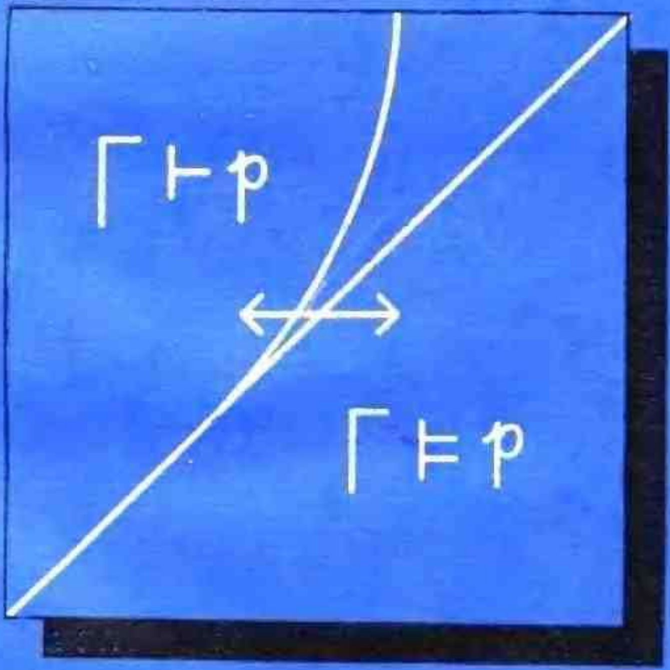
离散数学原理之三

数理逻辑

汪芳庭 编著



中国科学技术大学出版社

离散数学之三

数 理 逻 辑

汪芳庭 编 著

中国科学技术大学出版社

1990·合肥

内 容 简 介

本书前二章介绍了命题演算和谓词演算，第三章介绍形式算术和递归函数，第四章中心是不完备性定理。本书内容丰富，结构严谨，表述清晰，对一些定理和性质的证明，特别是对Gödel不完备性定理的证明较新颖。

本书可作为计算机系本科生和研究生的教材，也可供逻辑、数学、计算机等专业教学及研究人员参考。

数 理 逻 辑

汪芳庭 编著

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32 印张：8.875 字数：228千

1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷

印数：1—4000册

ISBN 7-312-00200-5/O·76 定价：2.20元

前　　言

从1982年起，中国科学技术大学计算机系为加强离散数学的教学，单独开设了数理逻辑课，并由我编写了这门课的教材。该教材几经修改和增补，成了此书。

为了建立数学模型的方便，并考虑到集论知识已越来越普及，本书在元语言中大量使用了集论，以减少非形式的叙述。所用的集论概念和结论列在预备知识中。除了集论，还用了一些初等数论及代数知识。不要求读者事先一定要熟悉这些知识，而是对用到的有关命题给出自足的证明。

命题演算和谓词演算是数理逻辑的基础内容。本书前两章里作为代数系统分别建立了这两种演算，先介绍语法，再介绍语义，然后证明它们各自的可靠性、完全性定理。整个第三章讨论形式算术，证明了"递归"与"可表示"的等同性，从而为证明不完备性定理作了准备。在第四章里，对Gödel 第一不完备性定理、Gödel-Rosser定理、Tarski 定理和形式算术的不可判定性定理都给了完整的证明。结合对Church论题和Turing 论题的介绍，对这些定理的意义进行了一些讨论。

由于 Gödel 第二不完备性定理的证明十分复杂，在具有教材性质的逻辑书中介绍这个定理是件值得探索的事情。作为尝试，本书提出了无矛盾性不可证性定理的一种易证形式。

练习题大都给以提示。这些练习有助于理解正文内容，一般与后文无直接联系。

带有 * 号的内容可略去不读。

高恒珊、张尚水、康宏逵同志对作者曾给予热情的鼓励，并对本书初稿提出过不少意见和建议。中国科学技术大学计算机系

陈友君、许胤龙同志在教材编写和教材修改过程中给予作者很大的帮助和支持。在此向以上各位谨致谢意。

还要感谢科大计算机系的历届同学，他们对本书内容的改进起过重要作用。

书中不妥之处敬请读者指正。

汪芳庭

1990年1月于科大数学系

引　言

历史上，首先明确地提出来要用数学方法去研究推理的人是莱布尼茨（1646—1716）。他在1714年写的一封信中曾说："要是我少受干扰，或者我更年青，或者有青年人来帮助我，我有望作出一种一般代数，用它可将推理的正确性全都化为计算。"

莱布尼茨的用计算解决争论的美好愿望能否实现？在什么程度上能够实现？数理逻辑的发展已对此作出了一定的回答。

数理逻辑奠基人之一——弗雷格（1848—1925）认为："数学的本质就在于，一切能证明的都要证明。"

什么叫数学证明？数理逻辑的一项重要任务就是试图回答这个问题，设法把"证明"这个概念（与此相关的还有可计算性的概念）精确化。我们将讨论精确化所用的方法，考察在这个精确化过程中出现的问题和得出的结论。

为了达到精确化，数理逻辑在研究推理时要建立数学模型。我们把这种数学模型叫做形式系统。对形式系统进行研究，必须要用普通的自然语言。我们把这种自然语言叫做"元语言"，以区别于形式系统的那种形式语言。

研究推理时使用数学，不可避免又要用到逻辑。我们把用到的逻辑叫做"元逻辑"。于是我们有两种系统："元系统"和形式系统。比如，形式系统中的"定理"、"证明"等有特定的含义，是我们研究的对象；而研究得到的结论则表现为元数学的定理，这是用元语言给出来的。这样，我们会得到一些关于"定理"的定理，关于"证明"的证明，等等。这种情况不可避免，正象研究语言要用到语言一样。

在元语言中，我们有时用符号"⇒"表示"蕴涵"；用"⇔"表示"当且仅当"。

目　　录

0 预备知识

0.1 集论基本概念

这里列出在我们的元语言中要用到的一些集论基本概念以及它们的符号表示。

集 A 是集 B 的子集，记作 $A \subseteq B$，意思是：凡是 A 的元素，都一定是 B 的元素。即：

$$若\ x \in A，则\ x \in B。$$

$A=B$，是指 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即 A 与 B 有完全相同的元素。

集 A 的幂集用 $\mathscr{P}(A)$ 表示，它是由 A 的全体子集所形成的集。例如，若 $A=\{1,2,3\}$，则

$$\mathscr{P}(A)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\phi\},$$

其中 ϕ 是空集，即没有任何元素的集。ϕ 是任何集的子集。

集 A 与集 B 的并，指

$$A \cup B=\{x \mid x \in A 或 x \in B\}。$$

集 A 与集 B 的交，指

$$A \cap B=\{x \mid x \in A 且 x \in B\}。$$

作为集的运算，并和交都满足交换律、结合律和分配律。以后，我们把有限次的并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$；把有限次的交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。

设有一列集 $A_0, A_1, A_2 \cdots, A_n, \cdots$。我们记

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \mid 存在\ i\ 使\ x \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \mid 对任意\ i\ 都有\ x \in A_i\}.$$

集B在集A中的余集，指

$$A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}.$$

集A与集B的积集，指

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

它由以A的元素为第一元素，以B的元素为第二元素形成的有序对(a,b)所构成。有序对(a,b)的基本性质是：

$$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 且 b_1 = b_2.$$

n个集$A_1, \cdots, A_n$的积集，指

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$$

$$= \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

n元有序对$(a_1, \cdots, a_n)$具有性质：

$$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n.$$

用A^n表示n个A的积集$A \times A \times \cdots \times A$ $(n > 0)$.

若$R \subseteq A \times B$，则说R是A到B的关系。若$R \subseteq A^n$，则说R是A上的n元关系。A上的一元关系就是A的子集。

A上的二元关系$R(\subseteq A \times A)$若具有以下三条性质，就叫做A上的等价关系。

1° 自反性：对任意$x \in A$，$(x,x) \in R$.

2° 对称性：对任意$x, y \in A$，

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R.$$

3° 可递性：对任意$x, y, z \in A$，

$$(x,y) \in R 且 (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R.$$

若R是A上的等价关系，且$(a,b) \in R$，则说a和b等价，记

作 $a\sim b$。A 中和 $a(\in A)$ 等价的所有元素形成的集叫做由 a 形成的R 等价类，记作

$$[a]=\{x|x\in A,x\sim a\}.$$

不同的等价类之间没有公共元素，所以 A上的任何等价关系 R都确定了A的一个分类。

设 R 是 A 上的等价关系，我们把所有 R 等价类的集叫做商集，记作 A/R。

设 f 是集X到集Y的一个关系（即 $f\subseteq X\times Y$）。如果 f 还满足条件：对任意 $x\in X$，有且仅有一个 $y\in Y$ 使 $(x,y)\in f$，那么我们说 f 是从 X到Y的函数或映射，记作 $f:X\to Y$；这时若 $(x_0,y_0)\in f$，则说 y_0 是 x_0 的象，x_0 是 y_0 的原象，并写 $x_0\mapsto y_0$，或写 $y_0=f(x_0)$。X叫做 f 的定义域。X中元素在Y中的象的全体是Y的一个子集，叫做 f 的值域。若 f 的值域就是Y，则把 f 叫做从X到Y 的满射。

如果映射 $f:X\to Y$满足对任意 x_1，$x_2\in X$ 都有

$$x_1\neq x_2 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)\neq f(x_2),$$

则把 f 叫做从X到Y的单射。

如果 $f:X\to Y$ 既是单射又是满射，则叫做从X到Y的双射。此时我们说X与Y之间存在着一一对应，或者说X与 Y 等势，也说X与Y有相同的基数。这时，f 的逆映射 f^{-1}：$Y\to X$ 也是双射。（f^{-1} 是 f 的逆映射，意思是 f^{-1} 满足：$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$。）

若存在双射 $f:X\to Y$和双射$g:Y\to Z$，则它们的复合映射$g\circ f$：$X\to Z$也是双射（复合映射$g\circ f$ 由下式定义：$g\circ f(x)=g(f(x))$）。

0.2 Peano自然数公理

按照“一切能证明的都要证明”这一想法，证明关于自然数

的命题，通常采用下面的 Peano 自然数公理（公理 1 —公理 5）作为出发点。

我们把自然数集 N 看成是满足以下五条公理的集。

公理 1 $0\in N$。

公理 2 **若** $x\in N$，**则** x **有一个后继** $x'\in N$。

公理 3 **对任意** $x\in N, x'\neq 0$。

公理 4 **对任意** $x_1, x_2\in N$，**若** $x_1\neq x_2$，**则** $x_1'\neq x_2'$。

公理 5 **设** $M\subseteq N$。**若** $0\in M$，**且当** $x\in M$ **时也有** $x'\in M$，**则** $M=N$。

五条公理中含有两个没有给出定义的概念：0 和后继。公理 3 的意思是：0 是自然数集的开头元素，而不是任何自然数的后继。公理 4 是说，不同的自然数有不同的后继。公理 5 就是归纳法原理。根据公理 5，要证明 N 的子集 M 与 N 相等，先证 $0\in M$，然后作归纳假设 $x\in M$，由此来证明 $x'\in M$ 便可。$0'$ 记作1，$0''$ 记作 2，…。

由以上五条公理出发，定义自然数的加法、乘法等运算以及序的概念，便能证明关于自然数性质的一系列结论，例如，“非空的自然数集一定含有该集的最小数”等等。在自然数理论的基础上，可进一步建立起有理数、实数和复数的理论。

下面来证明一个常用的结论。

定理（强归纳法） **假设与自然数** n **有关的命题** $P(n)$ **满足以下两个条件：**

$1°$ $P(0)$**成立，**

$2°$ **若** $k<m$ **时** $P(k)$ **都成立，则** $P(m)$ **也成立，**

那么 $P(n)$ **对所有自然数** n **都成立。**

证 只要证明下面的集合 S 是空集就可以了：

$$S=\{n\mid P(n)\text{不成立}\}。$$

假设 $S\neq\phi$，那么 S 必含有它的最小数。设 S 的最小数是 m。因 $m\in S$，故由 S 的定义知 $P(m)$ 不成立。又已知 $P(0)$ 成立（条件

1°)，所以必有$m>0$。注意m在S中是最小的，故当$k<m$时，必有$k\notin S$，从而$P(k)$一定成立。再由已知条件2°知$P(m)$成立。但前面知$P(m)$不成立，矛盾。**证毕。**

作为一例，下面用强归纳法来证明不等式：

$$p_n\leqslant 2^{2^n},\quad n\in\mathrm{N}$$

其中p_n表示第n个素数：$p_0=2, p_1=3, \cdots$。

$n=0$时，$p_0=2\leqslant 2^{2^0}$。

$n>0$时，

$$\begin{aligned} p_n &\leqslant p_0p_1\cdots p_{n-1}+1 && \text{（理由下面说明）}\\ &\leqslant 2^{2^0}\times 2^{2^1}\times\cdots\times 2^{2^{n-1}}+1 && \text{（用了归纳假设）}\\ &=2^{(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})}+1=2^{(2^n-1)}+1\\ &=\frac{2^{2^n}+2}{2}\leqslant 2^{2^n}. \end{aligned}$$

上面第一步不等式$p_n\leqslant p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$成立的理由是：$p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$的素因子不能是$p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$中的任何一个，而只能$\geqslant p_n$（注意用$p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$分别去除$p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$，所得的余数都是1）。强归纳法所要求的条件1°与2°都得到满足，故原不等式对任何自然数n都成立。

0.3 可 数 集

熟悉集论的读者可略去此节。

有限集，是指空集或与$\{0, 1, \cdots, n\}$等势的集。

可数集，是指与自然数集N等势的集。换句话说，一个集合是可数集，当且仅当它的全部元素可形成不重复的无限序列。可数集彼此互相等势；与可数集等势的集也是可数集。自然数集N当然也是可数集。

命题 1　可数集的无限子集也是可数集。

证 设无限集$B\subseteq A$，且设A是可数集．A的全部元素形成不重复的无限序列：$a_0,a_1,a_2,\cdots$．在这个序列中，B的全部元素形成了不重复的无限子序列：$a_{n_0},a_{n_1},a_{n_2},\cdots$，所以$B$也是可数集．**证毕．**

命题 2 若存在无限集B到可数限A的单射，则B为可数集．

证 记B到A的单射为f，设f的值域为$C(\subseteq A)$．$f:B\to A$为单射，而$f:B\to C$则为双射．B是无限集，C也是无限集．由命题1，C作为A的无限子集是可数集．B与C等势，所以B也是可数集．**证毕．**

命题 3 1° 若A可数且B非空有限或可数，则$A\times B$和$B\times A$都可数．

2° 若$A_1,\cdots,A_n$中至少有一个可数而其它为非空有限或可数，到$A_1\times\cdots\times A_n$可数．

证 1° 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$或$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$．作映射$f:A\times B\to\mathrm{N}$，使$f(a_i,b_j)=2^i3^j$．于是f是单射（当$i\neq k$或$j\neq l$时总有$2^i3^j\neq 2^k3^l$）．由命题2知$A\times B$可数．类似可知$B\times A$也可数．

2° 对n归纳，利用1°的结论便可．**证毕．**

命题 4 若A可数，且若B有限或可数，到$A\cup B$也可数．

证 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$．

情形1 B为有限集．此时设$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$（$B=\phi$时$A\cup B=A$）．若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的无限序列，

$$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots,$$

所以是可数集．若$A\cap B\neq\phi$，则令$B_1=B-A$．这时$B_1\cap A=\phi$，故$A\cup B_1$为可数集，而$A\cup B=A\cup B_1$．

情形2 B为可数集．设$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$．若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的序列$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots$．若$A\cap B\neq\phi$，记$C=B-A$，则$C\subseteq B$，$A\cap C=\phi$且$A\cup B=A\cup C$．这时当

C 为有限集时，$A\cup C$ 可数（属情形 1），因而 $A\cup B$ 可数；当 C 为无限集时，由命题 1 知 C 可数，且因 $A\cap C=\phi$，故 $A\cup C$（从而 $A\cup B$）可数。**证毕。**

命题 5　若 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个可数，而其它为有限或可数，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 也可数。

证　对 n 归纳，用命题 4 便可。**证毕。**

命题 6　若每个 A_i 有限或可数，且 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$ 是无限集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$ 可数。

证　当 A_i 为有限集时，设 $A_i=\{a_{i0},\cdots,a_{in}\}$；当 A_i 为可数集时，设 $A_i=\{a_{i0},a_{i1},a_{i2},\cdots\}$。分以下两种情形来证明。

1°　如果不同的 A_i 之间没有共同元素，即当 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\phi$，就令 $f(a_{ij})=2^i3^j$，这样得到的 $f:\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i\to \mathrm{N}$ 是单射，利用命题 2 便可。

2°　如果某些不同的 A_i 之间有共同元素，则作出一列新的集 $A'_0,A'_1,A'_2,\cdots$，作的过程是：

$$A'_0=A_0,A'_1=A_1-A_0,\cdots,\ A'_n=A_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}A'_i,\cdots.$$

这样当 $i\neq j$ 时，$A'_i\cap A'_j=\phi$，由 1° 知 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A'_i$ 是可数集，而 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A'_i$。**证毕。**

命题 7　若 A 为可数集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A^i$ 也为可数集。（这里规定 $A^0=\{\phi\}$。）

证 由命题3知每个 $A^i\ (i>0)$ 为可数集，再用命题6便可。**证毕。**

命题 8 若 A 可数，则所有由 A 的元素构成的有限序列形成的集 B 也可数。

证 对任一由 A 的元素构成的有限序列 $a_{i_1},\cdots,a_{i_n}$，令

$$f(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})=(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})\in A^n.$$

这样的 $f:B\to\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A^i$ 是单射。B 是无限集，由命题2知 B 可数。**证毕。**

有没有不可数的无限集呢？

根据下面的Cantor定理，自然数集N的幂集 $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 就是不可数的无限集的一个例子。

定理（Cantor） 集 A 和 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 不等势。

证。假设 A 与 $\mathscr{P}(A)$ 等势，即存在双射 $f:A\to\mathscr{P}(A)$。作一集

$$B=\{a\in A\mid a\notin f(a)\}.$$

注意 $f(a)$ 是 $\mathscr{P}(A)$ 的元素，A 的子集。因 B 也是 A 的子集，故 $B\in\mathscr{P}(A)$。f 是满射，必然存在 B 在 A 中的原象 b，使 $f(b)=B$。这时有两种可能：$b\in B$ 或 $b\notin B$。但按 B 的定义都会导致矛盾：

$$b\in B\ \Rightarrow\ b\notin f(b)=B;$$

$$b\notin B\ \Rightarrow\ b\in f(b)=B.$$ **证毕。**

集 $R\subseteq A^n$ 叫做 A 上的 n 元关系。R 的特征函数 $C_R:A^n\to\{0,1\}$ 是由下式定义的：

$$C_R(a_1,\cdots,a_n)=\begin{cases}1, & (a_1,\cdots,a_n)\in R,\\ 0, & (a_1,\cdots,a_n)\notin R.\end{cases}$$

函数 $f:\mathrm{N}^k\to\mathrm{N}$ 叫做 k 元数论函数。

以下是不可数无限集的例子。

（1）N上所有二元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^2)$ 不可数。

（2）N上所有 n 元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^n)$ 不可数。

（3）N的子集的特征函数的全体构成的集F_c是不可数集。这是因为，N的不同子集有不同的特征函数，故存在双射$f: \mathscr{P}(\mathrm{N}) \to F_c$，而$\mathscr{P}(\mathrm{N})$是不可数集。

（4）所有一元数论函数的集不可数（因为不可数集F_c是它的无限子集），进而知所有数论函数的集不可数。

1 命题演算

命题演算是我们要建立的最简单、最基本的形式系统。这种系统是用来表现较为简单的逻辑推理的一种数学模型。研究这种系统，除去为了直接应用，还为研究谓词演算（用来表现更为复杂的推理的形式系统）打下基础。

1.1 真值函数

真值函数是用来研究命题演算的重要数学工具。

我们常把集A上的n元函数f：$A^n \to A$叫做A上的n元运算。

记$Z_2=\{0,1\}$。

定义 1 （真值函数） 函数 f：$Z_2^n \to Z_2$（即 Z_2 上的n元运算）叫做n元真值函数。

一元真值函数共有四个，分别用f_1, f_2, f_3, f_4表示：

$v \in Z_2$	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

f_1和f_4是常值函数。

f_2叫做坐标函数（或恒等函数），$f_2(v)=v$。

f_3叫做“非”运算或“否定”运算，常用$\neg$表示：

$$\neg v = f_3(v) = 1-v.$$

二元真值函数一共有 16 个，可将它们的函数值列成下表：

v_1	v_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

在这16个二元真值函数中，f_4和f_6是坐标函数：

$$f_4(v_1,v_2)=v_1,$$

$$f_6(v_1,v_2)=v_2.$$

f_5叫做"蕴涵"运算，以后用符号→表示。它的计算公式为

$$v_1 \to v_2 = f_5(v_1,v_2) = 1 - v_1 + v_1 v_2.$$

现在把一元"非"运算┐和二元"蕴涵"运算→的表单独列出如下：

v	$\neg v$
1	0
0	1

v_1	v_2	$v_1 \to v_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

利用上面的表很容易验证以下公式成立：

公式 1 $\neg\neg v = v$,

公式 2 $1 \to v = v$,

公式 3 $v \to 1 = 1$,

公式 4 $v \to 0 = \neg v$,

公式 5 $0 \to v = 1$.

下面当我们说n元真值函数f可由一元运算┐和二元运算→表示出来，意思是说函数值$f(v_1,\cdots,v_n)$可由$v_1,\cdots,v_n$经有限次运算┐和运算→得到，这里$v_1,\cdots,v_n \in Z_2$.

命题 1 任一真值函数可由一元运算┐和二元运算→表示出来。

证 对真值函数的元数n归纳.

$n=1$ 时，命题正确：

$$f_1(v)=1=v\to v,$$

$$f_2(v)=v,$$

$$f_3(v)=\neg v,$$

$$f_4(v)=0=\neg(v\to v).$$

$n>1$ 时，对任意 n 元函数 f：$Z_2^n\to Z_2$ 及任意 $v_1,\cdots,v_{n-1}$，$v_n\in Z_2$，令

$$g(v_1,\cdots,v_{n-1})=f(v_1,\cdots,v_{n-1},1),$$

$$h(v_1,\cdots,v_{n-1})=f(v_1,\cdots,v_{n-1},0),$$

$$k(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n)=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to v_n)$$
$$\to(\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})\to\neg v_n)).$$

这样就定义了三个新的真值函数：g，h 和 k。g 和 h 是 $n-1$ 元的，k 是 n 元的。由归纳假设，g 和 h 可由 $\neg$ 及 $\to$ 表示出来，按照 k 的定义式，k 也具有这种性质。

下面证明 $k=f$，从而 f 也具有这种性质。

$$\begin{aligned}
k(v_1,\cdots,v_{n-1},1)&=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to1)\to\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})\\
&\quad\to0)=1\to\neg\neg g(v_1,\cdots,v_{n-1}) && \text{（由公式 3，4）}\\
&=1\to g(v_1,\cdots,v_{n-1}) && \text{（由公式 1）}\\
&=g(v_1,\cdots,v_{n-1}) && \text{（由公式 2）}\\
&=f(v_1,\cdots,v_{n-1},1). && \text{（}g\text{ 的定义）}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(v_1,\cdots,v_{n-1},0)&=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to0)\\
&\quad\to\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})\to1)\\
&=\neg h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to0 && \text{（由公式 4,3，及}\neg1=0\text{）}\\
&=\neg\neg h(v_1,\cdots,v_{n-1}) && \text{（由公式 4）}\\
&=h(v_1,\cdots,v_{n-1}) && \text{（由公式 1）}\\
&=f(v_1,\cdots,v_{n-1},0). && \text{（}h\text{ 的定义）}
\end{aligned}$$

所得结果说明对任意 $v_1,\cdots,v_n\in Z_2$，都有

$$k(v_1,\cdots,v_n)=f(v_1,\cdots,v_n),$$

于是 $f=k$。**证毕。**

上面关于真值函数的讨论虽用了符号$\neg$和$\to$，但还不是逻辑，而是数学。

练 习 一

1．对给定的$n>0$，有多少个不同的n元真值函数？

2．证明任一真值函数可由$\neg$及二元运算$\vee$和$\wedge$表示出来。这里$\vee$和$\wedge$分别用来表示二元真值函数f_2和f_8：

$$v_1 \vee v_2 = f_2(v_1, v_2),$$
$$v_1 \wedge v_2 = f_8(v_1, v_2).$$

1.2 命题演算 L

1.2.1 自由命题代数 L(X)

定义 1 具有一元运算$\neg$和二元运算$\to$的集合叫做命题代数。

在这个定义中，集合是随意的，且只要求$\neg$是个一元运算，$\to$是个二元运算。除此之外，没有要求它们具有其他特殊性质。我们仍把$\neg$叫做"非"，把$\to$叫做"蕴涵"，这并不意味着它们一定要有什么逻辑性质。

在1.1中我们给集$Z_2=\{0,1\}$定义了运算$\neg$和$\to$，使Z_2成了一种特殊的命题代数。

下面我们要构造一种重要的、新的命题代数——自由命题代数L(X)，以它作为建立命题演算L这个数学模型的基础。

设有可数集$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$和只含有两个元素的集$\{a,b\}$。现在我们由这两个集（X和$\{a,b\}$）出发构造出一列集$L_0, L_1, L_2, \cdots$，构造的方法如下。令

$L_0 = X = \{x_1, x_2, \cdots\}$,

$L_1 = \{a\}\times L_0 \cup \{b\}\times L_0 \times L_0 = \{(a,x_1),(a,x_2),\cdots,$
$(b,x_1,x_1),(b,x_1,x_2),(b,x_2,x_1),\cdots\}$,

$L_2 = \{a\}\times L_1 \cup \{b\}\times L_0 \times L_1 \cup \{b\}\times L_1 \times L_0$

$= \{(a,(a,x_1)),(a,(a,x_2)),\cdots,(a,(b,x_1,x_1)),\cdots,$
$(b,x_1,(a,x_1)),\cdots,(b,x_1,(b,x_1,x_1)),\cdots,$
$(b,(a,x_1),x_1),\cdots,(b,(b,x_1,x_1),x_1),\cdots\},$
$\cdots\cdots$.

这样，我们就得到一列形式上一个比一个更为复杂的集。这一列集的定义可归纳写成：

$L_0 = X,$

$L_k = \{a\} \times L_{k-1} \cup \left(\bigcup_{i+j=k-1} \{b\} \times L_i \times L_j \right),\ k>0.$

最后把这一列集 $L_0, L_1, \cdots$ 全部并在一起，构成一个新的集 $L(X)$：

$$L(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k.$$

下面证明这样得到的集 $L(X)$ 有两条性质——可数性和分层性。分层性是指形成 $L(X)$ 的任意两个不同层次 L_i 与 L_j 没有公共元素。

命题 1　$L(X)$ 是可数集。

证　对层次数 k 归纳，由 0.3 命题 3、命题 4、命题 5 即可知每个层次 L_k 都是可数集。再由 0.3 命题 6 便知 $L(X)$ 是可数集。**证毕。**

命题 2　（$L(X)$ **的分层性**）　**当** $0 \leqslant i < j$ **时，** $L_i \cap L_j = \phi$.

证　对 i 归纳，证明对于每一个 $i \geqslant 0$，只要 $j > i$，便有

$$L_i \cap L_j = \phi.$$

$i=0$ 时，$L_0 = \{x_1, x_2, \cdots\}$，而 $L_j\ (j>0)$ 的元素只有两种形式 (a,p) 与 (b,p,q)，所以对于任何 $j>0$，L_0 与 L_j 没有公共元素。

$i>0$ 时，对任意 $j>i$，要证明 L_j 与 L_i 没有公共元素。事实上，L_i 的元素有两种类型：(a,p) 和 (b,p_1,p_2)；L_j 的元素有两种类型：(a,q) 和 (b,q_1,q_2)。因为 p,p_1,p_2 属于比 L_i 低的层次，所以对它们可用归纳假设。首先，p 属于 $i-1$ 层，而 q 属于 $j-1$ 层（见 L_k 的定义），又因 $j-1>i-1$，所以

$p \neq q$，进而 $(a,p) \neq (a,q)$。剩下要证明 L_i 中另一种类型的元素 (b,p_1,p_2) 与 L_j 中相应类型的元素 (b,q_1,q_2) 不会相等。如果 $(b,p_1,p_2) = (b,q_1,q_2)$，便有 $p_1 = q_1$ 且 $p_2 = q_2$。这是不可能的，因为根据 L_k 的定义，p_1 与 p_2 所在层次数之和为 $i-1$，而 q_1 与 q_2 所在层次数之和为 $j-1$，所以 $p_1 \neq q_1$ 与 $p_2 \neq q_2$ 这二者必居其一，或同时出现。（这里再一次要用到归纳假设。）总之，当 $j > i$ 时，L_i 与 L_j 没有公共元素。**证毕。**

L(X) 的分层性是后面的一些归纳定义的依据。

有了集 L(X)，但它现在还不是命题代数。为了用它来构造命题演算，还要使它成为命题代数。为此，要在 L(X) 中定义一个一元运算 $\neg$ 和一个二元运算 $\rightarrow$。定义的方法如下。

对于任意 $p,q \in L(X)$，令

$$\neg p = (a,p),$$
$$p \rightarrow q = (b,p,q).$$

按以上定义我们可以看到，当 p 属于层次 L_i 时，$\neg p$ 便属于层次 L_{i+1}；当 p 属于层次 L_i 而 q 属于层次 L_j 时，$p \rightarrow q$ 便属于层次 L_{i+j+1}。

由于带有运算 $\neg$ 和 $\rightarrow$，集 L(X) 现在成了命题代数。

从现在起，我们可以把命题代数 L(X) 的各个层次按运算的定义如下写出：

$$L_0 = \{x_1, x_2, \cdots\},$$
$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, \cdots, x_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, \cdots\},$$
$$\begin{aligned} L_2 = \{&\neg\neg x_1, \neg\neg x_2, \cdots, \neg(x_1 \rightarrow x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_2), \cdots, \\ &x_1 \rightarrow \neg x_1, \cdots, x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), \cdots, \\ &\neg x_1 \rightarrow x_1, \cdots, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, \cdots\}, \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$。

L_k 中的元素叫做 L(X) 的第 k 层元素。它们都可以看作是由 L_0（即 X）的元素经 k 次运算得来的，毫无例外。对层次数 k 进行简单的归纳便可证明这一点。

注意，由命题 2 知 $\neg\neg x_i \neq x_i$。试将这个事实与命题代数

Z_2加以比较。对于Z_2，我们有$\neg\neg v=v$。（1.1公式1。）

上面得到的$L(X)$通常叫做由集X生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型代数。以后出现“由某某集生成的某某型代数”这样的对象，指的都是由类似于上面的过程得到的代数系统。

把上面的X换成$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，用相同的方法可以构造出命题代数$L(X_n)$，即由集X_n生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型代数。不同的是，现在的$L_0=\{x_1,\cdots,x_n\}$。L_0是个有限集，$L(X_n)$仍是个可数集。$L(X_n)$同样具有分层性。从构造过程看出，$L(X_n)\subseteq L(X)$，$L(X_n)$叫做命题代数$L(X)$的子代数。

现在正式给出自由命题代数的定义。

定义 2 （自由命题代数） 设$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$,$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$。**命题代数**$L(X)$ **（即由**X**生成的**$\{\neg,\rightarrow\}$**型代数）叫做由集**X**生成的自由命题代数；**$L(X_n)$**叫做由集**X_n**生成的自由命题代数。我们还把**X**和**X_n**叫做命题变元集，把**X**和**X_n**的元素**x_i**叫做命题变元。**

总结一下以上过程，我们发现，下面两条就给出了自由命题代数$L(X)$的全部元素：

1° 每个命题变元$x_i\in L(X)$；

2° 若$p,q\in L(X)$，则$\neg p$，$p\rightarrow q\in L(X)$。

从一开始就可以把这两条拿出来，把整个过程省掉。但我们不想那样做，而是把$L(X)$作为一种代数系统建立起来，这样就可以用代数方法对它进行数学研究。

这里讨论的仍然是数学而不是逻辑。当然，我们可以去思考它们可能有什么样的逻辑意义。

练 习 二

1．证明，$L(X)$的每个第k层元素（$k>0$）都可由命题变元经k次运算得到。

2．写出由$X_1=\{x_1\}$生成的自由命题代数$L(X_1)$的前四个

层次 L_0, L_1, L_2 和 L_3。(将每个元素都作为运算的结果写出。)

3. 写出由 $X_2=\{x_1,x_2\}$ 生成的自由命题代数 $L(X_2)$ 的前三个层次 L_0, L_1 和 L_2。

4. $L(X_3)$ 的 L_1, L_2 和 L_3 各有多少个元素?

1.2.2 命题演算 L 的建立

定义 1 (命题演算 L) 命题变元集 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 上的命题演算 L, 是指带有下面规定的"公理"和"证明"的自由命题代数 $L(X)$。

(1) "公理"

取 $L(X)$ 的具有以下形状的元素作为"公理":

(L1) $p\to(q\to p)$, **(肯定后件律)**

(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$, **(蕴涵词分配律)**

(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$, **(换位律)**

其中 p,q, $r\in L(X)$.

(2) "证明"

设 $\Gamma\subseteq L(X)$, $p\in L(X)$。当我们说"p 是从 Γ 可证的", 是指存在着 $L(X)$ 的元素的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$, 其中 $p_n=p$, 且每个 p_k $(k=1,\cdots,n)$ 满足:

(i) $p_k\in\Gamma$, **或**

(ii) p_k **是"公理", 或**

(iii) **存在** $i,j<k$ **使** $p_j=p_i\to p_k$.

具有上述性质的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$ 叫做 p 从 Γ 的"证明".

让我们对这个定义作些解释和说明。

1° 命题演算 L 是用自由命题代数 $L(X)$ 定义的. 简单地说, L 就是 $L(X)$。但 L 比 $L(X)$ 有更多的内容。L 以 $L(X)$ 为框架, 同时又有一些 $L(X)$ 所没有的新的内部结构。

2° 定义中的"公理"和"证明"加上了引号, 是为了说明这里的概念是命题演算 L 这个形式系统中的数学概念("公理"

是L(X)的一些特殊元素；"证明"则是由L(X)的一些元素组成的具有特殊性质的有限序列），以便把它们和元系统中的公理和证明区别开来。以后在不引起混淆时，常把所加的引号去掉。这里的"证明"，通常也叫做形式证明。

3° "公理"中的p,q,r是L(X)的任意元素，故L的"公理"不是三条而是无穷多条，它们被分成(L1)，(L2)，(L3)这三种模式。例如，下面三个元素都是(L1)型的"公理"：

$$x_1\to(x_1\to x_1),$$
$$\neg x_7\to(x_{10}\to\neg x_7),$$
$$(\neg x_2\to x_3)\to(\neg\neg x_4\to(\neg x_2\to x_3)).$$

4° 取L(X)的一些特殊元素作为"公理"，取法不是唯一的。不同的取法可得到不同类型的命题演算。

5° 按定义，p从Γ可证，是指存在着"证明"：$p_1,\cdots,p_n$。这样的证明如果存在，一定不是唯一的。比如，我们可以在任一个"证明"中多插进任一条"公理"而得到另一个"证明"。

6° 写出一个L中的"证明"，有三条规则，其中规则(iii)的意思是，如果在序列的前面已经写出了p_i和$p_i\to p_k$，则可在后面写出p_k：

$$\cdots,p_i\to p_k,\cdots,p_i,\cdots,p_k,\cdots,$$

其中p_i也可出现在$p_i\to p_k$之前。

定义 2 （合式公式，语法推论） 建立了命题演算L之后，进一步规定：

(1) L(X)的元素叫做命题演算L的合式公式，简称为公式。（于是下面两条给出了L的全部公式：(i) 命题变元都是公式；(ii) 若p,q是公式，则$\neg p$，$p\to q$也是公式。）形为$\neg p$的公式叫做否定式。形为$p\to q$的公式叫做蕴涵式，其中p叫做蕴涵式的前件，q叫做蕴涵式的后件。

(2) 如果公式p从公式集Γ可证，那么我们写$\Gamma\vdash p$，必要时也可写成$\Gamma\underset{L}{\vdash}p$。这时$\Gamma$中的公式叫做"假定"，$p$叫做

假定集 Γ 的语法推论。

(3) 若 $\phi\vdash p$，则称 p 是 L 的"定理"，记为 $\vdash p$。p 在 L 中从 ϕ 的证明 $p_1,\cdots,p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明。

(4) 在一个证明中，当 $p_j=p_i\to p_k$ $(i,j<k)$ 时，就说 p_k 是由 p_i，$p_i\to p_k$ 使用假言推理 (modus ponens) 这条推理规则而得，或简单地说"使用MP而得"。

本章中出现的 p,q,r 等字母用于表示 L 的任意公式。注意它们和命题变元的关系。命题变元 x_i 是 L(X) 的零层公式，而 p,q,r 等则是 L(X) 的任意公式，可以是命题变元，也可以是其他层次的公式。

至此，我们关于命题演算 L所作的讨论尽管内容还是属于数学，但 L已经不同于一般的数学，而是一种具有特殊结构的代数系统，是为了研究命题逻辑而建立的一种具体数学模型。这种形式系统能不能用来表现实际的推理过程，在多大程度上能用来表现实际的推理过程，正是我们所要研究的事情。尽管现在就可以对 L 作逻辑解释，但我们还不急于立即这样做，而是先对 L 本身作些初步研究。

如果"证明"的定义搞清楚了，便可以立即得出以下几点结论。

1° 若 p 是 L 的公理，则 $\Gamma\vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立。

2° 若 $\vdash p$ (即 p 是 L 的定理)，则 $\Gamma\vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立。

3° 若 $p\in\Gamma$，则 $\Gamma\vdash p$。

4° $\{p,p\to q\}\vdash q$。

5° 若 $\Gamma\vdash p_n$，且已知 $p_1,\cdots,p_n$ 是 p_n 从 Γ 的证明，则当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，有 $\Gamma\vdash p_k$，且 $p_1,\cdots,p_k$ 是 p_k 从 Γ 的证明。

6° 若 Γ 是无限集，且 $\Gamma\vdash p$，则存在 Γ 的有限子集 Δ 使 $\Delta\vdash p$。

写出一个符合要求的 L中的证明，往往并不容易。下面先看

几个简单的例子。

例 1 证明$\{p\}\vdash q\to p$。

为证$\{p\}\vdash q\to p$，我们构造$q\to p$从$\{p\}$的一个“证明”如下：

（1）p 假定

（2）$p\to(q\to p)$ （L1）

（3）$q\to p$ （1），（2），MP。**证毕。**

我们把“证明”中公式的编号写在该公式的左边，而把写出该公式的依据写在该行的最右端。这些编号和依据并不是“证明”的一部分。本例中的“证明”，是由三个公式构成的有限序列：

$$p,\ p\to(q\to p),\ q\to p.$$

例1的结论$\{p\}\vdash q\to p$是（L1）的变形，有时也叫做“肯定后件律”。

例 2 证明$\vdash(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$。

下面是$(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$在L中的一个证明：

（1）$x_1\to(x_2\to x_1)$ （L1）

（2）$(x_1\to(x_2\to x_1))\to((x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1))$ （L2）

（3）$(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$ （1），（2），MP。**证毕。**

例 3 证明$\{x_1, x_2\to(x_1\to x_3)\}\vdash x_2\to x_3$。

下面是所要的一个证明：

（1）$x_2\to(x_1\to x_3)$ 假定

（2）$(x_2\to(x_1\to x_3))\to((x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3))$ （L2）

（3）$(x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3)$ （1），（2）MP

（4）x_1 假定

（5）$x_1\to(x_2\to x_1)$ （L1）

（6）$x_2\to x_1$ （4），（5），MP

（7）$x_2\to x_3$ （3），（6），MP。**证毕。**

命题 1 $\vdash p\to p$ **（同一律）**

证 下面是$p\to p$在L中的一个证明：

(1) $p\to((p\to p)\to p)$ (L1)

(2) $(p\to((p\to p)\to p))\to((p\to(p\to p))\to(p\to p))$ (L2)

(3) $(p\to(p\to p))\to(p\to p)$ (1)，(2)，MP

(4) $p\to(p\to p)$ (L1)

(5) $p\to p$ (3)，(4)，MP。**证毕。**

命题 2 $\vdash\neg q\to(q\to p)$ **（否定前件律）**

证 下面是所要的证明：

(1) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ (L3)

(2) $((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))\to(\neg q\to((\neg p\to\neg q)$
$\to(q\to p)))$ (L1)

(3) $\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))$ (1)，(2)，MP

(4) $(\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p)))$
$\to((\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p)))$ (L2)

(5) $(\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p))$ (3)，(4)，MP

(6) $\neg q\to(\neg p\to\neg q)$ (L1)

(7) $\neg q\to(q\to p)$ (5)，(6)，MP。**证毕。**

命题 2 的证明中开始用了（L3）型公理，而以前的例题和命题并未用(L3)。

定义 3（无矛盾公式集）如果对任何公式 q，$\Gamma\vdash q$ 和 $\Gamma\vdash\neg q$ 二者不同时成立，就称公式集 Γ 是无矛盾公式集。否则称 Γ 为有矛盾集。

命题 3 若 Γ 是有矛盾公式集，则对 L 的任一公式 p，都有 $\Gamma\vdash p$。

证 Γ 有矛盾，即存在公式 q 使 $\Gamma\vdash q$ 和 $\Gamma\vdash\neg q$ 同时成立。于是对任一公式 p，存在着 p 从 Γ 的证明：

$\cdots$，q，$\cdots$，$\neg q$，$\cdots$，$\neg q\to(q\to p)$，$q\to p$，p。

这里利用了命题 2 的结论（否定前件律）。**证毕。**

为从 Γ 可证的公式 p 写出一个符合定义要求的从 Γ 的证明，构造的方法往往不容易想出来。这种证明往往还要写得很长。例

如，可以证明，公式 $(\neg p\to p)\to p$ 是 L 的定理，但我们若要严格按照定义写出它在 L 中的一个证明，要写十九步。

下面介绍的三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律将会帮助我们建立 $\Gamma\vdash p$ 这种形式的结果。但在开头，还是有必要做一些按照定义写出证明的练习。

练　习　三

1．证明 L 中所有能写出的"证明"构成的集是可数集。

2．写出以下公式在 L 中的"证明"（即证明它们是 L 的定理）．

1° $(x_1\to x_2)\to((\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1))$,

2° $((x_1\to(x_2\to x_3))\to(x_1\to x_2))\to((x_1\to(x_2\to x_3))\to(x_1\to x_3))$,

3° $x_1\to(x_2\to(x_1\to x_2))$.

3．证明下面的结论。

1° $\{\neg p\}\vdash p\to q$,

2° $\{\neg\neg p\}\vdash p$,

3° $\{p\to q,\ \neg(q\to r)\to\neg p\}\vdash p\to r$,

4° $\{p\to(q\to r)\}\vdash q\to(p\to r)$,

5° $\{p\to q,\ q\to r\}\vdash p\to r$.

4．试证，若 $\Gamma\vdash q$ 且 $\Gamma\cup\{q\}\vdash p$，则 $\Gamma\vdash p$。

1.2.3　演 绎 定 理

我们很快会看到，在研究命题演算 L 的过程中，下面的演绎定理是很有用的重要结论。

定理（演绎定理） $\Gamma\cup\{p\}\vdash q\ \Leftrightarrow\ \Gamma\vdash p\to q$.

证　($\Leftarrow$)　假定 $\Gamma\vdash p\to q$。由定义，$p\to q$ 在 L 中有一个从 Γ 的证明 $p_1,\ \cdots,\ p_n$，其中 $p_n=p\to q$。于是

$$p_1,\ \cdots,\ p_n,\ p,\ q$$

便是 q 在 L 中从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的证明。

($\Rightarrow$) 假定 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，并设 $q_1,\cdots,q_n(=q)$ 是 q 从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的一个证明.我们对这个证明的长度 n 用归纳法来证明 $\Gamma\vdash p\to q$.

1° $n=1$ 时，有三种可能：$q=p$，$q\in\Gamma$，或 q 是公理。不管哪种情况出现，都有 $\Gamma\vdash p\to q$。事实上，当 $q=p$ 时，由1.2.2命题 1 知 $\vdash p\to p$，于是有 $\Gamma\vdash p\to p$ 即 $\Gamma\vdash p\to q$；当 $q\in\Gamma$ 或 q 为公理时，序列

$$q,\ q\to(p\to q),p\to q$$

就是 $p\to q$ 从 Γ 的证明。

2° $n>1$ 时，有四种可能的情形：$q=p$，$q\in\Gamma$，q 是公理，或 q 由于使用 MP 而得. 前三种情形与 1° 中的三种情形同样处理就可以了. 下面只用讨论 q 由 q_i 及 $q_j=q_i\to q$ 使用 MP 而得的情形。因 $i,j<n$，由归纳假设，

$$\Gamma\cup\{p\}\vdash q_i \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q_i,$$

$$\Gamma\cup\{p\}\vdash q_j \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q_j \text{ 即 } \Gamma\vdash p\to(q_i\to q).$$

于是我们有 $p\to q$ 从 Γ 的证明：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (k) & p\to q_i\end{array}\right\} p\to q_i \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k+1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (l) & p\to(q_i\to q)\end{array}\right\} p\to(q_i\to q) \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$(l+1)$	$(p\to(q_i\to q))\to((p\to q_i)\to(p\to q))$	(L2)
$(l+2)$	$(p\to q_i)\to(p\to q)$	$(l),(l+1)$,MP
$(l+3)$	$p\to q$	$(k),(l+2)$,MP

这就完成了归纳过程。**证毕。**

推论（假设三段论） $\{p\to q,q\to r\}\vdash p\to r$。

证 根据演绎定理，为了证明 $\{p\to q,q\to r\}\vdash p\to r$，只用证明 $\{p\to q,q\to r,p\}\vdash r$ 就可以了。不难看出，

$$p,\ p\to q, q, q\to r, r$$

就是 r 从 $\{p\to q, q\to r, p\}$ 的证明。**证毕。**

假设三段论 (Hypothetical Syllogism) 简记作 HS，以后可作为一条新推理规则直接引用。

为了建立 $\Gamma\vdash p\to q$ 这种形式的结果，使用演绎定理往往是比较方便的。这是因为，引进了一个新假定 p 以后，证明 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 一般要比证明 $\Gamma\vdash p\to q$ 容易得多。为了看清这一点，只要把上面推论的证明与练习三题 3－5° 中的结论的证明加以比较就可以了。

注意，在证明演绎定理的过程中没有用到 (L 3) 型公理。这说明如果在建立 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 的过程中没有用 (L 3)，那么不用 (L 3) 就可以建立 $\Gamma\vdash p\to q$，而且反过来也是如此。换句话说，如果在命题演算 L 的定义中把 (L3) 去掉或换成别的公理，但其他都保持不变，那么演绎定理对新的命题演算系统仍然成立。

例 1 重新证明 $\vdash\neg q\to(q\to p)$。（试与 1.2.2 命题 2 的证明加以比较。）

根据演绎定理，只用证 $\{\neg q\}\vdash q\to p$。

下面是 $q\to p$ 从 $\{\neg q\}$ 的证明：

(1)	$\neg q\to(\neg p\to\neg q)$	(L1)
(2)	$\neg q$	假定
(3)	$\neg p\to\neg q$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	(L3)
(5)	$q\to p$	(3), (4), MP

命题 1 （否定肯定律） $\vdash(\neg p\to p)\to p$。

证 由演绎定理，只用证明 $\{\neg p\to p\}\vdash p$。

下面是 p 从 $\{\neg p\to p\}$ 的一个证明。

(1) $\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p))$ （由1.2.2命题 2）

(2) $(\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p)))$

$$\rightarrow((\neg p\rightarrow p)\rightarrow(\neg p\rightarrow\neg(\neg p\rightarrow p)))$$ (L2)

（3） $(\neg p\rightarrow p)\rightarrow(\neg p\rightarrow\neg(\neg p\rightarrow p))$ (1),(2),MP

（4） $\neg p\rightarrow p$ 假定

（5） $\neg p\rightarrow\neg(\neg p\rightarrow p)$ (3),(4),MP

（6） $(\neg p\rightarrow\neg(\neg p\rightarrow p))\rightarrow((\neg p\rightarrow p)\rightarrow p)$ (L3)

（7） $(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$ (5),(6),MP

（8） p (4),(7),MP。**证毕**。

命题1的证明中列出的“证明”已经不是原来定义所要求的严格意义下的“证明”，因为这里已经引用了前面建立的结论（即1.2.2命题2——否定前件律——的特殊情形）。尽管如此，仍足以证明所要建立的结论是正确的。（参见练习三题4.）

练　习　四

1. 先根据定义直接证明

$$\vdash(x_1\rightarrow(x_1\rightarrow x_2))\rightarrow(x_1\rightarrow x_2),$$

然后再利用演绎定理来证明它。

2. 利用演绎定理证明以下公式是L的定理。

1° $p\rightarrow\neg\neg p$。

2° $(q\rightarrow p)\rightarrow(\neg p\rightarrow\neg q)$。（换位律）

3° $((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$。（Peirce律）

4° $\neg(p\rightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$.

1.2.4 反证律与归谬律

下面要建立的两个语法定理（反证律与归谬律）和演绎定理一样，对进行形式推理常有很大帮助。

定理1（反证律）

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q\\ \Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q\end{array}\right\}\Rightarrow\Gamma\vdash p.$$

证 根据已知条件（q 和 $\neg p$ 都存在从 $\Gamma\cup\{\neg p\}$ 的证明），可以先写出 p 从 $\Gamma\cup\{\neg p\}$ 的证明如下：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (k) & q\end{array}\right\} q \text{ 从 } \Gamma\cup\{\neg p\} \text{ 的证明}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k+1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (l) & \neg q\end{array}\right\} \neg q \text{ 从 } \Gamma\cup\{\neg p\} \text{ 的证明}$$

$(l+1)$	$\neg q\to(q\to p)$	否定前件律
$(l+2)$	$q\to p$	$(l),(l+1)$，MP
$(l+3)$	p	$(k),(l+2)$，MP

至此证明了 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash p$。（尚未达到目的：$\Gamma\vdash p$。）用一次演绎定理，可得 $\Gamma\vdash\neg p\to p$。由此可将 p 从 Γ 的证明如下构造出来：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (m) & \neg p\to p\end{array}\right\} \neg p\to p \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$(m+1)$	$(\neg p\to p)\to p$	否定肯定律
$(m+2)$	p	$(m),(m+1)$，MP

于是有 $\Gamma\vdash p$。**证毕。**

反证律与直观的反证法是一致的：为证明一个命题，先否定它；推出了矛盾，就可以肯定它。

在证明反证律的过程中并未直接用到（L 3），但用到了否定前件律和否定肯定律，这“二律”的**证**明都是要用（L 3）的。

下例用来说明反证律的应用。

例 1 证明 $\vdash(\neg p\to\neg q)\to((\neg p\to q)\to p)$。

由演绎定理，只用证 $\{\neg p\to\neg q,\ \neg p\to q\}\vdash p$。为用反证律，我们把 $\neg p$ 作为新假定。以下公式从 $\{\neg p\to\neg q, \neg p\to q,\ \neg p\}$ 都

是可证的。

（1）$\neg p$ 新假定

（2）$\neg p\to\neg q$ 假定

（3）$\neg p\to q$ 假定

（4）$\neg q$ （1），（2），MP

（5）q （1），（3），MP

由（4），（5）用反证律即得$\{\neg p\to\neg q,\neg p\to q\}\vdash p$。

作一比较，下面不用反证律给出 p 从$\{\neg p\to\neg q,\neg p\to q\}$ 的一个证明。

（1）$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ （L3）

（2）$\neg p\to\neg q$ 假定

（3）$q\to p$ （1），（2），MP

（4）$\neg p\to q$ 假定

（5）$\neg p\to p$ （3），（4），HS

（6）$(\neg p\to p)\to p$ 否定肯定律

（7）p （5），（6），MP

这个证明更长。问题还在于这种构造证明的方法不容易想出来。

定理 1 推论（双重否定律）

1° $\{\neg\neg p\}\vdash p$，

2° $\vdash\neg\neg p\to p$。

证 用反证律证 1°（由 1°用演绎定理即可得出 2°），把$\neg p$ 作为新假定，便有

（1）$\{\neg\neg p,\neg p\}\vdash\neg p$，

（2）$\{\neg\neg p,\neg p\}\vdash\neg(\neg p)$。

由（1），（2）用反证律即得$\{\neg\neg p\}\vdash p$。证毕。（试与练习三题 3－2°未用反证律的证明加以比较。）

定理 2（归谬律）

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\cup\{p\}\vdash q\\ \Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q\end{array}\right\}\Rightarrow\ \Gamma\vdash\neg p.$$

证 因已知 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，故存在 q 从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的证明。在这个证明中所有出现的假定 p 之前，都插入 $\neg\neg p$ 和 $\neg\neg p\to p$ 这两项，于是该证明就变成了 q 从 $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}$ 的一个证明，从而得到

（1）$\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash q$。

同理由已知条件 $\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q$ 可得

（2）$\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash\neg q$。

由（1），（2）用反证律得 $\Gamma\vdash\neg p$。这样便由反证律推出了归谬律。证毕。

下例用来说明归谬律的应用。

例 2 证明 $\vdash p\to(\neg q\to\neg(p\to q))$。

由演绎定理，只用证 $\{p,\neg q\}\vdash\neg(p\to q)$。把 $p\to q$ 作为新假定，立即可得

（1）$\{p,\neg q,p\to q\}\vdash q$，

（2）$\{p,\neg q,p\to q\}\vdash\neg q$。

由（1），（2）用归谬律便得 $\{p,\neg q\}\vdash\neg(p\to q)$。

定理 2 推论（第二双重否定律）

1° $\{p\}\vdash\neg\neg p$，

2° $\vdash p\to\neg\neg p$。

证 因

（1）$\{p,\neg\neg p\}\vdash p$，

（2）$\{p,\neg p\}\vdash\neg p$，

由（1），（2）用归谬律即得 $\{p\}\vdash\neg\neg p$。证毕。

可以看出，演绎定理、反证律和归谬律的共同点是：用增加新假定的办法使形式证明更易于进行。

反证律和归谬律有什么不同？从形式上看，似乎差别不大。反证律是将待证公式先否定，把否定的待证公式作为新假定，若

推出矛盾，则肯定这个待证公式；归谬律是将待证的否定式先肯定，去掉前边的否定号后作为新假定，若推出矛盾，则证明了原否定式。对我们的系统来说，反证律和归谬律的差别是不重要的。前者常用来证明肯定式，后者常用来证明否定式。但对于其他某些系统来说，它们的差别是本质的。

前面我们曾多次提醒，有些证明用了（L 3），而有些证明则与（L 3）无关。许多不同的系统之间的差别，集中表现在对公理模式（L 3）态度上。

一些系统不承认（L 3），在这些系统中，（L 3）被换成了强弱不等但都比（L 3）较弱的形式。它们共同点往往是：不承认反证律，但承认归谬律。

现把一些重要结论列出如下，以后可以直接引用。

$\vdash p\to p$（同一律）

$\vdash \neg q\to(q\to p)$（否定前件律）

$\vdash(\neg p\to p)\to p$（否定肯定律）

$\vdash(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$（HS，即假设三段论）

$\vdash\neg\neg p\to p$（双重否定律）

$\vdash p\to\neg\neg p$（第二双重否定律）

$\vdash(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$（换位律，见练习四题2-2°。）

练　习　五

1. 证明

1° $\vdash(p\to\neg q)\to(q\to\neg p)$。

2° $\vdash(\neg p\to q)\to(\neg q\to p)$。

3° $\vdash\neg(p\to q)\to\neg q$。

4° $\vdash\neg(p\to q)\to p$。

5° $\vdash(p\to q)\to((\neg p\to q)\to q)$。

2. 不用（L 3），试由归谬律和定理1推论（即$\vdash\neg\neg p\to p$）推出反证律。

1.2.5 析取，合取与等值

对于一个一般的命题代数A（它有一个一元运算$\neg$和一个二元运算$\rightarrow$），还可以在其中定义三个新的二元运算：$\vee$（析取），$\wedge$（合取）和$\leftrightarrow$（等值）。它们的定义式是：

$$a_1\vee a_2=\neg a_1\rightarrow a_2,$$

$$a_1\wedge a_2=\neg(a_1\rightarrow\neg a_2),$$

$$a_1\leftrightarrow a_2=(a_1\rightarrow a_2)\wedge(a_2\rightarrow a_1),$$

其中a_1，a_2是A的任意元素。

对于命题代数Z_2，根据原来1.1中$\neg$，$\rightarrow$的定义和现在$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$的定义，可算出下表：

v_1	v_2	$v_1\rightarrow v_2$	$v_1\vee v_2$	$v_1\wedge v_2$	$v_1\leftrightarrow v_2$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1

这里的$\vee$，$\wedge$和$\leftrightarrow$就是1.1中的二元真值函数表里的f_2，f_8和f_7。它们也可用以下公式来表示：

$$v_1\vee v_2=v_1+(1-v_1)v_2,$$

$$v_1\wedge v_2=v_1v_2,$$

$$v_1\leftrightarrow v_2=v_1v_2+(1-v_1)(1-v_2).$$

对于自由命题代数L（X），在其中引进了运算$\vee$，$\wedge$和$\leftrightarrow$之后，便有以下关于命题演算L的结果。

命题 1

1° $\vdash p\rightarrow(p\vee q)$.

2° $\vdash q\rightarrow(p\vee q)$.

3° $\vdash(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$.

4° $\vdash(p\vee p)\rightarrow p$.

5° $\vdash\neg p\vee p$. **（排中律）**

证 1° 由否定前件律（或 1.2.2 命题 3）即可得

$$\{p, \neg p\} \vdash q,$$

用两次演绎定理，便有 $\vdash p \to (\neg p \to q)$，此即 $\vdash p \to (p \vee q)$。

2° $q \to (\neg p \to q)$ 是(L1)型公理。

3° 留作练习。

4° $(p \vee p) \to p$ 就是否定肯定律 $(\neg p \to p) \to p$。

5° 排中律 $\neg p \vee p$ 就是双重否定律 $\neg\neg p \to p$。**证毕。**

命题 2

1° $\vdash (p \wedge q) \to p$。

2° $\vdash (p \wedge q) \to q$。

3° $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$。

4° $\vdash p \to (p \wedge p)$。

5° $\vdash p \to (q \to (p \wedge q))$。

6° $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$。 **（矛盾律）**

证 要证 $\vdash (p \wedge q) \to p$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to p$。下面是所要的一个证明：

（1）	$\neg p \to (p \to \neg q)$	否定前件律
（2）	$(\neg p \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg p)$	换位律
（3）	$\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg p$	（1），（2），MP
（4）	$\neg\neg p \to p$	双重否定律
（5）	$\neg(p \to \neg q) \to p$	（3），（4），HS

矛盾律 $\neg(p \wedge \neg p)$ 按 $\wedge$ 的定义就是

$$\neg\neg(p \to \neg\neg p),$$

证明时要两次应用第二双重否定律。

其余结论的证明细节略去。方式是类似的，都是先把 $\wedge$ 按定义换成用 $\neg$ 和 $\to$ 来表示。**证毕。**

命题 3

1° $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$。

2° $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$。

3° $\vdash (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$.

4° $\vdash (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$.

5° $\vdash (p\to q)\to((q\to p)\to(p\leftrightarrow q))$.

命题 4 (De·Morgan律)

1° $\vdash \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$.

2° $\vdash \neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$.

练　习　六

1. 证明命题 1-3°.
2. 证明命题 2-2°,3°,4°.
3. 证明命题 3-4°.
4. 证明命题 4-1°.

*1.2.6　命题演算的其他系统介绍

本段内容与后文关系不大，可略去不读。

在建立命题演算时采用哪些公式作为公理，可以有不同的选择，从而可以得到不同的系统。

1) 古典命题演算系统

把L中的（L3）型公理去掉，换上

(L′3)　$\neg q\to(q\to p)$　(否定前件律)

(L′4)　$(\neg p\to p)\to p$　(否定肯定律)

而其他皆保持不变，得到的命题演算记作L′。

把L中的(L3)去掉，但允许使用反证律，得到的系统记作F。

把L中的（L3)去掉，但允许使用归谬律，且以双重否定律(即$\neg\neg p\to p$）为公理，得到的系统记作F′。

这样我们就有了四个不同的命题演算系统，它们之间的区别是

L　有（L3），

L′ 有（L′3），（L′4），

F　有反证律，

F′　有归谬律和$\neg\neg p \to p$。

定理 1　L,L′,F,F′**四个系统等价，即：对任一公式** $p \in L(X)$，

$$\vdash_{L} p \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{L'} p \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{F} p \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{F'} p.$$

证　因为（L1）和（L2）是这些系统共有的，所以演绎定理对它们都成立。（见1.2.3例1前的一段说明。）

先来证F和F′的等价性。

由反证律可推出$\neg\neg p \to p$（1.2.4定理1推论），并进而可推出归谬律（1.2.4定理2）。在证明过程中都没有直接使用（L3）。这就说明，凡在F′中能证的公式在F中也能证，即

$$\vdash_{F'} p \quad \Rightarrow \quad \vdash_{F} p.$$

反之，由归谬律和$\neg\neg p \to p$能推出反证律，证明过程中不用（L3）。（见练习五题2。）于是有

$$\vdash_{F} p \quad \Rightarrow \quad \vdash_{F'} p.$$

下面证明L,L′,F三者等价。

前面已建立事实

$$\vdash_{L} \neg q \to (q \to p), \quad \text{（否定前件律）}$$

$$\vdash_{L} (\neg p \to p) \to p, \quad \text{（否定肯定律）}$$

这说明

$$\vdash_{L'} p \quad \Rightarrow \quad \vdash_{L} p.$$

在L′中可以导出反证律（注意1.2.4定理1的证明和1.2.4例1前的说明）。所以有

$$\vdash_{F} p \Rightarrow \vdash_{L'} p.$$

剩下只用证明$\vdash_{L} p \Rightarrow \vdash_{F} p$就可以了。

为此，只需要下面的结果：

$$\vdash_F (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)。\quad (\text{即}(L3))$$

事实上，我们有

1° $\{\neg p \to \neg q,\ q,\ \neg p\} \vdash_F q$,

2° $\{\neg p \to \neg q,\ q,\ \neg p\} \vdash_F \neg q$,

由 1°，2° 用反证律得

$\{\neg p \to \neg q, q\} \vdash_F p$,

再用两次演绎定理便可。**证毕。**

L，L'，F，F'以及任何与它们等价的系统都叫做古典命题演算系统。

$\neg\neg p \to p$ 由反证律（不直接用（L3））立即可证（见1.2.4定理 1 推论），但下面我们很快会看到，将反证律换成归谬律却办不到这一点。

2）极小系统

在 L 中去掉（L3），但允许使用归谬律，这样得到的系统（也可以说由 F'去掉$\neg\neg p \to p$ 所得的系统）叫做极小系统，记作 G。

因归谬律在 L 中成立，故有

$$\vdash_G p \quad \Rightarrow \quad \vdash_L p.$$

但反之不成立：存在着 L 的定理在 G 中得不到证明。

命题 1 $\vdash_G \neg\neg p \to p$ **和** $\vdash_G \neg q \to (q \to p)$ **不恒成立。**

证 先给每一个公式都规定一个"重量"w。规定的方式是

（1）命题变元的重量为 0，即 $w(x_i) = 0$;

（2）否定式的重量为 1，即 $w(\neg p) = 1$;

（3）若 $w(p) = 1$ 且 $w(q) = 0$，则 $w(p \to q) = 0$，否则 $w(p \to q) = 1$。

由简单的计算可知以下结论成立。

1°（L1）型和（L2）型公理的重量恒为 1。

2° 由重为1的公式经使用MP得出的公式重也恒为1，即

$$w(p)=w(p\to q)=1 \quad\Rightarrow\quad w(q)=1.$$

3° 用归谬律推出的公式（都是否定式）重恒为1。

由以上三个结论立即推出

$$\vdash_{G} p \quad\Rightarrow\quad w(p)=1.$$

但我们有

$$w(\neg\neg x_1\to x_1)=0$$
$$w(\neg\neg x_1\to(\neg x_1\to x_1))=0.$$

这说明$\neg\neg x_1\to x_1$和$\neg\neg x_1\to(\neg x_1\to x_1)$都不是G的定理，而前者是双重否定律$\neg\neg p\to p$的特例，后者是否定前件律$\neg q\to(q\to p)$的特例。**证毕。**

L与F等价，说明（L3）与反证律等价；L比G强，说明（L3）比归谬律强，即反证律比归谬律强。

注意，$\vdash_{G}\neg\neg p\to p$不恒成立。但$\vdash_{G} p\to\neg\neg p$却恒成立。（见1.2.4定理2推论及其证明。）所以双重否定律和第二双重否定律是有区别的。

3）Heyting 系统

把L中的（L3）换成

（L'3） $\neg q\to(q\to p)$，**（否定前件律）**

同时允许使用归谬律（即由极小系统G增加公理（L'3））得到的系统叫做Heyting系统，记作H。

命题 2 $\vdash_{H}\neg\neg p\to p$**不恒成立。**

证 给每个公式规定重量如下：

（1） $w(x_i)=0$。

（2） $w(p)=0 \quad\Rightarrow\quad w(\neg p)=2$,

$w(p)=1 \quad\Rightarrow\quad w(\neg p)=2$,

$w(p)=2 \quad\Rightarrow\quad w(\neg p)=1$.

