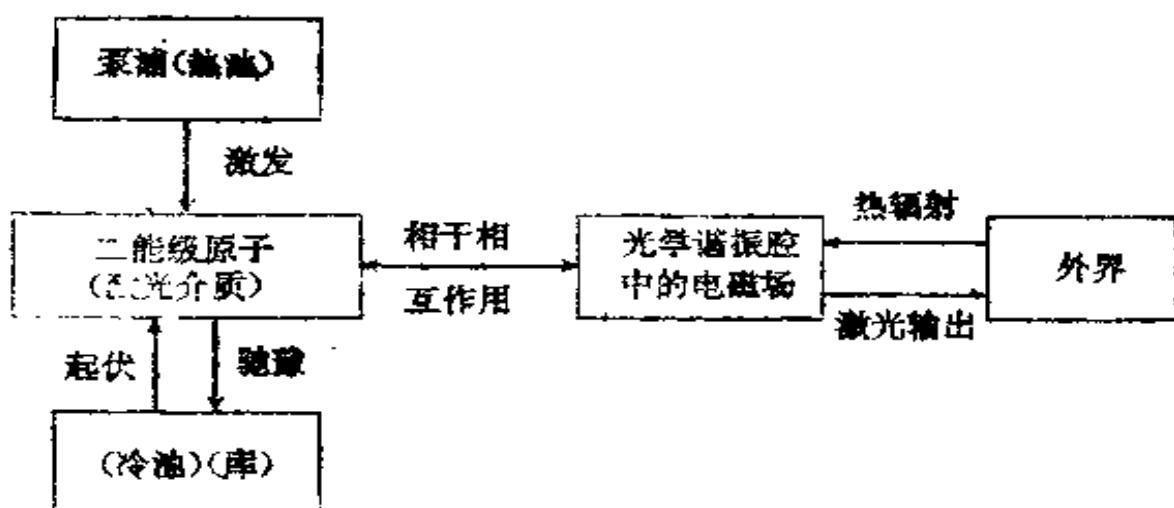


图9.1 激光器的物理模型

## §9.1 半经典理论的基本方程

激光的半经典理论实际上与本书作者和其他人在1955年提出的分子束受激辐射微波放大(Maser)理论<sup>19•11</sup>基本相同。在半经典理论中，首先假设谐振腔中每一个模式的电磁场形式，然后用量子力学计算电磁场在激光介质中感应产生的极化，接着由麦克斯韦方程组求解极化产生的电磁场，其振幅和频率应与假设的电磁场相自洽。其中用事先确定的唯象常数来描述激光介质粒子数反转的泵浦过程以及破坏这种反转的驰豫过程。

尽管在一般情况下光学谐振腔有无限多个振荡模式，激光振荡却只在有限的几个模式上产生。只在一个模式上振荡的单模激光是合乎需要的，但激光通常在几个模式上振荡，称为多模激光。

用 $\Omega_n$ 表示第n个共振模的共振频率， $U_n(\vec{r})$ 表示其模函数。我们要区分激光振荡频率 $\omega_n$ 与共振模的频率 $\Omega_n$ ，它们尽管很接近但不一定相等，光场 $E(\vec{r}, t)$ 和二能级原子组成的激光介质的极化场 $P(\vec{r}, t)$ 可以展开为

$$E(\vec{r}, t) = \sum_n \tilde{E}_n(t) U_n(\vec{r}) \exp(i\omega_n t) + c.c. \quad (9.1)$$

$$P(\vec{r}, t) = \sum_n \tilde{P}_n(t) U_n(\vec{r}) \exp(i\omega_n t) + c.c. \quad (9.2)$$

虽然光场和极化场都应该是矢量，但为了简明起见，我们只讨论介质是各向同性的情况，不必使用矢量符号，故 $\tilde{E}_n(t)$ 和 $\tilde{P}_n(t)$ 分别表示光场和极化场的振幅。与光学频率相比这些振幅随时间的变化都很慢。

如果用 $\kappa_n$ 表示第n个振荡模式振幅的阻尼系数，则光场的自由

振荡可以表达为

$$E_n(\vec{r}, t) = \tilde{E}_n U_n(\vec{r}) \exp(i\Omega_n t - \kappa_n t) + c.c. \quad (9.3)$$

其中  $\tilde{E}_n$  是常数。在  $\mu = \mu_0$  以及  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  的情况下，由麦克斯韦方程组式(3.7)推导的波动方程变成

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (9.4)$$

将  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  以及式(9.3)代入，上式可写为

$$\nabla^2 U_n(\vec{r}) + \epsilon_0 \mu_0 \Omega_n^2 U_n(\vec{r}) + 2i\epsilon_0 \mu_0 \kappa_n \Omega_n U_n(\vec{r}) = 0 \quad (9.5)$$

式中  $\kappa_n^2$  项已忽略，因为  $\kappa_n \ll \Omega_n$ 。

当有激光存在时，由于二能级原子的粒子数反转，振荡不再是自由的，故  $P_n \neq 0$ 。因此应将  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  代入式(9.4)，同时将式(9.1)、(9.2)中的  $\vec{E}$  和  $\vec{P}$  也代入，并利用模与模之间的正交关系<sup>(1)</sup>

$$\int U_n^*(\vec{r}) U_m(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{nm} V_0 \quad (9.6)$$

得到下面形式的运动方程

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(t) \nabla^2 U_n(\vec{r}) + \epsilon_0 \mu_0 \left( \omega_n^2 - 2i\omega_n \frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dt^2} \right) \tilde{E}_n(t) U_n(\vec{r}) \\ = -\mu_0 \left( \omega_n^2 - 2i\omega_n \frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dt^2} \right) \tilde{P}_n(t) U_n(\vec{r}) \end{aligned}$$

上式中，已经利用旋转波近似把跟  $\tilde{E}_n^*$  有关的接因子  $\exp(-i\omega_n t)$

(1)  $\delta_{nm}$  叫克朗内克德耳塔，它的值是当  $n \neq m$  时， $\delta_{nm} = 0$ ，当  $n = m$  时  $\delta_{nm} = 1$ 。

$V_0$  是有体积量纲的常数。

随时间变化的那一项略去了。只要  $\tilde{E}_n$  和  $\tilde{P}_n$  随时间的变化足够缓慢，还可以略去  $d^2\tilde{E}_n/dt^2$ 、 $d^2\tilde{P}_n/dt^2$  和  $d\tilde{P}_n/dt$ ，与 8.6 节的 SVEA 近似一样。将模式的特征方程式(9.5)代入上式后，得到

$$(\omega_n^2 - \Omega_n^2)\tilde{E}_n - 2i\kappa_n\Omega_n\tilde{E}_n - 2i\omega_n \frac{d\tilde{E}_n}{dt} = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0}\tilde{P}_n. \quad (9.7)$$

式中  $\tilde{E}_n$ 、 $\tilde{P}_n$  分别是  $E_n(t)$  和  $P_n(t)$  的缩写，因  $|\omega_n - \Omega_n| \ll \omega_n$ ，式(9.7)可写为

$$\frac{d\tilde{E}_n}{dt} + [\kappa_n + i(\omega_n - \Omega_n)]\tilde{E}_n = -\frac{i\omega_n}{2\epsilon_0}\tilde{P}_n. \quad (9.8)$$

这就是从麦克斯韦方程组出发得到的第  $n$  个模式的光场同极化场之间的近似关系式。

在式(9.1)给出的光场微扰下，激光介质的极化和粒子数反转可分别表示成  $N\rho_{12}\mu_{21} + c.c.$  和  $\Delta N = N\Delta\rho$ ，其中  $\rho$  是第七章讨论过的密度矩阵，将它们随时间的变化以及在谐振腔中分布的不均匀性考虑进去，它们应分别写成  $P(\vec{r}, t)$  和  $\Delta N(\vec{r}, t)$ 。

光场中二能级原子的微扰哈密顿算符矩阵元由下式给出

$$\mathcal{H}'_{12} = -\mu_{12} \sum_n (\tilde{E}_n U_n(\vec{r}) \exp(i\omega_n t) + c.c.) \quad (9.9)$$

则式(9.2)表示的极化场随时间的变化关系可由式(7.49)按上述方法导出。首先，利用式(9.9)并在推导过程中使用旋转波近似，略去频率的  $\exp(-i\omega_n t)$  分量，得到下面的方程

$$\left( \frac{d}{dt} + \gamma - i\omega_0 \right) \sum_n \tilde{P}_n U_n(\vec{r}) \exp(i\omega_n t)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} |\mu_{12}|^2 \sum_n \tilde{E}_n U_n(\vec{r}) \exp(i\omega_n t)$$

用  $U_n^*(\vec{r}) \exp(-i\omega_n t)$  乘以方程的两边，并对整个空间积分，得到

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} + i\omega_n + \gamma - i\omega_0 \right) \tilde{P}_n \\ & = -\frac{i}{\hbar} |\mu_{12}|^2 \sum_n \tilde{E}_n \int U_n^*(\vec{r}) \Delta N(\vec{r}) U_n(\vec{r}) d\vec{r} \exp(i(\omega_n - \omega_0)t) \end{aligned}$$

现在将

$$\Delta N_{nm} = \frac{1}{V_0} \int U_n^*(\vec{r}) \Delta N(\vec{r}) U_m(\vec{r}) d\vec{r} \quad (9.10)$$

作为  $\Delta N(\vec{r})$  的模展开系数，其中  $V_0$  是光学谐振腔的有效体积。尽管  $V_0$  的大小跟  $U_n(\vec{r})$  振幅的选择有关，但并不影响计算结果。利用式(9.10)， $\tilde{P}_n$  的微分方程可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{P}_n}{dt} + (\gamma + i(\omega_n - \omega_0)) \tilde{P}_n \\ & = -\frac{i}{\hbar} |\mu_{12}|^2 \sum_m \Delta N_{nm} \tilde{E}_m \exp(i(\omega_n - \omega_m)t) \quad (9.11) \end{aligned}$$

最后，可以通过  $\Delta\rho$  随时间变化的式(7.48)求得粒子数反转的展开系数  $\Delta N_{nm}$  随时间变化的方程。将式(9.2)、(9.9)代入式(7.48)，并将  $n$ 、 $m$  分别换写成  $j$ 、 $k$ ，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta N & = -\frac{\Delta N - \Delta N^{(0)}}{\tau} \\ & - \frac{2i}{\hbar} \sum_j \sum_k \{ \tilde{P}_j^* U_j^*(\vec{r}) U_k(\vec{r}) \tilde{E}_k \exp(i(\omega_k - \omega_j)t) - c.c. \} \end{aligned}$$

在方程两边乘以  $U_n^*(\vec{r})U_m(\vec{r})$  并对空间积分，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta N_{nm} &+ \frac{1}{\tau} (\Delta N_{nm} - \Delta N_{mn}^{(2)}) \\ &= \frac{2}{ih} \sum_k \sum_k A_{nm,km} (\tilde{P}_k^* \tilde{E}_k \exp(i(\omega_k - \omega_n)t) - c.c.) \end{aligned} \quad (9.12)$$

式中

$$A_{nm,km} = \frac{1}{V_0} \int U_n^*(\vec{r})U_m(\vec{r})U_k^*(\vec{r})U_k(\vec{r}) d\vec{r} \quad (9.13)$$

式(9.8)、(9.11)及(9.12)三个方程是多模激光半经典理论的基本方程。在推导式(9.8)时，略去了二阶导数，并假定  $\tilde{E}$  随时间变化缓慢。这个假定等价于推导式(9.11)使用的旋转波近似。式(9.12)也采用了类似的近似，假定  $\Delta N$  随时间变化不是很快，因而保留了随差频( $\omega_n - \omega_m$ )起伏的项，而忽略了和频( $\omega_n + \omega_m$ )项。

## §9.2 单模振荡

单模振荡可以用一台小型激光器或者一台带有选模谐振腔的激光器产生。由式(9.8)、(9.11)、(9.12)，单模振荡激光器的基本方程可写成

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} + [\kappa + i(\omega - \Omega)] \tilde{E} = - \frac{i\omega}{2\epsilon_0} \tilde{P} \quad (9.14a)$$

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} + [\gamma + i(\omega - \omega_0)] \tilde{P} = \frac{i}{h} |\mu_{11}|^2 \Delta N \tilde{E} \quad (9.14b)$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta N + \frac{1}{\tau}(\Delta N - \Delta N^{(0)})) = \frac{2A}{i\hbar} (\tilde{P}^* \tilde{E} - \tilde{P} \tilde{E}^*) \quad (9.14c)$$

因为只有一个模式，模下标已略去，且

$$A = \frac{1}{V_0} \int (U^*(\vec{r}) U(\vec{r}))^2 d\vec{r} \quad (9.15)$$

若按照式(9.6)归一化后的  $U(\vec{r})$  的极大值用  $U_{\max}$  表示，则谐振腔的模体积可定义为

$$V_{mode} = V_0 / U_{\max}^2$$

它的大小基本上等于光场强度高于平均值的那些区域的体积，虽然在式(9.6)、(9.10)、(9.15)三式中  $V_0$  的大小是任意的，为方便起见，可令  $V_0 = V_{mode}$ ，从而  $U_{\max} = 1$ 。

在多模振荡中，第  $n$  个模式的极化  $\tilde{P}_n$  不仅仅由该模式的电场  $\tilde{E}_n$  决定，这可以从式(9.11)看出。但在单模振荡中，极化却是由该模式的电场唯一决定的。从式(9.14b,c)可以看出  $\tilde{P}$  和  $\Delta N$  必须分别是  $\tilde{E}$  的奇函数或者偶函数，如果写出

$$\tilde{P} = \epsilon_0 \chi \tilde{E} \quad (9.16)$$

则非线性极化率  $\chi$  就是  $\tilde{E}$  的偶函数，用  $\chi'$  表示  $\chi$  的实部， $-\chi''$  表示虚部，并且设  $\tilde{E} = |E| \exp(i\phi)$ ，则可以从基本方程式(9.14a)的实部和虚部得到单模激光器的振幅和相位方程：

$$\left( \frac{d}{dt} + \kappa + \frac{\omega}{2} \chi'' \right) |\tilde{E}| = 0 \quad (9.17a)$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \omega - \Omega + \frac{\omega}{2} \chi' = 0 \quad (9.17b)$$

习惯上把  $\chi$  的虚部写成  $-\chi''$ ，目的是使  $\chi''$  在吸收情况下为正，在

具有粒子数反转的介质中为负。

### 9.2.1 稳态振荡

首先求解单模激光稳态振荡的频率和振幅。因为稳态时  $d\tilde{E}/dt = 0$ ,  $d\tilde{P}/dt = 0$ , 如将式(9.14a,b)两边分别相乘，并消去共同因子  $\tilde{P}\tilde{E}$ , 得到

$$\begin{aligned} & (\kappa + i(\omega - \Omega))(\gamma + i(\omega - \omega_0)) \\ &= \frac{\omega}{2\varepsilon_0 h} |\mu_{11}|^2 \Delta N_{11} \end{aligned} \quad (9.18)$$

其中考虑到稳态下的粒子数反转等于阈值(如同6.2节所述), 用  $\Delta N_{11}$  表示  $\Delta N$ 。因上方程的右端是实数, 令左端虚部为零后得到

$$(\omega - \Omega)\gamma + (\omega - \omega_0)\kappa = 0 \quad (9.19)$$

且振荡频率为

$$\omega = \frac{\Omega\gamma + \omega_0\kappa}{\gamma + \kappa} \quad (9.20)$$

这个方程与第五章由两个平面镜组成的平面波激光器得到的式(5.53)完全相同。该结果不仅适用于平面波, 而且适用于任何波面形状的共振模式, 因为光学谐振腔同光谱线一样都是具有洛伦兹形式的线型函数, 当光谱线的轮廓受非均匀展宽影响时, 激光振荡频率将随振荡强度改变, 毫无疑问, 激光频率将按照式

(9.20)随变量  $\gamma$  和  $\kappa$  改变。例如在强激发下, 介质温度的升高会导致线宽  $\gamma$  增大, 或者使非线性光学吸收中空腔损耗  $\kappa$  发生变化。

激光振荡的强度由式(9.14c)和(9.18)的实部决定。式(9.18)的实部可写成

$$\kappa\gamma - (\omega - \Omega)(\omega - \omega_0) = \frac{\epsilon_0}{2\epsilon_0 h} |\mu_{12}|^2 \Delta N_{11}$$

用式(9.19)消去 $(\omega - \Omega)$ , 得到稳态振荡下的粒子数反转, 即粒子数反转的阈值

$$\Delta N_{11} = \frac{2\epsilon_0 h \kappa}{\omega |\mu_{12}|^2} \gamma [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2] \quad (9.21)$$

当光谱线轮廓是由式(4.43)表示的洛伦兹型时, 由式(4.36)可将式(4.39)写成

$$B(\omega) = Bg(\omega) = \frac{|\mu_{12}|^2}{\epsilon_0 h^2} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (9.22)$$

则式(9.21)等同于从速率方程组导出的式(6.6)。

因为式(9.14a)在稳态时可写为

$$\tilde{P} = -\frac{2\epsilon_0}{i\omega} (\kappa + i(\omega - \Omega)) \tilde{E}$$

故经过计算后式(9.14c)的右边成为

$$\tilde{P}^* \tilde{E} - \tilde{P} \tilde{E}^* = \frac{4\epsilon_0 \kappa}{i\omega} |\tilde{E}|^2$$