（3） $w(p)=1$ 且 $w(q)=0 \quad\Rightarrow\quad w(p\to q)=0$,

$$w(p)=0 \text{ 且 } w(q)=2 \quad \Rightarrow \quad w(p\to q)=2,$$
$$w(p)=1 \text{ 且 } w(q)=2 \quad \Rightarrow \quad w(p\to q)=2,$$
其他情形规定 $w(p\to q)=1$。

重量的取值范围是$\{0,1,2\}$。

注意，在演绎定理成立的任何系统中，允许使用归谬律，相当于增加形为

$$(p\to q)\to((p\to\neg q)\to\neg p)$$

的公式为公理。所有这些公式，（L1）型和（L2）型公理，以及所有形为$\neg q\to(q\to p)$的公式，它们的重量全都恒为1。（验证留给读者。）同时，由重为1的公式使用MP得到的公式重也为1。这些事实说明

$$\vdash_{\mathrm{H}} p \quad \Rightarrow \quad w(p)=1,$$

但是我们有

$$w(\neg\neg x_1\to x_1)=0\text{。}$$ **证毕。**

上面介绍了两种非古典命题演算系统：极小系统G和Heyting 系统H。此外还有其他的非古典系统。它们强弱不等，但共同点是不承认双重否定律$\neg\neg p\to p$（即排中律$\neg p\vee p$）。

一种叫做直觉主义的学派，否认排中律在数学中可以无限制地运用；要求数学在涉及到一个对象的存在性时，应给出具体的构造方法；认为没有构造方法而只基于排中律给出的关于存在性的证明没有什么意义。

对于什么是数学上的“证明”，并不存在一个大家完全一致的回答。

1.3　命题演算L的语义学

命题演算L是用自由命题代数L(X)这种代数系统为框架建立起来的。从另一角度来看，又可以把它看成是一种形式语言，它的字母表包括：

运算符$\neg$和$\rightarrow$；

命题变元符$x_1, x_2, \cdots$；

右括号 ）和左括号（。

每个特定的公式（即L(X) 的一个特定元素）是一特定的有限字母串；而L中的"证明"$p_1, \cdots, p_n$则是字母串的有限序列，可以看成是用该字母表写出的文章。1.2中讨论的内容（包括L(X) 的构造以及L中证明的构造）相当于这种形式语言的语法——句法和文章构成法。

下面先转向这种形式语言的语义，给出它的逻辑解释。然后接着讨论它的语法和语义这两方面的关系。

1.3.1 L(X) 的赋值

L(X) 和Z_2是我们研究过的两种命题代数。为了给出L的逻辑解释，首先要建立起L(X) 和Z_2之间的适当联系。建立各种命题代数之间联系的桥梁是同态的概念。

定义 1（命题代数同态）设A，B都是命题代数。映射v：$A \rightarrow B$叫做A到B的（命题代数）同态，如果v满足：对任意$p, q \in A$，都有

$$v(\neg p) = \neg v(p),$$

$$v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q).$$

同态v具有的上述性质通常叫做"保运算性"。

例 1 Z_2到Z_2的恒等映射$I(I(x) = x)$是Z_2到自身的同态。

例 2 由$g(0) = 1$，$g(1) = 0$定义的Z_2到Z_2的映射g不是同态。事实上，

$$g(1 \rightarrow 1) = g(1) = 0,$$

$$g(1) \rightarrow g(1) = 0 \rightarrow 0 = 1 \neq g(1 \rightarrow 1),$$

这说明g不具有同态的保运算性。

命题 1 若v：$A \rightarrow B$是命题代数同态，则对任意$p, q \in A$，有

$$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q),$$
$$v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q),$$
$$v(p\leftrightarrow q)=v(p)\leftrightarrow v(q).$$

证 $v(p\vee q)=v(\neg p\rightarrow q)$ （$\vee$的定义）

$=v(\neg p)\rightarrow v(q)$ （保运算性）

$=\neg v(p)\rightarrow v(q)$ （保运算性）

$=v(p)\vee v(q)$ （$\vee$的定义）

后两式的证法相同。**证毕。**

命题 1 是说，v 对$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$也有保运算性。

命题 2 若 u：$A\rightarrow B$ 和 v：$B\rightarrow C$ 都是命题代数同态，则复合映射 $v\circ u$：$A\rightarrow C$也是同态。

证 对任意 $a,a'\in A$，按复合的定义和 u，v 的保运算性，有

$$\begin{aligned}v\circ u(\neg a)&=v(u(\neg a))\\&=v(\neg u(a))\\&=\neg v(u(a))\\&=\neg v\circ u(a),\\v\circ u(a\rightarrow a')&=v(u(a\rightarrow a'))\\&=v(u(a))\rightarrow v(u(a'))\\&=v\circ u(a)\rightarrow v\circ u(a').\end{aligned}$$

故 $v\circ u$ 也有保运算性。**证毕。**

任意两个命题代数之间不一定能建立起同态映射（见练习七题 2）。但对自由命题代数L(X) 和L(X_n) 来说，有下面的重要结论。这是我们选用自由命题代数来建立命题演算的重要原因。

定理 1 设$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$，B为任一命题代数。任一映射 v_0：$X\rightarrow B$定可唯一地扩张成为从L(X) 到B的同态 v。

证 先构造映射 v：L(X)$\rightarrow B$。注意

$$L(X)=\bigcup_{k=0}^{\infty}L_k.$$

对 L_0 的元素 x_i，令 $v(x_i)=v_0(x_i)$。

对L_k的任一元素$p(k>0)$，

（i）当$p=\neg q$时，有$q\in L_{k-1}$，此时令

$$v(p)=\neg v(q);$$

（ii）当$p=q\to r$时，有$q\in L_i$，$r\in L_j$，且$i+j=k-1$，此时令

$$v(p)=v(q)\to v(r).$$

这样归纳定义的映射v：$L(X)\to B$自然满足了同态的要求。又因$v(x_i)=v_0(x_i)$，故v是v_0的扩张。（由于$L(X)$具有分层性，即它的不同层次之间没有公共元素，故映射v是合理定义的。）

v_0的这种同态扩张v是唯一的。假设有另外的映射v'：$L(X)\to B$也是v_0的同态扩张，则可证明对$L(X)$的任一元素p，都有$v(p)=v'(p)$。现对p所在的层次数k归纳证明。

$p=x_i$时，有$v'(x_i)=v_0(x_i)=v(x_i)$。（v和v'都是v_0的扩张。）

$k>0$时，若$p=\neg q$（此时$q\in L_{k-1}$），则有

$$\begin{aligned}v'(p)&=v'(\neg q)\\&=\neg v'(q) &&（v'是同态）\\&=\neg v(q) &&（归纳假设）\\&=v(\neg q) &&（v是同态）\\&=v(p);\end{aligned}$$

若$p=q\to r$，则有

$$\begin{aligned}v'(p)&=v'(q\to r)\\&=v'(q)\to v'(r) &&（v'是同态）\\&=v(q)\to v(r) &&（归纳假设）\\&=v(q\to r) &&（v是同态）\\&=v(p).\end{aligned}$$

这就得到$v=v'$。**证毕。**

把定理1中的X改为$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，我们有下面的定理1′，它的证明与定理1相同。

定理 1′ **设$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，B为任一命题代数。任一映射v_0：$X_n\to B$定可唯一地扩张成为从$L(X_n)$到B的同态v。**

把定理1和定理1′中的B换成命题代数Z_2，就有

（i）任一映射v_0：$X\to Z_2$定可唯一地扩张成$L(X)$到Z_2的同态v；

（ii）任一映射v_0：$X_n\to Z_2$定可唯一地扩张成$L(X_n)$到Z_2的同态v。

定义 2 **（赋值）同态v：$L(X)\to Z_2$叫做$L(X)$的赋值。$v(p)$叫做公式p的真值。同样，同态v：$L(X_n)\to Z_2$叫做$L(X_n)$的赋值。**

定义 3 **（真值指派）映射v_0：$X\to Z_2$叫做命题变元的真值指派；映射v_0：$X_n\to Z_2$叫做$x_1,\cdots,x_n$的真值指派。**

引进了赋值和真值指派的概念以后，就可把上面的结论(i)与（ii）作为定理1与定理1′的推论分别写成

推论 1 **命题变元的任一真值指派，定可唯一地扩张成$L(X)$的赋值。**

推论 1′ **$x_1,\cdots,x_n$的任一真值指派，定可唯一地扩张成$L(X_n)$的赋值。**

简单地说，赋值就是同态——到Z_2的同态。有了指派(对X的或对X_n的），就有了赋值（$L(X)$的或$L(X_n)$的）。赋值是由指派决定的。不同的指派，有不同的赋值；不同的赋值，对应着不同的指派（因为同态扩张具有唯一性）。

设v是$L(X)$的赋值。既然赋值就是到Z_2的同态，按Z_2中运算的定义以及同态的保运算性，就可以写出：

$v(p)$	$v(q)$	$v(\neg p)$	$v(p\to q)$	$v(p\vee q)$	$v(p\wedge q)$	$v(p\leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0		0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0		1	0	0	1

也可写出以下公式（参见1.1和1.2.5中相应公式）：

（1）$v(\neg p)=1-v(p)$，

（2）$v(p\to q)=1-v(p)+v(p)\cdot v(q)$，

（3）$v(p\vee q)=v(p)+(1-v(p))\cdot v(q)$，

（4）$v(p\wedge q)=v(p)\cdot v(q)$，

（5）$v(p\leftrightarrow q)=v(p)\cdot v(q)+(1-v(p))\cdot(1-v(q))$。

命题 3　设 v 是 $L(X)$ 或 $L(X_m)$（$m\geqslant n$）的赋值．若 v 满足 $v(x_1)=v_1,\cdots,v(x_n)=v_n$，则对 $L(X_n)$ 的任一公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$，定有

$$v(p(x_1,\cdots,x_n))=p(v_1,\cdots,v_n),$$

其中 $p(v_1,\cdots,v_n)$ 是用 $v_1,\cdots,v_n$ 分别代换 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 所得结果。

证明留作练习。

根据命题3，$L(X_n)$ 的公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 作为 $L(X)$ 的成员或作为 $L(X_m)$（$m>n$）的成员，其真值只与它所含有的命题变元的真值指派有关，而与其他变元的真值指派无关。

我们已在自由命题代数 $L(X)$ 和命题代数 Z_2 之间建立了一定的联系。正因为存在着这种联系，才使我们有可能给L以逻辑解释。

练　习　七

1．详细写出命题3的证明．若 v 是 $L(X)$（或 $L(X_n)$）到任意命题代数 B 的同态，结论是否仍成立？

2．任给命题代数 A 和 B，是否一定存在 A 到 B 的同态？

1.3.2　L的解释

命题演算L这个形式系统是我们给逻辑推理建立的一种简单的数学模型。L在一定程度上可用来表现实际的推理过程，是因为可对它作以下解释。

1° L(X) 中的公式解释为命题．（命题，指有所判断的自然语句．）命题变元可用来表示任意的简单命题，而L(X) 其他层次的公式可用来表示复合命题．

2° 设 $p\in L(X)$．对给定的赋值v：$L(X)\to Z_2$，若 $v(p)=1$，即 p 的真值为 1，则说 p 所表示的命题为真，简称 p 为真；若 $v(p)=0$，即 p 的真值为零，则说 p 所表示的命题为假，简称 p 为假．

3° L(X) 上的运算解释为命题连接词．1.3.1 命题 3 之前列出的公式（1）—（5）的逻辑意义是：用连接词连接而得到的复合命题的真假完全可由组成该命题的支命题的真假通过计算来确定．

4° L(X) 上的否定运算"$\neg$"解释为"否定"连接词．根据 1.3.1 公式（1），

$$\neg p\text{ 为真}\quad\Leftrightarrow\quad p\text{ 为假}.$$

5° L(X) 上的蕴涵运算"$\to$"解释为蕴涵连接词，即用来表示"如果…，那么…"．根据 1.3.1 公式（2），

$$p\to q\text{ 为假}\quad\Leftrightarrow\quad p\text{ 为真且 }q\text{ 为假}.$$

详细地说，当 $p\to q$ 的前件 p 为假时 $p\to q$ 为真；当 $p\to q$ 的后件 q 为真时 $p\to q$ 也为真；除此之外，$p\to q$ 为假．在数学上，这种表示是符合"如果…，那么…"的实际使用习惯的．例如，我们说命题

$$a^2<1\quad\Rightarrow\quad a^2<8$$

是真命题，这是因为前件"$a^2<1$"真而同时后件"$a^2<8$"假的情形不会发生，只会发生以下三种情形中的一种：

$a^2<1$ 真且 $a^2<8$ 真（如 $a=0$）；

$a^2<1$ 假但 $a^2<8$ 真（如 $a=2$）；

$a^2<1$ 假且 $a^2<8$ 假（如 $a=3$）．

这与L中"$\to$"的性质是一致的．试想，如果我们对 Z_2 中运算"$\to$"作另一种不同的规定，用另外一种不同的计算公式，那就不能使

L(X) 的运算"→"用来表现上例的那种"蕴涵"在数学上的实际使用。但是，用"→"表示"如果…，那么…，"又是与日常对"如果…，那么…"的理解有差别。按日常的理解，前件与后件这二者之间有某种因果联系。在形式系统里，我们不对"→"提这种要求，而是把具体的内容撇在一边。关于这一点，以下几个运算的情形是类似约。

6° L(X) 上的析取运算"∨"解释为"或"。按 1.3.1 公式（3），

$p \vee q$ 为真 ⇔ p 为真或 q 为真（可同时为真）。

换句话说，当且仅当 p 和 q 二者同时为假时 $p \vee q$ 为假。

日常对"或"有两种理解：可兼的和不可兼的。例如，"我用这只碗吃饭或用它喝水"这句话中的"或"可以理解成可兼的；而"或重于泰山，或轻如鸿毛"中的"或"则是不可兼的。

按我们这里的解释，析取"∨"用来表示可兼的"或"。这符合数学的使用习惯，且使用时更为方便。（参见 1.3.7 推论 2 之后的一段说明。）

7° L(X) 上的合取运算"∧"解释为"与"。按 1.3.1 公式（4），

$$p \wedge q \text{ 为真} \Leftrightarrow p \text{ 和 } q \text{ 皆为真。}$$

也就是说，当且仅当 p 与 q 二者至少有一为假时 $p \wedge q$ 为假。

8° L(X) 上的等值运算"↔"解释为"当且仅当"。按 1.3.1 公式（5），

$$p \leftrightarrow q \text{ 为真} \Leftrightarrow p \text{ 与 } q \text{ 同为真或同为假。}$$

9° L 中定义的"证明"，是对实际证明过程的一种简单的模拟。

例 将以下命题表示成L 中的公式。

（1）若 a 大于 b，c 不大于 0，则 ac 不大于 bc。

（2）$a>0$ 时 b 为偶数而 $c<0$ 时 d 为奇数，这两种情况恰有一种情况出现。

解 （1）用 x_1 表示"$a>b$"，x_2 表示"$c>0$"，x_3 表示"$ac>bc$"，则原命题可翻译成

$$(x_1\wedge\neg x_2)\rightarrow\neg x_3.$$

（2）分别用 x_1，x_2，x_3，x_4 表示"$a>0$"，"b 为偶数"，"$c<0$"，"d 为奇数"，则原命题可形式化为

$$(x_1\rightarrow x_2)\wedge(x_3\rightarrow x_4)\wedge(x_1\vee x_3)\wedge\neg(x_1\wedge x_3).$$

练　习　八

1．把以下命题翻译成L(X)中的公式。

（1）温度不变而压力加大，则体积减小。

（2）$x=0$ 或 $y=0$。

（3）若 $x\neq 0$，则 $y=0$。

（4）若 x 为有理数且 y 为整数，则 z 不是实数。

（5）在 x 是有理数的假定之下，若 y 为整数，则 z 不是实数。

（6）二数之和为偶数，当且仅当二数皆为偶数或二数皆为奇数。

（7）A 队若胜 B 队，则 B 队积分最少而 A 队积分最多，这时C队便取得小组第二名。

1.3.3　公式的真值函数

设公式 $p\in L(X_n)$ 已经给定。对这个给定的 p，自然地确定了一个 n 元真值函数 f_p：$Z_2^n\rightarrow Z_2$，确定的方法如下：

对任意 $v_1,\cdots,v_n\in Z_2$，将 $v_1,\cdots,v_n$ 分别指派给 $x_1,\cdots,x_n$，然后（唯一地）扩张成赋值 v：$L(X_n)\rightarrow Z_2$（其根据是1.3.1推论1′），这时 p 便有了确定的真值 $v(p)\in Z_2$。就用这个 $v(p)$ 来定义 $f_p(v_1,\cdots,v_n)$：

$$f_p(v_1,\cdots,v_n)=v(p).$$

定义 1　（公式的真值函数和真值表）

每一个公式 p 用上述方法自然地确定的真值函数 f，叫做 p 的真值函数。p 的真值表，指 p 的真值值数的函数值表。

例 1 设$\neg x_1 \vee x_2$ 的真值函数为 f。由定义

$$
\begin{aligned}
f(v_1, v_2) &= v(\neg x_1 \vee x_2) \\
&= \neg v(x_1) \vee v(x_2) \\
&= \neg v_1 \vee v_2.
\end{aligned}
$$

$\neg x_1 \vee x_2$ 的真值表为

v_1	v_2	$\neg v_1$	$\neg v_1 \vee v_2$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

以后这种表都简单地写成

$\neg$	x_1	$\vee$	x_2
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0

写的过程是这样的：先把所有可能的真值指派在该公式的命题变元下一一写出（若有 n 个命题变元，则有 2^n 种不同的真值指派，因而真值表有 2^n 行），每经一次运算所得的真值写在该运算符下。最后得到的一列结果写在最后实行的运算符号下，并用竖线标出。

例 2 公式 $(x_1 \vee x_2) \to (\neg x_3 \wedge x_2)$ 的真值表

该公式的真值函数是三元的，对命题变元的真值指派共有 8 种。真值表为

$(x_1$	$\vee$	$x_2)$	$\to$	$(\neg$	x_3	$\wedge$	$x_2)$
1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0

注意在同一公式中反复出现的同一个命题变元（如例 2 中的 x_2）的下面，指派的真值的写法应完全一样。

为了得到公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的真值函数，根据同态的保运算性（见 1.3.1 命题 3），只用将 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 中出现的 $x_1,\cdots,x_n$ 分别改成 $v_1,\cdots,v_n$ 就可以了：$p(v_1,\cdots,v_n)$ 就是 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的真值函数在点 $(v_1,\cdots,v_n)$ 的函数值。

练　习　九

1．写出下列公式的真值表。

1° $\neg x_1 \wedge \neg x_2$．

2° $\neg((x_1 \to x_2) \to (\neg(x_2 \to x_1)))$．

3° $x_1 \to (x_2 \to x_3)$．

4° $(x_1 \wedge x_2) \to x_3$．

5° $(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \vee x_2$．

6° $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)$．

7° $(\neg x_1 \wedge x_2) \to (\neg x_2 \wedge x_3)$．

8° $(x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)$．

9° $\neg(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3))$．

10° $(((\neg x_1 \to (x_1 \wedge \neg x_2)) \to x_3) \wedge x_2) \vee \neg x_3$．

2．证明以下各对公式有相同的真值函数。

1° $\neg x_1 \vee x_2$ 和 $x_1 \to x_2$。

2° $\neg x_1 \vee \neg x_2$ 和 $\neg(x_1 \wedge x_2)$。

3° $\neg x_1 \to (x_2 \vee x_3)$ 和 $\neg x_2 \to (\neg x_3 \to x_1)$。

4° $x_1 \leftrightarrow x_2$ 和 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$。

1.3.4 永真式和代换定理

对 $(x_1, \cdots, x_n)$ 可能给予的真值指派 $(v_1, \cdots, v_n) \in Z_2^n$ 共有 2^n 种，于是由指派扩张而成的$L(X_n)$ 的不同赋值 v 也有 2^n种。

定义 1　设 $p = p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$。对 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的真值指派 $(v_1, \cdots, v_n)$ 若使$p(v_1, \cdots, v_n) = 1$，则叫做 p 的成真指派（此时由指派 $(v_1, \cdots, v_n)$ 所确定的 $L(X_n)$ 的赋值 v 使 $v(p) = 1$）；若使 $p(v_1, \cdots, v_n) = 0$，则叫做 p 的成假指派。

例如，公式 $x_1 \to x_2$ 的成真指派是 (1,1)， (0,1)，(0,0)；成假指派是 (1,0) 。

为求出一个公式的成真（或成假）指派，可以先写出它的真值表。例如，公式 $(x_1 \vee x_2) \to x_3$ 的真值表是

$(x_1$	$\vee$	$x_2)$	$\to$	x_3
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0

由表看出 $(x_1 \vee x_2) \to x_3$ 的成真指派是 (1,1,1) ， (1,0,1) ，(0,1,1)， (0,0,1) 和 (0,0,0) ，其他指派都是成假指派。

公式 $(x_1 \wedge x_2) \to x_1$ 的所有指派都是成真指派。它没有成假指派，而它的否定$\neg((x_1 \wedge x_2) \to x_1)$ 没有成真指派。

定义 2 （永真式）**我们说公式** $p=p(x_1,\cdots,x_n)$ **是命题演算L的永真式（或重言式），记作** $\models p$**，是指** $L(X_n)$ **的任何赋值** v **都使** $v(p)=1$**。**

由定义立即可得

$\models p \Leftrightarrow p$ 只有成真指派

$\Leftrightarrow p$ 的真值函数取常值 1 。

根据 1.3.1 命题 3，若把定义 2 中的 $L(X_n)$ 改为 $L(X)$ 或改为 $L(X_m)$ $(m>n)$，则新的定义和原定义是等价的。

用真值表法可知以下公式都是永真式。

$x_1\to x_1$，

$\neg x_1\vee x_1$，

$\neg(\neg x_1\wedge x_1)$，

$((x_1\vee x_2)\vee x_3)\leftrightarrow(x_1\vee(x_2\vee x_3))$，

$(x_1\vee x_2)\leftrightarrow(x_2\vee x_1)$，

$((x_1\wedge x_2)\wedge x_3)\leftrightarrow(x_1\wedge(x_2\wedge x_3))$，

$(x_1\wedge x_2)\leftrightarrow(x_2\wedge x_1)$，

$(x_1\wedge(x_2\vee x_3))\leftrightarrow((x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_3))$，

$(x_1\vee(x_2\wedge x_3))\leftrightarrow((x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3))$，

$\neg(x_1\vee x_2)\leftrightarrow\neg x_1\wedge\neg x_2$，

$\neg(x_1\wedge x_2)\leftrightarrow\neg x_1\vee\neg x_2$。

下面的定理使我们可由已知的永真式得到更多的永真式。

定理 1（代换定理）

$$\models p(x_1,\cdots,x_n) \quad\Rightarrow\quad \models p(p_1,\cdots,p_n),$$

其中 $p_1,\cdots,p_n$ **是** $L(X)$ **中的任意公式；** $p(x_1,\cdots,x_n)\in L(X_n)$，$p(p_1,\cdots,p_n)$ **是用** $p_1,\cdots,p_n$ **分别全部替换** $p(x_1,\cdots,x_n)$ **中的** $x_1,\cdots,x_n$ **所得结果。**

证 令 $\varphi_0(x_1)=p_1,\cdots,\varphi_0(x_n)=p_n$，得到映射 $\varphi_0:X_n\to L(X)$。按 1.3.1 定理 1′（在其中取命题代数 $B=L(X)$），可将映射 φ_0 扩张成同态 $\varphi:L(X_n)\to L(X)$。再设 $v:L(X)\to Z_2$ 是

L(X)的任一赋值。根据1.3.1命题2，同态的复合 $v\circ\varphi$：$L(X_n)\mapsto Z_2$ 也是同态，因而是 $L(X_n)$ 的赋值。这样便有

$$\begin{aligned}
&\models\ p(x_1,\cdots,x_n) && (\text{已知})\\
&\Rightarrow\ v\circ\varphi(p(x_1,\cdots,x_n))=1 && (\text{永真式定义})\\
&\Rightarrow\ v(\varphi(p(x_1,\cdots,x_n)))=1 && (\text{复合的定义})\\
&\Rightarrow\ v(p(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)))=1 && (\varphi\ \text{的保运算性})\\
&\Rightarrow\ v(p(\varphi_0(x_1),\cdots,\varphi_0(x_n)))=1 && (\varphi\ \text{是}\ \varphi_0\ \text{的扩张})\\
&\Rightarrow\ v(p(p_1,\cdots,p_n))=1 && (\varphi_0\ \text{的定义})
\end{aligned}$$

赋值 v 是任意的，故得 $\models p(p_1,\cdots,p_n)$.证毕。

注意，定理1的逆定理不成立。原来不是永真式，经过代换却可能成为永真式。例如 $x_1\to x_2$ 肯定不是永真式。但若在其中用公式 $x_2\to x_2$ 去替换 x_2，得到的 $x_1\to(x_2\to x_2)$ 却成了永真式。$x_1\vee x_2$ 肯定不是永真式，但 $p\vee q$ 却可能是永真式（例如取 p，q 都为 x_1）。

定理中的代换只能对命题变元进行代换。用公式代换某个命题变元，是指用同一公式对所有在永真式中出现的该命题变元全部进行替换。

命题 1 设 p,q,r 是 L 的任意公式。

1° $\models p\to p$，（同一律）

2° $\models\neg p\vee p$，（排中律）

3° $\models\neg(\neg p\wedge p)$，（矛盾律）

4° $\models((p\vee q)\vee r)\leftrightarrow(p\vee(q\vee r))$，（析取结合律）

5° $\models(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$（析取交换律）

6° $\models((p\wedge q)\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge(q\wedge r))$，（合取结合律）

7° $\models(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$，（合取交换命）

8° $\models((p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$，（分配命）

9° $\models((p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$，（分配律）

10° $\models\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$，　(De·Morgan命)

$\models\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$.

证 对代换定理之前所列出的永真式使用代换定理即得。**证毕。**

注意一个事实：以上这些语义结论都有相应的语法结论。对此事后面将作深入讨论。

命题 2 L 的所有公理都是永真式，即

$$\models p\to(q\to p),$$

$$\models(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r)),$$

$$\models(\neg p\to\neg q)\to(q\to p).$$

证明留作练习。

定义 3（永假式与可满足公式）若$\neg p$是永真式，则p叫做永假式。非永假式叫做可满足公式。

永真式只有成真指派；永假式只有成假指派。可满足公式一定有成真指派，但也可以有成假指派，也可以没有成假指派。可满足公式可以是永真式，也可以不是。

练 习 十

1．证明 L 的所有公理都是永真式。

2．试证

1° 二永真式的合取仍是永真式，

2° 二永真式的析取仍是永真式，

3° 后件是永真式的蕴涵式是永真式，

4° 前件是永假式的蕴涵式是永真式。

3．下面的公式哪些恒为永真式？

1° $(p\wedge q)\to p$,

2° $(p\wedge q)\to q$,

3° $(q\vee r)\to(\neg r\to q)$,

4° $(p\wedge\neg q)\vee((q\wedge\neg r)\wedge(r\wedge\neg p))$,

5° $(p\to(q\to r))\to((p\wedge\neg q)\vee r)$,

4．以下结论是否正确？为什么？

1°　$\models p(x_1,\cdots,x_n)$　$\Leftrightarrow$　$\models p(\neg x_1,\cdots,\neg x_n)$，

2°　$\models (p\to q)\leftrightarrow(p'\to q')$　$\Rightarrow$　$\models p\leftrightarrow p'$且$\models q\leftrightarrow q'$。

5．公式$(\neg x_1\to x_2)\to(x_1\to\neg x_2)$是永真式吗？找出公式$p$和$q$使$(\neg p\to q)\to(p\to\neg q)$是永假式。

1.3.5　等值公式和对偶律

不同的公式可能有相同的真值函数。例如，$\neg x_1\wedge\neg x_2$，$\neg(x_1\vee x_2)$和$\neg(\neg x_1\to x_2)$这三个公式的真值函数是相同的，都是f：

$$f(1,1)=0,\ f(1,0)=0,$$
$$f(0,1)=0,\ f(0,0)=1.$$

可以看出，以下三句话的意思是相同的：

"数a既不大于零，也不等于零"，

"数a不是大于零或等于零的"，

"并非如此：数a不大于零时便等于零。"

定义 1（等值公式）　p与q等值，是指$p\leftrightarrow q$为永真式。

由此定义及永真式的定义立即可知，当$p,q\in L(X_n)$时，

p与q等值（即$\models p\leftrightarrow q$）

$\Leftrightarrow$　$L(X_n)$的任一赋值v都使$v(p)=v(q)$

$\Leftrightarrow$　$L(X)$的任一赋值v都使$v(p)=v(q)$

$\Leftrightarrow$　p与q有相同的成真指派和成假指派

$\Leftrightarrow$　p与q有相同的真值函数

$\Leftrightarrow$　对$x_1,\cdots,x_n$的任何指派$v_1,\cdots,v_n$，都有

$$p(v_1,\cdots,v_n)=q(v_1,\cdots,v_n).$$

由定义还立即可得

命题 1　1°　$\models p\leftrightarrow p$（**等值的反身性**）

2°　$\models p\leftrightarrow q$　$\Rightarrow$　$\models q\leftrightarrow p$（**等值的对称性**）

3°　$\models p\leftrightarrow q$及$\models q\leftrightarrow r$　$\Rightarrow$　$\models p\leftrightarrow r$（**等值的可递性**）

命题1指出，等值所确定的$L(X)$上的二元关系是等价

关系，从而给出了 L(X)的一个分类。同样，也给出了 $L(X_n)$的分类。互相等值的公式属于同一等价类。同一类中的等值公式有同一个真值函数。

不同的 n 元真值函数总共有2^{2^n}种（见练习一 题1）。这意味着$L(X_n)$中有2^{2^n}种不同的等价类。这也就是说，尽管$L(X_n)$中有无穷多个公式，但本质上语义不同的公式只有2^{2^n}种。

永真式有无穷多个，它们构成了一个等价类。所有永假式（也有无穷多个）则构成另一等价类。任一公式 p 与以下形式的公式

$$p\wedge（永真式），p\vee（永假式）$$

都是互相等值的，因此属于同一等价类。这说明每个等价类中每会有无穷多个互相等值的公式。

下面讨论等值公式的替换问题。

命题 2 1° $\models p\leftrightarrow q \Rightarrow \models \neg p\leftrightarrow\neg q$,

2° $\models p\leftrightarrow p'$ 且 $\models q\leftrightarrow q' \Rightarrow \models (p\to q)\leftrightarrow(p'\to q')$.

证 设 v 是 L(X) 的任一赋值。

1° $v(p)=v(q)\Rightarrow v(\neg p)=v(\neg q)$,

2° $v(p)=v(p')$及$v(q)=v(q') \Rightarrow$

$$v(p\to q)=v(p)\to v(q)=v(p')\to v(q')=v(p'\to q'),$$

证毕。

我们用 $p=\cdots q\cdots$表示 q 是公式 p 的子公式。（q 是 p 的组成部分，但 q 本身也是公式。）作为 p 的子公式，q 在 L(X) 中的层次比 p 所在的层次低。但也可以就是 p 本身。

定理 1（子公式等值可替换性）

设 q 是 p 的子公式：$p=\cdots q\cdots$；用公式 q' 替换 p 中的子公式 q（一处替换）所得结果记为 $p'=\cdots q'\cdots$。那么

$$\models q\leftrightarrow q' \Rightarrow \models p\leftrightarrow p'.$$

证 对 p 在 L(X) 中的层次数归纳。

p 是命题变元时，只能 $p=q$，因而 $p'=q'$，结论成立。

若 p 所在层次数大于零，则有两种可能的情形。

情形 1　$p=\neg r$。因最后的运算是$\neg$，故 q 必为 r 的子公式。这时 $p'=\neg r'$，r' 是用 q' 替换 r 中的子公式 q 得来。于是

$$\vDash r\leftrightarrow r'\ （归纳假设）$$

$$\vDash \neg r\leftrightarrow\neg r'\ （命题 2\text{-}1°）$$

情形 2　$p=r\to s$。因形成 p 的最后一次运算是$\to$，这时 q 或是 r 的子公式，或是 s 的子公式，于是 $p'=r'\to s$ 或 $p'=r\to s'$。由归纳假设，$\vDash r\leftrightarrow r'$ 或 $\vDash s\leftrightarrow s'$。利用命题2-2°，便有 $\vDash(r\to s)\leftrightarrow(r'\to s)$ 或 $\vDash(r\to s)\leftrightarrow(r\to s')$。总之，有 $\vDash p\leftrightarrow p'$。**证毕。**

定理 1 中的替换指的是一处替换。若要多处替换，则可用定理若干次。

因为有析取结合律（1.3.4 命题 1-5°），所以可把 $(p_1\vee p_2)\vee p_3$ 简写成 $p_1\vee p_2\vee p_3$，把 $((p_1\vee p_2)\vee p_3)\vee p_4$ 简写成 $p_1\vee p_2\vee p_3\vee p_4$，等等。对于合取$\wedge$，也有同样的做法。

作为一例，根据定理 1，由 $\vDash\neg\neg x_2\leftrightarrow x_2$ 可断言

$\vDash(\neg x_1\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg x_3)\leftrightarrow(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)$。

定理 2 （公式的对偶）设公式 p 可以写成只含有命题变元和运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$ 的形式。把 p 中的命题变元全部改为各自的否定，把$\vee$全改为$\wedge$，$\wedge$全改为$\vee$，这样得到的公式 p^* 叫做公式 p 的对偶。

例如，$p=(x_1\vee\neg x_2)\wedge x_3$ 的对偶是

$$p^*=(\neg x_1\wedge\neg\neg x_2)\vee\neg x_3.$$

定理 2 （对偶律）$\vDash p^*\leftrightarrow\neg p$，其中 p^* 是 p 的对偶。

证　对 p 中$\neg$，$\vee$，$\wedge$ 出现的次数 n 归纳。

$n=0$ 时，设 $p=x_i$。因 $p^*=\neg x_i$，故 $\vDash p^*\leftrightarrow\neg p$。

$n>0$ 时，有以下三种情形。

情形 1　$p=\neg q$。此时 $p^*=\neg q^*$。由归纳假设（q 中运算$\neg$，$\vee$，$\wedge$ 出现的次数为 $n-1$），有 $\vDash q^*\leftrightarrow\neg q$。再对此用命题

2-1°，得 $\models\neg q^*\leftrightarrow\neg\neg\neg q$，此即 $\models p^*\leftrightarrow\neg p$。

情形 2　$p=q\vee r$。此时 $p^*=q^*\wedge r^*$。由归纳假设，有 $\models q^*\leftrightarrow\neg q$ 及 $\models r^*\leftrightarrow\neg r$。两次用子公式等值可替换性定理，得

$$\models(q^*\wedge r^*)\leftrightarrow(\neg q\wedge r^*),$$

$$\models(\neg q\wedge r^*)\leftrightarrow(\neg q\wedge\neg r),$$

再由 De•Morgan 律（1.3.4 命题 1-10°）得

$$\models(\neg q\wedge\neg r)\leftrightarrow\neg(q\vee r).$$

于是有 $\models(q^*\wedge r^*)\leftrightarrow\neg(q\vee r)$，此即 $\models p^*\leftrightarrow\neg p$。

情形 3　$p=q\wedge r$。此时 $p^*=q^*\vee r^*$。与情形 2 的讨论类似，可得 $\models(q^*\vee r^*)\leftrightarrow\neg(q\wedge r)$，此即 $\models p^*\leftrightarrow\neg p$。**证毕。**

推论（推广的 De • Morgan 律）

1°　$\models(\neg p_1\vee\cdots\vee\neg p_n)\leftrightarrow\neg(p_1\wedge\cdots\wedge p_n)$,

2°　$\models(\neg p_1\wedge\cdots\wedge\neg p_n)\leftrightarrow\neg(p_1\vee\cdots\vee p_n)$,

其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是任意公式。

证　只证 1°。由代换定理，只用证

$$\models(\neg x_1\vee\cdots\vee\neg x_n)\leftrightarrow\neg(x_1\wedge\cdots\wedge x_n),$$

而这是定理 2 当 $p=x_1\wedge\cdots\wedge x_n$ 时的特例。**证毕。**

推广的 De • Morgan 律以后简称为 De•Morgan 律，常写成

$$1^\circ\quad\models\bigvee_{i=1}^{n}\neg p_i\leftrightarrow\neg\bigwedge_{i=1}^{n}p_i,$$

$$2^\circ\quad\models\bigwedge_{i=1}^{n}\neg p_i\leftrightarrow\neg\bigvee_{i=1}^{n}p_i.$$

在进行语义分析的时候，往往需要对公式进行等值变换，以便使这种分析更容易进行。通过等值变换，可使新公式具有我们所希望的逻辑结构。例如，可利用 $\neg p\vee q$ 与 $p\rightarrow q$ 的等值而消去 $\rightarrow$，使新的公式只含有 $\neg$，$\vee$，$\wedge$。以上定理和命题提供了对公式进行等值变换的工具。

练 习 十 一

1．证明以下各对公式是等值的。

1° $p\to q$ 和 $\neg q\to\neg p$,

2° $(\neg p\wedge\neg q)\to\neg r$ 和 $r\to(q\vee p)$,

3° $(\neg p\vee q)\to r$ 和 $(p\wedge\neg q)\vee r$,

4° $\neg(\neg p\vee q)\vee r$ 和 $(p\to q)\to r$。

2．证明$\neg(x_1\vee\neg x_2)\to(x_2\to x_3)$ 与以下公式都等值。

1° $\neg(x_2\to x_1)\to(\neg x_2\vee x_3)$,

2° $(\neg x_1\wedge x_2)\to\neg(x_2\wedge\neg x_3)$

3° $\neg(\neg x_2\vee x_3)\to(x_2\to x_1)$

4° $x_2\to(x_1\vee x_3)$。

3．设公式 p 与 q 都可写成只含有命题变元和 $\neg,\vee,\wedge$ 三种运算．把 p 和 q 中所有 $\vee$ 改为 $\wedge$，$\wedge$ 改为 $\vee$，分别得到 p^d 和 q^d。证明,

$$\models p\leftrightarrow q \quad\Rightarrow\quad \models p^d\leftrightarrow q^d.$$

1.3.6 析取范式与合取范式

定义 1（基本析取式与基本合取式）

形为 $y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_n$ 和形为 $y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n$ 的公式分别叫做基本析取式和基本合取式，其中每个 y_i 是命题变元或命题变元的否定。

任给一个基本析取式，很容易判定它是不是永真式，这只要看式中是否有某个 x_k 和 $\neg x_k$ 同时出现。如果式中有这样一对同时出现，那么该式就是永真式；否则就不是永真式（可以很快找出它的成假指派）。例如，$x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_1$ 是永真式．$x_1\vee\neg x_2\vee x_3$ 不是永真式，因为它有成假指派（0,1,0）（这是它唯一的成假指派）。

同样，任给一个基本合取式，很容易鉴别它是否是永假式。

如果式中同时出现某个 x_k 和 $\neg x_k$，则为永假式；否则就是可满足公式(可以很容易指出它的成真指派)。例如 $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2$ 是永假式。$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ 是可满足公式，因为它有成真指派(0,1,1)(这是它唯一的成真指派)。注意，一个基本析取式只可能有唯一的一个成假指派。同样，一个基本合取式只可能有一个成真指派。

定义 2（析取范式与合取范式）形为 $\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)$ 的公式叫做析取范式，形为 $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)$ 的公式叫做合取范式，其中每个 y_{ij} 是某个命题变元 x_k 或它的否定 $\neg x_k$。

换句话说，析取范式就是以若干基本合取式为析取支的析取式；合取范式就是以若干基本析取式为合取支的合取式。例如，公式

$$(x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_5 \wedge x_4 \wedge \neg x_1)$$

是析取范式；公式

$$(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_5 \vee x_4 \vee \neg x_1)$$

是合取范式。公式 $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ 既是析取范式，又是合取范式。作为析取范式，它只有一个析取支；作为合取范式，它有三个合取支。

可以快速判定任一析取范式是不是永假式。这只要扫瞄一遍就可以了：每个析取支都是基本合取式，一看便知它们是不是永假式。原析取范式是永假式，当且仅当每个析取支都是永假式。但是，要想判定任一析取范式是不是永真式，当命题变元数目多时，则比较麻烦。

相反，可以快速判定任一合取范式是不是永真式，因为每个合取支都是基本析取式，容易确定它们是不是永真式。合取范式是永真式，当且仅当它的每个合取支都是永真式。同样，要想判定任一合取范式是不是永假式，当命题变元数目多时，则比较麻烦。

给一个公式，要找出与它等值的析取范式或合取范式，大致

可采取以下步骤。

1° 消去→与↔。先用

$$p\leftrightarrow q=(p\to q)\wedge(q\to p)\quad(\leftrightarrow\text{的定义})$$

消去↔，再用$\models(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$消去→。

2° 把否定号$\neg$等值变换到命题变元之前。这要用到以下几个等值式：

$$\models\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q,$$
$$\models\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q,$$
$$\models\neg\neg p\leftrightarrow p.$$

3° 利用交换律、结合律及分配律作等值变换，直到得出所需要的形式为止。

例 1 求与$(x_1\wedge(x_2\to x_3))\to x_2$等值的析取范式与合取范式。

解 以下各公式与原公式等值：

$$\neg(x_1\wedge(\neg x_2\vee x_3))\vee x_2,\ (\text{消去}\to)$$
$$\neg x_1\vee\neg(\neg x_2\vee x_3)\vee x_2,$$
$$\neg x_1\vee(\neg\neg x_2\wedge\neg x_3)\vee x_2,$$
$$\neg x_1\vee(x_2\wedge\neg x_3)\vee x_2.$$

后式是与原式等值的析取范式。再继续作等值变换：

$$\neg x_1\vee x_2\vee(x_2\wedge\neg x_3),\qquad(\text{用了交换律})$$
$$(\neg x_1\vee x_2\vee x_2)\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3),\qquad(\text{分配律})$$
$$(\neg x_1\vee x_2)\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3).\qquad(\text{用了}\models(x_2\vee x_2)\leftrightarrow x_2)$$

最后二式都是与原式等值的合取范式。

定理 3（主析取范式与主合取范式）

$L(X_n)$中的主析取范式是这样的析取范式，在它的每个析取支中，每个命题变元$x_1,\cdots,x_n$（带否定号或不带否定号）按下标由小到大的次序都出现且都只出现一次。主合取范式同样定义，只用把“每个析取支”改为“每个合取支”。

定理 1 每个非永假式必有与它等值的主析取范式。

证 设$p=p(x_1,\cdots,x_n)$不是永假式，那么它有成真指派。令p的所有成真指派（最多有2^n个）为

$$(v_1,v_2,\cdots,v_n),\cdots。$$

一一作出分别与这些成真指派对应的基本合取式

$$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n,\cdots,$$

作的方法是，令

$$y_i=\begin{cases}x_i, & \text{若 } v_i=1;\\ \neg x_i, & \text{若 } v_i=0。\end{cases}$$

（这样作的目的，是使$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$也是$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n$的成真指派，而且是$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n$唯一的成真指派。）最后，以每个这样的基本合取式为析取支，全部拿来作成析取式：

$$q=(y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n)\vee(\cdots)\vee\cdots。$$

于是q为所求的主析取范式。这是因为：第一，q的每个析取支中，每个x_i按下标由小到大的次序都出现且都只出现一次；第二，q与p有相同的真值函数，因而等值。事实上，任给$(v_1,\cdots,v_n)\in Z_2^n$，

(i) 若$p(v_1,\cdots,v_n)=1$，即$(v_1,\cdots,v_n)$是p的成真指派，这时q有一析取支$y_1\wedge\cdots\wedge y_n$与$(v_1,\cdots,v_n)$对应，$(v_1,\cdots,v_n)$也是$y_1\wedge\cdots\wedge y_n$的成真指派。于是$q(v_1,\cdots,v_n)=1$。

(ii) 若$p(v_1,\cdots,v_n)=0$，则$(v_1,\cdots,v_n)$不是p的成真指派，因而不是q的任何析取支的成真指派，故$q(v_1,\cdots,v_n)=0$。**证毕**。

定理1的证明过程提供了主析取范式的一种求法。

例 2 求$x_1\to x_2$的等值主析取范式。

解 $x_1\to x_2$的成真指派是$(1,1)$，$(0,1)$ $(0,0)$。按定理1证明中指出的方法，先分别写出与三个成真指派相对应的基本合取式：$x_1\wedge x_2$，$\neg x_1\wedge x_2$，$\neg x_1\wedge\neg x_2$，然后以它们为析取支构成析取范式，便得所求：

$$(x_1\wedge x_2)\vee(\neg x_1\wedge x_2)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2)。$$

定理 2 每个非永真式必等值于一主合取范式。

证 p为非永真式，则$\neg p$为非永假式。由定理1知$\neg p$有等值的主析取范式，设为

$$\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} y_{ij}\right).$$

于是p等值于

$$\neg\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} y_{ij}\right)\right)\text{和}\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n}\neg y_{ij}\right).$$

把后式中所有出现的$\neg\neg x_k$换成x_k，便得到所求的主合取范式。**证毕。**

注意，永假式没有等值主析取范式；永真式没有等值主合取范式。这是因为主析取范式有成真指派，而主合取范式有成假指派。

例 3 求$p=(x_1\to x_2)\to x_3$的等值主析取范式和等值主合取范式.

解 p的成真指派是

(1, 1, 1)，(1, 0, 1)，(1, 0, 0)，(0, 1, 1) (0,0,1)；

$\neg p$的成真指派是

(1, 1, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 0)．

p的等值主析取范式是

$$(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3)$$
$$\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3),$$

$\neg p$的等值主析取范式是

$$(x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3),$$

p的等值主合取范式是

$$(\neg x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2\vee x_3).$$

练 习 十 二

1．求以下公式的等值主析取范式。

1° $x_1 \leftrightarrow x_2$.

2° $x_1 \to (\neg x_2 \vee x_3)$.

3° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$.

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$.

5° $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$.

2．求以下公式的等值主合取范式，

1° $(\neg x_1 \vee x_2) \to x_3$.

2° $x_1 \leftrightarrow x_2$.

3° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$.

4° $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$.

1.3.7 运算的完全组

1.3.5 中已经指出，等值关系是L(X)上的一个等价关系，它确定了L(X)的一个分类。每个等价类中的公式有共同的语义性质——它们的真值函数相同。所以从语义上来说，对L(X)的研究本质上可化为对真值函数的研究。

定义 1（运算的完全组） **Z_2上的一些运算构成完全组，是指任一真值函数都可用该运算组中的运算表示出来。**

按此定义，1.1 中命题 1 可改述为

"$\{\neg, \to\}$是完全组。"

练习一题 2 指出，$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完全组。

命题 1 **$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \wedge\}$都是运算完全组。**

证 对任意 $u, v \in Z_2$，有恒等式

$$u \to v = \neg u \vee v,$$

$$u \to v = \neg(u \wedge \neg v),$$

前式说明涉及"→"的运算都可用$\neg$和$\vee$来代替；后式则说明可用$\neg$和$\wedge$来代替。这样，由$\{\neg, \to\}$的完全性便可推出$\{\neg, \vee\}$及$\{\neg, \wedge\}$的完全性。**证毕。**

Z_2和L(X)都是命题代数，都可用基本运算$\neg$和$\to$来定义

其他运算。Z_2 上的每种运算都对应着 L(X) 上的用相同符号表示的同名运算。于是与命题 1 相对应，有关于 L(X) 的命题：

"任一公式必等值于一个只含命题变元及 $\neg$，$\vee$ 两种运算的公式，且必等值于另一个只含命题变元及 $\neg$，$\wedge$ 两种运算的公式。"

同样，关于 Z_2 的其他这类命题也都有相应的关于 L(X) 的命题。

命题 2 $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ **不是完全组。**

证 先证**命题**＊：

"任一一元真值函数 $f: Z_2 \rightarrow Z_2$ 若能用 $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ 这四种运算表示出来，则恒有 $f(1)=1$。"

对表示 f 所用的上述四种运算的次数 k 归纳。

$k=0$ 时，$f(v)=v$，故 $f(1)=1$。

$k>0$ 时，有以下四种可能的情况：

(i) $f(v)=g(v) \vee h(v)$,

(ii) $f(v)=g(v) \wedge h(v)$,

(iii) $f(v)=g(v) \rightarrow h(v)$,

(iv) $f(v)=g(v) \leftrightarrow h(v)$.

这四种情况中不管哪一种发生，都有 $f(1)=1$，因为由归纳假设，$g(1)=h(1)=1$。这就证明了命题＊。

现取 f 为恒取零值的一元常值函数，有 $f(1)=0$。根据命题＊，f 不能只由 $\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 这四种运算表示出来。**证毕。**

相应于命题 2 的关于 L(X) 的命题是：

"存在着这样的公式，它不与任何只含命题变元及 $\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 四种运算的公式等值。"

命题 2 说明了否定运算"$\neg$"在命题代数中具有重要的特殊地位。它所起的特殊作用是不能用 $\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 这四种（甚至更多的）运算可以代替的。这种特殊作用正是"否定"这个概念在哲学中所起的重要作用的一种逻辑表现。

光有否定运算也不行。因为

命题 3 $\{\neg, \leftrightarrow\}$**不是完全组。**

证 假设二元真值函数 f 可用 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 这两种运算表示。现对表示 f 所用运算 $\neg$ 和 $\leftrightarrow$ 的次数 k 归纳证明 f 具有这样的性质：

"$f(1,1)$，$f(1,0)$，$f(0,1)$，$f(0,0)$ 这四个数中，1出现偶数次。"

$k=0$ 时，$f(v_1,v_2)=v_1$ 或 v_2，这时 $f(1,1)$，$f(1,0)$，$f(0,1)$，$f(0,0)$ 中总有两个1。

$k>0$ 时，有两种可能：$f(v_1,v_2)=\neg g(v_1,v_2)$，或

$$f(v_1,v_2)=g(v_1,v_2)\leftrightarrow h(v_1,v_2).$$

由归纳假设，$g(1,1)$，$g(1,0)$，$g(0,1)$，$g(0,0)$ 四个数中以及 $h(1,1)$，$h(1,0)$，$h(0,1)$，$h(0,0)$ 四个数中，1都出现偶数次。分别不同情况进行简单的计算，便知 $f(1,1)$，$f(1,0)$，$f(0,1)$，$f(0,0)$ 这四个数中1也出现偶数次。

但是，二元真值函数 $\vee$ 和 $\wedge$ 不具有上述性质。例如，$1\vee1$，$1\vee0$，$0\vee1$，$0\vee0$ 这四个数中有三个1。这说明 $\vee$ 和 $\wedge$ 不能只用 $\neg$，$\leftrightarrow$ 两种运算表示，所以 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 不是完全组。**证毕。**

推论 1 **独元集** $\{\neg\}$ **不是完全组。**

推论 2 $\{\neg, \not\leftrightarrow\}$ **不成完全组，其中** $\not\leftrightarrow$ **是如下规定的：**

v_1	v_2	$v_1 \not\leftrightarrow v_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

证 因 $v_1\leftrightarrow v_2=\neg(v_1\not\leftrightarrow v_2)$，故若 $\{\neg, \not\leftrightarrow\}$ 是完全组，则 $\{\neg, \leftrightarrow\}$ 也是完全组。**证毕。**

"$\not\leftrightarrow$" 作为 L(X) 的运算（定义式是 $p\not\leftrightarrow q=\neg(p\leftrightarrow q)$），解释为"不可兼或"：

$p\not\leftrightarrow q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 和 q 二者有且只有一个为真。

注意{$\neg$, $\nrightarrow$}不是完全组，而{$\neg$, $\vee$}是完全组。这是我们用“$\vee$”表示“或”而不用“$\nrightarrow$”表示“或”的原因之一。

定义 2 （“与非”运算和“或非”运算）

与非运算用算符“$|$”表示；或非运算用算符“$\downarrow$”表示。它们的定义式分别是

$$v_1 | v_2 = \neg(v_1 \wedge v_2),$$
$$v_2 \downarrow v_2 = \neg(v_1 \vee v_2).$$

由计算可知

v_1	v_2	$v_1 \| v_2$	$v_1 \downarrow v_2$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

命题 4 **独元集{$|$}和独元集{$\downarrow$}都是完全组。**

证 对任意$v_1, v_2 \in Z_2$，有等式（证明留作练习）：

$$\neg v_1 = v_1 | v_1 = v_1 \downarrow v_1,$$
$$v_1 \vee v_2 = (v_1 | v_1) | (v_2 | v_2),$$
$$v_1 \wedge v_2 = (v_1 \downarrow v_1) \downarrow (v_2 \downarrow v_2).$$

利用{$\neg$, $\vee$}和{$\neg$, $\wedge$}的完全性，命题得证。**证毕。**

在L(X)中令

$$p | q = \neg(p \wedge q),$$
$$p \downarrow q = \neg(p \vee q).$$

相应于命题4，有关于L(X)的命题：

“任意L(X)中公式都必和一个由命题变元经一种运算$|$（或$\downarrow$）得到的公式等值。”

与非算符“$|$”叫做Sheffer竖。

例 分别找出与$x_1 \to x_2$及$x_1 \to (x_2 \to x_1)$等值的只含x_1，x_2及运算$|$的公式。

例 $x_1 \to x_2$与$\neg x_1 \vee x_2$等值，又与$\neg(x_1 \wedge \neg x_2)$即$x_1 | \neg$

x_2等值，所以与$x_1|(x_2|x_2)$等值．由此便知$x_1\to(x_2\to x_1)$与下面的公式等值：

$$x_1|((x_2|(x_1|x_1))|(x_2|(x_1|x_1)))。$$

此例说明，只用一种运算，往往使公式的表示更冗长，更不直观。

命题 5　除｜，↓外，没有其他二元运算单独构成完全组．

证　先将全部16种二元运算列出如下：

v_1	v_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

f_9就是｜，f_{15}就是↓．对其余二元运算分成三类进行讨论。

(i)　$\{f_1,f_2,\cdots,f_8\}$不是完全组，证明与命题2的证明完全一样。（这里的f_2，f_5，f_7，f_8分别就是$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$，$\wedge$）。

(ii)　$\{f_{11},\ f_{13}\}$不是完全组。这是因为，对于任意$v_1,v_2\in Z_2$，有

$$f_{11}(v_1,v_2)=\neg v_2,$$

$$f_{13}(v_1,v_2)=\neg v_1。$$

如果$\{f_{11},\ f_{13}\}$是完全组，那么$\{\neg\}$也成了完全组，与推论1矛盾。

(iii)　$\{f_{10},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{16}\}$不是完全组，证明过程与命题2的类似，区别仅在于先证明一个稍有不同的命题*：

“任一一元真值函数f：$Z_2\to Z_2$若能用f_{10}，f_{12}，f_{14}，f_{16}这四种运算表示，则恒有$f(0)=0$。”

恒等于1的一元常值函数不具有这种性质，故不能仅由这四种运算来表示。**证毕。**

本段关于真值函数的结论除了有相应的命题逻辑的解释，还

有相应的电路理论的解释。

练 习 十 三

1．证明等式

$$\neg v_1 = v_1 | v_1 = v_1 \downarrow v_1,$$
$$v_1 \vee v_2 = (v_1 | v_1) | (v_2 | v_2),$$
$$v_1 \wedge v_2 = (v_1 \downarrow v_1) \downarrow (v_2 \downarrow v_2),$$

其中 $v_1, v_2 \in Z_2$。

2．分别找出只含有运算$\neg$和$\wedge$的公式，使之与以下各公式等值。

1° $x_1 \to (x_2 \to x_3)$，

2° $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$，

3° $(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$。

3．分别找出只含有运算$\neg$和$\vee$的公式，使之与以下各公式等值：

1° $x_1 \to (x_2 \to x_3)$，

2° $(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (\neg x_3 \wedge x_4)$，

3° $x_1 \leftrightarrow x_2$。

4．给出与 $x_1 \to x_2$ 等值的只含运算$\downarrow$的公式。

1.3.8 语义推论

定义 1 （语义推论） 设 $\Gamma \subseteq L(X)$，$p \in L(X)$。如果 Γ 中所有公式的任何公共成真指派都一定是公式 p 的成真指派，则说 p 是公式集 Γ 的语义推论，记作 $\Gamma \models p$。

由定义立即可得出以下结论。

1° $\Gamma \models p$，当且仅当 $L(X)$ 的任一赋值 v 具有性质：每当使任一 $q \in \Gamma$ 都有 $v(q) = 1$ 时，也使 $v(p) = 1$。

2° $\phi \models p \iff L(X)$ 的任一赋值 v 都使 $v(p) = 1$

$\iff \models p$ （即 p 是永真式）。

3° $p\in\Gamma \Rightarrow \Gamma\models p$.

4° $\models p \Rightarrow \Gamma\models p$，即：永真式是任何公式集 Γ 的语义推论。

命题 1 $\{\neg p\}\models p\to q$；$\{q\}\models p\to q$。

证 对于 L(X) 的任一赋值 v，

$$v(\neg p)=1 \Rightarrow v(p)=0$$
$$\Rightarrow v(p\to q)=1;$$
$$v(q)=1 \Rightarrow v(p\to q)=1.$$ **证毕。**

命题 2 $\Gamma\models p$ 且 $\Gamma\models p\to q \Rightarrow \Gamma\models q$。

证 每当 $v(p)=1$ 且 $v(p\to q)=1$ 时，便有

$$v(q)=1\to v(q) \qquad (1.1 公式 2)$$
$$=v(p)\to v(q)$$
$$=v(p\to q)=1.$$ **证毕。**

命题 3（语义演绎定理）

$$\Gamma\cup\{p\}\models q \Leftrightarrow \Gamma\models p\to q.$$

证 $(\Rightarrow)$ 设 $\Gamma\cup\{p\}\models q$，且设 v 是使 Γ 中成员的真值都为 1 的赋值．若有 $v(p)=1$，则由所设条件可得 $v(q)=1$，此时 $v(p\to q)=1\to 1=1$。若有 $v(p)=0$，则 $v(p\to q)=0\to v(q)=1$。这就证明了 $\Gamma\models p\to q$。

$(\Leftarrow)$ 设 $\Gamma\models p\to q$。当 $v(p)=1$ 且 $v(p\to q)=1$ 时，必有 $v(q)=1$。这说明 $\Gamma\cup\{p\}\models q$。**证毕。**

练　习　十　四

1. 试证

$$\{p_1,\cdots,p_n\}\models p \Leftrightarrow \models(p_1\wedge\cdots\wedge p_n)\to p.$$

2. $\{x_1, x_1|(x_2|x_3)\}\models x_3$ 是否成立？

1.4 命题演算L的可靠性和完全性

现在开始讨论命题演算 L 的语法和语义的关系，目的是建

立起 L 的重要性质——语法推论和语义推论的一致性：

$$\Gamma \vdash p \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models p.$$

这是我们在着手建立 L 时就希望它能具有的性质。特殊情况，当 $\Gamma = \phi$ 时，上述性质变为

$$\vdash p \quad \Leftrightarrow \quad \models p,$$

即：L 中的定理集与永真式集重合。

定理 1（**L 的可靠性**）$\Gamma \vdash p \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models p$.

证 设 $\Gamma \vdash p$，则存在 p 从 Γ 的证明：$p_1, \cdots, p_n$，其中 $p_n = p$。现对此证明的长度 n 归纳证明 $\Gamma \models p$。

$n=1$ 时，$p_1 = p$。此时 p 或者是 L 的公理，因而是永真式（1.3.4 命题 2）；或者 $p \in \Gamma$。不管哪种情形出现，都有 $\Gamma \models p$。

$n>1$ 时，如果 p 是 L 的公理，或 $p \in \Gamma$，这时与 $n=1$ 时的情形一样，都有 $\Gamma \models p$。还有一种情形是 p 由 MP 得来（这是一般情形），即存在 $i, j<n$，使 $p_j = p_i \to p$。这时由 $\Gamma \vdash p_i$ 和 $\Gamma \vdash p_j$ 用归纳假设可得 $\Gamma \models p_i$ 和 $\Gamma \models p_j$，后者就是 $\Gamma \models p_i \to p$。再用 1.3.8 命题 2 便得 $\Gamma \models p$。**证毕**。

推论（**L 的无矛盾性**）**命题演算 L 是无矛盾的，即：不存在公式 p 同时使 $\vdash p$ 和 $\vdash \neg p$ 成立。**

证（反证）假设存在公式 p 使 $\vdash p$ 与 $\vdash \neg p$ 同时成立。由定理 1，$\models p$ 与 $\models \neg p$ 同时成立。于是对 L(X) 的任一赋值 v，$v(p) = v(\neg p) = 1$，这是不可能的。**证毕**。

定理 2（**L 的完全性**）$\Gamma \models p \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash p$.

证（反证）假设 $\Gamma \vdash p$ 不成立。要做的事情是：设法构造 L(X) 的一个赋值 v，它使 Γ 中所有公式的真值为 1，但使 $v(p) = 0$，从而与 $\Gamma \models p$ 矛盾。

L(X) 是可数集（1.2.1 命题 1）。把 L(X) 所有的公式排成一列，设为

$$p_0, \ p_1, \ p_2, \ \cdots.$$

令

$$\Gamma_0 = \Gamma \cup \{\neg p\},$$

而当 $n>0$ 时，令

$$\Gamma_n = \begin{cases} \Gamma_{n-1}, & \text{若 } \Gamma_{n-1} \vdash p_{n-1}; \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\neg p_{n-1}\}, & \text{若 } \Gamma_{n-1} \vdash p_{n-1} \text{ 不成立。} \end{cases}$$

这样就得到一串 Γ_n: $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$。

现对 n 归纳证明每个 Γ_n 都是无矛盾的。

首先，$\Gamma_0 = \Gamma \cup \{\neg p\}$ 是无矛盾的，否则由 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$ 及 $\neg q$ 利用反证律便得 $\Gamma \vdash p$，而我们已假设这是不成立的。

现设 Γ_{n-1} 无矛盾，进而证明 Γ_n 无矛盾。假如 Γ_n 有矛盾，则存在 q 使

（1） $\Gamma_n \vdash q$，$\neg q$。

这时 $\Gamma_n \neq \Gamma_{n-1}$。（$\Gamma_{n-1}$ 无矛盾而 Γ_n 有矛盾。）于是由 Γ_n 的定义式知

（2） $\Gamma_{n-1} \vdash p_{n-1}$ 不成立，

（3） $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{\neg p_{n-1}\}$。

将（3）中 Γ_n 代入（1）左端，用反证律即得 $\Gamma_{n-1} \vdash p_{n-1}$，这与（2）矛盾。这就证明了每个 Γ_n 的无矛盾性。

作

$$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n,$$

Γ^* 也是无矛盾的。这是因为，由 $\Gamma^* \vdash q$，$\neg q$ 可得出结论：对某个充分大的 n，$\Gamma_n \vdash q$，$\neg q$ 成立。（注意 1.2.2 例 1 之前的结论 6°）。

Γ^* 具有完备性：对于任一公式 q，$\Gamma^* \vdash q$ 与 $\Gamma^* \vdash \neg q$ 二者必居其一。事实上，设 $q = p_n$（q 必在 p_0，p_1，p_2，…中出现），如果 $\Gamma^* \vdash p_n$ 不成立，那么便有以下结论：

$\Gamma_n \vdash p_n$ 不成立， （$\Gamma_n \subseteq \Gamma^*$）

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg p_n\}$， （注意 Γ_n 的定义式）

$\Gamma^* \vdash \neg p_n$. $\qquad (\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*)$

这说明对任一p_n，$\Gamma^* \vdash p_n$与$\Gamma^* \vdash \neg p_n$二者必居其一。完备的Γ^*叫做Γ的无矛盾完备扩张。利用Γ^*的无矛盾性和完备性，我们就可以定义一个映射u：$L(X) \to Z_2$，定义式是

$$u(q) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Gamma^* \vdash q; \\ 0, & \text{若 } \Gamma^* \vdash \neg q. \end{cases}$$

u的这个定义是合理的，因为对任一$L(X)$的公式q，$\Gamma^* \vdash q$与$\Gamma^* \vdash \neg q$这二者必居其一（Γ^*完备），且只居其一（Γ^*无矛盾）。

下面证明这样定义的u是$L(X)$到Z_2的一个同态，从而是$L(X)$的一个赋值。

对任一公式q，由u的定义可得

$$u(\neg q) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Gamma^* \vdash \neg q; \\ 0, & \text{若 } \Gamma^* \vdash \neg\neg q. \end{cases}$$

将此式与$u(q)$的定义式比较一下便知

（4）　$u(\neg q) = \neg u(q)$。

为了证明$u(q \to r) = u(q) \to u(r)$，分以下两种情形来讨论。

情形 1　$u(q) \to u(r) = 1$。此时又有两种可能：$u(q)=0$或$u(r)=1$。

$u(q)=0 \Rightarrow \Gamma^* \vdash \neg q$　（由u的定义）

$\Rightarrow \Gamma^* \vdash q \to r$　（由否定前件律$\neg q \to (q \to r)$）

$\Rightarrow u(q \to r) = 1$　（由u的定义）

$u(r)=1 \Rightarrow \Gamma^* \vdash r$　（由u的定义）

$\Rightarrow \Gamma^* \vdash q \to r$　（$r \to (q \to r)$是（$L1$）型公理）

$\Rightarrow u(q \to r) = 1$　（由u的定义）

情形 2　$u(q) \to u(r) = 0$。此时有

$u(q)=1$ 且 $u(r)=0$，

$\Gamma^* \vdash q$ 且 $\Gamma^* \vdash \neg r$，　（由u的定义）

$$\Gamma^* \vdash \neg(q \to r), \qquad \text{(见1.2.4例2)}$$
$$u(q \to r) = 0. \qquad \text{(由} u \text{的定义)}$$

总之，不管情形1还是情形2，都有

(5) $\quad u(q \to r) = u(q) \to u(r)$.

(4)与(5)说明，u具有同态的保运算性，因而是L(X)的赋值。

最后我们可以看到，对赋值u来说，Γ中公式的真值皆为1：

$$\begin{aligned} q \in \Gamma \quad &\Rightarrow \quad q \in \Gamma^* \\ &\Rightarrow \quad \Gamma^* \vdash q \\ &\Rightarrow \quad u(q) = 1. \end{aligned}$$

但与此同时，因$\neg p \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$，故有$\Gamma^* \vdash \neg p$，进而有$u(p) = 0$. 这个$u$就是我们所要找的赋值，它使$\Gamma$中公式为真而使$p$为假. 这种$u$的存在说明$\Gamma \vDash p$不成立。**证毕。**

下面来讨论命题演算L的可判定性。

1° L的语义可判定性

我们说命题演算L是语义可判定的，意思是说存在着算法可用来确定L中任给的公式$p(x_1, \cdots, x_n)$是不是永真式。

这样的算法是存在的：任给L中的公式$p(x_1, \cdots, x_n)$，我们来一一计算它的真值函数的函数值$p(v_1, \cdots, v_n)$，如果对所有$v_1, \cdots, v_n \in Z_2$都有$p(v_1, \cdots, v_n) = 1$（即真值表的最后一列全为1），则p是永真式，否则p不是永真式。

2° L的语法可判定性

我们说L是语法可判定的，是指存在算法可用以确定L的任意公式p是不是L的定理。

这样的算法是存在的：根据L的可靠性和完全性，看公式p是不是定理，就看它是不是永真式.

以上讨论说明，L的语义可判定导致了L的语法可判定。

如果世上所有的推理过程都能在命题演算L的框架内得到

形式化，那么从理论上来说，莱布尼茨通过计算解决争论的理想就完全实现了。但可惜并非人类所进行的全部推理都能在L中形式化。

我们还需要建立比L更细致的数学模型。

练　习　十　五

1. 求证

$$\vdash p(x_1,\cdots,x_n) \quad \Rightarrow \quad \vdash p(p_1,\cdots,p_n),$$

其中 $p_1,\cdots,p_n$ 是任意的公式。

2. （紧致性定理）求证，若 $\Gamma \vDash p$，则定有 Γ 的有限子集 Σ 使 $\Sigma \vDash p$。

1.5 应用举例

在应用中，$\Gamma \vdash p$ 或 $\Gamma \vDash p$ 中的假定集 Γ 常常是有限集。按照1.3.8练习十四题1，当我们需要从语法上证明

$$\{r_1,\cdots,r_n\} \vdash p$$

时，可以改为从语义上检查 $(r_1 \wedge \cdots \wedge r_n) \to p$ 是不是永真式。为此，只要写出真值表就可以了。但是当命题变元的个数比较多时，这种一般的写真值表的方法太烦，甚至实际上行不通。这时就需要灵活采用其他一些特殊方法。

例 1　检查下面的论证是否正确。

“前提：1°　a_1 为奇数或 a_2 为偶数，

　　　　2°　a_1 若为偶数，则 a_3 与 a_4 皆为偶数，

　　　　3°　a_4 若为偶数，则 a_2 也为偶数。

结论：a_2 与 a_3 至少有一个为偶数。”

解　用 x_i 表示“a_i 为偶数”，$i=1,2,3,4$。于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg x_1 \vee x_2, x_1 \to (x_3 \wedge x_4), x_4 \to x_2\} \vdash x_2 \vee x_3.$$

检查它的正确性，可以从语义上进行：检查$\neg x_1 \vee x_2$，$x_1 \to (x_3 \wedge x_4)$ 和$x_4 \to x_2$这三个公式的所有公共成真指派是否都是$x_2 \vee x_3$的成真指派。为此，只用检查是否存在使前三个公式为真而使$x_2 \vee x_3$为假的指派。如果存在这种指派，那么原结论不成立。这样，问题就归结为下面的真值方程组是否有解：

（1）　$\neg v_1 \vee v_2 = 1$,

（2）　$v_1 \to (v_3 \wedge v_4) = 1$,

（3）　$v_4 \to v_2 = 1$,

（4）　$v_2 \vee v_3 = 0$。

由（4）式可得

（5）　$v_2 = 0$，且

（6）　$v_3 = 0$。

由（3）与（5）得

（7）　$v_4 = 0$。

由（1）与（5）得

（8）　$v_1 = 0$。

将（6）、（7）、（8）式代入（2）的左边，得

$$v_1 \to (v_3 \wedge v_4) = 0 \to (0 \wedge 0) = 1.$$

所得结果说明，（0，0，0，0）是（1）—（4）的解。它是前三个公式（“前提”）的公共成真指派，但却是$(x_2 \vee x_3)$（“结论”）的成假指派。所以题中的论证不能成立。

例 2　检查下面结果的正确性，

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, (x_1 \wedge x_2) \to (x_5 \wedge x_6), (x_3 \wedge x_4) \to x_7, (x_6 \wedge x_7) \to x_8\} - x_8.$$

解　若用真值表法，则要进行$2^8 = 256$行的计算。现在仍用前例中的方法，解真值方程组：

（1）　$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$,

（2）　$(v_1 \wedge v_2) \to (v_5 \wedge v_6) = 1$,

（3）　$(v_3 \wedge v_4) \to v_7 = 1$,

（4）　　$(v_6 \wedge v_7) \to v_8 = 1$，

（5）　　$v_8 = 0$。

由（4），（5）得

（6）　　$v_6 \wedge v_7 = 0$。

由（1），（2）得

（7）　　$v_5 \wedge v_6 = 1$。

由（1），（3）得

（8）　　$v_7 = 1$。

由（6），（8）得

（9）　　$v_6 = 0$。

（7）与（9）矛盾，所以方程组（1）—（5）无解。这说明题中原结论成立。

不难看出例2中结论的成立给出了下面的化学问题的肯定回答。

"现有 MgO，H_2，C，O_2 四种化学物质，且已知

$$MgO + H_2 \to Mg + H_2O,$$
$$C + O_2 \to CO_2,$$
$$H_2O + CO_2 \to H_2CO_3.$$

问：能否用现有物质制造出 H_2CO_3（碳酸）？"

例 3　一案案情涉及 a，b，c，d 四人。根据已有线索，已知：

1°　若 a，b 均未作案，则 c，d 也均未作案；

2°　若 c，d 均未作案，则 a，b 也均未作案；

3°　若 a 与 b 同时作案，则 c 与 d 有一人且只有一个作案；

4°　若 b 与 c 同时作案，则 a 与 d 同时作案或同未作案。

办案人员由此得出结论：a 是作案者。这个结论是否正确？

解　用 x_1，x_2，x_3，x_4 分别表示 a，b，c，d 作案。办案人员的推理可形式化为

$$\{(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_3 \wedge \neg x_4), (x_1 \wedge x_2) \to ((x_3 \vee x_4)$$

$\wedge\neg(x_3\wedge x_4)),(x_2\wedge x_3)\to((x_1\wedge x_4)$
$\vee(\neg x_1\wedge\neg x_4))\}\vdash x_1$。

解方程组

（1） $(\neg v_1\wedge\neg v_2)\leftrightarrow(\neg v_3\wedge\neg v_4)=1$,

（2） $(v_1\wedge v_2)\to((v_3\vee v_4)\wedge\neg(v_3\wedge v_4))=1$,

（3） $(v_2\wedge v_3)\to((v_1\wedge v_4)\vee(\neg v_1\wedge\neg v_4))=1$,

（4） $v_1=0$。

$v_1=0$时（2）自动成立，不管v_2取何值。试取$v_2=1$。在（3）中，若$v_3=0$，则（3）也自动成立。
把这几个数据代入（1），得

$$0\leftrightarrow(1\wedge\neg v_4)=1.$$

此式当$v_4=1$时是成立的。于是得到方程组（1）—（4）的一个解（0，1，0，1）。这说明，还没有理由断言“a是作案者。”

练 习 十 六

把以下论证形式化，并判断是否合理。

1．如果函数f不连续，那么函数g不可微。但已知g是可微的。所以f是连续函数。

2．A，B，C，D为四个事件。已知：A和B不同时发生；若A发生，则C不发生而D发生；若D发生，则B不发生。结论：B和C不同时发生。

3．例3中如果办案人员作出的判断是：“a，b，c三人中至少有一人未作案”，判断是否正确？

2 谓词演算

上一章建立的命题演算L中，命题变元用于表示简单命题，是不能再分割的最小单位——L的“原子”。这一点使L这个模型比较简单，但也限制了L的应用范围。比如，古典三段论法就不能很好地纳入到L中去。让我们考察下面的推理实例：

“金属都是导电体。

铜是金属，所以铜是导电体。”

这个推理方法无法在L的框架内得到正确表现。它可以在L中形式化为$\{x_1,x_2\}\vdash x_3$，但这在L中并不成立。要表现这种推理方式，须建立新的模型。在新的系统中，首先要涉及“原子命题”的内部结构。此外，还有一个要考虑的问题。让我们看另一个例子。

设$A=\{1,2,\cdots,100\}$。考察下面的推理：

“A中数皆大于零。5是A中的数，所以5大于零。”

用x_n表示“$n\in A$”，用y_n表示“$n>0$”($n=1,2,\cdots$)。上面的推理可以在L中形式化为下面正确的结果：

$$\{(x_1\rightarrow y_1)\wedge\cdots\wedge(x_{100}\rightarrow y_{100}),x_5\}\vdash y_5.$$

但若把A改成全体正实数集，则上面的形式化就遇到了麻烦，遇到从有限的个体对象到无限的个体对象的转变。为此也要求有新的形式化的方法。下面讨论的谓词演算对命题演算的改进在于：深入分析“原子命题”内部结构，同时引进量词运算。这是一种更细致、更复杂的数学模型，它能更深入、更广泛地表现实际的推理过程。

2.1 谓词演算K

2.1.1 项与原子公式

先来分解一个数学命题：

“一数的平方与一数的立方之和大于零．”分析一下这个命题便可知道：

第一，命题涉及的个体对象是某一个数（记为x_1），另一个数（记为x_2）及一个常数$c_1=0$；

第二，命题中含有三个函数，一个一元函数是平方函数（记为f_1^1），第二个一元函数是立方函数（记为f_2^1），还有一个二元函数“求和”（记为f_1^2）；

第三，命题中还含有一个关于数的二元关系——“大于”（记为R_1^2）．

用引进的记号可以把原命题表示成

$$R_1^2(f_1^2(f_1^1(x_1),f_2^1(x_2)),c_1),$$

它的真假取决于对x_1和x_2所作的解释。若将x_1和x_2解释为正整数，则它为真。

总之，分解这个原子命题，得到的是：

1° 一些“个体对象”及对它们进行的一些“运算”；

2° 关于这些对象的一个“关系”，正因为有这个“关系”，原子命题才得以形成。

基于以上分析，可以着手建立新的模型。

我们由四个集出发：个体变元集X，个体常元集C，运算集F，谓词集R．

个体变元集$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$是可数集。个体变元x_i可用来表示某种个体对象。

个体常元集$C=\{c_1,c_2,\cdots\}$是可数集，也可以是有限集（甚

至是空集）。个体常元c_i可用来表示确定的个体对象。

运算集 $F=\{f_1^1,f_2^1,\cdots,f_1^2,f_2^2,\cdots,f_1^3,f_2^3,\cdots\}$ 是可数集，也可以是有限集(包括空集)。f_i^n叫做第 i 个 n 元运算符或函数词，用来表示某种个体对象集上的 n 元运算。

谓词集 $R=\{R_1^1,R_2^1,\cdots,R_1^2,R_2^2,\cdots,R_1^3,R_2^3,\cdots\}$ 是可数集，也可以是有限集，但不能是空集。R_i^n叫做第 i 个 n 元谓词，用来表示某种个体对象集上的 n 元关系。

不同的C，F和R，构造的是不同的谓词演算系统。

定义1（项集）项集T，是指由 $X\cup C$生成的以F为运算集的F-型代数。$F=\phi$时，规定项集 $T=X\cup C$。

具体地说，当$F\neq\phi$时，项集

$$T=\bigcup_{k=0}^{\infty}T_k,$$

其中

$$\begin{aligned}
T_0&=X\cup C=\{x_1,x_2,\cdots,c_1,c_2,\cdots\},\\
T_1&=\{f_1^1(x_1),f_1^1(x_2),\cdots,f_1^1(c_1),\cdots,\\
&\quad f_2^1(x_1),\cdots,f_2^1(c_1),\cdots,\\
&\quad \cdots\cdots,\\
&\quad f_1^2(x_1,x_1),\cdots,\\
&\quad \cdots\cdots,\\
&\quad f_1^3(x_1,x_1,x_1),\cdots,\\
&\quad \cdots\cdots\},\\
T_2&=\{f_1^1(f_1^1(x_1)),\cdots\},\\
&\quad \cdots\cdots.
\end{aligned}$$

第 k 层项（T_k的元素）由零层项（个体常元、个体变元）经 k 次运算得来。

总之，仅有以下两种形式的项：

1° 个体变元x_i和个体常元c_i都是项；

2° 若$t_1,\cdots,t_n$是项，则$f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$也是项。

和1.2.1中对$L(X)$的讨论类似，可以证明项代数T具有可数性（即T是可数集）和分层性（即T的各个层次之间没有公共元素）。

例 1 设$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^1,f_1^2\}$，项集T的前三个层次是

$$T_0=\{c_1,x_1,x_2,\cdots\},$$

$$T_1=\{f_1^1(c_1),f_1^1(x_1),f_1^1(x_2),\cdots,$$
$$f_1^2(c_1,c_1),f_1^2(c_1,x_1),\cdots\},$$

$$T_2=\{f_1^1(f_1^1(c_1)),f_1^1(f_1^1(x_1)),\cdots,$$
$$f_1^1(f_1^2(c_1,c_1)),f_1^1(f_1^2(c_1,x_1)),\cdots,$$
$$f_1^2(c_1,f_1^1(c_1)),f_1^2(f_1^1(c_1),c_1),\cdots\}.$$

定义 2（闭项）只含个体常元的项叫做闭项。

例1中写出的$f_1^1(c)$，$f_1^2(c_1,c_1)$，$f_1^1(f_1^1(c_1))$，$f_1^1(f_1^2(c_1,c_1))$等就是闭项，而$f_1^1(x_1)$，$f_1^2(c_1,x_1)$等都不是闭项。

由项集的生成过程可以看出，所有闭项的集就是由个体常元集C生成的F型代数，它是项代数T的子代数。

定义 3（原子公式集）原子公式集是指

$$Y=\bigcup_{i,n}\{R_i^n\}\times\underbrace{T\times\cdots\times T}_{n\text{个}T},$$

即

$$Y=\{(R_i^n,t_1,\cdots,t_n)\mid R_i^n\in R,t_1,\cdots,t_n\in T\}.$$

以后把原子公式$(R_i^n,t_1,\cdots,t_n)$写成$R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$。

由定义可知Y也是可数集。

在谓词演算中，原子公式是用来表示命题的最小单位，相当于命题演算中的命题变元，表示简单命题。

练 习 十 七

1. 设$C=\phi$，$F=\{f_1^1\}$。试给出项集T。

2. 设$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^2,f_2^2\}$，$R=\{R_1^2\}$。试写出五、六个不

同的原子公式。如果$x_1, x_2, \cdots$分别表示自然数$n_1, n_2, \cdots, c_1$表示0，f_1^2表示+，f_2^2表示×，R_1^2表示=，指出你所写的原子公式的算术解释。

2.1.2 谓词代数K(Y)

谓词代数K(Y)是由原子公式集Y出发来构造的。这个过程相当于命题演算中由命题变元集出发构造自由命题代数L(X)的过程。不同的是，除了$\neg, \rightarrow$两种运算，还多了量词运算。

定义 1 (谓词代数K(Y)) 设Y是原子公式集。谓词代数K(Y)是指由原子公式集Y生成的$\{\neg, \rightarrow, \forall x_1, \forall x_2, \cdots\}$型代数，其中$\neg$（否定）是一元运算，$\rightarrow$（蕴涵）是二元运算，$\forall x_1$，$\forall x_2$，$\cdots$都是一元运算。K(Y)的元素叫做谓词演算的合式公式，简称为公式。运算$\forall x_i$叫做全称量词运算。

按定义，以下两条给出了K(Y)的全部合式公式：

1° 原子公式是合式公式；

2° 若p, q是合式公式，则$\neg p, p\rightarrow q, \forall x_i p$都是合式公式。

由于Y是可数集，与以前类似，可以证明K(Y)具有可数性与分层性（不同层次间没有共同的公式）。K(Y)的零层由原子公式组成。K(Y)的第k层公式由原子公式经k次运算得来。

除了$\neg, \rightarrow$和$\forall x_i$，还可在K(Y)上定义新的运算$\vee, \wedge, \leftrightarrow$及$\exists x_i$（存在量词运算），定义式是：

$$p\vee q = \neg p \rightarrow q,$$

$$p\wedge q = \neg(p\rightarrow \neg q),$$

$$p\leftrightarrow q = (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p),$$

$$\exists x_i p = \neg \forall x_i \neg p.$$

注意$\forall x_i(p\rightarrow q)$和$\forall x_i p\rightarrow q$的区别。前者$\forall x_i$的作用范围（简称“范围”）是$p\rightarrow q$，而后者$\forall x_i$的范围是$p$。

定义 2（变元的自由出现与约束出现）在一个公式里，个体变元x_i的出现如果不是在$\forall x_i$中或在$\forall x_i$的范围中，则叫做自由

出现，否则叫做约束出现。

比如，在$\forall x_1(R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2R_1^1(x_2))$中，$x_1$约束出现两次；$x_2$约束出现两次且自由出现一次。

定义 3（闭式）公式若不含自由出现的变元，则叫做闭式。

例如，公式$\forall x_1(R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2R_1^1(x_2))$不是闭式，因为$x_2$在其中自由出现一次。

公式$\forall x_1(R_1^2(x_1,c_1)\to\forall x_2R_1^1(x_2))$是闭式。

定义 4 （项t对公式p中x_i是自由的）若用项t去替换p中所有自由出现的x_i后，在得到的新公式里，t中的变元都是自由的，则说t对p中x_i是自由的；若t中有变元在上述替换后受到约束，则说t对p中x_i是不自由的。

换一种说法是：若对于t中的任一变元x_j，p中所有自由出现的x_i都不是出现在$\forall x_j$的范围内，则说t对p中x_i是自由的。

每当需要用项t去替换某公式p中所有自由出现的x_i时，就要首先考虑t对p中x_i是否自由的问题，考虑可能出现的“变元干扰”。

下面两种情形，t对p中x_i当然是自由的：

1° t是闭项，

2° x_i在p中不自由出现。

此外，在任何公式中，x_i（作为项）对x_i自己总是自由的。

在$\forall x_1R_1^1(x_2)$中，项$f_1^2(x_1,x_3)$对x_2是不自由的，而项$f_1^2(x_4,x_3)$对x_2是自由的。在$\forall x_1R_1^1(x_2)$中，任何不含x_1的项对x_2是自由的；任何含有x_1的项对x_2是不自由的。

在$\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_3R_2^2(x_3,x_1)$中，$f_1^2(x_1,x_4)$对$x_2$是不自由的；$f_2^2(x_2,x_3)$对$x_2$是自由的，但对$x_1$是不自由的；$f_3^2(x_1,x_3)$对$x_1,x_2$都是不自由的；$x_2$对$x_1$是自由的；$x_1$对$x_2$是不自由的。以上列出的项对该公式中$x_3,x_4,x_5$都是自由的，因为$x_3,x_4,x_5$在该公式中没有自由出现。（$x_4,x_5$根本不出现。）

以后如不另加说明，$p(t)$表示用项t去替换公式$p(x_i)$中所

有自由出现的x_i所得结果。（我们写$p(x_i)$，其中x_i是指该公式中自由出现的那些x_i，而不是指约束出现的x_i。写$p(x_i)$，但x_i可以不自由出现或根本不出现，且不排除有其他变元在$p(x_i)$中自由出现。）

比如，当$p(x_1)=R_1^1(x_1)\to\forall x_1 R_1^2(x_1,c_1)$时，$p(t)=R_1^1(t)\to\forall x_1 R_1^2(x_1,c_1)$；当$p(x_1)=R_1^1(x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_2,c_1)$或当$p(x_1)=R_1^1(x_2)\to\forall x_1 R_1^2(x_1,c_1)$时，都有$p(t)=p(x_1)$。

练 习 十 八

1．下面哪些符号串是谓词演算的公式？其中有没有闭式？

1° $R_1^2(f_1^1(x_1),x_1)$，

2° $f_1^3(x_1,x_3,x_4)$，

3° $R_1^1(x_2)\to R_1^3(x_3,c_1)$，

4° $\neg\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$，

5° $\forall x_2 R_1^1(x_1)\to\neg R_1^1(x_2)$，

6° $R_1^3(f_2^3(x_1,c_2,x_2))$，

7° $\neg R_1^1(x_1)\to R_1^1(x_2)$，

8° $\forall x_1 R_1^3(c_1,c_2,f_1^1(c_3))$。

2．在以下公式中，哪些x_1的出现是自由的？哪些x_1的出现是约束的？项$f_1^2(x_1,x_3)$对该公式中的x_2是不是自由的？

1° $\forall x_2(R_1^2(x_1,x_2)\to R_2^2(x_3,c_1))$，

2° $R_1^1(x_3)\to\neg\forall x_1\forall x_2 R_1^3(x_1,x_2,c_1)$，

3° $\forall x_1 R_1^1(x_1)\to\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$。

4° $\forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1)\to\forall x_1 R_2^2(x_3,f_2^2(x_1,x_2))$。

3．设t是项$f_1^2(x_1,x_3)$。$p(x_1)$是下面的公式，确定t对$p(x_1)$中的x_1是否自由；如果是自由的，写出$p(t)$。

1° $\forall x_1 R_1^2(x_2,f_1^2(x_1,x_2))\to R_1^1(x_1)$，

2° $\forall x_1\forall x_3(R_1^1(x_3)\to R_1^1(x_1))$，

3° $\forall x_2 R_1^1(f_1^1(x_2))\to\forall x_3 R_1^3(x_1,x_2,x_3)$， 4° $\forall x_2 R_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \to \forall x_3 R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$。

4．用以下项 t 重复第3题的练习。

（1）x_2，　（2）x_3，

（3）$f_1^2(c_1, x_1)$，　（4）$f_1^3(x_1, x_2, x_3)$。

5．设x_i在公式$p(x_i)$中自由出现，x_j不在公式 $p(x_i)$ 中自由出现。试证，如果x_j对$p(x_i)$中的x_i是自由的，那么x_i对$p(x_j)$中的x_j也是自由的。

2.1.3 谓词演算K的建立

谓词演算K是用谓词代数 K(Y) 来定义的，其方式与命题演算L的定义方式类似。

定义 1（谓词演算 K）谓词演算 K，指带有如下规定的"公理"和"证明"的谓词代数K(Y)。

1° **"公理"**

取K(Y)中以下形状的公式作为"公理"。

(K1)　$p \to (q \to p)$，

(K2)　$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$，

(K3)　$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$，

(K4)　$\forall x_i p(x_i) \to p(t)$，**其中项 t 对$p(x_i)$中的x_i是自由的，**

(K5)　$\forall x_i (p \to q) \to (p \to \forall x_i q)$，**其中$x_i$不在 p 中自由出现。**

以上给出的是五种公理模式，其中 $p, q, r, p(x_i)$ 都是任意的公式。

2° "证明"

设 p 是某个公式，Γ 是某公式集。p从Γ可证，记作 $\Gamma \vdash p$，是指存在着公式的有限序列 p_1，…，p_n，其中$p_n = p$，且对每个 $k = 1, \cdots, n$有

(i)　$p_k \in \Gamma$，**或**

(ii)　p_k**为公理，或**

(iii)　**存在$i, j < k$，使$p_j = p_i \to p_k$（此时说由$p_i, p_i \to p_k$ 使用**

MP 得到p_k)，或

(iv) 存在$j<k$,使$p_k=\forall x_i p_j$。此时说由p_j使用"Gen"（"推广"）这条推理规到得到p_k,x_i叫做Gen变元（Gen是*Generalization*的缩写）。

符合上述条件的$p_1,\cdots,p_n$叫做p从Γ的"证明"。Γ叫做假定集，p叫做Γ的语法推论。

若$\varphi\vdash p$,则p叫做K的定理，记作$\vdash p$。

这就完成了谓词演算K的定义。

公理(K1)—(K3)和命题演算L的公理(L1)—(L3)形式上完全一样，但内容有所不同，这里的$p,q,r\in K(Y)$。

注意公理模式(K4)中所加的条件（"t 对$p(x_i)$中的x_i是自由的"）。例如，$\forall x_1 p(x_1)\to p(x_1)$和

$$\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_3,x_2)$$

都是(K4)型公理；但

$$\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2 R_1^2(x_2,x_2)$$

却不是(K4)型公理，因为x_2对$\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)$中的$x_1$是不自由的。

下面是个跨演算的定理。注意K(Y)中也有用$\neg,\to$表示的同名运算。

定理 1 **设$x_1,\cdots,x_n$是命题演算L的命题变元,$p(x_1,\cdots,x_n)\in L(X_n)$。我们有**

$$\underset{L}{\vdash} p(x_1,\cdots,x_n) \quad\Rightarrow\quad \underset{K}{\vdash} p(p_1,\cdots,p_n),$$

其中$p_1,\cdots,p_n\in K(Y)$,$p(p_1,\cdots,p_n)$是用$p_1,\cdots,p_n$分别全部替换$p(x_1,\cdots,x_n)$中的$x_1,\cdots,x_n$所得结果。

证 因为L中的公理模式(L1),(L2),(L3)和K中的公理模式(K1),(K2),(K3)形式上完全相同，L中的推理规则MP也在K中保留着，所以$p(x_1,\cdots,x_n)$在L中的证明可翻译成$p(p_1,\cdots,p_n)$在K中的证明，只要把所有命题变元x_i全都换成对应的p_i便可。证毕。

定义 2（L型永真式，简称永真式） 若$p(x_1,\cdots,x_n)\in L(X_n)$是L中的永真式，则对任意$p_1,\cdots,p_n\in K(Y)$，$p(p_1,\cdots,p_n)$ 叫做K的命题演算型永真式或L型永真式，简称为永真式。

定理 1 的另一种陈述是：K的（L型）永真式一定是K的定理。逆定理不成立：并非K的定理一定都是永真式。例如，$\forall x_1 R_1^1(x_1)\to\forall x_1 R_1^1(x_1)$是永真式，也是K的定理；而$\forall x_1 R_1^1(x_1)\to R_1^1(x_1)$是K的定理而不是永真式。

定理 1 告诉我们，谓词演算K这个新的数学模型并不是将命题演算L全部推倒，而是对L的改进。K保存了L的精华。L中的结论、方法和技巧都将在K中继续起作用（特别是通过定理1）。

按照定理 1，以下各式在K中仍然成立。

$\vdash p\to p$，（同一律）

$\vdash \neg q\to(q\to p)$，（否定前件律）

$\vdash (\neg p\to p)\to p$，（否定肯定律）

$\vdash \neg\neg p\to p$，（双重否定律）

$\vdash (p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ （HS）

等等。当然，这里的p,q,r都是K的公式。

今后对所用到的永真式一般不再一一验证。

一公式集Γ是无矛盾的，仍指对任何公式q，$\Gamma\vdash q$与$\Gamma\vdash\neg q$二者不同时成立。

命题 1 **Γ有矛盾 $\Rightarrow$ K的任一公式从Γ可证。**

证明与1.2.2命题 3 的证明完全相同。

例 1 $\{\neg\exists x_i\neg p\}\vdash\forall x_i p$，因为$\forall x_i p$有从$\{\neg\neg\forall x_i\neg\neg p\}$的一个证明：

（1）	$\neg\neg\forall x_i\neg\neg p$	假定
（2）	$\neg\neg\forall x_i\neg\neg p\to\forall x_i\neg\neg p$	永真式
（3）	$\forall x_i\neg\neg p$	（1），（2），MP
（4）	$\forall x_i\neg\neg p\to\neg\neg p$	（K4）
（5）	$\neg\neg p$	（3），（4），MP

(6) $\neg\neg p\to p$ 永真式

(7) p (5)，(6)，MP

(8) $\forall x_i p$ (7) Gen

命题 2（$\exists_1$规则） 设项 t 对$p(x_i)$中的x_i自由，则有

$$\vdash p(t)\to\exists x_i p(x_i).$$

证 已知 t 对$p(x_i)$中的x_i自由，故公式

$$\forall x_i\neg p(x_i)\to\neg p(t)$$

是(K4)型公理．由此式及永真式

$$(q\to\neg p)\to(p\to\neg q)$$

便可得

$$\vdash p(t)\to\neg\forall x_i\neg p(x_i).$$ 证毕．

$\exists_1$规则是后面经常要用到的．

例 2 $\{\forall x_i(p\to q),\ \forall x_i\neg q\}\vdash\forall x_i\neg p$，其证明中只使用Gen 变元$x_i$．以下是所需要的证明．

(1) $\forall x_i(p\to q)$ 假定

(2) $\forall x_i(p\to q)\to(p\to q)$ (K4)

(3) $p\to q$ (1)，(2)，MP

(4) $\forall x_i\neg q$ 假定

(5) $\forall x_i\neg q\to\neg q$ (K4)

(6) $\neg q$ (4)，(5)，MP

(7) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ 永真式

(8) $\neg q\to\neg p$ (3)，(7)，MP

(9) $\neg p$ (6)，(8)，MP

(10) $\forall x_i\neg p$ Gen

以上证明最后一步使用了Gen变元x_i，但没有使用其他Gen变元．

K 中也有演绎定理，但要注意此时在定理中所加的新条件．

定理 2（演绎定理）

1° 若$\Gamma\vdash p\to q$，则$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$；

2° 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，且证明中所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的Gen变元就可得 $\Gamma \vdash p \to q$。

证 1° 由MP即得。

2° 设$q_1, \cdots, q_n$是 q 在K中从$\Gamma \cup \{p\}$的证明．由已知条件，该证明中涉及的Gen变元不在 p 中自由出现。

现对 n 归纳。

$n = 1$时，$q_1 = q$。此时有三种可能：$q = p, q \in \Gamma$ 或 q 是公理。这时不管哪种可能都不用Gen规则便可证得$\Gamma \vdash p \to q$。

$n > 1$时，只用考虑当 q 是使用 Gen规则而得的情形（其他情形下的证明都与 L中演绎定理的证明相同，且不涉及Gen）。设 $q = \forall x_i q_j$，$j < n$，且Gen变元x_i未在 p 中自由出现．这时因 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q_j$，由归纳假设，有$\Gamma \vdash p \to q_j$，且不增加新的Gen变元。

以下是$p \to q$从Γ的一个证明。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (k) & p \to q_j\end{array}\right\} p \to q_j \text{从}\Gamma\text{的证明}$$

$(k+1)$ $\forall x_i (p \to q_j)$ (k)，Gen

$(k+2)$ $\forall x_i (p \to q_j) \to (p \to \forall x_i q_j)$ (K5)

$(k+3)$ $p \to \forall x_i q_j$，此即$p \to q$ $(k+1)$，$(k+2)$，MP

以上过程中，除x_i外没有使用别的Gen变元．**证毕．**

推论 1 当 p 是闭式时，有

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash p \to q.$$

命题 3 $\vdash \forall x_i (p \to q) \to (\exists x_i p \to \exists x_i q)$，**除了$x_i$外不用其他Gen 变元。**

证 依次有

(1) $\{\forall x_i (p \to q), \ \forall x_i \neg q\} \vdash \forall x_i \neg p$

（例 2，其中只用了x_i为Gen变元）

(2) $\{\forall x_i (p \to q)\} \vdash \forall x_i \neg q \to \forall x_i \neg p$

（由（1）用演绎定理，注意（1）中所用的Gen变元 x_i不在$\forall x_i \neg q$ 中自由出现）

（3） $\{\forall x_i(p\to q)\}\vdash\neg\forall x_i\neg p\to\neg\forall x_i\neg q$

（由（2）使用永真式（换位律））

（4） $\vdash\forall x_i(p\to q)\to(\exists x_i p\to\exists x_i q)$

（由（3）再用演绎定理）

以上除（1）中用的x_i，没有用别的Gen变元。**证毕。**

定理 3（反证律）若$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$及$\neg q$，且所用Gen变元不在$p$中自由出现，则不增加新的Gen变元便可得$\Gamma\vdash p$。

证 以下公式从$\Gamma\cup\{\neg p\}$可证

（1） q 已知

（2） $\neg q$ 已知

（3） $\neg q\to(q\to p)$ 永真式

（4） $q\to p$ （2），（3），MP

（5） p （1），（4），MP

于是以下公式从Γ可证

（6） $\neg p\to p$ 由演绎定理

（7） $(\neg p\to p)\to p$ 永真式

（8） p （6），（7），MP

以上过程没有出现新的Gen变元。**证毕。**

定理 4（归谬律）若$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$及$\neg q$，且Gen变元不在p中自由出现，则不增加新的Gen变元便可得$\Gamma\vdash\neg p$。

证 由已知条件及双重否定律$\neg\neg p\to p$便可得

（1） $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash q$，

（2） $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash\neg q$。

由（1），（2）用反证律得$\Gamma\vdash\neg p$，且不涉及新的Gen变元。**证毕。**

例 3 $\{\forall x_i p\}\vdash\exists x_i p$。现用归谬律来证明．以下公式从$\{\forall x_i p,\forall x_i\neg p\}$可证

（1） $\forall x_i p$ 假定

（2） $\forall x_i\neg p$ 假定

(3)	$\forall x_i \neg p \to \neg p$	(K4)
(4)	$\forall x_i p \to p$	(K4)
(5)	p	(1), (4), MP
(6)	$\neg p$	(2), (3), MP

由（5），（6）用归谬律得

$\{\forall x_i p\} \vdash \neg \forall x_i \neg p$，此即 $\exists x_i p$。

命题 4（$\exists_2$ 规则）设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，其中 Gen 变元不在 p 中自由出现，且 x_i 不在 q 中自由出现，那么有 $\Gamma \cup \{\exists x_i p\} \vdash q$，且除了 x_i 不增加其他 Gen 变元。

证 已知 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$，且 Gen 变元不在 p 中自由出现。于是以下公式从 Γ 可证

(1)	$p \to q$	由演绎定理
(2)	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	永真式
(3)	$\neg q \to \neg p$	(1), (2), MP
(4)	$\forall x_i (\neg q \to \neg p)$	(3), Gen
(5)	$\forall x_i (\neg q \to \neg p) \to (\neg q \to \forall x_i \neg p)$	(K5)
(6)	$\neg q \to \forall x_i \neg p$	(4), (5), MP
(7)	$(\neg q \to \forall x_i \neg p) \to (\neg \forall x_i \neg p \to q)$	永真式
(8)	$\neg \forall x_i \neg p \to q$，即 $\exists x_i p \to q$	(6), (7), MP

以上建立 $\Gamma \vdash \exists x_i p \to q$ 的过程除了 x_i 外未用其他新的 Gen 变元。再用一次演绎定理便得 $\Gamma \cup \{\exists x_i p\} \vdash q$。**证毕。**

$\exists_2$ 规则在后面也是常要用到的。

练 习 十 九

1. 写出 $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^1(x_1))$ 在 K 中的证明。

2. 试证对任意公式 p 与 q，有

$\vdash \forall x_i (p \to q) \to (\forall x_i p \to \forall x_i q)$。

3. 求证

1° $\{\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\} \vdash \forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$， 2° $\{\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1,x_2)\}\vdash\forall x_2\forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$.

（要求写出在K中的证明。）

4. 设x_i不在p中自由出现。求证

1° $\vdash(p\to\forall x_i q)\to\forall x_i(p\to q)$,

2° $\vdash(p\to\exists x_i q)\to\exists x_i(p\to q)$.

5. 以下推理是否正确？

1° 由 $R_1^1(x_1)$ 使用 Gen 规则得 $\forall x_1 R_1^1(x_1)$。这证明了

$$\{R_1^1(x_1)\}\vdash\forall x_1 R_1^1(x_1).$$

再由此用演绎定理便得 $\vdash R_1^1(x_1)\to\forall x_1 R_1^1(x_1)$.

2° 因 $\{\exists x_1 R_1^1(x_1),\ \neg R_1^1(x_1)\}\vdash\forall x_1\neg R_1^1(x_1)$ 及$\neg\forall x_1\neg R_1^1(x_1)$，故用反证律便得 $\{\exists x_1 R_1^1(x_1)\}\vdash R_1^1(x_1)$。再由演绎定理得

$$\vdash\exists x_1 R_1^1(x_1)\to R_1^1(x_1).$$

2.1.4 等价公式和对偶律

命题 1 对K中任意公式p，q，r，有

1° $\vdash p\leftrightarrow p$，（自反性）

2° $\vdash p\leftrightarrow q \Rightarrow \vdash q\leftrightarrow p$，（对称性）

3° $\vdash p\leftrightarrow q$且$\vdash q\leftrightarrow r \Rightarrow \vdash p\leftrightarrow r$，（可递性）

证 1° $p\leftrightarrow p$是永真式。

2° 若已知$\vdash p\leftrightarrow q$，则有以下$q\leftrightarrow p$在K中的证明

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\\ (k) & p\leftrightarrow q\end{array}\right\}\ p\leftrightarrow q\text{在K中的证明}$$

$(k+1)$	$(p\leftrightarrow q)\to(q\leftrightarrow p)$	永真式
$(k+2)$	$q\leftrightarrow p$	(k)，$(k+1)$，MP

3° 若已知$\vdash p\leftrightarrow q$和$\vdash q\leftrightarrow r$，由永真式

$$(p\leftrightarrow q)\to((q\leftrightarrow r)\to(p\leftrightarrow r))$$

两次用MP即得$\vdash p\leftrightarrow r$。**证毕**。

定义 1 （可证等价） p 与 q 可证等价（简称为等价），指 $\vdash p\leftrightarrow q$ 成立。

由命题 1 可知，“可证等价”给出了 K(Y) 上的一个等价关系，它确定了 K(Y) 的一个分类。

为确定两个公式是否等价，常用的命题是

命题 2 $\Gamma\vdash p\leftrightarrow q \quad\Leftrightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q$ 且 $\Gamma\vdash q\to p$。

证 （⇒）利用永真式

$$(p\leftrightarrow q)\to(p\to q),$$

$$(p\leftrightarrow q)\to(q\to p).$$

（⇐）利用永真式

$(p\to q)\to((q\to p)\to(p\leftrightarrow q))$。**证毕。**

定理 1 （子公式的等价可替换性） 设公式 q 是公式 p 的子公式：$p=\cdots q\cdots$。用公式 q' 替换 p 中的 q （一次替换）所得结果记为 $p'=\cdots q'\cdots$。则有

$$\Gamma\vdash q\leftrightarrow q' \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash p\leftrightarrow p'.$$

证 对 p 在 K(Y) 中的层次数 n 归纳。

$n=0$ 时，p 是原子公式，故 $p=q$，$p'=q'$，命题成立。

$n>0$ 时，除去 $p=q$ 这种平凡情形外，还有以下三种可能的情形。

(i) $p=\neg r$ 时，q 是 r 的子公式，替换的结果是 $p'=\neg r'$。由归纳假设，

$$\Gamma\vdash q\leftrightarrow q' \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash r\leftrightarrow r',$$

再利用下面的永真式便可，

$$(r\leftrightarrow r')\leftrightarrow(\neg r\leftrightarrow\neg r').$$

(ii) $p=r\to s$ 时，q 或是 r 的子公式（此时 $p'=r'\to s$），或是 s 的子公式（此时 $p'=r\to s'$）。对于前者，用永真式

$$(r\leftrightarrow r')\to((r\to s)\leftrightarrow(r'\to s));$$

对于后者，用永真式

$$(s\leftrightarrow s')\to((r\to s)\leftrightarrow(r\to s')).$$

加上归纳假设，便得结果。

(iii) $p=\forall x_i r$ 时，$p'=\forall x_i r'$。由归纳假设，有 $\Gamma\vdash r\leftrightarrow r'$。为证 $\Gamma\vdash\forall x_i r\leftrightarrow\forall x_i r'$，考虑对称性，只用证一个方向：$\Gamma\vdash\forall x_i r\to\forall x_i r'$。以下是 $\forall x_i r'$ 从 $\Gamma\cup\{\forall x_i r\}$ 的一个证明，注意除了 x_i，没有其他 Gen 变元，故进而可用演绎定理。

(1)	$\forall x_i r$	假定
(2)	$\forall x_i r\to r$	(K4)
(3)	r	(1)，(2)，MP
(4)	$r\to((r\leftrightarrow r')\to r')$	永真式
(5)	$(r\leftrightarrow r')\to r'$	(3)，(4)，MP
(6)	$r\leftrightarrow r'$	归纳假设
(7)	r'	(5)，(6)，MP
(8)	$\forall x_i r'$	(7)，Gen。**证毕。**

定理 2（对偶律）设公式 p 中只出现原子公式及 $\neg,\vee,\wedge,\forall,\exists$。现把 p 中所有原子公式都改为它们的否定，$\vee$ 与 $\wedge$ 互换，$\forall$ 与 $\exists$ 互换，得 p^*，则有 $\vdash p^*\leftrightarrow\neg p$。

证 对 p 中 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\forall$ 及 $\exists$ 出现的次数 n 归纳。

$n=0$ 时，p 是原子公式，故 $p^*=\neg p$。

$n>0$ 时，有以下五种可能：$p=\neg q$，$p=q\vee r$，$p=q\wedge r$，$p=\forall x_i q$ 及 $p=\exists x_i q$。

由归纳假设，总有 $\vdash q^*\leftrightarrow\neg q$，$\vdash r^*\leftrightarrow\neg r$。对五种可能分别讨论如下。

(i) $p=\neg q$ 时，$p^*=\neg q^*$。在 p^* 中用 $\neg q$（等价）替换 q^*，由定理 1，有

$$\vdash q^*\leftrightarrow\neg q \quad\Rightarrow\quad \vdash\neg q^*\leftrightarrow\neg\neg q，\text{即 } \vdash p^*\leftrightarrow\neg p。$$

(ii) $p=q\vee r$ 时，$p^*=q^*\wedge r^*$。在 p^* 中先后用 $\neg q$ 和 $\neg r$ 替换 q^* 和 r^*，得

$$\vdash p^*\leftrightarrow(\neg q\wedge\neg r)，$$

再用 De • Morgan 律便得

$\vdash p^* \leftrightarrow \neg(q \vee r)$，即 $\vdash p^* \leftrightarrow \neg p$。

(iii) $p = q \wedge r$ 时，证明同 (ii)。

(iv) $p = \forall x_i q$ 时，$p^* = \exists x_i q^*$。此时有

$\vdash q^* \leftrightarrow \neg q$， (归纳假设)

$\vdash \exists x_i q^* \leftrightarrow \exists x_i \neg q$， (子公式等价替换)

$\vdash \exists x_i q^* \leftrightarrow \neg \forall x_i \neg\neg q$， (即上式)

$\vdash \neg \forall x_i \neg\neg q \leftrightarrow \neg \forall x_i q$， (子公式等价替换)

$\vdash \exists x_i q^* \leftrightarrow \neg \forall x_i q$， (由上两式用可递性)

最后的结论即为 $\vdash p^* \leftrightarrow \neg p$。

(v) $p = \exists x_i q$ 时，证明同 (iv)。**证毕。**

除了上面的两个语法定理，以下几个命题给出了关于谓词演算K 的一些常用结论。

命题 3 1° $\vdash \forall x_i p(x_i) \leftrightarrow \forall x_j p(x_j)$，

2° $\vdash \exists x_i p(x_i) \leftrightarrow \exists x_j p(x_j)$，

其中 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现。

证 1° 先证 $\{\forall x_i p(x_i)\} \vdash \forall x_j p(x_j)$。

(1)	$\forall x_i p(x_i)$	假定
(2)	$\forall x_i p(x_i) \to p(x_j)$	(K4)
(3)	$p(x_j)$	(1)，(2)，MP
(4)	$\forall x_j p(x_j)$	(3)，Gen

Gen 变元 x_j 不在 $\forall x_i p(x_i)$ 中出现，由演绎定理得

$$\vdash \forall x_i p(x_i) \to \forall x_j p(x_j)。$$

同样的过程可以得到

$$\vdash \forall x_j p(x_j) \to \forall x_i p(x_i)，$$

但在证明过程中使用 (K4) 时要用到事实：x_i 对 $p(x_j)$ 中的 x_j 是自由的。(这是因为：在用 x_i 代换 $p(x_j)$ 中的 x_j 后还原成的 $p(x_i)$ 中，x_i 是自由的。)

2° 使用 1° 可得。**证毕。**

在对公式进行等价变换时，命题 3 可用于按照需要更换约束

变元。在公式中，约束变元所起的作用类似于积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$中积分变元 x 和 t 所起的作用。

命题 4　若 x_i 不在 p 中自由出现，则

1°　$\vdash \forall x_i(p\to q)\leftrightarrow(p\to\forall x_i q)$，

2°　$\vdash \exists x_i(p\to q)\leftrightarrow(p\to\exists x_i q)$；

若 x_i 不在 q 中自由出现，则

3°　$\vdash \forall x_i(p\to q)\leftrightarrow(\exists x_i p\to q)$，

4°　$\vdash \exists x_i(p\to q)\leftrightarrow(\forall x_i p\to q)$。

证　1°　一个方向是（K5），另一个方向是练习十九题4-1°。

2°　一个方向是练习十九题 4-2°。另一个方向是要证明

$$\vdash \exists x_i(p\to q)\to(p\to\exists x_i q)。$$

为此只用证 $\{\exists x_i(p\to q), p\}\vdash\exists x_i q$（即$\neg\forall x_i\neg q$），过程中除了 x_i 外不用别的 Gen 变元便可。

以下公式从 $\{\neg\forall x_i\neg(p\to q), p, \forall x_i\neg q\}$ 可证：

（1）	$\forall x_i\neg q$	假定
（2）	$\forall x_i\neg q\to\neg q$	（K4）
（3）	$\neg q$	（1），（2），MP
（4）	p	假定
（5）	$p\to(\neg q\to\neg(p\to q))$	永真式
（6）	$\neg q\to\neg(p\to q)$	（4），（5），MP
（7）	$\neg(p\to q)$	（3），（6），MP
（8）	$\forall x_i\neg(p\to q)$	（7），Gen
（9）	$\neg\forall x_i\neg(p\to q)$	假定

由（8），（9）用归谬律得

$$\{\neg\forall x_i\neg(p\to q), p\}\vdash\neg\forall x_i\neg q。$$

3°　先证 $\vdash\forall x_i(p\to q)\to(\exists x_i p\to q)$，为此只用证 $\{\forall x_i(p\to q), \exists x_i p\}\vdash q$，过程中不使用除 x_i 外的 Gen 变元。

以下公式从 $\{\forall x_i(p\to q), \neg\forall x_i\neg p, \neg q\}$ 可证

(1)	$\forall x_i(p\to q)$	假定
(2)	$\forall x_i(p\to q)\to(p\to q)$	(K4)
(3)	$p\to q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg q$	假定
(5)	$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$	永真式
(6)	$\neg q\to\neg p$	(3), (5), MP
(7)	$\neg p$	(4), (6), MP
(8)	$\forall x_i\neg p$	(7), Gen
(9)	$\neg\forall x_i\neg p$	假定

因 x_i 不在 q 中自由出现，由（8），（9）用反证律得

$$\{\forall x_i(p\to q),\neg\forall x_i\neg p\}\vdash q.$$

另一个方向系练习二十题 2-1°。

4° 一个方向是 $\vdash\exists x_i(p\to q)\to(\forall x_i p\to q)$，系练习二十题 2-2°。最后要证另一方向

$$\vdash(\forall x_i p\to q)\to\exists x_i(p\to q).$$

以下公式从 $\{\forall x_i p\to q,\forall x_i\neg(p\to q)\}$ 可证

(1)	$\forall x_i\neg(p\to q)$	假定
(2)	$\forall x_i\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)$	(K4)
(3)	$\neg(p\to q)$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p\to q)\to\neg q$	永真式
(5)	$\neg(p\to q)\to p$	永真式
(6)	$\neg q$	(3), (4), MP
(7)	p	(3), (5), MP
(8)	$\forall x_i p$	(7), Gen
(9)	$\forall x_i p\to q$	假定
(10)	q	(8), (9), MP

因 Gen 变元 x_i 不在假定中自由出现，由（6），（10）用归谬律得

$$\{\forall x_i p\to q\}\vdash\neg\forall x_i\neg(p\to q),$$

再用演绎定理便可。**证毕。**

命题 5 1° $\vdash \neg\forall x_i p \leftrightarrow \exists x_i \neg p$,

2° $\vdash \neg\exists x_i p \leftrightarrow \forall x_i \neg p$。

证 1° $p \leftrightarrow \neg\neg p$ 是永真式，故由子公式等价替换定理得

$$\vdash \neg\forall x_i p \leftrightarrow \neg\forall x_i \neg\neg p.$$

2° $\neg\neg\forall x_i \neg p \leftrightarrow \forall x_i \neg p$ 是永真式。**证毕。**

练　习　二　十

1. 证明命题 3-2°。
2. 设 x_i 不在 q 中自由出现。求证

   1° $\vdash (\exists x_i p \to q) \to \forall x_i (p \to q)$,

   2° $\vdash \exists x_i (p \to q) \to (\forall x_i p \to q)$.
3. 设 p^* 是定理 2 中定义的 p 的对偶公式。求证：

$$\vdash (p^*)^* \leftrightarrow p.$$

2.1.5 前束范式

定义 1（前束范式）前束范式，指形如

$$Q_1 x_{i_1} \cdots Q_n x_{i_n} p$$

的公式，其中 Q_1，…，Q_n 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$，p 是不含有量词的公式。

例如，$\exists x_1 (R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2))$ 不是前束范式，而 $\exists x_1 \forall x_2 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2))$ 是与之等价的前束范式。

命题 1 用 Q 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$，用 Q^* 表示 Q 的对偶符号（Q 为 $\forall$ 时 Q^* 为 $\exists$；Q 为 $\exists$ 时 Q^* 为 $\forall$）。那么有

1° **若 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现，则**

$$\vdash Qx_i p(x_i) \leftrightarrow Qx_j p(x_j).$$

2° **若 x_i 不在 p 中自由出现，则**

$$\vdash (p \to Qx_i q) \leftrightarrow Qx_i (p \to q);$$

若 x_i 不在 q 中自由出现，则

$$\vdash (Qx_i p \to q) \leftrightarrow Q^* x_i (p \to q).$$

3° $\vdash \neg Q x_i p \leftrightarrow Q^* x_i \neg p$.

证 1° 即 2.1.4 命题 3．

2° 即 2.1.4 命题 4．

3° 即 2.1.4 命题 5．**证毕**.

命题 1 是为找前束范式而进行等价变换的工具．对任给的公式 p，可反复用命题 1 以找到与 p 等价的前束范式 q．方法是：先利用命题1-1°及子公式等价替换定理(2.1.4 定理 1)，适当调整、更换p中的约束变元（如有必要的话），使新的公式与 p 等价，且满足使用命题 1-2° 所需要的条件．然后利用命题 1-2° 或命题 1-3°，逐步把量词往左边移．重复这种步骤，直到所有的量词都移到左边，得到了等价的前束范式 q 为止．

例 1 找出与公式

$$p = \neg(\forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2) \\ \to \exists x_1 (\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)))$$

等价的前束范式．

解 适当改变 p 中的约束变元得等价的 q_1，

$$q_1 = \neg(\forall x_3 \exists x_4 R_1^3(c_1, x_3, x_4) \\ \to \exists x_1 (\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1))).$$

由 q_1 出发，反复利用命题 1-2° 与 1-3°，得到以下的等价公式 q_2—q_6．

$$q_2 = \neg \exists x_3 \forall x_4 (R_1^3(c_1, x_3, x_4) \\ \to \exists x_1 (\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1))),$$

$$q_3 = \neg \exists x_3 \forall x_4 (R_1^3(c_1, x_3, x_4) \\ \to \exists x_1 (\exists x_2 \neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1))),$$

$$q_4 = \neg \exists x_3 \forall x_4 (R_1^3(c_1, x_3, x_4) \\ \to \exists x_1 \forall x_2 (\neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1))),$$

$$q_5 = \neg \exists x_3 \forall x_4 \exists x_1 \forall x_2 (R_1^3(c_1, x_3, x_4) \\ \to (\neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1))),$$

$q_6 = \forall x_3 \exists x_4 \forall x_1 \exists x_2 \neg (R_1^3(c_1, x_3, x_4)$

$\rightarrow (\neg R_1^2(x_2, c_2) \rightarrow R_1^1(x_1)))$.

q_6即为所求。

等价的前束范式并不是唯一的。比如，例 1 中所取的量词的排列顺序不是唯一的，下面的 q 也是与 p 等价的前束范式：

$q = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \neg (R_1^3(c_1, x_3, x_4)$

$\rightarrow (\neg R_1^2(x_2, c_2) \rightarrow R_1^1(x_1)))$.

为求前束范式，命题 2 也是进行等价变换的工具。

命题 2 1° $\vdash (\forall x_i p \wedge \forall x_i q) \leftrightarrow \forall x_i (p \wedge q)$，

2° $\vdash (\exists x_i p \vee \exists x_i q) \leftrightarrow \exists x_i (p \vee q)$.

若 x_i 不在 p 中自由出现，则有（Q 仍表示 $\forall$ 或 $\exists$）

3° $\vdash (p \vee Qx_i q) \leftrightarrow Qx_i (p \vee q)$，

4° $\vdash (p \wedge Qx_i q) \leftrightarrow Qx_i (p \wedge q)$.

证 1° 先证 $\{\forall x_i p \wedge \forall x_i q\} \vdash \forall x_i (p \wedge q)$.

下面是所要的证明

(1)	$\forall x_i p \wedge \forall x_i q$	假定
(2)	$(\forall x_i p \wedge \forall x_i q) \rightarrow \forall x_i p$	永真式
(3)	$(\forall x_i p \wedge \forall x_i q) \rightarrow \forall x_i q$	永真式
(4)	$\forall x_i p$	(1), (2), MP
(5)	$\forall x_i q$	(1), (3), MP
(6)	$\forall x_i p \rightarrow p$	(K4)
(7)	$\forall x_i q \rightarrow q$	(K4)
(8)	p	(4), (6), MP
(9)	q	(5), (7), MP
(10)	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	永真式
(11)	$q \rightarrow (p \wedge q)$	(8), (10), MP
(12)	$p \wedge q$	(9), (11), MP
(13)	$\forall x_i (p \wedge q)$	(12), Gen

因 x_i 不在假定中自由出现，用演绎定理得

$$\vdash (\forall x_i p \wedge \forall x_i q) \to \forall x_i (p \wedge q).$$

类似可证另一个方向：

$$\vdash \forall x_i (p \wedge q) \to (\forall x_i p \wedge \forall x_i q).$$

2° 记 $p_1 = \exists x_i p \vee \exists x_i q$。

p_1 与以下各公式等价。

$p_2 = \neg(\neg(\exists x_i p \vee \exists x_i q))$， （双重否定）

$p_3 = \neg(\forall x_i p^* \wedge \forall x_i q^*)$， （用对偶律）

$p_4 = \neg\forall x_i (p^* \wedge q^*)$， （由 1°）

$p_5 = \exists x_i ((p^*)^* \vee (q^*)^*)$， （用对偶律）

$p_6 = \exists x_i (p \vee q)$， （2.1.4 练习二十题 3）

$\vdash p_1 \leftrightarrow p_6$ 即为 2°。

3° 由命题1-2°，有

$\vdash (\neg p \to Qx_i q) \leftrightarrow Qx_i (\neg p \to q)$，此即 3°。

4° 记 $p_1 = p \wedge Qx_i q$，即 $p_1 = \neg(p \to \neg Qx_i q)$。

p_1 与以下各式等价。

$p_2 = \neg(p \to Q^* x_i \neg q)$， （命题 1-3°）

$p_3 = \neg Q^* x_i (p \to \neg q)$， （命题 1-2°）

$p_4 = Qx_i \neg(p \to \neg q) = Qx_i (p \wedge q)$。 （命题 1-3°）

$\vdash p_1 \leftrightarrow p_4$ 即为 4°。**证毕。**

利用命题 2，可找出例 1 中 p 的另一种等价前束范式。

首先，因 $(r \to s) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ 是永真式，例 1 中的 p 等价于 q_1。

$$q_1 = \neg(\neg\forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2) \vee \exists x_1 (\neg\neg\forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))).$$

由 q_1 出发，可得以下等价公式（q_2—q_8）

$$q_2 = \forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2) \wedge \neg\exists x_1 (\forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))$$

（由 De · Morgan 律和双重否定律）

$$q_3 = \forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2)$$

$$\wedge \neg \exists x_1 \forall x_2 (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1)) \qquad \text{(由命题 2-3°)}$$

$$q_4 = \forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2)$$

$$\wedge \forall x_1 \exists x_2 \neg (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1)) \qquad \text{(由命题 1-3°)}$$

$$q_5 = \forall x_1 (\exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2)$$

$$\wedge \exists x_2 \neg (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))) \qquad \text{(由命题 2-1°)}$$

$$q_6 = \forall x_1 (\exists x_3 R_1^3(c_1, x_1, x_3)$$

$$\wedge \exists x_2 \neg (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))) \qquad \text{(由命题 1-1°)}$$

$$q_7 = \forall x_1 \exists x_2 (\exists x_3 R_1^3(c_1, x_1, x_3)$$

$$\wedge \neg (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))) \qquad \text{(由命题 2-4°)}$$

$$q_8 = \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (R_1^3(c_1, x_1, x_3)$$

$$\wedge \neg (R_1^2(x_2, c_2) \vee R_1^1(x_1))) \qquad \text{(由命题 2-4°)}$$

q_8为另一种与例 1 中 p 等价的前束范式。

前束范式常比其他形式的公式有更容易理解的逻辑结构。

一般说来，前束范式解释上的复杂性依赖于量词词性改变的次数。考察以下两个公式

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_3, x_4)),$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_3, x_4)),$$

前者比后者更容易理解和解释。

定义 2（Π_n 型和 Σ_n 型前束范式） 设 $n>0$。若前束范式是由全称量词开始，从左至右改变 $n-1$ 次词性，则叫做 Π_n 型前束范式；若是由存在量词开始，从左至右改变 $n-1$ 次词性，则叫做 Σ_n 型前束范式。

例 2 设 $p = \forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_3, x_4)$。

p 等价于

$$p_1 = \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4)),$$

又等价于

$$p_2 = \forall x_3 \exists x_4 \exists x_1 \exists x_2 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4)).$$

p_1 是 Σ_3 型，而 p_2 是 Π_2 型。

练 习 二 十 一

1. 找出与所给公式等价的前束范式。

1° $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$.

2° $\forall x_1 (R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2))$.

3° $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2)$
$\to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))$.

4° $\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$.

2. 设 x_2 不在 $p(x_1)$ 中出现，x_1 不在 $q(x_2)$ 中出现。证明公式 $\exists x_1 p(x_1) \to \exists x_2 q(x_2)$ 与一 Π_2 型前束范式等价，也与一 Σ_2 型前束范式等价。

3. 找一 Π_3 型前束范式，它与一 Σ_3 型前束范式等价。

2.2 谓词演算K的语义学

我们已经构造了谓词演算 K，它是为了表现更一般的推理过程而建立起来的数学模型。这种形式系统又可以看成是一种形式语言，它的字母表包括

个体变元符号：x_1，x_2，…（可数个）；

个体常元符号：$c_1, c_2, \cdots$（可数个或有限个，也可以没有）；

运算符号（即函数词）：f_1^1，f_2^1，…，f_1^2，f_2^2，…（可数个或有限个，也可以没有）；

谓词符号：R_1^1，R_2^1，…，R_1^2，R_2^2，…（可数个或有限个，至少有一个）；

连词及全称量词符号：$\neg$，$\to$，$\forall$；

其他符号：)，（ 及，。

2.1 中所讨论的是关于 K 这种语言的语法。项、公式及“证明”的构成法可分别看成是这种语言的词法、句法和文章构成法。

现在开始转入K的语义学。

2.2.1 K的解释域

定义1（K的解释域）带有以下三个映射的非空集M叫做K的解释域（把这个解释域就记作M）：

1° **从K的个体常元集C到M的映射** φ_1: $C \to M$,

$$c_i \mapsto \overline{c_i},\ \overline{c_i} \in M;$$

2° **从K的函数词集F到M上运算集的映射** φ_2,

$$f_i^n \mapsto \overline{f_i^n},\ \overline{f_i^n}\ \text{是 M 上的 } n \text{ 元运算};$$

3° **从K的谓词集R到M上关系集的映射** φ_3,

$$R_i^n \mapsto \overline{R_i^n},\ \overline{R_i^n}\ \text{是 M 上的 } n \text{ 元关系}.$$

上面的定义指出，解释域是有内部结构的非空集，其中规定有特殊元素$\overline{c_i}$及特殊n元关系$\overline{R_i^n}$；当K的函数词集$F \neq \phi$时，解释域是具有运算的代数系统（$\overline{f_i^n}$是其上的n元运算）。

解释域的元素叫做个体对象。

通常解释域也叫做“解释”或“结构”。

给定了解释域M，K中只涉及闭项（即不含有个体变元的项）的原子公式便立即可解释为关于M的元素的命题。

例1 设K中的$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$，$R=\{R_1^2\}$。下面是K的一个解释域N。

$N=\{0,1,2,\cdots\}$,

$\overline{c_1}=0$,

$\overline{f_1^1}$：后继函数，$\overline{f_1^1}(n)=n+1$,

$\overline{f_1^2}$：加法（+），

$\overline{f_2^2}$：乘法（×），

$\overline{R_1^2}$：相等（=）。

还可如下给出K的另一个解释域Q。

Q：正有理数全体，

$\overline{c_1}=1$，

$\overline{f_1^1}$：倒数函数，

$\overline{f_1^2}$：乘法（×），

$\overline{f_2^2}$：除法（÷），

$\overline{R_1^2}$：相等（=）。

现考察K中只含有闭项的原子公式p：

$$R_1^2(f_1^2(f_1^1(c_1),c_1),\ f_2^2(f_1^1(c_1),c_1))。$$

p在解释域N中解释成

$$(0+1)+0=(0+1)\times 0，$$

这是假命题。但p在第二个解释域Q中解释成

$$\frac{1}{1}\times 1=\frac{1}{1}\div 1，$$

这是真命题。

以上讨论说明，有了解释域才有可能谈论K中公式的真假值。但是光有解释域还并不能立即给所有公式（例如含有个体变元的原子公式$R_1^2(x_1,x_2)$）都赋以确定的真假值。

练　习　二　十　二

1. 设K中$C=\{c_1\}$，$F=\phi$，$R=\{R_1^1,R_2^1,R_1^2\}$。已知E_1，$E_2\subseteq Q$，Q为有理数集。令$\overline{c_1}=0$，$\overline{R_1^1}$为“$\in E_1$”，$\overline{R_2^1}$为“$\in E_2$”，$\overline{R_1^2}$为“$>$”。这样，Q便成了K的解释域。现有关于Q中元素的两个命题如下

命题甲：“若数集E_1中某数比零大，则数集E_2中所有数都比零大。”

命题乙：“并非E_1中的数都小于或等于E_2中的每个数。”

试把命题甲，乙分别按以下要求用K中公式表示出来：

（1）出现全称量词，

（2）不出现全称量词，

（3）写成前束范式。

2.2.2 项 解 释

给定K的一个解释域M，就有三个给定的映射：$\varphi_1(c_i) = \overline{c_i}$，$\varphi_2(f_i^n) = \overline{f_i^n}$，$\varphi_3(R_i^n) = \overline{R_i^n}$。$\overline{c_i}$，$\overline{f_i^n}$，$\overline{R_i^n}$分别是M的特殊元素，$n$元运算和$n$元关系。它们是K中个体常元$c_i$，函数词$f_i^n$，谓词$R_i^n$在M中的解释。

K的项集T是由$X\cup C$生成的F型代数系统，具有运算f_i^n。而M是具有运算$\overline{f_i^n}$的代数系统，

下面对项给以解释。首先在项集T和给定的解释域M之间建立起联系——项同态。

定义 1 （项同态）对给定的K和它的某个解释域M，项同态φ指的是映射φ：T→M，它使等式

$$\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))$$

对所有$f_i^n \in F$和所有$t_1,\cdots,t_n \in T$都成立。

$F=\phi$时，$T=X\cup C$，（$X=\{x_1,x_2\cdots\}$是个体变元集），这时项集T不是代数系统，于是项同态退化为映射φ：$X\cup C\to M$。

定义 2 （变元的指派）映射φ_0：X→M叫做个体变元的（个体对象）指派。

定理 1 设M是已知的解释域，任意指定的变元的指派φ_0：X→M，连同已知的映射φ_1：C→M，必可唯一地扩张成项同态φ。

证 为了构造从T到M的同态映射φ，并使φ是φ_0和φ_1的扩张，首先在$T_0=X\cup C$上令

$$\varphi(x_i)=\varphi_0(x_i),$$
$$\varphi(c_i)=\bar{c}_i\ (=\varphi_1(c_i)).$$

然后对T中任一其他层次的项 $t=f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，定义

$$\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\overline{f_i^n}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)).$$

（注意 $t_1,\cdots,t_n$ 在T中的层次比 t 的层次低．）

这种用同态条件归纳定义的映射 φ：T→M自然符合了“同态扩张”的要求。

现假设另有 φ'：T→M也是 φ_0 和 φ_1 的同态扩张．那么有

$$\varphi'(x_i)=\varphi_0(x_i)=\varphi(x_i),$$
$$\varphi'(c_i)=\bar{c}_i=\varphi(c_i);$$

且对任一其他层次的项 $t=f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ （其中 $t_1,\cdots,t_n$ 是比 t 层次低的项），有

$$\begin{aligned}\varphi'(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))&=\overline{f_i^n}(\varphi'(t_1),\cdots,\varphi'(t_n)) &&（\varphi' 是同态）\\ &=\overline{f_i^n}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)) &&（由归纳假设）\\ &=\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_n)). &&（\varphi 是同态）\end{aligned}$$

这就对项的层次数归纳证明了：对于任意的项 $t\in T$，有 $\varphi'(t)=\varphi(t)$。同态扩张的唯一性得到了证明．**证毕．**

若记 $\bar{t}=\varphi(t)$，则项同态所满足的条件可写成

$$\overline{f_i^n(t_1,\cdots,t_n)}=\overline{f_i^n}(\bar{t}_1,\cdots,\bar{t}_n).$$

项同态所满足的条件仍说成是“保运算性”．

定义 3 （项解释）定理1中的项同态 φ：T→M（即满足 $\varphi(c_i)=\bar{c}_i$ 的项同态）就叫做项解释．$F=\phi$ 时，项解释则指满足 $\varphi(c_i)=\bar{c}_i$ 的映射 φ：X∪C→M．

项解释就是项同态，只多了一点：$\varphi(c_i)=\bar{c}_i$。于是定理1可更简单地写成

定理 1′ 任给的变元的指派可唯一地扩张成为项解释．

不同的变元指派对应着不同的项解释；不同的项解释对应着不同的变元指派（扩张的唯一性）．对于同一解释域，可能有许

多不同的变元指派，因而对应有许多不同的项解释。

对于固定的解释域M，把所有项解释构成的集记为 Φ_M，

$$\Phi_M=\{\varphi\,|\,\varphi\text{：}T\to M\text{是项解释}\}.$$

说到项解释 φ，自然就有 $\varphi(c_i)=\bar{c}_i$（即 φ 与 φ_1 一致）。

总之，关于项解释，第一，它是项同态；第二，它与 φ_1 一致；第三，它由变元指派唯一确定。

定理1和定理1′的意思是：变元有了解释，每个项也就都有了确定的解释。

定义 4 （i 变通）设 φ，$\varphi'\in\Phi_M$。对给定的 i，如果每当 $j\neq i$ 时，总有 $\varphi'(x_j)=\varphi(x_j)$，那么便把 φ' 叫做 φ 的 i 变通。

项解释 φ 和它的 i 变通 φ' 的差别仅在于对变元 x_i 的指派可能不同（也可以相同），而它们对其他变元的指派则完全相同。

在固定的解释域M中，变元的指派一经给定（因而对应有确定的项解释）之后，每个原子公式便都可解释为关于M中个体对象的命题。

回到2.2.1例1中的K和它的解释域N。考察原子公式 p

$$R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_2^2(x_3,f_1^1(x_4))).$$

在N中，若指派 $\bar{x}_1=5$，$\bar{x}_2=6$，$\bar{x}_3=7$，$\bar{x}_4=8$（其余的变元可任意指派），则 $f_1^2(x_1,x_2)$ 和 $f_2^2(x_3,f_1^1(x_4))$ 在N中分别解释为 $\overline{f_1^2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 和 $\overline{f_2^2}(\bar{x}_3,\overline{f_1^1}(\bar{x}_4))$，即

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2\,(=5+6)\text{ 和 }\bar{x}_3\times(\bar{x}_4+1)\,(=7\times(8+1)).$$

这时 p 在N中解释为

$$5+6=7\times(8+1),$$

这是假命题。

若重新指派 $\bar{x}_1=6$，$\bar{x}_2=8$，$\bar{x}_3=7$，$\bar{x}_4=1$，则 p 在N中解释为

$$6+8=7\times(1+1),$$

这是真命题。

练 习 二 十 三

1．设φ，$\psi\in\Phi_M$。求证：若对项t中的任一变元x_i都有$\varphi(x_i)=\psi(x_i)$，则$\varphi(t)=\psi(t)$。

2．设$t\in T$，φ和$\varphi'\in\Phi_M$，φ'是φ的i变通，且$\varphi'(x_i)=\varphi(t)$。用项t代换项$u(x_i)$中x_i所得的项记为$u(t)$。求证
$\varphi'(u(x_i))=\varphi(u(t))$。

2.2.3 公式的赋值函赋

讨论K中公式的真假，复杂性在于：这种真假首先与解释域有关；其次与变元指派（因而与项解释）有关；第三，当公式中有量词出现时，与项解释的变通有关。

现在可以完整地给出K中公式真值概念的定义。具体的做法是：先固定解释域M，然后把公式的真值作为项解释φ的函数进行归纳定义．定义从原子公式开始，对公式的所在层次归纳．注意谓词R_i^n解释为M上的n元关系$\overline{R_i^n}$。

往下记$\bar{x}_i=\varphi(x_i)$（意思是：给x_i指派M中的个体$\bar{x}_i$），记$\bar{t}=\varphi(t)$（意思是：项t解释为M中的个体$\bar{t}$）。

定义 1 （公式的赋值函数）设M是给定的解释域，p是K中任一公式．由公式p按下面的方式定义的函数$|p|$：$\Phi_M\to Z_2$叫做公式p的赋值函做。

对任一项解释$\varphi\in\Phi_M$，

（i）当p为原子公式$R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$时，令

$$|p|(\varphi)=\begin{cases}1, & 若\ (\bar{t}_1,\cdots,\bar{t}_n)\in\overline{R_i^n}.\\ 0, & 若\ (\bar{t}_1,\cdots,\bar{t}_n)\notin\overline{R_i^n};\end{cases}$$

（ii）当p是$\neg q$或$q\to r$时，令

$$|\neg q|(\varphi)=\neg|q|(\varphi),$$
$$|q\to r|(\varphi)=|q|(\varphi)\to|r|(\varphi);$$

(iii) 当 p 是 $\forall x_i q$ 时，令

$$|\forall x_i q|(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{若 } \varphi \text{ 的所有 } i \text{ 变通 } \varphi' \text{ 都使 } |q|(\varphi')=1. \\ 0, & \text{若存在 } \varphi \text{ 的 } i \text{ 变通 } \varphi' \text{ 使 } |q|(\varphi')=0.\end{cases}$$

由上面的定义可知，一旦解释域M给定，K中每个公式就都有了确定的赋值函数。赋值函数的值域是Z_2（即$|p|(\varphi)$取值为1或0）。若$|p|(\varphi)=1$，则说公式p对于给定的解释域M和给定的项解释φ为真；若$|p|(\varphi)=0$，则说p对于该M和φ为假。

定义1（i）中对原子公式真值的规定，体现了M上的n元关系$\overline{R_i^n}$是R_i^n的解释。

定义1（ii）则保证了公式的赋值函数的计算在涉及到$\neg$和$\rightarrow$时仍具有命题演算中的赋值对$\neg$和$\rightarrow$所具有的保运算性。

定义1（iii）对$|\forall x_i q|(\varphi)$的规定符合对公式$\forall x_i q$的直观理解：若不论重新指派x_i为哪一个个体对象（其他变元的指派不变）时，q所表示的性质都成立（$|q|(\varphi')=1$），则规定$|\forall x_i q|(\varphi)=1$；若重新指派$x_i$为某个个体对象时，$q$所表示的性质不成立（$|q|(\varphi')=0$），则规定$|\forall x_i q|(\varphi)=0$。

例 1 仍用2.2.1例1中的K和它的解释域N。设

p_1 是公式 $R_1^2(f_2^2(x_1,x_2),\ f_2^2(x_3,x_4))$，

p_2 是公式 $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))$，

p_3 是公式 $\forall x_1 R_1^2(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1)))$。

取项解释φ满足

x_i:	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5\cdots$
$\overline{x_i}$:	2	6	3	4	$\cdots$

下面来计算$|p_1|(\varphi)$，$|p_2|(\varphi)$，$|p_3|(\varphi)$。

1° p_1是原子公式。为了计算$|p_1|(\varphi)$，只用检验是否有

$$(\overline{f_2^2(x_1,x_2)},\ \overline{f_2^2(x_3,x_4)})\in\overline{R_1^2},$$

即看是否有$\overline{f_2^2(x_1,x_2)}=\overline{f_2^2(x_3,x_4)}$。简单的计算指出$|p_1|(\varphi)=1$。事实上，

$$\overline{f_2^2(x_1,x_2)}=\overline{f_2^2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\bar{x}_1\times\bar{x}_2=2\times 6,$$

$$\overline{f_2^2(x_3,x_4)}=\overline{f_2^2}(\bar{x}_3,\bar{x}_4)=\bar{x}_3\times\bar{x}_4=3\times 4.$$

2° 把$R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),\ f_1^2(x_2,x_1))$记为$q$，则$p_2$是$\forall x_1 q$。设$\varphi'$是$\varphi$的任意1变通。为计算$|q|(\varphi')$，注意

$$\begin{aligned}\varphi'(f_1^2(x_1,x_2))&=\overline{f_1^2}(\varphi'(x_1),\ \varphi'(x_2))\\&=\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)\\&=\varphi'(x_1)+\varphi(x_2)\\&=\varphi'(x_1)+6,\end{aligned}$$

$$\varphi'(f_1^2(x_2,x_1))=\varphi(x_2)+\varphi'(x_1)=6+\varphi'(x_1).$$

这说明

$$(\varphi'(f_1^2(x_1,x_2)),\ \varphi'(f_1^2(x_2,x_1)))\in \bar{R}_1^2,$$

故$|q|(\varphi')=1$。由φ'的任意性及定义1(iii)便知$|p_2|(\varphi)=1$。

3° 把$R_1^2(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1)))$记为$q$，则$p_3$是$\forall x_1 q$。现取$\varphi$的1变通$\varphi'$满足$\varphi'(x_1)=3$，则有$|q|(\varphi')=0$。这是因为

$$\begin{aligned}\varphi'(f_1^1(f_1^1(c_1)))&=\overline{f_1^1}(\overline{f_1^1}(c_1))\\&=(0+1)+1=2\neq\varphi'(x_1).\end{aligned}$$

根据定义1 (iii)，$|p_3|(\varphi)=0$。

命题 1 1° $|p\vee q|(\varphi)=|p|(\varphi)\vee|q|(\varphi)$。

2° $|p\wedge q|(\varphi)=|p|(\varphi)\wedge|q|(\varphi)$。

3° $|p\leftrightarrow q|(\varphi)=|p|(\varphi)\leftrightarrow|q|(\varphi)$。

4° $|\exists x_i q|(\varphi)=1\Leftrightarrow$ **存在φ的i变通φ'使** $|q|(\varphi')=1$。

证 只证1°,4°。2°，3°与1°类似。

1° $|p\vee q|(\varphi)=|\neg p\to q|(\varphi)$ (∨的定义)