从而由式(9.14c)得

$$\Delta N^{(0)} - \Delta N_{11} = \frac{8\epsilon_0 A \kappa \tau}{h \omega} |\tilde{E}|^2$$

因此得到

$$|\tilde{E}|^2 = \frac{\hbar \omega}{8\epsilon_0 A \kappa \tau} (\Delta N^{(0)} - \Delta N_{11}) \quad (9.23)$$

或  $|\tilde{E}|^2 = \frac{1}{4\epsilon_0 A B(\omega) \tau} \left( \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta N_{11}} - 1 \right) \quad (9.24)$

如果模体积 $V_0$ 内的光场强度是常量，因为 $|U(\vec{r})| = 1$ ，在该体积内则有 $A = 1$ 。然后可以利用式(9.1)计算激光辐射的能量密度 $W$ ，在单模激光下，其结果为

$$\begin{aligned} W &= \epsilon_0 |\tilde{E}(\vec{r}, t)|^2 / 2 + \mu_0 |\tilde{H}(\vec{r}, t)|^2 / 2 \\ &= 2\epsilon_0 |\tilde{E}|^2 \end{aligned} \quad (9.25)$$

故当 $A = 1$ 及 $|U(\vec{r})|^2 = 1$ ，式(9.25)就等效于从速率方程得到的式(6.11a)。

### 9.2.2 范德玻尔(Van der Pol)方程

1934年范德玻尔<sup>[8+3]</sup>在研究真空管振荡器的理论特性时建立了个非线性振动方程，称为范德玻尔方程，它的形式为

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a - bx^2) \frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = 0 \quad (9.26)$$

式中 $x$ 是振幅， $\Omega$ 是振荡固有频率， $a$ 、 $b$ 通常为正的参数。此方程不仅描述电路中的振荡，而且也可以描述力学、生态等系统的自激振荡。如果在其右边加上一个外界扰动项，它还可以描述受迫振荡。下面将说明如何利用从旋转波近似和SVEA(8.6节)得到的关于复振幅的一阶微分方程。

我们将利用基本方程(9.14)研究非稳态情况下激光振荡随时间的变化，为简明起见，假定在光谱线的中心频率上产生激光振荡，设 $\Omega = \omega = \omega_0$ 并将式(9.14a)及其对 $t$ 的导数代入式(9.14b)以消去 $\tilde{P}$ ，得到

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dt^2} + (\kappa + \gamma) \frac{d\tilde{E}}{dt} + \kappa\gamma\tilde{E} = \frac{\omega_0^2}{2\epsilon_0\hbar} |\mu_{12}|^2 \Delta N \tilde{E} \quad (9.27a)$$

然后，利用式(9.14a)消去式(9.14c)右边的 $\tilde{P}$ 后得到

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta N}{dt} + \frac{1}{\tau}(\Delta N - \Delta N^{(0)}) \\ = -\frac{4\epsilon_0 A}{\hbar\omega} \left( \frac{d}{dt}|\tilde{E}|^2 + 2\kappa|\tilde{E}|^2 \right) \quad (9.27b)\end{aligned}$$

现在，只要象在SVEA中那样设

$$\left| \frac{d\tilde{E}}{dt} \right| \ll \gamma |\tilde{E}|, \quad \left| \frac{d\tilde{E}}{dt} \right|^2 \ll \kappa |\tilde{E}|^2 \quad (9.28)$$

就可以略去式(9.27a)中的 $d^2\tilde{E}/dt^2$ 以及式(9.27b)中的 $d|\tilde{E}|^2/dt$ ，则式(9.27a、b)分别变为

$$(\kappa + \gamma) \frac{d\tilde{E}}{dt} + \kappa\gamma\tilde{E} = \frac{\omega}{2\epsilon_0\hbar} |\mu_{11}|^2 \Delta N \tilde{E}$$

$$\text{和} \quad \tau \frac{d\Delta N}{dt} + \Delta N = \Delta N^{(0)} - \frac{8\epsilon_0 A \kappa \tau}{\hbar\omega} |\tilde{E}|^2$$

从上面方程中消去 $\Delta N$ ，则有

$$\begin{aligned}(\tau \frac{d}{dt} + 1) \left[ \frac{(\kappa + \gamma)}{\tilde{E}} \frac{d\tilde{E}}{dt} + \kappa\gamma \right] \\ = \frac{\omega}{2\epsilon_0\hbar} |\mu_{11}|^2 \left( \Delta N^{(0)} - \frac{8\epsilon_0 A \kappa \tau}{\hbar\omega} |\tilde{E}|^2 \right)\end{aligned}$$

在式(9.28)成立的情况下，略去 $d^2\tilde{E}/dt^2$ 和 $(d\tilde{E}/dt)^2$ ，并将 $\omega = \omega_0$ 时的结果代入式(9.21)，上式成为

$$(\kappa + \gamma) \frac{d\tilde{E}}{dt} - \kappa\gamma \left( \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta N_{11}} - 1 \right) \tilde{E}$$

$$+ \frac{4A\kappa\tau}{\hbar^2} |\mu_{1,2}|^2 |\tilde{E}|^2 \tilde{E} = 0 \quad (9.29)$$

它可以写成下面的形式

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} + (L - G + S|\tilde{E}|^2)\tilde{E} = 0 \quad (9.30)$$

式中

$$L = \frac{\kappa\gamma}{\kappa + \gamma}, \quad G = \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta_{1,2}} L,$$

$$S = \frac{4A\kappa\tau}{\hbar^2(\kappa + \gamma)} |\mu_{1,2}|^2 \quad (9.31)$$

方程(9.30)是范德玻尔方程在激光理论上的应用，系数 $L$ 是阻尼常数， $G$ 是单位时间内的放大系数， $S$ 是饱和系数。

当 $G > L$ 时，只要 $|\tilde{E}|^2$ 足够小，式(9.30)的解 $|\tilde{E}| \propto \exp((G-L)t)$ ，随着时间而增大；当 $|\tilde{E}|^2$ 增大时，其解逐渐接近常数值 $(G-L)/S$ 。在 $\omega = \omega_0$ 的情况下， $(G-L)/S$ 的大小与式(9.23)或(9.24)一致。如果在方程(9.30)的右边加上表示入射光或噪声产生的微扰项，则可以表示外界光注入时激光的动力学特性或者考虑噪声时的激光特性。当入射光是相干的，即它的光场可以表示成

$$\tilde{E}_i \exp(i\omega_i t) + c.c.$$

时，式(9.30)被修正为

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} + (L - G + S|\tilde{E}|^2)\tilde{E} = \kappa_i \tilde{E}_i \exp(i(\omega_i - \omega)t) \quad (9.32)$$

因为式(9.30)是复振幅按照 $\exp(i\omega t)$ 变化的微分方程，所以微扰项按照频率的差值 $\omega_1 - \omega$ 变化。这里 $\epsilon_1$ 是入射光时间速率的一个系数。从式(9.32)出发，可以讨论例如锁频问题，或者当激光频率 $\omega$ 接近激光跃迁频率 $\omega_0$ 时激光与入射光的同步问题，以及当入射光频率渐变时引起的振荡振幅的有关变化。

### §9.3 多模振荡

前面已指出，多模激光半经典理论的基本方程是式(9.8)、(9.11)和(9.12)。利用这三个联立方程可以研究多模激光的各种问题。首先，我们讨论两个基本问题：一是两个振荡模式之间的模式竞争，另一个是当激光同时在三个模式上振荡时产生的组合频率。锁模将在以后的章节中讨论。

#### 9.3.1 两个振荡模之间的竞争

当激光在两个模式上振荡时，其电场可以表达为

$$E(\vec{r}, t) = \tilde{E}_1(t) U_1(\vec{r}) \exp(i\omega_1 t) + \tilde{E}_2(t) U_2(\vec{r}) \exp(i\omega_2 t) + \text{c.c.} \quad (9.33)$$

关于 $\tilde{E}_1(t)$ 和 $\tilde{E}_2(t)$ 的微分方程可以通过以下方式得到：直接在每个模式的范德玻尔方程上加一个表达两个模式之间相互影响的交叉项；对9.1节的基本方程作关于二模振荡的近似也可以得到类似的方程<sup>[9.3, 9.4]</sup>。

一般来说，对两个不同的振荡模式，谐振腔的阻尼系数 $L$ 以及激光的放大系数 $G$ 是不同的，用下标1和2来区分它们。与单模

振荡的情形类似，用 $S_1$ 和 $S_2$ 表示自饱和系数。在两模振荡中还须考虑交叉饱和效应。交叉饱和就是当模式2的振荡强度增大时模式1的振荡强度减小，反之亦然。此种交叉饱和效应可以分别在振荡振幅 $\tilde{E}_1$ 和 $\tilde{E}_2$ 的范德波尔方程中加上附加项来表示

$$\frac{d\tilde{E}_1}{dt} + (L_1 - G_1)\tilde{E}_1 + S_1 |\tilde{E}_1|^2 \tilde{E}_1 + C_{12} |\tilde{E}_2|^2 \tilde{E}_1 = 0 \quad (9.34a)$$

$$\frac{d\tilde{E}_2}{dt} + (L_2 - G_2)\tilde{E}_2 + S_2 |\tilde{E}_2|^2 \tilde{E}_2 + C_{21} |\tilde{E}_1|^2 \tilde{E}_2 = 0 \quad (9.34b)$$

式中 $C_{12}$ 和 $C_{21}$ 是交叉饱和系数，系数 $L$ 、 $G$ 、 $S$ 和 $C$ 与谐振腔的模式、激光介质的性质和它在谐振腔内的位置、工作条件以及激发强度有关。

在某些情形下交叉饱和效应比自饱和效应弱，但在另一些情形下它却比自饱和效应强。下面将说明，这两种情况下的振荡性质是很不相同的。 $C_{12}C_{21} < S_1S_2$ 的情形称为弱耦合， $C_{12}C_{21} > S_1S_2$ 的情形称为强耦合。

两个模式的振荡强度 $I_1$ 和 $I_2$ 分别正比于 $|\tilde{E}_1|^2$ 和 $|\tilde{E}_2|^2$ 。这样，用 $\tilde{E}_1^*$ 乘以式(9.34a)，得到

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dI_1}{dt} = (G_1 - L_1)I_1 - S_1 I_1^2 - C_{12} I_1 I_2 \quad (9.35a)$$

类似地，从式(9.34b)得到

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dI_2}{dt} = (G_2 - L_2)I_2 - S_2 I_2^2 - C_{21} I_1 I_2 \quad (9.35b)$$

稳态时因为光强对时间的导数 $\dot{I}_1 = 0$ ， $\dot{I}_2 = 0$ ，故有

$$I_1 = 0 \quad \text{或} \quad S_1 I_1 + C_{12} I_2 = G_1 - L_1 \quad (9.36a)$$

$$I_2 = 0 \quad \text{或} \quad C_{21} I_1 + S_2 I_2 = G_2 - L_2 \quad (9.36b)$$

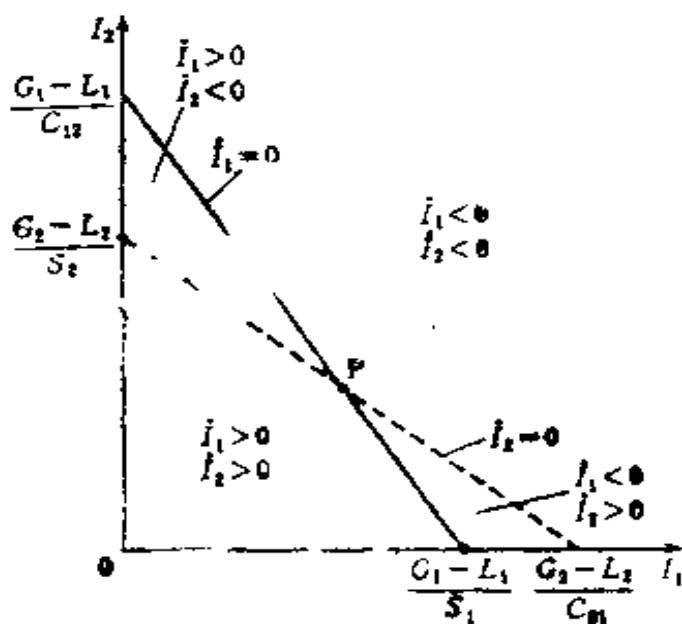


图9.2 两模振荡的光强 $I_1$ 和 $I_2$

在图9.2中以 $I_1$ 为横轴,  $I_2$ 为纵轴, 式(9.36a)由 $I_2$ 轴和实斜线表示, 式(9.36b)由 $I_1$ 轴和虚斜线表示。从式(9.35a)可以看出, 在实斜线上 $I_1 = 0$ , 在实线的右上方 $I_1 < 0$ , 左下方 $I_1 > 0$ 。 $I_2$ 的变化情况跟 $I_1$ 相似, 只是用虚斜线表示。 $I_1$ 和 $I_2$ 在由这两条斜线划分出来的四个区域里的时间变化情况都表示在图9.2中。我们发现同时满足稳态条件式(9.36a)和式(9.36b)的状态是图9.2中的三个黑点, 其中稳定点是P点。应该指出, 这在弱耦合情况下是成立的。当 $C_{12} < S_1$ 时, 实斜线在 $I_2$ 轴上的截距比在 $I_1$ 轴上的大, 虚斜线正相反。图9.2所示是 $G_1$ 和 $G_2$ 差别不大的情况。如果它们的差别比较大, 实斜线同虚斜线在 $I_1 > 0, I_2 > 0$ 的区域没有任何交点, 激光振荡将在增益 $G$ 较高的模式上产生<sup>(2)</sup>。

(2) 严格说来, 振荡模式不仅仅由 $G$ 决定, 而是由 $(G-L)/S$ 的大小决定。

强耦合的情况留在以后来讨论，现在进一步讨论图9.2中的弱耦合情况。图9.3所示是不同初值条件下 $I_1$ 和 $I_2$ 两模式强度变化的数值计算结果，每条曲线上的箭头指示随时间变化的方向，当这些曲线跨过相应于式(9.36a)的 $\dot{I}_1 = 0$ 的斜线时是垂直的，跨过相应于式(9.36b)的 $\dot{I}_2 = 0$ 的斜线时是水平的。即使不作任何数值计算，我们也能画出与图9.3类似的弱耦合情况下两模运转时 $I_1$ 和 $I_2$ 的变化曲线。图9.3中的箭头方向表明两模振荡在图9.2中的P点是稳定的。

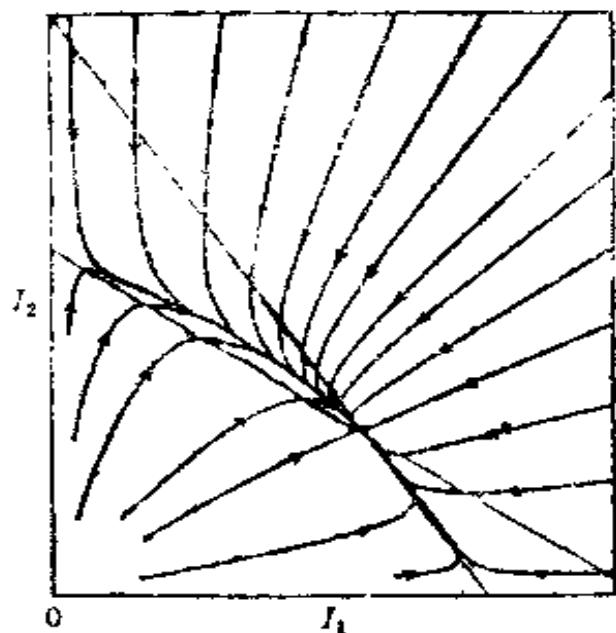


图9.3 弱耦合情况下，光强 $I_1$ 和 $I_2$ 的瞬态行为

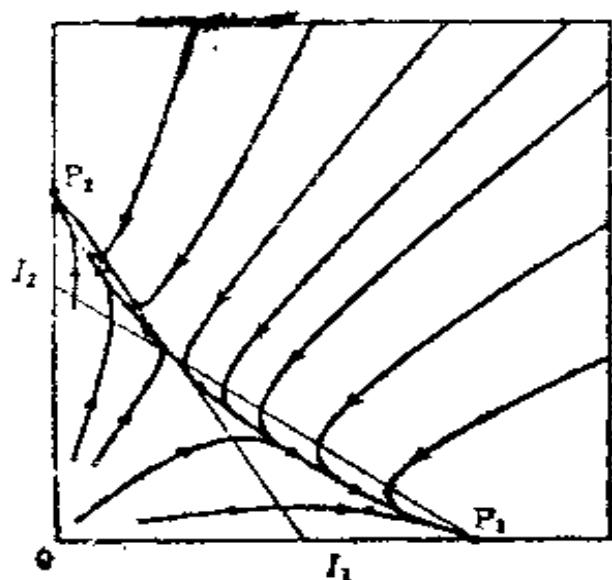


图9.4 强耦合情况下，光强 $I_1$ 和 $I_2$ 的瞬态行为

在强耦合情形，当 $C_{12}C_{21} > S_1S_2$ ，与图9.2相比较，虚线将比实线还陡，因此图9.2中三角形区域内 $I_1$ 和 $I_2$ 的符号正好与弱耦合情况相反。对强耦合而言，相应于式(9.36a)和式(9.36b)的两斜线的交点是非稳定的，而分别与 $I_1 = 0$ 和 $I_2 = 0$ 的交点 $P_1$ 和 $P_2$ 是