$=|\neg p|(\varphi)\to|q|(\varphi)$ (定义1 (ii))

$=\neg|p|(\varphi)\to|q|(\varphi)$ (定义1 (ii))

$=|p|(\varphi)\vee|q|(\varphi)$。 ($Z_2$中∨的定义)

4° $|\neg\forall x_i\neg q|(\varphi)=1$

$\Leftrightarrow \neg|\forall x_i \neg q|(\varphi)=1$ （定义1（ii））

$\Leftrightarrow \quad |\forall x_i \neg q|(\varphi)=0$

$\Leftrightarrow$存在φ的i变通φ'使$|\neg q|(\varphi')=0$ （定义1（iii））

$\Leftrightarrow$存在φ的i变通φ'使$\neg|q|(\varphi')=0$

$\leftrightarrow$存在φ的i变通φ'使$|q|(\varphi')=1$。**证毕。**

命题1-1°，2°，3°说明赋值函数的计算对$\vee$，$\wedge$及$\leftrightarrow$仍有保运算性。

命题1-4°说明$|\exists x_i q|(\varphi)=1$的意思是：M中存在着这样的个体对象，当它作为$x_i$的解释时，$q$所表示的性质成立。

练 习 二 十 四

1．设K中的$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}$，$R=\{R_1^2\}$。它的一个解释域是$N=\{0, 1, 2, \cdots\}$，$\overline{c_1}=0$，$\overline{f_1^1}$是后继函数，$\overline{f_1^2}$是+，$\overline{f_2^2}$是×，$\overline{R_1^2}$是=。试对以下公式分别找出$\varphi, \psi \in \Phi_N$，使$|p|(\varphi)=1$，$|p|(\psi)=0$，其中$p$为

1° $R_1^2(f_1^1(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$，

2° $R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$，

3° $\neg R_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_1^2(x_2, x_3))$，

4° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$，

5° $\forall x_1 R_1^2(f_1^1(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$。

2．已知K中$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^2\}$，$R=\{R_1^2\}$，还已知K的解释域Z（整数集），$\bar{c}_1=0$，$\overline{f_1^2}$是减法，$\overline{R_1^2}$是“<”。试给出$\varphi, \psi \in \Phi_Z$，使$|p|(\varphi)=1$，$|p|(\psi)=0$，其中p为

1° $R_1^2(x_1, c_1)$，

2° $R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to R_1^2(c_1, f_1^2(x_1, x_2))$，

3° $\neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$，

4° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$，

5° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$， 6° $\forall x_1 \forall x_2 (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_1,x_2))$。

2.2.4 闭式的语义特征

一个直观上明显的事实是：项的解释只与在该项中出现的变元的指派有关，与其他变元的指派无关；公式的真值也只与在该公式中出现的自由变元的指派有关，而与其他变元的指派无关。这就是下面的命题1。

命题 1 设M是K的解释域，$\varphi,\psi\in\Phi_M$。

1° 若对项 t 中的任一变元 x_i 都有 $\varphi(x_i)=\psi(x_i)$，则 $\varphi(t)=\psi(t)$。

2° 若对公式 p 中任一自由出现的变元 x_i 都有 $\varphi(x_i)=\psi(x_i)$，则 $|p|(\varphi)=|p|(\psi)$。

证 1° 见练习二十三题1．

2° 对 p 在K(Y)中的层次数 k 归纳。

$k=0$ 时，设 p 是 $R_j^n(t_1,\cdots,t_n)$，此时项 $t_1,\cdots,t_n$ 中出现的变元都是在 p 中自由出现的。由已知条件和1°，有

$$\varphi(t_i)=\psi(t_i),\quad i=1,\cdots,n.$$

于是

$$|p|(\varphi)=1 \Leftrightarrow (\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\in \overline{R_j^n} \qquad (2.2.3\text{定义}1(\mathrm{i}))$$

$$\Leftrightarrow (\psi(t_1),\cdots,\psi(t_n))\in \overline{R_j^n}$$

$$\Leftrightarrow |p|(\psi)=1,$$

这说明 $|p|(\varphi)=|p|(\psi)$。

$k>0$ 时有以下三种情形。

(i) p 为 $\neg q$，此时

$$|\neg q|(\varphi)=1 \Leftrightarrow |q|(\varphi)=0$$

$$\Leftrightarrow |q|(\psi)=0 \qquad (\text{由归纳假设})$$

$$\Leftrightarrow |\neg q|(\psi)=1.$$

(ii) p 为 $q\to r$ 时，

$$|q\to r|(\varphi)=1 \Leftrightarrow |q|(\varphi)\to|r|(\varphi)=1$$
$$\Leftrightarrow |q|(\psi)\to|r|(\psi)=1 \text{（由归纳假设）}$$
$$\Leftrightarrow |q\to r|(\psi)=1。$$

(iii) p 为 $\forall x_i q$ 时，先设 $|\forall x_i q|(\varphi)=1$，由此来证明 $|\forall x_i q|(\psi)=1$。

对 ψ 的任一 i 变通 ψ'，作 φ 的 i 变通 φ'，使 $\varphi'(x_i)=\psi'(x_i)$。x_i 在 q 中可能自由出现。在 q 中自由出现的其他任何变元 $x_j(j\neq i)$ 也在 p 中自由出现。于是有

$$\varphi'(x_j)=\varphi(x_j) \quad \text{（}i\text{ 变通的定义）}$$
$$=\psi(x_j) \quad \text{（已知）}$$
$$=\psi'(x_j) \quad \text{（}i\text{ 变通的定义）}$$

这样，对 q 来说，φ' 和 ψ' 满足命题所要求的条件。由归纳假设，$|q|(\psi')=|q|(\varphi')$。又因已假设 $|\forall x_i q|(\varphi)=1$，故 $|q|(\varphi')=1$，且得 $|q|(\psi')=1$。这就证明了 $|\forall x_i q|(\psi)=1$。完全对称地有

$$|\forall x_i q|(\psi)=1 \Rightarrow |\forall x_i q|(\varphi)=1,$$

所以 $|\forall x_i q|(\varphi)=|\forall x_i q|(\psi)$。**证毕。**

定义 1 （公式在解释域中恒真与恒假）

公式 p 在解释域M中恒真，记作 $|p|_M=1$，是指对任一 $\varphi\in\Phi_M$， $|p|(\varphi)=1$；

公式 p 在解释域M中恒假，记作 $|p|_M=0$，是指对任一 $\varphi\in\Phi_M$， $|p|(\varphi)=0$；

在解释域M中非恒假公式叫做在M中可满足公式。

例 1 仍用2.2.1例1中的K和它的解释域N。设 p_1 是 $R_1^2(x_1,x_1)$，p_2 是 $\forall x_1 R_1^2(x_1,c_1)$，$p_3$ 是 $R_1^2(x_1,c_1)$。

$|p_1|_N=1$，这是因为对任意 $\varphi\in\Phi_N$，$\varphi(x_1)=\varphi(x_1)$ 总成立，所以有 $|R_1^2(x_1,x_1)|(\varphi)=1$。

$|p_2|_N=0$，这是因为对任意 $\varphi\in\Phi_N$，总可作 φ 的1变通 φ' 使 $\varphi'(x_1)=1\neq0$，因而使 $|R_1^2(x_1,c_1)|(\varphi')=0$。于是 $|\forall x_1 R_1^2(x_1,c_1)|(\varphi)=0$。

p_3 在N中既非恒真也非恒假：

取$\varphi(x_1)\neq 0$时，$|R_1^2(x_1,c_1)|(\varphi)=0$；

取$\varphi(x_1)=0$时，$|R_1^2(x_1,c_1)|(\varphi)=1$。

所以p_3是在N中可满足公式。

下面的定理指出了闭式的语义特征。

定理 1　对给定的解释域M，任一闭式在M中恒真与恒假二者必居其一。

证　假设闭式p在M中不恒真，则有$\varphi\in\Phi_M$使$|p|(\varphi)=0$。任取$\psi\in\Phi_M$。因p中没有自由变元，根据命题1-2°，有$|p|(\psi)=|p|(\varphi)=0$。这样，p在M中恒假。**证毕**。

例 2　设K中$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^1\}$，$R=\{R_1^1\}$，p是公式$\forall x_1(R_1^1(x_1)\to R_1^1(f_1^1(x_1)))$。可以给出解释域$M_1$和$M_2$，使$|p|_{M_1}=1$而$|p|_{M_2}=0$。

1°　取$M_1=Z$（整数集)）$\overline{c}_1=0$，$\overline{f_1^1}$为后继函数，$\overline{R_1^1}$为"$\in Z^+$"（Z^+是正整数集）。

对任一$\varphi\in\Phi_{M_1}$，任取φ的1变通φ'，有

$$|R_1^1(x_1)|(\varphi')=1 \quad\Rightarrow\quad \varphi'(x_1)\in Z^+$$

$$\Rightarrow\ \varphi'(f_1^1(x_1))=\overline{f_1^1}(\varphi'(x_1))=\varphi'(x_1)+1\ \in Z^+$$

$$\Rightarrow\ |R_1^1(f_1^1(x_1))|(\varphi')=1,$$

由此得

$$|R_1^1(x_1)\to R_1^1(f_1^1(x_1))|(\varphi')$$

$$=|R_1^1(x_1)|(\varphi')\to|R_1^1(f_1^1(x_1))|(\varphi')=1。$$

φ'是任意的，又得

$$|\forall x_1(R_1^1(x_1)\to R_1^1(f_1^1(x_1)))|(\varphi)=1。$$

最后由φ的任意性得$|p|_{M_1}=1$。

2°　取$M_2=Z$，$\overline{c}_1=0$，$\overline{f_1^1}$为后继函数，$\overline{R_1^1}$："是偶数"。此时对任意$\varphi\in\Phi_{M_2}$，可取φ的1变通φ'使$\varphi'(x_1)$是偶数。这时有

$$|R_1^1(x_1)|(\varphi')=1\text{ 但 }|R_1^1(f_1^1(x_1))|(\varphi')=0,$$

$|R_1^1(x_1) \to R_1^1(f_1^1(x_1))|(\varphi') = 0$,

$|\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^1(f_1^1(x_1)))|(\varphi) = 0$。

因φ是任意的，故$|p|_{M_2} = 0$。

在讨论K的语法时我们了解，为了证明$\Gamma \vdash p$这样的结论，希望假定集Γ中的闭式越多越好。在用演绎定理、反证律和归谬律时，若涉及到的假定是闭式时，则可不必顾及对Gen变元所加的限制条件。现在此事可从语义上找到一些解释。因为闭式中不含有自由出现的变元，因此它的真值与变元的指派无关，与项解释无关。对给定的解释域，闭式的真假具有确定性：要么恒真，要么恒假。“确定性”是对“前提”的合理要求。

在进行语义讨论时，常要用到下面的命题2。

命题 2 $|p|_M = 1 \iff |\forall x_i p|_M = 1$。

证 $(\Rightarrow)$

$|p|_M = 1 \Rightarrow$ 对任意$\varphi \in \Phi_M$及φ的任一i变通φ'，有

$|p|(\varphi') = 1$

$\Rightarrow$ 对任意$\varphi \in \Phi_M$，$|\forall x_i p|(\varphi) = 1$

$\Rightarrow$ $|\forall x_i p|_M = 1$。

$(\Leftarrow)$

$|\forall x_i p|_M = 1 \Rightarrow$ 对任意$\varphi \in \Phi_M$，$|\forall x_i p|(\varphi) = 1$

$\Rightarrow$ 对任意$\varphi \in \Phi_M$，$|p|(\varphi) = 1$

（φ是自己的i变通）

$\Rightarrow$ $|p|_M = 1$。**证毕**。

上面例2的前一部分讨论因命题2可得一点简化：只要证明$|R_1^1(x_1) \to R_1^1(f_1^1(x_1))|_{M_2} = 1$就行了。

定义 2（全称闭式） **设$x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$是在p中自由出现的全部变元，则**

$$\forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} p$$

叫做p的全称闭式。

命题 3 **设p'是p的全称闭式，则**

$|p|_M = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |p'|_M = 1$.

证 n次利用命题2．**证毕。**

当p不是闭式时，$|p'|_M$总有意义，但$|p|_M$不一定有意义。而命题3告诉我们，尽管p可能不是闭式，但只要$|p'|_M = 1$，$|p|_M$便一定有意义，而且等于1．当$|p'|_M = 0$时，有两种可能：$|p|_M = 0$，或$|p|_M$没有意义。

命题 4 $|p|_M = 0 \quad \Rightarrow \quad |\forall x_i p|_M = 0$。

证 $|p|_M = 0$时，对任意$\varphi \in \Phi_M$，$|p|(\varphi) = 0$。于是$|\forall x_i p|(\varphi) = 0$。（若$|\forall x_i p|(\varphi) = 1$，则$|p|(\varphi) = 1$。）$\varphi$是任意的，故$|\forall x_i p|_M = 0$。**证毕。**

推论 $|p|_M = 0 \quad \Rightarrow \quad |p'|_M = 0$，**这里$p'$是$p$的全称闭式。**

命题4的逆命题不真。仍以2.2.1例1中的K和N为例，有$|\forall x_1 R_1^2(x_1, c_1)|_N = 0$，但$|R_1^2(x_1, c_1)|_N$没有意义。（取$\varphi(x_1) = 0$时，$|R_1^2(x_1, c_1)|(\varphi) = 1$；而取$\varphi(x_1) = 1$时$|R_1^2(x_1, c_1)|(\varphi) = 0$。）

命题 5 $|p|_M = 1$且$|p \to q|_M = 1 \quad \Rightarrow \quad |q|_M = 1$。

证 任取$\varphi \in \Phi_M$，有

$|p|(\varphi) = 1$且$|p \to q|(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad |q|(\varphi) = 1$。**证毕。**

练 习 二 十 五

1．对2.2.1例1中的K和N，计算$|p|_N$，其中p为

1° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1)$，

2° $\forall x_1 \forall x_2 (R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_2, c_1), x_1))$，

3° $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$，

4° $\exists x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$。

2．设K中$C = \{c_1\}$，$F = \{f_1^2\}$，$R = \{R_1^2\}$，它的解释域Z是整数集。$\overline{c}_1 = 0$，$\overline{f_1^2}$是减法，$\overline{R_1^2}$是“<”。求$|p|_Z$，其中p为

1° $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(c_1, x_1), c_1)$，

2° $\forall x_1 \forall x_2 \neg R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$， 3° $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(f_1^2(x_1,x_3), f_1^2(x_2,x_3)))$,

4° $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))$.

3．设K中$C=\{c_1\}$，$F=\{f_1^2\}$，$R=\{R_1^2\}$. 试给出K的两个解释域M_1和M_2，使$|p|_{M_1}=1$而$|p|_{M_2}=0$，其中p为

1° $\forall x_1 \forall x_2 (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_1,x_2))$,

2° $\forall x_1 (R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_2,x_1))$.

4．试证 $|p|_M=1 \Rightarrow |\exists x_i p|_M=1$.

反向是否成立？说明理由.

2.2.5 语义推论与有效式

定义 1（模型） **设M是K的一个解释域. M是公式集Γ的模型，指Γ的每个公式都在M中恒真：**

$$r\in\Gamma \Rightarrow |r|_M=1.$$

$\Gamma=\phi$时，任何解释域都是Γ的模型.

定义 2（语义推论）公式p是公式集Γ的语义推论，记作$\Gamma\vDash p$，指p在Γ的所有模型中恒真，即：在使Γ的每个成员都恒真的解释域中，p也恒真.

换句话说，

$\Gamma\vDash p \Leftrightarrow$ 当每个$r\in\Gamma$都有$|r|_M=1$时，也有$|p|_M=1$.

定义 3（有效式与可满足公式）

$\phi\vDash p$时，p叫做K的有效式，记为$\vDash p$.

若$\neg p$不是有效式，则p叫做K的可满足公式.

由有效式的定义可知，

$\vDash p \Leftrightarrow p$在K的所有解释域中恒真.

命题 1 **K中（命模演真型）永真式都是有效式.**

证 K的（命题演算型）永真式（见2.1.3定义2）是指形为$p(p_1,\cdots,p_n)$的公式，它由K中的任意公式$p_1,\cdots,p_n$分别代换命题演算L的永真式$p(x_1,\cdots,x_n)$中的命题变元$x_1,\cdots,x_n$所得. 注意$p(p_1,\cdots,p_n)$是由$p_1,\cdots,p_n$经过$\neg$，$\to$两种运算得

到。任取K的解释域M和$\varphi\in\Phi_M$。根据赋值计算对$\neg$，$\to$的保运算性，有

$$|p(p_1,\cdots,p_n)|(\varphi)=p(|p_1|(\varphi),\cdots,|p_n|)(\varphi).$$

因$p(x_1,\cdots,x_n)$是L的永真式，而$|p_1|(\varphi),\cdots,|p_n|(\varphi)\in Z_2$，故上式右端恒为1。$\varphi$是任意的，于是

$$|p(p_1,\cdots,p_n)|_M=1.$$

又因M是任意的，最后得$\vDash p(p_1,\cdots,p_n)$。**证毕。**

推论 1 (K1)，(K2)，(K3) **三种模式的公理都是有效式。**

证 它们都是（L型）永真式。**证毕。**

注意命题1的逆命题不成立。K中有效式并非一定是K中永真式（见下面练习二十六题1）。

命题 2 $\Gamma\vDash p$ 且 $\Gamma\vDash p\to q \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vDash q$.

证 设M是Γ的任一模型。当$\Gamma\vDash p$且$\Gamma\vDash p\to q$时，有

$$|p|_M=1 \text{ 且 } |p\to q|_M=1.$$

根据2.2.4命题5，又有$|q|_M=1$，所以$\Gamma\vDash q$。**证毕。**

例 1 $\{R_1^1(x_1)\}\vDash\forall x_1R_1^1(x_1)$。事实上，根据2.2.4的命题2，

$$|R_1^1(x_1)|_M=1 \quad\Rightarrow\quad |\forall x_1R_1^1(x_1)|_M=1.$$

例 2 $\vDash R_1^1(x_1)\to\forall x_1R_1^1(x_1)$不成立（即公式$R_1^1(x_1)\to\forall x_1R_1^1(x_1)$不是有效式）。为证此事，取M为Z（整数集），$\overline{R_1^1}$：“>0”。再取$\varphi\in\Phi_Z$和$\varphi$的1变通$\varphi'$使它们满足$\varphi(x_1)=2$，$\varphi'(x_1)=-2$。这时有

$$|R_1^1(x_1)|(\varphi)=1 \text{和} |R_1^1(x_1)|(\varphi')=0.$$

由后式得$|\forall x_1R_1^1(x_1)|(\varphi)=0$。这说明

$$|R_1^1(x_1)\to\forall x_1R_1^1(x_1)|(\varphi)=0,$$

即：公式$R_1^1(x_1)\to\forall x_1R_1^1(x_1)$并非在任何解释域中都恒真。回忆在建立K的演绎定理时我们对Gen变元所加的限制。语法上，我们有$\{R_1^1(x_1)\}\vdash\forall x_1R_1^1(x_1)$（使用一次Gen规则就可以了）。但我们不能由此而利用演绎定理得出结论$\vdash R_1^1(x_1)\to$

$\forall x_1 R_1^1(x_1)$，这是因为Gen变元 x_1 在 $R_1^1(x_1)$ 中是自由的。当我们把刚才的例1和例2加以比较后会发现，语法上对Gen变元所加的限制是有语义根据的。

命题 3 $\Gamma \models p \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \forall x_i p$。

证 $\Gamma \models p \;\Leftrightarrow$ 对于 Γ 的任一模型M，$|p|_M = 1$

$\Leftrightarrow$ 对于 Γ 的任一模型M，$|\forall x_i p|_M = 1$

(由2.2.4命题2)

$\Leftrightarrow \Gamma \models \forall x_i p$。证毕。

命题 4 **设 p' 是 p 的全称闭式，则有**

$\Gamma \models p \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models p'$。

证 用命题3若干次。证毕。

练 习 二 十 六

1．证明

1° $\models \exists x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 R_1^2(x_1,x_2)$，

2° $\models \forall x_1 R_1^1(x_1) \to (\forall x_1 R_2^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^1(x_2))$，

3° $\models \forall x_1(p \to q) \to (\forall x_1 p \to \forall x_1 q)$，

4° $\models \forall x_1 \forall x_2 p \to \forall x_2 \forall x_1 p$。

2．给出一个非闭的K中有效式的例子。

3．证明K中以下公式都不是有效式。

1° $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$，

2° $\forall x_1 \forall x_2 (R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_2,x_1))$，

3° $\forall x_1 (\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))$，

4° $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$，

5° $\exists x_1 R_1^1(x_1) \to R_1^1(x_1)$。

4．在K中增加新的个体常元 $b_1, b_2, \cdots$，其他不变，得到新的扩大的谓词演算 K^+。设M是 K^+ 的解释域（也同时可看成是K的解释域）。已知 φ^+ 和 φ 分别是 K^+ 和K的项解释，且满足 $\varphi^+(x_i) = \varphi(x_i)$，$i = 1,2,\cdots$。求证：

(i) 对K中的任何项 t，$\varphi^+(t)=\varphi(t)$；

(ii) 对K中的任何公式 p，$|p|(\varphi^+)=|p|(\varphi)$。

2.3 K 的 可 靠 性

谓词演算K的可靠性，是指事实

$\Gamma\vdash p \quad\Rightarrow\quad \Gamma\models p$。

特殊情形，当 $\Gamma=\phi$ 时，是指

$$\vdash p \quad\Rightarrow\quad \models p,$$

即：K的定理都是有效式。

为了证明K的可靠性，还需要做的主要工作是证明 (K4) 型公理是有效式。

引理 1 设 φ' 是 φ 的 i 变通，且满足 $\varphi'(x_i)=\varphi(t)$，t 是某个项。

1° 若 $u(x_i)$ 是项，则 $\varphi'(u(x_i))=\varphi(u(t))$。

2° 若 t 对公式 $p(x_i)$ 中的 x_i 自由，则

$$|p(x_i)|(\varphi')=|p(t)|(\varphi)。$$

证 1° 对 $u(x_i)$ 在项集T中的层次数 k 归纳。

$k=0$ 时，有三种可能的情形（注意 x_i 可以不在 u 中出现）。

(i) $u(x_i)=c_j$，此时 $u(t)=c_j$，$\varphi'(c_j)=\varphi(c_j)$。

(ii) $u(x_i)=x_j$，$j\neq i$，此时也有 $u(t)=x_j$。φ' 是 φ 的 i 变通，它与 φ 对 x_j 的取值是相同的。即 $\varphi'(x_j)=\varphi(x_j)$。

(iii) $u(x_i)=x_i$，此时 $u(t)=t$，所要证的等式 $\varphi'(u(x_i))=\varphi(u(t))$ 就是已知条件 $\varphi'(x_i)=\varphi(t)$。

$k>0$ 时，设 $u(x_i)=f_j^n(t_1(x_i),\cdots,t_n(x_i))$，其中 $t_1(x_i)$，$\cdots$，$t_n(x_i)$ 是较低层次的项。这时

$$u(t)=f_j^n(t_1(t),\cdots,t_n(t))。$$

我们有

$$\varphi'(u(x_i)) = \varphi'(f_i^n(t_1(x_i),\cdots,t_n(x_i)))$$

$$= \overline{f_i^n}(\varphi'(t_1(x_i)),\cdots,\varphi'(t_n(x_i)))$$

（φ' 是项同态）

$$= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1(t)),\cdots,\varphi(t_n(t))) \quad \text{（由归纳假设）}$$

$$= \varphi(f_i^n(t_1(t),\cdots,t_n(t))) \quad \text{（}\varphi\text{ 是项同态）}$$

$$= \varphi(u(t)).$$

至此，证明 1° 的归纳过程完成。

2° 对 $p(x_i)$在 K(Y) 中的层次数 k 归纳。

$k=0$ 时，$p(x_i)$是原子公式。设

$$p(x_i) = R_j^n(t_1(x_i),\cdots,t_n(x_i)),$$

于是

$$p(t) = R_j^n(t_1(t),\cdots,t_n(t)).$$

此时$|p(x_i)|(\varphi') = |p(t)|(\varphi)$成立，即$|R_j^n(t_1(x_i),\cdots,t_n(x_i))|(\varphi') = |R_j^n(t_1(t),\cdots,t_n(t))|(\varphi)$，成立，是因为

$$|R_j^n(t_1(x_i),\cdots,t_n(x_i))|(\varphi') = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\varphi'(t_1(x_i)),\cdots,\varphi'(t_n(x_i)))\in \overline{R_j^n}$$

$$\Rightarrow \quad (\varphi(t_1(t)),\cdots,\varphi(t_n(t)))\in \overline{R_j^n}$$

（由1°，$\varphi'(t_i(x_i)) = \varphi(t_i(t))$）

$$\Leftrightarrow \quad |R_j^n(t_1(t),\cdots,t_n(t))|(\varphi) = 1$$

$k>0$ 时，分以下四种情形讨论。

（i） 若 $p(x_i) = \neg q(x_i)$，则 $p(t) = \neg q(t)$。这时

$$|p(x_i)|(\varphi') = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |q(x_i)|(\varphi') = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |q(t)|(\varphi) = 0 \qquad \text{（归纳假设）}$$

$$\Leftrightarrow \quad |p(t)|(\varphi) = 1.$$

（ii） 若 $p(x_i) = q(x_i)\to r(x_i)$，则 $p(t) = q(t)\to r(t)$。这时

$$|p(x_i)|(\varphi') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q(x_i)|(\varphi') = 1 \text{ 且 } |r(x_i)|(\varphi') = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |q(t)|(\varphi)=1 \text{ 且 } |r(t)|(\varphi)=0$$

（归纳假设）

$$\Leftrightarrow \quad |p(t)|(\varphi)=0.$$

(iii) 若 $p(x_i)=\forall x_j q(x_i)$ 但 x_i 不在 $p(x_i)$ 中自由出现。这时 $p(t)=p(x_i)$。根据2.2.4命题1-2°，有 $|p(x_i)|(\varphi')=|p(t)|(\varphi)$。

(iv) 若 $p(x_i)=\forall x_j q(x_i)$ 且 x_i 在 $p(x_i)$ 中自由出现，则 $j\neq i$ 且 $p(t)=\forall x_j q(t)$（注意 t 中不含 x_j，因已知 t 对 $p(x_i)$ 中 x_i 是自由的）。这时我们来证明

$$|p(x_i)|(\varphi')=0 \quad \Leftrightarrow \quad |p(t)|(\varphi)=0.$$

先证明向左的方向（$\Leftarrow$）。

设 $|p(t)|(\varphi)=0$，即 $|\forall x_j q(t)|(\varphi)=0$。这时存在 φ 的 j 变通 ψ 使 $|q(t)|(\psi)=0$。再作 ψ 的 i 变通 ψ'，使

(1) $\qquad \psi'(x_i)=\psi(t)$.

于是由归纳假设（上面已有 $|q(t)|(\psi)=0$）可得

(2) $\qquad |q(x_i)|(\psi')=0.$

ψ 是 φ 的 j 变通，它与 φ 对 x_j 的指派可能不一致，对其他变元的指派都一致。而 t 中不含 x_j，利用2.2.4命题1-1°得

(3) $\qquad \psi(t)=\varphi(t).$

现在可以证明 ψ' 是 φ' 的 j 变通。为证此事，要证当 $k\neq j$ 时总有 $\psi'(x_k)=\varphi'(x_k)$。而当 $k\neq j$ 时，又有两种可能：$k\neq i$ 和 $k=i$。

$k\neq i$ 时，

$$\begin{aligned}\psi'(x_k)&=\psi(x_k) &&(\psi'\text{ 是 }\psi\text{ 的 }i\text{ 变通})\\ &=\varphi(x_k) &&(\psi\text{ 是 }\varphi\text{ 的 }j\text{ 变通})\\ &=\varphi'(x_k) &&(\varphi'\text{ 是 }\varphi\text{ 的 }i\text{ 变通})\end{aligned}$$

$k=i$ 时，

$$\begin{aligned}\psi'(x_k)=\psi'(x_i)&=\psi(t) &&(\text{由(1)})\\ &=\varphi(t) &&(\text{由(3)})\end{aligned}$$

$$= \varphi'(x_i) \qquad \text{（原已知条件）}$$
$$= \varphi'(x_k) \qquad (k = i)$$

这就证明了 ψ' 是 φ' 的 i 变通，再由（2）式便得

$$|\forall x_i q(x_i)|(\varphi') = 0 \text{ 即 } |p(x_i)|(\varphi') = 0.$$

剩下还要证明相反方向：

$$|p(x_i)|(\varphi') = 0 \quad \Rightarrow |p(t)|(\varphi) = 0.$$

设 $|p(x_i)|(\varphi') = 0$，即 $|\forall x_i q(x_i)|(\varphi') = 0$。这时有 φ' 的 i 变通 ψ' 使

$$(4) \qquad |q(x_i)|(\psi') = 0.$$

有了 ψ'，再作 ψ' 的 i 变通 ψ，使 $\psi(x_l) = \varphi(x_l)$。这样，ψ 若 φ 除了对 x_l 的指派可能不一致，其他都是一致的，所以 ψ 是 φ 的 i 变通，前面的（3）式这时仍然成立。于是

$$\psi(t) = \varphi(t) \qquad \text{（由(3)）}$$
$$= \varphi'(x_i) \qquad \text{（原已知）}$$
$$= \psi'(x_i). \qquad \text{（}\psi'\text{ 是 }\varphi'\text{ 的 }i\text{ 变通）}$$

再由归纳假设及（4）得

$$|q(t)|(\psi) = |q(x_i)|(\psi') = 0.$$

由此（注意 ψ 是 φ 的 i 变通）即得

$$|\forall x_l q(t)|(\varphi) = 0 \text{ 即 } |p(t)|(\varphi) = 0.$$

这就完成了证明 2° 的整个归纳过程。**证毕。**

引理 2　K 的公理都是有效式。

证　1°　(K1)，(K2)，(K3) 型公理都是永真式。故都是有效式。（见 2.2.5 推论1）

2°（K4）是有效式，验证如下。

设项 t 对 $p(x_i)$ 中 x_i 自由。为证 $\vdash \forall x_i p(x_i) \to p(t)$，任取解释域 M，任取 $\varphi \in \Phi_M$，并先设

$$|\forall x_i p(x_i)|(\varphi) = 1.$$

这时对于 φ 的任一 i 变通 φ'，总有 $|p(x_i)|(\varphi') = 1$。现取 φ 的一个特殊的 i 变通 φ'，使它满足 $\varphi'(x_i) = \varphi(t)$。由引理 1-2°

得$|p(t)|(\varphi)=|p(x_i)|(\varphi')=1$，这说明

$$|\forall x_i p(x_i)\to p(t)|(\varphi)=1.$$

此式当$|\forall x_i p(x_i)|(\varphi)=0$时是当然成立的。由于$\varphi$和M都是任取的，所以$\forall x_i p(x_i)\to p(t)$是有效式。

3° （K5）是有效式，验证如下：

要证$\vDash\forall x_i(p\to q)\to(p\to\forall x_i q)$，其中$x_i$不在$p$中自由出现。为此要证对于任意的M和任意的$\varphi\in\Phi_M$，下式成立，

$$|\forall x_i(p\to q)\to(p\to\forall x_i q)|(\varphi)=1.$$

此式当$|\forall x_i(p\to q)|(\varphi)=0$或$|p|(\varphi)=0$时是明显成立的。所以只要证明当

(5) $$|\forall x_i(p\to q)|(\varphi)=|p|(\varphi)=1$$

时，$|\forall x_i q|(\varphi)=1$就可以了。现设（5）式成立。这时对于$\varphi$的任一$i$变通$\varphi'$，有

(6) $$|p\to q|(\varphi')=1.$$

又由2.2.4命题1-2°可得（注意x_i不在p中自由出现）

(7) $$|p|(\varphi')=|p|(\varphi)=1.$$

由（6），(7)得$|q|(\varphi')=1$，进而可得$|\forall x_i q|(\varphi)=1$。**证毕**。

定理 1（**K的可靠性**）$\Gamma\vdash p\quad\Rightarrow\quad\Gamma\vDash p$。

证 设有p从Γ的证明$p_1,\cdots,p_n$。现对n归纳证明$\Gamma\vDash p$。

$n=1$时，若$p\in\Gamma$，则自然有$\Gamma\vDash p$；若p为公理，由引理2，也有$\Gamma\vDash p$。

$n>1$时，有以下三种情形。

(i) 若$p\in\Gamma$或p为公理，则与$n=1$的情形相同。

(ii) 若有$i,j<n$使$p_j=p_i\to p$，则由归纳假设可得$\Gamma\vDash p_i$和$\Gamma\vDash p_i\to p$。再用2.2.5命题2得$\Gamma\vDash p$。

(iii) 若$p=\forall x_i p_j$，$j<n$，则由归纳假设得$\Gamma\vDash p_j$，再用2.2.5命题3便得$\Gamma\vDash\forall x_i p_j$。**证毕**。

推论 1（**K的无矛盾性**）**K是无矛盾的，即：对任何公式**p，$\vdash p$**与**$\vdash\neg p$**不同时成立。**

证 （反证）假设有公式p使$\vdash p$与$\vdash \neg p$同时成立，则由K的可靠性定理得$\models p$和$\models \neg p$。这样，对任一解释域M和任一$\varphi \in \Phi_M$，有

$$|p|(\varphi)=1 \text{ 且 } |\neg p|(\varphi)=1,$$

这是不可能的。**证毕。**

推论 2 **Γ有模型 $\Rightarrow$ Γ是无矛盾的。**

证明与推论1的证明类似。留作练习。

我们已经知道不能由$\{R_1^1(x_1)\}\vdash \forall x_1 R_1^1(x_1)$用演绎定理推出$\vdash R_1^1(x_1)\rightarrow \forall x_1 R_1^1(x_1)$。前者是正确的，后者是否成立？现在我们可以肯定地说，后者是不成立的。如果它成立，那么由K是可靠性得出$\models R_1^1(x_1)\rightarrow \forall x_1 R_1^1(x_1)$，而这是不成立的（见2.2.5例2）。

练 习 二 十 七

1．证明推论2：有模型的公式集是无矛盾的。

2．$\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow \exists x_2 R_1^2(x_2,x_2)$是否成立？

2.4 K 的 完 全 性

谓词演算K的完全性是指事实

$$\Gamma \models p \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash p,$$

作为特殊情况，指

$$\models p \quad \Rightarrow \quad \vdash p,$$

即：K的有效式一定是K的定理。

证明K的完全性，主要的工作是先证明下面的定理1．

定理 1 **无矛盾公式集一定有可数集模型。**

证 设Γ是个无矛盾公式集。我们来给Γ构造一个可数集模型M。

整个过程分成以下六个步骤进行。

（一） 作扩大的谓词演算 K^+

取可数个新的个体常元 $b_0, b_1, b_2, \cdots$，使

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$$

与原个体常元集 $C = \{c_1, c_2, c_3, \cdots\}$ 不相交。

扩大 K，以 $C \cup B$ 为新的个体常元集，但个体变元集 X，函数词集 F 和谓词集 R 保持不变，得到的新的谓词演算记作 K^+。K 的项集 T 是 K^+ 的项集 T^+ 的真子代数（F 型）。

K 和 K^+ 的原子公式集分别用 Y 和 Y^+ 表示，则 $Y \subset Y^+$。故公式集 $K(Y) \subset K(Y^+)$。

（二） 作扩大的无矛盾公式集 $\Gamma' \supset \Gamma$

把 K^+ 中所有只含有一个自由变元的公式（有可数个）取出排成一列：

$$p_0(x_{i_0}),\ p_1(x_{i_1}),\ p_2(x_{i_2}),\ \cdots,$$

其中 x_{i_0}，x_{i_1}，…这些变元可以重复，但上面的公式序列是不重复的。

在 B 中取出一串 $b_{j_0}, b_{j_1}, \cdots$，使之满足：

（i） b_{j_0} 不在 $p_0(x_{i_0})$ 中出现；

（ii） $n > 0$ 时，b_{j_n} 不在 $p_0(x_{i_0}), \cdots, p_n(x_{i_n})$ 中出现，且 $b_{j_n} \notin \{b_{j_0}, \cdots, b_{j_{n-1}}\}$。

令 $r_n = p_n(b_{j_n}) \to \forall x_{i_n} p_n(x_{i_n})$，

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{r_0, r_1, r_2, \cdots\}。$$

现用反证法证明这样作出的 Γ' 是无矛盾的。假设存在 K^+ 中的公式 q 使 $\Gamma' \underset{K^+}{\vdash} q$ 与 $\Gamma' \underset{K^+}{\vdash} \neg q$ 同时成立，那么必有足够大的 n 使

$$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_n\} \underset{K^+}{\vdash} q \text{ 及 } \neg q。$$

这是不可能的，现对左边 r_i 的个数归纳证明这一点。

首先，r_i 的个数为零时“$\Gamma \underset{K^+}{\vdash} q$ 及 $\neg q$”是不可能的。这是因

为，如果 $\Gamma \vdash_{K^+} q$ 及 $\neg q$，那么我们把 q 和 $\neg q$ 从 Γ 的两个证明中出现的所有新个体常元 b_i 全部换成不在证明中出现的个体变元，便得到 q 和 $\neg q$ 在 K 中从 Γ 的证明，这与 Γ 的无矛盾性相矛盾。

r_i 的个数大于0时，$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_n\} \vdash_{K^+} q$ 及 $\neg q$ 是不能同时成立的。如果同时成立，因 r_n 是闭式（注意 r_n 的定义式），用归谬律立即得

$$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_{n-1}\} \vdash_{K^+} \neg r_n,$$

此即

$$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_{n-1}\} \vdash_{K^+} \neg(p_n(b_{i_n}) \to \forall x_{i_n} p_n(x_{i_n})).$$

由此可得（用永真式 $\neg(p \to q) \to p$ 及 $\neg(p \to q) \to \neg q$）

$$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_{n-1}\} \vdash_{K^+} p_n(b_{i_n}) \text{ 及 } \neg \forall x_{i_n} p_n(x_{i_n}),$$

把证明中出现的所有 b_{i_n} 都换成不在证明中出现的个体变元 x_j，并使用一次 Gen 规则，便得（注意 b_{i_n} 的取法，它不在 $r_0, \cdots, r_{n-1}$ 中出现）

$$\Gamma \cup \{r_0, \cdots, r_{n-1}\} \vdash_{K^+} \forall x_j p_n(x_j) \text{ 及 } \neg \forall x_j p_n(x_j),$$

按归纳假设，这是不可能的。这就完成了 Γ' 的无矛盾性的归纳证明。

（三）作 Γ' 的完备无矛盾扩张 Γ^*

把 $K(Y^+)$ 中的所有闭式（有可数个）排成不重复的一列：

$$p_0^*, p_1^*, p_2^*, \cdots.$$

令

$$\Gamma_0 = \Gamma',$$

$$\Gamma_n = \begin{cases} \Gamma_{n-1}, & \text{若 } \Gamma_{n-1} \vdash_{K^+} p_{n-1}^*; \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\neg p_{n-1}^*\}, & \text{若 } \Gamma_{n-1} \vdash_{K^+} p_{n-1}^* \text{不成立。} \end{cases}$$

这样归纳定义的每个 Γ_n 都是无矛盾的，且有

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots.$$

现对 n 归纳证明 Γ_n 是无矛盾的。

$n=0$ 时，$\Gamma_0=\Gamma'$ 已知是无矛盾的（见(二)）。

$n>0$ 时，假设 Γ_n 有矛盾，即有 q 使

（1） $$\Gamma_n \underset{K^+}{\vdash} q \text{ 及} \neg q.$$

这时有 $\Gamma_n \neq \Gamma_{n-1}$，因为由归纳假设，$\Gamma_{n-1}$ 是无矛盾的。于是从 Γ_n 的定义可知

(2) $$\Gamma_{n-1} \underset{K^+}{\vdash} p^*_{n-1} \text{ 不成立，}$$

且有

（3） $$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{\neg p^*_{n-1}\}.$$

将（3）的 Γ_n 代入（1）的左端，用反证律（注意 $\neg p^*_{n-1}$ 是闭式）便可得

$$\Gamma_{n-1} \underset{K^+}{\vdash} p^*_{n-1},$$

这与（2）相矛盾。Γ_n 的无矛盾性的归纳证明完成。

作

$$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n.$$

Γ^* 也是无矛盾的，否则由 $\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} q$ 及 $\neg q$ 可推出对于充分大的 n，有 $\Gamma_n \underset{K^+}{\vdash} q$ 及 $\neg q$，这与 Γ_n 的无矛盾性相矛盾。

Γ^* 还是完备的，即：对 K^+ 中任一闭式 p^*_k，$\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} p^*_k$ 与 $\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} \neg p^*_k$ 二者必居其一。事实上，

$$\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} p^*_k \text{不成立} \Rightarrow \Gamma_k \underset{K^+}{\vdash} p^*_k \text{不成立} \qquad (\Gamma_k \subseteq \Gamma^*)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{\neg p^*_k\} \text{（由 } \Gamma_n \text{ 的定义）}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{k+1} \underset{K^+}{\vdash} \neg p_k^* \qquad (\neg p_k^* \in \Gamma_{k+1})$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} \neg p_k^*. \qquad (\Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma^*)$$

至此便证明了 Γ^* 是 Γ' 的完备无矛盾扩张。

（四）作解释域M

令

M = K^+ 的所有闭项组成的集。

于是作为 T^+的子代数，M是由 $B \cup C$ 生成的以 F 为运算集的 F 型代数系统，是可数集。它是从形式系统K^+自身取出的非空集。我们希望能把它构造成为所需要的模型。

作映射

$$\varphi_1^+ : B \cup C \to M,$$

$$\varphi_1^+(b_i) = b_i, \quad \varphi_1^+(c_i) = c_i;$$

$$\varphi_2^+ : F \to F,$$

$$\varphi_2^+(f_i^n) = f_i^n.$$

φ_1^+和 φ_2^+ 是自然地规定的。为了使M成为解释域，还要构造映射

$$\varphi_3^+ : R \to M\text{上关系的集。}$$

现用如下方式对 R 中的每个 R_i^n 规定对应的M上的 n 元关系 $\overline{R_i^n}$。

对任意闭项 $t_1, \cdots, t_n \in M$，

当 $\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$时，令$(t_1, \cdots, t_n) \in \overline{R_i^n}$；

当 $\Gamma^* \underset{K^+}{\vdash} \neg R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$时，令$(t_1, \cdots, t_n) \notin \overline{R_i^n}$。

Γ^* 的完备无矛盾性保证了$\overline{R_i^n}$的定义是合理的。这样，M（连同 $\varphi_1^+, \varphi_2^+, \varphi_3^+$）便成了 K^+ 的解释域。把 φ_1^+限制在 C 上，M 也自然是 K 的解释域。我们下面要进一步证明M是 Γ 的模型。

注意M的一个性质：对 K^+ 的任何项解释 φ^+ 和任一闭项

$t(t\in M)$，总有 $\varphi^+(t)=t$。

（五）命题＊

$$(*)\qquad \Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} q \quad\Leftrightarrow\quad |q|_M=1,$$

其中 q 是 K^+ 的任一闭式。

现对闭式 q 在 K(Y) 中的层次数 k 归纳证明命题＊。

$k=0$ 时，q 是原子公式。此时设 q 是 $R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，其中每个 t_i 是闭项。对任取项解释 φ^+，因 t_i 是闭项，故 $\varphi^+(t_i)=t_i$。于是

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} q \quad\Leftrightarrow\quad (t_1,\cdots,t_n)\in\overline{R_i^n} \qquad (\overline{R_i^n}\text{的定义})$$

$$\Leftrightarrow\quad (\varphi^+(t_1),\cdots,\varphi^+(t_n))\in\overline{R_i^n} \qquad (\varphi^+(t_i)=t_i)$$

$$\Leftrightarrow\quad |R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi^+)=1.$$

因 φ^+ 是任取的，故

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} q \quad\Leftrightarrow\quad |R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|_M=1,\ \text{即}\ |q|_M=1.$$

$k>0$ 时，分以下四种情形讨论。

情形 1　$q=\neg r$，其中 r 也是闭式。此时有

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash}\neg r \quad \underset{(\Gamma^*\text{完备})}{\overset{(\Gamma^*\text{无矛盾})}{\rightleftarrows}} \quad \Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} r\ \text{不成立}$$

$$\Leftrightarrow\quad |r|_M=0 \qquad (\text{归纳假设})$$

$$\Leftrightarrow\quad |\neg r|_M=1.$$

情形 2　$q=r\to s$，其中 r,s 是闭式。此时有

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} r\to s\ \text{不成立} \quad\Leftrightarrow\quad \Gamma^*\underset{K^+}{\vdash}\neg(r\to s)$$

（Γ^*的完备无矛盾性）

$$\Leftrightarrow\quad \Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} r\ \text{且}\ \Gamma^*\underset{K^+}{\vdash}\neg s \qquad (\text{用永真式})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Gamma^* \vdash_{K^+} r \text{但} \Gamma^* \vdash_{K^+} s \text{不成立}$$

$$\Leftrightarrow \quad |r|_M = 1 \text{ 且} |s|_M = 0 \qquad \text{(归纳假设)}$$

$$\Leftrightarrow \quad |r \to s|_M = 0.$$

上面第二步用了三个永真式：$\neg(r\to s)\to r$，$\neg(r\to s)\to\neg s$，$r\to(\neg s\to\neg(r\to s))$。

情形 3　$q=\forall x_j r$ 且 r 是闭式，此时有

$$\Gamma^* \vdash_{K^+} \forall x_j r \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^* \vdash_{K^+} r \qquad \text{((K4)，MP及Gen)}$$

$$\Leftrightarrow \quad |r|_M = 1 \qquad \text{(归纳假设)}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\forall x_j r|_M = 1. \qquad \text{(2.2.4 命题 2)}$$

情形 4　$q=\forall x_j r(x_j)$，其中 x_j 在 $r(x_j)$中自由出现。因 q 是闭式，故 $r(x_j)$只含有一个自由出现的变元 x_j。此时 $r(x_j)$ 必在（二）中列出的公式列里出现。设 $r(x_j)=p_m(x_{i_m})$，$i_m=j$。于是 $q=\forall x_{i_m}p(x_{i_m})$。在此情形下，对命题 * 的两个方向分别进行证明如下。

（⇒）（反证）假设

(4)　$\Gamma^* \vdash_{K^+} \forall x_{i_m} p_m(x_{i_m})$，但

(5)　$|\forall x_{i_m} p_m(x_{i_m})|_M = 0$。

由（5）知存在项解释 φ^+使

(6)　$|p_m(x_{i_m})|(\varphi^+) = 0$。

把 $\varphi^+(x_{i_m})$记为 t 。既然 $t\in M$，那么 t 是 K^+ 的闭项，所以又有

$$\varphi^+(t) = t = \varphi^+(x_{i_m}).$$

由此用 2.3 引理 1-2°（φ^+是自己的 i_m 变通）进而得

$$|p_m(t)|(\varphi^+) = |p_m(x_{i_m})|(\varphi^+).$$

因 $p_m(t)$是闭式，故由上式及（6）又得

(7)　$|p_m(t)|_M = 0$。

另一方面，由（4）可得 $\Gamma^* \vdash_{K^+} p_m(t)$（用(K4)及MP）。再由

此及归纳假设得$|p_m(t)|_M=1$，这与（7）相矛盾。

（$\Leftarrow$）设$|\forall x_{i_m} p_m(x_{i_m})|_M=1$。

因为公理都是有效式，故有

$$|\forall x_{i_m} p_m(x_{i_m})\to p_m(b_{j_m})|_M=1.$$

这样由2.2.4命题5可得$|p_m(b_{j_m})|_M=1$。由归纳假设，有

（8）
$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} p_m(b_{j_m}).$$

注意$r_m\in\Gamma^*$（见（二）（三）中r_n和Γ^*的定义），故$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} r_m$，即

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} p_m(b_{j_m})\to\forall x_{i_m} p_m(x_{i_m}).$$

由此及（8）立即可得

$$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash}\forall x_{i_m} p_m(x_{i_m}).$$

至此完成了证明命题＊的归纳过程。

（六）整个证明的完成

任取$p\in\Gamma\subseteq\Gamma^*$，当然有$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} p$。设$p'$是$p$的全称闭式，则也有$\Gamma^*\underset{K^+}{\vdash} p'$。这时可用命题＊得到$|p'|_M=1$。由此及2.2.4命题3最后得

$$|p|_M=1.$$

这就证明了M是Γ的模型，是所要找的可数集模型。**证毕。**

有了定理1，K的完全性定理立即可证。

定理 2（K的完全性） $\Gamma\vDash p\ \Rightarrow\ \Gamma\vdash p$。

证（反证）假设$\Gamma\vdash p$不成立。设p'是p的全称闭式。这时$\Gamma\cup\{\neg p'\}$是无矛盾的，否则用反证律立即得$\Gamma\vdash p'$，以致$\Gamma\vdash p$成立。由定理1知$\Gamma\cup\{\neg p'\}$一定有模型。设M是$\Gamma\cup\{\neg p'\}$的模型，于是有$|\neg p'|_M=1$，从而$|p'|_M=0$。由此可知$\Gamma\vDash p'$不成立。最后又由2.2.5命题4得知$\Gamma\vDash p$不成立，这与巳知条件相矛盾。**证毕。**

把K的可靠性和K的完全性结合起来，我们就得到关于谓词演算K的Gödel完备性定理：

$$\Gamma \vdash p \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models p.$$

这个定理指出了K的语法和语义的一致性。

在谓词演算K中，有没有类似于命题演算L的可判定性的结论？是否存在一种算法，用它可以确定K的任一公式是不是K的定理即K的有效式？在谓词演算K的范围内，莱布尼茨的通过计算解决争论的设想是否能够完全实现？

后面我们将要就一种特殊的谓词演算系统——形式算术K_N来回答问题。

练习二十八

1．设Γ是K的无矛盾公式集。求证：Γ是完备的，当且仅当K的任一闭式若在Γ的某个模型中恒真，则在Γ的所有模型中都恒真。

（Γ是完备的，指：对K的任一闭式p，$\Gamma \vdash p$与$\Gamma \vdash \neg p$二者必居其一。）

2．（紧致性定理）若Γ的每个有限子集都有模型，则Γ也定有模型。

3 形式算术与递归函数

3.1 带等词的谓词演算

现在来研究一类特殊的谓词演算，它们都有一个特殊的二元谓词 R_1^2，叫做等词。各种形式数学系统（包括形式算术 K_N）都是带等词的谓词演算。

等词在我们的心目中是用来形式地表示"相等"这个概念的，但是对它也可以作其他解释。

3.1.1 等词公理

定义 1（等词公理）在带有等词 R_1^2 的谓词演算K中，以下三种形式的公式叫做等词公理。

(E 1) $R_1^2(t,t)$,

(E 2) $R_1^2(t_k,u)\to R_1^2(f_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n),f_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))$,

(E 3) $R_1^2(t_k,u)\to(R_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n)\to R_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))$,

其中 $t,t_1,\cdots,t_n,u$ 是任意的项，$k=1,\cdots,n$。

所有等词公理组成的集记为 E。

不涉及具体的解释域，这些等词公理的涵义并不十分明确。我们可以在自己任意设想的解释域中大致想象它们的直观意义：(E 1)涉及的是反身性质，(E2)与(E3)涉及到替换性质。

为书写方便，下面用"≈"表示等词，把 $R_1^2(t,u)$ 写成 $t\approx u$。这样，可将等词公理更直观地写出：

(E 1) $t\approx t$,

(E 2) $t_k \approx u \to (f_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n) \approx f_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))$,

(E 3) $t_k \approx u \to (R_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n) \to R_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))$.

注意，这些等词公理并不是有效式。下面用简单的例子来说明这一点。

例 1 设K中C＝ϕ，F＝ϕ，R＝$\{\approx\}$，则等词公理集E中只包含

(E 1) $x_i \approx x_i$,

(E 3) $x_k \approx x_i \to (x_k \approx x_j \to x_i \approx x_j)$,

$x_k \approx x_i \to (x_j \approx x_k \to x_j \approx x_i)$.

此外，K中再没有其他形状的等词公理。

考察K的一个解释域N（自然数集），其中等词"≈"解释为"＞"。N不是E的模型。事实上，对任意项解释φ，总有

$$|x_i \approx x_i|(\varphi)=0;$$

当项解释φ满足$\varphi(x_i)=1$，$\varphi(x_j)=2$，$\varphi(x_k)=3$时，

$$|x_k \approx x_i \to (x_k \approx x_j \to x_i \approx x_j)|(\varphi)=0.$$

上例说明，等词公理并非在K的任何解释域中都恒真。但是当等词"≈"在解释域中解释为"相等"时，解释域一定是E的模型。

命题 1 在K的解释域M中，若等词≈解释为"相等"，则M是等词公理集E的模型。

证 任取$\varphi \in \Phi_M$。先考察(E1)。因$\varphi(t)=\varphi(t)$，故总有

$$|t \approx t|(\varphi)=1.$$

再考察(E2)和(E3)。设$|t_k \approx u|(\varphi)=1$，于是有$\varphi(t_k)=\varphi(u)$。此时注意$\varphi$的保运算性，有

$$\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n))=\overline{f}_i^n(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_k),\cdots,$$
$$\varphi(t_n))=\overline{f}_i^n(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(u),\cdots,\varphi(t_n))$$
$$=\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n)).$$

于是

$|f_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n)\approx f_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n)|(\varphi)=1$。

这说明

$$|t_k\approx u\rightarrow(f_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n)\approx f_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))|(\varphi)=1。$$

还有

$$|R_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n)|(\varphi)=1\Rightarrow(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_k),\cdots,\varphi(t_n))\in\overline{R}_i^n\Rightarrow(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(u),\cdots,\varphi(t_n))\in\overline{R}_i^n$$
$$\Rightarrow|R_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n)|(\varphi)=1,$$

这说明

$$|t_k\approx u\rightarrow(R_i^n(t_1,\cdots,t_k,\cdots,t_n)\rightarrow R_i^n(t_1,\cdots,u,\cdots,t_n))|(\varphi)=1。$$

φ 是任意的，故以上讨论表明所有等词公理在M中恒真。**证毕。**

对于任何带等词的谓词演算，总可以给出一个解释域，使等词在其中解释为相等。换句话说，（根据命题1）等词公理集E总可以找到自己的模型。再根据2.3推论2，我们便知道，等词公理集E是无矛盾的。

命题1还说明，等词公理形式地表示出"相等"所必须具有的"反身性"和"可替换性"。

但是，等词公理并没有形式地表示出"相等"的全部特征。这是因为，命题1的逆命题并不成立：等词≈不解释为相等的解释域，也可能是等词公理集E的模型。了解这一点，只用看下面的例子。

例 2 仍用例1中的K，其中 $C=\phi$，$F=\phi$，$R=\{\approx\}$。现考察K的另一解释域Z（全体整数之集）。设在Z中等词≈不解释为相等，而是解释为"有相同奇偶性"。这时所有等词公理在Z中恒真。事实上，任取 $\varphi\in\Phi_Z$，便有

1° $|x_i\approx x_i|(\varphi)=1$,

2° $|x_k\approx x_i\rightarrow(x_k\approx x_j\rightarrow x_i\approx x_j)|(\varphi)=1$,

3° $|x_k\approx x_i\rightarrow(x_j\approx x_k\rightarrow x_j\approx x_i)|(\varphi)=1$。

式1°成立，是因为$\varphi(x_i)$与$\varphi(x_i)$自己有相同的奇偶性。式2°的意思是：若$\varphi(x_k)$与$\varphi(x_i)$有相同奇偶性且$\varphi(x_k)$与$\varphi(x_j)$有相同奇偶性，则$\varphi(x_i)$与$\varphi(x_j)$也有相同奇偶性。式3°与式2°同理。

例2说明，不能强迫等词$\approx$在等词公理集E的模型中非解释为"相等"不可。

是不是等词公理太少了？用增加等词公理的办法是否能使$\approx$在模型中一定解释为相等？回答是否定的。在K的框架内，不管增加多少等词公理也不能使$\approx$在模型中一定解释为相等。

形式地、抽象地谈论"相等"，穷尽不了"相等"的全部特征。（见3.1.3练习三十一题1。）

习 练 二 十 九

1. 设K中$F=\{f_1^1, f_1^2, f_1^3\}$，$R=\{\approx\}$，试写出(E2)，(E3)型等词公理的各种形式。

2. 在例1的K的解释域N中，若等词$\approx$改为解释成"有不同的奇偶性"，那么等词公理在N中是否都恒真？是否都恒假？

3. 试证$E\vdash x_2\approx x_2$。

3.1.2 等项替换

上面已经指出，在等词公理集E的模型中，等词$\approx$不一定解释为相等。但是，下面将证明，在E的任何模型中，等词$\approx$所解释的二元关系必定是等价关系。

命题1 1° $E\vdash t\approx t$,

2° $E\vdash t\approx u\to u\approx t$,

3° $E\vdash t\approx u\to(u\approx v\to t\approx v)$,

以上t，u和v是任意的项。

证 1° $t\approx t$是等词公理。

2° 先证$E\cup\{t\approx u\}\vdash u\approx t$，再用演绎定理。以下是所需

证明：

(1) $t\approx u\to(t\approx t\to u\approx t)$ (E3)

(2) $t\approx u$ 假定

(3) $t\approx t\to u\approx t$ (1)，(2)，MP

(4) $t\approx t$ (E1)

(5) $u=t$ (3)，(4)，MP。

3° 以下是所需证明

(1) $t\approx u\to u\approx t$ 由2°

(2) $u\approx t\to(u\approx v\to t\approx v)$ (E3)

(3) $t\approx u\to(u\approx v\to t\approx v)$ (1)，(2)，HS，证毕。

命题 2 若M是E的模型，则等词≈必解释为M上的等价关系。

证 由命题1利用可靠性定理得

$$|x_1\approx x_1|_M=1,$$

$$|x_1\approx x_2\to x_2\approx x_1|_M=1,$$

$$|x_1\approx x_2\to(x_2\approx x_3\to x_1\approx x_3)|_M=1.$$

任取 $\varphi\in\Phi_M$。设≈解释为M上的二元关系$\overline{R_1^2}$，上面三式分别立即给出

1° $(\varphi(x_1),\varphi(x_1))\in\overline{R_1^2}$，（反身性）

2° $(\varphi(x_1),\varphi(x_2))\in\overline{R_1^2}\Rightarrow(\varphi(x_2),\varphi(x_1))\in\overline{R_1^2}$，（对称性）

3° $(\varphi(x_1),\varphi(x_2))\in\overline{R_1^2}$且$(\varphi(x_2),\varphi(x_3))\in\overline{R_1^2}$

$$\Rightarrow(\varphi(x_1),\ \varphi(x_3))\in\overline{R_1^2}.\qquad\text{（可递性）}$$

因 φ是任取的，故 $\varphi(x_1)$，$\varphi(x_2)$，$\varphi(x_3)$是M的任意元素。于是1°，2°，3°说明$\overline{R_1^2}$是M上的等价关系。证毕。

下面两个等项替换的命题是以后常用的。

命题 3（等项替换，(E2)的推广）。

$$E\vdash u\approx v\to t(u)\approx t(v),$$

其中项 u 是项 $t(u)$ 的子项，$t(v)$ 是将 $t(u)$ 中某一处出现的 u 替换成项 v 所得结果。

证 设 $t(u)$ 是由待替换的 u 经 m 次运算得来。现对 m 归纳。

$m=0$ 时，$t(u)$ 就是 u，$t(v)$ 就是 v，用同一律便可。

$m>0$ 时，设 $t(u)$ 是 $f_i^n(t_1,\cdots,t_k(u),\cdots,t_n)$，其中 $t_k(u)$ 是由待替换的 u 经过少于 m 次的运算得来。此时 $t(v)$ 是 $f_i^n(t_1,\cdots,t_k(v),\cdots,t_n)$。我们有

(1) $u\approx v\rightarrow t_k(u)\approx t_k(v)$ （归纳假设）

(2) $t_k(u)\approx t_k(v)\rightarrow f_i^n(t_1,\cdots,t_k(u),\cdots,t_n)$
$\approx f_i^n(t_1,\cdots,t_k(v),\cdots,t_n)$ (E2)

即 $t_k(u)\approx t_k(v)\rightarrow t(u)\approx t(v)$

(3) $u\approx v\rightarrow t(u)\approx t(v)$ (1),(2),HS，**证毕。**

命题 4（等项替换，(E3)的推广）

$$\mathrm{E}\vdash t\approx u\rightarrow(p(t)\rightarrow p(u)),$$

其中 $p(u)$ 是将公式 $p(t)$ 中某一处出现的项 t 用项 u 替换后所得结果，且 t 和 u 的变元都不在替换处受约束。

证 对公式 $p(t)$ 的层次数归纳。

当 $p(t)$ 是原子公式 $R_i^n(t_1,\cdots,t_k(t),\cdots,t_n)$ 时，$p(u)$ 是 $R_i^n(t_1,\cdots,t_k(u),\cdots,t_n)$。此时有

(1) $t\approx u\rightarrow t_k(t)\approx t_k(u)$ 命题 3

(2) $t_k(t)\approx t_k(u)\rightarrow(R_i^n(t_1,\cdots,t_k(t),\cdots,t_n)$
$\rightarrow R_i^n(t_1,\cdots,t_k(u),\cdots,t_n))$ (E3)

(3) $t\approx u\rightarrow(p(t)\rightarrow p(u))$ (1),(2),HS

$p(t)$ 不是原子公式时，有以下三种可能。

(i) $p(t)=\neg q(t)$，$p(u)=\neg q(u)$。此时有

(1) $t\approx u\rightarrow u\approx t$ 命题 1-2°

(2) $u\approx t\rightarrow(q(u)\rightarrow q(t))$ 归纳假设

(3) $(q(u)\rightarrow q(t))\rightarrow(\neg q(t)\rightarrow\neg q(u))$ 永真式

(4) $t\approx u\rightarrow(\neg q(t)\rightarrow\neg q(u))$ 两次 HS

(ii) $p(t)=q(t)\to r$或$p(t)=q\to r(t)$.

对前者，以下公式从 E 可证

(1) $t\approx u\to u\approx t$ 命题1-2°

(2) $u\approx t\to(q(u)\to q(t))$ 归纳假设

(3) $(q(u)\to q(t))\to((q(t)\to r)\to(q(u)\to r))$ 永真式

(4) $t\approx u\to((q(t)\to r)\to(q(u)\to r))$ 两次 HS

对后者（即 $p(t)=q\to r(t)$），以下公式从 E 可证

(1) $t\approx u\to(r(t)\to r(u))$ 归纳假设

(2) $(r(t)\to r(u))\to((q\to r(t))\to(q\to r(u)))$ 永真式

(3) $t\approx u\to((q\to r(t))\to(q\to r(u)))$ (1),(2),HS

(iii) $p(t)=\forall x_i q(t)$，$p(u)=\forall x_i q(u)$。由已知条件（t 和 u 的变元都不在替换处受约束）知，t 和 u 中都不含有 x_i。此时以下公式从

$$E\cup\{t\approx u,\forall x_i q(t)\}$$

可证

(1) $t\approx u$ 假定

(2) $t\approx u\to(q(t)\to q(u))$ 归纳假设

(3) $q(t)\to q(u)$ (1),(2),MP

(4) $\forall x_i q(t)\to q(t)$ (K4)

(5) $\forall x_i q(t)$ 假定

(6) $q(u)$ (5),(4),(3),MP

(7) $\forall x_i q(u)$ (6),Gen

因 Gen 变元 x_i 不在假定 $t\approx u$ 及 $\forall x_i q(t)$中自由出现，用演绎定理便得

$$E\vdash t\approx u\to(\forall x_i q(t)\to\forall x_i q(u))$$。**证毕。**

练 习 三 十

1. 设项 t，u 都对公式 $p(x_i)$中 x_i 自由，且不含 x_i。求证

$$E\cup\{\exists_1 x_i p(x_i),p(t)\}\vdash p(u)\to u\approx t,$$

这里规定

$$\exists_1 x_i p(x_i) = \exists x_i (p(x_i) \wedge \forall x_j (p(x_j) \to x_i \approx x_j)),$$

其中 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现。

*3.1.3 正规模型

定义 1 （正规模型） 设M是公式集$\Gamma \cup E$的模型。若等词$\approx$在M中解释为相等，则M叫做$\Gamma \cup E$的正规模型。

通常我们感兴趣的模型，自然是正规模型。下面来证明，对于任何包含等词公理集E在内的无矛盾公式集，正规模型一定存在。

定理 1 $\Gamma \cup E$ **若有模型，则一定有正规模型。**

证 设M是$\Gamma \cup E$的模型。由3.1.2命题2知，等词$\approx$解释为M上的等价关系。下面用$\backsim$表示这个等价关系。把所有等价类的集，即M关于$\backsim$的商集记作M^*。我们要使M^*成为所需要的正规模型。作为第一步，

（一）使M^*成为解释域

用$[y]$表示含y的等价类，即

$$[y] = \{y' \mid y' \in M, y' \backsim y\}.$$

为使M^*成为解释域，作三个映射

$$\varphi_1^*(c_i) = \hat{c}_i,$$
$$\varphi_2^*(f_i^n) = \hat{f}_i^n,$$
$$\varphi_3^*(R_i^n) = \widehat{R}_i^n,$$

其中$\hat{c}_i, \hat{f}_i^n, \widehat{R}_i^n$是这样规定的：

(1) $\hat{c}_i = [\overline{c}_i]$,

(2) $\widehat{f_i^n}([y_1], \cdots, [y_n]) = [\overline{f_i^n}(y_1, \cdots, y_n)]$,

(3) $([y_1], \cdots, [y_n]) \in \widehat{R_i^n} \Leftrightarrow (y_1, \cdots, y_n) \in \overline{R_i^n}$.