稳定的，这可以参阅图9.4的有关内容。

不同初始值下 $I_1$ 和 $I_2$ 在强耦合情况下的数值计算结果。

这样，在强耦合情形只有一个模式能够起振，而另一个模式被抑制。因此，稳态时激光并不能同时在两个模式上振荡，只能在其中的一个模式上振荡。在图9.4中的稳定点 $P_1$ ，模式1振荡，在 $P_2$ 点模式2振荡，双稳定态中究竟出现哪一个稳态，取决于初始条件，正如图9.4曲线表现出来的那样。例如，当激光腔的频率逐渐提高和降低时，每个模式的振荡强度都出现了滞后现象，见图9.5。这种现象可以用图9.4来解释。当频率 $\omega$ 改变时，两条斜线随之移动，与增益曲线 $G(\omega)$ 保持一致，其它系数如 $L$ 、 $S$ 和 $C$ 都保持不变。从两模振荡到单模振荡的跃变在两条斜线的交点到达 $I_1$ 轴或 $I_2$ 轴的时候发生。

两个模式的振荡频率和极化是相互影响的，两个振荡频率之差一般要比模式间隔大(称为模排斥)，并且它们的光学极化倾向于线偏振并相互垂直，这里不讨论这些细节。

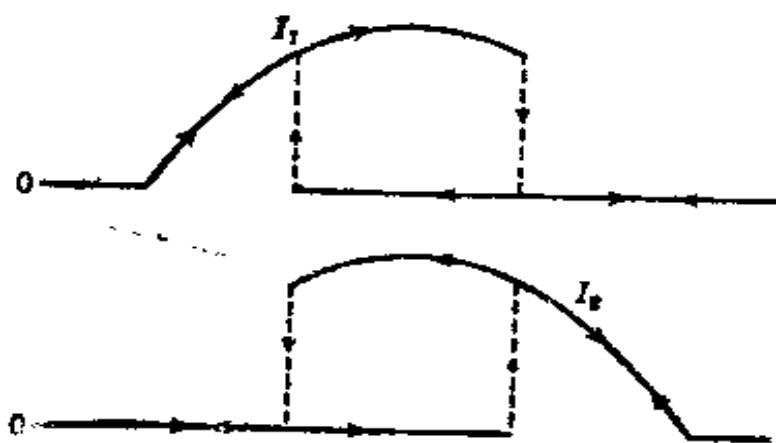


图9.5 在强耦合情况下两模振荡的滞后

### 9.3.2 组合频率

作为多模工作的一个例子，我们将要讨论在由小到大增加的

频率 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 和 $\omega_3$ 上三个模式的振荡。一般情况下振荡模式之间的频率间隔不完全相等，故假定 $\omega_3 - \omega_2 < \omega_2 - \omega_1$ ，见图9.6。电场 $E(\vec{r}, t)$ 和介质极化场 $P(\vec{r}, t)$ 都含有 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 和 $\omega_3$ 的频率分量。

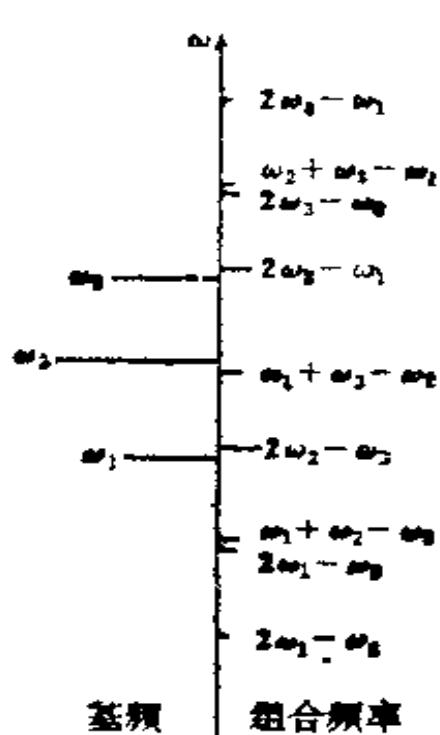


图9.6 三模振荡中基频 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 和 $\omega_3$ 形成的组合频率

据很多模激光的基本方程之一式(9.12)，粒子数反转 $\Delta N$ 的时间变化具有因子 $\exp(i(\omega_k - \omega_j)t)$ 。因此 $\Delta N$ 以频率 $\omega_k - \omega_j$ 起伏变化，称为粒子数反转的脉动。在三模工作情况下 $\Delta N$ 的脉动频率是 $\omega_3 - \omega_2$ 和 $\omega_2 - \omega_1$ 。既然式(9.11)右端描写极化随时间变化的量 $\Delta N_{\text{ext}} \tilde{E}$ 在频率 $(\omega_k - \omega_j) + \omega_{\text{ext}}$ 上起伏，故感应极化强度将在相同的频率上起伏。按照式(9.8)，将产生具有相同频率分量的电场。

一般来说，多模工作情形，模式下标 $k$ 、 $j$ 、 $m$ 可以取任何值，如1、2、3……。现在，如果频率 $\omega_k - \omega_j + \omega_m$ 不等于 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ 、……，则称为组合频率，原来的那些频率 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ 、……称为基频。有时分别称它们为组合调和基调。

在三模振荡下，设 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ ，共有九个组合频率，按增加的顺序，它们是 $2\omega_1 - \omega_3$ ， $2\omega_1 - \omega_2$ ， $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ ，……，参见图9.6。初始我们只考虑了三模振荡，现在必须考虑每个组合频率感应极化产生的、总共九个组合频率上的多模振荡。类似地，在二模振荡中，频率为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的电场给出了一个频率为 $\omega_2 - \omega_1$ 的粒子数脉动，从而产生组合频率为 $2\omega_1 - \omega_2$ 、 $2\omega_2 - \omega_1$ 的电场。

事实上，这并不是全部。当在两个基频振荡上附加组合频率 $2\omega_1 - \omega_2$ 的电场时，将在 $2\omega_1 - 2\omega_2$ 上产生另外-一个粒子数反转的脉动分量，在 $3\omega_1 - 2\omega_2$ 、 $3\omega_2 - 2\omega_1$ 上产生新的极化和电场分量。不难想象，将有一系列无穷多个具有相等间隔 $\omega_2 - \omega_1$ 的组合频率随之产生。对于最初的三模振荡，实际上还会出现无穷多个复杂的高阶组合频率。我们所说的二模或三模振荡，是在实际存在的无穷多个振荡模式中，只有二个或三个模式振荡的振幅比其它模式的振幅大得多。

换句话说，对单模振荡存在一个满足基本方程式(9.8)、(9.11)、(9.12)的唯一解，但不存在有限个模式(例如二个或三个)的多模振荡解。因此，除了单模振荡外，我们必须用无限多个模式的相干光场来处理多模振荡。在组合频率上振荡的电场分量自身不满足阈值条件，可以不把它作为振荡看待。必须注意的是，在多模运转情形下任何一个模式的振荡条件不能单独决定。考虑两模振荡，无论弱耦合还是强耦合，假设图9.3或9.4中的两条特征斜线不在第一象限相交，那么从一个简单的推理就可以断言这两个模式都在阈值之上。实际上在稳态下，当一个单模振荡建立起来，另一个模式被抑制时，两个模式无论在哪一种情况下都在阈值之上。另外，在允许两模同时振荡的弱耦合情形，无限多个弱振荡模附加在两个基模上，可以考虑为参量振荡效应。

## §9.4 锁 模

多模激光振荡中相邻模式的频率间隔一般不相等。这是由于激光介质的非线性色散效应使振荡频率与法布里-珀罗腔纵模的固有频率稍微不同，而这些固有频率的间隔是相等的。所以当

探测多模激光器的输出时，许多频率相差很小的拍频信号也被观察到。如果把一个非线性光学元件放进激光振荡器里，或者插进一个调制器，以一个频率接近于拍频的外加射频电压调制损耗或折射率，就可以使模式频率之差相等，这种方法称为锁模。当锁模是通过外部施加射频电压实现时，称为强制锁模。在没有任何外加信号的情况下实现的锁模称为被动锁模，因为激光介质本身是光学非线性介质，有时甚至可以不要任何附加的非线性光学元件，只要泵浦条件和諧振腔得到适当调节就能实现锁模，这称为自锁模。

自锁模的发生是由于基频与组合频率上的模牵引效应。从图9.6给出的三模振荡的频谱图可以看出， $\omega_1$ 和 $2\omega_2 - \omega_3$ ， $\omega_2$ 和 $\omega_1 + \omega_3 - \omega_2$ ，以及 $\omega_3$ 和 $2\omega_1 - \omega_1$ ，这几对频率相互非常接近，因此当这些组合频率分别向 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 和 $\omega_3$ 接近到一定程度时，频率牵引效应发生，使得 $\omega_1 = 2\omega_2 - \omega_3$ ， $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 - \omega_2$ 和 $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_1$ ，由于以上条件都等效于 $\omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1$ ，理论上包括组合频率在内的相邻模式之间的拍频统一达到一致。但是当多于三个的模式振荡时，它们并不总是同时锁模的。

除了组合频率锁模是利用一个非线性光学元件来产生以外，被动锁模跟自锁模相似。专业术语在这里通常是混乱的，组合频率的强度不仅与调制器的非线性光学系数有关，而且在相当大的程度上与它在腔中的位置有关，其中的道理留给读者去思考。

强制锁模的方法有两种，一是振幅调制，二是用调制器对激光腔进行频率调制。当第n个模式的激光场 $E_n \cos \omega_n t$ 受到调制度为M、频率为 $\omega_{m,d}$ 的振幅调制时，它成为

$$E_0(1+M\cos\omega_{m,d}t)\cos\omega_0t = \frac{M}{2} E_0 \cos(\omega_0 - \omega_{m,d})t + E_0 \cos\omega_0t + \frac{M}{2} E_0 \cos(\omega_0 + \omega_{m,d})t \quad (9.37)$$

可以看出产生了频率为 $\omega_0 - \omega_{m,d}$ 和 $\omega_0 + \omega_{m,d}$ 的边带。当相邻的第 $n-1$ 和第 $n+1$ 模式被这些边带所牵引时，锁模的两个边带的相位相等，这一点可以从式(9.37)看出。当用大小接近于模式频率间隔的调制频率 $\omega_{m,d}$ 锁定模式时，相邻模式的相位也逐渐接近相等。

因此，锁模激光器的输出功率具有周期为 $2\pi/\omega_{m,d}$ 的系列脉冲的形式。为了简化计算，假定有 $2N+1$ 个模式锁定，所有的模式都具有相同的振幅和相位，激光振荡的振幅可以表示成

$$E(t) = \sum_{n=-N}^N E_0 \cos(\omega_0 + n\omega_{m,d})t \quad (9.38)$$

经过计算可以写成

$$E(t) = E_0 \frac{\sin((N+1/2)\omega_{m,d}t)}{\sin(\omega_{m,d}t/2)} \cdot \cos\omega_0t$$

因此激光功率随时间的变化为

$$I(t) = E_0^2 \frac{\sin^2((N+1/2)\omega_{m,d}t)}{\sin^2(\omega_{m,d}t/2)} \quad (9.39)$$

方程式(9.39)有一个最大值等于 $(2N+1)^2 E_0^2$ ，脉冲宽度大致为 $T/(2N+1)$ ，峰值出现在 $t=0$ 处，并以周期 $T=2\pi/\omega_{m,d}$ 重复。图9.7示出了 $N=4$ 时光强的波形。

在一个实际的锁模激光器中模式的振幅并不相等，通常振幅在中心最大，沿着两边逐渐变小。由于被锁模式之间的相位通常有微小的差别，所以脉冲的形状是两翼较大，并且比式

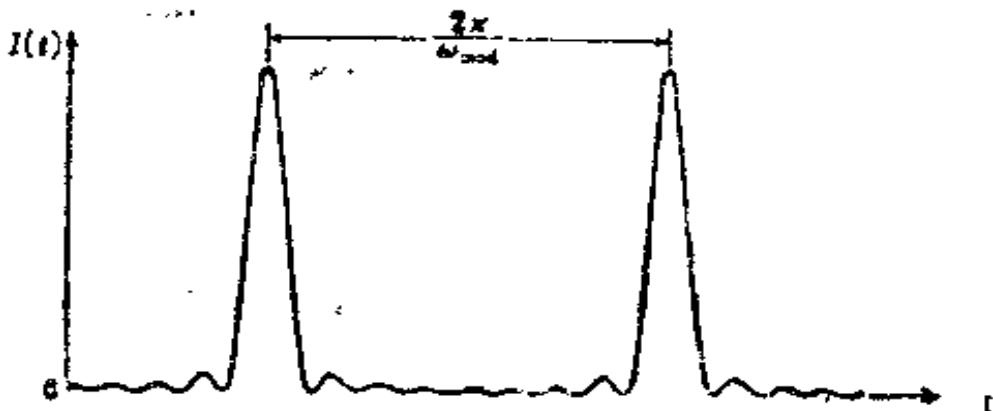


图9.7  $N = 4$  长度模输出的波形

(9.39)给出的宽度稍宽。其它特征都差不多，脉冲宽度的一级近似可由多模振荡的模频率的频谱宽度 $\Delta f$ 的倒数给出。

当激光器由频率调制法锁模时，在调制频率接近于模式频率间隔时产生一个类似于振幅调制的效应，形成一列脉冲。但是当调制频率不同于相邻模式频率间隔时，可能产生另外一种类型的锁模，即激光输出的振幅虽没有显著的变化，但其相位却由频率 $\omega_{m,4}$ 调制，称为FM锁模。其分析可参见文献(9.3)、(9.4)或原始论文(9.5)。

锁模激光输出脉冲的周期为 $T = 2\pi/\omega_{m,4}$ 的原因是有单脉冲在激光谐振腔中传播。在法布里-珀罗腔中光在两面反射镜间往返一次(参见图9.8(a))所用的时间就等于 $T$ 。在图9.8(b)所示的环形谐振腔中，光在三面或四面反射镜之间环绕，谐振的频率条件应使在整个环绕回路的光程长度 $L$ 上产生的相移是 $2\pi$ 的整数倍，因而纵模的共振频率 $\nu$ 由下式给出

$$L = n\lambda = nc/\nu, \quad \text{或} \quad \nu = nc/L \quad (9.40)$$

式中 $n$ 为整数，模的频率间隔是 $c/L$ ，周期是 $T = L/c$ 。

具有环形谐振腔的激光器称为环形激光器。如果在环形激光器中放入一个调制器，如图9.8(b)所示，模式锁定将在 $2\pi/\omega_{m,4}$

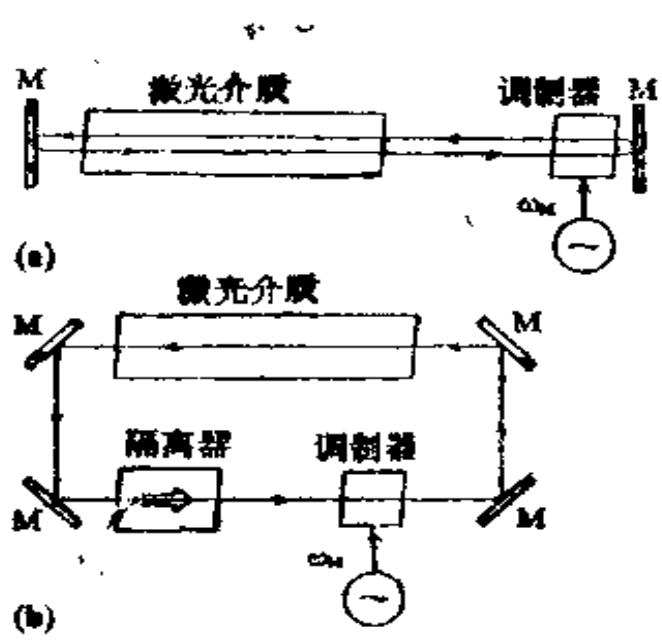


图9.8 锁模激光器  
(a)法布里-珀罗激光器, (b)环形激光器

接近于  $L/c$  时发生,而且将在  $T = 2\pi/\omega_{mz}$  的间隔上获得脉冲输出。在法布里-珀罗激光器中光脉冲来回地穿过激光介质和调制器。在环形激光器中,我们可以利用一个光学隔离器让光只从一个方向穿过介质,激光与原子的相互作用在腔中的每一处都是等同的。这样对环形激光器详尽的理论分析可以简化,同时实验也取得了令人满意的结果。

环形激光器的锁模机制可以这样来解释:如果环形激光器中调制器的吸收随周期  $T$  起伏,那么在强吸收时通过调制器的光在腔内往返一周后将再次被调制器强烈吸收,光强因而连续减弱。相反,在弱吸收时通过调制器的光从激光介质得到有效地放大,因为每一个周期的损耗都很小,光能量最终只在具有有效放大的相位上积累,形成强光脉冲在环形腔中传播。由于一部分光能量透过反射镜输出腔外,因此锁模激光的输出由一系列周期为  $T$  的脉冲组成。

利用非线性吸收介质的被动锁模机制也可以解释激光的时间

性。这时图9.8中的调制器被非线性吸收介质代替。激光的光强不可能完全是一个常量，总有些小的起伏。当光强高于平均值时，非线性吸收介质更加饱和，使吸收系数减小。因此在谐振腔中传播时光强起伏较强的部分将会越来越强，其余部分则越来越弱。在稳态情况下，高强度的光在环绕传播时最终聚集到一个位相上（有时两个位相上），从而实现锁模。这种锁模激光器的脉冲宽度不仅依赖于激光介质的增益带宽，而且取决于它的色散性质和非线性吸收介质的光谱特性和驰豫特征。

当激光介质的驰豫时间比较短时（比 $2\pi/\omega_{nsz}$ 短些），强制锁模可以通过在频率 $\omega_{nsz}$ 上调制粒子数反转获得，而不需要调制器。这种方法称为同步泵浦或增益调制。由于在谐振腔中没有附加元件，并且由于驰豫时间短，激光介质的带宽很大，因此这种方法在获得超窄锁模光脉冲方面是很有用的。一个同步泵浦的染料激光器能够以极高的重复频率稳定地产生纳秒脉冲（脉冲宽度低于 $10^{-12}$ s）。

## §9.5 气体激光器理论

8.4节中我们描述了气体原子或分子的无规则运动导致的光谱线非均匀多普勒加宽。下面考虑一个在法布里-珀罗腔中由二能级分子组成的具有粒子数反转的气体介质激光器。即使激光器只在一个模式上振荡，由于多普勒效应，气体激光器的每个分子都受到两个不同频率的电场作用，因此对气体激光器的理论描述要比静止原子的普通激光器复杂，它具有兰姆凹陷的特征，这是其它很多激光器没有的。

兰姆在1962年和1963年用三阶微扰理论全面地研究了气体激光器的半经典理论<sup>[8•8]</sup>。1968年它被扩展，包括了碰撞效应<sup>[8•7]</sup>。1969年又把强振幅的振荡也包括了进去<sup>[8•8~8•10]</sup>。并且，

磁场作用下气体激光器的多模运转理论(塞曼激光器)和环形激光器理论也已发展成熟。在这里只讨论单模气体激光器的基本特性。

### 9.5.1 驻波场中气体分子的密度矩阵

考虑一个处于两平行平面反射镜之间的平面单模驻波场，其 $z$ 轴垂直于反射镜平面，驻波由两个分别沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的平面波组成，其实部振幅 $E$ 可表示为

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E \cos(\omega t + \varphi - kz) + E \cos(\omega t + \varphi + kz) \\ &= 2E \cos(\omega t + \varphi) \cos kz \end{aligned} \quad (9.41)$$

正如在3.4节中讨论过的那样， $k = \omega/c$ 也等于 $n\pi/L$ ( $n$ 是整数， $L$ 是两反射镜之间的距离)。为了把方程写成简便的对称形式，将坐标原点 $z = 0$ 取在驻波的波峰上。

当 $t = 0$ 时位于 $z = z_0$ 点上的一个运动分子，在碰撞发生以前 $t$ 时刻的位置为

$$z = z_0 + vt$$

式中 $v$ 是分子运动速度在 $z$ 方向的分量，将此表达式代入式(9.41)，作用于运动分子上的电场可以写为

$$\begin{aligned} E^{(•)} &= E \cos((\omega - kv)t + \varphi - kz_0) \\ &\quad + E \cos((\omega + kv)t + \varphi + kz_0) \end{aligned} \quad (9.42)$$

该电场有 $\omega - kv$ 和 $\omega + kv$ 两个频率分量，从而在气体激光器中产生频率为 $2kv$ 的粒子数脉动。

我们必须用密度矩阵来计算由这种运动分子组成的气体的极化。假定有一个比二能级模型还能更好地代表气体激光器的实际分子模型，它不仅仅考虑除两个激光能级以外的所有其它的激发态，而且还考虑作为热库的能级系统的基态。我们进一步假定下能级1和上能级2到热库的驰豫与分子占有数目的多少无

关，并分别用两个驰豫常数 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 表示<sup>8</sup>。与第七章所讨论的二能级原子系统不同的是，在这种情况下，在上下能级上粒子数的和 $N_1 + N_2$ 或 $\rho_{11} + \rho_{22}$ 不是一个常数，而是随时间变化的。

由式(7.39)表示的密度矩阵的运动方程必须加以修正，使其包括驰豫项。假设电偶极矩算符 $\mu$ 在式(9.41)中的微扰哈密顿算符 $\mathcal{H}'$ 由下式给出

$$\mathcal{H}' = -\mu E(z, t) \quad (9.43)$$

为了表达空间变化电场(式(9.41))中运动分子的密度矩阵对时间的导数 $d\rho/dt$ ，应该有

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}$$

此式类似于流体动力学中欧勒(Euler)方程对时间的导数。频率为 $\omega_0$ 的二能级密度矩阵元的微分方程可以写成

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{11} + \gamma_1 (\rho_{11} - \rho_{11}^{(0)}) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}'_{11} \rho_{12} + c.c. \end{aligned} \quad (9.44a)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{22} + \gamma_2 (\rho_{22} - \rho_{22}^{(0)}) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}'_{22} \rho_{12} + c.c. \end{aligned} \quad (9.44b)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} - i\omega_0 \right) \rho_{12} + \gamma \rho_{12} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}'_{12} (\rho_{22} - \rho_{11}) \end{aligned} \quad (9.44c)$$

(8) 在8.2节中，我们使用速率方程近似讨论了这种准二能级原子的弛豫和吸收。

式中 $\gamma$ 是横向驰豫常数。如果发生位相改变的分子碰撞可以忽略的话，则 $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ ，但实际上并不是这样，通常 $\gamma > (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ 。物理量 $\rho_{11}^{(0)}$ 和 $\rho_{22}^{(0)}$ 是在没有光场微扰的情况下 $\rho_{11}$ 和 $\rho_{22}$ 的稳态值，这时粒子数反转为

$$\Delta\rho^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)} > 0 \quad (9.45)$$

既然分子有一个速度分布，我们首先计算一群速度分量在 $v$ 和 $v + dv$ 之间的分子的密度矩阵，然后对全体分子的速度分布积分，求得气体的极化和粒子数反转。在一个随分子运动( $z = z_0 + vt$ )的参照系中，分子是静止的，故密度矩阵的运动方程(9.44)就象在静止参照系中一样，可简化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1\right)(\rho_{11} - \rho_{22}^{(0)}) = iV^* \rho_{12} + c.c. \quad (9.46a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2\right)(\rho_{22} - \rho_{11}^{(0)}) = -iV^* \rho_{12} + c.c. \quad (9.46b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma - i\omega_0\right)\rho_{12} = -iV(\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (9.46c)$$

$iV$ 是在运动参照系中受到的微扰，并由下式给出

$$iV = -\mu_{12} E^{(r)}$$

作用在分子上的电场 $E^{(r)}$ 是式(9.42)，若令

$$x = \frac{\mu_{12} E}{\hbar} \exp(i\varphi), \quad \phi = kvt + kz_0 \quad (9.47)$$

则从式(9.42)得到

$$V = -\cos\phi [x \exp(i\omega t) + c.c.] \quad (9.48)$$

### 9.5.2 迭代近似解

即使用上述近似，方程(9.46)也是没有解析解的，这是因

根据式(9.47),  $\phi$ 是时间的函数, 并且  $V$  有两个频率分量。但利用连续近似或者迭代法比较容易进行计算。前面曾指出,  $\rho_{12}$  可以用  $x$  的奇次项表示,  $\rho_{11}$  和  $\rho_{22}$  可以用  $x$  的偶次项表示。因此可以写出

$$\rho_{12} = \rho_{12}^{(1)} x + \rho_{12}^{(2)} |x|^2 x + \dots \quad (9.49a)$$

$$\rho_{11} = \rho_{11}^{(0)} + \rho_{11}^{(2)} |x|^2 + \dots \quad (9.49b)$$

$$\rho_{22} = \rho_{22}^{(0)} + \rho_{22}^{(2)} |x|^2 + \dots \quad (9.49c)$$

在只考虑稳态情况时, 我们可以从最低阶项开始, 连续不断地把式(9.49)中的项代入式(9.46), 以求得方程式(9.46)的解。

从一级近似开始, 略去二阶以上的项, 则式(9.46c)的右端成为  $-iV\Delta\rho^{(0)}$ , 通过式(9.47)和(9.48)得到

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(1)} &= -\frac{i}{2}\Delta\rho^{(0)}\exp(i\omega t)\left(\frac{\exp(i\phi)}{\gamma+i(\omega-\omega_0+kv)}\right. \\ &\quad \left.+\frac{\exp(-i\phi)}{\gamma+i(\omega-\omega_0-kv)}\right) \end{aligned} \quad (9.50)$$

然后, 把式(9.50)  $\rho_{12}^{(1)}$  的一级近似表达式代入式(9.46a), 得到  $\rho_{11}^{(1)}$  的二级近似表达式

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{(2)} &= \frac{\Delta\rho^{(0)}}{4\gamma_1}\left(\frac{1-\frac{i\gamma_1}{2kv}\exp(2i\phi)}{\gamma+i(\omega-\omega_0+kv)}\right. \\ &\quad \left.+\frac{1+\frac{i\gamma_1}{2kv}\exp(-2i\phi)}{\gamma+i(\omega-\omega_0-kv)}\right) + c.c. \end{aligned} \quad (9.51)$$

类似地,  $\rho_{22}^{(2)}$  的表达式可以从式(9.46b)经过计算后得到。除了改变式(9.51)的符号并用  $\gamma_2$  代替  $\gamma_1$  外,  $\rho_{22}^{(2)}$  的表达式跟  $\rho_{11}^{(2)}$  的相同。

应该注意，式(9.51)中分子数以频率 $2kv$ 脉动，因为 $\phi$ 随时间以 $kvt$ 的方式变化。这就是粒子数脉动。再回到静止参照系中，由于 $\phi = kz$ ，因此具有速度分布的分子的粒子数反转在 $z$ 方向按照周期为 $2\pi/2k = \lambda/2$ ( $\lambda$ 为波长)的正弦函数变化。由于驻波波峰之间的距离是半个波长(参见图9.9)，粒子数反转分布有一个与之相应的沿 $z$ 轴的变化，称为空间烧孔效应。

在多模振荡的情况下，由于出现了模式之间拍频，将会产生相应的变化周期长的空间烧孔效应。在单模情况下，由于周期很短，在普通气体激光器中烧孔效应可以忽略。因此，粒子数反转 $\Delta\rho^{(2)} = \rho_{12}^{(2)} - \rho_{21}^{(2)}$ 的二阶近似为

$$\begin{aligned}\Delta\rho^{(2)} = & -\tau\Delta\rho^{(0)} \left( \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0 + kv)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0 - kv)^2} \right)\end{aligned}\quad (9.52)$$

其中 $\tau$ 是纵向驰豫时间，它等于

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \quad (9.53)$$

方程式(9.52)表明，当速度满足

$$v = \pm (\omega - \omega_0)/k$$

时，分子速度分布在上能级减少，而在下能级增加。式中 $\omega$ 是激光频率。因而粒子数反转的烧孔效应与图8.7类似，在速度分量的

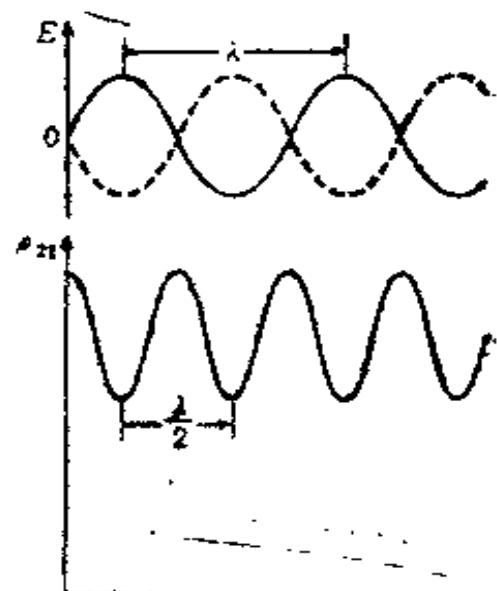


图9.9 驻波场引起的空间烧孔效应

两旁都出现烧孔，其中 $N_1$ 和 $N_2$ 在粒子数反转状态下相互交换。

把 $\rho_{22} - \rho_{11} = \Delta\rho^{(0)} + \Delta\rho^{(1)}|x|^2$ 代入式(9.46c)的右端，经过计算后得到三阶近似表达式

$$\begin{aligned}\rho_{12}^{(3)} = & \frac{i}{2} \Delta\rho^{(1)} \exp(i\omega t) \left( \frac{\exp(i\phi)}{\gamma + i(\omega - \omega_0 + kv)} \right. \\ & \left. + \frac{\exp(-i\phi)}{\gamma + i(\omega - \omega_0 - kv)} \right)\end{aligned}\quad (9.54)$$

将式(9.52)代入上式可得到最后的表达式。重复这样的迭代步骤可以得到更高阶的近似解。

由于以这种方式获得的 $\rho_{12}(v)$ 是以速度分量 $v$ 为参量的，气体的极化可以通过 $\rho_{12}(v)\mu_{12} + \text{c.c.}$ 对分子的速率分布和空间分布积分得到，但是这种计算并不容易。因此我们首先只计算那些速度分布在 $v$ 和 $v + dv$ 之间的分子的非线性极化率 $\chi(v)$ ，然后再对速度分布积分。现在将 $\chi(v)$ 按照 $E^2 = \hbar^2|x|^2/|\mu_{12}|^2$ 的幂级数展开

$$\chi(v) = \chi^{(1)}(v) + \chi^{(2)}(v)E^2 + \dots \quad (9.55)$$

然后从式(9.50)得到线性极化率的表达式

$$\begin{aligned}\chi^{(1)}(v) = & \frac{i}{2\epsilon_0\hbar} |\mu_{12}|^2 N(v) \Delta\rho^{(1)} \\ & \cdot \left( \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0 + kv)} + \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0 - kv)} \right)\end{aligned}\quad (9.56)$$

由式(9.54)、(9.52)经过计算得到三阶非线性极化率的表达式为

$$\begin{aligned}\chi^{(2)}(v) = & -\frac{i\tau}{\epsilon_0\hbar^3} |\mu_{12}|^4 N(v) \Delta\rho^{(1)} \\ & \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0 + kv)^2} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0 - kv)^2} \right)\end{aligned}$$

$$\cdot \left( \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0 + kv)} + \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0 - kv)} \right) \quad (9.57)$$

重复迭代过程可以得到更高阶极化率的表达式。

当气体分子的速度服从麦克斯韦-玻耳兹曼分布时，气体的线性极化率和三阶极化率可以利用式(8.36)分别由式(9.56)和(9.57)的积分得到。利用等离子体色散函数关系(见8.4节)，式(9.56)的积分可以写成

$$\chi^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(v) dv = - \frac{N \Delta \rho^{(1)}}{\epsilon_0 \hbar k u} |\mu_{1z}|^2 Z(\xi) \\ \xi = \frac{\omega - \omega_0 - i\gamma}{k u} \quad (9.58)$$

因为高阶项的计算一般很冗长，所以我们只写出多普勒极限的近似值 $\chi^{(1)}$ 、 $\chi^{(3)}$ 。当多普勒宽度比均匀线宽还要宽些时， $\gamma \ll k u$ ，利用实变量 $\xi = (\omega - \omega_0)/k u$ ，得到

$$\chi^{(1)} = - \frac{\sqrt{\pi} N \Delta \rho^{(1)}}{\epsilon_0 \hbar k u} |\mu_{1z}|^2 e^{-\xi^2} \\ \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx - i \right) \quad (9.59)$$

用同样的办法得到三阶极化率的表达式为

$$\chi^{(3)} = \frac{\sqrt{\pi} N \Delta \rho^{(3)} \tau}{\epsilon_0 \hbar^3 k u} |\mu_{1z}|^4 e^{-\xi^2} \\ \cdot \left( \frac{i}{\gamma} + \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\gamma} \right) \quad (9.60)$$

### 9.5.3 三阶近似下的输出特性(兰姆四端)

一旦具有粒子数反转的气体的非线性极化率被确定，单模振

荡的频率和振幅可以由式(9.17)决定。为简单起见，假定气体介质在整个激光谐振腔内是均匀分布的<sup>(4)</sup>，则振荡模式的振幅 $\tilde{E}$ 与该模式的极化强度 $\tilde{P}$ 之间的关系可由上面得出的非线性极化率 $\chi$ 表示为

$$\tilde{P} = \epsilon_0 \chi \tilde{E} \quad (9.61)$$

当模函数为

$$U(r) = \cos kx \quad (9.62)$$

时，由式(9.47)得到平面驻波式(9.41)的光场为

$$\tilde{E} = E \exp(i\varphi) \quad \text{和} \quad x = \frac{\mu_{1k}}{\hbar} \tilde{E}$$

从式(9.17a)出发，利用

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} E^2 + \dots \quad (9.63)$$

的虚部可以确定振幅，从式(9.17b)出发利用式(9.63)的实部可以确定振荡频率。因为式(9.17a)在稳态下变成

$$\kappa + (\omega/2)(\chi^{(1)\prime\prime} + \chi^{(2)\prime\prime} E^2 + \dots) = 0$$