需要证明，作为M^*上的n元函数和M^*上的n元关系，$\hat{f}$和$\widehat{R}$是合理定义的，即：（2），（3）的右端与代表y_i

$\cdots, y_n$的选取无关。

1° 设$[y_j]=[z_j]$, $j=1,\cdots,n$,要证

(4) $[\overline{f_i^n}(y_1,\cdots,y_n)]=[\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_n)]$。

为此先证当$1\leqslant k\leqslant n$时有

(5) $[\overline{f_i^n}(y_1,\cdots,y_k,y_{k+1},\cdots,y_n)]$

$$=[\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_k,y_{k+1},\cdots,y_n)]。$$

然后在（5）中令$k=n$便得（4）。

现对k归纳证明（5）。

等词公理

$$x_1\approx x_{n+1}\to f_i^n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\approx f_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)$$

在M中恒真。取项解释$\varphi\in\Phi_M$，使$\varphi(x_1)=y_1,\cdots,\varphi(x_n)=y_n$，$\varphi(x_{n+1})=z_1$。于是有

(6) $|x_1\approx x_{n+1}|(\varphi)=1 \quad\Rightarrow\quad |f_i^n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\approx f_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)|(\varphi)=1。$$

已知$[y_1]=[z_1]$，故有$y_1\backsim z_1$，$\varphi(x_1)\backsim\varphi(x_{n+1})$，$|x_1\approx x_{n+1}|(\varphi)=1$。由此及（6）可得

$$|f_i^n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\approx f_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)|(\varphi)=1,$$

$$\varphi(f_i^n(x_1,x_2,\cdots,x_n))\backsim\varphi(f_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)),$$

$$\overline{f_i^n}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\backsim\overline{f_i^n}(z_1,y_2,\cdots,y_n),$$

$$[\overline{f_i^n}(y_1,y_2,\cdots,y_n)]=[\overline{f_i^n}(z_1,y_2,\cdots,y_n)]。$$

这说明$k=1$时（5）式成立。

假设（5）式对$k-1$是正确的：

(7) $[\overline{f_i^n}(y_1,\cdots,y_{k-1},y_k,\cdots,y_n)]=[\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_{k-1},y_k,$

$$\cdots,y_n)]。$$

因等词公理

$$x_k\approx x_{n+1}\to f_i^n(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)\approx f_i^n(x_1,\cdots,x_{n+1},\cdots,x_n)$$

在M中恒真，故当取$\varphi\in\Phi_M$满足$\varphi(x_1)=z_1,\cdots,\varphi(x_{k-1})=z_{k-1}$,

$\varphi(x_k)=y_k,\cdots,\varphi(x_n)=y_n$，$\varphi(x_{n+1})=z_k$时，注意$y_k\backsim z_k$，得

$$|x_k\approx x_{n+1}|(\varphi)=1,$$

$$|f_i^n(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)\approx f_i^n(x_1,\cdots,x_{n+1},\cdots,x_n)|(\varphi)=1,$$

$$\varphi(f_i^n(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n))\backsim\varphi(f_i^n(x_1,\cdots,x_{n+1},\cdots,x_n)),$$

$$\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_{k-1},y_k,\cdots,y_n)\backsim\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_{k-1}z_k,y_{k+1},\cdots,y_n),$$

$$[\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_{k-1},y_k,\cdots,y_n)]=[\overline{f_i^n}(z_1,\cdots,z_k,y_{k+1},\cdots,y_n)].$$

此式与（7）结合，便得（5），进而使（4）式得到证明。这就证明了定义式（2）的合理性。

2° $\widehat{R_i^n}$的定义式（3）的合理性。

设$[y_j]=[z_j]$，$j=1,\cdots,n$，要证

$$(y_1,\cdots,y_n)\in\overline{R_i^n}\Leftrightarrow(z_1,\cdots,z_n)\in\overline{R_i^n}.$$

考虑对称性，只用证一个方向：

$$(y_1,\cdots,y_n)\in\overline{R_i^n}\Rightarrow(z_1,\cdots,z_n)\in\overline{R_i^n}.$$

为此取项解释$\varphi\in\Phi_M$，使之满足

$$\varphi(x_1)=y_1,\cdots,\varphi(x_n)=y_n,$$
$$\varphi(x_{n+1})=z_1,\cdots,\varphi(x_{2n})=z_n.$$

这样，问题归结为只用证明下面的事实就行了。

(8) $|R_i^n(x_1,\cdots,x_n)|(\varphi)=1\Rightarrow|R_i^n(x_{n+1},\cdots,x_{2n})|(\varphi)=1.$

事实上，因等词公理都在M中恒真，故

$$|x_1\approx x_{n+1}\to(R_i^n(x_1,\cdots,x_n)\to R_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n))|(\varphi)=1,$$

$$|x_2\approx x_{n+2}\to(R_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)\to R_i^n(x_{n+1},x_{n+2},x_3,\cdots,x_n)|(\varphi)=1,$$

…………

$$|x_n\approx x_{2n}\to(R_i^n(x_{n+1},\cdots,x_{2n-1},x_n)\to R_i^n(x_{n+1},\cdots,x_{2n-1},x_{2n})|(\varphi)=1.$$

注意$y_j\backsim z_j$，即$\varphi(x_j)\backsim\varphi(x_{n+j})$，有

$$|R_i^n(x_1,\cdots,x_n)|(\varphi)=1\quad\Rightarrow\quad|R_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n|(\varphi)=1,$$

$|R_i^n(x_{n+1},x_2,\cdots,x_n)|(\varphi)=1 \Rightarrow |R_i^n(x_{n+1},x_{n+2},x_3,\cdots,$
$x_n)|(\varphi)=1,$

…………

$$|R_i^n(x_{n+1},\cdots,x_{2n-1},x_n)|(\varphi)=1 \Rightarrow$$
$$|R_i^n(x_{n+1},\cdots,x_{2n-1},x_{2n})|(\varphi)=1.$$

合在一起，便得（8）。

至此，$\widehat{f_i^n}$和$\widehat{R_i^n}$定义的合理性的证明完成。

这样，M*连同定义好的$\widehat{c_i}$，$\widehat{f_i^n}$，$\widehat{R_i^n}$便构成了解释域。

（二）M*是$\Gamma\cup E$的模型

为证明这一点，先证以下两个命题。

1° 设$\varphi^*\in\Phi_{M^*}$，$\varphi\in\Phi_M$。若$\varphi^*(x_i)=[\varphi(x_i)]$，$i=1,2,\cdots$，则对任意项$t$有$\varphi^*(t)=[\varphi(t)]$。

2° 设p是任一公式。若$\varphi^*(x_i)=[\varphi(x_i)]$，$i=1,2,\cdots$，则有$|p|(\varphi^*)=|p|(\varphi)$。

为证命题1°，对t的层次数k归纳。

$k=0$时，若t是x_i，则$\varphi^*(x_i)=[\varphi(x_i)]$为已知；若$t$是$c_i$，则有

$$\varphi^*(c_i)=\widehat{c_i} \qquad (\varphi^*\text{是项解释})$$
$$=[\overline{c_i}] \qquad (\text{见}\widehat{c_i}\text{的定义式}(1))$$
$$=[\varphi(c_i)].$$

$k>0$时，设$t=f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$。此时有

$$\varphi^*(t)=\widehat{f_i^n}(\varphi^*(t_1),\cdots,\varphi^*(t_n)) \qquad (\varphi^*\text{是同态})$$
$$=\widehat{f_i^n}([\varphi(t_1)],\cdots,[\varphi(t_n)]) \qquad (\text{由归纳假设})$$
$$=[\overline{f_i^n}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))] \qquad (\text{见}\widehat{f_i^n}\text{的定义式（2）})$$
$$=[\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))] \qquad (\varphi\text{是同态})$$
$$=[\varphi(t)].$$

为证命题2°，对公式p的层次归纳。

p是原子公式$R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$时，

$$|R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi^*)=1\Leftrightarrow(\varphi^*(t_1),\ \cdots,\varphi^*(t_n))\in\widehat{R_i^n}$$

$$\Leftrightarrow([\varphi(t_1)],\ \cdots,\ [\varphi(t_n)])\in\widehat{R_i^n}\qquad\text{(由1°)}$$

$$\Leftrightarrow(\varphi(t_1),\ \cdots,\ \varphi(t_n))\in\overline{R_i^n}\quad\text{(见}\widehat{R_i^n}\text{的定义式(3))}$$

$$\Leftrightarrow|R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi)=1.$$

p是其他层次的公式时，若p是$\neg q$或$q\to r$，利用归纳假设及赋值计算对$\neg$，$\to$的保运算性可得结果。剩下要讨论p是$\forall x_i q$的情形。

先设$|\forall x_i q|(\varphi^*)=1$。对$\varphi$的任一$i$变通$\varphi'$，作$\varphi^*$的$i$变通$\varphi^{*\prime}$，使

(9) $$\varphi^{*\prime}(x_i)=[\varphi'(x_i)].$$

当$j\neq i$时，

$$\varphi^{*\prime}(x_j)=\varphi^*(x_j)$$

$$=[\varphi(x_j)]\qquad\text{(已知条件)}$$

$$=[\varphi'(x_j)],$$

这与（9）合起来，便知对$\varphi^{*\prime}$和φ'可使用归纳假设得

$$|q|(\varphi')=|q|(\varphi^{*\prime}),$$

由此及$|\forall x_i q|(\varphi^*)=1$便可得$|\forall x_i q|(\varphi)=1$。

反之，设$|\forall x_i q|(\varphi)=1$。对$\varphi^*$的任一$i$变通$\varphi^{*\prime}$，设$\varphi^{*\prime}(x_i)=[y'_i]$。作$\varphi$的$i$变通$\varphi'$，使$\varphi'(x_i)=y'_i$。于是有

$$\varphi^{*\prime}(x_j)=[\varphi'(x_j)],j=1,2,\cdots.$$

由归纳假设，

$$|q|(\varphi^{*\prime})=|q|(\varphi')=1,$$

这说明$|\forall x_i q|(\varphi^*)=1$。

总之，$|\forall x_i q|(\varphi^*)=|\forall x_i q|(\varphi)$。命题2°的归纳证明完成。有了命题2°，立即可证$M^*$是$\Gamma\cup E$的模型。设$p\in\Gamma\cup E$。因M是$\Gamma\cup E$的模型，故$p$在M中恒真。任取$\varphi^*\in\Phi_{M^*}$，设$\varphi^*(x_i)=[y_i]$，$i=1,2,\cdots$。这时可取$\varphi\in\Phi_M$使$\varphi(x_i)=y_i$，

$i=1,2,\cdots$.于是有

$$\varphi^*(x_i)=[\varphi(x_i)],i=1,2,\cdots.$$

这样便可利用命题2°得

$$|p|(\varphi^*)=|p|(\varphi)=1.$$

φ^* 是任取的，故 p 在 M^* 中恒真。

（三）M^*是 $\Gamma\cup E$ 的正规模型

等词≈（即R_1^2）在M中解释为$\backsim$（即$\overline{R_1^2}$），在M^*中解释为$\widehat{R_1^2}$。由定义式（3）可知

$$([y],[z])\in\widehat{R_1^2}\Leftrightarrow y\backsim z\Leftrightarrow[y]=[z].$$

这就是说，≈在M^*中解释为相等，即M^*是正规模型。**证毕。**

定理1指出，等词公理集E的任何无矛盾扩张一定有正规模型。另一值得注意的事实是：E的任何无矛盾扩张也一定有非正规模型（参见练习三十一题1）。

推论 1　若 p 在 $\Gamma\cup E$ 的任何正规模型中都恒真，则 p 就在 $\Gamma\cup E$ 的所有模型中都恒真（即$\Gamma\cup E\models p$）。

证　设M是 $\Gamma\cup E$ 的模型。按照定理1的证明构造出 $\Gamma\cup E$ 的正规模型 M^*。p 在 M^* 中恒真。要证 p 在M中也恒真。

任取 $\varphi\in\Phi_M$。由 φ 可作 $\varphi^*\in\Phi_{M^*}$，使

$$\varphi^*(x_i)=[\varphi(x_i)],i=1,2,\cdots.$$

由定理1证明中建立的命题2°知

$$|p|(\varphi)=|p|(\varphi^*)=1.$$

φ 是任取的，故 p 在M中恒真。**证毕。**

练　习　三　十　一

1. 设$E'\supseteq E$，M是E'的正规模型。给M增加一个新元素u^*，记$M^*=M\cup\{u^*\}$。任取$u_0\in M$。把M上的$\overline{f_i^n}$，$\overline{R_i^n}$扩张成M^*上的$\overline{f_i^n}^*$及$\overline{R_i^n}^*$，扩张时，u^*用M中的u_0作为替身。准确地

说，规定

$$\overline{f_i^n}^*(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)=\overline{f_i^n}(u_1,u_2,\cdots,u_n),$$

$$(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)\in\overline{R_i^n}^*\Leftrightarrow(u_1,\ u_2,\ \cdots,u_n)\in\overline{R_i^n},$$

其中

$$u_i=\begin{cases}u_i^*, & 若\ u_i^*\in M,\\ u_0, & 若\ u_i^*=u^*,\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

求证这样构成的解释域M^*是E'的非正规模型。

3.2 形式算术 K_N

形式算术K_N指的是一种特殊的带等词的谓词演算，它有一个个体常元——c_1，有三个函数词——f_1^1，f_1^2，f_2^2，有一个二元谓词$\approx$。

K_N有一个自然的解释域——自然数集$N=\{0,1,2,\cdots\}$。在N中c_1解释为0；f_1^1，f_1^2，f_2^2分别解释为一元后继函数，二元求和函数，二元乘积函数；等词$\approx$解释为N中的相等。当然，除了上面这个解释域，K_N还可以有其他的解释域。

由于N是我们心目中意想的解释域，往后我们把个体常元c_1写成$\overline{0}$，把$f_1^1(t)$，$f_1^2(t_1,t_2)$和$f_2^2(t_1,t_2)$分别写成t'，t_1+t_2，$t_1\times t_2$。注意个体常元$\overline{0}$解释为N中的0，但它不是0。同样，K_N中的$'$，$+$，$\times$也都与通常的自然数运算（后继，加$+$，乘$\times$）不同，它们在这里是形式算术的符号（函数词）。它们出现在K_N的公式里，一般不会引起混淆。

定义 1（**算术公理，Peano形式算术**）K_N**中所有的等词公理和所有以下形式的公式都叫做算术公理。**

(N1) $\neg(t'\approx\overline{0})$，

(N2) $t_1'\approx t_2'\rightarrow t_1\approx t_2$， (N3) $t+\overline{0}\approx t$,

(N4) $t_1+t_2'\approx(t_1+t_2)'$,

(N5) $t\times\overline{0}\approx\overline{0}$,

(N6) $t_1\times t_2'\approx t_1\times t_2+t_1$,

(N7) $p(\overline{0})\to(\forall x_i(p(x_i)\to p(x_i'))\to\forall x_i p(x_i))$,

其中 t,t_1,t_2 **是任意的项，**$p(x_i)$ **是任意的公式。**

所有算术公理的集记作 $\mathscr{N}$**。带有公理集** $\mathscr{N}$ **的** K_N **叫做 Peano 形式算术。**

注意，除了以上七种模式外，$\mathscr{N}$ 也把等词公理包括在内。就是说等词公理在这里也视为算术公理。算术公理也叫做 K_N 的**性质公理**，而 K_N 中原有的公理 (K1)—(K5) 则叫做**逻辑公理**。

在 (N1)—(N7) 这七种公理模式中，(N1) 和 (N2) 相应于 Peano 公理 3 和公理 4 (见 0.2)；(N3) 与 (N4) 相应于 Peano 算术中加法的归纳定义式；(N5) 与 (N6) 相应于乘法的归纳定义式；(N7) 就是形式归纳法原理。

在意想的解释域 N 中，所有的算术公理都是恒真的。如果原 Peano 算术公理系统本身是无矛盾的，那么有 N 作为 $\mathscr{N}$ 的模型，立即得知 $\mathscr{N}$ 是无矛盾的。但通常我们还是把 $\mathscr{N}$ 的无矛盾性作为一个假定提出。

后面把以下的闭项

$$\overline{0}',\ \overline{0}'',\ \cdots,\ \overline{0}^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{n\text{个}\prime}},\ \cdots$$

分别记作

$$\overline{1},\ \overline{2},\ \cdots,\ \overline{n},\ \cdots,$$

并把这些闭项叫做 K_N 的**数字**。

公式 $\neg(t_1\approx t_2)$ 在后面常记作 $t_1\not\approx t_2$。

在 $\mathscr{N}$ 的解释域 N 中，$\overline{m}$ 解释为 m。事实上，对任意的项解释 $\varphi\in\Phi_N$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(\ulcorner m \urcorner) &= \varphi(\ulcorner 0 \urcorner^{\overbrace{\prime\prime\cdots\prime}^{m\text{个}\prime}}) && (\ulcorner m \urcorner\text{的规定})\\
&= (\varphi(\ulcorner 0 \urcorner))^{\prime\prime\cdots\prime} && (\varphi\text{是同态})\\
&= 0^{\prime\prime\cdots\prime} && (\varphi(c_1)=0)\\
&= m.
\end{aligned}
$$

如果$\mathscr{N}\vdash p$，则把p叫做Peano形式算术的（形式）定理。下面建立一些将要用到的（形式）定理。

命题 1 $\mathscr{N}\vdash \ulcorner m \urcorner + \ulcorner n \urcorner \approx \ulcorner m+n \urcorner$.

证 对n归纳。

$n=0$时，$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner 0 \urcorner \approx \ulcorner m \urcorner$是（N3）型公理。

$n>0$时，以下公式从$\mathscr{N}$可证

（1）$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner' \approx (\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner)'$ （N4）

（2）$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner \approx \ulcorner m+n-1 \urcorner$ 归纳假设

（3）$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner \approx \ulcorner m+n-1 \urcorner \to (\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner)' \approx \ulcorner m+n-1 \urcorner'$ （E2）

（4）$(\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner)' \approx \ulcorner m+n-1 \urcorner'$ （2），（3），MP

（5）$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n-1 \urcorner' \approx \ulcorner m+n-1 \urcorner'$ （1），（4），等词性质

此即$\ulcorner m \urcorner + \ulcorner n \urcorner \approx \ulcorner m+n \urcorner$。**证毕**。

作为特例，有$\mathscr{N}\vdash \ulcorner 1 \urcorner + \ulcorner 1 \urcorner \approx \ulcorner 2 \urcorner$.

命题 2 $\mathscr{N}\vdash \ulcorner m \urcorner \times \ulcorner n \urcorner \approx \ulcorner m\times n \urcorner$.

证 对n归纳。

$n=0$时，$\ulcorner m \urcorner \times \ulcorner 0 \urcorner \approx \ulcorner 0 \urcorner$是（N5）型公理。

$n>0$时，以下公式从$\mathscr{N}$可证

（1）$\ulcorner m \urcorner \times \ulcorner n-1 \urcorner' \approx \ulcorner m \urcorner \times \ulcorner n-1 \urcorner + \ulcorner m \urcorner$ （N6）

（2）$\ulcorner m \urcorner \times \ulcorner n-1 \urcorner \approx \ulcorner m\times(n-1) \urcorner$ 归纳假设

（3） $\overline{m}\times\overline{n-1}'\approx\overline{m\times(n-1)}+\overline{m}$　　（1），（2），等项替换

（4） $\overline{m}\times\overline{n-1}'\approx\overline{m\times(n-1)+m}$　　（3），命题 1

此即$\overline{m}\times\overline{n}\approx\overline{m\times n}$。**证毕。**

命题 3　$\mathscr{N}\vdash\overline{0}+t\approx t$，**其中 t 为任意项。**（注意与（N3）的区别。）

证　下面是从$\mathscr{N}$的证明

（1） $\overline{0}+\overline{0}\approx\overline{0}$　　（N3）

（2） $(\overline{0}+x_i)'\approx\overline{0}+x_i'$　　（N4）

（3） $\overline{0}+x_i\approx x_i\to(\overline{0}+x_i)'\approx x_i'$　　（E2）

（4） $\overline{0}+x_i\approx x_i\to\overline{0}+x_i'\approx x_i'$　　（2），（3），等项替换

（5） $\forall x_i(\overline{0}+x_i\approx x_i\to\overline{0}+x_i'\approx x_i')$　　（4），Gen

（6） $\forall x_i(\overline{0}+x_i\approx x_i)$　　（1），（5），（N7），MP

（7） $\overline{0}+t\approx t$。　　（6），（K4），MP，**证毕。**

以上（6）在使用（N7）时，是以$\overline{0}+x_i\approx x_i$作为$p(x_i)$的。

命题 3 的证明中使用了一次 Gen 规则。但选择哪一个个体变元 x_i 作为 Gen 变元，与我们所作的证明是没有关系的。由于这里使用的 Gen 变元 x_i 可以任意地选择，而可供选择的个体变元又是足够多（有可数个），所以每当后面要用到命题 3 时，都可以不必考虑所使用的 Gen 可能会产生什么样的变元干扰，因为干扰总是可以用另选 Gen 变元的方式避开的。后面还会碰到类似的情况，但不再重复这一说明。

命题 4　$\mathscr{N}\vdash t_1'+t_2\approx(t_1+t_2)'$，**其中 t_1,t_2 是任意的项。**（注意与（N4）的区别。）

证　下面是从 $\mathscr{N}$ 的证明

(1) $t_1' + \overline{0} \approx t_1'$ (N3)

(2) $(t_1 + \overline{0})' \approx t_1'$ (N3), (E2)

(3) $t_1' + \overline{0} \approx (t_1 + \overline{0})'$ 由(1), (2)

(4) $t_1' + x_i \approx (t_1 + x_i)' \to (t_1' + x_i)' \approx (t_1 + x_i)''$ (E2)

(5) $(t_1' + x_i)' \approx t_1' + x_i'$ (N4)

(6) $(t_1 + x_i)'' \approx (t_1 + x_i')'$ (N4), (E2)

(7) $t_1' + x_i \approx (t_1 + x_i)' \to t_1' + x_i' \approx (t_1 + x_i')'$

由(4), (5), (6)

(8) $\forall x_i (t_1' + x_i \approx (t_1 + x_i)')$

(7), Gen, (3), (N7), MP

(9) $t_1' + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$ (8), (K4), MP, 证毕.

命题 5 **(加法交换律)** $\mathscr{N} \vdash t_1 + t_2 \approx t_2 + t_1$, 其中 t_1, t_2 是任意的项。

证 下面是从 $\mathscr{N}$ 的证明

(1) $\overline{0} + t_2 \approx t_2$ 命题 3

(2) $t_2 + \overline{0} \approx t_2$ (N3)

(3) $\overline{0} + t_2 \approx t_2 + \overline{0}$ 由(1), (2)

(4) $x_i + t_2 \approx t_2 + x_i \to (x_i + t_2)' \approx (t_2 + x_i)'$ (E2)

(5) $(x_i + t_2)' \approx x_i' + t_2$ 命题 4

(6) $(t_2 + x_i)' \approx t_2 + x_i'$ (N4)

(7) $x_i + t_2 \approx t_2 + x_i \to x_i' + t_2 \approx t_2 + x_i'$

由(4), (5), (6)

(8) $\forall x_i (x_i + t_2 \approx t_2 + x_i)$

(7), Gen, (3), (N7), MP

(9) $t_1 + t_2 \approx t_2 + t_1$ (8), (K4), MP, 证毕.

命题 6 **(加法结合律)** $\mathscr{N} \vdash (t_1 + t_2) + t_3 \approx t_1 + (t_2 + t_3)$, 其中 t_1, t_2, t_3 是任意的项。

证 下面是从 $\mathcal{N}$ 的证明

(1) $(t_1+t_2)+\overline{0}\approx t_1+t_2$ (N3)

(2) $t_1+(t_2+\overline{0})\approx t_1+t_2$ (N3), (E2)

(3) $(t_1+t_2)+\overline{0}\approx t_1+(t_2+\overline{0})$ 由(1), (2)

(4) $(t_1+t_2)+x_i\approx t_1+(t_2+x_i)$

$\to((t_1+t_2)+x_i)'\approx(t_1+(t_2+x_i))'$ (E2)

(5) $((t_1+t_2)+x_i)'\approx(t_1+t_2)+x_i'$ (N4)

(6) $(t_1+(t_2+x_i))'\approx t_1+(t_2+x_i')$ 两次 (N4)

(7) $(t_1+t_2)+x_i\approx t_1+(t_2+x_i)\to(t_1+t_2)+x_i'$

$\approx t_1+(t_2+x_i')$ 由(4),(5),(6)

(8) $\forall x_i((t_1+t_2)+x_i\approx t_1+(t_2+x_i))$ (3),(7),(N7)

(9) $(t_1+t_2)+t_3\approx t_1+(t_2+t_3)$

(8), (K4), MP, **证毕.**

命题 7 **(加法消去律)** $\mathcal{N}\vdash t_1+t_2\approx t_2\to t_1\approx\overline{0}$, **其中 t_1,t_2 是任意的项.**

证 下面是从 $\mathcal{N}$ 的证明

(1) $t_1+\overline{0}\approx t_1$ (N3)

(2) $t_1+\overline{0}\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$ 由 (1) 及 (E3)

(3) $t_1+x_i'\approx x_i'\to(t_1+x_i)'\approx x_i'$ (N4), (E3)

(4) $(t_1+x_i)'\approx x_i'\to t_1+x_i\approx x_i$ (N2)

(5) $t_1+x_i'\approx x_i'\to t_1+x_i\approx x_i$ (3), (4), HS

(6) $(t_1+x_i\approx x_i\to t_1\approx\overline{0})\to(t_1+x_i'\approx x_i'\to t_1\approx\overline{0})$

由 (5) 及永真式 $(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$

(7) $\forall x_i(t_1+x_i\approx x_i\to t_1\approx\overline{0})$ (2), (6), (N7)

(8) $t_1+t_2\approx t_2\to t_1\approx\overline{0}$ (7), (K4), MP, **证毕.**

命题 8 $\mathcal{N}\vdash t_1+t_2\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$, **其中 t_1,t_2 是任意的**

项。

证 下面是从 $\mathscr{N}$ 的证明

（1）$t_1+\overline{0}\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$ 命题 7

（2）$(t_1+x_i)'\not\approx\overline{0}$ (N1)

（3）$t_1+x_i'\not\approx\overline{0}$ 由（2），(N4)

（4）$t_1+x_i'\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$ 由（3）及永真式 $\neg q\to(q\to p)$

（5）$(t_1+x_i\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0})\to(t_1+x_i'\approx\overline{0})\to t_1\approx\overline{0}$

由（4）及 (K1) 型公理 $p\to(q\to p)$

（6）$\forall x_i(t_1+x_i\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0})$ （1），（5），(N7)

（7）$t_1+t_2\approx\overline{0}\to t_1\approx\overline{0}$ （6），(K4)，MP，**证毕。**

命题 9 $\mathscr{N}\vdash t_3+t_1\approx t_2\to(t_4+t_2\approx t_1\to t_1\approx t_2)$，**其中 t_1,t_2,t_3,t_4 是任意的项。**

证 以下是 $t_1\approx t_2$ 从

$$\mathscr{N}\cup\{t_3+t_1\approx t_2,\ t_4+t_2\approx t_1\}$$

的证明

（1）$t_3+t_1\approx t_2$ 假定

（2）$t_4+t_2\approx t_1$ 假定

（3）$t_3+(t_4+t_2)\approx t_2$ （1），（2），等项替换

（4）$(t_3+t_4)+t_2\approx t_2$ （3），结合律

（5）$t_3+t_4\approx\overline{0}$ （4），消去律

（6）$t_3\approx\overline{0}$ （5），命题 8

（7）$t_1\approx t_2$ 由（1），（6）

再用演绎定理便可。**证毕。**

命假 10 $\mathscr{N}\vdash\exists x_i(x_i+t_1\approx t_2)\to(\exists x_j(x_j+t_2\approx t_1)\to t_1\approx t_2$，**其中 t_1,t_2 皆不含 x_i,x_j。**

证 由命题 9 立即有（取 x_i 为 t_3，取 x_j 为 t_4）

$$\mathcal{N}\cup\{x_i+t_1\approx t_2,\ x_j+t_2\approx t_1\}\vdash t_1\approx t_2,$$

由此两次用 $\exists_2$ 规则（见 2.1.3 命题 4），再用演绎定理便得结果。**证毕**。

往后，公式 $\exists x_i(x_i+t_1\approx t_2)$（其中 t_1,t_2 不含有 x_i）常简写为 $t_1\leqslant t_2$，于是命题 10 可写成

$$\mathcal{N}\vdash t_1\leqslant t_2\to(t_2\leqslant t_1\to t_1\approx t_2)。$$

命题 11 $\mathcal{N}\vdash t\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\ulcorner 1\urcorner\leqslant t$。

证 下面是从 $\mathcal{N}$ 的证明

（1）$\ulcorner 0\urcorner\approx\ulcorner 0\urcorner$　　(E1)

（2）$\ulcorner 0\urcorner\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx\ulcorner 0\urcorner)$　由(1)及永真式 $q\to(\neg q\to p)$

（3）$(x_i+\ulcorner 0\urcorner)'\approx x_i'$　　(N3)，(E2)

（4）$(x_i+\ulcorner 0\urcorner)'\approx x_i+\ulcorner 1\urcorner$　　(N4)

（5）$x_i+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i'$　　（3），（4）

（6）$x_i+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i'\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i')$　　$\exists_1$ 规则

（7）$\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i')$　　（5），（6），MP

（8）$x_i'\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i')$　由（7）及公理 $p\to(q\to p)$

（9）$(x_i\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i))$

$\to(x_i'\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i'))$

由（8）及公理 $p\to(q\to p)$

（10）$\forall x_i(x_i\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx x_i))$　　（2），（9），(N7)

（11）$t\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\exists x_j(x_j+\ulcorner 1\urcorner\approx t)$　　(10)，(K4)

此即 $t\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\ulcorner 1\urcorner\leqslant t$。**证毕**。

上面证明中所用的 x_i,x_j 可以选择为不在 t 中出现的变元，且 $x_i\neq x_j$。

步骤（6）使用了一次 $\exists_I$ 规则（见2.1.3命题2）：

$$\vdash p(t)\to\exists x_i p(x_i),$$

其中取 $p(x_i)$ 为 $x_i+\overline{1}=x_i'$，取 t 为 x_i。

命题 12 （**命题11的推广**）$n>0$ 时，有

$$\mathscr{N}\vdash(t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n-1}\to\overline{n}\leqslant t.$$

证 对 n 归纳。

$n=1$ 时，同命题11。

现假设结论对 n 成立，要证对 $n+1$ 也成立：

$$\mathscr{N}\vdash(t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n})\to\overline{n+1}\leqslant t.$$

为此先证明下面的命题*。

(*) $\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{1}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n}, x_k+\overline{1}\approx t\}\vdash\exists x_j(x_j+\overline{n+1}\approx t)$，其中 x_k,x_j 不在 t 中出现，且 $x_k\neq x_j$。

以下是命题*所需要的证明

(1) $(x_k+\overline{0})'\approx x_k'$ (N3)，(E2)

(2) $x_k+\overline{1}\approx x_k'$ 由(1)，(N4)

(3) $x_k+\overline{1}\approx t$ 假定

(4) $x_k'\approx t$ 由(2)，(3)

(5) $x_k'\not\approx\overline{1}\wedge\cdots\wedge x_k'\not\approx\overline{n}$ (4)，假定

(6) $x_k'\not\approx\overline{i}'$, $i=0,\cdots,n-1$ 由(5)

(7) $x_k\approx\overline{i}\to x_k'\approx\overline{i}'$, $i=0,\cdots,n-1$ (E2)

(8) $x_k\not\approx\overline{i}$, $i=0,\cdots,n-1$

(6)，(7)，$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$

(9) $x_k\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge x_k\not\approx\overline{n-1}$ 由(8)

(10) $\overline{n}\leqslant x_k$ 即 $\exists x_j(x_j+\overline{n})\approx x_k$ (9)，归纳假设

(11) $x_j+\overline{n}\approx x_k\to(x_j+\overline{n})'\approx x_k'$ (E2)

(12) $\forall x_j(x_j+\overline{n}\approx x_k\to x_j+\overline{n+1}\approx x_k')$ (11), (N4), Gen

(13) $\exists x_j(x_j+\overline{n+1}\approx x_k')$ (12), (10), 2.1.3 命题 3

(14) $\exists x_j(x_j+\overline{n+1}\approx t)$ (4), (13)

这就证明了命题 *。由命题 * 用 $\exists_2$ 规则得

$$\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{1}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n},\ \exists x_k(x_k+\overline{1}\approx t)\}$$
$$\vdash\exists x_j(x_j+\overline{n+1}\approx t);$$

由命题 11，又有

$$\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{0}\}\vdash\exists x_k(x_k+\overline{1}\approx t).$$

二者结合，便得

$$\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{0}\wedge t\not\approx\overline{1}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n}\}\vdash\exists x_j\ (x_j+\overline{n+1}\approx t).$$

归纳过程完成。**证毕**。

命题 13 $\mathscr{N}\vdash t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n}\to\neg(t\leqslant\overline{n})$.

证 以下公式从 $\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n},x_j+t\approx\overline{n}\}$可证

(1) $(x_j+t)'\approx\overline{n}'$ 由假定，(E2)

(2) $x_j'+t\approx\overline{n+1}$ (1)，命题 4

(3) $\exists x_k(x_k+t\approx\overline{n+1})$ (2)，$\exists_1$ 规则

(4) $\exists x_i(x_i+\overline{n+1}\approx t)$ 由命题 12

(5) $t\approx\overline{n+1}$ (3)，(4)，命题 10

(6) $x_j'+t\approx t$ (2)，(5)

(7) $x_j'\approx\overline{0}$ (6)，命题 7

(8) $x_j'\not\approx\overline{0}$ (N1)

上面的 x_j,x_k,x_i 取为三个不同的变元，且都不在 t 中出现。由（7），（8）用归谬律得

$$\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n}\}\vdash\neg(x_j+t\approx\overline{n}).$$

使用 Gen 规则及 2.1.4 命题 5-2°（量词与否定词交换次序），便又得

$$\mathscr{N}\cup\{t\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge t\not\approx\overline{n}\}\vdash\neg\exists x_j\,(x_j+t\approx\overline{n}).$$

再用演绎定理即可。**证毕。**

命题 14　设公式 $p(x_i)$ **中只含一个自由变元** x_i**，则有**

$$\mathscr{N}\vdash(p(\overline{0})\wedge\cdots\wedge p(\overline{n}))\rightarrow(x_i\leqslant\overline{n}\rightarrow p(x_i)).$$

证　利用演绎定理和换位律，只用证

$$\mathscr{N}\cup\{p(\overline{0})\wedge\cdots\wedge p(\overline{n}),\ \neg p(x_i)\}\vdash\neg(x_i\leqslant\overline{n}).$$

以下是所需要的证明

(1) $x_i\approx\overline{k}\rightarrow(p(\overline{k})\rightarrow p(x_i))$, $k=0,\cdots,n$　　等项替换

(2) $p(\overline{k})\rightarrow(\neg p(x_i)\rightarrow x_i\not\approx\overline{k})$, $k=0,\cdots,n$

　　由（1）及永真式 $(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(q\rightarrow(\neg r\rightarrow\neg p))$

(3) $p(\overline{k})$, $k=0,\cdots,n$　　由假定

(4) $\neg p(x_i)$　　假定

(5) $x_i\not\approx\overline{k}$, $k=0,\cdots,n$　　(2), (3), (4), MP

(6) $x_i\not\approx\overline{0}\wedge\cdots\wedge x_i\not\approx\overline{n}$　　由（5）

(7) $\neg(x_i\leqslant\overline{n})$　　由（6）及命题 13。**证毕。**

命题 15　若 $n>0$**，则**

$$\mathscr{N}\vdash\neg(x_i\leqslant\overline{n})\rightarrow\overline{n}\leqslant x_i.$$

证　只用证

$$\mathscr{N}\cup\{\neg\exists x_j(x_j+x_i\approx\overline{n})\}\vdash\exists x_j(x_j+\overline{n}\approx x_i),$$

其中选用 $x_j\neq x_i$。

(1) $\neg\exists x_j(x_j+x_i\approx\overline{n})$　　假定

(2) $\forall x_j\neg(x_j+x_i\approx\overline{n})$　　由（1）及 2.1.4 命题 5-2°

(3) $\forall x_j(x_j+x_i\not\approx\overline{n})\rightarrow\overline{n-k}+x_i\not\approx\overline{n}$, $k=0,\cdots,n-1$ (K4)

(4) $\overline{n-k}+x_i \not\approx \overline{n}$, $k=0,\cdots,n-1$　　(2)，(3)，MP

(5) $\overline{n} \approx \overline{n-k}+\overline{k}$　　命题1

(6) $x_i \approx \overline{k} \to \overline{n-k}+x_i \approx \overline{n-k}+\overline{k}$, $k=0,\cdots,n-1$　　(E2)

(7) $\overline{n-k}+x_i \not\approx \overline{n-k}+\overline{k}$　　由(4)，(5)

(8) $x_i \not\approx \overline{k}$, $k=0,\cdots,n-1$　　由(6)，(7)及换位律

(9) $x_i \not\approx \overline{0} \wedge \cdots \wedge x_i \not\approx \overline{n-1}$　　由(8)

(10) $\exists x_j(x_j+\overline{n} \approx x_j)$　　由(9)及命题12。**证毕。**

命题 16　对任意自然数 m 和 n，

(i) $m=n$ 时，$\mathscr{N} \vdash \overline{m} \approx \overline{n}$；

(ii) $m \neq n$ 时，$\mathscr{N} \vdash \overline{m} \not\approx \overline{n}$。

证　(i) $\overline{m} \approx \overline{m}$ 是(E1)型公理。

(ii) $m \neq n$ 时，不妨设 $m=n+k$，$k>0$。

于是以下公式从 $\mathscr{N}$ 可证

(1) $\overline{n+k} \approx \overline{k}+\overline{n}$　　由命题1

(2) $\overline{n+k} \approx \overline{n} \to \overline{k}+\overline{n} \approx \overline{n}$　　由(1)及(E3)

(3) $\overline{k}+\overline{n} \approx \overline{n} \to \overline{k} \approx \overline{0}$　　命题7

(4) $\overline{n+k} \approx \overline{n} \to \overline{k} \approx \overline{0}$　　(2)，(3)，HS

(5) $\overline{k} \not\approx \overline{0} \to \overline{n+k} \not\approx \overline{n}$　　由(4)及换位律

(6) $\overline{k} \not\approx \overline{0}$　　(N1)(注意 $k>0$，$\overline{k}=\overline{k-1}'$)

(7) $\overline{n+k} \not\approx \overline{n}$　　(5)，(6)，MP

此即 $\overline{m} \not\approx \overline{n}$。**证毕。**

通常的数学证明大量地可翻译成形式证明。但建立形式系统的目的，不是用形式证明去完全代替通常的数学证明。建立形式

算术的主要目的之一，是探讨关于自然数的性质我们究竟能精确而机械地抓住些什么。

练　习　三　十　二

1. 证明当 $n=2k$ 时，$\mathscr{N}\vdash\exists x_i(x_i\times\overline{2}\approx\overline{n})$。

2. 证明　$\mathscr{N}\vdash t\approx\overline{n}+\overline{3}\rightarrow t\approx\overline{n+3}$。

3. 证明

　　(i) $\mathscr{N}\vdash t+\overline{1}\approx t'$，

　　(ii) $\mathscr{N}\vdash t\times\overline{2}\approx t+t$。

4. 证明　$\mathscr{N}\vdash t_1'+t_2\not\approx t_1$。

5. 在 K_N 中把个体常元 由一个 （即 $c_1=\overline{0}$）增加为一列

$$c_0, c_1, \cdots,$$

得 K_N^+。$\mathscr{N}$ 在增加如下公理后记为 $\mathscr{N}^+$：

$$c_i'\approx c_{i+1},\quad c_0\not\approx c_i\quad (i>0)。$$

求证 $\mathscr{N}^+$ 也是无矛盾的，且有不同于 N 的正规模型。

3.3　可 表 示 性

我们以自然数集 N 为意想的解释域，建立了形式算 求 K_N。现在来深入研究 K_N 和 N 之间的关系。

3.3.1　可表示函数和关系

后面如不说明，“k 元函数”皆指 k 元数论函数 f：$N^k\rightarrow N$；“R 是 k 元关系”，指 $R\subseteq N^k$。

定义 1　**（可表示函数）**　**k 元函数 f 在 K_N 中可表示，是指存在着含 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$，它具有以下性质：对于任定对 $p(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$ 中的 x_{k+1} 自由的项 t**

以及任意自然数 $n_1,\cdots,n_k,n_{k+1}\in\mathrm{N}$,

(i) $f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}\ \Rightarrow\ \mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$,

(ii) $f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}\ \Rightarrow\ \mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$,

(iii) $\mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},t)\to t\approx\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}$.

这时还说 f **用** $p(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_k,\mathrm{x}_{k+1})$ **可表示。**

下面证明，作为可表示函数的定义，定义1中的性质（ii）是多余的。定义中加上它，是为了应用方便。

命题 1 k **元函数** f **用公式** $p(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_k,\mathrm{x}_{k+1})$ **在** $\mathrm{K}_\mathscr{N}$ **中可表示的充要条件是：对任意** $n_1,\cdots,n_k$ **及项** t （t **对** $p(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_{k+1})$ **中** x_{k+1} **自由**），

1° $\mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{f(n_1,\cdots,n_k)})$,

2° $\mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},t)\to t\approx\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}$.

证 要证的是由这里的条件1°,2°可以推出定义1中的性质（ii）。事实上，在条件1°,2°成立且 $f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}$ 的假定之下，以下公式从 $\mathscr{N}$ 可证

(1)	$p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{f(n_1,\cdots,n_k)})$	条件1°
(2)	$p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})\to\overline{n_{k+1}}\approx\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}$	条件2°
(3)	$\overline{n_{k+1}}\not\approx\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}\to\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$	(2)，换位律
(4)	$\overline{n_{k+1}}\not\approx\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}$	3.2 命题16（ii）
(5)	$\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$	(3)，(4)，MP。**证毕。**

命题1也可作为可表示函数的定义（等价于定义1）。但若要讨论一个已知的可表示函数 f 的性质，从定义1出发比较方便（f 具有定义1中的性质（i），（ii），（iii））；而若要证明一个函数的可表示性，则从命题1出发更方便（证明它满足命题1的条件1°与2°便可）。

首先考虑一个问题：**是否每个** $\mathrm{K}_\mathscr{N}$ **中的公式都一定可用来表**

示一个数论函数？

回答是否定的。例如，$x_1 \approx x_1 \wedge x_2 \not\approx x_2$ 这个公式便不可能用来表示任何一个一元函数，因为定义1的性质（i）所要求的

$$\mathscr{N} \vdash \ulcorner n_1 \urcorner \approx \ulcorner n_1 \urcorner \wedge \ulcorner n_2 \urcorner \not\approx \ulcorner n_2 \urcorner$$

对任何 $n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ 都不会成立。

第二个问题是：**同一公式 $p(x_1, \cdots, x_{k+1})$ 是否可用来表示两个不同的 k 元函数？**

回答也是否定的。若 f_1 和 f_2 是两个不同的 k 元函数，则有 $n_1, \cdots, n_k \in \mathrm{N}$ 使

（1）$$f_2(n_1, \cdots, n_k) \neq f_1(n_1, \cdots, n_k).$$

设 f_1 用 $p(x_1, \cdots, x_{k+1})$ 可表示，按定义1中性质（i），有

（2）$$\mathscr{N} \vdash p(\ulcorner n_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner n_k \urcorner, \ulcorner f_1(n_1, \cdots, n_k) \urcorner).$$

又假设 f_2 也是用 $p(x_1, \cdots, x_{k+1})$ 可表示，那么按定义1的性质（ii）（对 f_2 而言，注意（1）式），有

（3）$$\mathscr{N} \vdash \neg p(\ulcorner n_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner n_k \urcorner, \ulcorner f_1(n_1, \cdots, n_k) \urcorner).$$

（2）与（3）导致了 $\mathscr{N}$ 是有矛盾的。

关于数论函数与 $\mathrm{K_N}$ 公式之间联系的第三个问题是：**是否每个数论函数都可用 $\mathrm{K_N}$ 的公式来表示？** 回答还是否定的。事实上，所有数论函数的集是不可数集（参见0.3），而 $\mathrm{K_N}$ 中所有公式构成可数集，其中已经知道有的公式还不能用来表示任何函数，又知道能用来表示函数的公式只能各自唯一地表示某一个函数。

以上的讨论说明，大量的数论函数在 $\mathrm{K_N}$ 中是不可表示的。

这个事实并不使我们感到很不安。人类至今积累的经验表明，凡是“算法可计算的”数论函数都是在 $\mathrm{K_N}$ 中可表示的。后面我们将要深入地讨论这个问题。

定义 2 （**投影函数**） **k 元投影函数 p_i^k 是指由下式规定的函数**
$$\mathrm{p}_i^k(n_1, \cdots, n_k) = n_i, \quad i = 1, \cdots, k.$$

命题 2　函数 $+$，$\times$ 和 p_i^k 在 K_N 中是可表示的。

证（1）二元和函数 $+$ 是用公式 $x_1+x_2\approx x_3$ 表示的。事实上，由 3.2 命题 1，首先有

$$\mathscr{N}\vdash \ulcorner n_1\urcorner+\ulcorner n_2\urcorner\approx\ulcorner n_1+n_2\urcorner,$$

又由此用等词性质可得

$$\mathscr{N}\vdash \ulcorner n_1\urcorner+\ulcorner n_2\urcorner\approx t\to t\approx\ulcorner n_1+n_2\urcorner,$$

这说明命题 1 中的条件 1° 与 2° 都得到满足。

（2）二元乘积函数 $\times$ 是用公式 $x_1\times x_2\approx x_3$ 表示的，理由相同，只是要改用 3.2 命题 2。

（3）p_i^k 是用公式 $x_1\approx x_1\wedge\cdots\wedge x_k\approx x_k\wedge x_{k+1}\approx x_i$ 表示的。事实上，因 $p_i^k(n_1,\cdots,n_k)=n_i$，用 3.2 命题 16（i）及等词性质可得

1°　$\mathscr{N}\vdash\ulcorner n_1\urcorner\approx\ulcorner n_1\urcorner\wedge\cdots\wedge\ulcorner n_k\urcorner\approx\ulcorner n_k\urcorner\wedge\ulcorner p_i^k(n_1,\cdots,n_k)\urcorner\approx\ulcorner n_i\urcorner,$

2°　$\mathscr{N}\vdash\ulcorner n_1\urcorner\approx\ulcorner n_1\urcorner\wedge\cdots\wedge\ulcorner n_k\urcorner\approx\ulcorner n_k\urcorner\wedge t\approx\ulcorner n_i\urcorner\to t$

$$\approx\ulcorner p_i^k(n_1,\cdots,n_k)\urcorner,$$

于是命题 1 的条件 1°,2° 得到满足。**证毕。**

定义 3（可表示关系）N 上的 k 元关系 R 在 K_N 中可表示，是指存在着含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$，它具有以下性质：对任意 $n_1,\cdots,n_k\in N$，

（i）　$(n_1,\cdots,n_k)\in R\ \Rightarrow\ \mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner),$

（ii）　$(n_1,\cdots,n_k)\notin R\ \Rightarrow\ \mathscr{N}\vdash\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner).$

这时我们说 R 用公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 在 K_N 中可表示。

现在考察：是否每个 K_N 的公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 都一定可用来表示某个 k 元关系？

这个问题的回答与 $\mathscr{N}$ 的“完备性”有关。如果存在 $n_1,\cdots,n_k\in N$，使

$$\mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\ \text{和}\ \mathscr{N}\vdash\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)$$

都不成立，那么我们说闭式 $p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 是一个从 $\mathscr{N}$ 不可判定的公式，并且说 $\mathscr{N}$ 不完备。这时公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 便不能用来表示任何一个关系。理由很简单：如果 k 元关系 R 用它可表示，那么依据定义 3，$\mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 与 $\mathscr{N}\vdash\neg p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 二者必居其一（这是因为 $(n_1,\cdots,n_k)\in R$ 与 $(n_1,\cdots,n_k)\notin R$ 二者必居其一），于是闭式 $p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 就不能是不可判定公式。

相反，如果 $\mathscr{N}$ 是完备的，那么任何含 k 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 都一定表示了某个 k 元关系，因为这时对任意 $n_1,\cdots,n_k\in\mathrm{N}$，$\mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 与 $\mathscr{N}\vdash\neg p(\ulcorner n_1 \urcorner,\cdots,\ulcorner n_k \urcorner)$ 二者必居其一。

算术公理集 $\mathscr{N}$ 是否完备，即是否存在从 $\mathscr{N}$ 不可判定的闭式，这是我们下面要讨论的中心课题。“可表示关系”的定义正是服务于这个中心课题而建立的。

例 1 二元关系“相等”在 K_N 中用公式 $x_1\approx x_2$ 可表示。事实上，由 3.2 命题 16，我们有

$$n_1=n_2 \Rightarrow \mathscr{N}\vdash \ulcorner n_1 \urcorner\approx\ulcorner n_2 \urcorner,$$

$$n_1\neq n_2 \Rightarrow \mathscr{N}\vdash \ulcorner n_1 \urcorner\not\approx\ulcorner n_2 \urcorner.$$

下面的命题 3 指出，每个可表示的关系都伴随着一个可表示函数——该关系的特征函数。这样，对可表示关系的研究联系着对可表示函数的研究。

首先回忆特征函数的定义。k 元关系 $R(\subseteq\mathrm{N}^k)$ 的特征函数 C_R：$\mathrm{N}^k\to Z_2$ 是用下式定义的：

$$C_R(n_1,\cdots,n_k)=\begin{cases}1, & (n_1,\cdots,n_k)\in R;\\ 0, & (n_1,\cdots,n_k)\notin R.\end{cases}$$

命题 3 关系 R 可表示，当且仅当它的特征函数 C_R 可表示.

证 先设 R 用公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 可表示。我们来证明，特征函数 C_R 用下面的公式可表示：

$$(p(x_1,\cdots,x_k)\wedge x_{k+1}\approx\overline{1})\vee(\neg p(x_1,\cdots,x_k)\wedge x_{k+1}\approx\overline{0}),$$

也就是要证明此公式和 C_R 满足命题 1 中的 条件 1° 和 2°。现分别验证如下：

1° 要证明对任意 $n_1,\cdots,n_k\in\mathrm{N}$，总有

$$(1)\qquad \mathscr{N}\vdash(p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}\approx\overline{1})$$

$$\vee(\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}\approx\overline{0}).$$

事实上，当 $(n_1,\cdots,n_k)\in R$ 时，因定义 3 的性质 (i) 成立及 $C_R(n_1,\cdots,n_k)=1$，有

$$\mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}\approx\overline{1},$$

于是 (1) 成立；而当 $(n_1,\cdots,n_k)\notin R$ 时，因定义 3 的性质 (ii) 成立及 $C_R(n_1,\cdots,n_k)=0$，有

$$\mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}\approx\overline{0},$$

此时（1）也成立。这里两次用到 3.2 命题 16(i)。

2° 要证明

$$\mathscr{N}\cup\{(p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{1})\vee(\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{0})\}$$

$$\vdash t\approx\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}.$$

当 $(n_1,\cdots,n_k)\in R$ 时（此时 $C_R(n_1,\cdots,n_k)=1$），有如下证明

（1）$p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})$ 定义 3 (i)

（2）$\neg(\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{0})$

由（1）及永真式 $p\to\neg(\neg p\wedge q)$

（3）$(p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{1})\vee(\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{0})$ 假定

（4）$p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\wedge t\approx\overline{1}$

由（2），（3）及永真式 $(p\vee q)\to(\neg q\to p)$

（5）$t\approx\overline{1}$ 即 $t\approx\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}$ 由(4)及永真式 $(p\wedge q)\to q$

当 $(n_1,\cdots,n_k)\notin R$ 时（此时 $C_R(n_1,\cdots,n_k)=0$），有如下证明

（1）$\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)$ 定义 3 (ii)

（2）$\neg(p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\wedge t\approx\ulcorner 1\urcorner)$

由（1）及永真式 $\neg p\to\neg(p\wedge q)$

（3）$(p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\wedge t\approx\ulcorner 1\urcorner)\vee(\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\wedge t\approx\ulcorner 0\urcorner)$ 假定

（4）$\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\wedge t\approx\ulcorner 0\urcorner$

由（2），（3）及永真式 $p\vee q\to(\neg p\to q)$

（5）$t\approx\ulcorner 0\urcorner$ 即 $t\approx\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}$ 由（4）

至此，由命题 1 知 C_R 是可表示的。

相反的方向，设 C_R 用公式 $p(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$ 可表示，则可证明 R 用 $p(x_1,\cdots,x_k,\ulcorner 1\urcorner)$ 可表示。事实上，

(i) $(n_1,\cdots,n_k)\in R\Rightarrow C_R(n_1,\cdots,n_k)=1$

$\Rightarrow\mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner 1\urcorner)$，

这里对 C_R 用了定义 1 (i)；

(ii) $(n_1,\cdots,n_k)\notin R$ 时，以下公式从 $\mathscr{N}$ 可证

（1）$p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner 1\urcorner)\to\ulcorner 1\urcorner\approx\overline{C_R(n_1,\cdots,n_k)}$

对 C_R 用定义 1 (iii)

（2）$p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner 1\urcorner)\to\ulcorner 1\urcorner\approx\ulcorner 0\urcorner$ 由（1）及 $C_R(n_1,\cdots,n_k)=0$

（3）$\ulcorner 1\urcorner\not\approx\ulcorner 0\urcorner\to\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner 1\urcorner)$ （2），换位律

（4）$\ulcorner 1\urcorner\not\approx\ulcorner 0\urcorner$ (N1)

（5）$\neg p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner 1\urcorner)$ （3），（4），MP。**证毕。**

命题 4 二元关系“$\leqslant$”是可表示关系，从而它的特征函数 $C_{\leqslant}$ 是可表示函数。

证 二元关系“$\leqslant$”用公式 $\exists x_3(x_3+x_1\approx x_2)$ 可表示。对

此要验证定义 3 中的条件 (i)，(ii) 成立。

(i) 验证 $n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow \mathscr{N} \vdash \exists x_3 (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2})$。

事实上，当 $n_1 \leqslant n_2$ 时，有

$$\mathscr{N} \vdash \overline{n_2 - n_1} + \overline{n_1} \approx \overline{n_2}, \qquad (3.2\text{ 命题 }1)$$

$$\mathscr{N} \vdash \overline{n_2 - n_1} + \overline{n_1} \approx \overline{n_2} \to \exists x_3 (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2})。\qquad (\exists_1\text{ 规则})$$

(ii) 验证 $n_1 > n_2 \Rightarrow \mathscr{N} \vdash \neg \exists x_3 (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2})$。

事实上，当 $n_1 > n_2$ 时，设 $n_1 = n_2 + k$，$k > 0$，这时以下公式从 $\mathscr{N} \cup \{x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2}\}$ 可证

(1)	$x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2}$	假定
(2)	$\overline{n_1} \approx \overline{k} + \overline{n_2}$	3.2 命题 1
(3)	$x_3 + (\overline{k} + \overline{n_2}) \approx \overline{n_2}$	(1)，(2) 等项替换
(4)	$(\overline{k} + x_3) + \overline{n_2} \approx \overline{n_2}$	(3)，结合律，交换律
(5)	$\overline{k} + x_3 \approx \overline{0}$	(4)，3.2 命题 7
(6)	$\overline{k} \approx \overline{0}$ 即 $\overline{k-1}' \approx \overline{0}$	(5)，3.2命题 8
(7)	$\overline{k-1}' \not\approx \overline{0}$	(N1)

由 (6)，(7) 用归谬律得

$$\mathscr{N} \vdash \neg (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2}),$$

$$\mathscr{N} \vdash \forall x_3 \neg (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2}), \qquad (\mathrm{Gen})$$

$$\mathscr{N} \vdash \neg \exists x_3 (x_3 + \overline{n_1} \approx \overline{n_2})。$$

证毕。

因为同一个公式不能用来表示两个不同的关系（证明留作练习），所以大量的关系是不可表示的：K_N 中所有的公式构成可数集，而自然数集 N 上所有关系的集构成不可数集。（参见 0.3）。

练 习 三 十 三

1．证明一元零函数 z 和后继函数 s 是可表示的（$z(n) = 0$，$s(n) = n+1$）。

2．证明 K_N 中的同一个公式不能用来表示两个不同的关系。

3．若把定义 3 中的性质（i）和（ii）换成一条：

$$(n_1,\cdots,n_k)\in R \Leftrightarrow \mathscr{N}\vdash p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner),$$

得到的是不是等价的定义？为什么？

4．设 k 元关系 R 用 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 可表示，C_R 为 R 的特征函数。试证明

$$C_R(n_1,\cdots,n_k) = \{p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner)\}_N.$$

3.3.2 函数的复合和 μ 算子保持可表示性

这里要建立两个关于数论函数和 K_N 中公式之间关系的更深入的结果，它们的建立是证明递归函数在 K_N 中可表示的重要步骤。

为了书写简短，把 $n_1,\cdots,n_k$ 简写成 α；把 $\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner$ 简写成 $\ulcorner\alpha\urcorner$。

定理 1　函数的复合保持可表示性．具体地说，设 j 元函数 g 和 j 个 k 元函数 $h_1,\cdots,h_j$ 都是可表示的，那么如下定义的 k 元函数 f 也是可表示的：

$$f(n_1,\cdots,n_k) = g(h_1(n_1,\cdots,n_k),\cdots,h_j(n_1,\cdots,n_k)),$$

此式简写为

$$f(\alpha) = g(h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha)).$$

证　设 g，$h_1,\cdots,h_j$ 分别用公式

$$g(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1}),\ r_1(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}),$$
$$\cdots,\ r_j(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$$

表示。现在来证明 k 元函数 f 用下面的公式可表示：

$$\exists x_{m_1}\cdots\exists x_{m_j}(r_1(x_1,\cdots,x_k,x_{m_1})\wedge\cdots$$
$$\wedge r_j(x_1,\cdots,x_k,x_{m_j})\wedge q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},x_{j+1})),$$

其中 $x_{m_1},\cdots,x_{m_j}$ 是 j 个不在 $q(x_1,\cdots,x_{j+1})$, $r_1(x_1,\cdots,x_{k+1})$, $\cdots$, $r_j(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 中出现的变元。

为此，按照 3.3.1 命题 1，要证明以下两点：

$$1^\circ\quad \mathscr{N}\vdash\exists x_{m_1}\cdots\exists x_{m_j}(r_1(\overline{\alpha},x_{m_1})\wedge\cdots\wedge r_j(\overline{\alpha},x_{m_j})$$
$$\wedge q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},\overline{f(\alpha)})),$$

$$2^\circ\quad \mathscr{N}\vdash\exists x_{m_1}\cdots\exists x_{m_j}(r_1(\overline{\alpha},x_{m_1})\wedge\cdots\wedge r_j(\overline{\alpha},x_{m_j})$$
$$\wedge q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},t))\rightarrow t\approx\overline{f(\alpha)}.$$

先证 1°。因 $h_1,\cdots,h_j$ 分别用 $r_1(x_1,\cdots,x_{k+1}),\cdots,r_j(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 表示，故由 3.3.1 命题 1 中性质 1° 知，对任意 $n_1,\cdots,n_k\in\mathrm{N}$，有

(1) $\mathscr{N}\vdash r_1(\overline{\alpha},\overline{h_1(\alpha)}),\cdots,N\vdash r_j(\overline{\alpha},\overline{h_j(\alpha)})$。

因 g 用 $q(x_1,\cdots,x_{j+1})$ 表示，故对 $h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha)$ 这 j 个自然数，有

(2) $\mathscr{N}\vdash q(\overline{h_1(\alpha)},\cdots,\overline{h_j(\alpha)},\ \overline{g(h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha))})$。

注意（2）中的 $g(h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha))$ 就是 $f(\alpha)$，由（1），（2）立即得

$$\mathscr{N}\vdash r_1(\overline{\alpha},\overline{h_1(\alpha)})\wedge\cdots\wedge r_j(\overline{\alpha},\overline{h_j(\alpha)})$$
$$\wedge q(\overline{h_1(\alpha)},\cdots,\overline{h_j(\alpha)},\overline{f(\alpha)}),$$

由此 j 次应用 $\exists_1$ 规则便证明了 1°。

再证 2°。对 $h_1,\cdots,h_j$ 用 3.3.1 命题 1 中性质 2°，便可得

(3) $\mathscr{N}\vdash r_1(\overline{\alpha},x_{m_1})\rightarrow x_{m_1}\approx\overline{h_1(\alpha)}$,

……

$(j+2)$ $\mathscr{N}\vdash r_j(\overline{\alpha},x_{m_j})\rightarrow x_{m_j}\approx\overline{h_j(\alpha)}$.

于是以下公式从

$$\mathscr{N}\cup\{r_1(\overleftharpoon{\alpha},x_{m_1})\wedge\cdots\wedge r_j(\overleftharpoon{\alpha},x_{m_j})\wedge q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},t)\}$$

可证

$(j+3)$	$x_{m_1}\approx\overline{h_1(\alpha)}$	(3)，假定
	……	
$(2j+2)$	$x_{m_j}\approx\overline{h_j(\alpha)}$	$(j+2)$，假定
$(2j+3)$	$q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},t)$	假定
$(2j+4)$	$q(\overline{h_1(\alpha)},\cdots,\overline{h_j(\alpha)},t)$	$(2j+3)$，等项替换
$(2j+5)$	$q(\overline{h_1(\alpha)},\cdots,\overline{h_j(\alpha)},t)\to t\approx\overline{g(h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha))}$	对 g 用 3.3.1 命题 1 中性质 2°
$(2j+6)$	$t\approx\overline{g(h_1(\alpha),\cdots,h_j(\alpha))}$	$(2j+4)$，$(2j+5)$，MP

此即 $t\approx\overline{f(\alpha)}$。于是我们证明了

$$\mathscr{N}\cup\{r_1(\overleftharpoon{\alpha},x_{m_1})\wedge\cdots\wedge r_j(\overleftharpoon{\alpha},x_{m_j})$$
$$\wedge q(x_{m_1},\cdots,x_{m_j},t)\}\vdash t\approx\overline{f(\alpha)},$$

最后，j 次应用 $\exists_1$ 规则便证明了 2°。**证毕。**

有了定理 1，我们就能从已知的可表示函数出发用复合的方式得到更多新的可表示函数。

定义 1 （**最小数算子，即 μ 算子**）**设 $k+1$ 元函数 g 满足"根存在性条件"：对任意 $n_1,\cdots,n_k$ 都存在 x 使 $g(n_1,\cdots,n_k,x)=0$。现用下式来定义 k 元函数 f：**

$$f(n_1,\cdots,n_k)=\min\{x\mid g(n_1,\cdots,n_k,x)=0\},$$

即把 $f(n_1,\cdots,n_k)$ 定义为满足 $g(n_1,\cdots,n_k,x)=0$ 的 x 的最小值。我们把这样定义的 k 元函数 f 说成是由已给的 $k+1$ 元函数 g 使用最小数算子或 μ 算子得来的，并写

$$f(n_1,\cdots,n_k)=\mu x[g(n_1,\cdots,n_k,x)=0].$$

由定义立即可知，如果 f 是由 g 使用 μ 算子得来，那么以下

两点自然成立。

(i) $f(n_1,\cdots,n_k)$ 是“根”：

$g(n_1,\cdots,n_k,f(n_1,\cdots,n_k))=0$，即 $g(\alpha,f(\alpha))=0$。

(ii) $f(n_1,\cdots,n_k)$ 这个根具有“最小性”：

$g(n_1,\cdots,n_k,x)=0 \Rightarrow f(n_1,\cdots,n_k)\leqslant x$ 即 $f(\alpha)\leqslant x$。

涉及到 μ 算子时，如不作说明，都算已假设根的存在性条件得到满足。若根的存在性条件不满足，就会出现偏函数（指可能在一些点没有定义的函数），而现在暂只讨论全函数，即处处有定义的函数。

定理 2 **μ 算子保持可表示性。具体地说，设 $k+1$ 元函数 g 在 $\mathrm{K_N}$ 中可表示，那么由 g 使用 μ 算子得到的 k 元函数 f 也在 $\mathrm{K_N}$ 中可表示。**

证 设 $k+1$ 元函数 g 用 $q(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_{k+1},\mathrm{x}_{k+2})$ 可表示，现在来证明由 g 使用 μ 算子得到的 k 元函数 f 用下面的公式可表示：

$$q(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_{k+1},\ulcorner 0\urcorner)\wedge\forall\mathrm{x}_i(q(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_k,\mathrm{x}_i,\ulcorner 0\urcorner)\to\mathrm{x}_{k+1}\leqslant\mathrm{x}_i),$$

其中 x_i 取成不在 $q(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_{k+1},\ulcorner 0\urcorner)$ 中出现的变元。为此需要证明 3.3.1 命题 1 中的条件 1°，2° 得到满足。

首先来证明

1° $\mathscr{N}\vdash q(\ulcorner\alpha\urcorner,\ulcorner f(\alpha)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner)\wedge\forall\mathrm{x}_i(q(\ulcorner\alpha\urcorner,\mathrm{x}_i,\ulcorner 0\urcorner)\to\ulcorner f(\alpha)\urcorner\leqslant\mathrm{x}_i)$。

因 g 是用 $q(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_{k+2})$ 表示的，又因 $g(\alpha,f(\alpha))=0$（$f(\alpha)$ 是“根”），故立即由 3.3.1 命题 1 中的条件 1° 知

$$\mathscr{N}\vdash q(\ulcorner\alpha\urcorner,\ulcorner f(\alpha)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner).$$

这样，问题归结为要证明

(*) $\quad\mathscr{N}\vdash\forall\mathrm{x}_i(q(\ulcorner\alpha\urcorner,\mathrm{x}_i,\ulcorner 0\urcorner)\to\ulcorner f(\alpha)\urcorner\leqslant\mathrm{x}_i)$。

分两种情形来证明（*）。

情形 1 $\quad f(\alpha)=0$。

$$\mathcal{N}\vdash x_i+\overline{f(\alpha)}\approx x_i, \qquad \text{(N3)}$$

$$\mathcal{N}\vdash \exists x_j(x_j+\overline{f(\alpha)}\approx x_i) \text{ 即 } \overline{f(\alpha)}\leqslant x_i, \qquad (\exists_1\text{规则})$$

$$\mathcal{N}\vdash q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to\overline{f(\alpha)}\leqslant x_i, \qquad \text{(肯定后件律)}$$

再用一次 Gen 规则便可。

情形 2　$f(\alpha)>0$。

因 $f(\alpha)$ 是"最小根"，故有

$$g(\alpha,0)\neq 0,$$

……

$$g(\alpha,f(\alpha)-1)\neq 0.$$

对 g 用 3.3.1 定义 1 的性质（ii），有

$$\mathcal{N}\vdash\neg q(\overline{\alpha},\overline{0},\overline{0}),$$

……

$$\mathcal{N}\vdash\neg q(\overline{\alpha},\overline{f(\alpha)-1},\overline{0}).$$

由此，注意以下等词性质

$$\mathcal{N}\vdash x_i\approx\overline{0}\to(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to q(\overline{\alpha},\overline{0},\overline{0})),$$

……

$$\mathcal{N}\vdash x_i\approx\overline{f(\alpha)-1}\to(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to q(\overline{\alpha},\overline{f(\alpha)-1},\overline{0})),$$

用永真式

$$(\neg r\wedge q\wedge(p\to(q\to r)))\to\neg p$$

便得

$$\mathcal{N}\cup\{q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\}\vdash x_i\not\approx\overline{0},$$

……

$$\mathcal{N}\cup\{q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\}\vdash x_i\not\approx\overline{f(\alpha)-1}.$$

再根据 3.2 命题 12 得

$$\mathcal{N}\cup\{q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\}\vdash\overline{f(\alpha)}\leqslant x_i,$$

使用演绎定理和 Gen 规则便证明了（*）。这就证明了条件1°得

到满足。

剩下还要证明 f 满足

$$2^{\circ}\quad \mathscr{N}\vdash(q(\overline{\alpha},t,\overline{0})\wedge\forall x_i(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to t\leqslant x_i))$$
$$\to t\approx\overline{f(\alpha)}.$$

公式 $t\approx\overline{f(\alpha)}$ 从

$$\mathscr{N}\cup\{q(\overline{\alpha},t,\overline{0})\wedge\forall x_i(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to t\leqslant x_i)\}$$

可证，下面就是所需要的证明

(1)	$q(\overline{\alpha},t,\overline{0})$	假定
(2)	$\forall x_i(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to t\leqslant x_i)$	假定
(3)	$q(\overline{\alpha},\overline{f(\alpha)},\overline{0})$	由1°
(4)	$\forall x_i(q(\overline{\alpha},x_i,\overline{0})\to\overline{f(\alpha)}\leqslant x_i$	由1°
(5)	$q(\overline{\alpha},\overline{f(\alpha)},\overline{0})\to t\leqslant\overline{f(\alpha)}$	(2)，(K4)，MP
(6)	$q(\overline{\alpha},t,\overline{0})\to\overline{f(\alpha)}\leqslant t$	(4)，(K4)，MP
(7)	$t\leqslant\overline{f(\alpha)}$	(3)，(5)，MP
(8)	$\overline{f(\alpha)}\leqslant t$	(1)，(6)，MP
(9)	$t\approx\overline{f(\alpha)}$	(7)，(8)，3.2命题10. **证毕。**

练 习 三 十 四

以下函数和关系用什么公式可表示？

1. $f(n)=2$，
2. $f(n)=n+2$，
3. $f(n_1,n_2)=2(n_1+n_2)$，
4. 二元关系“>”.

3.4 递归函数

现在我们要暂时离开 K_N 而对数论函数本身进行一些研究，然后再回来继续讨论数论函数与 K_N 中公式之间的关系。

在数论函数中，我们对递归函数有特殊的兴趣。本节先建立递归函数、递归关系和递归集的概念，然后证明所有递归函数都在 K_N 中可表示。递归函数的可表示性在证明 Gödel 不完备性定理的过程中起着重要作用。

3.4.1 递归函数的一般定义

定义 1（递归函数）基本函数以及由它们经有限次使用规则 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ得到的函数叫做递归函数（或叫数一般递归函数），这里的基本函数是指以下三种函数

（1）**一元零函数** z，$z(n)=0$，

（2）**一元后继函数** s，$s(n)=n+1$，

（3）k **元投影函数** p_i^k，$p_i^k(n_1,\cdots,n_k)=n_i$，$i=1,\cdots,k$.