故三阶近似给出

$$E^2 = \left( -\chi^{(1)\prime\prime} - \frac{2\kappa}{\omega} \right) / \chi^{(2)\prime\prime} \quad (9.64)$$

为了计算 $E^2$ 出现时粒子数反转的阈值，将式(9.59)的虚部代入上式，在 $\omega = \omega_0$ 时为

$$\Delta N_{rs} = (N \Delta \rho^{(2)})_{rs} = \frac{2\epsilon_0 \hbar \kappa u}{\sqrt{\pi} |\mu_{1k}|^2 c} \quad (9.65)$$

(4)因为在实际激光器中，激光介质受到限制，故各处的激光并不是完全均匀的。  
 $\tilde{P}$ 用模函数加权的式(9.2)的逆变换表示，因此若用类似的加权平均表示。

在 $\omega = \omega_0$ 时，与式(9.21)的结果相差因子 $ku/\sqrt{\pi\gamma}$ 的原因是，这里的谱线形状是高斯型而不是洛伦兹型。

将式(9.59)、(9.60)的虚部代入式(9.64)，得到振动强度的表达式为

$$E^2 = \frac{\hbar^2 \gamma}{|\mu_{12}|^2 \tau} \cdot \frac{1 - (1/\mathcal{N}) \exp((\omega - \omega_0)/ku)^2}{1 + \gamma^2 / ((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)} \quad (9.66)$$

式中 $\mathcal{N} = N \Delta \rho^{(0)} / \Delta N_{12}$ ，是激发的相对强度。

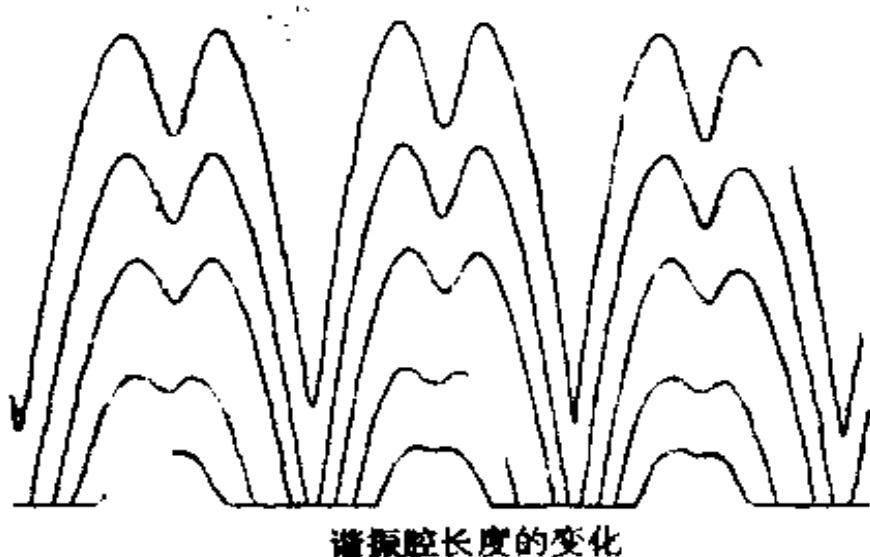


图9.10 不同激发强度下，用 $1.15\mu\text{m He-Ne}$   
激光观察兰姆凹陷

上面的近似适用于多普勒加宽 $ku$ 比较大而均匀加宽 $\gamma$ 比较小的情况。式(9.66)的分子随频率变化而展现出一个宽阔的峰，分母则在以 $\omega_0$ 为中心、宽度为均匀线宽的范围内急剧增大。因此，正如图9.10所示的那样，气体激光器的振荡强度在振荡频率中心附近下降。当改变腔长以扫描频率时，每扫描半个波长就出现激光输出。输出特性的这种凹陷早在1962年就由兰姆在

他的气体激光理论中所预见，稍后不久即得到了实验的证实。故这现象称为兰姆凹陷。

稳态振荡的频率可在式(9.17b)中令  $d\phi/dt = 0$  得到。将式(9.59)的实部代入并利用式(9.65)，得到的一阶近似值表示了类似于式(9.20)或(5.53)的频率牵引效应，只是这些方程中的  $\gamma$  被  $(\sqrt{\pi}/2)ku$  所替代， $(\sqrt{\pi}/2)ku$  等于 1.066 倍的 HWHM (半最大值半宽度)。由于  $\chi'$  的三阶近似引起的牵引效应与  $E^2$  成比例减少，所以当振荡强度增加时激光频率要偏离谐振腔的固有频率，这称为频率推斥效应，这种效应在多模振荡情况下可观察到。当振荡强度增加时，相邻模式的相互推斥使模式间的频率间隔增加。

## §9.6 激光的全量子理论

迄今为止讨论过的半经典理论中，忽略了光电场的起伏，因此用半经典理论无法研究振荡中振幅的起伏，即激光噪声和激光辐射的光谱宽度。由于电磁场不是量子化的，用半经典理论也不能讨论光子统计性和激光辐射的高阶相关性。

为了讨论量子噪声效应，电磁场和原子都必须用量子力学来描述。在图9.1所示的模型中，必须考虑激光介质与泵浦源以及冷源的相互作用，还有激光与外界的耦合。所有这些都必须用量子力学来讨论，包括自发发射和零点振动。量子力学把激光作为一个非线性、非平衡态的开放系统，这是1960年的下半年由哈肯 H. Haken)、兰姆(W. E. Lamb)和其他人提出的。在这里我们只作简短的介绍，激光的量子力学理论的细节请查看文献[9.3, 9.4, 9.12, 9.13]。

与一个原子作用的光场用一个作用于电磁场状态函数上的

算符来表达。当电磁场展开为模式的叠加时，每一个模式的场算符表示为光子的产生和湮灭算符。应该注意，在激光理论中，原子和光场都是量子化的，所以原子和光子的数目大大超过1。除此之外，原子和光子组成的系统通过损耗以及谐振腔的耦合输出而与热库交换能量，同时激光介质中的原子受到泵浦而产生粒子数反转。

在讨论整个系统包括热库效应和激发过程的哈密顿量时，全量子理论甚至比激光的半经典理论遇到的困难更大。由于代表激光振荡振幅的光场算符不能象半经典理论那样用一个随时间变化的连续函数来描写噪声，因此全量子理论中的起伏并不直接相应于观察到的噪声或激光输出的光谱宽度。为了克服这个缺点，激光量子理论中采用了各种各样的模型和近似。

第一种理论是把激光用经典的朗之万(Langevin)方程来处理。激光介质中的原子与热库及激发源之间的相互作用产生的起伏看成一个唯象形成的朗之万力，也就是说，是一个无规的扰动。然后把这个朗之万力作为微扰求解量子力学的海森堡方程。基于这种方法的激光理论由哈肯及其合作者于1966年建立。

激光理论的第二种模型是利用没有热库存在时的光子数态基矢，用薛定谔表象表示一般的密度矩阵，而把热库的作用作为微扰来处理。这种方法容易些，因为电磁场是按照光子数态来展开的，正象大多数量子力学的其它问题一样。但另一方面，它却难于处理由非对角矩阵元表示的激光的相干问题。1967年斯卡利(M.O.Scully)和兰姆(W.E.Lamb)从基于光子数态的密度矩阵公式出发，获得了激光振荡的光谱宽度。以后，这个理论得到了进一步发展。

第三种方法利用了福克-普朗克(Fokker-Planck)方程。1965年里斯肯(H.Risken)用半经典理论解释了哈肯等人的激光全量子理论，并且以福克-普朗克方程的形式重写了激光电磁场

的分布函数。此外通过利用格劳伯(R.J.Glauber)在1963年引入的量子力学相干态的表达式，哈肯和许多人用福克-普朗克方程建立了量子力学激光理论。

这些全量子激光理论用来计算激光光子数的分布，以与实验结果相比较。并且，从光子数统计学出发，理论上和实验上都对量子噪声的高阶矩以及高阶相干性进行了探讨。

## 习 题

9.1 在使用旋转波近似以及缓慢变化包络近似获得式(9.7)时， $\tilde{dP_n}/dt$ 项已被忽略，证明它是一个二阶小量。

9.2 激光的频率由式(9.20)计算给出，其中隐含假设光学谐振腔和光谱线都具有洛伦兹分布，试解释9.1节中是怎样假设的？

9.3 用式(9.17a、b)代替式(9.14a、b)，导出单模激光器稳态振荡的粒子数反转阈值和频率公式(提示：在式(9.17a、b)中令 $d/dt = 0$ 以及使用 $|x|^2 = 0$ 的式(8.31))。

9.4 使用范德玻尔方程，假设在 $t = 0$ 时，初值为 $W_0$ ，试求出描述激光强度 $W = |\tilde{E}|^2$ 的公式。

9.5 用单色光注入时，激光振荡的频率和振幅受到微扰，如式(9.32)表示的那样。如果激光场取一稳定的振幅，它可以改写成下面形式

$$E(t) = a \exp(i\omega_L t + i\theta(t)) + c.c.$$

这样就有

$$\tilde{E}(t) = a \exp(i(\omega_L - \omega)t + i\theta(t))$$

证明在这种情况下式(9.32)的解可以表示为

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega_1 - \omega - b \sin \varphi}$$

式中  $\varphi(t) = (\omega_1 - \omega_L)t - \theta(t)$ ,  $b = \kappa_i \tilde{E}_i / a$  (提示:  $d\theta(t)/dt = \omega - \omega_L + b \sin \varphi(t)$ )。

9.6 对于气体激光器, 式(9.34)中的交叉饱和参量能够表示成下式

$$C_{12} = S_1 \gamma^2 [(\omega_1 - \omega_2)^2 + \gamma^2]^{-1}$$

证明: 在谐振腔内部有适当的低压气体吸收介质时, 在气体激光器中能得到强的模耦合(虽然在吸收介质不存在时耦合较弱)。

9.7 在产生亚皮秒脉冲的一个锁模激光器内插入一块几毫米厚的玻璃板, 可使脉冲大大加宽。讨论由于玻璃板的正常色散产生的脉冲加宽效应。例如BK7玻璃的折射率在656nm时 $n = 1.5143$ , 在588nm时 $n = 1.5168$ 。

9.8 在气体激光器中, 分子布居空间的烧孔如图9.7所示, 如果其它参量不变, 在较高温度时烧孔变浅, 试解释其原因。

9.9 激光的起伏可以用范德玻尔方程和一个无规则的微扰项来处理

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} + (L - G + S|\tilde{E}|^2)\tilde{E} = f(t)$$

其中 $f(t)$ 表示随时间变化的微扰, 假设 $\tilde{E}$ 是一个实量, 在弱微扰下求解这个方程。

## 题解和答案

### 第一 章

1.1 红宝石，变石，YLF，Tm<sup>3+</sup>，YLF，Tb<sup>3+</sup>激光器。

1.2 变石，Cu蒸气，Kr<sup>+</sup>，Ar<sup>+</sup>，染料激光器。

1.3 这不十分明确，但分别有(a)CH<sub>3</sub>F，(b)CO<sub>2</sub>，(c)HF，(d)Nd玻璃，(e)KrF激光器。

$$1.4 P = 10^{-3} W / (0.1 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6} m^2)$$
$$= 5 \times 10^{10} (W/m^2)$$

和  $P = 10^8 W / (\pi \times (3 \times 10^{-3})^2 m^2) = 3.5 \times 10^{10} (W/m^2)$

1.5 AlGaAs，GaAsP，InGaP激光器。

1.6 在0.02%红宝石中的Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>的密度为 $4 \times 2 \times 10^{-4} g/cm^3$ 。因为在Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>中有两个Cr原子，所以Cr原子的密度达 $4 \times 2 \times 10^{-4} \times (2/152) \times 6.02 \times 10^{23} = 6.3 \times 10^{18} atoms/cm^3$ ，因此当达到100%的粒子数反转时，储能为 $6.3 \times 10^{18} hc/\lambda = 1.8 J/cm^3$ 。

### 第二 章

2.1 从式(2.4)有 $1 \times 633 \times 10^{-9} / 2a = 3 \times 10^{-8} m$ ，并求得 $2a = 2.1 \times 10^{-4} m = 0.21 mm$ 。

2.2 普通光源的空间相干性很差，必须使用狭缝 $P_0$ ，入射光被 $P_0$ 衍射后通过 $P_1$ 和 $P_2$ 。当狭缝 $P_0$ 太宽时，虽然图像明亮但“条纹可见度”太差，当它太窄时，尽管“条纹可见度”高，但像太暗。

2.3 有 $E_{max} = A \exp(-t/2\tau_s)(1 + \exp(-\Delta_s/2c\tau_s))$   
 $\cos(\omega t + \theta)$  和  $I_{max} = A^2 \tau_s (1 + \exp(-\Delta_s/2c\tau_s))^2 / 2$  同理有  $I_{min} = A^2 \tau_s (1 - \exp(-\Delta_s/2c\tau_s))^2 / 2$ ，所以  $V = 2 \exp(-\Delta_s/2c\tau_s) / (1 + \exp(-\Delta_s/c\tau_s))$ 。

2.4 因为  $\alpha \ll k$ , 故求得  $V = \exp(-\alpha^2(\Delta s)^2)$ 。利用  $\Delta s = c\tau$ , 则有  $|Y_{11}(\tau)| = \exp(-\alpha^2 c^2 \tau^2)$ 。如果我们令  $w^2 = 4\alpha^2 c^2$ , 并将  $w^2$  代入式(2.29), 则得到  $I(\omega) = (2\sqrt{\pi}\alpha c)^{-1} \exp(-(\omega - \omega_0)^2 / 4\alpha^2 c^2)$ , 结果与式(2.30)等效。

$$2.5 \quad G_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{\tau} A_1^*(t) A_2(t + \tau) dt$$

$$G_{21}^*(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{\tau} A_2(t) A_1^*(t - \tau) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int_{-\tau - T}^{-\tau} A_2(t + \tau) A_1^*(t) dt$$

$$= G_{12}(\tau)$$

2.6 利用式(2.19)可获得

$$I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\tau|/2\tau_s) \exp(-i(\omega_0 - \omega)\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau_s [(\omega_0 - \omega)^2 + 1/4\tau_s^2]}$$

$$2.7 \quad G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0^*(t) A(t + \tau) dt$$

$$= A_0^2 \exp(-\tau^2/2\tau_s^2 - \alpha^2 \tau^2 \tau_s^2/2 + i\omega_0 \tau) \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-((2t + \tau)/2\tau_s - i\alpha\tau\tau_s)^2\} dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_s A_0^2 \exp(-(1 + \alpha^2 \tau_s^2)\tau^2/2\tau_s^2 + i\omega_0 \tau)$$

2.8  $I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$  变成

$$I(\omega) = -\frac{A_0^2 \tau_s^2}{2\sqrt{1 + \alpha^2 \tau_s^2}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau_s^2}{2(1 + \alpha^2 \tau_s^2)}\right)$$

$$\gamma(\tau) = \exp\left(i\omega_0\tau - \frac{1 + \sigma^2\tau^2}{2\tau^2}\tau^2\right)$$

2.8 当可见度为 $|\gamma_{11}(\tau)| = 0.5$ 时, 由式(2.30)得到 $\epsilon \approx 1 - \omega^2\tau^2/4 = 0.5$ 或 $\tau^2 = (4\ln 2)/\omega^2$ 。因为高斯分布的半最大值全宽度为 $2\sqrt{\ln 2}\omega$ , 所以求得 $\tau = 4\ln 2/2\sqrt{\ln 2}\omega$ 和 $\Delta_s = c\tau = 83.1\text{cm}$ 。

### 第三章

3.1 令式(3.28)或(3.33)的 $\theta = \varphi = 0$ , 于是得到 $r_+ = -r_- = (\eta_1 - \eta_2)/(\eta_1 + \eta_2)$ 。当正入射时,  $E_x$ 和 $E_x'$ 的正方向相反, 而 $E_z$ 和 $E_z'$ 的正方向则相同(图3.1)。

3.2 对于沿 $z$ 方向传播的平面电磁波有 $E_z = H_z = 0$ 和 $\partial/\partial t = -v\partial/\partial z$ , 因此 $\operatorname{curl} E = -\partial B/\partial t$ 的 $x$ 和 $y$ 分量变为

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = v\mu \frac{\partial H_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = v\mu \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

在无静态场时, 求得 $-E_y = v\mu H_x$ 和 $E_x = v\mu H_y$ 。故 $E \cdot H = E_x H_x + E_y H_y = 0$ 。

3.3 如果平面波沿 $z$ 方向传播, 则 $H_x = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E_x = (\eta' - i\kappa) \cdot \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E_x = \sqrt{\eta'^2 + \kappa^2} \cdot \exp(i\varphi) \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E_x$  和  $\varphi = -\operatorname{tg}^{-1}(\kappa/\eta')$ 。

3.4 令式(3.25)中 $\theta = \theta_B + \Delta\theta$ 和 $\varphi = \pi/2 - \theta_B + \Delta\varphi$ , 则一阶近似变为

$$n_{21} = \frac{\sin\theta_B + \Delta\theta \cos\theta_B}{\cos\theta_B + \Delta\varphi \sin\theta_B} = \frac{n_{21} + \Delta\theta}{1 + n_{21} \Delta\varphi}$$

因此  $\Delta\varphi = \Delta\theta/n_{21}^2$ , 式(3.28)变为

$$r_s = \frac{\operatorname{tg}((\pi/2) + 2\theta_s + \Delta\theta - \Delta\varphi)}{\operatorname{tg}((\pi/2) + \Delta\theta + \Delta\varphi)} \approx -(\Delta\theta + \Delta\varphi) \operatorname{ctg} 2\theta_s$$

$$= \frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}^2} \Delta\theta$$

若  $n_{21} = 1.52$  和  $\Delta\theta = \pi/180$ , 则得到  $R_s = r_s^2 = 1.16 \times 10^{-4}$ 。

3.5 相应于  $\Delta\varphi$  的  $s$  分量反射系数的比例为  $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ , 而在布儒斯特角时, 式(3.33)变为

$$r_s = -\cos 2\theta_B = \frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1}$$

因此反射率为  $(\Delta\varphi \cdot r_s)^2 = 4.8 \times 10^{-6}$ 。

3.6 从式(3.61)、(3.65)得到  $\omega_{PSR} = 2\pi v/n\lambda$ , 从  $\omega = 2\pi v/\lambda$ , 则有  $\Delta\omega = 2\pi v\Delta\lambda/\lambda^2$ , 因此  $\lambda/\Delta\lambda = n\omega_{PSR}/\Delta\omega = n\mathcal{F}$  和

$$n\mathcal{F} = \frac{2L}{\lambda} \cdot \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} = \frac{2 \times 6 \times 10^{-2} \pi \sqrt{0.91}}{5.7 \times 10^{-7} \times 0.09}$$

$$= 7 \times 10^6$$

3.7 在薄膜表面上  $p$  分量的反射和透射系数为

$$r_1 = (\sqrt{\eta} - 1)/(\sqrt{\eta} + 1), \quad d_1 = 2/(\sqrt{\eta} + 1)$$

在薄膜-玻璃界面上则为

$$r_2 = (\eta - \sqrt{\eta})/(\eta + \sqrt{\eta}) = r_1, \quad d_2 = 2\sqrt{\eta}/(\eta + \sqrt{\eta}) = d_1$$

于是正入射时式(3.59)变为

$$E_B = E_0 d_1^2 e^{-2kL} / (1 + r_1^2 e^{-2kL})$$

而从空气到玻璃的功率透射系数为  $D = \eta |E_B/E_0|^2$ , 因此反射率  $R = 1 - D$  为

$$R = \frac{(\eta - 1)^2 \cos^2 kL}{4\eta + (\eta - 1)^2 \cos^2 kL}$$

当  $kL = (2n+1)\pi/2$  或  $L = (2n+1)\lambda/4$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  时, 有  $R = 0$  或 100% 的透射率, 当  $kL = n\pi$  或  $L = n\lambda/2$  时, 则出现最大反射率  $R_{\max} = (\eta - 1)^2/(\eta + 1)^2$ 。对  $L = \lambda/4 = \lambda_0/4\eta$ , 在图 A.3.7 中示出了反射率随波长的变化曲线, 在正常色散情况下曲线则用虚线表示。

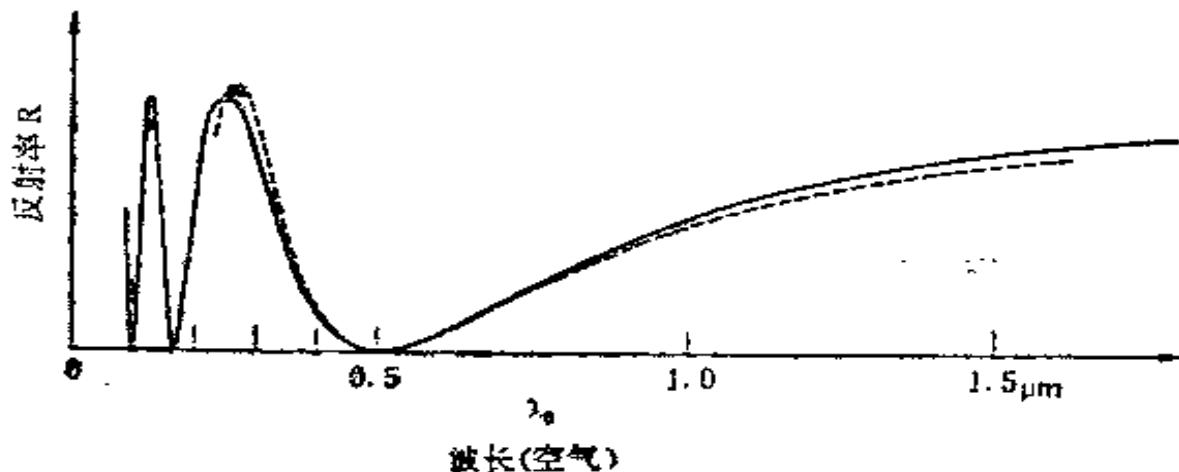


图 A.3.7

3.8  $(\sin\theta_{\max})/\varphi_1 = \eta_1$ , 因此从  $\sin\theta_{\max} = \eta_1\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \eta_1\sqrt{1 - (\eta_2^2/\eta_1^2)}$  求得  $\theta_{\max} = 20^\circ$ 。

3.9 因为  $\gamma_n^2 = \beta_n^2 - \beta_0^2$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 且  $\beta_n$  随  $n$  而增加, 由式(3.72)给出的值如图3.13所示, 故对较大的  $n$ , 则有较小的  $\gamma_n^2$ 。

3.10  $I(z) \propto G(z)G^*(z) = A^2/((z - z_0)^2 + k^2w_0^4/4)^{n+m+1}$ 。

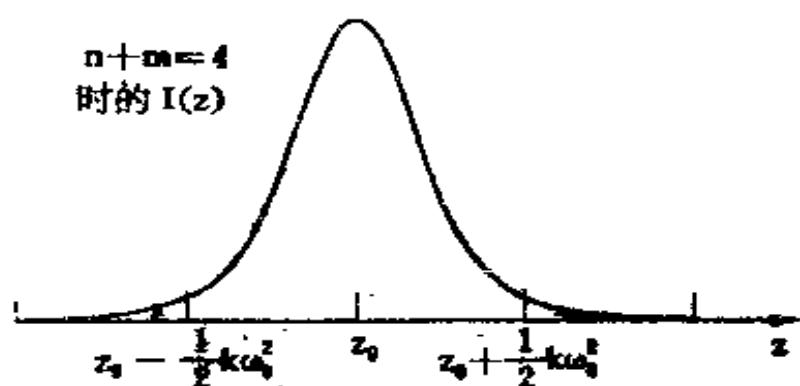


图 A.3.10

对于  $n = m = 0$ , 则为洛伦兹分布, 如图 A.3.10 所示。

3.11 利用式(3.100)且令  $\zeta = 2(z - z_0)/kw_0^2$ , 则有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^4(r, z) 2\pi r dr dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi A_0^4 kr}{w_0^8 (1 + \zeta^2)^2} \exp\left(-\frac{4r^2}{w_0^8 (1 + \zeta^2)}\right) dr d\zeta = \frac{\pi^2 k A_0^4}{8} \end{aligned}$$

实际材料具有有限的长度  $L$  和直径  $D$ 。因此上述积分应从  $r = 0$  到  $D/2$  和从  $z = z_0 - L/2$  到  $z_0 + L/2$ , 故给出比上述结果更小的值。

3.12 具有渐近线  $z - z_0 = 0$  和  $z - z_0 = R$  的双曲线(图 A.3.12)在  $z = z_0 \pm kw_0^2/2$  处,  $|R|_{m,n} = kw_0^2$ 。

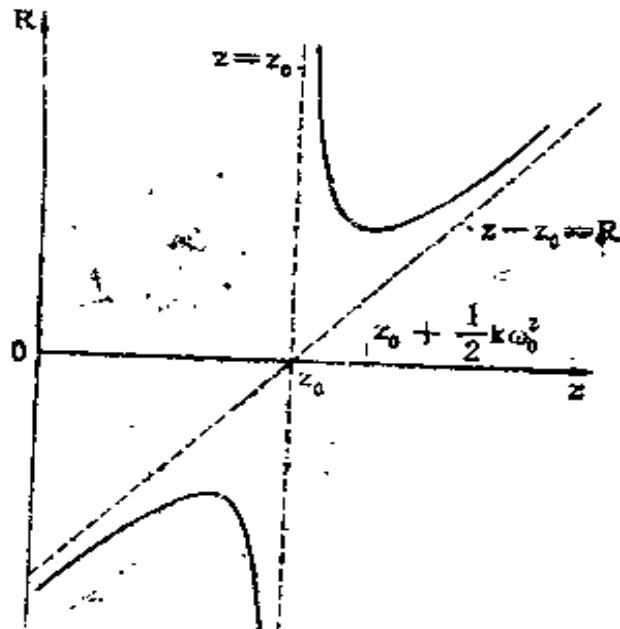


图 A.3.12

3.13 计算透射率的公式为  $T = 1 - \exp(-2a^2/w^2)$ 。从式(3.97)有  $w^2 = w_0^2(1 + 4L^2/k^2w_0^4)$ , 当  $w_0^2 = 2L/k$  或  $w_0 = \sqrt{\lambda L/\pi}$  时,  $w^2$  最小, 因此最大透射率  $T = 1 - \exp(-\pi a^2/\lambda L)$ 。代入已知值, 分别求得  $T \approx 99.3\%$  和  $25.6\%$ 。

3.14 如果  $R_1$  和  $R_2$  不完全相等，当  $L = R_1$  时，从式(3.108)求得  $w_{\frac{1}{2}}^{\pm} = \infty$ ，而当  $L = R_2$  时，求得  $w_{\frac{3}{2}}^{\pm} = \infty$ 。当  $R_1 < L < R_2$  (设  $R_1 < R_2$ ) 时，则为非稳定腔。

## 第四章

4.1 对于  $xy$  平面内的二维空间，令式(4.3)中  $n_z = 0$ ，则模式数  $(n_x, n_y)$  等效于面积  $\pi R^2$  的两倍，其中  $R = \omega L / 2\pi c$ ，于是给出  $m(\omega)d\omega = (\omega/\pi c^2)d\omega$ 。

4.2 将  $\omega = 2\pi c/\lambda$  和  $d\omega = -2\pi c d\lambda/\lambda^2$  代入式(4.23)，得到

$$W_{\text{tot}}(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp(hc/\lambda k T) - 1}$$

4.3 假设  $x = \hbar\omega/k T$ ，从  $\omega = 0 \sim \infty$  对式(4.11)积分得到

$$\frac{(k T)^4}{h^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

在理想反射器上的辐射压力是上述积分值的  $1/3$ ， $p = (8\pi^5 k^4 / 45 c^3 h^3) T^4$ ，而在黑体表面上的压力  $p = (4\pi^6 k^4 / 45 c^3 h^3) T^4$ 。注意，处于温度  $T$  的平衡下，黑体辐射所引起的反冲力刚好等于辐射压力。

4.4 利用  $I = cW/4\pi$ ，重写式(4.17)、(4.18)为  $P_{\text{abs}} = \hbar\omega B I N_L$ ， $P_{\text{em}} = \hbar\omega(A + BI)N_L$ ，于是分别得到

$$B = \frac{4\pi A}{cm(\omega)\hbar\omega} \quad \text{和} \quad B = \frac{4\pi^2}{3\varepsilon_0 \hbar^2 c} |\mu_{UL}|^2$$

在厘米·克·秒制单位下后一个等式变为

$$B = \frac{16\pi^3}{3h^3 c} |\mu_{UL}|^2$$

4.5 对于式(4.26)，式(3.1)~(3.4)在球坐标下的分量为

$$(\operatorname{curl} E)_r = 0 = -\mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t}$$

$$(\operatorname{curl} E)_s = 0 = -\mu_0 \frac{\partial H_s}{\partial t}$$

$$(\operatorname{curl} E)_\theta = \frac{i p_0 k^3 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \exp(i(\omega t - kr))$$

其中第三式等于  $-\mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t}$ , 因为  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ , 所以

$$(\operatorname{curl} H)_r = \frac{p_0 \omega k \cos \theta}{2\pi r^3} \exp(i(\omega t - kr))$$

而

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} = 0$$

$$(\operatorname{curl} H)_s = -i \frac{\omega p_0 k^2 \sin \theta}{4\pi r} \exp(i(\omega t - kr)) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_s$$

$$(\operatorname{curl} H)_\theta = 0 = \epsilon_0 \frac{\partial E_\theta}{\partial t}$$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} E = -\frac{p_0 k^2 \cos \theta}{2\pi r^2} \exp(i(\omega t - kr))$$

$$\mu_0 \operatorname{div} H = 0$$

因为  $(\operatorname{curl} H_r)$  为  $(kr)^{-1}$  量级, 所以当  $kr \gg 1$  时, 它可忽略, 故  $(\operatorname{curl} H)_r \approx 0$ 。这也表明, 在  $(kr)^{-1}$  量级,  $\mu_0 \operatorname{div} H = 0$  且  $\epsilon_0 \operatorname{div} E$  可忽略。 $E_r$  或  $E_s$  的精确解包含  $r^{-3}$  或  $r^{-2}$  项, 而在  $H_\theta$  中包含  $r^{-2}$  项。

4.6 利用  $d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  和  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ , 求解

$\int P(\theta) d\Omega$ , 得到式(4.28)。

4.7 如果  $|p_0|^2 = |\mu_{UL}|^2 e^{-A t}$ , 利用式(4.31), 对式(4.28)求时间积分得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^4}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\mu_{UL}|^2 e^{-A^2 t} dt = \hbar\omega$$

4.8 当  $t > 0$  时, 如果  $A = A_0 \exp(-\gamma t + i\omega_0 t)$ , 则求得  $G(\tau) = A_0^2 \exp(-\gamma|\tau| + i\omega_0 \tau)$ 。注意, 指数不是  $-\gamma\tau$ , 而是  $-\gamma|\tau|$ , 于是式(4.19)给出

$$I(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma\tau + i(\omega_0 - \omega)\tau) d\tau + \text{c.c.}$$

$$= \frac{A_0^2}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

4.9 当  $\Delta\omega = A$  时, 将式(4.43)代入式(4.39)计算式(4.46), 利用式(4.35)

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega A}{3\epsilon_0 \hbar c} |\mu_{UL}|^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + A^2}$$

将式(4.31)代入且  $\omega = \omega_0$ , 则求得  $\sigma(\omega_0) = \lambda^2 / 4\pi$ 。

4.10 一个中心在  $\chi' - i\chi'' = -i(N_L - N_U)e^2 / 4\epsilon_0 m\omega_0 \gamma$  且过原点的圆, 见图 A.4.10。

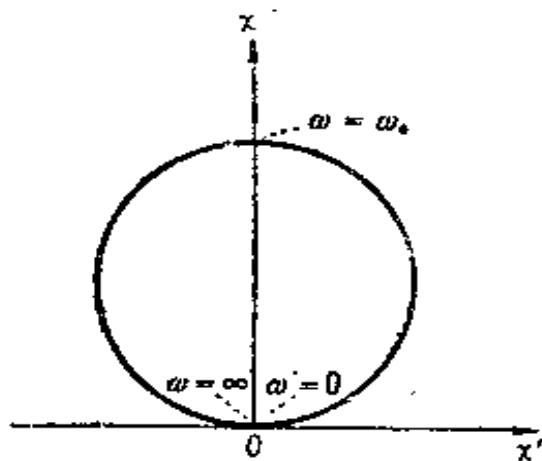


图 A.4.10

4.11 若  $N_L \gg N_U$ , 则从式(4.42)求得  $\omega = \omega_0$  时的光深度  $z_0 = 1/2\alpha = 3\epsilon_0 \hbar c \Delta\omega / N_L \omega |\mu|^2$ 。将  $\hbar \Delta\omega = 10^9 \text{ Hz}$ ,  $N_L = p / k_B T = 2.4 \times$

$10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $\omega/c = 2 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  和  $|\mu| = 3.335 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$  代入, 求得  $z_0 = 1.04 \text{ mm}$ 。

## 第五章

5.1 从式(5.5)、(5.6)有

$$N_3 = N\gamma_{21}\Gamma / (\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{31} + \gamma_{32})\Gamma)$$

$$\Gamma = (N_1 - N_3)BP/c = \frac{N\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32} - \Gamma)BP/c}{\gamma_{21}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) + (\gamma_{21} + \gamma_{31})\Gamma}$$

记  $\gamma_{31} + \gamma_{32} = \gamma_3$ ,  $(\gamma_{21} + \gamma_{31})/\gamma_{21} = a$  和  $BN/c = b$ , 求得

$$\Gamma = (\sqrt{(\gamma_3 + bP)^2 + 4\gamma_3 abP} - \gamma_3 - bP)/2a$$

5.2 当  $N_1 = N_3$  时, 从式(5.3)有  $N_2/N_1 = (\gamma_{12} + \gamma_{32})/(\gamma_{21} + \gamma_{31})$ , 因为  $N = N_1 + N_2 + N_3 = 2N_1 + N_2$ , 所以求得  $N_2 - N_1 = N_2 - N_3 = N(\gamma_{12} + \gamma_{32} - \gamma_{21} - \gamma_{31})/(\gamma_{12} + \gamma_{32} + 2(\gamma_{21} + \gamma_{31}))$ 。