规则 Ⅰ ——**复合**

一个 j 元函数 g 和 j 个 k 元函数 $h_1,\cdots,h_j$ 复合成一个 k 元函数 f，f 的定义式为

$$f(n_1,\cdots,n_k)=g(h_1(n_1,\cdots,n_k),\cdots,h_j(n_1,\cdots,n_k)).$$

规则 Ⅱ ——**递归**

由 k 元函数 g 和 $k+2$ 元函数 h 使用递归规则生成 $k+1$ 元函数 f，生或的方式是

$$f(n_1,\cdots,n_k,0)=g(n_1,\cdots,n_k),$$

$$f(n_1,\cdots,n_k,n+1)=h(n_1,\cdots,n_k,n,f(n_1,\cdots,n_k,n)).$$

$k=0$ 时，**由定数 g 和二元函数 h 使用递归规到生成一元里数 f 的方式是**

$$f(0)=g,$$

$$f(n+1)=h(n,f(n)).$$

规则Ⅲ——μ 算子（3.3.2 定义 1）

若 $k+1$ 元函数 g 满足根存在性条件（对任意 $n_1,\cdots,n_k$，存在 x 使 $g(n_1,\cdots,n_k,x)=0$），则可由 g 使用 μ 算子生成 k 元函数 f，

$$f(n_1,\cdots,n_k)\simeq\mu x[g(n_1,\cdots,n_k,x)=0].$$

若去掉规则Ⅲ，只允许使用规则Ⅰ与Ⅱ，其他都不变，则定义的函数叫做原始递归函数。若去掉规则Ⅲ中的根存在性条件这个限制，则定义的函数叫做递归偏函数。

递归偏函数不一定处处有定义。μ 算子的根存在性条件不处处得到满足是产生递归偏函数的原因。在使用 μ 算子生成递归全函数（即处处有定义的递归函数）时，必须要检查根存在性条件是否处处满足。

按照定义证明一个函数的递归性，应说明它是由哪些基本函数依何种次序用什么规则生成的。但以后不必每次都由三种基本函数出发来进行递归描述。在描述过程中可以使用已经得到的已知递归函数。

所有基本函数构成的集 F_0 是可数集。

把由基本函数使用 n 次规则生成的所有函数构成的集记为 F_n。对 n 归纳可证每个 F_n 都是可数集。（这里不考虑规则Ⅲ的根存在性条件。）

于是所有递归偏函数构成的集就是 $\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$。它是可数集。（见 0.3 命题 6。）作为它的无限子集，所有递归函数构成的集也是可数集。（见 0.3 命题 1。）

我们知道所有数论函数构成不可数集。所以能得出结论：非递归函数是存在的；与递归函数相比，更大量的数论函数是非递归的。

例 1 用下面的办法可以给出一个非递归函数。把所有一元

递归函数排成一列：

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots.$$

作一新一元函数 g，

$$g(n)=f_n(n)+1.$$

可以断言，g 是非递归函数。如若不然，必有某个 $f_k=g$，于是得出矛盾：

$$f_k(k)=g(k)=f_k(k)+1.$$

练 习 三 十 五

1． 设已知二元函数 f 是递归函数。试证由 f 定义出的以下函数（1 元函数 g，2 元函数 h，3 元函数 r）也是递归的。

$$g(n)=f(n,n),$$

$$h(n_1,n_2)=f(n_2,n_1),$$

$$r(n_1,n_2,n_3)=f(n_3,n_1).$$

3.4.2 常用递归函数

下面由三种基本函数出发，使用三种规则，一个接一个地生成一系列常用递归函数。

1° **k 元常值函数** C_m，定义式是

$$C_m(n_1,\cdots,n_k)=m.$$

C_m 是递归函数，这是因为（对 m 归纳）

$$C_0(n_1,\cdots,n_k)=\mathrm{z}(\mathrm{p}_1^k(n_1,\cdots,n_k)),$$

$$C_{m+1}(n_1,\cdots,n_k)=\mathrm{s}(C_m(n_1,\cdots,n_k)).$$

C_0 是一元零函数 z 和 k 元投影函数 p_1^k 的复合；C_{m+1} 是后继函数 s 和 C_m 的复合。

2° **二元和函数** +

$$n_1+0=\mathrm{p}_1^1(n_1),$$

$$n_1+(n+1)=(n_1+n)+1=\mathrm{s}(\mathrm{p}_3^3(n_1,n,n_1+n)),$$

这里是由 1 元函数 p_1^1 和 3 元函数 h 使用递归规则Ⅱ生成 2 元和

函数的，其中 h 由下式定义

$$h(n_1,n_2,n_3)=s(p_3^3(n_1,n_2,n_3)).$$

如果用 f 表示和函数，那么可以更清楚地写

$$f(n_1,0)=p_1^1(n_1),$$

$$f(n_1,n+1)=h(n_1,n,f(n_1,n)).$$

p_1^1 和 h 是递归的，故二元和函数也是递归的。

3° **二元积函数** $\times$

$$n_1\times 0=z(n_1),$$

$$n_1\times(n+1)=p_3^3(n_1,n,n_1\times n)+p_1^3(n_1,n,n_1\times n).$$

这里也使用了规则Ⅱ。

4° **前邻函数** p^- 的定义式是

$$p^-(n)=\begin{cases}0, & n=0;\\ n-1, & n>0.\end{cases}$$

p^-是递归的，因为

$$p^-(0)=0\ (定数),$$

$$p^-(n+1)=n=p_1^2(n,p^-(n)).$$

5° **截差函数** $\dot{-}$ 的定义式是

$$n_1\dot{-}n_2=\begin{cases}n_1-n_2, & n_1\geqslant n_2;\\ 0, & n_1<n_2.\end{cases}$$

截差函数是递归的，因为：

$$n_1\dot{-}0=n_1=p_1^1(n_1),$$

$$n_1\dot{-}(n+1)=p^-(n_1\dot{-}n)=p^-(p_3^3(n_1,n,n_1\dot{-}n)).$$

有了截差函数，以后就可以把前邻函数写成

$$p^-(n)=n\dot{-}1.$$

6° **一元函数** sg 的定义式是

$$sg(n)=\begin{cases}1, & n>0;\\ 0, & n=0.\end{cases}$$

sg 是递归的，因为

$$\mathrm{sg}(0)=0 \text{（定数）},$$
$$\mathrm{sg}(n+1)=1=C_1(n,\mathrm{sg}(n)),$$
其中函数 C_1 见1°。

7° **一元函数** $\overline{\mathrm{sg}}$ 的定义式是

$$\overline{\mathrm{sg}}(n)=\begin{cases}0, & n>0;\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

$\overline{\mathrm{sg}}$ 是递归函数，因为

$$\overline{\mathrm{sg}}(n)=1\dot{-}\mathrm{sg}(n).$$

sg 和 $\overline{\mathrm{sg}}$ 的函数值是0或1，常用于表示集合和关系的特征函数。

在继续列举新的递归函数之前，先建立一个命题，利用它常可使递归描述更便于进行。

命题1　由 k 元函数 f 用下式定义出的 l 元函数 g 也是递归的：

$$g(n_1,\cdots,n_l)=f(n_{m_1},\cdots,n_{m_k}),$$

其中对每个 $i=1,\cdots,k$，有 $1\leqslant m_i\leqslant l$。

证　g 可如下复合而成：

$$g(n_1,\cdots,n_l)=f(\mathrm{p}^l_{m_1}(n_1,\cdots,n_l),\cdots,\mathrm{p}^l_{m_k}(n_1,\cdots,n_l)),$$

故 g 也是递归函数。**证毕。**

命题1可用来“降元”。例如，由已知的3元递归函数 f 可如下生成2元函数 g 和 h：

$$g(n_1,n_2)=f(n_1,n_1,n_2),$$
$$h(n_1,n_2)=f(n_2,n_1,n_2).$$

也可由 f 生成1元函数 r：

$$r(n)=f(n,n,n).$$

根据命题1，g，h，r 也都是递归的。

还可用命题1来交换变元次序或“升元”。例如由已知的3元递归函数 f 可得3元递归函数 g 和4元递归函数 h：

$$g(n_1,n_2,n_3)=f(n_3,n_2,n_1),$$

$$h(n_1,n_2,n_3,n_4)=f(n_3,n_1,n_4).$$

下面继续列举一些常用递归函数。

8° **绝对差**$\dot{-}$的定义式是

$$n_1 \dot{-} n_2 = |n_1 - n_2|.$$

绝对差是二元递归函数，因为

$$n_1 \dot{-} n_2 = (n_1 \dot{-} n_2) + (n_2 \dot{-} n_1).$$

9° min 与 max （k 元，$k>1$）的定义是

$\min(n_1,\cdots,n_k)=n_1,\cdots,n_k$ 中的最小数，

$\max(n_1,\cdots,n_k)=n_1,\cdots,n_k$ 中的最大数。

现对 k 归纳证明 min 的递归性。

$k=2$ 时，$\min(n_1,n_2)=n_1 \dot{-} (n_1 \dot{-} n_2)$。

$k>2$ 时，$\min(n_1,\cdots,n_k)=\min(\min(n_1,\cdots,n_{k-1}),n_k)$。

max 的情形是类似的。

10° **指数函数** $n_1^{n_2}$（0^0 规定为 0）

$$n_1^0 = \mathrm{sg}(n_1),$$

$$n_1^{n+1} = n_1^n \times n_1.$$

11° **余数函数** rem 的定义式是

$$\mathrm{rem}(n_1,n_2)=\begin{cases}\text{用 } n_1 \text{ 除 } n_2 \text{ 所得余数}, & n_1>0;\\ 0, & n_1=0.\end{cases}$$

先将 $\mathrm{rem}(n_1,n+1)$ 用 $\mathrm{rem}(n_1,n)$ 表示出来：

$$\mathrm{rem}(n_1,n+1)=\begin{cases}\mathrm{rem}(n_1,n)+1, & \mathrm{rem}(n_1,n)+1<n_1;\\ 0, & \mathrm{rem}(n_1,n)+1\geqslant n_1.\end{cases}$$

由此即可证明 rem 的递归性：

$$\mathrm{rem}(n_1,0)=0,$$

$$\mathrm{rem}(n_1,n+1)=(\mathrm{rem}(n_1,n)+1)\mathrm{sg}(n_1 \dot{-} (\mathrm{rem}(n_1,n)+1)).$$

12° 设 f 是 $k+1$ 元递归函数。由 f 可定义新的 k 元函数 g 和 $k+1$ 元函数 h：

$$g(n_1,\cdots,n_k)=\sum_{i<n_k} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$$h(n_1,\cdots,n_{k+1})=\sum_{i<n_{k+1}} f(n_1,\cdots,n_k,i).$$

g 和 h 都是递归的，因为

$$g(n_1,\cdots,n_k)=h(n_1,\cdots,n_k,n_k);$$

$$h(n_1,\cdots,n_k,0)=f(n_1,\cdots,n_k,0),$$

$$h(n_1,\cdots,n_k,n+1)=\sum_{i<n} f(n_1,\cdots,n_k,i)$$

$$+f(n_1,\cdots,n_k,n+1)=h(n_1,\cdots,n_k,n)$$

$$+f(n_1,\cdots,n_k,n+1).$$

13° 设 f 是 $k+1$ 元递归函数。定义新的 k 元函数 g 和 $k+1$ 元函数 h：

$$g(n_1,\cdots,n_k)=\sum_{i<n_k} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$$h(n_1,\cdots,n_{k+1})=\sum_{i<n_{k+1}} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

当 $n_k=0$ 时规定 g 的函数值为零；当 $n_{k+1}=0$ 时，规定 h 的函数值为零。

g 和 h 都是递归的，因为：

$$g(n_1,\cdots,n_k)=h(n_1,\cdots,n_k,n_k),$$

$$h(n_1,\cdots,n_k,0)=0,$$

$$h(n_1,\cdots,n_k,n+1)=h(n_1,\cdots,n_k,n)+f(n_1,\cdots,n_k,n).$$

14° 设 f 是 $k+1$ 元递归函数。定义新的 k 元函数 g_1，g_2 和 $k+1$ 元函数 h_1，h_2：

$$g_1(n_1,\cdots,n_k)=\prod_{i\leqslant n_k} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$$h_1(n_1,\cdots,n_{k+1})=\prod_{i\leqslant n_{k+1}} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$$g_2(n_1,\cdots,n_k)=\prod_{i<n_k} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$$h_2(n_1,\cdots,n_{k+1})=\prod_{i<n_{k+1}} f(n_1,\cdots,n_k,i),$$

$n_k=0$ 时，规定 g_2 的函数值为 1；$n_{k+1}=0$ 时，规定 h_2 的函数值为 1。

这四个新函数都是递归的，证明与 12°，13° 类似。

15° 设 g 是 $k+1$ 元递归函数。作 k 元函数 f：

$$f(n_1,\cdots,n_k)=\min\{x\,|\,g(n_1,\cdots,n_k,x)=1\}.$$

f 是递归的（证明留作练习）。此时仍称 f 由 g 使用 μ 算子得来，并写

$$f(n_1,\cdots,n_k)=\mu x[g(n_1,\cdots,n_k,x)=1].$$

还有一些要用到的递归函数，后面在需要的时候随时引入。

练 习 三 十 六

1． 证明以下函数是递归的。

（1）$f(n)=n^2$，

（2）$f(n_1,n_2)=n_2^2$，

（3）$\max(n_1, n_2)$，

（4）$f(n)=n!$，

（5）$h(n)=f(n)^{g(n)}$，已知 f 和 g 是 1 元递归函数，

（6）对任一定数 k，

$$f_k(n)=\begin{cases}1, & n=k;\\ 0, & n\neq k,\end{cases}$$

（7）商函数

$$q(n_1,n_2)=\begin{cases}\text{用 } n_1 \text{ 除 } n_2 \text{ 所得商}, & n_1>0;\\ 0 & n_1=0,\end{cases}$$

（8）$h(n_1,n_2)=\sum_{i<n_1} g(n_1,n_2,i)$，其中已知 g 是 3 元递归

函数，

（9）本段 14° 中的 g_1, h_1, h_2，

（10）本段 15° 中的 f。

2．试由 $+$，$\times$，p_i^k，$C_{\leqslant}$ 四种函数出发，只许用规则Ⅰ和Ⅲ生成出 $z(n)$，$s(n)$，$sg(n)$，$\overline{sg}(n)$，$C_=(n_1,n_2)$，$n_1 \dot{-} n_2$ 及 $rem(n_1,n_2)$。

3.4.3 递归关系和递归集

先回忆 N 上 k 元关系 R 的特征函数 C_R 的定义式：

$$C_R(n_1,\cdots,n_k)=\begin{cases}1, & (n_1,\cdots,n_k)\in R;\\ 0, & (n_1,\cdots,n_k)\notin R.\end{cases}$$

定义 1 （递归关系与递归集）若特征函数 C_R 是递归函数，则关系 R 叫做递归关系。一元递归关系叫数 N 的递归子集，简称为递归集。

例 1 二元关系 $\leqslant$，$=$，$<$ 都是递归关系。事实上，

$$C_{\leqslant}(n_1,n_2)=\overline{sg}(n_1 \dot{-} n_2),$$
$$C_=(n_1,n_2)=\overline{sg}(n_1 \dot{-} n_2),$$
$$C_<(n_1,n_2)=sg(n_2 \dot{-} n_1).$$

命题 1 1° 若 R 是 k 元递归关系，则 $\overline{R}$ 也是 k 元递归关系，这里的 $\overline{R}$ 是 R 的余集：$\overline{R}=N^k-R$。

2° 若 R_1, R_2 都是 k 元递归关系，则 $R_1\cup R_2$ 和 $R_1\cap R_2$ 也都是 k 元递归关系。

证 $C_{\overline{R}}(n_1,\cdots,n_k)=1-C_R(n_1,\cdots,n_k)$，

$$C_{R_1\cup R_2}(n_1,\cdots,n_k)=sg(C_{R_1}(n_1,\cdots,n_k)+C_{R_2}(n_1,\cdots,n_k)),$$

$$C_{R_1\cap R_2}(n_1,\cdots,n_k)=C_{R_1}(n_1,\cdots,n_k)\times C_{R_2}(n_1,\cdots,n_k).$$ **证毕。**

例 2 设 R 是 $k+1$ 元递归关系（$k>0$）。用 R 作一新的 k 元关系：

$$Q=\{(n_1,\cdots,n_k)\mid \text{存在}\,x<n_k\,\text{使}\,(n_1,\cdots,n_k,x)\in R\}.$$

Q也是递归关系，因为

$$C_Q(n_1,\cdots,n_k)=\mathrm{sg}\Big(\sum_{x<n_k}C_R(n_1,\cdots,n_k,x)\Big).$$

这里要利用 3.4.2 中的 13°。

命题 2 N，ϕ，**独元集**$\{a\}$，**有限集**$\{a_1,\cdots,a_n\}$**都是递归集。**

证 $C_N(n)=1$，

$C_\phi(n)=0$，

$C_{\{a\}}(n)=C_=(n,a)$，

有限集 $\{a_1,\cdots,a_n\}=\{a_1\}\cup\cdots\cup\{a_n\}$。**证毕。**

例 3 二元关系

$$\mathrm{Divi}=\{(n_1,n_2)\mid n_1=0\ \text{或}\ n_1\ \text{能整除}\ n_2\}$$

是递归关系。事实上，

$$C_{\mathrm{Divi}}(n_1,n_2)=\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(n_1,n_2)).$$

例 4 全体素数构成的集记作 Prm，它是递归集。理由如下。

检查 n 是不是素数，可以检查在不大于 n 的数中有多少个是 n 的因子（包括 0 在内）。$n>1$ 时，若因子多于 3 个，则 n 不是素数。所以有

$$C_{\mathrm{Prm}}(n)=\Big(4\dot{-}\sum_{i\leq n}C_{\mathrm{Divi}}(i,n)\Big)\times \mathrm{sg}(n\dot{-}1).$$

例 5 设 $p(n)=$第 n 个素数（$p(0)=2,p(1)=3,p(2)=5,\cdots$）。$p$是一元递归函数，因为

$p(0)=2$，

$p(n+1)=\mu x[C_<(p(n),x)\times C_{\mathrm{Prm}}(x)=1]$.

第二式的意思是：$p(n+1)$ 是比 $p(n)$ 大的最小素数。

以后常把 $p(n)$ 简写成 p_n。

N 的一个子集是不是递归集，取决于它的特征函数是不是递归函数。N 的不同子集对应有不同的特征函数。每个子集都有且

只有一个特征函数。于是所有递归集构成的集是可数集，这是因为，所有递归集的特征函数构成的集（作为所有递归函数的集的无限子集）是可数集。

已经知道，N 的所有子集构成的集 $\mathscr{P}$(N) 是不可数的。所以能够断言：非递归集是存在的；与递归集相比，N 的更大量的子集是非递归的。

下面仍用对角线方法给出一个非递归集的例子。

把N的所有递归子集排成一例：

$$A_0, A_1, A_2, \cdots.$$

作集

$$A = \{n \mid n \notin A_n\}.$$

意思是，逐一检查每个自然数，看它是不是相应下标的递归集的成员：0 是不是 A_0 的成员，1 是不是 A_1 的成员，…。若是，则放入 A 中；若不是，则丢掉。这样得到的集 A 是非递归的。如若不然，则必有某个 $A_k = A$。这导致和 A 的定义相矛盾：

$$k \in A (= A_k) \Leftrightarrow k \notin A_k.$$

练 习 三 十 七

1．证明$N_1 = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$和$N_2 = \{3, 4, 5, 6, \cdots\}$是递归集。

2．设 A, B 是递归集，证明 $A \times B$ 是二元递归关系。

3．设A 是非递归集，证明$A \times A$是非递归的二元关系。

4．证明 G是递归集，这里

G $= \{n \mid n$ 为奇数，或 $n \leqslant 2$，或 n 等于二素数之和$\}$。

5．设 k 元关系 $R_1, \cdots, R_l$ 都是递归的，且满足 $R_1 \cup \cdots \cup R_l = N^k$ 和 $R_i \cap R_j = \phi (i \neq j)$。（这时说 $R_1, \cdots, R_l$ 给出了 N^k 的一个递归剖分。）又设 k 元函数 $g_1, \cdots, g_l$ 都是递归的，且

$$f(n_1, \cdots, n_k) = \begin{cases} g_1(n_1, \cdots, n_k), (n_1, \cdots, n_k) \in R_1, \\ \cdots\cdots \\ g_l(n_1, \cdots, n_k), (n_1, \cdots, n_k) \in R_l. \end{cases}$$

求证 f 是递归函数。

6．设 A与 A_1 是递归集，且 $A=A_1\cup A_2$．A_2 一定是递归集吗？

7．不用 μ 算子证明例 5 中函数 p的递归性。

3.5 递归函数的可表示性

现在回到数论函数和 K_N 的公式之间关系的讨论。

先引入三个记号：REP，REC 和 REC*。

REP＝在 K_N 中可表示的函数的全体构成的集。

REC＝递归函数的全体构成的集。

REC* 的定义与 REC 的类似，但稍有不同：

定义 1 （函数集 REC*）REC* 是指 $+$，$\times$，p_i^k，$C_<$ 这四种函数以及由它们经有限次使用复合和 μ 算子得到的函数的全体所构成的函数集。

回忆 3.3 中讨论可表示性时所得到的结果（3.3.1 命题 2 和命题 4，3.3.2 定理 1 和定理 2），立即可知命题 1 成立。

命题 1 REC*⊆REP。

再回忆 3.4.2的 2°，3° 和 3.4.3 的例 1，又立即可知命题 2 成立。

命题 2 REC*⊆REC。

本节的任务是证明 REC⊆REC*。这个事实与命题 1 结合，便得到了递归函数的可表示性；与命题 2 结合，便说明定义 1 是递归函数的另一等价定义。

引理 1 函数 $z, s, sg, \overline{sg}, C_=, \dot{-}, rem$ 都是 REC* 的成员。

证 1° 注意 $C_<(n,n)$ 恒为 1，于是

$s(n)=n+1=n+C_<(n,n)=p_1^1(n)+C_<(p_1^1(n),p_1^1(n))$。

2° $z(n)=C_<(n+1,n)=C_<(s(n),p_1^1(n))$。

3° $sg(n)=C_<(1,n)=C_<(s(z(n)),p_1^1(n))$。

$4°\quad \overline{\mathrm{sg}}(n)=C_{\leqslant}(p_1^1(n),\mathrm{z}(n))$。

$5°\quad C_{=}(n_1,n_2)=C_{\leqslant}(n_1,n_2)\times C_{\leqslant}(n_2,n_1)$

$$=C_{\leqslant}(n_1,n_2)\times C_{\leqslant}(\mathrm{p}_2^2(n_1,n_2),\mathrm{p}_1^2(n_1,n_2))。$$

6° 注意当 $n_1\leqslant n_2$ 时，对任意 x 都有

$$C_{\leqslant}(n_1,n_2+x)=1;$$

当 $n_1>n_2$ 时，

$$C_{\leqslant}(n_1,n_2+x)=\begin{cases}1, & x\geqslant n_1-n_2;\\ 0, & x<n_1-n_2.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}n_1\dot{-}n_2&=\mu x[C_{\leqslant}(n_1,n_2+x)=1]\\&=\mu x[\overline{\mathrm{sg}}(C_{\leqslant}(n_1,n_2+x))=0]\\&=\mu x[\overline{\mathrm{sg}}(C_{\leqslant}(\mathrm{p}_1^3(n_1,n_2,x),\ \mathrm{p}_2^3(n_1,n_2,x)\\&\qquad+\mathrm{p}_3^3(n_1,n_2,x)))=0].\end{aligned}$$

$7°\quad \mathrm{rem}(n_1,n_2)=\mathrm{sg}(n_1)$

$$\times(n_2\dot{-}n_1\times(\mu x[\mathrm{sg}(n_1)\times C_{\leqslant}(n_1\times x,n_2)=0]\dot{-}1)).$$

详细地写，上式方括号内的 n_1,n_2 与 x 应分别写成 $\mathrm{p}_1^3(n_1,n_2,x)$，$_2^3(n_1,n_2,x)$ 与 $\mathrm{p}_3^3(n_1,n_2,x)$；方括号外的 n_1,n_2 与1应分别写成 $\mathrm{p}_1^2(n_1,n_2),\mathrm{p}_2^2(n_1,n_2)$ 与 $\mathrm{s}(\mathrm{z}(\mathrm{p}_1^2(n_1,n_2)))$。方括号内加上因子 $\mathrm{sg}(n_1)$ 是为了当 $n_1=0$ 时使根存在性条件得到满足。**证毕。**

现在已经知道递归函数定义中的三种基本函数 $\mathrm{z},\mathrm{s},\mathrm{p}_i^k$ 都是 REC* 的成员。为了完成 REC⊆REC* 的证明，剩下只要证明一件事：REC* 对递归规则Ⅱ封闭，即由 REC* 中的函数 g,h 利用规则Ⅱ得到的函数 f 仍在 REC* 中。为证明这一点，要用到的数论的孙子定理。

引理 2　若正整数 m 与 n 互素，则存在整数 s 和 t 使 $sm+tn=1$。

证　作一集 A：

$A=\{u\mid$存在整数 s 和 t 使 $u=sm+tn$，且 $u>0\}$。A 由若干正整数组成，是自然数的非空集，即 $A\subseteq N$ 且 $A\neq\phi$（例如 $m+n$

是A的成员）。A必有最小值，设它的最小值是$u_0=s_0m+t_0n$，其中s_0,t_0是整数。再设

$$m=qu_0+r,\qquad 0\leqslant r<u_0.$$

这时有

$$\begin{aligned} r&=m-qu_0\\ &=m-q(s_0m+t_0n)\\ &=(1-qs_0)m+(-qt_0)n. \end{aligned}$$

如果$r>0$，那么上式说明r也是集A的成员，且因$r<u_0$，故与u_0的最小性矛盾，所以只有$r=0$才行。也就是说，u_0必能整除m。

同理，u_0也必能整除n。又因m与n互素，故$u_0=1$，即$s_0m+t_0n=1$。**证毕。**

引理 3（孙子定理）已知自然数$a_1,\cdots,a_k$。若自然数$n_1,\cdots,n_k$两两互素，且$n_1>a_1,\cdots,n_k>a_k$，则存在无限多个自然数m使

$$\text{rem}(n_i,m)=a_i,\quad i=1,\cdots,k.$$

证 令$z_i=n_1n_2\cdots n_k/n_i$。z_i就是$n_1,\cdots,n_k$中除去n_i后的各数之积。因n_i与$n_1,\cdots,n_k$中其他各数互素，故n_i与z_i互素。由引理2知，存在整数s_i,t_i使

$$s_iz_i+t_in_i=1,\quad i=1,\cdots,k.$$

由此可得

$$a_is_iz_i+a_it_in_i=a_i,$$

$$a_is_iz_i=(-a_it_i)n_i+a_i,\quad 0\leqslant a_i<n_i,$$

$$\text{rem}(n_i,a_is_iz_i)=a_i,\quad i=1,\cdots,k. \tag{1}$$

现取

$$m=a_1s_1z_1+\cdots+a_ks_kz_k+ln_1\cdots n_k,$$

其中l可取任意使$m>0$自然数。m即为所求，因为（注意z_i的定义及（1）式）有

$$\text{rem}(n_i,m)=a_i,\quad i=1,\cdots,k.$$ **证毕。**

由孙子定理便可得到下面的引理4。

引理 4 **对于给定的** $a_1,\cdots,a_k\in\mathrm{N}$，**一定存在** $n,m\in\mathrm{N}$ **使**

$$\mathrm{rem}(1+in,m)=a_i,\quad i=1,\cdots,k,$$

且使 $n\leqslant m$。

证 令 $b=\max\{a_1,\cdots,a_k,k\}$，并取 $n=b!$。取定 n 以后，因

$$1+in>a_i\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,k,$$

由引理 3 知一定存在 $m\geqslant n$ 使

$$\mathrm{rem}(1+in,m)=a_i,\quad i=1,\cdots,k.$$

但在用引理 3 时，需要验证"$1+n,\cdots,1+kn$ 这 k 个数两两互素"的条件得到满足。

假设某个 $1+in$ 和某个 $1+jn$ $(1\leqslant i<j\leqslant k)$ 有素公因子 p。这时 p 能整除 $(j-i)n$。但因

$$0<j-i<k\leqslant b\leqslant b!=n,$$

这说明 $j-i$ 是 $b!$ 即 n 的因子，进而导致 p 能整除 n。已假设 p 能整除 $1+in$，这只有 $p=1$ 才行。**证毕**。

下面建立本节的中心结论。在这个过程中，除了要用到引理 4，还要注意引理 1 中的结论不止一次用到。

定理 1 **设** $k+1$ **元函数** f **满足**

（1） $f(n_1,\cdots,n_k,0)=g(n_1,\cdots,n_k)$，

（2） $f(n_1,\cdots,n_k,n+1)=h(n_1,\cdots,n_k,n,f(n_1,\cdots,n_k,n))$。

若其中函数 $g,h\in\mathrm{REC}^*$，则 $f\in\mathrm{REC}^*$。

证 和 3.3.2 一样，也把 $n_1,\cdots,n_k$ 简记成 α。于是定理的已知条件可写成

（1） $f(\alpha,0)=g(\alpha)$，

（2） $f(\alpha,n+1)=h(\alpha,n,f(\alpha,n))$。

作出三个新函数 F_1($k+2$元)，F_2($k+3$元) 和 F_3($k+3$元)，方法是

$$F_1(\alpha,x,y)=C_=(\mathrm{rem}(1+y,x),g(\alpha)),$$

$$F_2(\alpha,x,y,i)=C_=(\mathrm{rem}(1+(i+2)y,x),$$
$$h(\alpha,i,\mathrm{rem}(1+(i+1)y,x))),$$

$$F_3(\alpha,n,x,y)=F_1(\alpha,x,y)\times C_{<}(n,\mu i[F_2(\alpha,x,y,i)\times C_{<}(i,n)=0]).$$

F_3 的定义使用了 μ 算子。其中方括号内有因子 $C_{<}(i,n)$，这是为了保证根存在性条件肯定得到满足，从而使 F_3 是个全函数。（使方括号内等式成立的 i 总是存在的，例如取 $i=n+1$。）

根据引理1，F_1,F_2,F_3的定义式中所涉及的函数$C_{=}$，rem 等都是 REC* 的成员，又已知 $g,h\in$REC*，所以$F_1,F_2,F_3\in$REC*。

这三个函数的作法使以下三个结论是等价的。这三个结论是

（3） $F_3(\alpha,n,x,y)=1$，

（4） $\begin{cases}\mathrm{rem}(1+y,x)=g(\alpha),\\ \mathrm{rem}(1+(i+2)y,x)=h(\alpha,i,\mathrm{rem}(1+(i+1)y,x)),\\ \qquad\qquad i=0,\cdots,n-1,\end{cases}$

（5） $\mathrm{rem}(1+(i+1)y,x)=f(\alpha,i),\quad i=0,\cdots,n.$

现在来证明（3），（4），（5）的等价性。

(3)$\Leftrightarrow$ (4)：

（3） $\Leftrightarrow$ $F_1(\alpha,x,y)=1$

且 $C_{<}(n,\mu i[F_2(\alpha,x,y,i)\times C_{<}(i,n)=0])=1$

$\Leftrightarrow$ $C_{=}(\mathrm{rem}(1+y,x),g(\alpha))=1$

且 $n\leqslant\mu i[F_2(\alpha,x,y,i)\times C_{<}(i,n)=0]$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rem}(1+y,x)=g(\alpha)$

且当 $i<n$ 时 $F_2(\alpha,x,y,i)=1$

$\Leftrightarrow$ （4）。

(5) $\Rightarrow$(4)：

(5) 中 $i=0$ 时，由（1）便得（4）的第一式。又

$$\begin{aligned}\mathrm{rem}(1+(i+2)y,x)&=f(\alpha,i+1) &&\text{（由(5)）}\\ &=h(\alpha,i,f(\alpha,i)) &&\text{（由(2)）}\\ &=h(\alpha,i,\mathrm{rem}(1+(i+1)y,x)),\\ &\qquad i=0,\cdots,n-1, &&\text{（由(5)）}\end{aligned}$$

这就得到（4）的其他各式。

$(4)\Rightarrow(5)$：

$\mathrm{rem}(1+y,x)=g(\alpha)=f(\alpha,0)$ （(4)的第一式及(1)）

$\mathrm{rem}(1+2y,x)=h(\alpha,0,\mathrm{rem}(1+y,x))$ （(4)的第二式，$i=0$）

$=h(\alpha,0,f(\alpha,0))$ （已得的结果代入）

$=f(\alpha,1)$ （由(2)）

……

$\mathrm{rem}(1+(n+1)y,x)=h(\alpha,n-1,\mathrm{rem}(1+ny,x))$

（(4)的第二式，$i=n-1$）

$=h(\alpha,n-1,f(\alpha,n-1))$（已得的结果代入）

$=f(\alpha,n)$ （由(2)）

至此证明了（3），（4），（5）的等价性。

利用F_3再作一个新函数F_4（$k+2$元）：

$$F_4(\alpha,n,x)=C_<(\mu y[\mathrm{sg}(F_3(\alpha,n,x,y)+C_<(x+1,y))=1],x)$$

式中方括号内的$C_<(x+1,y)$使根的存在性条件肯定满足。$F_4\in$ REC*，且F_4的作法使下面的结论（6）和结论（7）是等价的。它们是

（6）$F_4(\alpha,n,x)=1$，

（7）存在$y\leqslant x$使$F_3(\alpha,n,x,y)=1$。

（6）与（7）等价，是因为

$$\begin{aligned}F_4(\alpha,n,x)=1 &\Leftrightarrow \mu y[\mathrm{sg}(F_3(\alpha,n,x,y)+C_<(x+1,y))=1]\leqslant x\\ &\Leftrightarrow \text{存在} y\leqslant x \text{使} \mathrm{sg}(F_3(\alpha,n,x,y)+C_<(x+1,y))=1\\ &\Leftrightarrow \text{存在} y\leqslant x \text{使} \mathrm{sg}(F_3(\alpha,n,x,y))=1\\ &\Leftrightarrow (7)\text{。}\end{aligned}$$

（注意F_3的定义，它的函数值只取0或1。）

下面再用F_4作一新的$k+1$元函数F_5：

$$F_5(\alpha,n)=\mu x[F_4(\alpha,n,x)=1].$$

F_5是否对任意的α,n都有定义？也就是问：生成F_5的μ算子的根存在性条件是否总能满足？

引理4回答了这个问题。

我们有以下结论：

任意给定α,n. 对$f(\alpha,0),\cdots,f(\alpha,n)$这$n+1$个自然数，一定存在自然数$x$及$y\leqslant x$使（5）成立；

（根据引理 4）

对任意给定的α,n，存在x及$y\leqslant x$使$F_3(\alpha,n,x,y)=1$；

（(5)与(3)等价）

对任意给定的α,n，存在x使$F_4(\alpha,n,x)=1$.

（(6)与(7)等价）

得到的结论说明，F_5是定义好的全函数，且$F_5\in \mathrm{REC}^*$.

按F_5的定义式，自然有

$$F_4(\alpha,n,F_5(\alpha,n))=1.$$

此式意味着（注意（6）与（7）等价）：

存在$y\leqslant F_5(\alpha,n)$使$F_3(\alpha,n,F_5(\alpha,n),y)=1$.

这一事实保证了可以作出下面的全函数F_6（$k+1$元）：

$$F_6(\alpha,n)=\mu y[F_3(\alpha,n,F_5(\alpha,n),y)=1].$$

$F_6\in \mathrm{REC}^*$，且F_6的定义使下式自然成立：

$$F_3(\alpha,n,F_5(\alpha,n),F_6(\alpha,n))=1.$$

由此注意（3）与（5）的等价性，立即得

$$\mathrm{rem}(1+(i+1)F_6(\alpha,n),F_5(\alpha,n))=f(\alpha,i),\ i=0,\cdots,n.$$

特殊地取$i=n$，最后便得

$$\mathrm{rem}(1+(n+1)F_6(\alpha,n),F_5(\alpha,n))=f(\alpha,n).$$

这就是我们所需要的最后结论，它指出$f\in \mathrm{REC}^*$. **证毕.**

推论 1 $\mathrm{REC}\subseteq \mathrm{REC}^*$.

证 由引理 1 及定理 1 即得. **证毕.**

推论 2 $\mathrm{REC}=\mathrm{REC}^*$.

证 由推论 1 及命题 2 即得. **证毕.**

推论 3 （递归函数的可表示性） $\mathrm{REC}\subseteq \mathrm{REP}$.

证 由推论 1 及命题 1 即得. **证毕.**

推论 4 递归关系在K_N中可表示.

证 R是递归关系

$\Rightarrow$ $C_R \in \mathrm{REC}$ （递归关系的定义）

$\Rightarrow$ $C_R \in \mathrm{REP}$ （推论3）

$\Rightarrow$ R在$\mathrm{K_N}$中可表示（3.3.1命题3）**证毕**。

练 习 三 十 八

1．直接证明sg的可表示性。

2．给出一个可用来表示$\dot{-}$的公式。

3.6 可表示函数的递归性

本节里要完成证明形式算术的不完备性定理的全部准备工作。作为一个附带的结果，将得到结论：所有可表示函数都是递归的，于是将有

$$\mathrm{REC}=\mathrm{REP},$$

即：递归性就是在$\mathrm{K_N}$中的可表示性。

3.6.1 唯一读法引理

$\mathrm{K_N}$是作为一种具有特殊性质的代数系统定义的。同时，$\mathrm{K_N}$又可视为一种形式语言。

对一种人工的形式语言，我们通常都要提出一个要求——具有唯一读法。具体地说，从这种形式语言的字母表中任意取出的一些字母所构成的一个有限字母串，是以下三种情况的哪一种——是项，是公式，或既非项又非公式——必须是唯一确定的。如果是项，是哪个层次的哪一种项；如果是公式，是哪一个层次的哪一种公式，这些也都必须是唯一确定的。

$\mathrm{K_N}$可以成为符合这种要求的形式语言。

为了方便，在下面进行的语法分析中，把项与公式的写法由中置式全部改成前置式。具体做法是：把所有形为t_1+t_2，t_1

$\times t_2, t', t_1 \approx t_2$和$p \to q$的项或公式分别写成$+t_1t_2, \times t_1t_2, 't$，$\approx t_1t_2$和$\to pq$。

例 1 采用前置式，K_N 中的几种等词公理模式可写成：

(E1) $\approx tt$,

(E2) $\to \approx tu \approx 't'u$,

$\to \approx t_1u \approx +t_1t_2+ut_2$,

$\to \approx t_2u \approx +t_1t_2+t_1u$,

$\to \approx t_1u \approx \times t_1t_2 \times ut_2$,

$\to \approx t_2u \approx \times t_1t_2 \times t_1u$,

(E3) $\to \approx t_1u \to \approx t_1t_2 \approx ut_2$,

$\to \approx t_2u \to \approx t_1t_2 \approx t_1u$.

采用前置式，括号可从字母表中省去。这时K_N的字母表 $\mathscr{U}$ 只需要以下字母或符号：

$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$	（个体变元）
$\overline{0}$	（个体常元）
$'$, $+$, $\times$	（函数词）
$\approx$	（等词）
$\neg$, $\to$, $\forall$	（逻辑符号）

为了证明K_N这种形式语言有唯一读法，先给每个字母u指定一个“重量”$w(u)$：

$$w(x_i) = w(\overline{0}) = 1,$$

$$w(') = w(\neg) = 0,$$

$$w(+) = w(\times) = w(\approx) = w(\to) = w(\forall) = -1.$$

再给每个字母串规定重量，把一个字母串的重量规定为组成该串的各字母重量之和：

$$w(u_1 \cdots u_n) = w(u_1) + \cdots + w(u_n).$$

此外，空串的重量规定为 0。

命题 1 若字母串构成项或公式，则该串的重量为 1，而该串的真前段的重量不足 1。（字母串的真前段是指由该字母串去

掉最后一个或多个字母后所剩下的字母串，它可以是空串。）

证 对构成项或公式的字母串的长度 k 归纳。

$k=1$时，该串只可能是项x_i或$\bar{0}$，按规定，重量为1；该串的真前段只有空串，重为0。

$k>1$时，有七种可能：$\prime t$，$+t_1t_2$，$\times t_1t_2$，$\approx t_1t_2$，$\neg p$，$\rightarrow p_1p_2$，$\forall x_i p$。这时要作归纳假设：t，t_1,t_2,p,p_1,p_2的重量皆为1，而它们的真前段的重量都不足1。

$\prime t$的重为1，因$w(\prime)=0$，$\prime t$的真前段的重量就是t的真前段的重量，不足1。

$\neg p$的情形与$\prime t$类似。

$+t_1t_2$重为1，因$w(+)=-1$。$+t_1t_2$的真前段的重量也都因$w(+)=-1$而不足1。

$\times t_1t_2$，$\approx t_1t_2$，$\rightarrow P_1P_2$的情形与$+t_1t_2$类似。

因$w(\forall)=-1$而$w(x_i)=1$，故$\forall x_iP$的情形与$\prime t$和$\neg p$类似。**证毕。**

命题 2 **（唯一读法引理）**

（i）一个项或一个公式的真前段不再是项或公式。

（ii）若一字母串是由两个项或两个公式并接而成，则并接的方式是唯一的。

证（i）由命题1即得。

（ii）假设一符号串由两个项并接而成：t_1t_2，同时它又由另外两个项并接而成：s_1s_2。这时项t_1和项s_1有两种可能的关系：t_1是s_1的真前段，或s_1是t_1的真前段。因为t_1，s_1都是项，所以这两种情形都不会发生，否则与（i）相矛盾。关于两个公式的并接，讨论是相同的。**证毕。**

为确定一个字母串是不是项或公式，先看它的重量是不是1。若是1，且以$\prime$，$+$或$\times$开头，则该串可能是项；若以$\approx$，$\rightarrow$，$\neg$或$\forall$开头，则该串可能是公式。然后再对去掉开头字母后剩下的较短的字母串进行检查。项或公式的任何尾部缩短或尾

部加长都不再是项或公式（加长后若是项或公式，则原串就不是）。在形为$+t_1t_2$，$\times t_1t_2$，$\approx t_1t_2$的项或公式中，t_1和t_2是唯一确定的；在公式$\to p\,q$中，前件p和后件q是唯一确定的。这些都是说明了K_N具有唯一读法。

练 习 三 十 九

1．把（K1）－（K5）及（N1）－（N7）全部改写成前置式。

2．把以下前置式还原为通常中置式。

1° $\approx\times\overset{\sqcap}{0}\,\overset{\sqcap}{0}\,\overset{\sqcap}{0}$，

2° $\approx+x_1x_2+x_2x_1$，

3° $\approx\times\times x_1x_2x_3\times x_1\times x_2x_3$，

4° $\to\approx+x_1x_2x_2\approx x_1\overset{\sqcap}{0}$，

5° $\to\neg\approx x_1\overset{\sqcap}{0}\neg\forall x_2\neg\approx+x_2{}'\overset{\sqcap}{0}x_1$，

6° $\to\neg\forall x_3\neg\approx+x_3x_1x_2\to\neg\forall x_4\neg\approx+x_4x_2x_1\approx x_1x_2$。

3．举例说明命题1的逆命题不成立，即重为1的字母串可能既非项又非公式。

3.6.2 Gödel 数

现在来给K_N这种形式语言进行编码（或称配数），以便把有关K_N这种形式系统的结论转化成数值形式，变成关于自然数的结论。从算术到K_N，从K_N到算术，再回到K_N，一些重要的结论就是在这样来回反复的研究中建立起来的。

配数的方法可以有很多种。下面是其中的一种。

（一）字母的 Gödel 数

对每个字母u都指定一个 Gödel 数$g(u)$如下：

u	$'$	$+$	$\times$	$\neg$	$\to$	$\forall$	$\approx$	$\overset{\sqcap}{0}$	x_i
$g(u)$	1	3	5	7	9	11	13	15	$15+2i$

不同的字母有不同的 Gödel 数，但都是奇数。每个奇数都是

某个字母的 Gödel 数。

（二）字母串的 Gödel 数

字母串 $u_0 u_1 \cdots u_k$ 的 Gödel 数规定为

$$g(u_0 u_1 \cdots u_k) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \cdots p_k^{g(u_k)}.$$

这样就把 Gödel 配数扩张到对任意非空字母串都有定义，且保持了单射性：

1° 字母串的 Gödel 数与字母的 Gödel 数不会相同，前者是偶数，后者是奇数；

2° 不同的字母串对应有不同的Gdöel 数（这是因为自然数的素幂积分解式具有唯一性）。

例 $g(+x_3\overline{0}) = 2^3 3^{15+6} 5^{15}$，

$g(\overline{3}) = g('''\overline{0}) = 2^1 3^1 5^1 7^{15}$，

$g(\neg \approx x_1 ' x_2) = 2^7 3^{13} 5^{17} 7^1 11^{19}$，

$g(+\forall\neg\approx) = 2^3 3^{11} 5^7 7^{13}$.

对任一偶数进行素幂积分解，便可确定它是不是某个字母串的Gödel 数。如果是字母串的 Gödel 数，这个字母串可能是项或公式，也可能是没有意义的字母串，如上例中的 $+\forall\neg\approx$。

有一点值得注意：字母的 Gödel数与该字母作为独元字母串的Gödel 数是不同的，前者是奇数，后者是偶数。例如，x_3 作为字母的 Gödel 数是 21，而 x_3 作为独元字母串的 Gödel 数是 2^{21}。问题是：x_3 何时作为单个字母，何时作为独元字母串？在具体场合，这一点必须明确。事实上，在后面所有具体场合，这一点都是明确的，不会产生混淆。

（三）字母串的有限序列的 Gödel 数

设 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ 是字母串的一个有限序列。现把 Gödel 配数 g 进一步扩张成对每个字母串有限序列都有定义：

$$g(s_0, s_1, \cdots, s_n) = 2^{g(s_0)} 3^{g(s_1)} \cdots p_n^{g(s_n)}.$$

这种扩张保持了单射性。首先，素幂积展开的唯一性决定了不同

的字母串有限序列有不同的Gödel 数。此外，字母串有限序列的Gödel 数是偶数（这使它有别于单个字母的 Gödel 数），同时它的素幂积展开式中每个素数的指数也都是偶数，从而又使它有别于字母串的 Gödel 数。

同样要注意，一个公式作为字母串的 Gödel 数与该公式作为字母串的独元序列的 Gödel 数是不相同的。例如，公式 $\approx x_1 x_1$ 作为字母串，Gödel 数是 $2^{13}3^{17}5^{17}$；作为字母串的独元序列，Gödel 数是 $2^{2^{13}3^{17}5^{17}}$。在后面的每个具体场合，每个公式以什么身份出现都是明确的。

这样，我们完成了对Gödel 配数的规定。按照这种配数法，给出字母、字母串或字母串有限序列，便能确定地算出相应的Gödel 数。反过来，任给一个自然数，通过对它进行素幂积分解（并利用字母的配数表）便可确定它是不是Gödel 数。如果是，还可进一步具体地确定它是哪一种 Gödel 数——项的，公式的，公式的有限序列的，一串无意义字母的，或一串无意义字母串的。

练习四十

1. 写出以下项，公式或公式列的 Gödel 数（先将项或公式改写成前置式）。

1° $x_1 \times \overline{0}$,

2° $x_1' \times (x_2 + x_1)$,

3° $\forall x_1 (x_1 \times \overline{0} \approx \overline{0})$,

4° $x_2 \approx \overline{0} \to (x_1 \approx x_2 \to x_1 \approx \overline{0})$,

5° $\exists x_3 (x_3 + x_1 \approx x_2')$,

6° $x_2 \not\approx \overline{0}, x_1 \approx x_2, x_1 \not\approx \overline{0}$.

3.6.3 过程值递归

有了 Gödel 配数，我们可以使K_N“算术化”，并可用递归论的工具来深入研究K_N。在这之前还要做些准备工作。

前面已经讨论过二元递归关系 Divi

$$\mathrm{Divi}=\{(n_1,n_2)\mid n_1=0\text{ 或 }n_1\text{ 能整除 }n_2\},$$

一元递归关系Prm（素数集）和一元递归函数

$$\mathrm{p}(n)=\text{第 }n\text{ 个素数（常用 }\mathrm{p}_n\text{ 表示）}.$$

（见3.4.3 例3，例4和例5。）由此出发，下面继续引进一些与研究K_N的语法有关的递归函数。

命题 1 **当**$n_1>1$**时，设**$n_1=2^{e_0}3^{e_1}\cdots \mathrm{p}_k^{e_k}$**。于是下式定义的二元函数是递归的：**

$$(n_1)_{n_2}=\begin{cases}e_{n_2} & n_1>1;\\ 0, & n_1=0\text{或}1.\end{cases}$$

（$n_1>1$时，$(n_1)_{n_2}$**就是**n_1**的素幂积分解式中**p_{n_2}**的指数。**）

证 为了求$(n_1)_{n_2}$的值，可以这样做：依次用$\mathrm{p}_{n_2}^{0+1}$，$\mathrm{p}_{n_2}^{1+1}$，$\mathrm{p}_{n_2}^{2+1}$，…去除n_1，若其中第一个不能整除n_1的是$\mathrm{p}_{n_2}^{x+1}$，则$(n_1)_{n_2}=x$。按照这个算法，我们有

$$(n_1)_{n_2}=\mu x[\mathrm{sg}(n_1)\times\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(\mathrm{p}_{n_2}^{x+1},n_1))=0].$$

方括号中的因子$\mathrm{sg}(n_1)$是用于照顾$n_1=0$时的根存在性条件。**证毕。**

命题 2 **一元函数lh是递归的，这里lh的定义式是**

$$\mathrm{lh}(n)=\begin{cases}0, & n=0\text{或}1;\\ n\text{的素幂积分解式中非零指数的个数}; & n>1.\end{cases}$$

（例如，当$n=3^{e_0}3^{e_1}\cdots\mathrm{p}_k^{e_k}$，且$e_0,e_1,\cdots,e_k$皆非零时，有

$\mathrm{lh}(n) = k+1$.)

证 逐一检查不比 n 大的素数是否能整除 n，并对能整除 n 的进行计数：

$$\mathrm{lh}(n) = \sum_{x \leqslant n} (C_{\mathrm{Prm}}(x) \times C_{\mathrm{Div}}(x,n))。$$ **证毕。**

推论 1 二元并接函数 $*$ 是递归的，这里的函数 $*$ 由下式定义：

$$n_1 * n_2 = n_1 \times \prod_{x < \mathrm{lh}(n_2)} \mathrm{p}_{\mathrm{lh}(n_1)+x}^{(n_2)_x}。$$

证 由命题 2 及 3.4.2 中的 14° 等可得其递归性。**证毕。**

如果

$$n_1 = 2^{a_0} 3^{a_1} \cdots \mathrm{p}_k^{a_k},$$

$$n_2 = 2^{b_0} 3^{b_1} \cdots \mathrm{p}_l^{b_l},$$

且 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 皆非零，那么

$$n_1 * n_2 = 2^{a_0} 3^{a_1} \cdots \mathrm{p}_k^{a_k} \mathrm{p}_{k+1}^{b_0} \mathrm{p}_{k+2}^{b_1} \cdots \mathrm{p}_{k+l+1}^{b_l}。$$

例 若

$$n_1 = \mathrm{g}(\forall \mathrm{x}_1 \neg \approx) = 2^{11} 3^{17} 5^{7} 7^{13},$$

$$n_2 = \mathrm{g}(' \mathrm{x}_1 \overline{0}) = 2^{1} 3^{17} 5^{15},$$

则

$$n_1 * n_2 = 2^{11} 3^{17} 5^{7} 7^{13} 11^{1} 13^{17} 17^{15},$$

这个数就是字母串 $\forall \mathrm{x}_1 \neg \approx$ 和字母串 $' \mathrm{x}_1 \overline{0}$ 并接后所得字母串 $\forall \mathrm{x}_1 \neg \approx ' \mathrm{x}_1 \overline{0}$ 的 Gödel 数。

回忆由 k 元函数 g 和 $k+2$ 元数函 h 使用规则 II 生成 f 的递归式：

$f(\alpha, 0) = g(\alpha)$，（α 为 $n_1, \cdots, n_k$ 的简写）

$f(\alpha, n+1) = h(\alpha, n, f(\alpha, n))$。

f 在点 $(\alpha, n+1)$ 的值依赖于 f 在点 (α, n) 的值。

下面在分析有关 K_N 的性质时，常要遇到另一种性质的函数，它在点 $(\alpha,n+1)$ 的值不是仅依赖于它在点 (α,n) 的值，而是依赖于它在 $(\alpha,0)$，…，$(\alpha,n-1)$，(α,n) 这些点或这些点中某些点的值。这时，关于它的递归性有下面的结论。

命题 3（过程值递归）设 $k+2$ 元函值 h 是递归 的，且 $k+1$ 元函数 f 满足“过程值递归条件”：

$$f(n_1,\cdots,n_k,n_{k+1})=h(n_1,\cdots,n_k,n_{k+1},f^{\#}(n_1,\cdots,n_k,n_{k+1})),$$

其中

$$f^{\#}(n_1,\cdots n_k,n_{k+1})=\prod_{x<n_{k+1}} p_x^{f(n_1,\cdots,n_k,x)},$$

那么 f 也是递归函数。

证 注意 3.4.2 中的 14° 中的规定，

$$f^{\#}(\alpha,n_{k+1})=\begin{cases}2^{f(\alpha,0)}\cdots p_{n_{k+1}-1}^{f(\alpha,n_{k+1}-1)} & n_{k+1}>0;\\ 1, & n_{k+1}=0.\end{cases}$$

要证明 f 是递归的，按 f 所满足的过程值递归条件，只用证明 $f^{\#}$ 是递归函数就可以了。

事实上，我们有：

$$f^{\#}(\alpha,0)=1,$$

$$f^{\#}(\alpha,n+1)=2^{f(\alpha,0)}\cdots p_{n-1}^{f(\alpha,n-1)}\times p_n^{f(\alpha,n)}$$

$$=f^{\#}(\alpha,n)\times p_n^{f(\alpha,n)}=f^{\#}(\alpha,n)\times p_n^{h(\alpha,n,f^{\#}(\alpha,n))}.$$

这里是规则 Ⅱ——一般的递归规则。**证毕。**

关于 f 和 $f^{\#}$ 的关系，根据 $f^{\#}$ 的定义式，当 $x<n_{k+1}$ 时，自然有下面的结论(#)：

(#) $f(n_1,\cdots,n_k,x)=(f^{\#}(n_1,\cdots,n_k,n_{k+1}))_x$。

练 习 四 十 一

1．对于并接函数 $*$，结合律

$$(n_1*n_2)*n_3=n_1*(n_2*n_3)$$

是否成立？

2．设H是$k+2$元递归关系。若$k+1$元关系R满足

$$(n_1,\cdots,n_{k+1})\in R \Leftrightarrow (n_1,\cdots,n_{k+1},C_R^{\#}(n_1,\cdots,n_{k+1}))\in H,$$

则R也是递归关系。

3．证明 Fibonacci 函数f是递归函数。f的定义式是

$f(0)=1, f(1)=2,\ f(n+2)=f(n)+f(n+1)$。

4．证明函数g的递归性，g的定义是

$g(0)=1, g(1)=2, g(2)=3, g(n+3)=g(n)+g(n+1)+g(n+2)$。

3.6.4 K_N 的一些递归性质

下面开始对K_N的语法进行递归分析，以完成证明 Gödel 不完备性定理的最后准备工作。

本段中，个体变元x_i和个体常元$\overline{0}$都视为独元字母串。

命题 1 N 的以下子集是递归集。

1° $VS=\{2^{15+2k} \mid k\geqslant 1\}$，VS **就是所有个体变元（作为独元字母串）的** Gödel **数构成的集。**

2° TM：**所有**K_N**的项的** Gödel **数构成的集。**

3° YF：**所有**K_N**的原子公式的** Gödel **数构成的集。**

4° FM：**所有**K_N**的公式的** Gödel **数构成的集。**

证 1° 把 VS 的定义改写成

$$n\in VS \Leftrightarrow \exists k<n(k\geqslant 1 \wedge n=2^{15+2k})。$$

上面右边的符号$\exists$和$\wedge$在这里分别是“存在某个”和“并且”这两个中文用语的简写，属于元语言。以下出现的类似情形不再一一说明。

VS 的特征函数是递归的：

$$C_{VS}(n)=\sum_{k<n}(C_{\geqslant}(k,1)\times C_{=}(n,2^{15+2k}))。$$

2° 任给一个项，恰为以下几种可能形式中的一种：$\overline{0}$，

x_1，$'t$，$+t_1t_2$，$\times t_1t_2$，其中 t, t_1, t_2 属于比所在项较低的层次。我们有

$$n\in \mathrm{TM} \Leftrightarrow$$

$$n=2^{15}\vee n\in \mathrm{VS}\vee \exists x<n(n=2^1*x\wedge x\in \mathrm{TM})$$

$$\vee\exists x<n\exists y<n((n=2^3*x*y\vee n=2^5*x*y)\wedge x\in \mathrm{TM}\wedge y\in \mathrm{TM}).$$

这里的右边出现了 $x\in \mathrm{TM}$和 $y\in \mathrm{TM}$，但 $x, y<n$。这时要考虑到过程值递归。

按照对 $n\in \mathrm{TM}$ 的描述，可如下给出 TM 的特征函数 C_{TM} 所满足的关系式：

$$C_{\mathrm{TM}}(n)=C_=(n,2^{15})+C_{\mathrm{VS}}(n)+\sum_{x<n}(C_=(n,2^1*x)\times C_{\mathrm{TM}}(x))$$

$$+\sum_{x<n}\sum_{y<n}((C_=(n,2^3*x*y)+C_=(n,2^5*x*y))$$

$$\times C_{\mathrm{TM}}(x)\times C_{\mathrm{TM}}(y)).$$

上式在把右边所有出现的 $C_{\mathrm{TM}}(x)$，$C_{\mathrm{TM}}(y)$分别换成$(C^{\#}_{\mathrm{TM}}(n))_x$，$(C^{\#}_{\mathrm{TM}}(n))_y$（利用3.6.3（#）式）后，就成了 C_{TM} 所满足的过程值递归条件，于是便可利用 3.6.3 命题 3 断定 C_{TM}具有递归性。

3° 原子公式的结构比较简单，只有$\approx t_1t_2$这样一种形式，故有

$$n\in \mathrm{YF} \Leftrightarrow$$

$$\exists x<n\exists y<n(x\in \mathrm{TM}\wedge y\in \mathrm{TM}\wedge n=2^{13}*x*y).$$

这可翻译成 YF 的特征函数 C_{YF} 的计算公式：

$$C_{\mathrm{YF}}(n)=\sum_{x<n}\sum_{y<n}C_{\mathrm{TM}}(x)\times C_{\mathrm{TM}}(y)\times C_=(n,2^{13}*x*y).$$

这就由 TM 的递归性得到 YF 的递归性。

4° K_N 的公式，除了原子公式，便具有$\neg q$，$q\to r$ 和$\forall x_i q$ 这三种形式中的一种（其中 q，r 属于较低的层次），于是公式的 Gödel 数全体的集 FM 满足：

$$n\in \mathrm{FM} \Leftrightarrow$$

$$n \in \mathrm{YF} \vee \exists x<n\,(x \in \mathrm{FM} \wedge n=2^7 * x)$$
$$\vee \exists x<n \exists y<n\,(x \in \mathrm{FM} \wedge y \in \mathrm{FM} \wedge n=2^9 * x * y)$$
$$\vee \exists x<n \exists y<n\,(x \in \mathrm{VS} \wedge y \in \mathrm{FM} \wedge n=2^{11} * x * y),$$

这可翻译成

$$C_{\mathrm{FM}}(n)=C_{\mathrm{YF}}(n)+\sum_{x<n} C_{\mathrm{FM}}(x) \times C_{=}(n, 2^7 * x)$$
$$+\sum_{x<n} \sum_{y<n} C_{\mathrm{FM}}(x) \times C_{\mathrm{FM}}(y) \times C_{=}(n, 2^9 * x * y)$$
$$+\sum_{x<n} \sum_{y<n} C_{\mathrm{VS}}(x) \times C_{\mathrm{FM}}(y) \times C_{=}(n, 2^{11} * x * y).$$

把上式中 $C_{\mathrm{FM}}(x)$，$C_{\mathrm{FM}}(y)$ 都分别换成 $(C^{\#}_{\mathrm{FM}}(n))_x$ 和 $(C^{\#}_{\mathrm{FM}}(n))_y$，便得 C_{FM} 所满足的过程值递归条件；然后用 3.6.3 命题 3 便可。**证毕**。

分别对 $i=1,\cdots,5$ 把所有 (Ki) 型公理的 Gödel 数构成的集记为 LA_i。

命题 2 $\mathrm{LA}_1, \mathrm{LA}_2, \mathrm{LA}_3$ **是递归集**。

证 $n \in \mathrm{LA}_1 \Leftrightarrow$

$$\exists x<n \exists y<n\,(x \in \mathrm{FM} \wedge y \in \mathrm{FM} \wedge n=2^9 * x * 2^9 * y * x),$$

$$C_{\mathrm{LA}_1}(n)=\sum_{x<n} \sum_{y<n} C_{\mathrm{FM}}(x) \times C_{\mathrm{FM}}(y) \times C_{=}(n, 2^9 * x * 2^9 * y * x).$$

由 FM 的递归性可得 LA_1 的递归性。

LA_2 和 LA_3 的情形是类似的。**证毕**。

要证明 LA_4 和 LA_5 的递归性，困难在于要设法递归地表示出这样的关系：在 Gödel 数为 n_3 的项 $u(\mathrm{x}_i)$ 或公式 $p(\mathrm{x}_i)$（以下简称为"n_3 项 $u(\mathrm{x}_i)$"或"n_3 公式 $p(\mathrm{x}_i)$"）中，用 Gödel 数为 n_2 的项 t（简称为"n_2 项 t"）去替换 Gödel 数为 n_1 的变元 x_i（简称为"n_1 变元 x_i"）的所有自由出现所得结果 $u(t)$ 或 $p(t)$ 的 Gödel 数是 n_4。

下面就来讨论这样的关系。它本应该是四元关系。但为了避

免出现更复杂的（涉及两个自然数变量的）过程值递归，特采用这样的办法：令 $\gamma = 2^{n_3}3^{n_4}\cdots$，于是 $(\gamma)_0 = n_3$，$(\gamma)_1 = n_4$。这样就把对上述四元关系的研究转化为对一个三元关系的研究。

以后把变元在项中的出现都叫做自由出现。

命题 3　三元关系 SBS 是递归关系。SBS 的定义是

$(n_1, n_2, \gamma) \in \mathrm{SBS} \Longleftrightarrow n_1 \in \mathrm{VS}$，$n_2 \in \mathrm{TM}$，$(\gamma)_0 \in \mathrm{TM} \cup \mathrm{FM}$，$(\gamma)_1$ **是用** n_2 **项去替换** $(\gamma)_0$ **项或** $(\gamma)_0$ **公式中的** n_1 **变元的全部自由出现所得结果的** Gödel **数。**

证　为了证明 SBS 的递归性，首先分析一下用项 t 去替换项 $u(x_i)$ 或公式 $p(x_i)$ 中所有自由的 x_i，会有哪些可能的类型。

类型 1（最简型）$u(x_i) = x_i$，此时 $u(t) = t$。

类题 2（确定不变型）

(i) $u(x_i) = \ulcorner 0$ 或 $x_j (\neq x_i)$，此时 $u(t) = u(x_i)$；

(ii) $p(x_i) = \forall x_i q(x_i)$（无自由 x_i），此时 $p(t) = p(x_i)$。

类型 3（$\prime$ $\neg$ 型）

(i) $u(x_i) = \prime t_1(x_i)$，此时 $u(t) = \prime t_1(t)$；

(ii) $p(x_i) = \neg q(x_i)$，此时 $p(t) = \neg q(t)$。

类型 4（其他）

(i) $u(x_i) = + t_1(x_i) t_2(x_i)$，$u(t) = + t_1(t) t_2(t)$；

(ii) $u(x_i) = \times t_1(x_i) t_2(x_i)$，$u(t) = \times t_1(t) t_2(t)$；

(iii) $p(x_i) = \approx t_1(x_i) t_2(x_i)$，$p(t) = \approx t_1(t) t_2(t)$；

(iv) $p(x_i) = \rightarrow q(x_i) r(x_i)$，$p(t) = \rightarrow q(t) r(t)$；

(v) $p(x_i) = \forall x_j q(x_i)$，$(x_j \neq x_i)$，$p(t) = \forall x_j q(t)$。

此外不会有别种情形发生。

基于以上分析，我们可以写出：

$(n_1, n_2, \gamma) \in \mathrm{SBS} \Leftrightarrow$

$n_1 \in \mathrm{VS} \wedge n_2 \in \mathrm{TM} \wedge (\gamma)_0 \in \mathrm{TM} \cup \mathrm{FM} \wedge$

$((\gamma)_0 = n_1 \wedge (\gamma)_1 = n_2) \vee$　　　　（类型 1）

$\exists x < (\gamma)_0 (((\gamma)_0 = 2^x \wedge (\gamma)_0 \neq n_1) \vee (\gamma)_0$

$$=2^{11}*n_1*x)\wedge(Y)_1=(Y)_0)\vee \qquad \text{（类型 2）}$$

$$\exists x<(Y)_0\exists y<(Y)_0\exists z<(Y)_1((Y)_0=2^x*y\wedge(Y)_1=2^x*z\wedge$$

$$(n_1,n_2,2^y3^z)\in SBS)\vee \qquad \text{（类型 3）}$$

$$\exists x<(Y)_0\exists y<(Y)_0\exists z<(Y)_0\exists u<(Y)_1\exists v<(Y)_1((Y)_0$$

$$=2^x*y*z\wedge(x\neq 11\vee y\neq n_1)\wedge(Y)_1=2^x*u*v\wedge$$

$$(n_1,n_2,2^y3^u)\in SBS\wedge(n_1,n_2,2^z3^v)\in SBS)). \qquad \text{（类型 4）}$$

由此可得到 C_{SBS} 所满足的过程值递归条件。**证毕。**

有了与替换有关的三元递归关系 SBS 以后，现在要继续考察：用 n_2 项 t 去替换 n_3 项 $u(x_i)$ 或 n_3 公式 $p(x_i)$ 中所有自由的 n_1 变元 x_i，所得结果 $u(t)$ 或 $p(t)$ 的 Gödel 数是多少，能否递归地算出来？

先尝试一下，看是否可以这样表示出上述替换结果的 Gödel 数：

$$\mu x[C_{SBS}(n_1,n_2,2^{n_3}3^x)=1].$$

这样做还不行，因为根存在性条件不能保证得到满足，例如当 $n_1\notin VS$ 时，方括号内左端始终为零。但只要作一点修改就可以了。在方括号内等式左边增加一项 $C_{\leqslant}(m,x)$，这里的 m 取得充分大，大到使它不可能是上述替换结果的 Gödel 数，例如取 $m=(p_{n_2n_3})^{n_2^2n_3^2}$。于是有

命题 4　三元函数 Sub 是递归函数，Sub 由下式定义：

$$\mathrm{Sub}(n_1,n_2,n_3)=\mu x[C_{SBS}(n_1,n_2,2^{n_3}3^x)$$

$$+C_{\leqslant}((p_{n_2n_3})^{n_2^2n_3^2},x)=1].$$

按 SBS 的定义，可以把上式更具体地写出：

$$\mathrm{Sub}(n_1,n_2,n_3)=$$

$$\begin{cases} g(u(t)), & 若\ n_1=g(x_i),n_2=g(t),n_3=g(u(x_i));\\ g(p(t)), & 若\ n_1=g(x_i),n_2=g(t),\ n_3=g(p(x_i));\\ p_{n_2n_3}^{n_2^2n_3^2}, & 其他情形, \end{cases}$$

其中 $g(u(t))$ 是用 n_2 项 t 替换 n_3 项 $u(x_i)$ 中所有自由的 n_1 变元

x_i 所得结果 $u(t)$ 的 Gödel 数。$g(p(t))$ 与之类似。往后如不另作说明，函数 g 皆用来表示 Gödel 配数。

断定 LA_4 和 LA_5（它们分别是（K4）和（K5）型公理的 Gödel 数集）的递归性，还要下面的结论。

命题 5　以下关系是递归关系。

1°　$FR=\{(n_1,n_2)\mid n_1$ 变元在 n_2 项或 n_2 公式中自由出现$\}$。

2°　$FRT=\{(n_1,n_2,n_3)\mid n_2$ 项对 n_3 公式中的 n_1 变元是自由的$\}$。

证　1°　为了确定 n_1 变元是否在 n_2 项或 n_2 公式中自由出现，可采用如下方法：用不同于 n_1 变元的另一变元去替换 n_2 项或 n_2 公式中所有自由出现的 n_1 变元。替换结果不引起任何变化，则说明 n_1 变元不自由出现；否则说明自由出现。于是有

$$(n_1,n_2)\in FR \Leftrightarrow$$
$$n_1\in VS \wedge n_2\in TM\cup FM\wedge (n_1,n_1\times 2^{*},2^{*}\cdot 3^{*})\notin SBS.$$

2°　如果项 t 对公式 p 中 x_i 是自由的，那么恰有以下四种情形中的一种出现：

(i)　p 是原子公式；

(ii)　$p=\neg q$ 或 $\to qr$，这时 t 对 q 及 r 中 x_i 是自由的；

(iii)　$p=\forall x_i q$，

(iv)　$p=\forall x_j q, x_j\neq x_i$，这时或者 q 中没有自由的 x_i，或者 t 中没有 x_j，而 t 对 q 中 x_i 是自由的。

以上分析说明：

$$(n_1,n_2,n_3)\in FRT \quad \Leftrightarrow$$
$$n_1\in VS\wedge n_2\in TM\wedge n_3\in FM\wedge$$
$$(n_3\in YF\vee \exists x<n_3\,(n_3=2^7*x\wedge(n_1,n_2,x)\in FRT)\vee$$
$$\exists x<n_3\,\exists y<n_3\,(n_3=2^9*x*y\wedge(n_1,n_2,x)\in FRT\wedge$$
$$(n_1,n_2,y)\in FRT)\vee$$
$$\exists x<n_3\,\exists y<n_3\,(n_3=2^{11}*x*y\wedge x\in VS\wedge$$
$$(x=n_1\vee(n_1,y)\notin FR\vee((x,n_2)\notin FR\wedge(n_1,n_2,y)$$

$\in$FRT)))).