5.3 温度  $T_0$  时, 能级 2 和 3 上的相对粒子数分别为  $a_2$  和  $a_3$  ( $< a_2$ ), 而温度为  $T_t$  时, 则为  $b_2$  和  $b_3$  ( $< b_2$ )。它们的瞬态粒子数为  $N_3/N_1 = (a_3 - b_3)\exp(-\gamma t) + b_3$  和  $N_2/N_1 = (a_2 - b_2)\exp(-K\gamma t) + b_2$ , 式中  $\gamma_{31}$  已简写为  $\gamma$ 。于是  $d((N_3 - N_2)/N_1)/dt = -(a_3 - b_3)\exp(-\gamma t) + K\gamma(a_2 - b_2)\exp(-K\gamma t)$  将为零。而当  $(a_3 - b_3)\exp((K-1)\gamma t) = K(a_2 - b_2)$  时, 则  $(N_3 - N_2)/N_1$  为最大。因此粒子数反转  $N_2 < N_3$  的条件为

$$\begin{aligned} b_2 - b_3 &< (a_3 - b_3)\exp(-\gamma t) - (a_2 - b_2)\exp(-K\gamma t) \\ &= (K-1)(a_2 - b_2)\exp(-K\gamma t) \end{aligned}$$

或

$$\frac{b_2 - b_3}{(K-1)(a_2 - b_2)} < \exp(-K\gamma t) = \left( \frac{a_3 - b_3}{K(a_2 - b_2)} \right)^{1/(K-1)}$$

重写上式为

$$((b_2 - b_1)/(K - 1)(a_2 - b_2))^{k-1} < ((a_2 - b_2)/K(a_2 - b_2))^k$$

5.4 当  $g(\omega_0) = 1/\pi\Delta\omega$  时，式(5.21)变为

$$\begin{aligned} G &= \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) \left[ \frac{\omega}{3\epsilon_0 c \hbar \Delta\omega} |\mu_{21}|^2 \right] \\ &= \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) \frac{A\lambda^2}{8\pi^2 \Delta\nu} \end{aligned}$$

其中使用了式(4.34)且  $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ 。

5.5 利用式(4.46)，由式(5.29)计算  $\Delta N_{12}$ 。代入已知值，得到  $\Delta N_{12} = 1.6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ 。当  $N = N_1 + N_2 = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  且  $N_2 - N_1 = \Delta N_{12}$  时，求得受激粒子的最小百分率为  $N_2/N = 0.58$  或 58%。

5.6 单程增益为  $\exp(GL_g - 2\alpha L_s)$ ，反射镜的反射率为  $R$  时的振荡阈值条件是  $(R \exp(\sigma \Delta N_{12} L_g - 2\alpha L_s))^2 = 1$ ，于是求得  $\Delta N_{12} = (2\alpha L_s - \ln R)/\sigma L_g$ 。

5.7 当跃迁电偶极矩比较大时，相关能级的寿命较短，使得激发态上原子数减少，因此获得粒子数反转将比较困难。此外，正如我们从式(5.31)看到的那样，由于较大的碰撞截面积和较短的寿命引起谱线加宽，也导致反转粒子数阈值的上升。

5.8 从式(5.37)有  $\kappa = \omega_0/2Q_s = c(1-R^2)/4L$ ，从式(5.52)得到  $S = \gamma/(\kappa + \gamma)$ ，代入已知值则求得  $S = 0.991$ 。

## 第六章

6.1  $\hbar\omega N_2 \frac{A(\omega)}{m(\omega)} = (\hbar\omega)^2 \mathcal{N}_2 B(\omega)$ 。

6.2 从式(4.39)、(4.43)和(6.6)求得

$$\Delta N_{12}(\omega) = \frac{2\pi\kappa}{\hbar B} \left( \frac{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2}{\omega \Delta\omega} \right)$$

6.3 代入6.2题的结果，由此求得

$$P_{\text{eff}} = \frac{\hbar \omega \Delta N_{\text{tot}}(\omega_0)}{2\tau} \left[ \frac{\Delta N^{(0)}}{\Delta N_{\text{tot}}(\omega_0)} - 1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega} \right)^2 \right]$$

如图A.6.3所示。

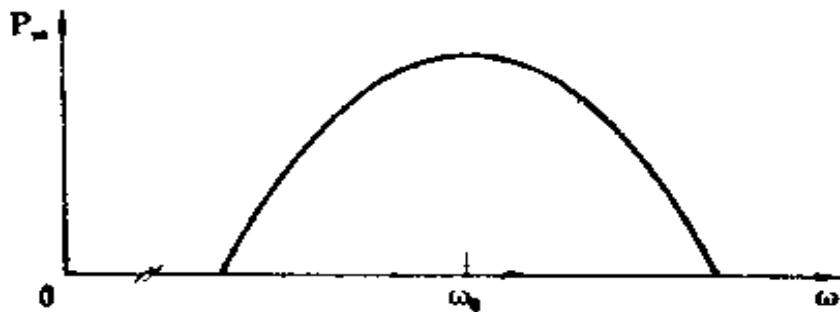


图 A.6.3

6.4 将式(6.20)对 $\mathcal{N}$ 微分为

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} P_{\text{eff},t} = \frac{\kappa_0}{\tau B(\omega)} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \right)$$

因此在 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$ 处曲线的正切可表示为

$$\begin{aligned} P_{\text{eff},t} &= \frac{\kappa_0}{\tau B(\omega)} (\sqrt{\mathcal{N}_0} - 1)^2 + \frac{\kappa_0}{\tau B(\omega)} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) (\mathcal{N} - \mathcal{N}_0) \\ &= \frac{\kappa_0}{\tau B(\omega)} (\sqrt{\mathcal{N}_0} - 1) \left( \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{\mathcal{N}_0}} - 1 \right) \end{aligned}$$

因为在曲线上 $\kappa_{\text{eff},t} = \kappa_t$ ，所以从式(6.19)有 $\sqrt{\mathcal{N}_0} - 1 = \kappa_t / \kappa_0$ 。这两个方程给出式(6.18)。

$$6.5 \quad 2dt = \frac{(1+bW)dW}{(a-\kappa-b\kappa W)W} = \frac{1}{(a-\kappa)} \left( \frac{abdW}{a-\kappa-b\kappa W} + \frac{dW}{W} \right)$$

积分后变为

$$2t = \frac{1}{a-\kappa} \left\{ \frac{a}{\kappa} \ln \frac{a-\kappa - b\kappa W_0}{a-\kappa + b\kappa W} + \ln \frac{W}{W_0} \right\}$$

和

$$\exp(2(a-\kappa)t) = \frac{W}{W_0} \left( \frac{W_{ss} - W_0}{W_{ss} - W} \right)^{a/\kappa}$$

式中  $W_{ss} = (a-\kappa)/b\kappa$ 。

6.6 对于  $x_s = 2\kappa\tau = 40$  的范例，示于图 A.6.6 中。

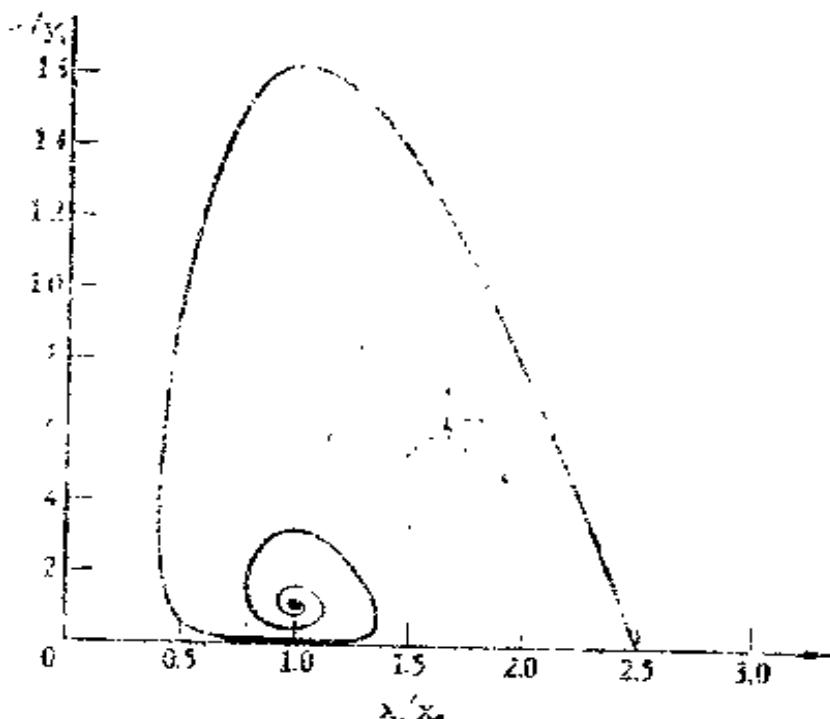


图 A.6.6

6.7 从图 6.8 求得半最大值全宽度为  $1.2\tau \times 10^{-4}$ ，而从式 (6.42) 求得有效宽度  $\Delta t = 1.34\tau \times 10^{-4}$ 。

6.8 利用  $\mathcal{N} = (\hbar\omega B/2\kappa_0)\Delta N^{(0)}$  和  $f(r) = (\hbar\omega B/2\kappa_0)\Delta N^{(r)}$ ，式中  $r = \kappa_r/\kappa_0$ ，分别将式 (6.39)、(6.38) 重写为

$$W = \frac{\kappa_0}{B} \frac{r}{1+r} (\mathcal{N} - f(r)) \quad (1)$$

$$\mathcal{N} - f(r) + (1+r) \ln \frac{f(r)}{\mathcal{N}} = 0 \quad (2)$$

当  $dW/dr = 0$  时, 式(1)给出  $(\mathcal{N} - f)/(1 + r) - r df/dr = 0$ , 式(2)给出  $df/dr = f(\mathcal{N} - f)/[(1 + r)(1 + r - f)]$ 。从这两个方程求得  $(1 - f)(1 + r) = 0$  或  $f = 1$ , 将它们代入式(2)中得到  $\kappa_{T, \omega_0} = \kappa_0 [(\mathcal{N} - 1)/\ln \mathcal{N} - 1]$ 。

### 6.9 从式(6.40)、(6.30)得到

$$\frac{y_{\max}}{y_s} = x \left( 1 - \frac{x_s}{x_0 - x_s} \ln \frac{x_0}{x_s} \right) = x_s \left( 1 - \frac{\ln \mathcal{N}}{\mathcal{N} - 1} \right)$$

和

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{y_{\max}}{y_s} \right) = x_s = 2\kappa\tau$$

## 第七章

7.1 因为从式(7.12)、(7.14)推得  $a_2(0) = [(\Omega + \omega - \omega_0) A_1 - (\Omega - \omega + \omega_0) B_1]/x$ , 所以初始条件  $a_1(0) = A_1 + B_1 = \exp(i\theta)$  和  $a_2(0) = 0$  给出  $A_1 = \exp(i\theta)(\Omega - \omega + \omega_0)/2\Omega$ ,  $B_1 = \exp(i\theta)(\Omega + \omega - \omega_0)/2\Omega$ 。于是求得

$$a_1(t) = \exp[i\theta + i(\omega - \omega_0)t/2] \left( \cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right)$$

$$a_2(t) = \frac{i x^*}{\Omega} \exp[i\theta - i(\omega - \omega_0)t/2] \sin \frac{\Omega t}{2}$$

7.2 如果把式(7.21)写成  $p(t) = p_0 \exp[i(\varphi + \omega t)] + \text{c.c.}$  的函数形式, 式中  $p_0$  为实数, 则有

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1}(\omega - \omega_0)(1 - \cos \omega t)/\Omega \sin \Omega t \\ &= \operatorname{tg}^{-1}[\Omega(\omega - \omega_0)^{-1} \operatorname{ctg}(\Omega t/2)] \end{aligned}$$

因为  $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + |x|^2}$  随  $E$  增加, 所以当  $\omega > \omega_0$  时,  $\varphi$  将随  $E$  略有下降。

7.3 对二能级系统,  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}_0 \Psi$  变为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{pmatrix}$$

其解为

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-iW_1t/\hbar) & 0 \\ 0 & \exp(-iW_2t/\hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{pmatrix}$$

7.4 利用式(7.36), 因为  $0 \leq p^{(1)} \leq 1$ , 所以计算  $\text{Tr}\{\langle \rho^2 \rangle_{\text{av}}\} =$

$$\sum_n \langle c_n c_n^* \rangle_{\text{av}}^2 = \sum_n \left( \sum_k p^{(1)} c_k^{(1)} c_k^{(1)*} \right)^2 \leq \left( \sum_k p^{(1)} c_k^{(1)} c_k^{(1)*} \right)^2 = 1$$

对于纯态, 等式  $\sum_k p^{(1)} c_k^{(1)} c_k^{(1)*} = c_n c_n^*$  成立。

7.5 式(7.20)的系统平均为

$$\langle p(t) \rangle = \langle a_1^* a_1 \mu_2 + \exp(i\omega_0 t) \rangle + \text{c.c.}$$

式(7.31b)给出  $\langle \rho_{12} \rangle = \langle a_1^* a_1 \exp(i\omega_0 t) \rangle$ 。因为在7.4节和这之后用  $\rho_{12}$  表示  $\langle \rho_{12} \rangle$ , 所以从上面可得出式(7.43)。

7.6 对于  $\dot{\mathcal{H}}' = 0$ , 则方程(7.51a~c)为

$$\dot{\rho}_x = -\omega_0 \rho_y, \quad \dot{\rho}_y = \omega_0 \rho_x, \quad \dot{\rho}_z = 0$$

因此求得

$$\begin{aligned} \rho_x(t) &= \rho_x(0) \cos \omega_0 t - \rho_y(0) \sin \omega_0 t \\ \rho_y(t) &= \rho_y(0) \sin \omega_0 t + \rho_x(0) \cos \omega_0 t \\ \rho_z(t) &= \rho_z(0) \end{aligned}$$

7.7 当  $x = 0$  时, 求得方程(7.61a~c)的解为  $|\rho|^2 = u^2 + v^2 + w^2$ , 其结果为

$$\begin{aligned} |\rho|^2 &= (w^{(0)})^2 + 2w^{(0)}(w_0 - w^{(0)}) \exp(-t/\tau) + \\ &\quad (w_0 - w^{(0)})^2 \exp(-2t/\tau) + (u_0^2 + v_0^2) \exp(-2\gamma t) \end{aligned}$$

式中  $u_0$ 、 $v_0$  和  $w_0$  分别是  $u$ 、 $v$  和  $w$  的初始值。

7.8 当  $\text{Re}\{x\} = x$ ,  $\text{Im}\{x\} = 0$  时, 式(7.60a~c)为

$$\dot{u} = -(\omega_0 - \omega)v, \quad \dot{v} = (\omega_0 - \omega)u + xw, \quad \dot{w} = -xv$$

比较繁琐但较直接的计算得出

$$u = \frac{(\omega - \omega_0)x}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t)$$

$$v = \frac{x}{\Omega} \sin \Omega t$$

$$w = [(\omega - \omega_0)^2 + x^2 \cos \Omega t] / \Omega^2$$

## 第八章

8.1 利用式(8.10), 则式(8.7)变为

$$\alpha = \alpha(0)(\omega/\omega_0)\gamma^2 / [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + |x|^2]$$

因为  $P/P_s = |x|^2/\gamma^2$  和  $(\omega_0 - \omega)^2 \ll \omega_0^2$ , 所以求得

$$\alpha(\omega, P) = \gamma^2 \alpha(0) [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 (1 + P/P_s)]^{-1}$$

8.2 将已知值代入式(8.14)中, 对于  $\omega = \omega_0$ , 则得到  $\sigma = 7.5 \times 10^{-17} \text{ m}^2 = 7.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^2$ 。

8.3 当入射光较弱时, 粒子数差由与  $\tau$  无关的玻耳兹曼分布确定。如果  $|x|^2 = 0$ , 数学上可求出式(8.23)与  $\tau$  无关。

8.4 利用式(8.5)、(8.6)、(8.23)求得

$$\Delta P = (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \hbar \omega \gamma |x|^2 / 2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma \tau |x|^2]$$

和

$$\Delta P_s = \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta P = (N_1^{(0)} - N_2^{(0)}) \hbar \omega / 2 \tau$$

8.5 轨迹的椭圆短轴在  $x''$  轴上, 短轴直径为

$$2b = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar} |\mu_{12}|^2 \frac{1}{\gamma + \tau |x|^2}$$

椭圆的长轴平行于  $x'$  轴, 长轴直径为

$$\begin{aligned} 2a &= 2\chi' (\omega_0 - \sqrt{\gamma^2 + \gamma \tau |x|^2}) \\ &= \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\epsilon_0 \hbar} |\mu_{12}|^2 \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \gamma \tau |x|^2}} \end{aligned}$$

因此偏心率  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2} = \sqrt{\tau |x|^2 / (\gamma + \tau |x|^2)}$ 。

8.6 使式(4.34)与式(8.39)相等并利用式(8.37), 由此可得到

$$\omega^2 = 0.833 \times 3\pi\varepsilon_0 \hbar c^2 |\mu|^2 \sqrt{2kT/M}$$

设 $|\mu| = 3.335 \times 10^{-8.0} \text{C} \cdot \text{m}$ ,  $T = 300 \text{K}$ ,  $M = 6.02 \times 10^{-24} \text{kg}$ , 求得软X射线的波长 $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.64 \times 10^{-8} \text{m} = 16.4 \text{nm}$ 。

8.7 因为 $\Delta\omega \rightarrow \gamma$ , 所以 $P \rightarrow 0$ 时, 式(8.49)变为

$$2\alpha_D(0) = \frac{N_1^{(0)} - N_2^{(0)}}{\varepsilon_0 \hbar u} |\mu_{12}|^2 \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{k^2 u^2}\right)$$

因为 $|x|^2 = (2|\mu_{12}|^2 / \varepsilon_0 \hbar^2 c)P$ , 于是 $\alpha_E(P) = \alpha_D(0)\gamma / \sqrt{\gamma^2 + \gamma\tau|x|^2}$ , 可得出式(8.51), 其中 $P_s = \varepsilon_0 \hbar^2 c \gamma / 2|\mu_{12}|^2$ 。

8.8 若用 $\omega'$ 代替 $\omega$ , 用 $N_1^{(0)}(v) - N_2^{(0)}(v) - [N_1(v) - N_2(v)]$ 代替 $N_1^{(0)} - N_2^{(0)}$ , 则凹陷的轮廓由 $|x|^2 \rightarrow 0$ 时的式(8.41)确定。当 $ku \gg \gamma$ , 利用第八章脚注(3), 于是它可表示为

$$\begin{aligned} I(\omega') &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \Delta\omega_s \exp(-v^2/u^2) dv}{[(\omega_0 + kv - \omega')^2 + \gamma^2][(v - \omega)^2 + (\Delta\omega_s)^2]} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma + \Delta\omega_s}{(\omega - \omega')^2 + (\gamma + \Delta\omega_s)^2} \end{aligned}$$

8.9 观察到孔的轮廓是一个半宽度为 $\gamma$ 的洛伦兹加宽和半宽度为 $\sqrt{\ln 2} \theta ku$ 的高斯加宽的卷积。

8.10 当孔的深度随入射光功率的增加而饱和时, 孔的宽度大体上随入射光功率线性地增加。因为吸收功率正比于分子速度分布上烧孔的面积, 所以在烧孔扩展到整个非均匀加宽线之前, 都未达到饱和, 因此 $\gamma\tau|x|^2 \approx k^2 u^2$ 。

8.11 具有多普勒分布的系统平均式(8.68)为

$$\langle u(t) + iv(t) \rangle = \frac{u(0) + iv(0)}{\sqrt{\pi u}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v^2/u^2) dv$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp[i(\omega_0 + kv - \omega)t - \gamma t] dv \\ &= [u(0) + iv(0)] \exp[-\gamma t - \frac{1}{4}k^2 u^2 t^2 + i(\omega_0 - \omega)t] \end{aligned}$$

式中  $u$  和  $v$  是速度，而  $u(t)$  和  $v(t)$  为光学布洛赫矢量的分量。因此式 (8.29) 表明：

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \frac{1}{2} N(u(0) + iv(0)) \mu_{z_1} \cdot \\ &\quad \exp(-\gamma t - \frac{1}{4}k^2 u^2 t^2 + i\omega_0 t) + \text{c.c.} \end{aligned}$$

8.12 因为饱和效应包含在光学章动中，没有包含在自由感应衰减中。在入射光被中断时，才发生自由感应衰减现象。从式 (7.12) 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_1 + a_2) &= \frac{ix}{2}(a_1 + a_2) \\ \frac{d}{dt}(a_1 - a_2) &= -\frac{ix}{2}(a_1 - a_2) \end{aligned}$$

它们积分后有如下形式

$$a_1 + a_2 = A \exp\left(\frac{i}{2} \int_{-\infty}^t x dt\right) = A \exp(i\theta(T)/2)$$

和  $a_1 - a_2 = B \exp(-i\theta(T)/2)$

式中  $A$ 、 $B$  为积分常数，因此

$$\begin{aligned} a_1(T) &= \frac{A}{2} \exp(i\theta(T)/2) + \frac{B}{2} \exp(-i\theta(T)/2) \\ a_2(T) &= \frac{A}{2} \exp(i\theta(T)/2) - \frac{B}{2} \exp(-i\theta(T)/2) \end{aligned}$$

或写为  $\sin(\theta(T)/2)$  和  $\cos(\theta(T)/2)$  的线性组合。

8.13 记  $x = (H_V, HM)/\tau_s$ ，求得

$$e^x + e^{-x} = \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad e^x = 2 + \sqrt{3}$$

因此HWHM(半最大值半宽度) =  $1.317\tau_{\nu}$ 。

## 第九章

9.1 因为  $d\tilde{P}_{\nu}/dt \approx \gamma \tilde{P}_{\nu} \ll \omega_0 \tilde{P}_{\nu}$  和  $\tilde{P}_{\nu} \ll \epsilon_0 \tilde{E}_{\nu}$ , 所以  $(\omega_0/\epsilon_0) d\tilde{P}_{\nu}/dt$  是式(9.7)中的一个小量。

9.2 在使用衰减常数 $\kappa$ 时, 我们已经假定谐振腔按指数衰减。利用式(7.49)(式中假定极化的驰豫速率 $\gamma$ 为常数)重写方程(9.9)。衰减振荡的功率谱取洛伦兹分布。

9.3 对于稳态振荡, 方程(9.17a, b)为

$\kappa + \frac{\omega}{2}\chi'' = 0$  和  $\omega - \Omega + \frac{\omega}{2}\chi' = 0$ , 因为  $|\chi|^2 = 0$ , 阈值时  $\Delta N_{\nu,\pm} = N_{\nu}^{(\pm)} - N_{\nu}^{(\mp)}$ , 所以式(8.31)的虚部和实部为

$$\frac{2\kappa}{\omega} = \frac{\Delta N_{\nu,\pm}}{\epsilon_0 h} |\mu_{1,2}|^2 \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

$$\frac{2(\omega - \Omega)}{\omega} = \frac{\Delta N_{\nu,\pm}}{\epsilon_0 h} |\mu_{1,2}|^2 \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

前一个方程给出的  $\Delta N_{\nu,\pm}$  与式(9.21)一致。分离上面两并列方程得到

$$\frac{\omega - \Omega}{\kappa} = \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma}$$

这与式(9.19)、(9.20)一致。

9.4 方程(9.30)乘以  $\tilde{E}^*$  变为

$$\frac{d}{dt} W + 2(L - G + SW)W = 0$$

式中  $W = |\tilde{E}|^2$ 。如果取  $a - \kappa = G - L$  和  $ab = S$ , 则上式与式(6.23)一致。式(6.24)中用  $W_{\nu,\pm} = (G - L)/S$  替换, 便可得到最后结果。

9.5 利用 $\varphi(t) = (\omega_1 - \omega_s)t - \theta(t)$ , 得到

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = i \left[ (\omega_1 - \omega) + \frac{d\theta}{dt} \right] \tilde{E} = i \left[ \omega_1 - \omega - \frac{d\varphi}{dt} \right] \tilde{E}$$

将上式和 $|\tilde{E}|^2 = a^2$ 代入式(9.32), 记 $b = \kappa_1 \tilde{E}_1 / a$ , 由此得到

$$i \left[ \left( \omega_1 - \omega - \frac{d\varphi}{dt} \right) + L - G + a^2 S \right] = b(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

实部给出

$$dt = d\varphi / (\omega_1 - \omega - bs\sin\varphi)$$

在分析频率锁定时它是一个有用的表示式。

9.6 现在将式(9.34)中的系数写为 $G = G_g - G_a$ ,  $S = S_g - S_a$ , 和 $C = C_g - C_a$ , 式中下标 $g$ 和 $a$ 分别表示增益介质和吸收体。从式(9.31)看出, $G_a/S_a$ 正比于 $\gamma/\tau$ 或者 $p_g^2$ , 其中 $p_g$ 为气体压强。如果适当选择 $p_a$ 使 $S_a \approx S_g$ , 则有 $S \approx 0$ ,  $G_a \ll G_g \approx G$ 和 $C_a \ll C_g \approx C$ , 结果引起强耦合。

9.7 一个亚皮秒脉冲具有 $10^{13}\text{Hz}$ 量级的频率展开, 而BK7玻璃的正常色散为 $d\eta/d\nu \approx 5 \times 10^{-17}\text{Hz}^{-1}$ 。因此具有 $10^{13}\text{Hz}$ 频率差的两个分量, 通过3mm厚的玻璃板后会有0.05ps的时间差。因为光脉冲在谐振腔内多次穿过该玻璃板, 所引起的加宽比上述时间差大10倍以上。

9.8 具有速度分量为 $v$ 的分子, 其烧孔效应由方程(9.51)确定。在整个速度分布上积累的烧孔效应, 由于高频处分子的速度更大, 烧孔被磨平得更厉害。

9.9 令 $\tilde{E} = E_0 + \epsilon$ , 式中 $E_0^2 = (G - L)/S$ 为常数,  $\epsilon$ 为起伏, 于是得到

$$(\frac{d\bar{\epsilon}}{dt}) + (2E_0\bar{\epsilon} + 3E_0\bar{\epsilon}^2 + \epsilon^*)S = f(t)$$

假设  $E_0 \gg \bar{\epsilon}$ , 则上式变为  $(\frac{d\bar{\epsilon}}{dt}) + 2(G - L)\bar{\epsilon} = f(t)$ , 对它积分得到

$$\bar{\epsilon}(t) = \exp(-2(G - L)t) \left[ \int_0^t f(t') \exp(2(G - L)t') dt' + \bar{\epsilon}(0) \right]$$

## 参 考 文 献

### 第一章

- 1.1 A.L.Schawlow, C.H.Townes, Phys.Rev.112, 1940(1958); H.Haken, Laser Theory(Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
- 1.2 S.L.Shapiro(ed.), Ultrashort Light Pulses, Topics Appl. Phys., Vol.18, 2nd ed.(Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
- 1.3 W.Koechner, Solid-State Laser Engineering, Springer Ser. Opt. Sci., Vol. 1(Springer, Berlin, Heidelberg 1976).
- 1.4 A.A.Kaminskii, Laser Crystals, Springer Ser. Opt. Sci., Vol. 14(Springer, Berlin, Heidelberg 1981).
- 1.5 R.Beck,W.Englisch,K.Gürs, Table of Laser Lines in Gases and Vapors, Springer Ser. Opt. Sci., Vol.2, 3rd ed. (Springer, Berlin, Heidelberg 1980).
- 1.6 H.E.White, Introduction to Atomic Spectra (McGraw-Hill, New York 1934); I.I.Sobelman, Atomic Spectra and Radiative Transitions, Springer Ser. Chem. Phys., Vol.1(Springer, Berlin, Heidelberg 1979).
- 1.7 G.Brederlow,E.Fill,K.J.Witte, The High-Power Iodine Laser, Springer Ser. Opt. Sci., Vol.34(Springer, Berlin, Heidelberg 1983).

- 1.8 C.K.Rhodes(ed.), *Excimer Lasers, Topics Appl. Phys.*, Vol. 30, 2nd ed. (Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
- 1.9 F.P.Schafer(ed.), *Dye Lasers, Topics Appl. Phys.*, Vol. 1, 2nd ed. (Springer, Berlin, Heidelberg 1977).
- 1.10 M.Maeda, *Rev. Laser Eng.* 8, 694, 803, 958(1980), 9, 85, 190(1981) (in Japanese); *Laser Dyes* (Academic, New York) to be published.
- 1.11 H.Kressel(ed.), *Semiconductor Devices, Topics Appl. Phys.*, Vol. 39, 2nd ed. (Springer, Berlin, Heidelberg 1982).
- 1.12 S.M.Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, 2nd ed. (John Wiley, New York 1981); K.Seeger, *Semiconductor Physics*, Springer Ser. Solid-State Sci., Vol. 40, 2nd ed. (Springer, Berlin, Heidelberg 1982).

## 第二章

- 2.1 M.Born, E.Wolf, *Principles of Optics*, 6th ed. (Pergamon, Oxford 1980); B.Saleh, *Photoelectron Statistics*, Springer Ser. Opt. Sci., Vol. 6 (Springer, Berlin, Heidelberg 1978).
- 2.2 D.Gabor, *J. Inst. Electr. Eng.* 93, 429(1946).
- 2.3 F.Zernike, *Physica* 5, 785(1938).

### 第三章

- 3.1 H.K.V.Lotsch, Optic 32, 116, 189, 299 and 553 (1970/71).
- 3.2 R.G.Hunsperger, Integrated Optics, Theory and Technology, Springer Ser.Opt.Sci., Vol. 33, 2nd ed.(Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
- 3.3 A.B.Sharma, S.J.Halme, M.M.Butusov, Optical Fiber Systems and Their Components, Springer Ser.Opt.Sci., Vol.24(Springer, Berlin, Heidelberg 1981).

### 第五章

- 5.1 V.A.Fabricant, Tr.Vses.Elektrotekh. Inst. 41, 254 (1940).
- 5.2 J.P.Gordon, H.J.Zeiger, C.H.Townes, Phys. Rev. 95, 282 (1954) and 99, 1264(1955).
- 5.3 K.Shimoda, In Proc.Symposium on Optical Masers, ed. by J.Fox (Polytechnic Press, New York 1963)p.95.
- 5.4 M.Maeda, N.B.Abraham, Phys.Rev. A26, 3395 (1982); C.O.Weiss, H.King, Opt.Commun.44, 59(1982); R.Hauck, F.Hollinger, H.Weber, Opt. Commun.47, 141 (1983); L.A.Lugiato, L.M.Narducci, D.K.Bandy, C.A.Pennise, Opt.Commun. 46, 64 (1983).

## 第六章

- 6.1 K. Shimoda, In Proc. Symposium on Optical Massers, ed. by J. Fox (Polytechnic Press, New York 1963) p. 95.

## 第七章

- 7.1 R. P. Feynman, F. L. Vernon, Jr., R. W. Hellworth, J. Appl. Phys., 28, 49 (1957).
- 7.2 R. G. DeVoe, R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett., 50, 1266 (1983).
- 7.3 T. Endo, T. Muramoto, T. Hashi, Opt. Commun., 51, 163 (1984).

## 第八章

- 8.1 I. I. Sobelman, E. A. Vainshtein, P. A. Yukov, Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines, Springer Ser. Chem. Phys., Vol. 7 (Springer, Berlin, Heidelberg 1981).
- 8.2 D. C. Hanna, M. A. Yuratich, D. Cotter, Nonlinear Optics of Free Atoms and Molecules, Springer Ser. Opt. Sci., Vol. 17 (Springer, Berlin, Heidelberg 1979).
- 8.3 K. Shimoda (ed.), High-Resolution Laser Spectroscopy, Topics Appl. Phys., Vol. 13 (Springer, Berlin, Heidelberg 1976).
- 8.4 M. S. Feld, V. S. Letokhov (eds.), Coherent Nonlinear Optics, Topics Curr. Phys., Vol. 21 (Sp-

ringer, Berlin, Heidelberg 1980).

- 8.5 J.H.Eberly,L.Allen,Optical Resonance and Two-Level Atoms (Wiley, New York 1974).  
8.6 C.P.Slichter, Principles of Magnetic Resonance, 2nd ed., Springer Ser.Solid-State Sci., Vol. 1 (Springer, Berlin, Heidelberg 1980).

## 第九章

- 9.1 K.Shimoda,T.C.Wang,C.H.Townes, Phys.Rev. 102, 1303 (1955).  
9.2 B.Van der Pol, Proc.IRE 22, 1051 (1934).  
9.3 K.Shimoda, T.Fajima, Y.Ueda, T.Shimizu, T.Masuya, Quantum Electronics I (Shokabo, Tokyo 1972)(in Japanese).  
9.4 M.Sargent III, M.O.Scully, W.E.Lamb,Jr., Laser Physics (Addison-Wesley, Reading 1974).  
9.5 S.E.Harris, O.P.McDuff, IEEE J.QE-1, 245 (1965).  
9.6 W.E.Lamb, Jr., Phys.Rev.134, A 1429 (1964).  
9.7 B.L.Gyorffy, M.Borenstein, W.E.Lamb, Jr., Phys.Rev.169, 340 (1968).  
9.8 S.Stenholm, W.E.Lamb, Jr., Phys.Rev.181,618 (1969).  
9.9 B.J.Feldman, M.S.Feld, Phys. Rev. A1, 1375 (1970).  
9.10 K.Shimoda, K.Uehara, Jpn.J.Appl.Phys.10, 460 (1971).  
9.11 K.Uehara, K.Shimoda, Jpn.J.Appl.Phys.10,623

(1971).

- 9.12 H.Haken, Laser Theory (Springer,Berlin, Heidelberg 1984).
- 9.13 D.Marcuse, Principles of Quantum Electronics (Academic, New York 1980).
- 9.14 H.Risken, C.Schmid,W.Weidlich, Z.Phys.193, 37 (1966).
- 9.15 M.Lax,W.H.Louisell, IEEE J.QE-3, 47 (1967).

(1971).

- 9.12 H.Haken, Laser Theory (Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
- 9.13 D.Marcuse, Principles of Quantum Electronics (Academic, New York 1980).
- 9.14 H.Risken, C.Schmid,W.Weidlich, Z.Phys.193, 37 (1966).
- 9.15 M.Lax,W.H.Louisell, IEEE J.QE-3, 47 (1967).