由此可写出 C_{FRT} 所满足的过程值递归条件。**证毕。**

命题 6 LA_4，LA_5 是递归集，从而

$$LA = LA_1 \cup \cdots \cup LA_5$$

是递归集。就是说，K_N的所有逻辑公理((K1)-(K5))的 Gödel 数构成的集是递归集。

证 LA_4 是所有形为 $\to \forall x_i p(x_i) p(t)$（其中 t 对 $p(x_i)$ 中 x_i 自由）的公式的 Gödel 数构成的集。所以有

$n \in LA_4 \quad \Leftrightarrow$

$\exists x < n \exists y < n \exists z < n (x \in VS \wedge y \in TM \wedge z \in FM \wedge$

$(x, y, z) \in FRT \wedge n = 2^9 * 2^{11} * x * z * Sub(x, y, z))$.

由 Sub，FRT 等的递归性便得 LA_4 的递归性。

LA_5 是所有形为 $\to \forall x_i \to pq \to p \forall x_i q$（其中 x_i 不在 p 中自由出现）的公式的 Gödel 数集。所以有

$n \in LA_5 \quad \Leftrightarrow$

$\exists x < n \exists y < n \exists z < n (x \in VS \wedge y \in FM \wedge z \in FM \wedge$

$n = 2^9 * 2^{11} * x * 2^9 * y * z * 2^9 * y * 2^{11} * x * z \wedge (x, y) \notin FR)$.

由 FR 等的递归性可得 LA_5 的递归性。**证毕。**

下面讨论算术公理Gödel 数集的递归性，讨论中不再有新的困难。

命题 7 PA——**所有 $\mathcal{N}$ 中公式（即算术公理）Gödel 数集——是递归集，从而**

$$AX = LA \cup PA$$

是递归集。（AX 就是包括逻辑公理和性质公理都在内的所有K_N公理的 Gödel 数的全体构成的集。）

证 $PA = EA_1 \cup EA_2 \cup EA_3 \cup NA_1 \cup \cdots \cup NA_7$，其中 EA_i 是（Ei）型等词公理 Gödel 数全体的集；NA_i 是（Ni）型算术公理 Gödel 数全体的集。

EA_1 是所有形为 $\approx tt$（t 是任意的项）的公式 Gödel 数集，

所以有

$$n \in EA_1 \Leftrightarrow \exists x < n(x \in TM \wedge n = 2^{13} * x * x).$$

由 TM 等的递归性可得 EA_1 的递归性。

完全类似地可得 EA_2, EA_3, NA_1—NA_6 的递归性。至于 NA_7，它是所有形为

$$\rightarrow p(\overline{0}) \rightarrow \forall x_i \rightarrow p(x_i) p({\prime} x_i) \forall x_i p(x_i)$$

的公式的 Gödel 数集，所以有

$$n \in NA_7 \Leftrightarrow \exists x < n \exists y < n(x \in VS \wedge y \in FM \wedge$$

$$n = 2^9 * Sub(x, 2^{15}, y) * 2^9 * 2^{11} * x * 2^9 * y$$

$$* Sub(x, 2^1 * x, y) * 2^{11} * x * y).$$

由 Sub 等的递归性得 NA_7 的递归性。**证毕。**

公理 Gödel 数全体的集 $AX = LA \cup PA$ 是递归集这一事实的重要性在于，由它决定了另一重要事实——所有从 $\mathscr{N}$ 的证明的 Gödel 数构成的集 PF 是递归集。

命题 8 以下关系和集是递归的。（g 仍表示 Gödel **配数**）。

1° $MP = \{(n_1, n_2, n_3) \mid n_1 = g(p), n_2 = g(p \rightarrow q), n_3 = g(q)\}$,

2° $GEN = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(p), n_2 = g(\forall x_i p)\}$,

3° $PF = \{n \mid n$ **是从** $\mathscr{N}$ **的证明的** Gödel **数**$\}$,

4° $PRF = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(p)$, n_2 **是** p **从** $\mathscr{N}$ **的证明的** Gödel **数**$\}$。

证 1° $(n_1, n_2, n_3) \in MP \Leftrightarrow$

$$n_1 \in FM \wedge n_3 \in FM \wedge n_2 = 2^9 * n_1 * n_3.$$

2° $(n_1, n_2) \in GEN \Leftrightarrow$

$$n_1 \in FM \wedge \exists x < n_2(x \in VS \wedge n_2 = 2^{11} * x * n_1).$$

3° $n \in PF \Leftrightarrow \exists x < n(n = 2^x \wedge x \in AX) \vee$

$$\exists x < n \exists y < n \exists z < n \exists w < n(n = x * 2^y \wedge x \in PF \wedge$$

$$(((x)_z, (x)_w, y) \in MP \vee ((x)_z, y) \in GEN \vee y \in AX)).$$

由此可得 C_{PF} 满足的过程值递归条件。

4° $(n_1,n_2)\in \mathrm{PRF} \Leftrightarrow n_2\in \mathrm{PF}\wedge n_1=(n_2)_{lh(n_2)\dot{-}1}$。**证毕。**

让我们注意命题 8 — 3° 的证明。这个证明的过程说明，PF 的递归性依赖于 AX 的递归性，但仅仅只依赖于“AX 是递归的”这一点，而与 AX 中所包含的是哪些具体公理的 Gödel 数无关。不管是减少一些公理，还是改变一些公理，甚至再增加更多的公理，只要保持 AX 的递归性，便都不改变 PF 的递归性。对于这个事实，后面还要作深入讨论。

命题 9　一元函数 Num 是递归函数，它的定义式是

$$\mathrm{Num}(n)=g(\overline{n})\text{，即数字 }\overline{n}\text{ 的 Gödel 数。}$$

证
$$\mathrm{Num}(0)=g(\overline{0})=2^{15},$$
$$\mathrm{Num}(n+1)=g(\overline{n+1})=g(\prime\,\overline{n})=2^{1}*g(\overline{n})$$
$$=2^{1}*\mathrm{Num}(n)\text{。}$$ **证毕。**

练　习　四　十　二

1．试写出 C_{SBF}，C_{PRF} 和 C_{PF} 所满足的过程值递归条件。

2．如果先知道 PF 是递归集，反过来证明 AX 是递归集。

3．证明二元关系W的递归性，其中

$$W=\{(n_1,n_2)\mid n_1\text{ 是 }p(x_i)\text{ 的 Gödel 数，}n_2\text{ 是 }p(\overline{n_1})\text{ 从 }\mathscr{N}\text{ 的证明的 Gödel 数}\}\text{。}$$

*3.6.5　可表示函数的递归性

利用已得结果，顺便可以证明可表示函数的递归性。下面在证明 Gödel 不完备性定理时并不用这个结论。

定理 1（可表示函数的递归性） REP⊆REC。**即：在 $\mathscr{N}$ 中可表示的函数必为递归函数。**

证　设 k 元函数 f 用公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 可表示。把 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 的 Gödel 数记为 c_0，

$$c_0=g(p(x_1,\cdots,x_{k+1}))\text{。}$$

f 给定之后，α_0 是个定数。现利用已有的公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 作出一个 $k+2$ 元关系 W_p：

$W_p=\{(n_1,\cdots,n_{k+2})\mid n_{k+2}$ 是 $p(\overline{n}_1,\cdots,\overline{n}_{k+1})$ 从 $\mathscr{N}$ 的证明的Gödel 数$\}$。

把 $p(\overline{n}_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$，$p(\overline{n}_1,\overline{n}_2,x_3,\cdots,x_{k+1})$，$\cdots$，$p(\overline{n}_1,\overline{n}_2,\cdots,\overline{n}_{k+1})$ 的 Gödel 数分别记为

$$\alpha_1(n_1),\alpha_2(n_1,n_2),\cdots,\alpha_{k+1}(n_1,\cdots,n_{k+1}),$$

这是一串递归函数：

$$\alpha_1(n_1)=g(p(\overline{n}_1,x_2,\cdots,x_{k+1}))=\mathrm{Sub}(2^{15+2},\mathrm{Num}(n_1),\alpha_0),$$

$$\alpha_2(n_1,n_2)=g(p(\overline{n}_1,\overline{n}_2,x_3,\cdots,x_{k+1}))$$
$$=\mathrm{Sub}(2^{15+4},\mathrm{Num}(n_2),\alpha_1(n_1)),$$

………

$$\alpha_{k+1}(n_1,\cdots,n_{k+1})=g(p(\overline{n}_1,\overline{n}_2,\cdots,\overline{n}_{k+1}))$$
$$=\mathrm{Sub}(2^{15+2(k+1)},\mathrm{Num}(n_{k+1}),\alpha_k(n_1,\cdots,n_k)).$$

现在由 W_p 的定义立即可知 W_p 是递归的：

$$C_{W_p}(n_1,\cdots,n_{k+2})=C_{\mathrm{PRF}}(\alpha_{k+1}(n_1,\cdots,n_{k+1}),n_{k+2}).$$

又因已设 f 用 $p(x_1\cdots,x_{k+1})$ 可表示，故有

$$\mathscr{N}\vdash p(\overline{n}_1,\cdots,\overline{n}_k,\overline{f(n_1,\cdots,n_k)}).\quad(由 3.3.1命题 1\text{-}1°)$$

把 $p(\overline{n}_1,\cdots,\overline{n}_k,\overline{f(n_1,\cdots,n_k)})$ 从 $\mathscr{N}$ 的一个证明的 Gödel数记为 m。按 W_p 的定义，我们有

$$(n_1,\cdots,n_k,f(n_1,\cdots,n_k),m)\in W_p.$$

这说明：对于任意的 $n_1,\cdots,n_k$，一定存在 x 使

$$(n_1,\cdots,n_k,(x)_0,(x)_1)\in W_p.$$

（例如取 $x=2^{f(n_1,\cdots,n_k)}3^m$ 便可。）这个事实保证了下面定义的 k 元函数 x^* 是处处有定义的递归全函数：

$$x^*(n_1,\cdots,n_k)=\mu x[C_{W_p}(n_1,\cdots,n_k,(x)_0,(x)_1)=1].$$

于是自然有

$$C_{W_p}(n_1,\cdots,n_k,(x^*(n_1,\cdots,n_k))_0,(x^*(n_1,\cdots,n_k))_1)=1,$$

即

$$(n_1,\cdots,n_k,(x^*((n_1,\cdots,n_k))_0,(x^*(n_1,\cdots,n_k))_1)\in W_p.$$

由此及 W_p 的定义便得

(1) $\qquad \mathcal{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{(x^*(n_1,\cdots,n_k))_0}).$

现假设

(2) $\qquad f(n_1,\cdots,n_k)\neq(x^*(n_1,\cdots,n_k))_0.$

由此假设及3.3.1定义1 (ii) 立即得

(3) $\qquad \mathcal{N}\vdash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\overline{(x^*(n_1,\cdots,n_k))_0}).$

N是无矛盾的，故（1）与（3）不能同时成立.这说明所作的假设（2）是不能成立的，除非$\mathcal{N}$有矛盾。这样，我们就在$\mathcal{N}$无矛盾的假定之下证明了可表示函数f具有递归性：

$$f(n_1,\cdots,n_k)=(x^*(n_1,\cdots,n_k))_0$$
$$=(\mu x[C_{W_p}(n_1,\cdots,n_k,(x)_0,(x)_1)=1])_0.$$ **证毕.**

把定理1与3.5推论3合起来，我们得到

$$\mathrm{REC}=\mathrm{REP},$$

即：递归性与在 K_N 中的可表示性是一回事.

练 习 四 十 三

1. 修改可表示性的定义（3.3.1定义1），把原定义中的$\mathcal{N}$换成$\mathcal{N}$的无矛盾扩张$\mathcal{N}^*$，但保持$\mathcal{N}^*$中公理的Gödel数集的递归性（这时说$\mathcal{N}^*$是$\mathcal{N}$的递归无矛盾扩张）. 试问 $\mathrm{REC}=\mathrm{REP}^*$ 成立否？(REP^* 指扩张的系统中可表示函数全体的集.)

4 不完备性定理

4.1 Gödel 不完备性定理

有了前面的准备工作，下面要证明关于形式算术的一个重要结论——在$\mathscr{N}$无矛盾的假定之下，$\mathscr{N}$是不完备的，即：K_N中存在着闭式，它和它的否定都从$\mathscr{N}$不可证（这样的闭式叫做$\mathscr{N}$的不可判定公式）。能否用增加$\mathscr{N}$中公理或其他办法来达到完备性？我们也要回答这个问题。

4.1.1 Gödel 定理

K_N中公式集Γ是完备的，是指对K_N中的任一闭式p，$\Gamma\vdash p$与$\Gamma\vdash\neg p$二者必居其一。为证$\mathscr{N}$不完备，只要构造一个闭式p，它从$\mathscr{N}$不可判定，即：$\mathscr{N}\vdash p$与$\mathscr{N}\vdash\neg p$都不成立。

我们已经知道，自然数集N上的函数和关系是否递归，等同于是否在K_N中可表示。关于K_N的结论可以通过Gödel配数转化成关于自然数的结论。而关于自然数的结论又可大量地在K_N中形式化。我们将会看到，利用N与K_N之间的上述密切联系，能够自然地产生出一种“自相关”，构造出一种具有“自相关”特征的公式。这种公式从语义上恰恰对自身有所断定，特别是对自己的可证性有所申明。在下面的讨论过程中让我们注意观察这种“自相关”特性的产生和所起的作用。

Gödel 在建立自己的结论时，引进了ω-无矛盾的概念。

公式集Γ是无矛盾的，指对任何公式p，$\Gamma\vdash p$与$\Gamma\vdash\neg p$

不会同时成立。"ω-无矛盾"是比"无矛盾"更强的条件。

定义 1 （ω-无矛盾）**公式集 Γ 是 ω-无矛盾的，意为对 K_N 中任一含有自由变元 x_i 的公式 $p(x_i)$，以下两条都不会同时成立：**

1° **对所有** $n\in N$，$\Gamma\vdash p(\overline{n})$，

2° $\Gamma\vdash\neg\forall x_i p(x_i)$。

命题 1 **若 Γ ω-无矛盾，则 Γ 无矛盾。**

证 （反证）假设 Γ 有矛盾。由 2.1.3 命题 1 便知任何公式都从 Γ 可证，从而对任一含自由变元 x_1 的公式 $p(x_1)$，定义 1 中的条件 1° 与 2° 都同时成立，于是 Γ 并非 ω-无矛盾。**证毕。**

为讨论 $\mathscr{N}$ 的不完备性，先引入一个二元关系W：

W = {(n_1,n_2) | n_1 是某个公式 $p(x_1)$ 的 Gödel 数，n_2 是 $p(\overline{n_1})$ 从 $\mathscr{N}$ 的证明的 Gödel 数}。

换一种方式，可写：

$$(n_1,n_2)\in W \Leftrightarrow n_1\in FM\wedge(Sub(2^{15+2},\ Num(n_1),n_1),n_2)\in PRF.$$

W是递归的，它的特征函数是

$C_W(n_1,n_2)=C_{FM}(n_1)\times C_{PRF}(Sub(2^{17},\ Num(n_1),n_1),n_2)$，

其中 FM，Sub，Num 和 PRF 递归性已在 3.6.4 中得到证明。

二元关系W是递归的，所以在 K_N 中可表示。设 W 用公式 $w(x_1,x_2)$ 可表示：

$$(n_1,n_2)\in W \Rightarrow \mathscr{N}\vdash w(\overline{n_1},\overline{n_2});$$

$$(n_1,n_2)\notin W \Rightarrow \mathscr{N}\vdash\neg w(\overline{n_1},\overline{n_2}).$$

记

$$p(x_1)=\forall x_2\neg w(x_1,x_2),$$

它只有一个自由变元 x_1。把它的 Gödel 数设为 m：

$$m=g(p(x_1)).$$

然后用$\overline{m}$去替换$p(x_1)$中所有自由出现的x_1，得一闭式（*）：

（*）　　$$p(\overline{m}) = \forall x_2 \neg w(\overline{m}, x_2)。$$

这是一个有自相关特点的公式。我们先直观地分析一下它的自相关特性。

注意W的定义以及W用$w(x_1,x_2)$可表示这一事实。公式$p(\overline{m})$（即$\forall x_2 \neg w(\overline{m},x_2)$）的直观意思是：对于任何自然数$n$，都有$(m,n)\notin W$。换句话说，不存在自然数$n$使$(m,n)\in W$。这是什么意思呢？$m$是$p(x_1)$的Gödel数。用$\overline{m}$代换$x_1$，得$p(\overline{m})$。是否存在自然数$n$成为$p(\overline{m})$从$\mathscr{N}$的证明的Gödel数（即$(m, n)\in W$）？$p(\overline{m})$自己回答：不存在这样的自然数。

直截了当地说，$p(\overline{m})$自我声明：

“我从$\mathscr{N}$不可证！”

定理 1　(Gödel)

（i）若$\mathscr{N}$无矛盾，则$\mathscr{N}\vdash p(\overline{m})$不成立，

（ii）若$\mathscr{N}$ω-无矛盾，则$\mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{m})$不成立，

其中$p(\overline{m})$是上面的闭式（*）.

证　（i）先假设$\mathscr{N}\vdash p(\overline{m})$，即

（1）　　$$\mathscr{N}\vdash \forall x_2 \neg w(\overline{m},x_2)。$$

把$p(\overline{m})$从$\mathscr{N}$的一个证明的Gödel数记为n，则$(m,n)\in W$。因W是用$w(x_1,x_2)$表示的，故

（2）　　$$\mathscr{N}\vdash w(\overline{m},\overline{n})。$$

由（1）使用（K4）和MP即可得

$$\mathscr{N}\vdash\neg w(\overline{m},\overline{n}),$$

它与（2）说明了$\mathscr{N}$是有矛盾的。

（ii）再假设$\mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{m})$，即

（3）　　$\mathscr{N}\vdash\neg\forall x_2\neg w(\overline{m},x_2)$。

已知 $\mathscr{N}\vdash p(\overline{m})$ 不成立（由（i））．根据W的定义便知对于任何自然数n，都有 $(m,n)\notin W$。又因W用 $w(x_1,x_2)$ 可表示，故对所有n，都有

$$\mathscr{N}\vdash\neg w(\overline{m},\overline{n}).$$

这个事实与（3）结合起来，说明$\mathscr{N}$并非 ω-无矛盾。**证毕。**

定理1告诉我们，如果$\mathscr{N}$是 ω-无矛盾的，（因而也是无矛盾的，）那么$p(\overline{m})$ 是$\mathscr{N}$的不可判定闭式。这说明必定存在着在N中恒真的公式而从$\mathscr{N}$不可证。（注意闭式的语义特征，任一闭式p和它的否定$\neg p$二者中必有一个在N中恒真。）

为证明$\mathscr{N}$的不完备性，“ω-无矛盾”这个更强的假定并不是必要的。下面4.1.2中的Gödel-Rosser定理就是在“无矛盾”的假定之下证明了不完备性。

练 习 四 十 四

1．证明$|p(\overline{m})|_N=1$。

2．证明$\mathscr{N}\cup\{\neg p(\overline{m})\}$是无矛盾的，但并非 ω-无矛盾。

以上两题的 $p(\overline{m})$都是文中的闭式（*）．

3．试证下面的二元关系是递归的：

$$W_1=\{(n_1,n_2)\,|\,n_1=g(q);\ n_2\text{ 是公式 }\neg r(\overline{n_1})\to\neg q\text{ 从 }\mathscr{N}\text{ 的证明的 Gödel 数}\},$$

其中$r(\overline{n_1})$ 是用$\overline{n_1}$代换某个固定的公式$r(x_1)$中的自由出现的x_1所得结果。

4.1.2 Gödel-Rosser 定理

$\mathscr{N}$的不完备性能否用增加公理的办法予以消除？现在来回答这个问题。

下面的定理是形式算术不完备性定理的比较一般的形式。

定理 1 (Gödel-Rosser) **$\mathscr{N}$的任何递归无矛盾扩张$\mathscr{N}^*$都不完备，即：如果扩张的公理集$\mathscr{N}^*$($\supseteq\mathscr{N}$)无矛盾，且 PA^* ($=\mathscr{N}^*$中全部公理的 Gödel 数构成的集）是递归集，那么$\mathscr{N}^*$不完备.**

证 把 3.6.4 命题 7 中的 PA 改为 PA^*，得到新的递归集 $AX^*=LA\cup PA^*$。然后，把3.6.4 命题8 中 PF 和 PRF 的定义式里的$\mathscr{N}$改为$\mathscr{N}^*$，这并不改变 PF 和 PRF 的递归性。为方便计，PF 和 PRF 的符号不变。

作二元关系W和W^*：

$W=\{(n_1,n_2)\mid n_1$ 是某公式 $p(x_1)$ 的 Gödel 数，n_2 是 $p(\overline{n_1})$ 从 $\mathscr{N}^*$的证明的 Gödel 数$\}$.

$W^*=\{(n_1,n_2)\mid n_1$ 是某公式 $p(x_1)$ 的 Gödel 数，

n_2 是 $\neg p(\overline{n_1})$ 从$\mathscr{N}^*$的证明的 Gödel 数$\}$.

W的定义与 4.1.1 中的定义不同的是把$\mathscr{N}$换成了$\mathscr{N}^*$，但其递归性的证明与原来的一样。

W^*也是递归的，它的特征函数可写成

$$C_{W^*}(n_1,n_2)=C_{FM}(n_1)\times C_{PRF}(\mathrm{Sub}(2^{15+2},\mathrm{Num}(n_1),2^7*n_1),n_2).$$

设W和W^*分别用 $w(x_1,x_2)$ 和 $w^*(x_1,x_2)$ 可表示。记

$$p(x_1)=\forall x_2(w(x_1,x_2)\rightarrow\exists x_i(x_i\leqslant x_2\wedge w^*(x_1,x_i))),$$

其中 x_i 取为不在 $w(x_1,x_2)$ 和 $w^*(x_1,x_2)$ 中出现的某个变元。把 $p(x_1)$ 的 Gödel 数记为 m：

$$m=g(p(x_1)).$$

于是

$$p(\overline{m}) = \forall x_2 (w(\overline{m}, x_2) \to \exists x_i (x_i \leqslant x_2 \wedge w^*(\overline{m}, x_i))).$$

($p(\overline{m})$ 的直观意思是："如果我有一个 Gödel 数为 $\bar{x}_2$ 的从$\mathscr{N}^*$的证明，那么我的否定有一个 Gödel 数为 $\bar{x}_i$ 的从$\mathscr{N}^*$的证明，且 $\bar{x}_i \leqslant \bar{x}_2$。" 简单地说，$p(\overline{m})$ 自我声明：

"我若从$\mathscr{N}^*$可证，则我的否定也从$\mathscr{N}^*$可证且证明更简单。")

为证$\mathscr{N}^*$是不完备的，只用证$p(\overline{m})$ 是$\mathscr{N}^*$的不可判定公式就可以了，即要证：

$$\mathscr{N}^* \vdash p(\overline{m}) \quad 和 \quad \mathscr{N}^* \vdash \neg p(\overline{m}) \text{ 都不成立。}$$

先假设$\mathscr{N}^* \vdash p(\overline{m})$，即

（1）$\mathscr{N}^* \vdash \forall x_2 (w(\overline{m}, x_2) \to \exists x_i (x_i \leqslant x_2 \wedge w^*(\overline{m}, x_i)))$.

设$p(\overline{m})$从$\mathscr{N}^*$的一个证明的 Gödel 数为 n，则 $(m,n) \in W$。于是有

（2）$\mathscr{N}^* \vdash w(\overline{m}, \overline{n})$ （由$\mathscr{N} \vdash w(\overline{m}, \overline{n})$ 及$\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}^*$）

（3）$\mathscr{N}^* \vdash w(\overline{m}, \overline{n}) \to \exists x_i (x_i \leqslant \overline{n} \wedge w^*(\overline{m}, x_i))$

（(1)，(K4)，MP）

（4）$\mathscr{N}^* \vdash \exists x_i (x_i \leqslant \overline{n} \wedge w^*(\overline{m}, x_i))$ （(2)，(3) MP）

（5）$\mathscr{N}^* \vdash \neg p(\overline{m})$ 不成立 （否则$\mathscr{N}^*$有矛盾）

（6）对任意 $k \in N$，$(m,k) \notin W^*$，从而$\mathscr{N}^* \vdash \neg w^*(\overline{m}, \overline{k})$

（由（5）及W^*的定义）

（7）$\mathscr{N}^* \vdash \neg w^*(\overline{m}, \overline{0}) \wedge \cdots \wedge \neg w^*(\overline{m}, \overline{n})$ （由（6））

（8）$\mathscr{N}^* \vdash x_i \leqslant \overline{n} \to \neg w^*(\overline{m}, x_i)$ （由（7）及 3.2 命题14）

（9）$\mathscr{N}^* \vdash \forall x_i \neg (x_i \leqslant \overline{n} \wedge w^*(\overline{m}, x_i))$

（(8)，永真式 $(p\to\neg q)\to\neg(p\wedge q)$，Gen）

(10) $\mathscr{N}^*\vdash\neg\exists x_i(x_i\leqslant\overline{n}\wedge w^*(\overline{m},x_i))$ （由(9)）

（4）与（10）说明$\mathscr{N}^*$有矛盾，所以$\mathscr{N}^*\vdash p(\overline{m})$不成立。

再假设$\mathscr{N}^*\vdash\neg p(\overline{m})$。将$\neg p(\overline{m})$ 从$\mathscr{N}^*$的一个证明的 Gödel 数记为 n，则 $(m,n)\in W^*$，进而$\mathscr{N}^*\vdash w^*(\overline{m},\overline{n})$。于是有以下结论。

（1） $\mathscr{N}^*\cup\{\overline{n}\leqslant x_2\}\vdash\overline{n}\leqslant x_2\wedge w^*(\overline{m},\overline{n})$

（2） $\mathscr{N}^*\cup\{\overline{n}\leqslant x_2\}\vdash\exists x_i(x_i\leqslant x_2\wedge w^*(\overline{m},x_i))$

（由（1）用 $\exists_1$ 规则）

（3） $\mathscr{N}^*\vdash\overline{n}\leqslant x_2\to\exists x_i(x_i\leqslant x_2\wedge w^*(\overline{m},x_i))$ （由（2））

（4）对任意 $k\in N$， $(m,k)\notin W$，从而$\mathscr{N}^*\vdash\neg w(\overline{m},\overline{k})$

（已证$\mathscr{N}^*\vdash p(\overline{m})$ 不成立）

（5） $\mathscr{N}^*\vdash\neg w(\overline{m},\overline{0})\wedge\cdots\wedge\neg w(\overline{m},\overline{n})$ （由（4））

（6） $\mathscr{N}^*\vdash x_2\leqslant\overline{n}\to\neg w(\overline{m},x_2)$ （由（5）及3.2命题14）

（7） $\mathscr{N}^*\vdash w(\overline{m},x_2)\to x_2\nleqslant\overline{n}$ （（6），换位律）

（8） $\mathscr{N}^*\vdash x_2\nleqslant\overline{n}\to\overline{n}\leqslant x_2$ （3.2 命题 15）

（9） $\mathscr{N}^*\vdash w(\overline{m},x_2)\to\exists x_i(x_i\leqslant x_2\wedge w^*(\overline{m},x_i))$

（（7），（8），（3），HS）

(10) $\mathscr{N}^*\vdash p(\overline{m})$ （（9），Gen）

前面已证过（10）不成立，故$\mathscr{N}^*\vdash\neg p(\overline{m})$ 也不能成立。这说明$\mathscr{N}^*$是不完备的。**证毕。**

练 习 四 十 五

1．“$\mathscr{N}$的任何无矛盾扩张都不可能完备”这一说法是否正

确？能否给出$\mathscr{N}$的完备无矛盾扩张的例子？

2．求证$|p(\overline{m})|_N=1$，这里的$p(\overline{m})$是Gödel-Rosser定理证明中的闭式。

4.1.3 Church论题

为了理解不完备性定理的深刻含义，我们先来考察一下算法的概念。算法，可直观地理解为关于计算过程的一串有限的、确定的指令。这里的计算过程可以不是纯数值的。

考察问题类

$$\{n\text{是偶数吗？}|n\in N\}.$$

回答该类问题的算法是存在的：给定n，除以2。若余数为零，则回答n是偶数；若余数为1，则回答n不是偶数。

对一k元函数f，考察问题类

$$\{f(n_1,\cdots,n_k)\text{ 的值是什么？}|n_1,\cdots,n_k\in N\}.$$

如果存在着算法可用来回答该类问题的任一问题，那么函数f叫做算法可计算函数。

三种基本递归函数（零函数z，后继函数s和投影函数p_i^k）都是算法可计算函数，它们都有很简单的算法。

设算法可计算的j元函数g和算法可计算的j个k元函数$h_1,\cdots,h_j$复合成一个k元函数f。f也是算法可计算的，因为有如下的算法：对任意$n_1,\cdots,n_k\in N$，先用$h_1,\cdots,h_j$的算法计算出

$$h_1(n_1,\cdots,n_k),\cdots,h_j(n_1,\cdots,n_k),$$

把它们记作$m_1,\cdots,m_j$。接着再用g的算法算出$g(m_1,\cdots,m_j)$，它就是$f(n_1,\cdots,n_k)$。这说明，复合规则保持着算法可计算性。

由类似的讨论可以知道，递归规则和μ算子也保持着算法可计算性。

于是得出了结论：所有递归函数都是算法可计算的。

相反的问题是：算法可计算函数是否都是递归函数？

有名的 Church 论题对此作了肯定的回答。

Church 论题：**算法可计算函数类＝递归函数类。**

Church 论题是一经验事实，但还未发现反例。经验告诉我们，一个函数的函数值计算如果存在着算法，那就总能找到该函数的递归描述。所以我们可以把递归函数作为“算法可计算函数”这一直观概念的数学定义。

前面已经证明，递归意味着在 K_N 中可表示。按 Church 论题，递归性又意味着算法可计算性。于是 K_N 中的可表示函数可视为算法可计算函数的另一数学模型。

Church 论题对偏函数也是适用的。说一个偏函数 f 是算法可计算的，应理解为：存在一种算法，在 f 有定义的点可用该算法算出 f 的函数值。（并不要求算法能确定 f 何时有定义。）

利用 Church 论题，如果证明了一个函数的递归性，也就肯定了用于计算该函数的算法的存在性；如果找到了计算函数值的算法，就可肯定该函数是递归的。

3.6.4 中，我们证明了 FM（所有公式的 Gödel 数的集）和 PF（所有从 $\mathscr{N}$ 的证明的 Gödel 数集）是递归集。因为它们的特征函数是递归函数，按 Church 论题，我们便知道分别存在着算法能用来确定任给的 $n\in N$ 是否属于 FM 或 PF。也就是说，存在着算法能够用以确定任意字母串是不是 K_N 的公式，还存在着算法能够用以确定任给的公式的有限序列是不是从 $\mathscr{N}$ 的一个证明。

练 习 四 十 六

1．说明递归规则和 μ 算子保持函数的算法可计算性。

2．试给出计算 $C_{VS}(n)$ 和 $C_{TM}(n)$ 的算法。（参见3.6.4命题1.）

4.1.4 关于不完备性定理的一些讨论

不完备性定理的建立是本世纪最杰出的数学成就之一。现从以下几方面谈谈对它的理解。

（一）人们建立形式系统，是想使“证明”这一概念精确化。针对一个具体的理论建立起一个具体的形式系统，自然希望在这个形式系统中按照精确了的证明的概念能够抓住该理论的所有真命题，即希望这个形式系统具有完备性。

我们针对自然数理论建立了形式算术 K_N，其中以 $\mathscr{N}$（或 $\mathscr{N}$ 的递归无矛盾扩张 $\mathscr{N}^*$）作为公理集，希望能够从 $\mathscr{N}$（或 $\mathscr{N}^*$）出发证明出所有在N中恒真的公式，希望能够抓住全部“算术真”。不完备性定理指出，上面的这种希望是不能实现的。

定理给出的否定结论告诉我们，“可证”和“真”并不是同一概念。一个不含混的算术命题和它的否定命题二者应有一真，但把二者形式化为 K_N 中的闭式，却可能从 $\mathscr{N}$ 都不可证。

什么叫证明？什么叫可证？直观上人们可以有不同的理解。形式系统中，人们可以下不同的定义，可以提出不同的精确化的方式。但是真和假，不应因形式化的方式而异。

既然“可证”与“真”是两个不同的概念，那么在一个形式系统中存在着不可证的“真”这一事实就不足为奇。这只说明形式化本身存在着局限性。

（二）不完备性定理并不导致不可知。K_N 的一个在N中恒真的公式从 $\mathscr{N}$ 不可证，并不意味着我们用其他方法也不可能知道它的“真”。4.1.1中的公式 $p(\ulcorner m \urcorner)$ 从 $\mathscr{N}$ 不可证，但恰恰正是它的不可证这一点证实了它的“真”。（见练习四十四题1。）

作为另一个例子，我们来讨论 Goldbach 猜想。设

$G=\{n|n\leqslant 2$，或 n 为奇数，或 n 为二素数之和$\}$。

G是递归集（见练习三十七题4），故在 K_N 中可表示。设G用

公式 $q(x_1)$ 可表示：

$$n\in G \Rightarrow \mathscr{N}\vdash q(\ulcorner n \urcorner),$$

$$n\notin G \Rightarrow \mathscr{N}\vdash \neg q(\ulcorner n \urcorner).$$

记 $p=\forall x_1 q(x_1)$，它就是 Goldbach 猜想的形式化。现假设 p 是不可判定的，即 $\mathscr{N}\vdash p$ 和 $\mathscr{N}\vdash\neg p$ 都不成立。（这只是一种假设，并未得到证明。）如果真的如此，那么 Goldbach 猜想便得到证实，因为我们可以证明此时 p 在 N 中恒真。下面来证明这一点。

假如 $|p|_N=0$，即 $|\forall x_1 q(x_1)|_N=0$，于是就有以下结论：

（1）存在项解释 φ 使 $|q(x_1)|(\varphi)=0$

（2.2.4 定义 1 及 2.2.3 定义 1（iii））

（2）记 $k=\varphi(x_1)$，则 $|q(\ulcorner k \urcorner)|(\varphi)=0$

（2.3 引理 1-2°，因 $\varphi(\ulcorner k \urcorner)=k=\varphi(x_1)$）；

（3）$k\notin G$（否则有 $\mathscr{N}\vdash q(\ulcorner k \urcorner)$，$\mathscr{N}\vDash q(\ulcorner k \urcorner)$，$|q(\ulcorner k \urcorner)|_N=1$，与（2）矛盾）

（4）$\mathscr{N}\vdash\neg q(\ulcorner k \urcorner)$　（由（3））

（5）$\mathscr{N}\vdash\exists x_1\neg q(x_1)$　（由（4）用 $\exists_1$ 规则）

（6）$\mathscr{N}\vdash\neg\forall x_1 q(x_1)$　（由（5））

（6）即为 $\mathscr{N}\vdash\neg p$。这与 p 不可判定的假设相矛盾。

不完备性定理告诉我们，不管是 $\mathscr{N}$ 还是 $\mathscr{N}$ 的递归无矛盾扩张 $\mathscr{N}^*$，都有不可判定公式。上例告诉我们，一个公式的"不可判定"这一信息本身甚至有可能导致该公式为真或为假的证实。

（三）不能从不完备性定理简单地得出结论：形式算术不能完备化，$\mathscr{N}$ 没有完备的无矛盾扩张。

下面先说明，$\mathscr{N}$ 的完备无矛盾扩张是存在的。例如可以仿照 2.4 中证明 K 的完全性时的做法，给出一个 $\mathscr{N}$ 的完备无矛盾扩张 Γ^*。（从 $\Gamma_0=\mathscr{N}$ 出发，利用 K_N 的所有闭式，归纳定义

出一串$\mathscr{N}$的无矛盾扩张$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$，然后令$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$.）

对于K_N中的每个闭式p，$\Gamma^* \vdash p$和$\Gamma^* \vdash \neg p$二者必居其一。如果我们把Γ^*作为扩张的算术公理集，那么我们就达到了完备化。

这样的完备化有什么意义呢？

按照Gödel-Rosser定理，上述Γ^*中公理Gödel数之集只能是非递归集，否则Γ^*就不会完备。按照Church论题，不存在算法可以用来确定任给的公式是不是Γ^*中的公理，进而不存在算法可用来确定任给的有限公式序列是不是从Γ^*的证明。不能明确地判断一篇文章是不是证明，这样的理论虽然完备，但看不出有何价值。

再给一个$\mathscr{N}$的完备扩张的例子。将所有在N中恒真的K_N的公式构成的集记为Tr。Tr也是$\mathscr{N}$的完备无矛盾扩张，因而Tr中公式的Gödel数的集TR是非递归集（见本段后的练习四十七题1）。把Tr作为扩张的算术公理集，虽然完备，但没有实际用处。这相当于把所有真理都当作公理，然后说："我证明了所有真理！"

（四）Gödel-Rossar定理说明，单靠增加$\mathscr{N}$中的公理达不到有意义的完备。能否用其他方法做到这一点？

我们对K_N和$\mathscr{N}$作如下扩张。

（1）扩大K_N的字母表（例如增加个体常元，函数词和谓词），但要使新得到的谓词演算系统在进行配数后保持TM，FM，LA，Sub的递归性；

（2）增加K_N的推理规则，并把$\mathscr{N}$递归无矛盾地扩张成$\mathscr{N}^*$，但使PF，PRF保持递归性。

按照Church论题，上述（1），（2）中提出的递归性的要求也就是相应算法存在性的要求。比如，PF具有递归性意味着存在算法可用来确定任给的公式串是不是新的形式系统中的一

个从$\mathscr{N}^*$的证明。这样的要求是合理的，是对一个有意义的形式系统的起码要求。

回忆 Gödel-Rosser 定理的证明。其中除了用到谓词演算的一般语法性质外，还用到以下事实：递归函数是可表示的，FM，Sub，PRF等是递归的。这就说明对我们新的扩张的形式系统来说，该定理的证明仍然有效，结论仍然成立——新系统的$\mathscr{N}^*$仍然是不完备的。这除了因为上述变动没有改变一些基本语法关系的递归特征以外，还因为上述变动并不改变"递归函数具有可表示性"这一基本事实。扩张的系统的表示能力不会比K_N更弱，可表示定义（3.3.1 定义 1）中的性质（(i)—(iii)）对新的扩张的形式系统更容易成立。

总之，任何把 Peano 形式算术包含在内的数学形式系统，只要有算法能用来确定该系统的任一篇文章（即公式的有限序列）是不是一个证明（这时说该系统是"递归可公理化"的），这样的形式系统就一定不完备。

有一定丰富内容的形式系统的这种局限性是在人们企图把"证明"这个概念精确化时必然出现的。不管是整个数学还是（包括算术在内的）数学的一部分，都有着极其丰富的内容，都不可能一劳永逸地、机械地被抓住。正因为如此，寻求新的证明方法和新的证明原则应该说是数学中最富有创造性的活动。

练 习 四 十 七

1. 利用 Gödel-Rosser 定理证明所有在N中恒真公式 Gödel 数的集

$$TR=\{g(p)\mid \quad |p|_N=1\}$$

是非递归集。

2. 设二元递归关系 PRF（见 3.6.4 命题 8）用公式 $prf(x_1, x_2)$ 表示。记

$$pr(x_1)=\exists x_2 prf(x_1,x_2).$$

试证$\mathscr{N}\vdash q \Rightarrow \mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q \urcorner)$，这里规定 $\ulcorner q \urcorner = \overline{g(q)}$。

3. 题2中公式$pr(x_1)$是否可用来表示集$TH=\{g(q)\mid q$从$\mathscr{N}$可证$\}$，从而说明 TH 是递归集？

*4.1.5 无矛盾性不可证性定理的一种易证形式

本世纪二十年代初，Hilbert 针对数学基础中出现的问题提出了自己的解决方案，试图用有穷的方法证明包括初等数论在内的古典数学形式系统是无矛盾的。Gödel 用自己的不完备性定理向这个方案提出了挑战。Gödel 的第二不完备性定理断言：如果包括初等数论在内的数学形式系统是无矛盾的，那么这种无矛盾性不可能在此系统中得到证明。

这里我们将就形式算术这一系统给出无矛盾性不可证性定理的一种易证形式。同以前一样，仍用 g 表示 Gödel 配数。

由 3.6.4 命题 8-4° 知，二元关系

$PRF=\{(n_1,n_2)\mid n_1=g(q), n_2$是$q$从$\mathscr{N}$的证明的Gödel 数$\}$

是递归的。设PRF用公式 $prf(x_1,x_2)$ 可表示。再记

$$pr(x_1)=\exists x_i prf(x_1,x_i).$$

引理 1 （第一可推性条件）对任一公式q，

$$\mathscr{N}\vdash q \quad \Rightarrow \quad \mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q \urcorner),$$

其中$\ulcorner q \urcorner$**是**$\overline{g(q)}$**的简写.**

证 记$m=g(q)$。设n是q从$\mathscr{N}$的一个证明的Gödel 数，则有 $(m,n)\in PRF$，进而有

$$\mathscr{N}\vdash prf(\overline{m}, \overline{n}).$$

由此用 $\exists_1$ 规则便得

$\mathscr{N}\vdash \exists x_i prf(\overline{m}, x_i)$ 即$pr(\ulcorner q \urcorner)$。**证毕.**

$pr(\ulcorner q \urcorner)$的直观意思是：“$q$从$\mathscr{N}$可证。”

回忆3.6.4中的定义，递归函数Num 和 Sub 分别满足

$$Num(n)=g(\overline{n}),$$

$$\mathrm{Sub}(\mathrm{g}(\mathrm{x}_i),\mathrm{g}(t),\mathrm{g}(p(\mathrm{x}_i))=\mathrm{g}(p(t))。$$

现用Sub和Num定义出一个新的二元递归函数Su：

$\mathrm{Su}(n_1,n_2)=\mathrm{Sub}(\mathrm{g}(\mathrm{x}_1),\mathrm{Num}(n_1),n_2)$，其中 $\mathrm{g}(\mathrm{x}_1)=2^{17}$。Su满足

$$\mathrm{Su}(n_1,\mathrm{g}(p(\mathrm{x}_1)))=\mathrm{g}(p(\overline{n_1}))。$$

设Su用公式 $\mathrm{su}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$ 可表示。

引理 2 （对角线引理）对于任一以 x_1 为仅有的自由变元的公式 $p(\mathrm{x}_1)$，必定存在闭式 q_0 满足

$$\mathscr{N}\vdash q_0\leftrightarrow p(\ulcorner q_0\urcorner)。$$

（我们把具有这种性质的 q_0 叫做 $p(\mathrm{x}_1)$ 的不动点。）

证 记

$$\mathrm{r}(\mathrm{x}_1)=\exists \mathrm{x}_j(p(\mathrm{x}_j)\wedge \mathrm{su}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_j)),$$

$$m=\mathrm{g}(r(\mathrm{x}_1)),$$

$$q_0=r(\overline{m}),$$

$$k=\mathrm{g}(q_0)。$$

我们来证明 q_0 即为所求的 $p(\mathrm{x}_1)$ 不动点。

按Su的定义，有

$$\mathrm{Su}(m,m)=\mathrm{g}(r(\overline{m}))=k,$$

$$\mathscr{N}\vdash \mathrm{su}(\overline{m},\ \overline{m},\ \overline{k})。$$

于是有

$$\mathscr{N}\cup\{p(\overline{k})\}\vdash p(\overline{k})\wedge \mathrm{su}(\overline{m},\ \overline{m},\ \overline{k}),$$

$$\mathscr{N}\cup\{p(\overline{k})\}\vdash \exists \mathrm{x}_j(p(\mathrm{x}_j)\wedge \mathrm{su}(\overline{m},\ \overline{m},\mathrm{x}_j)),$$

（用了 $\exists_1$ 规则）

右端就是 q_0。这就证明了所要证的一半：

$$\mathscr{N}\vdash p(\overline{k})\rightarrow\ ，即\ p(\ulcorner q_0\urcorner)\rightarrow q_0。$$

（按约定，$\ulcorner q_0\urcorner=\overline{\mathrm{g}(q_0)}$）

因Su是用 $\mathrm{su}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$ 表示的，故有

$$\mathcal{N} \vdash su(\overline{m}, \overline{m}, x_i) \to x_i \approx \overline{k}.$$

（注意 $Su(m,m)=k$ 及3.3.1定义1（iii））)

由此即可得

$$\mathcal{N} \cup \{p(x_i) \wedge su(\overline{m}, \overline{m}, x_i)\} \vdash p(\overline{k}).$$

用 $\exists_2$ 规则，又得

$$\mathcal{N} \cup \{\exists x_i (p(x_i) \wedge su(\overline{m}, \overline{m}, x_i))\} \vdash p(\overline{k}),$$

此即 $\mathcal{N} \cup \{q_0\} \vdash p(\ulcorner q_0 \urcorner)$。**证毕。**

现再引入一个新的二元关系PRF*：

$PRF^* = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = g(q)$，$n_2$ 是 $pr(\overline{n_1}) \to \neg q$ 从 $\mathcal{N}$ 的证明的Gödel 数$\}$。

PRF* 是递归的，因为（记 $a_0 = g(pr(x_1))$）

$$C_{PRF^*}(n_1, n_2) = C_{FM}(n_1) \times C_{PRF}(2^9 * Su(n_1, a_0) * 2^7 * n_1, n_2).$$

设PRF* 用公式 $prf^*(x_1, x_2)$ 表示，并记

$$pr^*(x_1) = \exists x_i prf^*(x_1, x_i).$$

再记

$$p(x_1) = \forall x_2 (prf(x_1, x_2) \to \exists x_3 \leqslant x_2 prf^*(x_1, x_3)),$$

其中“$\exists x_3 \leqslant x_2 \cdots$”是“$\exists x_3 (x_3 \leqslant x_2 \wedge \cdots)$”的缩写。

$p(x_1)$ 中只有 x_1 这一个自由出现的变元。由对角线引理知 $p(x_1)$ 一定有不动点 q_0，它满足

$$\mathcal{N} \vdash q_0 \leftrightarrow p(\ulcorner q_0 \urcorner).$$

引理3 $\mathcal{N} \vdash q_0$ **不成立。**

证（反证）假设 $\mathcal{N} \vdash q_0$，且设 k 是 q_0 从 $\mathcal{N}$ 的一个证明的Gödel 数，则有

(1) $\mathcal{N} \vdash prf(\ulcorner q_0 \urcorner, \overline{k})$ 及 $pr(\ulcorner q_0 \urcorner)$，（用引理1）

(2) $\mathcal{N} \vdash p(\ulcorner q_0 \urcorner)$。（$q_0$ 是不动点）

此时因 $\mathcal{N} \vdash \neg q_0$ 不成立，由（1）可知 $\mathcal{N} \vdash pr(\ulcorner q_0 \urcorner) \to \neg q_0$ 不成立。于是有（注意 prf^* 的定义）：

$$\mathscr{N}\vdash\neg prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{0})\wedge\cdots\wedge\neg prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{k}),$$

进而有

(3) $$\mathscr{N}\vdash\neg\exists x_3\leqslant\overline{k}\,prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3).$$

（要用 3.2 命题 14 及永真式 $(p\to\neg q)\to\neg(p\wedge q)$）

再由 (2) 及 $p(x_1)$ 的定义可知（用 (K4)）

$$\mathscr{N}\vdash prf(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{k})\to\exists x_3\leqslant\overline{k}\,prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3),$$

由此及 (1) 即得

$$\mathscr{N}\vdash\exists x_3\leqslant\overline{k}\,prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3),$$

这与 (3) 相矛盾。**证毕。**

引理 4 $\mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q_0\urcorner)\to\neg q_0$ **不成立。**

证 （反证）假设$\mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q_0\urcorner)\to\neg q_0$，且设$k$是$pr(\ulcorner q_0\urcorner)\to\neg q_0$从$\mathscr{N}$的一个证明的Gödel 数。于是

$$\mathscr{N}\vdash prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{k}),$$

由此用 $\exists_1$ 规则后可得

(4) $$\mathscr{N}\vdash\overline{k}\leqslant x_2\to\exists x_3\leqslant x_2\,prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3).$$

已证 $\mathscr{N}\vdash q_0$ 不成立（引理 3）故有

$$\mathscr{N}\vdash\neg prf(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{0})\wedge\cdots\wedge\neg prf(\ulcorner q_0\urcorner,\overline{k}),$$

进而有（要用 3.2 命题14，15）

$$\mathscr{N}\vdash prf(\ulcorner q_0\urcorner,x_2)\to\overline{k}\leqslant x_2.$$

由此及 (4) 用HS，Gen 便得

$$\mathscr{N}\vdash\forall x_2(prf(\ulcorner q_0\urcorner,x_2)\to\exists x_3\leqslant x_2\,prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3)),$$

此即$\mathscr{N}\vdash p(\ulcorner q_0\urcorner)$。这与引理 3 相矛盾，因为 q_0 是 $p(x_1)$ 的不动点。**证毕.**

引题 5 $\mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q_0\urcorner)\wedge pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)\to\neg q_0$ **不成立.**

证 首先注意以下公式从$\mathscr{N}\cup\{prf(\ulcorner q_0\urcorner,x_2),q_0\}$可证：

$$\forall x_2(prf(\ulcorner q_0\urcorner,x_2)\rightarrow\exists x_3\leqslant x_2 prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3)),$$

（此即 $p(\ulcorner q_0\urcorner)$）

$$\exists x_3\leqslant x_2 prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3),$$

$$\exists x_3 prf^*(\ulcorner q_0\urcorner,x_3).$$

最后的公式就是 $pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)$，它从 $\mathscr{N}\cup\{prf(\ulcorner q_0\urcorner,x_2),\ q_0\}$ 可证，故从 $\mathscr{N}\cup\{pr(\ulcorner q_0\urcorner),q_0\}$ 可证（用了 $\exists_2$ 规则）：

(5) $\mathscr{N}\cup\{pr(\ulcorner q_0\urcorner),q_0\}\vdash pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)$.

现若假定

$$\mathscr{N}\cup\{pr(\ulcorner q_0\urcorner)\wedge pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)\}\vdash\neg q_0,$$

则由 (5) 可得

$$\mathscr{N}\cup\{pr(\ulcorner q_0\urcorner),q_0\}\vdash\neg q_0.$$

利用永真式 $(q_0\rightarrow\neg q_0)\rightarrow\neg q_0$ 最后可得

$$\mathscr{N}\cup\{pr(\ulcorner q_0\urcorner)\}\vdash\neg q_0.$$

这与引理 4 相矛盾。**证毕。**

记

$$con_N=\neg\exists x_1(pr(x_1)\wedge pr^*(x_1)).$$

它的直观意思是 $\mathscr{N}$ 具有无矛盾性：

“不存在公式 q 使 $\mathscr{N}\vdash q$ 与 $\mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q\urcorner)\rightarrow\neg q$ 同时成立。”

现在我们即可得无矛盾性不可证性定理的一种易证形式：

定理 1 $\mathscr{N}\vdash con_N$ **不成立。**

证（反证）假设 $\mathscr{N}\vdash con_N$，则用 (K4) 即得

$$\mathscr{N}\vdash\neg(pr(\ulcorner q_0\urcorner)\wedge pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)).$$

因 $\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$ 是永真式，又可得

$$\mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q_0\urcorner)\wedge pr^*(\ulcorner q_0\urcorner)\rightarrow\neg q_0.$$

这与引理5相矛盾。**证毕。**

我们说定理 1 是一种易证形式，是因为在它的证明过程中仅用了易证的第一可推性条件（引理 1）

D.1 $\mathscr{N}\vdash q \Rightarrow \mathscr{N}\vdash pr(\ulcorner q\urcorner)$,

而未用到另外两个证明较难的第二和第三可推性条件：

D.2 $\qquad \mathscr{N} \vdash pr(\ulcorner q \urcorner) \to pr(\ulcorner pr(\ulcorner q \urcorner) \urcorner)$,

D.3 $\qquad \mathscr{N} \vdash pr(\ulcorner q \to r \urcorner) \to (pr(\ulcorner q \urcorner) \to pr(\ulcorner r \urcorner))$.

如果假定D.2和D.3也成立，那么可以证明

$$\mathscr{N} \vdash \neg(pr(\ulcorner q_0 \urcorner) \wedge pr^*(\ulcorner q_0 \urcorner)) \leftrightarrow \neg pr(\ulcorner \overline{0} \neq \overline{0} \urcorner).$$

这时，Gödel 第二不完备性定理的一种通常的形式

“$\mathscr{N} \vdash \neg pr(\ulcorner \overline{0} \neq \overline{0} \urcorner)$不成立”

是我们的引理5的推论。反之，在D.2与D.3都成立的假定之下，也可由Gödel 不完备性定理的上述通常形式推出上面的定理 1。

4.2 形式算术的不可判定性定理

作为Gödel-Rosser定理的推论，已经证明TR——K_N在N中恒真公式Gödel 数全体构成的集——是非递归集（见练习四十七题1）。按照Church论题，不存在算法能用来确定哪些公式在N中恒真。我们把这个事实叫做K_N的语义不可判定性。

本节建立的关于K_N的不可判定性定理，指的是语法不可判定性定理。

把从$\mathscr{N}$可证的公式Gödel 数全体构成的集记作TH：

$$TH = \{g(p) \mid \mathscr{N} \vdash p\}.$$

由谓词演算的可靠性定理立即可知

$$TH \subseteq TR.$$

定理 1 （K_N的不可判定性） **若$\mathscr{N}$无矛盾，则TH是非递归集。**

证（反证）假设TH是递归的，并设它用公式$p(x_1)$可表示：

$$n \in TH \ \Rightarrow \ \mathscr{N} \vdash p(\overline{n});$$

$$n \notin TH \ \Rightarrow \ \mathscr{N} \vdash \neg p(\overline{n}).$$

作一元函数 f：

$$f(n) = Sub(2^{15+2}, Num(n), n).$$

如果 n 是某公式的Gödel 数，那么 $f(n)$ 就是用 $\overline{n}$ 去替换该公式中所有自由的 x_1 所得结果的 Gödel 数。

f 是递归的，设 f 用公式 $s(x_1, x_2)$ 可表示：

$$\mathscr{N} \vdash s(\overline{n}, \overline{f(n)}),$$

$$\mathscr{N} \vdash s(\overline{n}, t) \to t \approx \overline{f(n)}$$ （见3.3.1命题I）。

记

$$r(x_1) = \forall x_2 (s(x_1, x_2) \to \neg p(x_2)),$$

$$m = g(r(x_1)),$$

$$k = g(r(\overline{m}))。$$

按 f 的定义，$f(m) = k$。由此可得

（1） $\mathscr{N} \vdash s(\overline{m}, \overline{k})$,

（2） $\mathscr{N} \vdash s(\overline{m}, x_2) \to x_2 \approx \overline{k}$。

注意

（3） $r(\overline{m}) = \forall x_2 (s(\overline{m}, x_2) \to \neg p(x_2))$,

它也是一个断言自己不可证的具有自相关特点的公式。当我们实际考察它的可证性时，立即出现矛盾。

先假设 $\mathscr{N} \vdash r(\overline{m})$，即 $k \in TH$。于是

(4) $\mathscr{N} \vdash p(\overline{k})$ （已设TH用 $p(x_1)$ 表示)

注意（3），用（K4）及MP可得

$$\mathscr{N} \vdash s(\overline{m}, \overline{k}) \to \neg p(\overline{k})。$$

由此及（1）又得 $\mathscr{N} \vdash \neg p(\overline{k})$，与（4）相矛盾。

再假设 $r(\overline{m})$ 从 $\mathscr{N}$ 不可证，即 $k \notin TH$。于是有

(5) $\mathscr{N} \vdash \neg p(\overline{k})$ （TH用 $p(x_1)$ 可表示)

(6) $\mathscr{N} \vdash \overline{k} \approx x_2 \to (\neg p(\overline{k}) \to \neg p(x_2))$ （等项替换)

(7) $\mathscr{N}\vdash \overline{k}\approx x_2\rightarrow\neg p(x_2)$

（由（5），（6）及永真式 $q\rightarrow((p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r))$）

(8) $\mathscr{N}\vdash s(\overline{m},\ x_2)\rightarrow\neg p(x_2)$ （(2)，(7)，HS）

(9) $\mathscr{N}\vdash \forall x_2(s(\overline{m},x_2)\rightarrow\neg p(x_2))$ （(8)，Gen）

此即$\mathscr{N}\vdash r(\overline{m})$，与假设（$r(\overline{m})$ 从$\mathscr{N}$不可证）相矛盾。

不管假设 $r(\overline{m})$ 从$\mathscr{N}$可证还是不可证，都出现矛盾，所以 TH 只能是非递归集。**证毕。**

按照Church论题，定理1指出，不存在算法可用来确定$K_{\mathscr{N}}$中任意给定的公式是否从$\mathscr{N}$可证。确定任给的某个公式是不是Peano形式算术的定理，不可能有统一的算法可以依靠。

如果对K_N和$\mathscr{N}$作如下改变：

(i) 扩大K_N的字母表以增加$K_{\mathscr{N}}$的语言，但使新的系统保持TM，FM，Sub的递归性；

(ii) 增加$K_{\mathscr{N}}$的推理规则且使$\mathscr{N}$递归无矛盾地扩张成$\mathscr{N}^*$。

作了这些改变之后，对于新的系统，定理1的证明仍然适用，定理1的结论仍然正确。新的形式理论仍然是不可判定的。这主要是因为所作的上述变动并不改变递归函数具有可表示性这一基本事实。

练 习 四 十 八

1．3.6.4 命题 8-3° 指出集

$$\mathrm{PF}=\{n\,|\,n\text{ 是从}\mathscr{N}\text{的证明的Gödel 数}\}$$

是递归集。现用它的算法逐一列出它的全部成员：

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\cdots,$$

然后算出

$$(*)\qquad (n_1)_{lh(n_1)-1},\ (n_2)_{lh(n_2)-1},\ (n_3)_{lh(n_3)-1},\ \cdots$$

对任一$m\in N$，若m在（*）中出现，则$m\in TH$；若m不在（*）

中出现，则$m\notin$ TH。这是否给出了计算TH 成员的算法从而说明TH 是递归集？

4.3 递归可枚举集和算术集

现在已经知道TR（在N中恒真的公式Gödel 数全体的集）和TH（从$\mathcal{N}$可证的公式Gödel 数全体的集）都是非递归集，而且它们之间有区别。不完备性定理已经证明TR和TH并不是而一集合。下面将续继讨论它们之间的差异。

4.3.1 可证公式集的递归可枚举性

定义 1 **（递归可枚举集）空集以及一元递归函数的值域叫做递归可枚举集。**

非空集A是递归可枚举集，意味着存在一元递归函数f使

$$A=\{a \mid 有某个 n\in N 使 a=f(n)\}。$$

根据Church 论题，存在算法用来计算f这个递归函数的函数值，从而能把A的成员一个不漏（但允许重复）地全部枚举出来：

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\cdots。$$

所以递归可枚举的意思就是能行可枚举。

首先来讨论递归可枚举集与递归集的关系。

命题 1 **递归集一定是递归可枚举集。**

证 设A是递归集，且$A\neq\phi$。任意取出A的元素a_0。取定a_0之后，下式定义的递归函数f的值域就是A：

$$f(n)=nC_A(n)+a_0\,\overline{\mathrm{sg}}(C_A(n))。\ \textbf{证毕。}$$

直观地说，用计算C_A的算法逐一计算函数值$C_A(0), C_A(1),\cdots$，取出所有使$C_A(n)$为1的n，就枚举出A的所有成员来。

命题 1 的逆命题不成立。非递归的递归可枚举集是存在的，TH就是这种集的重要例子。

定理 1 TH**是递归可枚举集。**

证 任取$m\in$TH。（比如取m为某一公理的 Gödel 数。）作递归函数 f：

$$\mathrm{f}(n)=(n)_{lh(n)\dot{-}1}\times C_{PF}(n)+m\,\overline{sg}\,(C_{PF}(n)).$$

f 的值域给出了TH。**证毕。**

直观地说，利用C_{PF}的算法，逐一拿出从$\mathscr{N}$的证明文章（公式的有限序列），取出文章的最后一个公式，这样便可枚举出所有从$\mathscr{N}$可证的公式。

对定理 1 可作与以前类似的说明。定理 1 是针对K_N（以$\mathscr{N}$为公理集）建立的。但不管是扩大K_N的语言，增加它的推理规则，还是扩张它的公理集，只要保持 PF 的递归性（使得可以用算法来确定任一篇文章是不是一篇证明，从而可称该系统是"递归可公理化"的），那么定理 1 的证明表明，该形式系统所有定理（即可证公式）的Gödel 数构成的集就一定是递归可枚举集。

一句话，可证公式（Gödel 数）集的递归可枚举性是递归可公理化形式系统共有的基本特性。

非递归可枚举集是存在的。TH 是递归可枚举的非递归集，TH的余集$\overline{\mathrm{TH}}$就不能是递归可枚举集，理由是：

命题 2 **若A和A的余集$\overline{A}$都是递归可枚举集，则A是递归集。**

证 设A和$\overline{A}$都是非空集。（$A=\phi$时$\overline{A}=$N，$\overline{A}=\phi$时$A=$N，A自然都是递归集。）再设A是一元递归函数f的值域，$\overline{A}$是一元递归函数h的值域。于是A的递归性由下式给出：

$$C_A(n)=\overline{sg}(n\dot{-}f(\mu x[(f(x)\dot{-}n)(h(x)\dot{-}n)=0])),$$

其中μ算子的根存在性条件是满足的：对任何n，若$n\in A$，则存在x使$f(x)=n$；若$n\notin A$，则存在x使$h(x)=n$。**证毕。**

$\overline{\mathrm{TH}}$ 不是递归可枚举集。否则由命题 2，TH就成了递归集。

由 0.3 的Cantor 定理知道，N的幂集$\mathscr{P}$(N)（即N的所有

子集构成的集）是不可数的无限集。它是个层次万千的世界。所有N 的有限子集是它的很小一部分成员。所有递归集和所有递归可枚举集在 $\mathscr{P}$(N) 内部占据的范围越来越大，但也都只占 $\mathscr{P}$(N) 内部很小的一部分。TH_{t}超出了这部分的范围。我们将要证明 TR 也超出了这部分的范围。不仅如此，还将证明在 $\mathscr{P}$(N) 中，TR 与$\overline{TH}$分属于另外的性质不同的层次——$\overline{TH}$ 是算术集，而TR超出了算术集的范围。

练 习 四 十 九

1. 证明所有递归可枚举集构成可数集。

2. 设A是递归可枚举的无限集，且存在递增的递归枚举，即存在递增的递归函数给出了A的全部成员的枚举：$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…，列中 $f(n)<f(n+1)$，求证A是递归集。

3. 证明每个递归可枚举的无限集都有递归的无限子集。

4. 证明递归可枚举集必为某个递归偏函数的定义域。

5. 求证：A是递归可枚举集，当且仅当$A=\phi$或A是某个 k 元递归函数的值域，$k\geqslant 1$。

4.3.2 递归可枚举集的算术可定义性

下面引进算术集的概念，讨论它和递归集、递归可枚举集之间的关系。

定义 1 **(算术可定义函数) k 元函数 f 是算术可定义函数，指存在着K_N 的含有 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$，对任意 $n_1,\cdots,n_{k+1}\in N$，满足**

$$f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1} \Leftrightarrow |p(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ \ulcorner n_{k+1}\urcorner)|_N=1,$$

此时说 f 用公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 在K_N 中可定义。

定义 2 **(算术关系和算术函) k 元关系 R 是算术可定义关系（简称为算术关系），指存在着K_N 的含有 k 个自由变元的公**

式 $p(x_1,\cdots,x_k)$，对任意 $n_1,\cdots,n_k \in \mathrm{N}$，满足

$$(n_1,\cdots,n_k)\in R \Leftrightarrow |p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})|_{\mathrm{N}}=1,$$

此时说 R 用公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 在 $\mathrm{K_N}$ 中可定义。一元算术关系简称为算术集。

由定义可见，算术可定义性与$\mathrm{K_N}$ 的语义有关；可表示性则与$\mathrm{K_N}$ 的语法有关。

命题 1　可表示导致算术可定义。具体地说：可表示函数也是可意义的，且所用的公式相同；可表示关系也是用相同的公式可定义的。

证　设 k 元函数 f 用公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 可表示，那么当 $f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$ 时，有

$$\mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\ \overline{n}_{k+1}), \qquad (f\text{ 用 }p\text{可表示})$$

$$\mathscr{N}\vDash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\ \overline{n}_{k+1}), \qquad (\mathrm{K_N}\text{ 的可靠性})$$

$$|p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n}_{k+1})|_{\mathrm{N}}=1;$$

当 $f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}$ 时，有

$$\mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\ \overline{n}_{k+1}), \qquad (f\text{ 用 }p\text{可表示})$$

$$\mathscr{N}\vDash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k},\ \overline{n}_{k+1}), \qquad (\mathrm{K_N}\text{ 的可靠性})$$

$$|\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n}_{k+1})|_{\mathrm{N}}=1,$$

$$|p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n}_{k+1})|_{\mathrm{N}}=0.$$

这说明 f 在$\mathrm{K_N}$ 中用 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 可定义。

再设 k 元关系 R 用 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 可表示。于是

$$\begin{aligned}(n_1,\cdots,n_k)\in R &\Rightarrow \mathscr{N}\vdash p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\\ &\Rightarrow |p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})|_{\mathrm{N}}=1;\\ (n_1,\cdots,n_k)\notin R &\Rightarrow \mathscr{N}\vdash\neg p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})\\ &\Rightarrow |p(\overline{n_1},\cdots,\overline{n_k})|_{\mathrm{N}}\neq 1.\end{aligned}$$

这说明 R 用 $p(x_1,\cdots,x_k)$可定义。**证毕。**

命题 1 的另一种说法是：递归导致算术可定义。即

推论 1　递归函数必为算术可定义函数；递归关系必为算术可定义关系．作为后者的特殊情形，递归集必为算术集．

事实上还可进一步得到

定理 1　递归可枚举集必为算术集．

证　由推论 1，ϕ 是算术集。设 A 是非空递归可枚举集，并设它是一元递归函数 f 的值域。再设 f 用公式 $p(x_1,x_2)$ 表示。根据命题 1，f 用 $p(x_1,x_2)$ 可定义。

下面证明 A 用公式 $\exists x_2 p(x_2,x_1)$ 可定义，因而是算术集。

注意

$$n\in A \iff \text{存在 } m \text{ 使 } f(m)=n \qquad (A\text{是}f\text{的值域})$$

$$\iff \text{存在 } m \text{ 使 } |p(\overline{m},\ \overline{n})|_N=1,$$

$$(f\text{ 用 } p(x_1,x_2)\text{ 可定义})$$

于是问题归结为要证明下面的结论（*）：存在 m，使

$$|p(\overline{m},\ \overline{n})|_N=1 \iff |\exists x_2 p(x_2,\ \overline{n})|_N=1.$$

（$\Rightarrow$）　设 $|p(\overline{m},\ \overline{n})|_N=1$。任取项解释 $\varphi\in\Phi_N$，都有 $|p(\overline{m},\ \overline{n})|(\varphi)=1$。作 φ 的 2 变通 φ'，使 $\varphi'(x_2)=m$。因 $\varphi(\overline{m})=m$，故有 $\varphi'(x_2)=\varphi(\overline{m})$。根据2.3 引理 1-2° 可得

$$|p(x_2,\overline{n})|(\varphi')=|p(\overline{m},\overline{n})|(\varphi)=1.$$

根据 2.2.3 命题 1-4°，又有

$$|\exists x_2 p(x_2,\overline{n})|(\varphi)=1.$$

φ 是任意的，故得 $|\exists x_2 p(x_2,\overline{n})|_N=1$。

（$\Leftarrow$）设 $|\exists x_2 p(x_2,\overline{n})|_N=1$，便有以下结论：

任取 $\varphi\in\Phi_N$，有 $|\exists x_2 p(x_2,\overline{n})|(\varphi)=1$，

存在 φ 的 2 变通 φ' 使 $|p(x_2,\overline{n})|(\varphi')=1$，

记 $\varphi'(x_2)=m$，则有 $|p(\overline{m},\overline{n})|(\varphi)=|p(x_2,\overline{n})|(\varphi')$

$=1$，　　　　　　　　（由2.3引理1-2°及 $\varphi(\overline{m})=m$）

存在 m 使 $|p(\overline{m},\overline{n})|_N=1$。　　　　（$p(\overline{m},\overline{n})$是闭式）

至此结论（*）得证，从而知 A 是用公式 $\exists x_2 p(x_2,x_1)$ 可定义的算术集。**证毕。**

把4.3.1定理1和本段定理1结合起来，便可得出结论：TH是递归可枚举集，因而是算术集。

定理1之逆并不正确。不是递归可枚举集，但可能是算术集。换句话说，算术集的类要比递归可枚举集的类更大。下面的命题2指出了这一事实。

已经知道，TH是递归可枚举集而$\overline{\mathrm{TH}}$不是递归可枚举集。

命题 2　TH和$\overline{\mathrm{TH}}$**都是算术集。**

证　TH是递归可枚举集，所以是算术集。设TH用公式 $p(x_1)$ 可定义。$\overline{\mathrm{TH}}$也是算术集，因为$\overline{\mathrm{TH}}$用公式$\neg p(x_1)$可定义：

$$
\begin{aligned}
n\in\overline{\mathrm{TH}} \quad &\Leftrightarrow \quad n\notin \mathrm{TH} \\
&\Leftrightarrow \quad |p(\overline{n})|_N=0 \qquad (\mathrm{TH}\text{用 } p(x_1)\text{可定义}) \\
&\Leftrightarrow \quad |\neg p(\overline{n})|_N=1.
\end{aligned}
$$

证毕。

练习五十

1．含有 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_{k+1})$ 是否一定可用来定义一个 k 元函数 f？含有 k 个自由变元的公式 $p(x_1,\cdots,x_k)$ 是否一定可用来定义一个 k 元关系 R？请说明理由。

2．证明所有算术可定义函数构成可数集。

3．证明：R 是算术关系，当且仅当 C_R 是算术可定义函数。

4.3.3　真公式集的非算术可定义性（Tarski定理）

现在来证明TR是非算术集，因而有

$$TH \neq TR,$$

即 TH 是 TR 的真子集。这就给出了不完备性定理的另一证明。

定理 1 (Tarski) TR **不是算术集。**

证 (反证) 假设 TR 是算术集，并设它用公式$p(x_1)$可定义：

(1) $$n \in TR \quad \Leftrightarrow \quad |p(\overline{n})|_N = 1.$$

作一元递归函数 f：

$$f(n) = Sub(2^{15+2},\ Num(n), n),$$

若 $n = g(q(x_1))$，则 $f(n) = g(q(\overline{n}))$。

设 f 用公式 $s(x_1, x_2)$可表示，并令

$$r(x_1) = \forall x_2(s(x_1, x_2) \to \neg p(x_2)),$$

$$m = g(r(x_1)),$$

$$k = g(r(\overline{m})),$$

其中

$$r(\overline{m}) = \forall x_2(s(\overline{m}, x_2) \to \neg p(x_2)).$$

按函数 f 的定义，$f(m) = k$。于是

(2) $$\mathscr{N} \vdash s(\overline{m}, \overline{k}),$$

(3) $$\mathscr{N} \vdash s(\overline{m}, x_2) \to x_2 \approx \overline{k}.$$

(**注** 以上我们采用了与在证明 TH 的非递归性时 (见 4.2 定理 1) 所采用的几乎相同的程序，也得到了具有自相关特点的公式 $r(\overline{m})$。不过这里的 $r(\overline{m})$有着另一种语义。($p(x_1)$ 的内容变了。) 现在我们遇到了"说谎者悖论"。注意 TR 用$p(x_1)$可定义，f 用 $s(x_1, x_2)$ 可表示以及 TR 和 f 的定义，可以看到，公式 $r(\overline{m})$关于自己的真假自我声明："我不真！")

考察 $r(\overline{m})$的真假，立即会导致矛盾。在这之前，先证明结论(*)：

(*) 若$|s(\overline{m}, \overline{k}) \to \neg p(\overline{k})|_N = 1$，则对任意$n \in N$，有

$$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\neg p(\ulcorner n\urcorner)|_N=1.$$

对给定的 n，若 $|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)|_N=0$，当然有

$$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\neg p(\ulcorner n\urcorner)|_N=1,$$

所以，为了证明结论（*），可设 $|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)|_N=1$. 由(3)，有

$$\mathscr{N}\vdash s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\ulcorner n\urcorner\approx\ulcorner k\urcorner,$$

由此得 $|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\ulcorner n\urcorner\approx\ulcorner k\urcorner|_N=1$，进而有

$|\ulcorner n\urcorner\approx\ulcorner k\urcorner|_N=1,$

对任一 $\varphi\in\Phi_N$，$\varphi(\ulcorner n\urcorner)=\varphi(\ulcorner k\urcorner)$，

$n=k$，

$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\neg p(\ulcorner n\urcorner)|_N=1.$

这就证明了结论（*）.

现在来考察 $r(\ulcorner m\urcorner)$ 的真假. 我们有

$|r(\ulcorner m\urcorner)|_N=1 \quad\Leftrightarrow\quad |\forall x_2(s(\ulcorner m\urcorner, x_2)\to\neg p(x_2))|_N=1,$

$\Leftrightarrow\quad |s(\ulcorner m\urcorner, x_2)\to\neg p(x_2)|_N=1,$ （2.2.4 命题 2）

$\Leftrightarrow\quad$ 对任意项解释 $\varphi\in\Phi_N$，$|s(\ulcorner m\urcorner, x_2)\to\neg p(x_2)|(\varphi)=1,$

$\Leftrightarrow\quad$ 对任意 $n\in N$，$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\neg p(\ulcorner n\urcorner)|(\varphi)=1$

（由 2.3 引理 1-2° 及 $\varphi(\ulcorner n\urcorner)=n$）

$\Leftrightarrow\quad$ 对任意 $n\in N$，$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner n\urcorner)\to\neg p(\ulcorner n\urcorner)|_N=1$

$\Leftrightarrow\quad |s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner k\urcorner)\to\neg p(\ulcorner k\urcorner)|_N=1$ （用结论(*)）

$\Leftrightarrow\quad |\neg p(\ulcorner k\urcorner)|_N=1, |p(\ulcorner k\urcorner)|_N=0$（由(2)，$|s(\ulcorner m\urcorner, \ulcorner k\urcorner)|_N=1$）

$\Leftrightarrow\quad k\notin TR$ （由（1））

$\Leftrightarrow\quad |r(\ulcorner m\urcorner)|_N=0.$ （TR 的定义，及 $k=g(r(\ulcorner m\urcorner))$）

矛盾的根源在于作了“TR 是算术集”的假定. **证毕.**

Tarski 定理的意思是：“算术真”是“算术不可定义的”。

有了 Tarski 定理，我们对不完备性定理便有了更进一步的认识。形式算术 $K_{\mathcal{N}}$ 中，从 $\mathcal{N}$ 可证公式 Gödel 数的集 TH 不但是算术集，而且还是递归可枚举集；真公式 Gödel 数的集 TR 不但不是递归可枚举集，而且连算术集也不是。这些事实指出了 TH 和 TR 二者之间有着相当大的差距。

4.4 Turing 论题

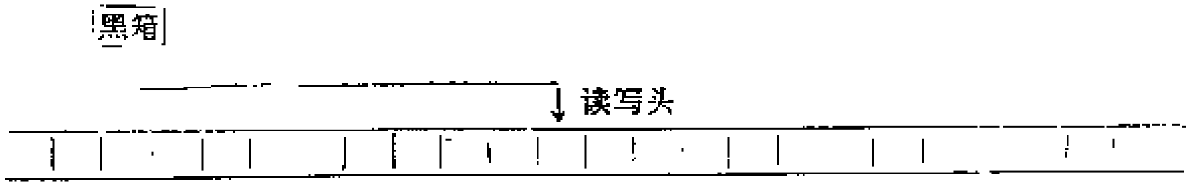
从三十年代起，人们对可计算性理论进行了深入研究，取得许多重要成果。

按照 Church 论题，递归函数是可计算函数的一种数学模型。可计算函数还有其他的数学模型，其中最有名的是 Turing 提出的模型。

4.4.1 Turing 机

什么是计算？Turing 在仔细分析人的计算方式和计算过程的基础上提出了 Turing 机的概念。

直观上说，Turing 机的构造是：一个具有有限内部状态的黑箱通过读写头联系着一条两端可无限延伸的纸带，纸带上是一串（无限个）大小相等的方格，在每个方格内都可印一个取自有限字母表的符号。读写头每次只瞄准一个方格。



Turing 机的一步动作，指以下三种动作之一：

1° 擦去读写头所描方格内原有的符号，然后在该格内印上一个新符号；

2° 读写头向左移动一格；

3° 读写头向右移动一格。

Turing 机的一步计算，是指由当时的内部状态和被瞄方格的符号确定出机器的一步动作和下一个内部状态。

字母表中包含一个特殊字母 0。印着 0 的方格表示空格。输入的信息是用字母表中的符号印在纸带的有限个方格内，其他空格印 0。

约定开始状态为 q_0。读写头开始指着输入纸带最左边的非空格。按照指令对给定的输入进行一步步计算，停机时纸带便给出了输出信息。

以上对 Turing 机作了一个大概的直观描述。但 Turing 机不同于一台实际的计算机。它是一种抽象的理想计算机，是一个数学概念。下面我们给出 Turing 机的数学定义。

设 Σ 是一有限字母表，其中有0，还至少有一个非0字母；Q 是一有限内部状态集，其中至少有一个内部状态 q_0。

带有有限字母表 Σ 和有限内部状态集 Q 的 Turing 机 T，是指偏映射

$$T: Q\times\Sigma\to(\Sigma\cup\{L,R\})\times Q.$$

T 是偏映射，意为它的定义域是 $Q\times\Sigma$ 的子集而不一定是整个 $Q\times\Sigma$。T 无定义时表示停机。L 表示向左，R 表示向右。

Q 和 Σ 都是有限集，故 T 的定义域是有限集。定义一个 Turing 机，只要给出它所包含的全部四元组 (a,b,c,d) 便可，其中 $a,d\in Q$，$b\in\Sigma$，$c\in\Sigma\cup\{L,R\}$。(a,b,c,d) 简写成 $abcd$。一个四元组对应着一步计算：由当时的内部状态 a 和被瞄方格内的字母 b 确定机器的下一状态 d，并确定机器所采取的由 c 所示的动作：如果 $c\in\Sigma$，则把方格内的 b 改成 c；如果 c 是 L，则读写头左移一格；若 c 是 R，则读写头右移一格。下面的例子中，内部状态符号都写在被瞄方格的上方。

例 1 设 $\Sigma=\{0,1,A\}$，$Q=\{q_0,q_1\}$，且设

$$T=\{q_0 1\,0\,q_1,\quad q_1\,0\,R\,q_0,\quad q_0\,A\,0\,q_0\}.$$

这是很简单的 Turing机。对连续三个1接着一个 A 的输入，它的计算过程如下：

q_0
0 1 1 1 A 0

q_1
0 0 1 1 A 0

q_0
0 0 1 1 A 0

q_1
0 0 0 1 A 0

q_0
0 0 0 1 A 0

q_1
0 0 0 0 A 0

q_0
0 0 0 0 A 0

q_0
0 0 0 0 0 0

T 对 $(q_0, 0)$ 没有定义，故擦去了三个1和A后停机。所以T是可用于计算一元零函数的 Turing 机。

例 2 已知 Turing 机

	0	1	2	X	Y
q_0		Xq_0	Yq_0	Rq_0	Rq_0

它只有一个内部状态 q_0。字母表 $\Sigma=\{0,1,2,X,Y\}$。对输入 12122，它的计算过程如下。

q_0
0 1 2 1 2 2 0

q_0

q_0
0 X Y X 2 2 0

q_0

0 X 2 1 2 2 0

q_0

0 X 2 1 2 2 0

q_0

0 X Y 1 2 2 0

q_0

0 X Y 1 2 2 0

q_0

0 X Y X 2 2 0

0 X Y X Y 2 0

q_0

0 X Y X Y 2 0

q_0

0 X Y X Y Y 0

q_0

0 X Y X Y Y 0

例 3 加法 Turig 机

	0	A	1
q_0	Rq_1		$0q_0$
q_1		$1q_2$	Rq_1
q_2			

计算 3 + 2 = 5 的过程是

q_0

0 1 1 1 A 1 1 0

q_0

0 0 1 1 A 1 1 0

q_1

0 0 1 1 A 1 1 0

q_1

0 0 1 1 A 1 1 0

q_1

0 0 1 1 A 1 1 0

q_2

0 0 1 1 1 1 1 0

例 4 可作乘法运算的 Turing 机:

	0	1	X	Y	A
q_0	Rq_9	Xq_1			
q_1	Rq_2	Rq_1	Rq_1		$0q_6$
q_2	Lq_7	Yq_3			
q_3	Rq_4	Rq_3		Rq_3	
q_4	$1q_5$	Rq_4			
q_5	Lq_5	Lq_5		$1q_1$	
q_6		Rq_2			
q_7	Lq_7	Lq_7	$0q_8$		
q_8	Rq_0				
q_9		$0q_{10}$			
q_{10}	Rq_9				

它计算 $3\times2=6$ 的过程是由输入

$$\begin{array}{c} q_0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ A\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

开始，到以下输出停机：

$$\begin{array}{c} q_9 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

例 5 对任何输入都不停机的 Turing 机，如

$$T=\{q_0\,0\,0\,q_1,q_0\,1\,0\,q_1,q_1\,0\,R\,q_0\},$$

这里 $\Sigma=\{0,1\}, Q=\{q_0,q_1\}$。

我们可以把所有 Turing 机排成一列：

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ \cdots,$$

使得由下标便可能行地确定出对应的 Turing 机的全部指令。方法如下。

我们假定所有 Turing 机的字母表都取自一张通用字母表

$$\Sigma^* = \{A_0, A_1, A_2, \cdots\},$$

内部状态符号都取自通用的状态符号集

$$Q^* = \{q_0, q_1, q_2, \cdots\},$$

其中 A_0 对应于“空白”（即前面所用的 0），q_0 对应于初始内部状态。

如果两个 Turing 机的差别仅在于它们使用的字母符号和内部状态符号不一样，那么我们就把它们视为同一 Turing 机，因为它们实际上进行的是本质上相同的计算。

下面给每个 Turing 机指定码数。

1° 先定义单个符号的码数：

$$g(L) = 1,$$
$$g(R) = 3,$$
$$g(A_i) = 4i + 5,$$
$$g(q_i) = 4i + 7, \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

2° 再定义四元组 (a, b, c, d) 的码数为

$$g(abcd) = 2^{g(a)} 3^{g(b)} 5^{g(c)} 7^{g(d)}.$$

3° 最后定义 Turing 机 $T = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$（$\sigma_i$ 为四元组）的码数为

$$g(T) = 2^{g(\sigma_0)} 3^{g(\sigma_1)} \cdots p_n^{g(\sigma_n)},$$

其中 p_n 是第 n 个素数，并规定 T 中四元组有限序列 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的排列顺序是自然字典顺序。例如，$q_1 A_i A_j q_k$ 在 $q_2 A_l A_m q_n$ 前；$q_i A_0 A_j A_k$ 在 $q_i A_4 A_l q_m$ 前；$q_i A_j L q_k$ 在 $q_i A_j R q_l$ 前；$q_i R A_j q_k$ 在 $q_i A_l A_m q_n$ 前，等等。

这样一来，每个 Turing 机都被指定了唯一的码数。从上面的规定可知，不同的 Turing 机有不同的码数。进行素幂积分解，我们就可能行地确定任一自然数是不是某个 Turing 机的码

数；若是某个 Turing 机的码数，则可能行地由该自然数将与之对应的 Turing 机的所有指令（即四元组）写出来。

按上述方法，就可以依码数的大小把所有 Turing 机一个不漏地枚举出来。

上面例 5 中 Turing 机的码数（0 和 1 分别看成 Σ^* 中的 A_0 和 A_1）是

$$2^{2^7 3^5 5^5 7^{11}} 3^{2^7 3^9 5^5 7^{11}} 5^{2^{11} 3^5 5^9 7^7}$$

练 习 五 十 一

1. 为以下二元函数设计 Turing 机，并分别给出计算在点 (1, 2) 的函数值的过程。

1° 二元零函数 $z(n_1, n_2) = 0$。

2° 二元投影函数 $p_2^2(n_1, n_2) = n_2$。

2. 给出两三种对任何输入都不停机的 Turing 机。($\Sigma = \{0, 1\}$.)

4.4.2 Turing 可计算函数

采用下面的方法，每个 Turing 机 T 都可用来定义一个一元偏函数 φ。

不妨设 T 的字母表除含有 0 外还含有 1。如果以

$$\cdots\cdots 0\ 1\ 0\ \underbrace{1\ 1 \cdots 1}_{n个1}\ 0 \cdots\cdots$$

的纸带输入 T（简称"以 n 输入T"）经运算后能停机，则令

$$\varphi(n) = 输出纸带上的非空格总数，$$

若不停机，则 $\varphi(n)$ 无定义。

输入纸带上 n 个 1 前面有"…010"，这是为了使自然数0作为自变量的值能够输入。

同样，每个 Turing 机 T 也都可用来如下定义一个二元偏函数 ψ。以

$$\cdots\cdots 0\ 1\ 0\ \overbrace{1\cdots 1}^{m\text{个}1}\ 0\ \overbrace{1\cdots 1}^{n\text{个}1}\ 0\cdots\cdots$$

的纸带输入 T（简称“以 (m,n) 输入 T”），若经运算后停机，则令

$$\psi(m,n)=\text{输出纸带上非空格总数；}$$

若 T 不停机，则 $\psi(m,n)$ 无定义。

以此类推，每个 Turing 机都可用来定义一个三元、四元、…偏函数。

一个数论函数，若存在某个 Turing 机可用来计算它的函数值，就叫做 Turing 可计算函数。对于偏函数，也是同样定义。

Turing 可计算函数当然是算法可计算函数。反之如何？Turing 对此提出了下面有名的论题。

Turing **论题**：

算法可计算函数类＝Turing 可计算函数类。

和 Church 论题一样，Turing 论题也是一个经验事实。值得注意的是，可以严格地证明下面的重要结论：

Turing **可计算函数类＝递归函数类**。

就是说，任何 Turing 可计算函数都是递归函数；而对任何递归函数都可设计出计算它的函数值的 Turing 机。

这个结论和 Turing 论题也适合于偏函数类。

下面我们来讨论停机问题。

按 4.4.1 中指出的方法，将所有 Turing 机能行地枚举出来。

$$T_0, T_1, T_2, \cdots.$$

借助于 Turing 机的这种枚举，我们可以定义出一个一元函数 f^*：

$$f^*(n)=\begin{cases}0, & T_n\text{ 输入 } n \text{ 后停机；}\\ 1, & T_n\text{ 输入 } n \text{ 后不停机。}\end{cases}$$

下面来证明，f^* 是非 Turing 可计算的，因而是非递归的。

假如 f^* 是 Turing 可计算函数，那么存在某个 Turing 机T来计算 f^* 的函数值，即：对任意 $n \in N$，

$$f^*(n)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{T 输入 } n \text{ 后输出 } 0,$$
$$f^*(n)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{T 输入 } n \text{ 后输出 } 1.$$

注意 f^* 是处处有定义的全函数，故 T 对任何输入都停机。利用 T 可构造一个新的 Turing 机 T′，它包含 T 的全部四元组，并增加两个新的内部状态 q_α, q_β 和一个新字母 A，然后增加新的四元组 $q_\alpha 0 A q_\beta, q_\beta 0 A q_\alpha$，$q_\alpha A R q_\alpha$，$q_\beta A L q_\beta$。此外，对 T 原来没有定义的每个 $q_i S$，增加四元组 $q_i S R q_\alpha$。

对任意 $n \in N$，将 n 输入 T′ 后，仍先按 T 的指令动作。对 T 来说，或输出0（空带输出），或输出1（输出纸带上有一个非空格），取决于 $f^*(n)=0$ 或 $f^*(n)=1$。对 T′ 来说，由新增加的指令可知机器将继续动作，若碰上非空格，则 T′ 停机（说明 $f^*(n)=1$）；若找不到非空格，则 T′ 不会停机（说明 $f^*(n)=0$）。

现以 $f^*(n)=0$ 的情形为例来看这个过程。

当 $f^*(n)=0$ 时，以 n 输入 T′：

$$0\ \overset{q_0}{1}\ 0\ \overbrace{1\cdots1}^{n\text{个}1}\ 0$$ （由此先按 T 的指令动作）

……

$$0\ 0\ 0\ 0\ \overset{q_s}{0}\ 0\ 0\ 0$$ （至此，T 空带输出，并继续执行 T′ 的新指令，来回寻找除 A 外的非空格，故不会停机。）

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \overset{q_\alpha}{0}\ 0\ 0$$

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \overset{q_\beta}{A}\ 0\ 0$$

$$0\ 0\ 0\ 0\ \overset{q_\beta}{0}\ A\ 0\ 0$$

$$0\ 0\ 0\ 0\ \overset{q_\alpha}{A}\ A\ 0\ 0$$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad q_\alpha \\ 0\ 0\ 0\ 0\ A\ A\ 0\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad q_\alpha \\ 0\ 0\ 0\ 0\ A\ A\ 0\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad q_\beta \\ 0\ 0\ 0\ 0\ A\ A\ A\ 0 \end{array}$$

……

$$\begin{array}{l} \qquad q_\alpha \\ 0\ 0\ 0\ A\ A\ A\ A\ 0 \end{array}$$

……

总之，结论（*）成立：

（*）　T 输入 n 后输出 1　$\Leftrightarrow$　T′ 输入 n 后停机。

T′必出现在 $T_0, T_1, T_2, \cdots$之中。设 $T' = T_k$。这样就出现了矛盾：

T_k（即 T′）输入 k 停机

$\Leftrightarrow$　T 输入 k 后输出 1　　（结论（*））

$\Leftrightarrow$　$f^*(k)=1$　　（f^*的函数值由 T 计算）

$\Leftrightarrow$　T_k 输入 k 后不停机　　（f^* 的定义）

至此证明了 f^* 不是 Turing 可计算函数。

f^*的非递归性引出了另一个重要结论：停机问题是不可判定的，即不存在算法对问题类

$\{$Turing 机 T_m 在输入 n 后是否停机？$\mid m,n\in \mathrm{N}\}$

中的问题提供答案。理由是：如果存在这样的算法，那么 f^* 也就有了计算其值的算法，从而成了递归函数。

练 习 五 十 二

1．证明，A是递归可枚举集，当且仅当A是某个 Turing机 T 的定义域，即

$$A=\{n\in \mathrm{N} \mid \mathrm{T}\text{ 输入 } n \text{ 停机}\}。$$

2. 设所有 Turing 机的能行枚举是 $T_0, T_1, T_2, \cdots$。试证存在通用 Turing 机，它具有 $T_0, T_1, T_2, \cdots$ 中每一个计算一元递归偏函数的功能。

3. 证明集 K 是递归可枚举的非递归集，其中

$$K = \{n \in N \mid T_n \text{ 输入 } n \text{ 后停机}\}.$$

4.4.3 人与机器

我们在前面介绍过两个经验事实：

Church **论题　算法可计算函数类 = 递归函数类；**

Turing **论题　算法可计算函数类 = Turing 可计算函数类。**

还介绍了一个结论：

Turing **可计算函数类 = 递归函数类。**

有了后面这个结论，Church 论题和 Turing 论题成了等价命题。或者说，这两个论题给出了可计算函数的等价定义。此外，人们为可计算函数还建立了不少数学模型，这些模型尽管形式上彼此很不相同，但都给出了相同的函数类——递归函数类。这说明，不管人们沿着何种途径使可计算性这一概念精确化，至今得到的都是同样的结果。这就使我们有理由相信，递归函数或 Turing 可计算函数的确给出了可计算函数这个概念很好的数学描述。

简单化地说，“算法可计算”就是“人可计算”，而“Turing 可计算”就是“机器可计算”（这里所谈的是理论上的而不是实际的可计算）。不难理解，凡机器可计算的，也一定是人可计算的（只要有足够的时间和精力）；反过来，Turing 论题指出，凡是人可以计算的，机器也可以计算。理论上，就数论函数是否可计算这一点而言，机器与人有相同的能力——这便是 Turing 论题的实质。几十年来，人们沿着这个方向努力，使计算机事业取得了巨大的进展。今后人们将沿这个方向继续努力。

当我们把可证性和可计算性这两个基本的数学哲学概念加以比较，就会发现可证性没有可计算性所具有的上述那种比较容易

把握的稳定性——在试图把可计算性概念精确化时，得到了不依赖于具体的精确化方式的结果。关于可计算性得到的这种结果是令人比较满意的。关于可证性，让我们回忆一下前面得到的一些结果。

我们建立形式系统，想把证明的概念精确化。我们希望所建立的形式系统能够抓住该系统所要描述的具体理论的全部真命题，但同时还要求该系统是"递归可公理化的"，即要求对该系统的任一篇文章能够用机械的算法确定出该文章是不是一篇证明文章。前面已经证明，上述想法是不能实现的。从递归无矛盾的公理集出发，在我们建立的形式系统内不可能证明出全部形式化的真命题。

想要达到机器也能鉴别证明，理论便失去了完备性（只要它的内容不是太贫乏）。这就是不完备性定理得出的结论。

我们还证明了关于形式算术的不可判定性定理，得到了结论：对算术公理集$\mathscr{N}$或它的无矛盾的扩张，不存在算法能用来机械地确定任给的公式是否从该公理集可证。由此可知，莱布尼茨的通过计算解决争论的设想即便是对算术这一局部数学理论来说，也是不能一劳永逸地完全实现的。

以上这些关于可证性的结论指出了机器的局限性，机器在创造性工作领域内的局限性。但没有理由说这种局限性是人类智慧的局限性。

如今，计算机已成为人类脑力劳动必不可少的重要工具，我们对计算机的发展前途充满信心。与此同时，我们对人自身的创造能力和人类的智慧，更加可以充满信心。

练习答案或提示

练习一

1　n 元真值函数的定义域 Z_2^n 有 2^n 个元素。不同的 n 元真值函数有 2^{2^n} 个。

2　类似于命题 1 的证明，对真值函数的元数用归纳法。注意恒等式

$$f(v_1,\cdots,v_n)=(f(v_1,\cdots,v_{n-1},1)\wedge v_n)\vee(f(v_1,\cdots,v_{n-1},0)\wedge\neg v_n).$$

练习二

2　L_3 有 22 个元素。

3　L_2 有 30 个元素。

4　L_4 有 84 个元素，L_5 有 732 个元素。

练习三

1　由 1.2.1 命题 1，0.3 命题 8 及命题 1.

2-1°　$(\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1)$ 是（L3）型公理。要用例 1 的方法。

2-2°　两次用（L2）型公理。

2-3°　$x_2\to(x_1\to x_2)$ 是（L1）型公理。

3-1°　用命题 2.

3-2°　要用到以下公理：

$$\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg p),$$
$$(\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg\neg\neg p),$$
$$(\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p)$$

3-3°　用（L3）和（L2）各一次。

3-4°　两次用（L2），并用（L1）型公理

$((p\to q)\to(p\to r))\to(q\to((p\to q)\to(p\to r)))$,

$q\to(p\to q)$.

3-5° 要用公理

$(q\to r)\to(p\to(q\to r))$,

$(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$.

4 设 $q_1,\cdots,q_n$ 是 q 从 Γ 的一个证明。把 p 从 $\Gamma\cup\{q\}$ 的证明中所出现的 q 全都用 $q_1,\cdots,q_n$ 代替，便得到 p 从 Γ 的一个证明。

练习四

1 直接证明时，注意 $x_1\to((x_1\to x_2)\to x_1)$ 是公理。还用练习三题 2-2° 的方法证明

$((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_1))\to((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_2))$.

2-1° 由练习三题 3-2°（其中以 $\neg p$ 代 p），用演绎定理得

$$\vdash\neg\neg\neg p\to\neg p,$$

再用 (L3) 及 HS。

2-2° 只用证 $\{q\to p\}\vdash\neg p\to\neg q$。利用以前建立的结果：$\neg\neg q\to q$ 及 $p\to\neg\neg p$，两次用 HS。

2-3° 为证 $\{(p\to q)\to p\}\vdash p$，由 $\neg p\to(p\to q)$ 用 HS 得 $\neg p\to p$，再用命题 1 结果。

2-4° 注意 $\neg(p\to q)\to((p\to q)\to p)$ 及 $((p\to q)\to p)\to p$.

练习五

1-1° $\{p\to\neg q,\ q,\ p\}\vdash q,\ \neg q$.

1-3° $\{\neg(p\to q),\ q\}\vdash p\to q,\ \neg(p\to q)$.

1-4° $\{\neg(p\to q),\ \neg p\}\vdash p\to q,\ \neg(p\to q)$.

1-5° $\{p\to q,\ \neg q\}\vdash\neg p$, $\{p\to q,\ \neg p\to q,\ \neg q\}\vdash q,\ \neg q$.

2 由 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q,\ \neg q$ 用归谬律可得

$$\Gamma\vdash\neg\neg p.$$

练习六

1 $\{\neg p\rightarrow q,\ \neg q,\ \neg p\}\vdash q,\ \neg q$。

4 为用命题 3-5°，先证

$$\vdash\neg\neg(p\rightarrow\neg q)\rightarrow(\neg\neg p\rightarrow\neg q)$$

$$\vdash(\neg\neg p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg\neg(p\rightarrow\neg q)\ 。$$

练习七

1 $k=0$ 时，设 $p(x_1,\cdots,x_n)=x_i,i=1,\cdots,n$。此时 $p(v_1,\cdots,v_n)=v_i$。$k>0$ 时，分两种情形讨论：

$$p(x_1,\cdots,x_n)=\neg q\ (x_1,\cdots,x_n);$$

$$p(x_1,\cdots,x_n)=q(x_1,\cdots,x_n)\rightarrow r(x_1,\cdots,x_n)。$$

若 v 是L(X)(或L(X_n)) 到任一命题代数B的同态（即把Z_2改成B)，结论仍然正确。证明完全相同。这时 $v_i\in B$。

2 不一定。在独元集$A=\{a\}$上定义

$$\neg a=a,\quad a\rightarrow a=a,$$

则A是命题代数。假设从A到Z_2存在同态v，则有

$$v(\neg a)=v(a),\quad (因\neg a=a)$$

$$v(\neg a)=\neg v(a)。\quad (v 是同态)$$

不管$v(a)=0$或1，都出现矛盾。

练习八

1 （1）设x_1：温度不变，x_2：压力加大，x_3：体积减小。原命题可翻译成 $(x_1\wedge x_2)\rightarrow x_3$。

（7）设x_1，x_2，x_3，x_4分别表示“A队胜B队”，“B队积分最少”，“A队积分最多”，“C队取得小组第二名”。原命题可翻译成$x_1\rightarrow(x_2\wedge x_3\wedge x_4)$。

练习十

2-1° $v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q)=v(p)\cdot v(q)=1$。

3 恒为永真式的有 1°，2°，3°。

4 1°正确，2°不正确。

5 不是。取p与q为永真式时$(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$

为永假式.

练习十一

3 设 $p = p(x_1, \cdots, x_n)$, $q = q(x_1, \cdots, x_n)$. 由代换定理,

$\models p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \cdots, x_n)$

$\Rightarrow \quad \models p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \leftrightarrow q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

$\Rightarrow \quad \models \neg p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \leftrightarrow \neg q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$

$\Rightarrow \quad \models (p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^* \leftrightarrow (q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^*$

(由对偶律)

$\Rightarrow \quad \models (p(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))^d \leftrightarrow (q(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))$ (由 p^* 和 p^d 的定义)

$\Rightarrow \quad \models (p(x_1, \cdots, x_n))^d \leftrightarrow (q(x_1, \cdots, x_n))^d$.

练习十二

1-1° $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$

1-2° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$.

1-3° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$.

1-4° $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$.

1-5° $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$.

2-1° $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

2-2° $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$.

2-3° $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

2-4° $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$.

练习十三

1 $v_1 \vee v_2 = \neg\neg(v_1 \vee v_2) = \neg(\neg v_1 \wedge \neg v_2) = (\neg v_1) | (\neg v_2) = (v_1 | v_1) | (v_2 | v_2)$.

2-3° $\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg(x_3 \wedge \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)))$.

4 $((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2)$.

练习十四

2 成立。

练习十五

1 用可靠性定理，代换定理及完全性定理。

2 先用完全性定理。最后用可靠性定理。

练习十六

1 用 x_1，x_2 分别表示“f 连续”，“g 可微”。

$$\{\neg x_1 \to \neg x_2,\ x_2\} \models x_1,$$

论证合理。

2 不合理。

3 正确。

练习十七

1 $$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n,\quad T_0 = \{x_1,\ x_2, \cdots\},$$

$$T_n = \{\overbrace{f_1^1(\cdots(f_1^1}^{n\text{个}f_1^1}(x_1))\cdots),\ \overbrace{f_1^1(\cdots(f_1^1}^{n\text{个}f_1^1}(x_2))\cdots),\ \cdots\}.$$

练习十八

1 1°，4°，5°，7°，8° 是公式，其中 8° 是闭式。

2-1° x_1 自由出现 1 次。$f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 自由。

2-4° x_1 先自由出现两次，后约束出现两次。$f_1^2(x_1, x_3)$

对 x_2 不自由。

3-1° t 对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由。

$p(t)=\forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2))\to R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

3-2° 自由。$p(t)=p(x_1)$

3-3° 不自由。

3-4° 不自由。

4（1）1° 自由。$p(x_2)=\forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2))\to R_1^1(x_2)$。

2° 自由。3° 自由。4° 不自由。

4（2）1° 自由。2° 自由。3° 不自由。4° 不自由。

4（3）1°-4° t 对 x_1 都是自由的。

4（4）1° 自由。2° 自由。3° 不自由。4° 不自由。

5 x_i 对 $p(x_i)$ 中 x_i 是自由的，因为 $p(x_i)$ 中的 x_i 不可能自由地出现在 $\forall x_i$ 的范围内。事实上，

（i） $p(x_i)$ 中原有的 x_i 不自由出现；

（ii） $p(x_i)$ 中新替换 x_i 的 x_i 又不会出现在 $\forall x_i$ 的范围内。

练习十九

1 最后用一次 Gen。

2 用演绎定理两次，Gen一次。

3-1° 两次用（K4）。第二次用的是

$\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\to R_1^2(x_1, x_1)$。

3-2° 可先证明 $\{\forall x_1\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)\}\vdash\forall x_1\forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$。（两次（K4），两次 Gen。）

4-1° 先证 $\{p\to\forall x_i q\}\vdash\forall x_i(p\to q)$，

（1） $p\to\forall x_i q$。

（2） $\forall x_i q\to q$，…。

4-2° 先证 $\{p\to\exists x_i q, \forall x_i\neg(p\to q)\}\vdash\forall x_i\neg q$ 及 $\neg\forall x_i\neg q$，用归谬律即可。注意

$$\neg(p\to q)\to p \text{ 和 } \neg(p\to q)\to\neg q$$

是永真式。

5-1° 演绎定理的条件未满足。

5-2° 反证律的条件未满足。

练习二十

1 先用命题 3-1° 可得

$$\vdash \forall x_i \neg p(x_i)\leftrightarrow\forall x_j\neg p(x_j).$$

2-1° 先证$\{\exists x_i\, p\to q\}\vdash\forall x_i(p\to q)$

(1) $\neg\forall x_i\neg p\to q$

(2) $(\neg\forall x_i\neg p\to q)\to(\neg q\to\neg\neg\forall x_i\neg p)$

(3) $\neg\neg\forall x_i\neg p\to\forall x_i\neg p$

(4) $\forall x_i\neg p\to\neg p$

……。

2-2° 用反证律证明$\{\exists x_i(p\to q),\ \forall x_i\, p\}\vdash q$。

练习二十一

1-3° $\forall x_4\exists x_3\exists x_2((R_1^1(x_1)\to R_1^2(x_1,\ x_2))\to R_1^1(x_4)\to R_1^2(x_2,\ x_3)))$。

1-4° $\forall x_4\forall x_3(\neg R_1^2(x_4,\ x_2)\vee\neg R_1^1(x_1)\vee\neg R_1^2(x_1,\ x_3))$。

3 $\exists x_1R_1^1(x_1)\to\exists x_2\forall x_3R_1^2(x_2,\ x_3)$与$\Pi_2$型前束范式等价，也与一$\Sigma_2$型前束范式等价。

练习二十二

1 甲：

(1) $\exists x_1(R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,\ c_1))\to\forall x_2(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,\ c_1))$,

(2) $\exists x_1(R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,\ c_1))\to\neg\exists x_2\neg(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,\ c_1))$,

(3) $\forall x_1\forall x_2((R_1^1(x_1)\wedge R_1^2(x_1,c_1)\to(R_2^1(x_2)\to R_1^2(x_2,c_1))$。

乙：

（1）$\neg\forall x_1(R_1^1(x_1)\to\forall x_2(R_2^1(x_2)\to\neg R_1^2(x_1, x_2)))$，

（2）$\exists x_1(R_1^1(x_1)\wedge\exists x_2(R_2^1(x_2)\wedge R_1^2(x_1, x_2)))$，

（3）$\exists x_1\exists x_2(R_1^1(x_1)\wedge R_2^1(x_2)\wedge R_1^2(x_1, x_2))$。

练习二十三

1 对 t 在 T 中的层次数 k 归纳。$k=0$ 时，$t=x_j$ 或 $t=c_j$，…。

2 对 u 在 T 中的层次数 k 归纳。注意 x_i 不一定在 u 中出现，故 $k=0$ 时，有三种可能的情形：$u(x_i)=c_j$，$u(x_i)=x_i$，$u(x_i)=x_j(j\neq i)$。

详见正文 2.3 引理 1-1° 的证明。

练习二十四

1-1° 取 φ 满足 $\varphi(x_1)=1$，$\varphi(x_2)=1$，$\varphi(x_3)=2$；取 ψ 满足 $\psi(x_1)=\psi(x_2)=\psi(x_3)=1$。

2-1° 取 φ 满足 $\varphi(x_1)=-1$；取 ψ 满足 $\psi(x_1)=1$。

练习二十五

1-1° 0； 1-2° 1； 1-3° 1； 1-4° 1。

2-1° 0； 2-2° 0； 2-3° 1； 2-4° 1。

3-1° 取 $M_1=Z$（整数集），$\overline{c_1}=0$，$\overline{f_1^2}$：减法，$\overline{R_1^2}$：相等，则 $|p|_{M_1}=1$；取 $M_2=Z$，$\overline{c_1}=0$，$\overline{f_1^2}$：加法，$\overline{R_1^2}$：相等，则 $|p|_{M_2}=0$。

4 $|p|_M=1\Rightarrow|\neg p|_M=0\Rightarrow|\forall x_i\neg p|_M=0\Rightarrow|\exists x_i p|_M$
$=1$。

反向不成立。对 2.2.1 例 1 中的 N，

$$|\exists x_1R_1^2(x_1, c_1)|_N=1\text{ 但 }|R_1^2(x_1, c_1)|_N\neq 1\text{。}$$

练习二十六

1-1° 任取解释域 M，再任取 $\varphi\in\Phi_M$。设

$$|\exists x_1\forall x_2R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi)=1,$$

于是有 φ 的 1 变通 φ' 使

（1） $$|\forall x_2R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi')=1.$$

对 φ 的任一 2 变通 φ_2，作 φ_2 的 1 变通 φ_1，使 $\varphi_1(x_1)=\varphi'(x_1)$。这样 φ_1 成了 φ' 的 2 变通，由 (1) 有 $|R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi_1)=1$。这说明 $|\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi_2)=1$（因 φ_1 是 φ_2 的 1 变通），进而说明

$$|\forall x_2 \exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)|(\varphi)=1.$$

1-2° 设 $|\forall x_1 R_1^1(x_1)|(\varphi)=1$，只用证 $|\forall x_2 R_1^1(x_2)|(\varphi)=1$。对 φ 的任一 2 变通 φ_2，作 φ 的 1 变通 φ_1 使 $\varphi_1(x_1)=\varphi_2(x_2)$。于是

$$|\forall x_1 R_1^1(x_1)|(\varphi)=1 \Rightarrow |R_1^1(x_1)|(\varphi_1)=1 \Rightarrow |\varphi_1(x_1)| \in \overline{R}_1^1$$
$$\Rightarrow \varphi_2(x_2) \in \overline{R_1^1} \Rightarrow |R_1^1(x_2)|(\varphi_2)=1 \Rightarrow |\forall x_2 R_1^1(x_2)|(\varphi)=1.$$

1-4° 设 $|\forall x_2 \forall x_1 p|(\varphi)=0$。则有 φ 的 2 变通 φ_2 和 φ_2 的 1 变通 φ_1 使 $|p|(\varphi_1)=0$。作 φ 的 1 变通 φ' 使 $\varphi'(x_1)=\varphi_1(x_1)$。再作 φ' 的 2 变通 φ'' 使 $\varphi''(x_2)=\varphi_1(x_2)$。故可得 $\varphi''=\varphi_1$，因而有 $|p|(\varphi'')=0$，进而得 $|\forall x_2 p|(\varphi')=0$，$|\forall x_1 \forall x_2 p|(\varphi)=0$。

2 $R_1^1(x_1) \to R_1^1(x_1)$。

3-1° 取 $M=N$，$\overline{R_1^2}$：$\leqslant$，则

$$|\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_M=0.$$

3-5° 取 $\overline{R_1^1}$ 为“$=0$”，则 $|\exists x_1 R_1^1(x_1)|_N=1$，而当 $\varphi(x_1)=1$ 时 $|R_1^1(x_1)|(\varphi)=0$。

4（i）对项 t 的层次数 k 归纳。

（ii）对公式 p 的层次数 k 归纳。

$k=0$ 时，设 $p=R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$，$t_i \in T$。此时

$$|p|(\varphi^+)=1 \Leftrightarrow (\varphi^+(t_1), \cdots, \varphi^+(t_n)) \in \overline{R_i^n}$$
$$\Leftrightarrow (\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n)) \in \overline{R_i^n} \text{（由（i））}$$
$$\Leftrightarrow |p|(\varphi)=1.$$

$k>0$ 时，若 $p=q \to r$ 或 $p=\neg q$，则较简单。现设 $p=\forall x_i q$。若 φ' 是 φ 的任一 i 变通，且 $\varphi^{+\prime}$ 是 K^+ 的和 φ' 有相同变元指派的项解释，则 $\varphi^{+\prime}$ 是 φ^+ 的 i 变通。反之，对于 φ^+ 的任

一 i 变通 $\varphi^{+\prime}$，和 $\varphi^{+\prime}$ 有相同变元指派的 K 的项解释 φ' 是 φ的 i 变通。于是有

$$|p|(\varphi^{+})=1 \Leftrightarrow \text{对任一 } \varphi^{+} \text{ 的 } i \text{ 变通 } \varphi^{+\prime}, \quad |q|(\varphi^{+\prime})=1$$

$$\Leftrightarrow \text{对任一} \varphi \text{ 的 } i \text{ 变通 } \varphi', \ |q|(\varphi')=1$$

（用归纳假设）

$$\Leftrightarrow \ |\forall x_i\, q|(\varphi)=1, \text{即} |p|(\varphi)=1.$$

练习二十七

2　不成立。用可靠性定理从语义上进行讨论。

练习二十八

1　（⇒）由可靠性定理及 Γ 的完备性，$\Gamma \vDash p$ 与 $\Gamma \vDash \neg p$ 二者必居其一。

（⇐）设 Γ 不完备，即存在闭式 p 使 $\Gamma \vdash p$ 与 $\neg p$ 都不成立，那么 $\Gamma \cup \{p\}$ 和 $\Gamma \cup \{\neg p\}$ 都是无矛盾集，各有模型 M_1 和 M_2。于是

$$|p|_{M_1}=1 \text{ 而 } |p|_{M_2}=0.$$

2　用反证法证明 Γ 无矛盾。使用定理 1 及 2.3 推论 2。

练习二十九

1　（E2）有 5 种形式：

$$t \approx u \rightarrow f_1^1(t) \approx f_1^1(u),$$

$$t_1 \approx u \rightarrow f_1^2(t_1, t_2) \approx f_1^2(u, t_2).$$

$$t_2 \approx u \rightarrow f_1^2(t_1, t_2) \approx f_1^2(t_1, u),$$

……。

（E 3）有两种形式。

2　（E1）型公理此时在 N 中恒假。

练习三十

1　先证

$E \cup \{p(t), p(x_i) \wedge \forall x_j (p(x_j) \rightarrow x_i \approx x_j)\} \vdash p(u) \rightarrow u \approx t$。要用两次（K4）；

$\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)\to(p(u)\to x_i\approx u)$,

$\forall x_j(p(x_j)\to x_i\approx x_j)\to(p(t)\to x_i\approx t)$.

练习三十一

1　主要工作是证明 M^* 是 E' 的模型。

任取 $\varphi^*\in\Phi_{M^*}$。作 $\varphi\in\Phi_M$，使 φ 满足（对任意 x_i）

$$(1)\qquad \varphi(x_i)=\begin{cases}\varphi^*(x_i), & \varphi^*(x_i)\in M\\ u_0, & \varphi^*(x_i)=u^*.\end{cases}$$

反之，对任一 $\varphi\in\Phi_M$，不难作出满足（1）的 φ^*。下面对 t 的层次数 k 归纳证明这样的 φ 和 φ^* 满足（2）：

$$(2)\qquad \varphi(t)=\begin{cases}\varphi^*(t), & \varphi^*(t)\in M\\ u_0, & \varphi^*(t)=u^*.\end{cases}$$

$k=0$ 时，（2）由（1）即得。

$k>0$ 时，设 $t=f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，则

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\overline{f_i^n}\ (\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\\ &=\overline{f_i^n}^*\ (\varphi^*(t_1),\cdots,\varphi^*(t_n))\ \text{（由归纳假设及}\overline{f_i^n}^*\text{的定义）}\\ &=\varphi^*(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\varphi^*(t).\end{aligned}$$

下面再证对满足（1）的 φ 和 φ^*，（3）式成立：

$$(3)\qquad |p|(\varphi^*)=|p|(\varphi).$$

现对公式 p 的层次数 k 归纳证明（3）。

$k=0$ 时，设 $p=R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$。此时有

$$\begin{aligned}|R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi)=1\quad&\Leftrightarrow\quad(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\in\overline{R_i^n}\\ &\Leftrightarrow\quad(\varphi^*(t_1),\cdots,\varphi^*(t_n))\in\overline{R_i^n}^*\\ &\qquad\qquad\text{（由（2）及}\overline{R_i^n}^*\text{的定义）}\\ &\Leftrightarrow\quad|R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi^*)=1.\end{aligned}$$

$k>0$ 时，若 p 为 $\neg q$ 或 $q\to r$，则较简单。现设 p 为 $\forall x_i q$。对于 φ^* 的 i 变通 $\varphi^{*\prime}$，作 φ 的 i 变通 φ' 使之满足

$$\varphi'(x_i)=\begin{cases}\varphi^{*\prime}(x_i), & \varphi^{*\prime}(x_i)\in M.\\ u_0, & \varphi^{*\prime}(x_i)=u^*.\end{cases}$$

这样的φ'与$\varphi^{*\prime}$仍满足（1），因而满足（2）。反之，对于φ的i变通φ'，令$\varphi^{*\prime}(x_i)=\varphi'(x_i)$，便可得$\varphi^*$的$i$变通$\varphi^{*\prime}$，它与$\varphi'$仍满足（1）和（2）。于是有

$$
\begin{aligned}
|\forall x_i q|(\varphi)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{对}\varphi\text{的任一}i\text{变通}\varphi', |q|(\varphi')=1\\
&\Leftrightarrow \quad \text{对}\varphi^*\text{的任一}i\text{变通}\varphi^{*\prime}\ |q|(\varphi^{*\prime})\\
&\qquad\qquad =1\ \text{（用归纳假设）}\\
&\Leftrightarrow \quad |\forall x_i q|(\varphi^*)=1\text{。（3）式归纳证毕。}
\end{aligned}
$$

为证M^*是E'的模型，任取$p\in E'$。既然M是E'的模型，故有$|p|_M=1$。再任取$\varphi^*\in\Phi_{M^*}$。作满足（1）的$\varphi\in\Phi_M$，有$|p|(\varphi^*)=|p|(\varphi)=1$，故$|p|_{M^*}=1$。这就证明了$M^*$也是$E'$的模型。

最后来证M^*不是E'的正规模型。

设$\approx$在M^*中解释为$\sim^*$。（已知$\approx$在M中解释为$=$。）按$\sim^*$的定义（即$\overline{R}_1^{2*}$的定义），有

$$u_1^*\sim^* u_2^* \iff u_1=u_2,$$

其中

$$u_i=\begin{cases}u_i^*, & u_i^*\in M,\\ u_0, & u_i^*=u^*,\end{cases}\quad i=1,2.$$

于是在取$u_1^*=u_0, u_2^*=u^*$时，就有$u_1=u_2=u_0$，从而$u_0\sim^* u^*$，但$u_0\neq u^*$。这说明$\sim^*$不是M^*上的相等关系。也就是说M^*是E'的非正规模型。本题的结论指出，等词公理的任何无矛盾扩张都消除不了非正规模型的存在性。

练习三十二

1　由命题2有

$$\mathscr{N}\vdash \ulcorner k\urcorner\times\ulcorner 2\urcorner\approx\ulcorner 2k\urcorner.$$

再用$\exists_1$规则，

$$\mathscr{N}\vdash \ulcorner k\urcorner\times\ulcorner 2\urcorner\approx\ulcorner 2k\urcorner\rightarrow\exists x_i(x_i\times\ulcorner 2\urcorner\approx\ulcorner 2k\urcorner).$$

4 用(N7)证明 $\mathscr{N}\vdash\forall x_i(x_i'+t_2\not\approx x_i)$。

5 记

$\mathscr{N}_k=\mathscr{N}\cup\{c_i'\approx c_{i+1},\ i>0\}\cup\{\neg c_0\approx c_i,\ 0<i\leqslant k\}$。

N 是 $\mathscr{N}_k$ 的模型，其中 c_0 解释为 k，c_i 解释为 $i-1$，$0<i\leqslant k$。且有

$$\mathscr{N}^+=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{N}_k.$$

每个 $\mathscr{N}_k$ 无矛盾，故 $\mathscr{N}^+$ 也无矛盾。根据 2.4 定理 1 及 3.1.3 定理 1，$\mathscr{N}^+$ 有正规模型。在 $\mathscr{N}^+$ 的正规模型中，若仍把 $c_i\ (i>0)$ 的解释叫做自然数，则 c_0 的解释一定是与所有自然数皆不相同的另外一个新元素。$\mathscr{N}^+$的这个模型叫做非标准算术模型。

练习三十三

2 否则与$\mathscr{N}$的无矛盾性相矛盾。

3 不等价。按题中条件，任何公式都表示了一个 k 元关系。参见定义 3 后的说明。

4 注意$\mathscr{N}\vdash p\quad\Rightarrow\quad|p|_N=1$。

练习三十四

1 $x_1\approx x_1\wedge x_2\approx\ulcorner 2\urcorner$。

4 $\neg\exists x_3(x_3+x_1\approx x_2)$。

练习三十五

$$\begin{aligned}r(n_1,n_2,n_3)&=f(n_3,n_1)\\&=f(P_3^3(n_1,n_2,n_3),P_1^3(n_1,n_2,n_3)).\end{aligned}$$

练习三十六

1 (3) $\max(n_1,n_2)=n_1+(n_2\dot{-}n_1)$。

1 (4) $f(0)=1$,

$\qquad f(n+1)=s(n)\times f(n)$。

1 (6) $f_k(n)=\overline{\mathrm{sg}}(n\dot{-}k)=\overline{\mathrm{sg}}(n\dot{-}C_k(n))$。

1 (7) $q(n,0)=0$,

$$q(n_1,n+1)=\mathrm{sg}(n_1)\times(q(n_1,n)$$
$$+\overline{\mathrm{sg}}(n_1\dot{-}(\mathrm{rem}(n_1,n)+1)))。$$

1（8）$f(n_1,n_2,n_3)=\sum\limits_{i\leqslant n_3}g(n_1,n_2,i)$，

$$h(n_1,n_2)=f(n_1,n_2,n_1)。$$

2　见3.5引理1。

练习三十七

1　$C_{N_1}(n)=\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(2,n))$，

$C_{N_2}(n)=\mathrm{sg}(n\dot{-}2)$。

2　$C_{A\times B}(n_1,n_2)=C_A(n_1)\times C_B(n_2)$。

3　用反证法。

$C_A(n)=C_{A\times A}(n,n)$。

4　$C_C(n)=\mathrm{sg}((3\dot{-}n)+\mathrm{rem}(2,n))$

$$+\sum_{x<n}\sum_{y<n}(C_=(n,x+y)C_{\mathrm{Prm}}(x)C_{\mathrm{Prm}}(y))。$$

5　$f(n,\cdots,n_k)=\sum\limits_{i<l}g_i(n_1,\cdots,n_k)C_{R_i}(n_1,\cdots,n_k)$。

6　不一定。如取$A=A_1=\mathrm{N}$，A_2为任一非递归集。

7　$p(n)=\sum\limits_{k=0}^{2^{2^n}}\prod\limits_{l=0}^{k}\mathrm{sg}\left[n+1\dot{-}\sum\limits_{i=0}^{l}\overline{\mathrm{sg}}(3\dot{-}\sum\limits_{j=0}^{i}\overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rem}(i,j)))\right]$。

练习三十八

1　利用3.3.1命题1证明sg用公式$p(x_1,x_2)$可表示，这里的$p(x_1,x_2)$是

$$(x_1\approx\ulcorner 0\urcorner\wedge x_2\approx\ulcorner 0\urcorner)\vee(x_1\not\approx\ulcorner 0\urcorner\wedge x_2\approx\ulcorner 1\urcorner)。$$

2　$(\exists x_4(x_4+x_1\approx x_2)\wedge x_3\approx\ulcorner 0\urcorner)$

$$\vee(\neg\exists x_4(x_4+x_1\approx x_2)\wedge x_1\approx x_2+x_3)。$$

练习三十九

3　例如字母串$\neg\,\prime\,\neg x_i$重为1，且真前段重不足1，但它不是项或公式。

练习四十

1（5）$2^{7}\ 3^{12}\ 5^{21}\ 7^{7}\ 11^{16}\ 13^{5}\ 17^{21}\ 19^{17}\ 23^{3}\ 29^{19}$。

1（6）$2^{2^{7}3^{12}5^{19}7^{16}}\ 3^{2^{14}3^{17}5^{10}}\ 5^{2^{7}3^{18}5^{17}7^{16}}$

练习四十一

1　不一定成立。当$n_1=2^{a_0}\cdots p_k^{a_k}$，$n_2=2^{b_0}\cdots p_l^{b_l}$且$a_0,\cdots,a_k$，$b_0,\cdots,b_l$都不为零时，该式成立。

2　$C_R(n_1,\cdots,n_{k+1})=C_H(n_1,\cdots,n_{k+1},C_R^*(n_1,\cdots,n_{k+1}))$。

3　$$f(n)=\overline{\mathrm{sg}}(n)+2\overline{\mathrm{sg}}(n\dot{-}1)$$
$$+\mathrm{sg}(n\dot{-}1)((f^{\#}(n))_{n\dot{-}1}+(f^{\#}(n))_{n\dot{-}2})。$$

练习四十二

1　$$C_{SBS}(n_1,n_2,\gamma)=C_{VS}(n_1)C_{TM}(n_2)(C_{TM}((\gamma)_0)$$
$$+C_{FM}((\gamma)_0))[C_=((\gamma)_0,n_1)C_=((\gamma)_1,n_2)$$
$$+\sum_{x<(\gamma)_0}((C_=((\gamma)_0,2^x)\times C_{\neq}((\gamma)_0,n_1)+C_=((\gamma)_0,$$
$$2^{11}*n_1*x))\,C_=((\gamma)_1,(\gamma)_0)$$
$$+\sum_{x<(\gamma)_0}\ \sum_{y<(\gamma)_0}\ \sum_{z<(\gamma)_1}C_=((\gamma)_0,2^x*y)$$
$$C_=((\gamma)_1,2^x*z)C_{SBS}(n_1,n_2,2^y3^z)$$
$$+\sum_{x<(\gamma)_0}\ \sum_{y<(\gamma)_0}\ \sum_{z<(\gamma)_0}\ \sum_{u<(\gamma)_1}\ \sum_{v<(\gamma)_1}$$
$$C_=((\gamma)_0,2^x*y*z)$$
$$\times(C_{\neq}(x,11)+C_{\neq}(y,n_1))C_=((\gamma)_1,2^x*u*v)$$
$$\times C_{SBS}(n_1,n_2,2^y3^u)C_{SBS}(n_1,n_2,2^z3^v)],$$

其中

把$C_{SBS}(n_1,n_2,2^y3^z)$换成$(C_{SBS}^*(n_1,n_2,\gamma))_{y,z}$，

把$C_{SBS}(n_1,n_2,2^y3^u)$换成$(C_{SBS}^*(n_1,n_2,\gamma))_{y,u}$，

把$C_{SBS}(n_1,n_2,2^z3^v)$换成$(C_{SBS}^*(n_1,n_2,\gamma))_{z,v}$，

就得 C_{SBS} 所满足的过程值递归条件。

2　因 $n \in AX \Leftrightarrow 2^n \in PF$，故

$$C_{AX}(n) = C_{PF}(2^n).$$

3　参见 4.1.1。

练习四十三

1　结论仍然成立。首先，原来满足可表示条件的函数在公理增加之后仍满足可表示条件，所以递归函数仍然是可表示的。反过来，在新的意义下可表示函数仍一定是递归函数，证明与定理 1 的证明完全相同，只要把出现的 $\mathcal{N}$ 全部改成 $\mathcal{N}^*$。注意 3.6.4 命题 8 中也要作同样的改动。改动后，PRF 的递归性并没有改变。

练习四十四

1　(反证)

$$|P(\overline{m})|_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{存在 } \varphi \in \Phi_N \text{ 使 } |\neg w(\overline{m}, x_2)|(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \text{存在 } \varphi, |w(\overline{m}, \overline{n})|(\varphi) = |w(\overline{m}, x_2)|(\varphi) = 1$$

$$(\text{记 } \varphi(x_2) = n = \varphi(\overline{n}))$$

$$\Rightarrow \text{存在 } n, |w(\overline{m}, \overline{n})|_N = 1 \quad (w(\overline{m}, \overline{n}) \text{ 是闭式})$$

$$\Rightarrow (m,n) \in W \ (\text{否则 } \mathcal{N} \vdash \neg w(\overline{m}, \overline{n}) \text{ 导致 } |w(\overline{m}, \overline{n})|_N = 0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} \vdash P(\overline{m}) \qquad (W \text{ 的定义})$$

这与定理 1 (i) 相矛盾。

2　$\mathcal{N} \cup \{\neg P(\overline{m})\}$ 是无矛盾的，否则用反证律得 $\mathcal{N} \vdash P(\overline{m})$。注意以下两点：

(1)　$\mathcal{N} \cup \{\neg P(\overline{m})\} \vdash \neg \forall x_2 \neg w(\overline{m}, x_2)$ (即 $\neg P(\overline{m})$)；

(2)　$\mathcal{N} \cup \{\neg P(\overline{m})\} \vdash \neg w(\overline{m}, \overline{n})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

其中 (2) 见正文定理 1 (ii) 的证明。(1) 与 (2) 说明 $\mathcal{N} \cup \{\neg P(\overline{m})\}$ 非 ω-无矛盾。

3　设 $\alpha_0 = g(r(x_1))$。于是

$$C_{W_2}(n_1,n_2) = C_{FM}(n_1)$$
$$\times C_{PRF}(2^9 * 2^7 * \mathrm{Sub}(2^{17},\mathrm{Num}(n_1),\alpha_0) * 2^7 * n_1, n_2).$$

练习四十五

1　参见 4.1.4。

2　$|P(\overline{m})|_N = 0 \Rightarrow$ 存在 $\varphi \in \Phi_N$ 使 $|w(\overline{m}, x_2)|(\varphi) = 1$

$\Rightarrow$ 记 $\varphi(x_2) = n (= \varphi(\overline{n}))$，有 $|w(\overline{m}, \overline{n})|(\varphi) = 1$

$\Rightarrow |w(\overline{m}, \overline{n})|_N = 1$　　　　（$w(\overline{m}, \overline{n})$ 是闭式）

$\Rightarrow (m,n) \in W$　否则 $\mathscr{N}^* \vdash \neg w(\overline{m}, \overline{n})$,

导致 $|w(\overline{m}, \overline{n})|_N = 0$）

$\Rightarrow \mathscr{N}^* \vdash p(\overline{m})$。

练习四十七

1　（反证）假设 TR 是递归集。记所有在 N 中恒真的公式集为 $\mathscr{N}^+$，则 $\mathscr{N}^+$ 是 $\mathscr{N}$ 的递归无矛盾扩张。（N 是 $\mathscr{N}^+$ 的模型，所以 $\mathscr{N}^+$ 是无矛盾的。）根据 Gödel-Rosser 定理，$\mathscr{N}^+$ 是不完备的，即存在闭式 p，使 p 和 $\neg p$ 从 $\mathscr{N}^+$ 都不可证，当然 p 和 $\neg p$ 都不能是 $\mathscr{N}^+$ 的成员。但 $|p|_N = 1$ 和 $|\neg p|_N = 1$ 二者必居其一，这与 $\mathscr{N}^+$ 的定义相矛盾。

2　见 4.1.5 引理 1

3　不能说明 TH 是递归集。题 2 的结论只说明

$$m \in TH \Rightarrow \mathscr{N} \vdash pr(\overline{m}).$$

要证明 TH 是递归集，还要证明

$$m \notin TH \Rightarrow \mathscr{N} \vdash \neg pr(\overline{m}),$$

而这是不可能证明的。（见 4.2 定理 1。）

练习四十八

1　题中给出的方法不符合算法的“有限性”。无法在有限

步骤之内知道不属于TH的m肯定不在（*）中出现从而能断定$m \notin \mathrm{TH}$。

练习四十九

1　递归可枚举集的全体构成的集到一元递归函数全体的集存在着单射，而后者是可数集。

2　对n归纳可证$n \leqslant f(n)$。

$$C_A(n) = \mathrm{sg}\,(\sum_{i<n} C_=(f(i)\,, n)).$$

3　从一无限枚举中总可取出递增枚举。

4　设A是递归可枚举集。$A = \phi$ 时，它是递归偏函数

$$\mu x[n + x + 1 = 0]$$

的定义域。$A \neq \phi$ 时，可设A是递归函数f的值域。这时A是递归偏函数 $\mu x[f(x) = n]$的定义域。

5　一个k元递归函数g的值域，也是一个一元递归函数f的值域，f满足

$$f(n) = g((n)_0,\ (n)_1,\ \cdots,\ (n)_{k-1}).$$

练习五十

1　对第一个问题的回答是否定的，例如公式$x_1 \approx x_1 \wedge x_2 \not\approx x_2$不能用来定义任何一个一元函数；对第二个问题的回答是肯定的。

3　若R由$p(x_1, \cdots, x_k)$可定义，则C_R由

$$p(x_1, \cdots, x_k) \wedge x_{k+1} \approx \ulcorner 1 \urcorner$$

可定义；若C_R用$p(x_1, \cdots, x_{k+1})$可定义，则R由$p(x_1, \cdots, x_k, \ulcorner 1 \urcorner)$可定义。

练习五十一

1　取$\Sigma = \{0,\ 1,\ A\}$，$Q = \{q_0,\ q_1\}$。对应于(n_1, n_2)的输入纸带被规定为

$$\cdots 0\ \overbrace{1 \cdots 1}^{n_1个1}\ A\ \overbrace{1 \cdots 1}^{n_2个1}\ 0 \cdots.$$

1° $T_1=\{q_0 1 0 q_1,\ q_0 A 0 q_1,\ q_1 0\ \mathrm{R}q_0\}$.

2° $T_2=\{q_0 1 0 q_1,\ q_0 A 0 q_0,\ q_1 0\ \mathrm{R}q_0\}$.

练习五十二

1 (⇒) 若$A=\phi$，则A是永不停机Turing机的定义域。$A\neq\phi$时，设A由递归函数f给出枚举。令

$$g(n)=\mu x[f(x)=n],$$

于是g是递归偏函数，故存在Turing机T计算g的函数值。这时，A是T的定义域：

$$\begin{aligned} n\in A &\Leftrightarrow \text{存在}\ x\ \text{使}\ f(x)=n \\ &\Leftrightarrow g(n)\text{有定义} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{T}\ \text{输入}\ n\ \text{后停机。} \end{aligned}$$

(⇐) 若A是Turing机T的定义域，则有如下枚举A的算法：

(1) 实行T输入0的第一步计算。

(2) 实行T输入1的第一步计算，并实行T输入0的第二步计算。

(3) 实行T输入2的第一步计算，输入1的第二步计算，及输入0的第三步计算。

……

这样一直做下去。每当出现停机，例如T输入i的若干步后停机，则枚举出A中的i，以下各步就不再输入i。

对A中的每个n，T。输入n后必有一步要停机，因此n总是会被枚举出来的。

2 先给出所有Turing机的能行枚举：

$$\mathrm{T}_0,\ \mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2,\cdots.$$

由此定义二元函数f

$f(m,n)=\mathrm{T}_m$输入n后算出的结果；

若T_m输入n后不停机，则$f(m,n)$无定义。

这样定义的偏函数f是算法可计算的，故存在一Turing机

T 计算 f 的函数值。T 具有 T_0，T_1，T_2，…中每一个计算一元递归偏函数的功能。

3 首先，K 是非递归集，因为 $\bar{K}$ 的特征函数就是正文中定义的一元函数 f^*。

K 是递归可枚举的，因为有如下枚举它的算法：

（1）实行 T_0 输入 0 的第一步计算。

（2）实行 T_1 输入 1 的第一步计算，并实行 T_0 输入 0 的第二步计算。

（3）实行 T_2 输入 2 的第一步计算，T_1 输入 1 的第二步计算和 T_0 输入 0 的第三步计算。

……。

这样一直做下去，每当出现停机，例如 T_i 停机，则枚举出 K 中的 i，以下各步就丢掉 T_i。K 中的 n 总会被枚举出来。

符 号 汇 集

符号	节次
$\mathscr{P}$	0.1
$\sim$, $[a]$	0.1
N	0.2
C_n	0.3
Z_2	1.1
$\neg$, $\rightarrow$	1.1,1.2.1,2.1.2
$\vee$, $\wedge$	1.1,1.2.5,2.1.2
L(X),L(X_n)	1.2.1
L,(L1)－(L3)	1.2.2
$\vdash$	1.2.2,2.1.3
MP	1.2.2,2.1.3,3.6.4
HS	1.2.3,2.1.3
$\leftrightarrow$	1.2.5,2.1.2
L′,(L′3),(L′4)	1.2.6
F, F′, G, H	1.2.6
$\models$	1.3.4,1.3.8,2.2.5
$\mid$, $\downarrow$	1.3.7
c_i,f_i^n,R_i^n,Y	2.1.1
K(Y)	2.1.2
$\forall$, $\exists$	2.1.2
K,(K1)－(K5)	2.1.3
Gen	2.1.3
$\exists_1$, $\exists_2$	2.1.3
Π_n, Σ_n	2.1.5

符号	节次
$\overline{c_i}$, $\overline{f_i^n}$, $\overline{R_i^n}$	2.2.1
Φ_M	2.2.2
$\lvert p \rvert$	2.2.3
$\lvert p \rvert_M$	2.2.4
$\approx$	3.1
E, (E1) – (E3)	3.1
K_N	3.2
$\mathcal{N}$, ($\mathcal{N}$1) – ($\mathcal{N}$7)	3.2
$'$, $+$, $\times$	3.2
$\overline{0}$, $\overline{n}$	3.2
$\not\approx$	3.2
$\mu x[\cdots]$	3.3.2
$z(n)$, $s(n)$, p_i^k	3.4.1
p^-, $\dot{-}$, $\ddot{-}$	3.4.2
sg, $\overline{\mathrm{sg}}$	3.4.2
rem	3.4.2
Divi, Prm	3.4.3
REP, REC, REC*	3.5
$g(\cdots)$	3.6.2
$(n_1)_{n_2}$, lh	3.6.3
$n_1 * n_2$	3.6.3
$f^\#$	3.6.3
VS, TM, YF, FM	3.6.4
SBS, Sub	3.6.4
FR, FRT	3.6.4
LA, PA, AX	3.6.4
GEN, PF, PRF	3.6.4
Tr, TR	4.1.4

符号	节次
prf, pr	4.1.5
Su, su	4.1.5
PRF^*, prf^*, pr^*	4.1.5
$\ulcorner q \urcorner$	4.1.5
$con\mathscr{N}$	4.1.5
TH	4.2
$\overline{TH}$	4.3.1
T, L, R	4.4.1
T_0, T_1, T_2,…	4.4.1

参 考 文 献

［1］ 胡世华，陆钟万．数理逻辑基础（上，下册）．科学出版社，1981，1982

［2］ 王宪均．数理逻辑引论．北京大学出版社，1982

［3］ 莫绍揆．数理逻辑教程．华中工学院出版社，1982

［4］ *Barnes D W*, *Mack J M*. An Algebraic Introduction to Mathematical Logic. 1975

［5］ *Barwise J etc*. Handbook of Mathematical Logic. *North-Holland*, 1977

［6］ *Bell J etc*. A Course in Mathematical Logic. *North-Holland*, 1977

［7］ *Hamilton A G*. Logic for Mathematicians. *Cambridge University Press*, 1978

［8］ *Kneebone G T*. Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. 1963

［9］ *Malitz J*. Introduction to Mathematical Logic. *Springer-Verlag*, 1979

［10］ *Manin Y I*. A Course in Mathematical Logic. *Springer-Verlag*, 1977

［11］ *Mendelson E*. Introduction to Mathematical Logic. *Van Nostrand*, 1964

［12］ *Shoenfield J R*. Mathematical Logic. *Addison-Wesley*, 1967

［13］ Wang *H*. Popular Lectures on Mathematical Logic. *Bejing*, 1981